Министерство образования Российской Федерации

АМУРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Факультет математики и информатики

Кафедра математического анализа и моделирования

В.А. Труфанов

Методические указания по типовому расчёту по курсу “Теория вероятностей” для студентов всех специальностей.

Благовещенск
2002

ББК

Печатается по решению

редакционно-издательского совета
факультета математики и информатики
Амурского государственного
университета

Труфанов В.А.

Методические указания по типовому расчёту по курсу “Теория вероятностей” для студентов всех специальностей. Благовещенск: Амурский гос. ун-т, 2002.

Методические указания предназначены для самостоятельных занятий по курсу теории вероятностей студентам всех специальностей. Содержание занятий и расположение материала соответствует программам курса.

Рецензент: А.Н.Сёмочкин, канд. физ.- мат. наук, доцент кафедры Информатики БГПУ.

© Амурский государственный университет

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ.

Цель предлагаемого типового расчета – активизация самостоятельной работы студентов, способствующей усвоению курса теории вероятностей и приобретению навыков применения теории вероятностей к решению конкретных задач.

Типовой расчёт содержит теоретические вопросы, задачи и примеры. Теоретические вопросы охватывают часть теории вероятностей, общую для студентов всех специальностей, задачи для каждого студента – индивидуальные.

Для защиты типового расчёта студент обязан решить письменно задачи своего варианта (обычно номер варианта совпадает с порядковым номером студента в списке группы) и сдать преподавателю для проверки правильности их решения. Защита типового расчёта проводится устно. При этом студент должен ответить на заданные преподавателем теоретические вопросы и объяснить решение задач из типового расчёта.

I. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ВОПРОСЫ

1. Случайные события и операции над ними.
2. Классическое определение вероятности события. Геометрические вероятности. Статистическое определение вероятности события.
3. Аксиоматическое определение вероятности события. Свойства вероятности.
4. Условная вероятность. Независимые события. Формула полной вероятности и формулы Байеса.
5. Схема Бернулли. Биномиальное распределение.
6. Пуассоновское приближение биномиального распределения.
7. Интегральная теорема Муавра-Лапласа и ее применения.

8. Функция и плотность распределения случайной величины и их свойства.
9. Примеры распределений: равномерное, нормальное, показательное, Бернулли, Пуассона, геометрическое, гипергеометрическое.
10. Функция и плотность распределения системы случайных величин. Их свойства.
11. Распределения функций одной и нескольких случайных величин.
12. Числовые характеристики случайных величин: математическое ожидание, дисперсия, корреляция.
13. Неравенства Чебышёва. Закон больших чисел: теоремы Чебышёва, Бернулли.
14. Характеристическая функция случайной величины и ее свойства.
15. Центральная предельная теорема

II. УКАЗАНИЯ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ И ВАРИАНТЫ ЗАДАНИЙ

1. Случайные события и действия над ними.

.

Пусть Ω – непустое множество, элементы которого будем называть элементарными исходами. Для любых подмножеств A и B в Ω используются следующие обозначения: $A \cup B$ (или $A+B$)–объединение (или сумма) A и B; $A \cap B$ (или AB)–пересечение (или произведение) A и B; $A \setminus B$–разность A и B; $\overline{A}$ –обратное (дополнительное) множество, т.е. множество $\Omega \setminus A$.

Для решения задач этого параграфа необходимо усвоить такие понятия как равносильность событий, объединение, пересечение, разность событий, противоположное событие, несовместные события.

Пример. Три стрелка производят по одному выстрелу по мишени. Событие A – первый стрелок попал в мишень, событие B – только один стрелок попал в мишень, событие C – хотя бы один из стрелков попал в мишень. Описать события: $A \cap B$; $\overline{A} \cup C$; $B \cap C$; $\overline{B}$.

Решение: Событие $A \cap B$ заключается в том, что произошли оба события. Но так как событие A влечет за собой событие B, то $A \cap B = A$. Событие $\overline{A} \cup C$ есть достоверное событие. Это следует, например, из цепочки равенств:

$$\overline{A} \cup C = \overline{A} \cup (A \cup C) = (A \cup \overline{A}) \cup C = \Omega \cup C = \Omega.$$

Событие $B \cap C = B$, так как событие B влечет за собой событие C. Событие $\overline{B}$ означает, что или ни один из стрелков не попал в мишень, или хотя бы два стрелка попали в мишень.

Варианты заданий

1. Пусть *A, B, C* – три произвольных события. Найти выражение для события, состоящего в том, что из *A, B, C* произошли по крайней мере два события; только одно событие.
2. Бросаются два игральных кубика. Пусть A – событие, состоящее в том, что сумма очков нечетная, B– событие, состоящее в том, что хотя бы на одной из костей выпала единица. Описать события $A \cup B$, $A \cap B$, $\overline{A} \cap B$.
3. На доске записано несколько натуральных чисел. Пусть событие A – все записанные числа – четные, событие B – среди них имеется одно нечетное. Описать события $\overline{A}$, $\overline{B}$, $A \setminus \overline{B}$, $A \cap \overline{B}$.
4. Событие A – хотя бы один из трех проверяемых приборов бракованный, B – все приборы доброкачественные. Что означают события $A \setminus B$, $A \cap \overline{B}$, $A \cup \overline{B}$?
5. Из таблицы случайных чисел наудачу взято одно число. Событие B – данное число оканчивается нулем, событие A – выбранное число делится на 5. Что означают события $A \setminus B$, $A \cap B$?
6. Игральный кубик подбрасывается дважды. Описать пространство элементарных событий. Описать события: A – хотя бы раз появится 6 очков, B – сумма очков делится на три.

