Федеральное агентство по образованию
АМУРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ГОУВПО «АмГУ»
Факультет математики и информатики

УТВЕРЖДАЮ
Зав. кафедрой МАиМ
Т.В. Труфанова
8 сентября 2008г.

Аналитическая теория полугрупп

Учебно – методический
комплекс дисциплины

Составитель: С.А.Подопригора

Благовещенск
2008

ББК

К

Печатается по решению
редакционно-издательского совета
факультета математики и
информатики
Амурского государственного
университета

Подопригора С.А.

Аналитическая теория полугрупп**.** Учебно – методический комплекс дисциплины для студентов очной формы обучения специальности 010101 «Математика». – Благовещенск: Амурский гос. ун–т, 2008. − 48с.

I. РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ

Рабочая программа по дисциплине "Аналитическая теория полугрупп" для специальности 010101 «Математика».

Курс 5 Семестр 9 Лекции 72 час., Экзамен 9 семестр, Практические (семинарские) занятия 36 час., Зачет (нет), Курсовая работа (нет), Лабораторные занятия (нет), Самостоятельная работа 56 час., Всего 164 часов.

Составитель: Подопригора С.А., старший преподаватель, факультет математики и информатики, кафедра математического анализа и моделирования.

1 ЦЕЛИ И ЗАДАЧИ ДИСЦИПЛИНЫ, ЕЕ МЕСТО В УЧЕБНОМ ПРОЦЕССЕ

1.1 Цель преподавания учебной дисциплины

Цель курса – изложение основных разделов аналитической теории полугрупп.

1.2 Перечень основных навыков и умений, приобретаемых при изучении дисциплины

Основная задача курса – изучить основные свойства функций экспоненциального типа в бесконечных функциональных пространствах и научиться применять полученные знания при решении прикладных задач математической физики, теории вероятностей, теории управления и др.

1.3 Перечень дисциплин, необходимых для изучения данной дисциплины

Для изучения данной дисциплины необходимы предварительные знания теории множеств, общей топологии, линейной алгебры, математического анализа и широко известных фактов теории гильбертовых, банаховых и локально выпуклых пространств.

2 СОДЕРЖАНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ

2.1 Федеральный компонент

Программа курса «Аналитическая теория полугрупп» составлена на основе авторских разработок.

2.2 *Наименование тем, их содержание, объем в часах лекционных занятий* – 72 часов

1. Функции комплексного переменного (4 ч.)
2. Спектральная теория в конечномерном пространстве (4 ч.)
3. Функции оператора (4 ч.)
4. Полугруппы операторов в банаховых пространствах (30 ч.)

Определение полугруппы и следствие для полугрупп с ограниченным логарифмом нормы. Полугруппы класса (Со) и их свойства. Равномерно непрерывные полугруппы. Полугруппы в гильбертовых пространствах. Эквивалентность слабой и сильной непрерывностей полугрупп.

5. Полугруппы операторов в локально выпуклых пространствах (30 ч.)

Равностепенно непрерывные полугруппы класса (Со).

Инфинитезимальный производящий оператор равностепенно непрерывной полугруппы класса (Со). Резольвента инфинитезимального производящего оператора. Примеры инфинитезимальных производящих операторов. Показательная функция непрерывного линейного оператора, степени которого равностепенно непрерывны. Представление равностепенно непрерывной полугруппы класса (Со) с помощью соответствующего инфинитезимального производящего оператора. Сжимающие полугруппы и диссциативные операторы. Равностепенно непрерывные группы класса (Co). Теорема Стоуна. Голоморфные полугруппы. Дробные степени замкнутых операторов. Сходимость последовательностей полугрупп.

2.3 Практические занятия, их содержание и объем в часах – 36 часов

1. Функции оператора.
2. Полугруппы класса (Co). Примеры.
3. Инфинитезимальный производящий оператор полугруппы класса (Co) и его свойства.
4. Порождение равномерно непрерывной полугруппы.
5. Свойства полугрупп в гильбертовых пространствах.
6. Полугруппы линейных непрерывных операторов в локально выпуклых пространствах.
7. Равностепенная непрерывность.
8. Преобразование Лапласа полугруппы.
9. Инфинитезимальный производящий оператор и его резольвента.
10. Операторная экспонента и представление равностепенно непрерывной полугруппы класса (Co).
11. Свойства сжимающих полугрупп и их генераторов.
12. Голоморфные полугруппы.

2.4 Самостоятельная работа студентов – 56 часов

1. Схемы порождения полугрупп: равномерно непрерывной класса (C_0), сжимающей класса (C_0), непрерывной класса (C_0), сопряженной, полугруппы унитарных операторов в гильбертовом пространстве.
2. Решение практических задач на схемы порождения.
3. Чтение основной литературы по предмету.
4. Подготовка к практическим занятиям.

5. Подготовка к контрольным работам.

2.5 Вопросы к экзамену

1. Определение полугруппы и основные свойства.
2. Полугруппы класса (Co).
3. Равномерно непрерывные полугруппы.
4. Теорема об эквивалентности сильной и слабой непрерывностей полугрупп.
5. Свойства полугрупп в гильбертовых пространствах.
6. Определение и примеры равностепенно непрерывной полугруппы класса (Co).
7. Теорема о замкнутости и плотной, определённости инфинитезимального производящего оператора равностепенно непрерывной полугруппы класса (Co).
8. Резольвента инфинитезимального производящего оператора равностепенно непрерывной полугруппы класса (Co) и её представление в виде преобразования Лапласа данной полугруппы.
9. Операторная экспонента.
10. Основная теорема о порождении равностепенно непрерывной полугруппы класса (Co).
11. Следствия из теоремы о порождении.
12. Сжимающие полугруппы и диссипативные операторы.
13. Равностепенно непрерывные группы класса (Co).
14. Голоморфные полугруппы.
15. Дробные степени замкнутых операторов.
16. Сходимость последовательностей полугрупп. Теорема Троттера-Като.
17. Сопряженные полугруппы. Теорема Филлипса.
18. Сжимающие полугруппы и диссипативные операторы.
19. Теорема Крендалла-Лиггетта.

20. Аппроксимация сжимающих полугрупп.

3 ТРЕБОВАНИЯ К ЗНАНИЯМ СТУДЕНТОВ, ПРЕДЪЯВЛЯЕМЫЕ НА ЭКЗАМЕНЕ

Оценка «отлично» ставится при полном изложении теоретического материала экзаменационного билета, ответах на дополнительные вопросы со свободной ориентацией в материале и других литературных источниках, при правильно выполненной практической части.

Оценка «хорошо» ставится при твердых знаниях студентом всех разделов курса (в пределах конспекта лекций) и при преимущественно правильно выполненной практической части (допускаются ошибки вычислительного характера, небольшие недочеты или неточности).

Оценку «удовлетворительно» студент получает, если дает неполные ответы на теоретические вопросы билета, показывая поверхностное знание учебного материала, владение основными понятиями и терминологией; при неверном ответе на билет или на дополнительные вопросы, при этом, по крайней мере, одно из практических заданий должно быть выполнено верно.

Оценка «неудовлетворительно» выставляется за незнание студентом одного из разделов курса, если студент не дает ответы на теоретические вопросы билета, показывая лишь фрагментарное знание учебного материала, незнание основных понятий и терминологии, либо если не решена ни одна задача из предлагаемых в билете.

4 РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

4.1 Основная литература

1. Иосида К. Функциональный анализ, - М.: Мир, 1967. - 624 с.

2. Однопараметрические полугруппы. Клемент Ф. И др. - М.: Мир, 1992. - 351 с.
3. Рудин У. Функциональный анализ. Издательство: Лань. - 2005. - 443 с.
4. Хилле В., Филлипс Р. Функциональный анализ и полугруппы. - М.: ИЛ, 1962.-829 с.
5. Данфорд Н., Шварц Дж. Т. Линейные операторы. Общая теория. Пер. с англ. Под ред. и с предисл. А. Г. Костюченко М.: Едиториал УРСС, 2004. 896 с.
6. Голдстейн Дж. Полугруппы линейных операторов и их приложения. — К.: Выща шк., 1989. — 348 с.

4.2 Дополнительная литература

1. Рисс Ф., Сёкефальви-Надь Б. Лекции по функциональному анализу. - М.: Мир, 1979.-587с.
2. Като Т. Теория возмущений линейных операторов. - М.: Мир, 1972. 470 с.

II. ГРАФИК САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ УЧЕБНОЙ РАБОТЫ СТУДЕНТОВ ПО ДИСЦИПЛИНЕ НА КАЖДЫЙ СЕМЕСТР С УКАЗАНИЕМ ЕЕ СОДЕРЖАНИЯ, ОБЪЕМА В ЧАСАХ, СРОКОВ И ФОРМ КОНТРОЛЯ

График самостоятельной работы определен пунктом 2.4 рабочей программы данной дисциплины.

III. МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ПО ПРОВЕДЕНИЮ СЕМИНАРСКИХ И ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ (РЕКОМЕНДУЕМАЯ ТЕМАТИКА И ВОПРОСЫ, ФОРМЫ ПРОВЕДЕНИЯ), САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ СТУДЕНТОВ

Самостоятельная работа студентов состоит в подготовке к лабораторным работам, практическим занятиям, контрольным работам. Вся рекомендуемая для этих целей литература указана в п. 4 Рабочей программы данной дисциплины. Также самостоятельная работа включает изучение темы «Схемы порождения полугрупп»; в рабочей программе указана литература, в которой представлено изложение данной темы. Возможно использование другой литературы. В случае возникновения вопросов проводятся консультации по обозначенному преподавателем графику.

IV. КРАТКИЙ КОНСПЕКТ ЛЕКЦИЙ (ПО КАЖДОЙ ТЕМЕ) ИЛИ ПЛАН-КОНСПЕКТ

Аналитическая теория полугрупп ограниченных линейных операторов, заданных в B-пространстве, изучает функции экспоненциального типа в бесконечномерных функциональных пространствах. Эта теория связана с задачей определения ограниченной операторнозначной функции $T(t)$, $t \geq 0$, удовлетворяющей уравнению

$$T(t+s) = T(t) \cdot T(s), \qquad T(0) = I.$$

Этой проблеме были посвящены исследования Хилле и Иосида, опубликованные в 1948 г.

Для решения этой задачи использовались понятие *инфинитезимального производящего оператора* A *полугруппы* $T(t)$, который определяется как

$$A = s - \lim_{t \downarrow 0} t^{-1}(T(t) - I).$$

Порождение полугруппы $T(t)$ оператором A изучалось в терминах спектральных свойств инфинитезимального оператора.

Основные результаты теории полугрупп, как будет далее показано, представляют собой естественное обобщение теорем Стоуна, относящихся к однопараметрической группе унитарных операторов в гильбертовом пространстве.

В этом курсе теория полугрупп непрерывных линейных операторов будет развита не только для банаховых пространств, но и для общих локально выпуклых линейных топологических пространств.

1. Полугруппы класса (C_0).