7. Монета бросается три раза. Описать пространство элементарных событий. Описать события: A – выпало не менее двух гербов; B – выпало два герба.
8. Пусть A, B, C – три произвольных события. Найти выражения для событий, состоящих в том, что из A, B, C: а) произошли A и B, но C не произошло; б) произошло не более двух событий; в) произошло хотя бы одно событие.
9. Монета бросается два раза. Описать пространство элементарных событий. Пусть A и B означают соответственно события: при первом бросании выпал герб и при втором бросании выпал герб. Описать события $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$.
10. Из колоды карт случайным образом извлекается одна карта. Пусть событие A – извлеченная карта пиковой масти, событие В – извлеченная карта туз пик, событие C – извлеченная карта – туз червей. Описать события $A \cup B$, $A \cap B$, $A \cup C$, $B \cap C$.
11. Из чисел 0,1,….,9 случайным образом выбирается одно число. Пусть событие A – выбранное число – нечетное, событие B – выбранное число – девять. Описать события: $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$.
12. Прибор состоит из двух блоков первого типа и трех блоков второго типа. Пусть события: A_i (i = 1,2) – исправен i-ый блок первого типа, B_j (j=1,2,3) – исправен j-й блок второго типа. Прибор работает, если хотя бы один блок первого типа и не менее двух блоков второго типа исправны. Выразить событие C, означающее работу прибора, через события A_i и B_j.
13. Бросаются две игральные кости. Пусть A – событие, состоящее в том, что хотя бы на одной из костей выпадет 6 очков; B – событие, состоящее в том, что сумма очков нечетна. Описать события $A \cup B$, $A \cap B$, $A \cup \overline{B}$.
14. Получить пространство элементарных событий, соответствующих трем испытаниям, в которых может появиться $У$ (успех) или $Н$ (неуспех).

Выразить через элементарные события: событие B – появилось ровно два успеха; событие C – появился хотя бы один успех.

15. Пусть A, B, C – три произвольных события. Найти выражения для событий, состоящих в том, что на A, B, C произошло одно и только одно событие; произошло не более двух событий.
16. Событие A – «мужу больше 40 лет», событие B – «муж старше жены», событие C – «жене больше 40 лет». Что означает событие $A \cap B$, $A \cap \overline{B}$, $A \setminus (B \cap C)$?
17. Игральный кубик подбрасывается дважды. Описать пространство элементарных событий. Описать события: A – сумма очков, которые выпали, равна 8; B – хотя бы один раз выпало 6 очков.
18. Среди всех семей, имеющих двух детей, выбрана одна. Описать пространство элементарных событий и события: A – в семье есть мальчик и девочка, B – в семье не более одной девочки. Доказать, что события A и B зависимы.
19. Среди всех семей, имеющих трех детей, выбрана одна. Описать пространство элементарных событий и события: A – в семье есть мальчик и девочка, B – в семье не более одного мальчика. Доказать, что события A и B зависимы.
20. Игральный кубик подбрасывается дважды. Описать пространство элементарных событий. Пусть событие A – на одном из кубиков выпало 6 очков, событие B – сумма выпавших очков равна 10. Описать события: $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$.
21. Пусть A, B, C – три произвольных события. Найти выражения для событий, состоящих в том, что из A, B, C: а) произошло по крайней мере одно из этих событий; б) произошло одно и только одно событие; в) произошло не более двух событий.
22. Бросается игральная кость. Пусть событие A – выпадает четное число очков, событие B – выпадает число очков не большее трех. Описать события: $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $\overline{A} \cap B$.

23. Произведено три выстрела по мишени. Описать пространство элементарных событий. Пусть событие A – мишень поражена хотя бы один раз, событие B – мишень поражена два раза. Описать события: $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $\overline{A} \cup B$.
24. Бросаются две игральные кости. Пусть A – событие, состоящее в том, что на одной из костей выпала единица, B – сумма выпавших очков – четная. Описать события: $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$.
25. В партии n деталей. Событие A_i заключается в том, что i-ая деталь дефектна. Записать события, состоящие в том, что: а) хотя бы одна деталь дефектна; б) только одна деталь дефектна; в) ни одна деталь не имеет дефектов.

2. Непосредственный подсчёт вероятности событий с использованием классического определения вероятности.

Если рассматриваемый опыт имеет n несовместных равновозможных исходов, которые образуют полную группу, то вероятность события A определяется по формуле:

$$P(A)=\frac{m}{n},$$

где m – число исходов, которые приводят к наступлению события A (благоприятствуют событию A). Это определение вероятности называется классическим.

При решении задач на непосредственный подсчёт вероятности с использованием записанной формулы нет общих способов для нахождения чисел m и n. Часто для их нахождения используют комбинаторику (число размещений, перестановок, сочетаний).

Пример 1. Из ящика, в котором находятся n белых и m чёрных шаров, выбирается наугад l шаров. Какова вероятность того, что среди них будет k белых шаров $k \le n$ (событие A).

Решение. Исходом опыта в этом примере будет появление любых l шаров из $n+m$ шаров, находящихся в ящике. Общее число исходов равно числу сочетаний из $n+m$ по l, т.е. C_{n+m}^{l}. Благоприятствующими будут исходы, когда k шаров извлечены из n белых шаров, а остальные $l-k$ из m чёрных шаров. Число благоприятствующих исходов равно $C_n^k C_m^{l-k}$. Искомая вероятность, таким образом, будет равна:

$$\mathrm{P}(A) = \frac{C_n^k C_m^{l-k}}{C_{n+m}^{l}}$$

Пример 2. В вагоне 10 пассажиров. Поезд останавливается на 15 станциях. Какова вероятность того, что никакие 2 пассажира не выйдут на одной и той же станции (событие A)?

Решение. Каждый пассажир может выйти на любой из 15 станций. Общее число исходов равно 10^{15}. Число благоприятствующих исходов будет равно числу размещений из 15 по 10: $A_{15}^{10} = 15 \cdot 14 \cdot \mathrm{K} \cdot 6$. (Здесь следует учиты-вать порядок выхода пассажиров). Поэтому

$$\mathrm{P}(A) = \frac{15 \cdot 14 \cdot \mathrm{K} \cdot 6}{10^{15}}$$

Пример 3. 12 человек рассаживаются случайным образом в ряд. Какова вероятность того, что два определённых человека будут сидеть рядом (событие A)?