Предложение (Э.Хилле). Пусть X - некоторое B-пространство и $T_t \in L(X,X), t \geq 0$,однопараметрическое семейство операторов, обладающим следующим *полугрупповым свойством*:

$$T_t T_s = T_{t+s} \qquad \text{при всех} \quad t,s > 0. \tag{1}$$

Если для всякого положительного числа a функция $p(t) = \ln\|T_t\|$ ограничена сверху на интервале вида $(0,a)$, то

$$\lim_{t\to 0} t^{-1}\ln\|T_t\| = \inf_{t>0} t^{-1}\ln\|T_t\|. \tag{2}$$

Доказательство. Из неравенства $\|T_{t+s}\| = \|T_t T_s\| \leq \|T_t\|\cdot\|T_s\|$ следует, что $p(t+s) \leq p(t) + p(s)$. Пусть $\beta = \inf_{t>0} t^{-1}p(t)$. Очевидно, β либо конечно, либо равно $-\infty$. Допустим сейчас, что β - конечное число. Для произвольного $\varepsilon > 0$ выберем такое число $a > 0$, что $p(a) \leq (\beta+\varepsilon)a$. Возьмем произвольное значение t>0 и обозначим через n целое число, удовлетворяющее неравенству $na \leq t < (n+1)a$. Тогда

$$\beta \leq \frac{p(t)}{t} \leq \frac{p(na)}{t} + \frac{p(t-na)}{t} \leq \frac{na}{t}\frac{p(a)}{a} + \frac{p(t-na)}{t} \leq \frac{na}{t}(\beta+\varepsilon) + \frac{p(t-na)}{t}.$$

По предположению величина $p(t-na)$ ограничена сверху при $t\to\infty$. Полагая $t\to\infty$, мы выводим из последнего неравенства формулу $\beta = \lim_{t\to\infty} t^{-1}p(t)$. Случай, когда $\beta = -\infty$, рассматривается совершенно аналогично.

Определение 1. Пусть семейство операторов $\{T_t; t \geq 0\} \subseteq L(X,X)$ удовлетворяет условиям

$$T_t \cdot T_s = T_{t+s} \qquad \text{для всех} \quad t,s \geq 0,$$

(1’)

$$T_0 = I,$$

(3)

$$s-\lim_{t\to t_0} T_t x = T_{t_0} x \qquad \text{для любого} \quad t_0 \geq 0 \quad \text{и любого} \quad x \in X.$$

(4)

В этом случае мы будем называть семейство $\{T_t\}$ *полугруппой класса* (C_0).

С помощью доказанного выше предположения можно показать, что всякая полугруппа $\{T_t\}$ класса (C_0) подчиняется требованию

$$\|T\| \leq Me^{\beta t}, \qquad 0 \leq t < \infty,$$

(5)

где $M > 0$ и $\beta < \infty$ - некоторые постоянные.

Доказательство этого свойства совсем просто. Нужно только показать, что для всякого интервала вида $(0,a)$ $(\infty > a > 0)$ нормы $\|T_t\|$ ограничены при $t \in (0,a)$. Допустим противное и предположим, что существует такая последовательность $\{t_n\} \subseteq (0,a)$, что $\lim\limits_{n\to\infty} t_n = t_0 \leq a$ и $\|T_{t_n}\| > n$. Тогда, согласно теореме о резонансе, последовательность $\|T_{t_n} x\|$ должна оказаться неограниченной по крайней мере при каком-то одном $x \in X$, что противоречит условию сильной непрерывности (4).

Замечание. Умножая операторы семейства $\{T_t\}$ на множитель $e^{-\beta \cdot t}$, мы, очевидно, получим новую полугруппу класса (C_0), которая будет удовлетворять условию *равномерной ограниченности*

$$\|T_t\| \leq M \qquad \text{при} \qquad 0 \leq t < \infty.$$

(6)

Если, в частности, $M \leq 1$, т.е.

$$\|T_t\| \leq 1 \qquad \text{при} \qquad 0 \leq t < \infty,$$

(7)

то полугруппа $\{T_t\}$ называется *сжимающей полугруппой класса* (C_0).

Следующая теорема относиться к условию сильной непрерывности (4).

Теорема. Пусть семейство $\{T_t, t \geq 0\}$ операторов $T_t \in L(X,X)$ удовлетворяет требованиям (1’) и (3); тогда свойство (4) эквивалентно условию

$$\omega - \lim_{t \downarrow 0} T_t x = x \quad \text{для каждого} \quad x \in X. \tag{8}$$

Доказательство. Допустим, что условие (8) выполняется. Обозначим через x_0 произвольный фиксированный элемент пространства X. Покажем, что $s - \lim_{t \to t_0} T_{t_0} x_0 = T_{t_0} x_0$ при любом $t_0 \geq 0$. Для этого рассмотрим функцию $x(t) = T_t x_0$. Во всякой точке $t_0 \geq 0$ функция $x(t)$ слабо непрерывна справа, так как $\omega - \lim_{t \downarrow t_0} T_t x_0 = \omega - \lim_{h \downarrow 0} T_h T_{t_0} x_0 = T_{t_o} x_0$.Убедимся теперь в том, что нормы $\|T_t x_0\|$ ограничены в некоторой окрестности $t = 0$.В самом деле, если допустить противное, то должна существовать такая последовательность $\{t_0\}$, что $t_n \downarrow 0$ и $\lim_{n \to \infty} \|T_{t_n} x_0\| = \infty$; это противоречит следствию, условия которого ввиду слабой непрерывности функции $x(t) = T_t x_0$ справа выполняются. Следовательно, как показывает условие (1’), функция $T_t x_0 = x(t)$ ограничена на всяком бикомпактном множестве значений t. Более того, функция $x(t)$ оказывается слабо измеримой. Это вытекает из того, что всякая непрерывная справа вещественная функция $f(t)$ измерима по Лебегу; это можно показать, основываясь на том факте, что множество $\{t, f(t) < \alpha\}$ при любом значении α представляется в виде объединения интервалов с положительными длинами. Пусть $\{t_n\}$ - совокупность всех положительных рациональных чисел. Рассмотрим всевозможные конечные линейные комбинации вида $\sum_j \beta_j x(t_j)$, где β_j - рациональные числа (если X - комплексное линейное пространство, то в качестве β_j берутся числа вида $\beta_j = a_j + ib_j$ с рациональными a_j, b_j). Эти комбинации образуют счетное множество $M = \{x_n\}$, такое, что множество $\{x(t); t \geq 0\}$ содержится в сильном замыкании M. Действительно, предположив противное, мы нашли бы число

t', такое, что $x(t')$ не принадлежит M^a. Но множество M^a является замкнутым линейным подпространством пространства X, и поэтому оно слабо замкнуто. Поэтому предположение $x(t') \notin M^a$ противоречит слабой непрерывности справа функции $x(t)$, т.е. условию $x(t') = w - \lim\limits_{t_n \downarrow t'} x(t_n)$.

Теперь мы можем применить теорему Петтиса, и, следовательно, функция $x(t)$ оказывается сильно измеримой. Поскольку норма $\|x(t)\|$ ограничена на всяком бикомпактном множестве точек t, можно рассматривать интеграл Бохнера $\int\limits_{\alpha}^{\beta} x(t)dt$, для которого справедливо неравенство

$$\left\| \int\limits_{\alpha}^{\beta} x(t)dt \right\| \le \int\limits_{\alpha}^{\beta} \|x(t)\| dt \qquad \text{для всех } 0 \le \alpha \le \beta < \infty .$$

Интеграл $\int\limits_{\alpha}^{\beta} x(t+s)dt = \int\limits_{\alpha+s}^{\beta+s} x(t)dt$ сильно непрерывен по s, так как функция $x(t)$ ограничена по норме на всяком бикомпактном множестве значений t. Это свойство Данфорд использовал для доказательства сильной непрерывности функции $x(t)$ при $t > 0$. Мы будем здесь следовать доказательству Данфорда.

Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$ и выберем числа α, η, β и ξ так, чтобы $0 \le \alpha < \eta < \beta < \xi - \varepsilon < \xi$. Так как $x(\xi) = T_\xi x_0 = T_\eta T_{\xi-\eta} x_0 = T_\eta x(\xi - \eta)$, то

$$(\beta - \alpha) x(\xi) = \int\limits_{\alpha}^{\beta} x(\xi) d\eta = \int\limits_{\alpha}^{\beta} T_\eta x(\xi - \eta) d\eta .$$

Ввиду (1'),(3) и ограниченности $\|T_t\|$ в некоторой окрестности $t = 0$ справедливо неравенство $\sup\limits_{\alpha \le \eta \le \beta} \|T_\eta\| < \infty$. Поэтому из соотношения

$$(\beta - \alpha)\{x(\xi \pm \varepsilon) - x(\xi)\} = \int\limits_{\alpha}^{\beta} T_\eta \{x(\xi \pm \varepsilon - \eta) - x(\xi - \eta)\} d\eta$$

следует оценка

$$(\beta - \alpha)\|x(\xi \pm \varepsilon) - x(\xi)\| \le \sup\limits_{\alpha \le \eta \le \beta} \|T_\eta\| \cdot \int\limits_{\xi-\beta}^{\xi-\alpha} \|x(\tau \pm \varepsilon) - x(\tau)\| d\tau .$$

Правая часть последнего неравенства стремиться к нулю при $\varepsilon \downarrow 0$ - это нетрудно обнаружить, аппроксимируя $x(\tau)$ простыми функциями.

Мы установили, таким образом, сильную непрерывность функции $x(t)$ при $t > 0$.

Теорема 1. Множество D(A) плотно в пространстве *X*.

Доказательство. Положим $\varphi_n(s) = ne^{-ns} \quad ,n > 0$. Рассмотрим умноженное на *n* преобразование Лапласа функции T_s

$$C_{\varphi_n} x = \int_0^\infty \varphi_n(s) T_s x dx \quad \text{для} \quad x \in X \tag{2}$$

где интеграл понимается в смысле Римана. Обычная конструкция интеграла Римана от числовых функций может быть перенесена на функции со значениями из локально выпуклого секвенциально полного пространства X, если вместо абсолютной величины числа использовать определенные на X непрерывные полунормы *p*.

Сходимость несобственного интеграла следует из равностепенной непрерывности полугруппы T_t, соотношения

$$p(\varphi_n(s) T_s x) = ne^{-ns} p(T_s x)$$

и секвенциальной полноты пространства X.

Из неравенства

$$p(C_{\varphi_n} x) \le \int_0^\infty ne^{-ns} p(T_s x) ds \le \sup_{s \ge 0} p(T_s x)$$

можно заключить, что C_{φ_n} — это непрерывный линейный оператор, принадлежащий L(X, X). Покажем, что

$$R(C_{\varphi_n}) \subseteq D(A) \qquad \text{для любого} \qquad n > 0$$

(3)

и

$$\lim_{n \to \infty} C_{\varphi_n} x = x \qquad \text{при всех} \qquad x \in X$$

(4)

Из этого, очевидно, будет следовать, что множество $\bigcap_{n=1}^{\infty} R(C_{\varphi_n})$ и тем более область D(A) плотны в *X*.

Для доказательства утверждения (3) мы используем формулу

$$h^{-1}(T_h - 1)C_{\varphi_n} x = h^{-1}\int_0^\infty \varphi_n(s) T_h T_s x ds - h^{-1}\int_0^\infty \varphi_n(s) T_s x ds .$$

Линейность и непрерывность оператора T_h, позволяют изменять порядок операций в форме $T_h \int_0^\infty \dots = \int_0^\infty T_h \cdots$, поэтому

$$h^{-1}(T_h - 1)C_{\varphi_n} x = h^{-1}\int_0^\infty \varphi_n(s) T_{s+h} x ds - h^{-1}\int_0^\infty \varphi_n(s) T_s x ds = \frac{e^{nh} - 1}{h} n\int_h^\infty e^{-n\sigma} T_\sigma x d\sigma - \frac{1}{h} n\int_0^h e^{-ns} T_s x ds$$

$$= \frac{e^{nh} - 1}{h}\left\{ C_{\varphi_n} x - \int_0^h n e^{-n\sigma} T_\sigma x d\sigma \right\} - \frac{1}{h}\int_0^h \varphi_n(s) T_s x ds$$

Выражение $\varphi_n(s) T_s x$ непрерывно по s, значит второе слагаемое в правой части последнего выражения стремится к $-\varphi_n(0) T_0 x = nx$ при $h \downarrow 0$. Эти же соображения показывают, что первое слагаемое в правой части стремится к $nC_{\varphi_n} x$ при $h \downarrow 0$. Следовательно $nC_{\varphi_n} x$ принадлежит D(A) и

$$AC_{\varphi_n} x = n(C_{\varphi_n} - 1)x \quad , \quad x \in X \tag{5}$$

Теперь выведем формулу (4). Так как $\int_0^\infty n e^{-ns} ds = 1$, то

$$C_{\varphi_n} x - x = n\int_0^\infty e^{-ns}(T_s x - x) ds ,$$

$$p(C_{\varphi_n} x - x) \le n\int_0^\infty e^{-ns} p(T_s x - x) ds = n\int_0^\delta \dots + n\int_\delta^\infty \dots = J_1 + J_2$$

где $\delta > 0$ — произвольное положительное число. Для любого ε >O мы, поскольку функция $T_s x$ непрерывна по s, можем выбрать δ > O, такое, что $p(T_s x - x) ds \le \varepsilon$ при $0 \le s \le \delta$. Поэтому

$$J_1 \le \varepsilon n\int_0^\delta e^{-ns} ds \le \varepsilon n\int_0^\infty e^{-ns} ds = \varepsilon$$

При фиксированном значении δ >О

$$J_2 \le n\int_0^\infty e^{-ns}(p(T_s x) + p(x))ds$$

при $n \uparrow \infty$

так как множество $\{T_s x\}$ равномерно ограничено при s>0. Отсюда и вытекает справедливость соотношения (4).

Определение. Определим для полугруппы операцию дифференцирования D_t формулой

$$D_t T_t x = \lim_{h\to 0} h^{-1}(T_{t+h} - T_t)x,$$

имея в виду те значения $x \in X$, при которых предел, написанный в правой части, существует.

Теорема 2. Если $x \in D(A)$, то $x \in D(D_t T_t)$ и

$$D_t T_t x = AT_t x = T_t Ax, \qquad t \ge 0$$

(7)

Таким образом, оператор А перестановочен с оператором T_t, или, как говорят, операторы А и T *коммутируют* друг с другом.

Доказательство, Если $x \in D(A)$, то. поскольку оператор T_t непрерывен,

$$T_t Ax = T_t \lim_{h\downarrow 0} h^{-1}(T_h - 1)x = \lim_{h\downarrow 0} h^{-1}(T_t T_h - T_t)x = \lim_{h\downarrow 0} h^{-1}(T_{t+h} - T_t)x = \lim_{h\downarrow 0} h^{-1}(T_h - 1)T_t x = AT_t x$$

.

Следовательно, если $x \in D(A)$, то $T_t x \in D(A)$ и $T_t Ax = AT_t x = \lim_{h\downarrow 0} h^{-1}(T_{t+h} - T_t)x$.

Мы, таким образом, показали, что правая производная от $T_t x$ (в смысле определения (6)) существует при всех $x \in D(A)$. Теперь мы убедимся в том, что и левая производная тоже существует и совпадает с правой производной.

С этой целью выберем произвольный функционал $f_0 \in X'$. Тогда из приведенных выше рассуждений следует, что при всяком фиксированном значении *x* числовая функция $f_0(T_t x) = \langle T_t x, f_0 \rangle$ непрерывна по t при $t \ge 0$ и обладает правой производной $\frac{d^+ f_0(T_t x)}{dt}$, равной значению

$f_0(AT_t x) = f_0(T_t Ax)$. Отсюда мы заключаем, что производная $\dfrac{d^+ f_0(T_t x)}{dt}$ непрерывна по *t.* Ниже доказывается известная

Лемма. Если хотя бы одно из производных чисел

$$\overline{D}^+ f(t),\ \underline{D}^+ f(t),\ \overline{D}^- f(t),\ \text{или}\ \underline{D}^- f(t)$$

непрерывной вещественной функции f(t) является конечной непрерывной функцией от *t,* то f(t) дифференцируема и ее производная непрерывна и совпадает со значениями $\overline{\underline{D}}^{\pm} f(t)$

Применяя эту лемму, мы видим, что функция $f_0(T_t x)$ дифференцируема по *t* и

$$f_0(T_t x - x) = f_0(T_t x) - f_0(T_0 x) = \int_0^t \left({d^+ f_0(T_s x)}\big/{ds}\right) ds = \int_0^t f_0(T_s Ax) ds = f_0\left(\int_0^t T_s Axds\right)$$

Так как функционал $f_0 \in X'$ был взят совершенно произвольно, то отсюда вытекает, что

$$T_t x - x = \int_0^t T_s Axds \quad \text{для каждого } x \in D(A).$$

Функция $T_s Ax$ непрерывна по *s,* и поэтому последнее равенство означает, что выражение $T_t x$ дифференцируемо по t в топологии пространства *X* и

$$D_t T_t x = \lim_{h \to 0} \int_t^{t+h} T_s Axds = T_t Ax.$$

Утверждение (7) тем самым доказано.

Доказательство леммы. Покажем вначале, что условие $\overline{D}^+ f(t) \geq 0$ при $a \leq t \leq b$ влечет за собой неравенство $f(b) - f(a) \geq 0$. Допустим противное, пусть $f(b) - f(a) < -\varepsilon(b-a)$, где $\varepsilon > 0$ некоторое фиксированное положительное число. Тогда для функции $g(t) = f(t) - f(a) + \varepsilon(t-a)$ справедливо неравенство $\overline{D}^+ g(a) = \overline{D}^+ f(a) + \varepsilon > 0$, а так как $g(a) = 0$, то при некотором значении $t_0 > a$, лежащем вблизи точки *a,* $g(t_0) > 0$. Поскольку функция *g(t)* непрерывна и *g* (b) < 0. найдется такое значение t_1

$(a < t_0 < t_1 < b)$, что $g(t_1) = 0$ и $g(t)<0$ при $t_1 < t < b$. Значит, $\overline{D}^- g(t_1) \le 0$, что противоречит условию $\overline{D}^+ g(t_1) = \overline{D}^+ f(t_1) + \varepsilon > 0$

Применяя далее аналогичные рассуждения к функциям вида $f(t) - \alpha t$ и $\beta t - f(t)$, мы приходим к следующему заключению: если одно из выражений $\overline{\underline{D}}^{\pm} f(t)$ удовлетворяет неравенствам $\alpha \le \overline{\underline{D}}^{\pm} f(t) \le \beta$ а на некотором сегменте $[t_1, t_2]$, то $\alpha \le (f(t_2) - f(t_1)) / (t_2 - t_1) \le \beta$. Следовательно, точные верхние и нижние грани функций $\overline{\underline{D}}^{\pm} f(t)$ на любом отрезке вида $[t_1, t_2]$ одинаковы. Это и приводит к заключению о том, что если для непрерывной вещественной функции *f (t)* хотя бы одно из четырех выражений $\overline{\underline{D}}^{\pm} f(t)$ непрерывно на сегменте $[t_1, t_2]$, то все четыре производных числа совпадают и равны производной *f'(t),* что и требовалось доказать.

4. Резольвента инфинитезимального производящего оператора A

Теорема 1. Оператор $(nI - A)$ при значениях $n > 0$ обладает обратным оператором $R(n; A) = (nI - A)^{-1} \in L(X, X)$, и

$$R(n; A)x = \int_0^\infty e^{-ns} T_s x ds \qquad \text{при всех} \qquad x \in X$$

(1)

Иными словами, все вещественные положительные числа принадлежат резольвентному множеству ρ (A) оператора A.

Доказательство. Убедимся сначала в том, что оператор $(nI-A)^{-1}$ существует. Для этого допустим, что имеется такой элемент $x_0 \ne 0$ что $(nI-A)x_0=0$, т. е. $Ax_0=nx_0$. Возьмем непрерывный линейный функционал $f_0 \in X'$, такой, что $f_0(x_0)=1$, и положим $\varphi(t) = f_0(T_t x_0)$. По теореме 2 предыдущего параграфа функция $\varphi(t)$ дифференцируема, так как по предположению $x_0 \in D(A)$, и

$$\frac{d\varphi(t)}{dt} = f_0(D_t T_t x_0) = f_0(T_t A x_0) = f_0(T_t n x_0) = n\varphi(t).$$

Если мы решим это дифференциальное уравнение при начальном условии $\varphi(0) = f_0(x_0) = 1$, то получим $\varphi(t) = e^{nt}$. Но функция $\varphi(t) = f_0(T_t x_0)$ ограничена по t, так как выражение $T_t x_0$ равномерно ограничено при $t \geq 0$, а функционал f_0 непрерывен. Полученное противоречие показывает, что обратный оператор $(nI\text{-}A)^{-1}$ должен существовать.

По формуле (5) предыдущего параграфа $AC_{\varphi_n} x = n(C_{\varphi_n} - 1)x$, и поэтому $(nI - A)C_{\varphi_n} x = nx$ для всех $x \in X$. Оператор (nI-A) отображает, таким образом, область $R(C_{\varphi_n}) \subseteq D(A)$ на все пространство X взаимно однозначно. Поэтому тем более этот оператор отображает множество D(A) на пространство X однозначно в обе стороны, так как обратный оператор $(nI\text{-}A)^{-1}$, как было показано, существует. Следовательно, $R(C_{\varphi_n}) = D(A)$. Теорема доказана.

Следствие 1. Правая полуплоскость комплексной λ-плоскости является резольвентным множеством ρ (A) оператора A, и

$$R(\lambda; A)x = (\lambda I - A)^{-1} x = \int_0^\infty e^{-\lambda t} T_t x dt$$

при $\operatorname{Re}(\lambda) > 0$ и любом $x \in X$. (2)

Доказательство. При фиксированном вещественном значении τ операторы $\{e^{-i\tau t} T_t ; t \geq 0\}$ образуют равностепенно непрерывную полугруппу класса (C_0). Инфинитезимальный производящий оператор этой полугруппы, как нетрудно заметить, равен $(A - i\tau I)$. Поэтому для любого $\sigma > 0$ резольвента $R(\sigma + i\tau; A) = ((\sigma + i\tau)I - A)^{-1}$ существует и

$$R((\sigma + i\tau)I - A)x = \int_0^\infty e^{-(\sigma + i\tau)s} T_s x ds \quad \text{при всех } x \in X. \qquad (2')$$

Следствие 2. Имеют место следующие утверждения:

$D(A) = R((\lambda I - A)^{-1}) = R(R(\lambda; A))$ при $\operatorname{Re}(\lambda) > 0$ (3)

$AR(\lambda; A)x = R(\lambda; A)Ax = (\lambda R(\lambda; A) - I)x$ при $x \in D(A)$ (4)

$AR(\lambda; A)x = (\lambda R(\lambda; A) - I)x$ для всех $x \in X$, (5)

$$\lim_{\lambda\to\infty}\lambda R(\lambda\,;A)x = x \text{ при } x\in X. \qquad (6)$$

Доказательство. Эти утверждения с очевидностью вытекают из условия (4) предыдущего параграфа и определения резольвенты $R(\lambda\,;A)x = (\lambda I - A)^{-1}$.