Решение. Общее число исходов данного опыта равно числу перестановок 12 человек, т.е. 12!. Благоприятствующими исходами будут те, когда два определённых человека сядут рядом. Это может произойти $10! \cdot 2!\ \ 11$ способами (10 человек могут разместиться 10! способами, два человека могут сесть рядом 2! способами и, кроме того, имеется 11 возможностей размещений двух человек в ряд с десятью остальными). Искомая вероятность будет равна:

$$\mathrm{P}(A)=\frac{10!\cdot 2!\cdot 11}{12!}=\frac{1}{6}.$$

Варианты заданий

1. Бросаются 2 игральных кубика. Определить вероятность того, что хотя бы на одном из них выпадет пять очков.
2. Из 10 лотерейных билетов 4 выигрышных. Определить вероятность того, что из наугад взятых 5 билетов два выигрышных.
3. В урне 3 белых и 2 чёрных шара. Вынули сразу 2 шара. Какова вероятность того, что среди них хотя бы один шар чёрный?
4. Определить вероятность того, что среди трёх выбранных наугад цифр есть одинаковые.
5. Игральный кубик подбрасывается 6 раз. Определить вероятность того, что выпадут все 6 граней.
6. Числа $1,2,\ldots,n$ расставлены случайным образом. Найти вероятность того, что числа 1,2,3 расположены рядом и притом в порядке возрастания.
7. Чему равна вероятность того, что все дни рождения двенадцати человек придутся на разные месяцы года?
8. Пять мужчин и пять женщин рассаживаются произвольным образом в ряд на 10 мест. Какова вероятность того, что никакие 2 женщины не будут сидеть рядом?
9. Лифт отправляется с 6 пассажирами и останавливается на 10 этажах. Чему равна вероятность того, что никакие два пассажира не выйдут на одном и том же этаже?
10. Пять мужчин и четыре женщины рассаживаются произвольным образом в ряд. Какова вероятность того, что все женщины будут сидеть рядом?

11. В мастерской находится $a+b$ блоков от двух различных радиоприёмников, причём два блока повреждены. Какова вероятность того, что повреждены блоки различных приёмников?
12. В лотерее n билетов, среди которых m выигрышных. Определить вероятность выигрыша для того, кто имеет k билетов.
13. Числа 1,2,…,10 расставлены случайным образом. Найти вероятность того, что между числами 1 и 2 будут находиться 5 других.
14. Случайно 5 шаров размещаются по пяти ящикам. Найти вероятность того, что ровно один ящик останется пустым.
15. В ящике 8 деталей, среди которых 3 нестандартные. Найти вероятность того, что среди 5 наудачу выбранных деталей окажется не менее двух нестандартных.
16. В чулане 10 пар ботинок. Из них случайно выбирается 4 пары. Найти вероятность того, что среди них нет парных.
17. В чулане 6 пар ботинок. Из них случайно выбирается 3 пары. Найти вероятность того, что среди них ровно одна пара.
18. Среди n экзаменационных билетов m “счастливых”. У какого студента больше вероятность выбрать “счастливый” билет: у того, кто подошёл первым, или у того, кто подошёл вторым?
19. В урне 5 белых и 3 чёрных шара. Из урны последовательно наугад вытаскивают все шары. Какова вероятность того, что последним будет вытащен чёрный шар?
20. Найти вероятность того, что среди четырёх выбранных наугад цифр две одинаковые (выбор производится из чисел 0,1,…,9 с возвращением).
21. n человек, среди которых A и B, становятся в ряд в любом порядке. Какова вероятность того, что между A и B будет r человек?
22. В шкафу находятся 10 пар туфель. Случайно выбираются четыре туфли. Найти вероятность того, что среди выбранных туфель окажется хотя бы одна пара.

23. Найти вероятность того, что при случайном размещении 4 шаров по 4 ящикам два ящика останутся пустыми.
24. Из последовательности чисел 1,2,…, n наудачу выбирают сначала одно число, затем другое. Найти вероятность того, что одно из этих чисел меньше k, а другое больше k, где k – целое число ($1<k<n$).
25. На шахматную доску произвольным образом поставили две ладьи (белую и чёрную), каждую в свою клетку. Что вероятнее: побьют эти ладьи друг друга или нет?

3. Геометрические вероятности

Пусть Ω- ограниченное измеримое множество в R^n, имеющее Лебегову меру $mes\,\Omega>0$.

Для любого измеримого подмножества $A \subset \Omega$ положим

$$\mathrm{P}(A) = \frac{mes\,A}{mes\,\Omega}.$$

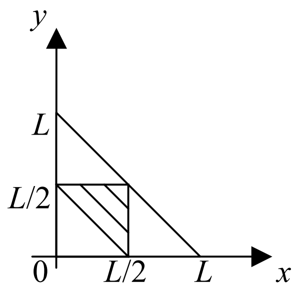
Это определение вероятности, соответствующее случайному выбору точки из множества Ω, называется геометрическим.

В конкретных задачах, сводящихся к этой вероятностной схеме, испытание интерпретируется как случайный выбор точки в некоторой области Ω (длина, площадь или объём), а событие A – как попадание выбранной точки в некоторую подобласть A области Ω. При этом требуется, чтобы все точки Ω имели одинаковые шансы быть выбранными.

Пример. На отрезке длиной L наудачу ставится две точки, в результате чего этот отрезок оказывается разделенным на три части. Определить вероятность того, что из трех получившихся частей отрезка можно построить треугольник.

Решение. Пусть M и N - точки, разделяющие отрезок на части. Обозначим $|OM|=x$, $|MN|=y$.Так как $0 \le x + y \le L$, то областью возможных значений x

и y будет треугольник с катетами , равными L. Треугольник можно построить тогда, когда сумма двух отрезков больше третьего, т.е. в случае, когда одновременно выполняются неравенства: $x<L/2$, $y<L/2$ и $x+y>L/2$. Эти неравенства определяют область, заштрихованную на рисунке.



Таким образом, наша задача может быть сформулирована следующим образом. В треугольник со сторонами, равными L, наудачу бросается точка. Определить вероятность того, что эта точка попадет в заштрихованную область. Эта вероятность будет равна отношению площадей заштрихованной к $L^2/2$. В данном случае она равна 1/4.

Варианты заданий

1. На отрезке длины L наугад выбрано две точки. Какова вероятность того, что расстояние между ними не превосходит $L/4$?
2. На плоскости проведены параллельные прямые, расстояние между которыми $2a$. На плоскость наугад бросается круг радиуса r ($r<a$). Какова вероятность того, что круг не пересечет ни одну прямую?
3. На окружности радиуса R наугад выбрано три точки A, B, C. Какова вероятность того, что треугольник ABC остроугольный?
4. На отрезке AB длиной L на удачу поставлены две точки M и P . Определить вероятность того, что длины каждого из трех получившихся отрезков не превосходят $2/3 \cdot L$.
5. Стержень длиной L наудачу ломается на три части. Определить вероятность того, что хотя бы одна часть будет не более $0{,}05L$.

6. На окружности радиуса R наугад взяли две точки. Какова вероятность того, что расстояние между ними не превышает $r(r<2R)$?
7. Какова вероятность того, что сумма двух положительных чисел, каждое из которых не больше двух, не превосходит 3, а их произведение будет больше двух?
8. Какова вероятность того, что частное двух положительных чисел, каждое из которых не больше единицы, не превосходит 3 , а их сумма меньше 3/2?
9. В круг радиуса r с центром в начале координат наугад бросается точка. Найти вероятность того, что точка попадет в область, заданную неравенством: $x^2-2y^2\le r^2/4$.
10. На отрезке AB длинной L случайным образом поставлены две точки M и K. Найти вероятность того, что точка M будет ближе к точке A, чем к точке K.
11. На окружности единичного радиуса с центром в начале координат наугад выбрана точка. Какова вероятность того, что проекция точки на диаметр расположена от центра на расстоянии, не превышающем r ($r<1$ и диаметр лежит на оси Ox)?
12. На окружности единичного радиуса с центром в начале координат наугад выбрана точка. Какова вероятность того, что ее расстояние от точки с координатами (1,0) не превышает r ($r<1$)?
13. На отрезок (0,1) наудачу брошены три точки. Найти вероятность того, что из отрезков, равным расстояниям точек падения от начала координат, можно составить треугольник.
14. В шаре радиуса R случайно и независимо друг от друга разбросано n точек. Чему равна вероятность того, что расстояние от центра до ближайшей точки будет не меньше r ($r<R$)?
15. В квадрат $\{(x_1,x_2)\colon 0\le x_1\le 1;\ 0\le x_2\le 1\}$ наудачу брошена точка. Пусть (ξ_1,ξ_2) ее координаты. Найти вероятность того, что $\{\xi_1+\xi_2<x\}$.

16. В квадрат $\{(x_1,x_2)$: $0\le x_1\le 1$; $0\le x_2\le 1\}$ наудачу брошена точка. Пусть (ξ_1,ξ_2) ее координаты. Найти вероятность того, что корни уравнения $x^2-\xi_1 x+\xi_2=0$ действительны.

17. В квадрат $\{(x_1,x_2)$: $0\le x_1\le 1$; $0\le x_2\le 1\}$ наудачу брошена точка. Пусть (ξ_1,ξ_2) ее координаты. Найти вероятность события $\{\xi_1\,\xi_2 < x\}$.

18. В квадрат $\{(x_1,x_2)$: $0\le x_1\le 1$; $0\le x_2\le 1\}$ наудачу брошена точка. Пусть (ξ_1,ξ_2) ее координаты. Найти вероятность события $\{\min(\xi_1,\xi_2) < x\}$.

19. На отрезке длины L наудачу выбраны 5 точек. Определить вероятность того, что две точки лежат от левого конца отрезка на расстоянии, меньшем, чем x, а три точки –на расстоянии большем , чем x .

20. В круг вписан равносторонний треугольник. Определить вероятность того, что из пяти точек, наугад выбранных внутри круга, три лежат по одной в каждом сегменте, а две лежат внутри треугольника.

21. В треугольник $\{(x_1,x_2)$: $1\le x_1\le 2$; $1\le x_2\le 3\}$ наугад брошена точка. Пусть (ξ_1,ξ_2) ее координаты. Какова вероятность того, что $\{\xi_1\xi_2 < x\}$.

22. В треугольник $\{(x_1,x_2)$: $1\le x_1\le 2$; $1\le x_2\le 3\}$ наугад брошена точка. Пусть (ξ_1,ξ_2) ее координаты. Какова вероятность того, что $\{\xi_1/\xi_2 < x\}$.

23. Определить вероятность того, что корни квадратного уравнения $a^2+2ax+b=0$ вещественны, если значения коэффициентов равновозможны в прямоугольнике $\{|a|\le n;\ |b|\le m\}$.

24. В круг радиуса R с центром в начале координат наугад брошена точка. Пусть (ξ_1,ξ_2) ее координаты. Какова вероятность события $\{\xi_1/\xi_2<x\}$.

25. В квадрат $\{(x_1,x_2)$: $|x_1|\le 1$; $|x_2|\le 1\}$ наугад брошена точка. Пусть (ξ_1,ξ_2) ее координаты. Найти вероятность события $\{\xi_1\xi_2<1/3\}$.

4. Вычисление вероятности события с использованием основных свойств вероятности.

При вычислении вероятности сложного события через вероятности более простых событий используются свойства вероятности.

Если A и B несовместны, то

$$\mathrm{P}(A+B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B).$$

Для совместных событий:

$$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B).$$

Для противоположных событий A и B имеет место равенство:

$$\mathrm{P}(\bar{A})=1-\mathrm{P}(A).$$

Если события A и B независимы, то

$$\mathrm{P}(A\cap B)= \mathrm{P}(A)\cdot\mathrm{P}(B).$$

Пример 1. Два стрелка, вероятности попадания в цель которых при одном выстреле равны соответственно p_1 и p_2, производят по два выстрела. Чему равна вероятность того, что будет хотя бы одно попадание?