Следствие 3. Инфинитезимальный производящий оператор А обладает следующим свойством:

если $x_h \in D(A)$ и $\lim\limits_{h\to\infty} x_h = x\in X$, $\lim\limits_{h\to\infty} Ax_h = y\in X$

то $x\in D(A)$ и Ах=у.

В этом смысле оператор А можно назвать замкнутым оператором (ср. гл. II, § 6).

Доказательство. Положим (I-A)x_h=z_h. Тогда $\lim\limits_{h\to\infty} z_h = x - y$. Отсюда, вследствие непрерывности оператора $(I-A)^{-1}$,

$$\lim_{h\to\infty}(I-A)^{-1}z_h = (I-A)^{-1}(x-y)).$$

т.е. $x = (I-A)^{-1}(x-y)$, $(I-A)x = x - y$.Это и показывает, что у=Ах.

Теорема 2. Семейство операторов

$$\left\{(\lambda R(\lambda\,;A))^n\right\} \qquad (7)$$

равностепенно непрерывно относительно значений $\lambda > 0$ и n=1,2,....

Доказательство. Из резольвентного уравнения

$$R(\mu\,;A) - R(\lambda\,;A) = (\lambda - \mu)R(\mu\,;A)R(\lambda\,;A)$$

учитывая, что, как показывает условие (2), $\lim\limits_{\mu\to\lambda}(\mu\,;A)y = R(\lambda\,;A)y$ $(y\in X)$ мы.э-0 получаем

$$\lim_{\mu\to\lambda}(\mu-\lambda)^{-1}(R(\mu\,;A) - R(\lambda\,;A)) = dR(\lambda\,;A)x/d\lambda = -R(\lambda\,;A)^2 x, \; x\in X$$

Следовательно, резольвента $R(\lambda;A)x$ бесконечно дифференцируема по λ при Re(λ)>0 и

$$d^n R(\lambda;A)x/d\lambda^n = (-1)^n n! R(\lambda\,;A)^{n+1}x, \text{ (n=1, 2,...)} \qquad (8)$$

С другой стороны, дифференцируя равенство (2) п раз по λ, мы видим, что

$$d^n R(\lambda; A)x / d\lambda^n = \int_0^\infty e^{-\lambda t}(-t)^n T_t x dt \qquad (9)$$

Дифференцирование под знаком интеграла в (9) оправдано, так как семейство [T_t x] равномерно ограничено по t и $\int_0^\infty e^{-\lambda t} - t^n T_t x dt = (n!)/\lambda^{n+1}$ и при Re(λ)>0. Таким образом,

$$\left(\lambda R(\lambda; A)\right)^{n+1} x = \frac{\lambda^{n+1}}{n!}\int_0^\infty e^{-\lambda t} t^n T_t x dt$$

для всех $x \in X$ и Re(λ)>0, (10)

и поэтому для всякой непрерывной на X полунормы p и произвольных λ >0, п>0

$$p\left((\lambda R(\lambda; A))^{n+1} x\right) \leq \frac{\lambda^{n+1}}{n!}\int^\infty e^{-\lambda t} t^n dt \cdot \sup_{t\geq 0} p(T_t x). \qquad (11)$$

Отсюда ввиду равностепенной непрерывности семейства {T_t} и следует справедливость теоремы 2.

5. Примеры инфинитезимальных производящих операторов

В дальнейшем нам потребуется определенный для любого п>0 оператор

$$J_n = (I - n^{-1}A)^{-1} = nR(n; A), \qquad (1)$$

для которого, очевидно, выполняется условие

$$AJ_n = n(J_n - I) \qquad (2)$$

Пример 1. Рассмотрим полугруппу операторов вида (T_t x)(s)=x(t+s), определенных на пространстве $C[0,\infty]$. Полагая

$$y_n(s) = (J_n x)(s) = n\int_0^\infty e^{-nt} x(t+s)dt = n\int_0^\infty e^{-n(t-s)} x(t)dt$$

получаем

$$y_n'(s) = -ne^{-n(s-s)}x(s) + n^2\int_0^\infty e^{-n(t-s)}x(t)dt = -nx(s) + ny_n(s).$$

Сравнивая полученное равенство с общей формулой (2)

$(AJ_n x)(s) = n\big((J_n - I)x\big)(s)$,

мы находим, что $Ay_n(s)=y'_n(s)$. Поскольку $R(J_n)=R(R(n;A))=D(A)$, отсюда следует, что

$Ay(s)=y'(s)$ при любом $y \in D(A)$.

Обратно, пусть теперь обе функции $y(s)$ и $y'(s)$ принадлежат пространству $C[0,\infty]$. Покажем, что $y \in D(A)$ и $Ay(s)=y'(s)$. С этой целью определим с помощью соотношения

$y'(s)-ny(s)=-пx(s)$

вспомогательную функцию $x(s)$. Полагая $(J_n\ x)(s)=y_n(s)$, мы, согласно полученным выше результатам, получим равенство

$y_n'(s)-ny_n(s)=-пx(s)$

Значит, функция $\omega(s) = y(s) - y_n(s)$ удовлетворяет уравнению $\omega'(s) = n\omega(s)$, и поэтому $\omega(s) = Ce^{ns}$. Но функция ω должна принадлежать $C[0,\infty]$, а это может быть только при значении $C=0$, Следовательно, $y(s)=y_п(s)\in D(A)$ и $Ay(s)=y'(s)$.

Таким образом, область определения $D(A)$ оператора A совпадает с множеством всех функций $y \in C(0,\infty)$, первые производные которых также принадлежат пространству $C[0,\infty]$, и для таких функций $Ay=y'$. Это означает, что дифференциальный оператор d/ds представляет собой инфинитезимальный производящий оператор полугруппы заданных на функциональном пространстве $C[0,\infty]$ операторов сдвига по аргументу t

Пример 2. Мы покажем сейчас, что оператор двукратного дифференцирования d^2/ds^2 является инфинитезимальным производящим оператором полугруппы интегральных операторов с гауссовским ядром. Рассмотрим пространство $C[-\infty,\infty]$ и определим следующим образом операторы T_t:

$$(T_t x)(s) = (2\pi t)^{1/2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(s-v)\ /2t} x(v)dv \quad \text{при } t>0,$$

$$(T_t x)(s) = x(s), \text{ когда } t=0.$$

Вводя переменную σ по формуле $t = \sigma^2/n$, мы находим

$$y_n(s) = (J_n x)(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(v)\left[\int_0^{\infty} n(2\pi t)^{-1/2} e^{-nt-(s-v)^2/2t} dt\right]dv =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x(v)\left[2\sqrt{n}\int_0^{\infty} (2\pi)^{-1/2} e^{-\sigma^2 - n(s-v)^2/2\sigma^2} d\sigma\right]dv.$$

Воспользовавшись формулой

$$\int_0^{\infty} e^{-(\sigma^2 + c/\sigma^2)} d\sigma = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-2c}, \quad c = \frac{\sqrt{n}|s-\upsilon|}{\sqrt{2}} > 0 \qquad (3)$$

вывод которой мы приведем позже, получаем

$$y_n(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\upsilon)(n/2)^{1/2} e^{-\sqrt{2n}|s-\upsilon|} d\upsilon \ .$$

Так как функция $x(\upsilon)$ по предположению непрерывна и ограничена, мы можем дважды продифференцировать $y_n(s)$ под знаком интеграла:

$$y_n'(s) = n\int_s^{\infty} x(\upsilon)e^{-\sqrt{2n}(\upsilon - s)}d\upsilon - n\int_{-\infty}^{s} x(\upsilon)e^{-\sqrt{2n}(s-\upsilon)}d\upsilon \ ,$$

$$y_n''(s) = n\Big\{-x(s) - x(s) + \sqrt{2}\sqrt{n}\int_s^{\infty} x(\upsilon)e^{-\sqrt{2n}(\upsilon - s)}d\upsilon +$$

$$+ \sqrt{2}\sqrt{n}\int_{-\infty}^{s} x(\upsilon)e^{-\sqrt{2n}(s-\upsilon)}d\upsilon\Big\} = -2nx(s) + 2ny_n(s)$$

Сравнивая полученные выражения с общей формулой (2)

$(Ay_n)(s) = (AJ_n x)(s) = n((J_n - I)x)(s) = n(y_n(s) - x(s))$,

мы находим, что $Ay_n(s) = y_n''(s)/2$. Таким образом, поскольку $R(J_n) = R(R(n;A)) = D(A)$, мы доказали, что $Ay(s) = y''(s)/2$ для всякой функции $y \in D(A)$. Обратно, допустим теперь, что функция $y(s)$ и ее вторая производная $y''(s)$ принадлежат пространству $C[-\infty,+\infty]$. Введем вспомогательную функцию $x(s)$:

$$y''(s) - 2ny(s) = -2nx(s)$$

Полагая $y_n(s) = (J_n x)(s)$, мы, как показано выше, получаем

$$y''(s) - 2ny(s) = -2nx(s)$$

Тогда функция $\omega(s) = y(s) - y_n(s)$ удовлетворяет уравнению $\omega''(s) - 2n\omega(s) = 0$ и поэтому $\omega(s) = C_1 e^{\sqrt{2n}s} + C_2 e^{-\sqrt{2n}s}$. Функция $\omega(s)$ по предположению должна быть ограниченной в промежутке $(-\infty;+\infty)$, а это возможно только в том случае, когда C_1, и C_2 равны нулю. Отсюда вытекает, что $y(s) = y_n(s)$, и поэтому $y \in D(A)$, $(Ay)(s) = y''(s)/2$.

Итак, дифференциальный оператор $\frac{1}{2}\frac{d^2}{ds^2}$ представляет собой

инфинитезимальный производящий оператор полугруппы определенных

на функциональном пространстве $C[-\infty;+\infty]$ интегральных операторов с

ядром

типа плотности вероятности гауссовского распределения.