Решение. Пусть события A_1 и A_2 состоят в том, что первый стрелок попадает в мишень при первом и при втором выстреле соответственно, и пусть B_1 и B_2 аналогичные события для второго стрелка. Событие, состоящее в том, что не будет ни одного попадания, будет $\bar{A}_1\bar{A}_2\bar{B}_1\bar{B}_2$. Так как выстрелы независимы, то вероятность этого события будет равна $(1-p_1)^2(1-p_2)^2$. Событие, состоящее в том, что будет хотя бы одно попадание, является противоположным к рассмотренному выше. Отсюда искомая вероятность будет равна

$$\mathrm{P}(A)=1-(1-p_1)^2(1-p_2)^2.$$

Пример 2. В двух урнах находятся шары, отличающиеся только цветом, причем в первой урне n_1 белых шаров, m_1 черных и k_1 красных, а во второй соответственно n_2, m_2 и k_2. Из обеих урн наудачу извлекаются по одному шару. Какова вероятность того, что оба шара одного цвета (событие C)?

Решение. Пусть события A_1, A_2, A_3 – из первой урны извлечены соответственно белый, черный и красный шары и события B_1, B_2, B_3 – такие же события для второй урны. Событие C – оба шара одного цвета – будет равно:

$$C = A_1B_1 + A_2B_2 + A_3B_3.$$

Так как события $A_к$ и $B_к$ независимы, а события A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3 несовместны, то

$$\mathrm{P}(C)=\mathrm{P}(A_1)\mathrm{P}(B_1)+\mathrm{P}(A_2)\mathrm{P}(B_2)+\mathrm{P}(A_3)\mathrm{P}(B_3)=$$

$$=\frac{n_1}{n_1+m_1+k_1}\frac{n_2}{n_2+m_2+k_2}+\frac{m_1}{n_1+m_1+k_1}\frac{m_2}{n_2+m_2+k_2}+\frac{k_1}{n_1+m_1+k_1}\frac{k_2}{n_2+m_2+k_2}=$$

$$=\frac{n_1n_2+m_1m_2+k_1k_2}{(n_1+m_1+k_1)(n_2+m_2+k_2)}.$$

Варианты заданий

1. Вероятность выигрыша в лотерее равна p. Некто решил покупать по одному билету из каждого тиража, пока не выиграет. Найти вероятность того, что он будет участвовать в пятом тираже.
2. Два стрелка, вероятности попадания по мишени которых равны соответственно p_1 и p_2, делают по одному выстрелу по мишени. Найти вероятность хотя бы одного попадания.
3. Вероятность того, что событие появится хотя бы один раз в трех независимых испытаниях, равна 0,936. Найти вероятность появления события в одном испытании.
4. Для каждого прибора вероятность того, что он включен в данный момент равна 0,6. Найти вероятность того, что в данный момент включен хотя бы один из трех приборов.
5. Вероятность поражения цели первым стрелком при одном выстреле равна 0,8, а вторым стрелком – 0,6. Найти вероятность того, что цель будет поражена только одним стрелком.

6. Вероятность попадания в цель из первого орудия равна 0,6, из второго – 0,8, из третьего – 0,5. Цель будет поражена, если произойдет хотя бы два попадания. Каждое орудие произвело по одному выстрелу по цели. Определить вероятность того, что цель будет поражена.
7. Из трех орудий по одной цели произведено по выстрелу. Вероятность попадания из первого орудия равна 0,9, из второго – 0,8, из третьего – 0,7. Определить вероятность того, что будет ровно два попадания.
8. Два стрелка, вероятности попадания в цель которых p_1 и p_2 соответственно, стреляют по цели поочередно до первого попадания. Найти вероятность того, что больше выстрелов сделает начинающий стрелять первым.
9. Определить вероятность появления события в одном опыте, если вероятность появления этого события один раз в двух опытах равна 5/18.
10. Вероятность появления события в каждом опыте одинакова и равна 0,4. Опыты производятся до наступления события. Определить вероятность того, что придется производить четвертый опыт.
11. Из колоды в 36 карт наудачу вынимаются две карты. Определить вероятность того, что хотя бы одна карта будет тузом.
12. При передаче текста 10% букв искажаются и принимаются неверно. Какова вероятность того, что все пять букв данного слова будут приняты правильно?
13. Каждая буква слова «математика» написана на отдельной карточке, карточки тщательно перемешаны. Последовательно извлекаются четыре карточки. Какова вероятность получить слово «тема»?
14. Двое поочередно бросают игральную кость. Выигрывает тот, у кого раньше выпадет 6 очков. Определить вероятность выигрыша второго игрока.
15. Из трех орудий по одной цели произведено по выстрелу. Вероятность попадания из первого орудия равна 0,9, из второго – 0,8, из третьего – 0,6. Определить вероятность хотя бы двух попаданий.

16. Из колоды в 36 карт наудачу вынимают три карты. Определить вероятность того, что они будут одной и той же масти.
17. Вероятность попадания в мишень при одном выстреле равна 0,8. Стрельба ведется до первого попадания. Найти вероятность того, что будет произведено 5 выстрелов.
18. Из колоды в 36 карт наудачу вынимают три карты. Определить вероятность того, что они будут разных мастей.
19. Вероятность появления события A в трех независимых опытах хотя бы один раз равна 0,75. Определить вероятность того, что в двух опытах событие появится оба раза.
20. Девять пассажиров размещаются по трем вагонам. Каждый пассажир выбирает вагон наугад. Какова вероятность того, что в каждый вагон сядет по три пассажира?
21. Бросают три игральные кости. Какова вероятность того, что хотя бы на одной из них выпадет одно очко, если на всех трех костях выпали разные грани?
22. Бросают одновременно два игральных кубика. Найти вероятность того, что произведение чисел, которые выпадут, будет четным числом.
23. В урне имеется 6 белых и 4 черных шаров. Два игрока достают последовательно по одному шару, возвращая каждый извлеченный шар. Игра продолжается до тех пор, пока кто-нибудь из них не вытащит белый шар. Определить вероятность того, что первым вытащит белый шар игрок, начинавший игру.
24. Из колоды в 36 карт извлекается одна карта, после чего она возвращается назад. Потом из колоды извлекаются две карты. Определить вероятность того, что все три карты будут одной и той же масти.
25. Бросаются два игральных кубика. Пусть n число очков, выпавших на первом из них, а m число очков, выпавших на втором. Найти вероятность события $\{\mathrm{mod}(n,m)=5\}$.

5. Условная вероятность, формула полной вероятности и формулы Байеса.

Условной вероятностью P(A|B) события A при условии, что произошло событие B (P(B)>0) называется отношение

$$\mathrm{P}(A \mid B) = \frac{\mathrm{P}(A \cap B)}{\mathrm{P}(B)}$$

Из определения условной вероятности получается равенство

$$\mathrm{P}(A \cap B) = \mathrm{P}(B)\mathrm{P}(A \mid B),$$

которое называют теоремой умножения вероятностей.

Если B – произвольное событие, события H_1, H_2, . . ., H_n попарно несовместны, P(H_k)>0, (k=1,…,n) и $H_1 + H_2 + \ldots + H_n = \Omega$, то имеет место следующая формула:

$$\mathrm{P}(B) = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{P}(H_k) \cdot \mathrm{P}(B \mid H_k),$$

которая называется формулой полной вероятности.

Если при этих предположениях P(B)>0, то имеют место формулы

$$\mathrm{P}(Hk / B) = \frac{\mathrm{P}(H_k) \cdot \mathrm{P}(B \mid H_k)}{\sum_{i=1}^{n} \mathrm{P}(H_i) \cdot \mathrm{P}(B \mid H_i)}$$

называемые формулами Байеса.

Пример1. Партия деталей содержит 20% деталей, изготовленных заводом №1, 30% – заводом №2, 50% – заводом №3. Для завода №1 вероятность выпуска бракованной детали равна 0,05, для завода №2 – 0,01, для завода №3 – 0,06. Чему равна вероятность того, что наудачу взятая из партии деталь окажется бракованной?

Решение: Обозначим через B событие: наудачу взятая деталь – бракованная., через H_1, H_2, H_3 – деталь, изготовленная соответственно заводом №1, №2, №3. Из условия известны вероятности:

$$\mathrm{P}(H_1)=0.2, \quad \mathrm{P}(H_2)=0.3, \quad \mathrm{P}(H_1)=0.5,$$

$$P(B|H_1)=0.05, \quad P(B|H_2)=0.01, \quad P(B|H_3)=0.06.$$

По формуле полной вероятности находим

$$P(B)=0.2 \cdot 0.05+0.3 \cdot 0.01+0.5 \cdot 0.06=0.043 .$$

Пример2. Имеется пять урн. В 1-й, 2-й и 3-й урнах находится по 2 белых и 3 черных шара; в 4-й и 5-й урнах – по 1 белому и 1 черному шару. Случайно выбирается урна и из нее извлекается шар. Какова условная вероятность того, что выбрана 4-я или 5–я урна, если извлеченный шар оказался белым?

Решение. Обозначим через B событие – выбранный шар белый, H_1 –шар выбран из 1-й , 2-й или 3-й урны, через H_2 –шар выбран из 4-й или 5-й урны. Нужно определить $P(H_2|B)$. Определяем вероятности: $P(H_1)=3/5$, $P(H_2)=2/5$, $P(B|H_1)=2/5$, $P(B|H_2)=1/2$. По формулам Байеса находим

$$P(H_2 \mid B) = \frac{2/5 \cdot 1/2}{3/5 \cdot 2/5 + 2/5 \cdot 1/2} = \frac{5}{11}.$$

Варианты заданий

1. Завод выпускает за три декады месяца соответственно 20, 30 и 50 % задания, причем вероятности брака соответственно составляют 0,01, 0,012, 0,015. Найти вероятность того, что изделие выпущено в первой декаде, если в нем обнаружен дефект.
2. В трех урнах содержатся шары, причем в первой – a белых и b черных, во второй c белых и d черных, в третьей – только белые. Наугад выбирается урна, затем из нее выбирается шар. Найти вероятность того, что вынутый шар – белый.
3. Из урны, в которой m белых и n черных шаров, потерян один шар. Для того, чтобы определить состав шаров в урне , извлечено два шара, которые оказались белыми. Определить вероятность того, что утерян белый шар.

4. Сборщик получил три коробки деталей, изготовленных заводом №1 и две коробки, изготовленных заводом №2. Вероятность того, что деталь завода №1 стандартная равна 0,8, а завода №2 – 0,9. Сборщик извлек деталь из наудачу выбранной коробки. Найти вероятность того, что извлечена стандартная деталь.
5. В двух ящиках есть радиолампы. В первом содержится 12 ламп, из них одна нестандартная, а во втором – 10, из которых 2 нестандартные. Из первого ящика во второй переложена одна лампа. Найти вероятность того, что наудачу извлеченная из второго ящика лампа будет нестандартной..
6. Вероятность попадания в цель для одного стрелка равна 0,8, для второго – 0,6. Один из стрелков произвел выстрел, но в цель не попал. Определить вероятность того, что это был первый стрелок.
7. В ящике три детали. Все предположения о количестве стандартных среди них равновероятны. Наугад взятая деталь оказалась стандартной. Определить вероятности всех предположений о количестве стандартных деталей.
8. Среди n билетов m выигрышных. Какова вероятность выиграть для лица, покупающего один билет, если перед этим был куплен только один билет.
9. В одной урне два белых и два черных шара, в другой два белых и три черных. Из наугад выбранной урны извлечен шар, оказавшийся черным. Найти вероятность того, что он извлечен из первой урны.
10. Из урны, содержащей 4 белых и 6 черных шаров, наудачу вынуты два шара и переложены в другую урну, содержащую 5 белых и 3 черных шара. После этого из второй урны вынули шар, оказавшийся черным. Найти вероятность того, что оба переложенных шара были одного цвета.
11. Два из трех независимо работающих элементов вычислительного устройства отказали. Вычислить вероятность того, что отказали первый и второй элементы, если вероятности отказа первого, второго и третьего элементов соответственно равны 0,2, 0,4, 0,3.