Вывод формулы (3). Известно, что

$$\int_0^\infty e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi}/2.$$

Введем в этот интеграл новую переменную интегрирования σ. $x = \sigma - c/\sigma$. Тогда получится соотношение

$$\sqrt{\pi}/2 = \int_{\sqrt{c}}^\infty e^{-(\sigma - c/\sigma)^2}(1 + c/\sigma^2)d\sigma = e^{2c}\int_{\sqrt{c}}^\infty e^{-(\sigma^2 + c^2/\sigma^2)}(1 + c/\sigma^2)d\sigma$$

$$= e^{2c}\left\{\int_{\sqrt{c}}^\infty e^{-(\sigma^2 + c^2/\sigma^2)}d\sigma + \int_{\sqrt{c}}^\infty e^{-(\sigma^2 + c^2/\sigma^2)}\frac{c}{\sigma^2}d\sigma\right\}$$

Полагая в последнем интеграле $\sigma = c/t$ мы и находим, что

$$\frac{\sqrt{\pi}}{2} = e^{2c}\left\{\int_{\sqrt{c}}^\infty e^{-(\sigma^2 + c^2/\sigma^2)}d\sigma - \int_{\sqrt{c}}^0 e^{-(c^2/t^2 + t^2)}dt\right\} = e^{2c}\int_0^\infty e^{-(c^2/t^2 + t^2)}dt$$

Упражнение. Показать, что для полугруппы $\{T_t\}$ определенных на пространстве $C[-\infty;\infty]$ операторов

$$(T_t x)(s) = e^{-\lambda t}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\lambda t)^{\kappa}}{\kappa!}x(s-\kappa\mu),\quad (\lambda,\mu > 0)$$

инфинитезимальным производящим оператором служит оператор A вида

$$(Ax)(s) = \lambda[x(s-\mu) - x(s)],$$

который называется разностным оператором.

6. Показательная функция непрерывного линейного оператора, степени которого равностепенно непрерывны

Предложение. Рассмотрим локально выпуклое секвенциально полное линейное топологическое пространство X. Пусть линейный оператор $B \in L(X, X)$, и предположим, что степени этого оператора, образующие семейство $\{B^{\kappa}; \kappa = 1,2,\ldots\}$, равностепенно непрерывны. Тогда для каждого элемента $x \in X$ ряд

$$\sum_{\kappa=0}^{\infty}(k!)^{-1}(tB)^k x \qquad (t \geq 0) \tag{1}$$

сходится.

Доказательство. Для всякой непрерывной на X полунормы p, согласно допущениям, сделанным относительно свойств операторов B^k существует непрерывная определенная на пространстве X полунорма q такая, что

$p(B^k x) \leq q(x)$ для всех $k > 0$ и всех $x \in X$.

Следовательно,

$$p\Big(\sum_{k=n}^{m}(tB)^k x/k!\Big) \leq \sum_{k=n}^{m} t^k p(B^k x)/k! \leq q(x)\sum_{k=n}^{m} t^k/k!.$$

Таким образом, последовательность частичных сумм $\{\sum_{k=0}^{m}(tB)^k x/k!\}$

фундаментальна, а так как пространство X секвенциально полно по предположению, то эта последовательность сходится. Предел этой последовательности и представляет собой сумму ряда (1),

Следствие 1. Отображение $x \to \sum_{k=0}^{\infty} (tB)^k x / k!$ определяет при

при каждом значении $t \geq 0$ непрерывный линейный оператор. Мы обо' значим этот оператор через $\exp(tB)$.

Доказательство. Используя равностепенную непрерывность семейства $\{B^k\}$, нетрудно показать, что операторы $B_n = \sum_{k=0}^{n} (tB)^k / k!$ равностепенно (относительно t) непрерывны при изменении t на любом бикомпактном множестве числовой оси. В самом деле.

$p(B_n x) \leq \sum_{k=0}^{n} t^k p(B^k x) / k! \leq q(x) \sum_{k=0}^{n} t^k / k! \leq e^t q(x)$.

Поэтому и предел $\exp(tB)$ последовательности $\{B_n\}$ [B^] удовлетворяет Неравенству

$$p(\exp(tB)x) \leq \exp(t) q(x) \qquad (t \geq 0). \qquad (2)$$

а это говорит о непрерывности оператора $\exp(tB)$.

Следствие 2. Рассмотрим два оператора B и C, принадлежащих $L\{X, X\}$, степени которых образуют равностепенно непрерывные семейства $\{B^k\}$ и $\{C^k\}$. Пусть, кроме того, $BC = CB$. Тогда

$$\exp(tB) * \exp(tC) = \exp(t(B + C)). \qquad (3)$$

Доказательство. Очевидно, что

$p((B + C)^k x) \leq \sum_{s=0}^{k} C_k^s p(B^{k-s} C^s x) \leq \sum_{s=0}^{k} C_k^s q(C^s x) \leq 2^k \sup q(C^s x)$.

Следовательно, операторы семейства $\{2^{-k} (B + C)^k\}$ равностепенно непрерывны, и поэтому можно определить функцию $\exp(t(B + C))$. Используя теперь свойство перестановочности $BC = CB$, мы можем представить ряд

$\sum_{k=0}^{\infty} (t(B + C))^k x / k!$

в виде$\left(\sum_{k=0}^{\infty}(tB)^k/k!\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty}(tC)^k x/k!\right)$, как и в случае обычных числовых рядов

вида

$\sum_{k=0}^{\infty}(t(b+c))^k/k!$

Следствие 3. Для всякого элемента $x\in X$

$$\lim h^{-1}(\exp(hB)-I)x=Bx. \qquad (4)$$

Поэтому, используя полугрупповое свойство

$$\exp((t+h)B)=\exp(tB)\exp(hB), \qquad (5)$$

справедливость которого следует из предыдущих рассуждений, мы можем определить оператор дифференцирования

$$D_t\exp(tB)x=\exp(tB)Bx=B\exp(tB)x. \qquad (6)$$

Доказательство. Как и раньше, для произвольной непрерывной на X полунормы p мы получаем неравенство

$$p(h^{-1}(\exp(hB)-I)x-Bx)\le\sum_{k=2}^{\infty}h^{k-1}p(B^k x)/k!\le q(x)\sum_{k=2}^{\infty}h^{k-1}/k!,$$

где q некоторая непрерывная полунорма. Выражение, стоящее здесь справа, стремится к нулю при $h\downarrow 0$, что и доказывает наше утверждение.

7. Представление равностепенно непрерывной полугруппы класса (C_0) с помощью соответствующего инфинитезимального производящего оператора

Докажем следующую основную теорему.

Теорема. Предположим, что локально выпуклое линейное топологическое пространство X секвенциально полно. Рассмотрим линейный оператор A с плотной в X областью определения $D(A)$ и областью значений $R(A)\subseteq X$. Допустим, что при $x=1,2,\ldots$ существует резольвента $R(n;A)=(nI-A)^{-1}\in L(X,X)$. Тогда, для того чтобы оператор A был инфинитезимальным производящим оператором некоторой единственным образом определенной равностепенно непрерывной полугруппы класса (C_0). необходимо и достаточно, чтобы операторы семейства $\{(I - n^{-1}A)^{-m}\}$ были равностепенно непрерывны относительно значений n=1,2,….

Доказательство. Необходимость условий уже доказана. Перейдем к доказательству достаточности. Введем оператор

$J_n = (I - n^{-1}A)^{-1}$ (1)

и покажем, что при выполнении условий теоремы

$\lim_{n\to\infty} J_n x = x$ для любого $x \in X$. (2)

Действительно, для $x \in D(A)$ имеем $AJ_n x = J_n Ax = n(J_n - I)x$, и поэтому выражение $J_n x - x = n^{-1}J_n(Ax)$ стремится к нулю при $n \to \infty$, так как множество $\{J_n(Ax)\}$ равномерно ограничено относительно значений n =1,2,…. Поскольку область $D(A)$ плотна в X и операторы семейства $\{J_n\}$ равностепенно (относительно n) непрерывны, $\lim_{n\to\infty} J_n x = x$ для всякого $x \in X$.

Положим

$T_t^{(n)} = \exp(tAJ_n) = \exp(tn(J_n - I)) = \exp(-nt)\exp(ntJ_n), t \geq 0$. (3)

Множество $\{J_n^k\}$ степеней операторов J_n равномерно (относительно n и k) ограниченно, поэтому можно определить выражение вида $\exp(tnJ_n)$. Следовательно, согласно теореме (2) предыдущего параграфа,

$$p(\exp(ntJ_n)x) \leq \sum_{k=0}^{\infty} (nt)^k (k!)^{-1} p(J_n^k x) \leq \exp(nt) * q(x).$$

Это означает, что операторы семейства $\{T_t^{(n)}\}$ равностепенно непрерывны при $t \geq 0$ и n =1,2,…, т. е.

$p(T_t^{(n)}x) \leq q(x)$. (4)

Заметим теперь, что $J_n J_m = J_m J_n$ при n, m >0. Таким образом, оператор J_n перестановочен с любым оператором $T_t^{(m)}$. Поэтому, используя равенство $D_t T_{tt}^{(n)} x = AJ_n T_t^{(n)} x = T_t^{(n)} AJ_n x$, вытекающее из результатов предыдущего параграфа, мы получаем

$$p(T_t^{(n)}x - T_t^{(m)}x) = p\left(\int_0^t D_s(T_{t-s}^{(m)}T_s^{(n)}x)ds\right) = p\left(\int_0^t T_{t-s}^{(m)}T_s^{(n)}(AJ_n - AJ_m)xds\right).$$

(5)

Отсюда следует, что существует непрерывная на X полунорма $\tilde{q}$, такая, что

$$p(T_t^{(n)}x - T_t^{(m)}x) \le \int_0^t \tilde{q}((AJ_n - AJ_m)x)ds = t\,\tilde{q}((J_n A - J_m A)x).$$

Поэтому, учитывая доказанное выше равенство (2), мы приходим к выводу, что равномерно относительно значений t, изменяющихся на любом фиксированном бикомпактном множеством числовой оси,

$$\lim_{n,m\to\infty} p(T_t^{(n)}x - T_t^{(m)}x) = 0.$$

Так как область $D(A)$ плотна в секвенциально полном пространстве X, а операторы семейства $\{T_t^{(n)}\}$ равномерно непрерывны относительно $t \ge 0$, принадлежащих любому фиксированному бикомпактному множеству числовой оси, существует предел $\lim_{n\to\infty} T_t^{(n)}x = T_t x$. Поэтому семейство $\{T_t\}$ равностепенно непрерывно при $t \ge 0$, и в связи с установленной равномерной (относительно t) сходимостью выражение $T_t x$ непрерывно по t при $t \ge 0$.

Покажем теперь, что операторы T_t обладают полугрупповым свойством $T_t T_s = T_{t+s}$. Из равенства $T_{t+s}^{(n)} = T_t^{(n)}T_s^{(n)}$ мы выводим неравенство

$$p(T_{t+s}x - T_tT_sx) \le p(T_{t+s}x - T_{t+s}^{(n)}x) + p(T_{t+s}^{(n)}x - T_t^{(n)}T_s^{(n)}x) + p(T_t^{(n)}T_s^{(n)}x - T_t^{(n)}T_sx) +$$

$$+ p(T_t^{(n)}T_sx - T_tT_sx) \le p(T_{t+s}x - T_{t+s}^{(n)}x) + q(T_s^{(n)}x - T_sx) + p((T_t^{(n)} - T_t)T_sx) \to 0$$

при $n \to \infty$. Таким образом, $p(T_{t+s}x - T_tT_sx) = 0$ при произвольном выборе непрерывной на пространстве X полунормы p, а это и означает, что $T_{t+s} = T_tT_s$.

Обозначим через $\hat{A}$ инфинитезимальный производящий оператор построенной равностепенно непрерывной полугруппы $\{T_t\}$ класса (C_0). Мы должны показать, что $\hat{A} = A$. Возьмем элемент $x \in D(A)$. Тогда

$\lim\limits_{n\to\infty} T_t^{(n)} AJ_n x = T_t Ax$, причем здесь имеет место равномерная относительно t сходимость на всяком бикомпактном множестве значений t. В самом деле, из равенства (4) видно, что

$$p(T_t Ax - T_t^{(n)} AJ_n x) \le p(T_t A - T_t^{(n)} Ax) + p(T_t^{(n)} Ax - T_t^{(n)} AJ_n x) \le p((T_t - T_t^{(n)})Ax) + q(Ax - J_n Ax)$$

.

и выражение в правой части этого неравенства стремится к нулю при $n \to \infty$, так как $\lim\limits_{n\leftarrow\infty} J_n Ax = Ax$. Из приведенных рассуждений следует, что

$$T_t x - x = \lim_{n\to\infty}(T_t^{(n)} x - x) = \lim_{n\to\infty}\int_0^t T_s^{(n)} AJ_n x ds = \int_0^t (\lim_{n\to\infty} T_s^{(n)} AJ_n x) ds = \int_0^t T_s Axds,$$

и поэтому предел $\lim\limits_{t\downarrow 0} t^{-1}(T_t x - x) = \lim\limits_{t\downarrow 0} t^{-1}\int_0^t T_s Axds$ существует и равен Ax. Мы тем самым доказали, что если $x \in D(A)$, то $x \in D(\hat{A})$ и $Ax = \hat{A}x$, т.е. оператор $\hat{A}$ служит расширением A. Оператор $\hat{A}$ как инфинитезимальный производящий оператор полугруппы $\{T_t\}$ обладает тем свойством, что при $n > 0$ оператор $(nI - \hat{A})$ отображает область $D(\hat{A})$ на пространство X взаимно однозначно. Но, согласно сделанным предположениям, оператор $(nI - A)$ отображает взаимно однозначно область $D(A)$ на X. Поэтому расширение $\hat{A}$ оператора A должно совпадать с A.

Обратимся, наконец, к доказательству единственности полугруппы $\{T_t\}$. Предположим, что некоторая равностепенно непрерывная полугруппа $\left\{\tilde{T}_t\right\}$ класса (C_0) имеет оператор A в качестве инфинитезимального производящего оператора. Рассмотрим полугруппу $T_t^{(n)}$. Так как оператор A коммутирует с $\tilde{T}_t$, мы видим, что операторы AJ_n и $T_s^{(n)}$ перестановочны с $\tilde{T}_t$. Поэтому для элементов $x \in D(A)$ мы, как при выводе формулы (5), получаем равенство

$$p(T_t^{(n)} - \tilde{T}_t x) = p\left(\int_0^t D_s (\tilde{T}_{t-s} T_s^{(n)} x) ds \right) = p\left(\int_0^t (-\tilde{T}_{t-s} T_s^{(n)})(A - AJ_n) x ds \right). \qquad (6)$$

Отсюда, учитывая, что $\lim_{n\to\infty} AJ_n x = Ax$ для всех $x \in D(A)$, мы, используя доказательство существования $\lim_{n\to\infty} T_t^{(n)} x$ $(x \in X)$, заключаем, что $\lim_{n\to\infty} T_t^{(n)} x = \tilde{T}_t x$ для всех $x \in X$. Следовательно, $T_t x = \tilde{T}_t x$ для всех $x \in X$, т.е. $T_t = \tilde{T}_t$, и полугруппа $\{T_t\}$ определяется, таким образом, однозначно.

Замечание. Приведенное выше доказательство показывает, что если оператор A является инфинитезимальным производящим оператором равностепенной полугруппы $\{T_t\}$ класса (C_0), то

$$T_t x = \lim_{n\to\infty} \exp(tA(I - n^{-1}A)^{-1})x, \quad x \in X, \qquad (7)$$

причем в (7) имеет место равномерная относительно t сходимость на всяком бикомпактном множестве значений t. Это – теорема о представлении для полугрупп.

Следствие 1. Если X является B-пространством, то условия последней теоремы можно сформулировать так: $D(A)^a = X$ и резольвента $(I - n^{-1}A)^{-1}$ существует, причем

$$\|(I - n^{-1}A)^{-m}\| \le C \quad (n = 1,2,\ldots; m = 1,2,\ldots), \qquad (8)$$

где положительная постоянная C не зависит от n и m. В частном случае, когда полугруппа $\{T_t\}$ сжимающая, эти условия можно сформулировать так: $D(A)^a = X$ и существует резольвента $(I - n^{-1}A)^{-1}$, удовлетворяющая оценке

$$\|(I - n^{-1}A)^{-1}\| \le 1 \quad (n = 1,2,\ldots) \qquad (9)$$

(Последнее утверждение называют теоремой Хилле – Иосида.)

Замечание. Условие (9) ввели независимо Хилле и Иосида. Это требование было обобщенно в форме (8) Феллером, Филлипсом] и Миядера. Заметим, что в (8) и (9) не обязательно рассматривать значения $n = 1,2,\ldots$; достаточно, чтобы эти условия выполнялись для всех достаточно больших n

. Распространение теории полугрупп на локально выпуклые топологические пространства было предложено Л. Шварцем.

Следствие 2. Пусть X - некоторое B - пространство и семейство $\{T_t; t \geq 0\}$ ограниченных линейных операторов из $L(X, X)$ удовлетворяет условиям

$T_t T_s = T_{t+s}$ $\quad t, s \geq 0$, $\quad T_{0=I}$ (10)

$s - \lim\limits_{t \downarrow 0} T_t x = x$ $\quad$ для всех $x \in X$, (11)

$\|T_t\| \leq M e^{\beta t}$ для всех $t \geq 0$, где постоянные $M > 0$ и $\beta \geq 0$ не зависят от t.

(12)

Тогда оператор $(A - \beta I)$ служит, очевидно, инфинитезимальным производящим оператором равностепенно непрерывной полугруппой $\{S_t = e^{-\beta t} T_t; t \geq 0\}$, где оператор A определяется соотношением $Ax = s - \lim\limits_{t \downarrow 0} t^{-1}(T_t - I)x$. Отсюда на основании следствия 1 мы заключаем, что замкнутый линейный оператор A с областью определения $D(A)^a = X$ и областью значений $R(A) \subseteq X$ является инфинитезимальным производящим оператором полугруппы $\{T_t\}$. удовлетворяющий условиям (10), (11) и (12), в том и только в том случае, когда существует резольвента $\left(I - n^{-1}(A - \beta \cdot I)\right)^{-1}$ и

$\left\|(I - n^{-1}(A - \beta \cdot I))^{-m}\right\| \leq M$ для $m = 1,2,\ldots$ и всех достаточно больших n.

(13)

Это условие можно переписать в виде неравенства

$\left\|(I - n^{-1}A)^{-n}\right\| \leq M(1 - n^{-1}\beta)^{-m}$ для $m = 1,2,..$ и всех достаточно больших n.

$(13')$

В частности, если полугруппа $[T_t]$ удовлетворяет требованиям (10), (11) и

$\|T_t\| \leq e^{\beta \cdot t}$ при всех $t \geq 0$,

(14)

то $(13')$ можно заменить неравенством

$$\left\|\left(I - n^{-1}A\right)\right\| \leq \left(1 - n^{-1}\beta\right)^{-1} \text{ для всех достаточно больших } n \qquad (13'')$$

приложение теоремы о представлении для полугрупп к доказательству теоремы Вейештрасса об аппроксимации непрерывных функций полиномами. Рассмотрим полугруппу операторов $(T_t x)(s) = x(t+s)$, определенную на пространстве $C[0,\infty]$. По теореме о представлении

$$(T_t x)(s) = x(t+s) = s - \lim_{n\to\infty} \exp(tAJ_n x)(s) = s - \lim_{n\to\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{t^m}{m!} (AJ_n)^m x(s),$$

при чем придельный переход $s - \lim\limits_{n\to\infty}$ происходит равномерно относительно t на всяком бикомпактном множестве значений t. Из этого результата легко выводится теорема Вейештрасса о полиномиальной аппроксимации непрерывной функции. Возьмем произвольную функцию z(t), непрерывную в замкнутом интервале [0,1]. Предположим, что функция $x(s) \in C[0,\infty]$, и пусть x(s)=z(s) при $s \in [0,1]$. Подставим в представление полугруппы значение s=0; тогда получается равенство

$$(T_t x)(0) = x(t) = s - \lim_{n\to\infty} \sum_{m=0}^{\infty} t^m (AJ_n)^m x(0)/m!,$$

где предельный переход равномерен относительно t при $t \in [0,1]$. Отсюда следует, что функция z(t) является пределом последовательности полиномов, равномерно сходящейся на сегменте $t \in [0,1]$.

8. сжимающие полугруппы диссипативные операторы

При изучении сжимающих полугрупп Люмер и Филлипс использовали некоторый аналог скалярного произведения. По терминологии этих авторов инфинитезимальные производящие операторы таких полугрупп называются диссипативными операторами.

Предложение (Люмер). Во всяком нормированном линейном пространстве X (вещественном или комплексном) каждой паре {x,y} элементов этого пространства можно поставить в соответствии число [x,y] (вещественное или комплексное в зависимости от типа пространства) таким образом, что

$$[x+y,z]=[x,z]+[y,z], \qquad [\lambda x,y]=\lambda[x,y], \qquad [x,x]=\|x\|^2, \qquad |[x,y]|\le\|x\|\cdot\|y\|. \tag{1}$$

функция [x,y] называется полу скалярным произведением.

Доказательство. Согласно следствию 2 теоремы 1 гл. IV, параграфа 6, для всякого $x_0\in X$ существует по крайней мере один ограниченный линейный функционал $f_{x_0}\in X'$, такой, что $\|f_{x_0}\|=\|x_0\|$ и $\langle x_0,f_{x_0}\rangle=\|x_0\|^2$. Выберем для каждого $x_0\in X$ такой функционал f_{x_0} каким-нибудь однозначным способом и положим

$$[x,y]=\langle x,f_y\rangle. \tag{2}$$

Ясно, что этим определятся полускалярное произведение.

Определение. Допустим, что в комплексном (или вещественном) B-пространстве X определено полусколярное произведение [x,y]. Линейный оператор A с областью определения D(A) и областью значений R(A), лежащими в пространстве X, называется диссипативным (по отношению к [x,y]), если выполняется условие

$$\operatorname{Re}[Ax,x]\le 0 \quad \text{для всех} \quad x\in D(A). \tag{3}$$

Пример. Возьмем в качестве X гильбертово пространство. Тогда симметричный оператор A, для которого $(Ax,x)\le 0$ при всех $x\in D(A)$, является диссипативным оператором по отношению к $[x,y]=(x,y)$, где (x,y) – это обычное скалярное произведение в гильбертовом пространстве.

Теорема (Филлипс и Люмер). Пусть область определения D(A) и область значений R(A) линейного оператора A принадлежат комплексному (или вещественному) B-пространству X и $D(A)^a=X$. Тогда оператор A порождает определенную на пространстве X сжимающую полугруппу класса (C_0) в том и только в том случае, если он диссипативен (по отношению ко всем полускалярным произведениям [x,y]) и $R(I-A)=X$.