12. Среди n лотерейных билетов m выигрышных. Какова вероятность выиграть для лица, покупающего один билет, если перед этим было куплено только два билета?
13. Из пяти урн в двух по два белых и одному черному шару, в одной 10 черных шаров, в двух по три белых и одному черному шару. Из наугад выбранной урны извлечен шар. Определить вероятность того, что этот шар белый.
14. Вероятность того, что параметры одного из трех блоков радиостанции выйдут из допусков во время полета самолета равны соответственно 0,1, 0,2, 0,3. Если из поля допусков вышли параметры одного блока, связь не будет установлена с вероятностью 0,25, если двух блоков, то 0,4, если трех, то 0,5. Найти вероятность того, что связь не будет установлена.
15. В первом ящике 20 деталей, из них 15 стандартных, во втором ящике 30 деталей, из них 24 стандартных, в третьем – 10 деталей, из них 6 стандартных. Найти вероятность того, что наудачу извлеченная деталь из наудачу выбранного ящика – стандартная.
16. В первом ящике 20 деталей, из которых 5 бракованных, во втором - 30, из которых 6 бракованных, в третьем – 16 , из которых 4 бракованные. Из наугад выбранного ящика извлечена деталь. Найти вероятность того, что деталь взята из второго или третьего ящика, если она оказалась бракованной.
17. В ящике 4 детали. Все предположения о количестве стандартных среди них, одинаково вероятны. Определить вероятность того, что наудачу взятая деталь оказалась стандартной.
18. В урну, в которой n шаров положили белый шар. Какова вероятность того, что вытащенный наудачу после этого шар будет белым, если все предположения о первоначальном составе урны равновозможны.
19. В урне 7 белых и 5 черных шаров. Вытащили два шара. После этого вытащен еще один шар. Какова вероятность того, что он белый?

20. В одной урне 6 белых и 4 черных шара, во второй 3 белых и 5 черных. Из первой урны во вторую переложили два шара. После этого из второй урны вытащили два шара, которые оказались разного цвета. Определить вероятность того, что и шары, переложенные из первой урны во вторую, были разного цвета.
21. На фабрике, изготовляющей болты, машины *A*, *B*, *C* производят соответственно 25, 35 и 40 % всех изделий. В их продукции брак составляет соответственно 5, 4 и 2 %. Случайно выбранный из продукции болт оказался дефектным. Какова вероятность того, что он произведен машиной *A*?
22. На конвейер попадают детали с трех автоматов. Известно, что первый автомат дает 0,3 % брака, второй – 0,2 %, а третий – 0,4 %. С конвейера наугад берут деталь, найти вероятность того, что эта деталь бракованная, если с первого автомата попало 1000, со второго – 2000, а с третьего – 2500 деталей.
23. В институте n студентов, из которых n_k (k= 1, 2, 3, 4, 5) человек учатся k-й год. Среди двух наудачу выбранных студентов оказалось, что один из них учится больше второго. Какова вероятность того, что этот студент учится пятый год?
24. Из урны, содержащей 7 белых и 3 черных шара, утеряно 2 шара. Какова вероятность извлечь после этого наудачу из урны белый шар?
25. Из чисел 1 ,2 ,….,n одно за другим выбирают наугад два числа. Какова вероятность того, что разность между первым выбранным числом и вторым будет не меньше m (m>0)?

6. Схема Бернулли.

Производятся независимые испытания. В каждом испытании возможно всего два исхода "успех" и "неудача", причём вероятность успеха равна p.

Тогда вероятность того, что в n испытаниях произойдёт ровно m успехов, определяется формулой

$$\mathrm{P}_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m},$$

где q=1-p.

Наивероятнейшее значение μ числа m появлений события A равно целой части числа $(n+1)p$, а при целом $(n+1)p$ наибольшее значение вероятности достигается при двух числах: $\mu_1=(n+1)p-1$ и $\mu_2=(n+1)p$.

<u>Пример.</u> Произведено 20 выстрелов по цели. Вероятность попадания при одном выстреле равна 0,7. Вычислить: а) вероятность того, что будет хотя бы одно попадание; б) вероятность того, что будет не более двух попаданий; в) наиболее вероятное число попаданий.

<u>Решение.</u> Вероятность того, что будет хотя бы одно попадание можно определить как вероятность события, противоположного к событию – нет ни одного попадания. Поэтому вероятность события – есть хотя бы одно попадание – будет равна $1-0{,}3^{20}$

Событие, состоящее в том, что будет не более двух попаданий равно объединению событий : число попаданий равно 0, 1 или 2. Вероятность этого события будет равна

$$\mathrm{P}(m\le 2)=\mathrm{P}_{20}(0)+\mathrm{P}_{20}(1)+\mathrm{P}_{20}(2)=(0{,}3)^{20}+20(0{,}3)^{19}0{,}7+(20\cdot 19/2)\cdot(0{,}3)^{18}(0{,}7)^2.$$

Так как $(n+1)p$=14.2, то наиболее вероятное число попаданий равно 14.

Варианты заданий

1. 1.Произведено 12 выстрелов по мишени. Вероятность попадания при каждом выстреле равна 0.8. Определить наиболее вероятное число попаданий и его вероятность. Определить вероятность того, что будет два или три попадания.

2. Какова вероятность не менее двух раз попасть в цель, если вероятность попадания равна 1/5 и произведено 10 независимых выстрелов?
3. Произведено 20 выстрелов по цели. A вероятность попадания при одном выстреле равна 0.2 . Определить вероятность уничтожения цели, если для этого необходимо не менее трех попаданий.
4. Найти вероятность того, что событие A появится в пяти независимых испытаниях не менее двух раз, если в каждом испытании вероятность его появления равна 0.3 .
5. Игральный кубик подбрасывается до первого появления шестерки. Какова вероятность того, что будет сделано не более трех бросаний.
6. Монету подбрасывают 6 раз. Определить вероятность того, что герб выпадет не менее трех раз.
7. Считая вероятности рождения мальчика или девочки равными 0.5 определить, что более вероятно : в семье из 8 детей 4 мальчика или в семье из 5 детей 3 мальчика?
8. Вероятность выхода из строя прибора равна 0.2 . Найти вероятность того, что из десяти приборов выйдут из строя два или больше.
9. Найти вероятность того, что при шести бросаниях игрального кубика три очка выпадет не более двух раз.
10. Найти вероятность того, что при пяти бросаниях монеты герб выпадет не менее трех раз.
11. Производится шесть независимых выстрелов по цели. Вероятность попадания при каждом выстреле равна 0.75 . Вычислить вероятность не менее пяти попаданий.
12. Вероятность попадания в цель равна 0.6 и производится 10 независимых выстрелов. Найти условную вероятность хотя бы двух попаданий при условии, что одно попадание произошло.
13. Рабочий обслуживает 12 однотипных станков. Вероятность того, что станок потребует к себе внимания рабочего в течение промежутка времени длительностью τ, равна 1/3. Чему равна вероятность того, что

число требований к рабочему со стороны станков за время τ будет между 3 и 6 (включая границы)?