Доказательство. Докажем достаточность указанных условий. Допустим, что оператор А диссипативен. Выберем произвольное число $\lambda>0$. Тогда обратный оператор $(\lambda I-A)^{-1}$ существует, и $\|(\lambda I-A)^{-1}y\|\le\lambda^{-1}\|y\|$ при $y\in D\left((\lambda I-A)^{-1}\right)$. В самом деле, если $y=\lambda x-Ax$, то

$$\lambda\|x\|^2=\lambda[x,x]\le\operatorname{Re}(\lambda[x,x]-[Ax,x])=\operatorname{Re}[y,x]\le\|y\|\cdot\|x\|,$$

(4)

так как оператор А диссипативен. По условию теоремы $R(I-A)=X$, так. Что значение $\lambda=1$ принадлежит резольвентному множеству $\rho(A)$ оператора А, и из (4) следует, что $\|R(1;A)\|\le1$. Если $|\lambda-1|<1$,то резольвента $R(\lambda;A)$ существует и представляется в виде

$$R(\lambda;A)=R(1;A)(I+(\lambda-1`)R(1;A))^{-1}=R(1;A)\cdot\sum_{n=0}^{\infty}((1-\lambda)R(1;A))^n$$

(см. теорему 1 гл. VIII, параграф 2). Кроме того, из (4) следует, что $\|R(\lambda;A)\|\le\lambda^{-1}$ при значениях $\lambda>0$, для которых $|\lambda-1|<1$. Следовательно, применяя формулу

$$R(\mu;A)=R(\lambda;A)(I+(\mu-\lambda)R(\lambda;A))^{-1},$$

которая справедлива при значениях $\mu>0$, удовлетворяющих неравенству $|\mu-\lambda|\cdot\|R(\lambda;A)\|<1$, мы убеждаемся в том, что резольвента $R(\mu;A)$ существует и $\|R(\mu;A)\|\le\mu^{-1}$. Повторяя этот процесс, мы устанавливаем, что резольвента $R(\lambda;A)$
существует для всех значений $\lambda>0$ и удовлетворяет оценке $\|R(\lambda;A)\|\le\lambda^{-1}$.по предположению множество D(A) плотно, и поэтому, применяя следствие 1 предыдущего параграфа, мы обнаруживаем, что оператор Ф пораждает сжимающую полугруппу класса (C_0).

Перейдем к доказательству необходимости условий теоремы. Пусть $\{T_t;t\ge0\}$ -сжимающая полугруппа класса (C_0). В этом случае

$$\operatorname{Re}[T_tx-x,x]=\operatorname{Re}[T_tx,x]-\|x\|^2\le\|T_tx\|\cdot\|x\|-\|x\|^2\le0.$$

Таким образом, для элементов x, принадлежащих области определения D(A) инфинитезимального производящего оператора A полугруппы $\{T_t\}$,

$$\operatorname{Re}[Ax,x] = l\lim_{\varepsilon\to+0}\operatorname{Re}\{t^{-1}[T_t x = x,x]\} \le 0 .$$

Поэтому оператор A диссипативен.кроме того, $\operatorname{Re}(I - A) = D(R(1;A)) = X$, так как Aэто инфинитезимальный производящий оператор сжимающей полугруппы класса (C_0).

Следствие. Если область определения $D(A) \subseteq X$ замкнутого лиейного оператора A полна в B-пространстве X и $R(A) \subseteq X$, причем как оператор A, так и сопряженный ему оператор A' диссипативны, то A порождает некоторую сжимающую полугруппу класса (C_0).

Доказательство. Достаточно показать, что $R(I - A) = X$.но оператор $(I - A)^{-1}$ замкнут, как и оператор A, и ограничен, поэтому область $R(I - A)$ образует в пространстве X замкнутое линейное подпространство. Следовательно, если положить, что $R(I - A) \ne X$, то должен существовать нетривиальный функционал $x' \in X'$, такой, что $\langle (x - Ax), x' \rangle = 0$ для всех $x \in D(A)$.

Но это означает, что $x' - A'x' = 0$, что противоречит диссипативности оператора A', поскольку $x' \ne 0$.

Замечание. Дальнейшие сведения о диссипативных операторах см. ЛюмерФиллипс [1]. См. также Като [6].

9. Равноерно непрерывные группы класса (C_0).

Теорема Стоуна.

Определение. Равностепенно непрерывную полугруппу $\{T_t\}$ класса (C_0) мы назовем равностепенно непрерывной группой класса (C_0), если существует равномерно непрерывная полугруппа $\{\hat{T}_t\}$ класса (C_0), удовлетворяющая следующему условию. Если определить операторы S_t формулой

$$S_t = \begin{cases} T_t, t \geq 0 \\ \hat{T}_{(-t)}, t \leq 0 \end{cases}$$

то семейство $\{S_t, -\infty < t < \infty\}$ операторов S_t обладает групповым свойством

$$S_t S_s = S_{t+S}, (-\infty < t, s < \infty), S_0 = I. \quad (1)$$

Теорема. Рассмотрим локально выпуклое секвенциально полное линейное топологическое пространство X. Пусть область определения $D(A) \subseteq X$ некоторого линейного оператора A плотна в X и $R(A) \subseteq X$. Тогда A служит инфинитезимальным производящим оператором некоторой равностепенно непрерывной группу класса (C_0) операторов $S_t \in L(X, X)$, удовлетворяющих условию (1), в том и только в том случае, когда операторы $\left(I - n^{-1}A\right)^{-m}$ определены во всем пространстве X при любых значениях $n = \pm 1, \pm 2, \ldots$ и равностепенно непрерывны относительно указанных значений индексов n и m.

Доказательство. *Необходимость.* Положим $T_t = S_t$ при $t \geq 0$. Обозначим через A и $\hat{A}$ соответственно инфинитезимальные производящие операторы полугрупп $\{T_t\}$ и $\{\hat{T}_t\}$. Мы должны доказать, что $\hat{A} = -A$. Допустим, что $x \in D(\hat{A})$; тогда, полагая $x_h = h^{-1}(\hat{T}_h - I)x$ и используя равностепенную непрерывность T_h, мы для любой непрерывной на X полунормы p найдем такую непрерывную полунорму q, что одновременно для всех $h \geq 0$ и любых $x \in D(A)$ будет выполняться неравенство

$$p\left(T_h x_h - \hat{A}x\right) \leq p\left(T_h x_h - T_h \hat{A}x\right) + p\left((T_h - I)\hat{A}x\right) \leq q\left(x_h - \hat{A}x\right) + p\left((T_h - I)\hat{A}x\right).$$

Отсюда следует, что $\lim_{h \downarrow 0} T_h x_h = \hat{A}x$, т.е. условие $x \in D(\hat{A})$ влечет за собой равенство $\hat{A}x = \lim_{h \downarrow 0} T_h\left(h^{-1}\left(\hat{T}_h - I\right)\right)x = \lim_{h \downarrow 0} h^{-1}(I - T_h)x = -Ax$. Следовательно, оператор A представляет собой расширение оператора $\hat{A}$. Применяя аналогичное построение, можно показать, что $\hat{A}$ служит расширением оператора A. Следовательно $\hat{A} = -A$.

Достаточность. Допустим, что оператор A удовлетворяет условиям теоремы. Для значений $t \geq 0$ определим операторы T_t и $\hat{T}_t$ с помощью следующих соотношений:

$$T_t x = \lim_{n\to\infty} T_t^{(n)} x \equiv \lim_{n\to\infty} \exp\left(tA\left(I - n^{-1}A\right)^{-1}\right)x,$$

$$\hat{T}_t x = \lim_{n\to\infty} \hat{T}_t^{(n)} x \equiv \lim_{n\to\infty} \exp\left(t\hat{A}\left(I - n^{-1}\hat{A}\right)^{-1}\right)x,$$

где $\hat{A} = -A$. Операторы T_t и $\hat{T}_t$, как не трудно видеть, образуют равностепенно непрерывные полугруппы класса (C_0). При $t \geq 0$ ввиду свойства равностепенной (относительно n) непрерывности $\left\{T_t^{(n)}\right\}$ для всякой непрерывной на X полунормы p найдется такая непрерывная полунорма q, что

$$p\left(T_t\hat{T}_t^{(n)}x - T_t^{(n)}\hat{T}_t^{(n)}x\right) \leq p\left(T_t\hat{T}_t x - T_t^{(n)}\hat{T}_t x\right) + p\left(T_t^{(n)}\hat{T}_t x - T_t^{(n)}\hat{T}_t^{(n)}x\right) \leq p\left(\left(T_t - T_t^{(n)}\right)\hat{T}_t x\right) + q\left(\hat{T}_t x - \hat{T}_t^{(n)}x\right).$$

Поэтому $\lim\limits_{n\to\infty} T_t^{(n)}\hat{T}_t^{(n)}x = T_t\hat{T}_t x$. Таким образом, исходя из равностепенной непрерывности $T_t^{(n)}\hat{T}_t^{(n)}$, мы установили равностепенную непрерывность операторов $T_t\hat{T}_t$. С другой стороны, поскольку операторы $\left(I - n^{-1}A\right)^{-1}$ и $\left(I - m^{-1}A\right)^{-1}$ перестановочны, $T_t^{(n)}\hat{T}_s^{(m)} = \hat{T}_s^{(m)}T_t^{(n)}$. Значит, $\left(T_t^{(n)}\hat{T}_t^{(n)}\right)\left(T_s^{(n)}T_s^{(n)}\right) = T_{t+s}^{(n)}\hat{T}_{t+s}^{(n)}$, и поэтому операторы $\left(T_t\hat{T}_t\right)$ при $t \geq 0$ обладают полугрупповым свойством $\left(T_t\hat{T}_t\right)\left(T_s\hat{T}_s\right) = T_{t+s}\hat{T}_{t+s}$; следовательно $\left\{T_t\hat{T}_t\right\}$ – это равностепенно непрерывная полугруппа класса (C_0). Если $x \in D\left(\hat{A}\right) = D(A)$, то

$$\lim_{h\downarrow 0} h^{-1}\left(T_h\hat{T}_h - I\right)x = \lim_{h\downarrow 0} T_h h^{-1}\left(\hat{T}_h - I\right)x + \lim_{h\downarrow 0} h^{-1}\left(T_h - I\right)x = \hat{A}x + Ax = 0,$$

и, таким образом, инфинитезимальный производящий оператор A_1 полугруппы $\left\{T_t\hat{T}_t\right\}$ обращается в нуль для каждого $x \in D\left(\hat{A}\right)$. Этот оператор A_1 должен быть замкнутым, так как оператор $(I - A_1)$ является обратным оператором для непрерывного линейного оператора $(I - A_1)^{-1} \in L(X, X)$. А так как A_1 обращается в нуль на плотном подмножестве $D(\hat{A}) = D(A)$ пространства X, то A_1 – это нулевой оператор, принадлежащий $L(X,X)$. Отсюда вытекает, что $(T_t\hat{T}_t)x = \lim_{n\to\infty}\exp\left(t\cdot 0\cdot\left(I - n^{-1}\cdot 0\right)^{-1}\right)x = x$, и поэтому $T_t\hat{T}_t = I$. Следовательно, положив $S_t = T_t$ при $t \geq 0$ и $S_{-t} = \hat{T}_t$ при $t \geq 0$, мы получим равностепенно непрерывную группу операторов S_t, $-\infty < t < \infty$, для которой оператор A служит инфинитезимальным производящим оператором.

Следствие 1. В случае, когда X является B-пространством, условия этой теоремы можно сформулировать так: $D(A)^a = X$ и существует резольвента $\left(I - n^{-1}A\right)^{-1}$, удовлетворяющая оценке $\left\|\left(I - n^{-1}A\right)^{-m}\right\| \leq M$ для всех $m=1,2,\ldots$ и всех достаточно больших $|n|(n <> 0)$, где $M > 0$ – независимая постоянная.

Для группы S_t, удовлетворяющей неравенству

$\|S_t\| \leq Me^{\beta|t|}$ для всех $t \in (-\infty;\infty)$ $(\beta \geq 0)$,

условия теоремы сводятся к следующим: $D(A)^a = X$ и резольвента $\left(I - n^{-1}A\right)^{-1}$ существует, причем для всех $m=1,2,\ldots$ и достаточно больших $|n|(n <> 0)$ справедливо неравенство

$$\left\|\left(I - n^{-1}A\right)^{-m}\right\| \leq M\left(1 - \left|n^{-1}\right|\beta\right)^{-m}.$$

Для частного случая, когда $\|S_t\| \leq e^{\beta|t|}$ при всех $t \in (-\infty;\infty)$, условия теоремы можно сформулировать так: $D(A)^a = X$ и резольвента $(I - n^{-1}A)^{-1}$ существует, причем

$$\left\|(I - n^{-1}A)^{-1}\right\| \leq (1 - \left|n^{-1}\right|\beta)^{-1} \qquad (4)$$

для всех достаточно больших $|n|$ $(n < 0, n > 0)$.

Доказательство проводится так же, как для следствия 1 и следствия 2. § 7, гл. IX.

Следствие 2 (теорема Стоуна). Пусть $[U_t, -\infty < t < \infty]$ - группа класса (C_0) унитарных операторов U_t заданных в гильбертовом пространстве X. Тогда инфинитезимальный производящий оператор A этой группы представляется в виде iH, где H - некоторый самосопряженный оператор.

Доказательство. Так как U_t - унитарные операторы, то $(U_t x, y) = (x, U_t^{-1} y) = (x, U_{-t} y)$, и поэтому

$(Ax, y) = (x < -Ay)$ для всех $x, y \in D(A)$

Последнее означает, что оператор $-iA \equiv H$ симметрический. Так как A - инфинитезимальный производящий оператор группы $\{U_t\}$,

то оператор $(I - n^{-1}A)^{-1} = (I - n^{-1}iH)$ должен быть ограниченным линейным оператором, для которого выполняется неравенство

$\|(I - n^{-1}iH)^{-1}\|$ при $n = \pm 1, \pm 2, \ldots$ Полагая $n = \pm 1$, мы видим, что преобразование Кэли оператора H представляет собой унитарный оператор, и поэтому оператор H самосопряженный.

Замечание. Если оператор A имеет вид $A = iH$, где H - само-сопряженный оператор, заданный в гильбертовом пространстве X, то условие (4) следствия 1, как можно показать, используя теорию преобразования Кэли, выполняется. Следовательно, оператор A представляет собой инфинитезимальный производящий оператор некоторой сжимающей полугруппы U_t определенной в пространстве X. Нетрудно обнаружить, что операторы U_t будут в этом случае унитарными. В самом деле, сжимающий оператор U_t, отображающий гильбертово пространство X в себя, обладает при этих условиях обратным

оператором $U_t^{-1} = U_{-t}$. Оператор U_t^{-1} отображает пространство X в себя и тоже является в данном случае сжимающим оператором. Поэтому оператор U_t должен быть унитарным.

V. МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ВЫПОЛНЕНИЮ КУРСОВЫХ ПРОЕКТОВ (РАБОТ)

Курсовой проект (работа) не предусмотрен.

VI. МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ВЫПОЛНЕНИЮ ЛАБОРАТОРНЫХ РАБОТ (ПРАКТИКУМОВ)

Лабораторные работы не предусмотрены.

VII. МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К ПРАКТИЧЕСКИМ (СЕМИНАРСКИМ) ЗАНЯТИЯМ

Необходимым условием присутствия студента на практическом занятии является выполнение домашнего задания по тематике предыдущего практического занятия. Для выполнения практических заданий студенту необходимо иметь конспект лекций. Студенты знакомятся с заданием и выполняют его, опираясь на конспект лекций. Задание выдается одно на всю группу. Приветствуется самостоятельное выполнение заданий. В связи с большим объемом вычислений обязательно наличие электронного вычислительного средства (калькулятора).

VIII. МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ВЫПОЛНЕНИЮ ДОМАШНИХ ЗАДАНИЙ И КОНТРОЛЬНЫХ РАБОТ

При выполнении домашних работ необходимо использовать конспекты лекций, любую дополнительную литературу.

Перед контрольной работой студентам необходимо повторить теоретические основы методов, указанных преподавателем. При выполнении контрольной работы конспект лекций и другую дополнительную литературу не использовать.

IX. ПЕРЕЧЕНЬ ПРОГРАММНЫХ ПРОДУКТОВ, РЕАЛЬНО ИСПОЛЬЗУЕМЫХ В ПРАКТИЧЕСКОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ ВЫПУСКНИКОВ И СООТВЕТСТВУЮЩЕЕ УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ ПОСОБИЕ, РАСКРЫВАЮЩЕЕ ОСОБЕННОСТИ И ПЕРСПЕКТИВЫ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ ДАННЫХ ПРОГРАММНЫХ ПРОДУКТОВ

Выпускники могут выполнять расчеты в Microsoft Excel, используя любую литературу, посвященную данному программному продукту.

X. МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ПРИМЕНЕНИЮ СОВРЕМЕННЫХ ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ ДЛЯ ПРЕПОДАВАНИЯ УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ (В Т. Ч. РАЗРАБОТАННЫЕ ВЕДУЩИМИ ПРЕПОДАВАТЕЛЯМИ ФИЛИАЛА)

Данные методические указания отсутствуют.

XI. МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПРОФЕССОРСКО-ПРЕПОДАВАТЕЛЬСКОМУ СОСТАВУ ПО ОРГАНИЗАЦИИ МЕЖСЕССИОННОГО И ЭКЗАМЕНАЦИОННОГО КОНТРОЛЯ ЗНАНИЙ СТУДЕНТОВ (МАТЕРИАЛЫ ПО КОНТРОЛЮ КАЧЕСТВА ОБРАЗОВАНИЯ)

Преподаватель готовит контролирующие материалы в виде тестов, задач и в другой форме. Тематика контролирующих материалов должна соответствовать тематике материалов, прочитанных студентам на лекционных занятиях к моменту контроля знаний, и тематике задач, разобранных на практических занятиях к моменту контроля знаний. Преподаватель самостоятельно выбирает форму теста, правила работы с контролирующими материалами, время на его выполнение. Во время проведения контроля знаний студентов преподаватель объясняет студентам правила работы с контролирующими материалами и выдаёт эти материалы студентам. После истечения установленного времени контролирующие материалы собираются и обрабатываются. Критерии оценки знаний преподаватель устанавливает самостоятельно. Студентам, не сдавшим тест или не присутствующим на нем по каким-либо причинам, предоставляется дополнительная возможность пройти тест.

XII. КОМПЛЕКТЫ ЗАДАНИЙ ДЛЯ КОНТРОЛЬНЫХ РАБОТ, ДОМАШНИХ ЗАДАНИЙ

Задания для контрольных работ и домашних заданий берутся из книг, указанных в рабочей программе.

XIII. ФОНД ТЕСТОВЫХ И КОНТРОЛЬНЫХ ЗАДАНИЙ ДЛЯ ОЦЕНКИ КАЧЕСТВА ЗНАНИЙ ПО ДИСЦИПЛИНЕ

Фонд тестовых и контрольных заданий для оценки качества знаний по дисциплине приведен в приложении А.

XIV. КОМПЛЕКТЫ ЭКЗАМЕНАЦИОННЫХ БИЛЕТОВ ДЛЯ КАЖДОГО ИЗ ПРЕДУСМОТРЕННЫХ ЭКЗАМЕНОВ ПО ДИСЦИПЛИНЕ И КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ К ЗАЧЕТУ

Комплекты экзаменационных билетов составляются на основе экзаменационных вопросов, представленных в п. 2.6 рабочей программы данной дисциплины, по следующей форме:

ГОУВПО «Амурский государственный университет»	
Утверждено на заседании	Кафедра *математического анализа и*

кафедры	*моделирования*
«___» ______________ 200 г.	Факультет *математики и информатики*
Заведующий кафедрой –	Курс 4
Труфанова Т.В.	Дисциплина "*Аналитическая теория полугрупп*"
Утверждаю: ______________	

Экзаменационный билет 1

1. Определение полугруппы и основные свойства.

2. Следствия из теоремы о порождении.

3. Показать, что оператор А: $L_2[0, 1] \to L_2[0, 1]$, А= - $\frac{d}{dt}$ диссипативный.

XV. КАРТА ОБЕСПЕЧЕННОСТИ ДИСЦИПЛИНЫ КАДРАМИ ПРОФЕССОРСКО-ПРЕПОДАВАТЕЛЬСКОГО СОСТАВА

Дисциплину в полном объёме ведёт: Подопригора Сергей Алексеевич, старший преподаватель кафедры математического анализа и моделирования.

ПРИЛОЖЕНИЕ А
ФОНД КОНТРОЛЬНЫХ РАБОТ

Задача 1.1. Пусть дана матрица

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Найти e^{tA}.

Задача 1.2. Пусть дана матрица

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$$

Найти e^{tA}.

Задача 1.3. Для каждого фиксированного $t > 0$ рассмотрим оператор T_t: $\tilde{L} \to \tilde{L}$

$(x - t)$

$$T_t f(x)=\begin{cases} 0, & 0 \langle x \langle t \\ f(x - t), & x \langle t \langle T \end{cases}$$

Показать, что семейство операторов $\{T_t\}_t>0$ образуют сжимающую полугруппу в пространстве $L^{\sim}$.

Задача 1.4. Найти генератор полугруппы $\{T_t\}_t>0$.

Задача 1.5. Показать, что оператор A: $L_2[0, 1] \to L_2[0, 1]$, $A= -\frac{d}{dt}$ диссипативный.

Задача 1.6. Пусть A: $L_2[0, 1] \to L_2[0, 1]$, неограниченный оператор, заданный формулой $A= -\frac{d}{dt}$ с областью определения $D(A)=\{u \in H^1[0, 1]: u(0)=cu(1)\}$, где $c \in C$. Найти все значения параметра c, при которых оператор A будет генератором сжимающей полугруппы.

Задача 1.7. Рассмотрим оператор L: $L_2[0, 1] \to L_2[0, 1]$ $Ly=y''$, $y \in D(L)=\{y \in H^1[0, 1]: L(y) \in L_2[0, 1]\}= H^1[0, 1] \cap H^2[0, 1]$. Показать, что оператор L порождает сжимающую полугруппу.

Задача 1.8. Рассмотрим оператор L: $L_2[0, 1] \to L_2[0, 1]$ $Ly=y''+py'+qy$, $y \in D(L)=\{y \in H^1[0, 1]: L(y) \in L_2[0, 1]\}= H^1[0, 1] \cap H^2[0, 1]$, где $p, q \in R$. Показать, что если $q \le 0$, то оператор L порождает сжимающую полугруппу.

СОДЕРЖАНИЕ