14. Испытание заключается в бросании трех игральных костей. Найти вероятность того, что при 10 испытаниях ровно в 4-х испытаниях появится в точности по две "шестерки".
15. Двое бросают монету по n раз каждый. Найти вероятность того, что у них выпадет одинаковое число гербов.
16. Сколько раз нужно бросить игральный кубик для того, чтобы вероятность появления шести очков хотя бы один раз была не менее 0.9?
17. В круг вписан квадрат. Какова вероятность того, что из 10 точек, брошенных на удачу в круг, 4 попадут в квадрат, 3 – в один из сегментов и по одной – в оставшиеся 3 сегмента?
18. Монета подбрасывается 20 раз. Найти вероятность того, что в первых 10 бросаниях герб появится 4 раза, а в последующих 10 бросаниях – 6 раз.
19. Рабочий изготовил 6 изделий. Вероятность изготовления стандартного изделия равна 0.8. Какова вероятность того, что среди шести изготовленных изделий будет не менее 4-х стандартных?
20. Сколько нужно произвести независимых опытов, в каждом из которых вероятность появления события A равна 0.4, чтобы наивероятнейшее число появлений события было равно 8?
21. Батарея произвела 14 выстрелов по мишени, вероятность попадания в которую равна 0.2 . Найти вероятность уничтожения мишени, если для этого нужно не менее 4-х попаданий.
22. Два баскетболиста бросают мяч в корзину по 5 раз. Вероятность попадания при каждом броске для каждого из них равно соответственно 0.6 и 0.7. Найти вероятность того, что у первого баскетболиста будет больше попаданий, чем у второго.
23. Игральный кубик подбрасывают 6 раз. Определить вероятность того, что 4 раза появится число очков, кратное трем.

24. Сколько раз нужно подбросить игральный кубик, чтобы 6 очков выпало хотя бы один раз с вероятностью, не меньшей 0.9?
25. Какова вероятность не менее 3-х попаданий в цель, если вероятность попадания равна 0.8 и производится 5 независимых выстрелов?

7. Функция и плотность распределения случайной величины. Числовые характеристики случайных величин, характеристическая функция, распределение функции одной случайной величины.

Функцией распределения случайной величины ξ $F_\xi(x)$ называется вероятность $P\{\xi<x\}$. Если существует функция $f_\xi(x)$ такая, что

$$F_\xi(x) = \int_{-\infty}^{x} f_\xi(x)dx,$$

то она называется плотностью распределения случайной величины. Плотность распределения обладает следующими двумя свойствами:

$$1)\ f_\xi(x) \ge 0; \qquad 2)\ \int_{-\infty}^{\infty} f_\xi(x)dx = 1.$$

Плотность распределения во всех точках непрерывности равна производной от функции распределения.

Наиболее важными числовыми характеристиками случайной величины являются математическое ожидание и дисперсия.

Если ξ –случайная величина, имеющая плотность распределения $f_\xi(x)$, то математическое ожидание определяется по формуле:

$$E\xi = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f_\xi(x)dx.$$

Дисперсией случайной величины называется математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины от её математического ожидания, т.е.

$$\mathrm{D}\xi = \mathrm{E}(\xi - \mathrm{E}\xi)^2.$$

При вычислении дисперсии часто используют формулу : $\mathrm{D}\xi = \mathrm{E}\xi^2 - (\mathrm{E}\xi)^2$

Характеристической функцией $\varphi_\xi(t)$ случайной величины ξ называется математическое ожидание функции $e^{it\hat{\imath}}$:

$$\varphi_\xi(t) = \mathrm{E}e^{it\xi}.$$

Если $f_\xi(x)$ – плотность распределения случайной величины, то

$$\varphi_\xi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} f_\xi(x)dx.$$

Плотность распределения случайной величины η, где $\eta=g(\xi)$ – монотонная функция, определяется формулой

$$f_\eta(y) = f_\xi(g^{-1}(y))[g^{-1}(y)]'.$$

Здесь $\xi=g^{-1}(\eta)$ – обратная функция. Если обратная функция $g^{-1}(y)$ неоднозначна, т.е. одному значению y соответствует несколько значений $g^{-1}(y)$: $g_1(y)^{-1},\ldots,g_n^{-1}(y)$, то плотность распределения случайной величины определяется формулой:

$$f_\eta(y) = \sum_{k=1}^{n} f_\xi(g_k(y))[g_k^{-1}(y)]'.$$

<u>Пример</u>. Случайная величина ξ имеет плотность распределения

$$f_{\hat{\imath}}(x) = \begin{cases} A(2-|x|), \text{при } x \in [-1;2], \\ 0, \qquad \text{иначе.} \end{cases}$$

Определить: а) число A ; б) функцию распределения случайной величины ξ; в) математическое ожидание и дисперсию ξ; г) плотность распределения случайной величины $\eta=\xi^2$.

Решение. а). Число A определим, используя первое свойство плотности распределения. В данном случае, т.к. плотность распределения отлична от нуля только в интервале [-1;2], имеем равенство:

$$A\int_{-1}^{2}(2-|x|)dx = A\int_{-1}^{0}(2+x)dx + A\int_{0}^{2}(2-x)dx = 1.$$

Проинтегрировав, определяем значение A: A=2/7.

б). Функция распределения $F_\xi(x)$ и плотность распределения $f_\xi(x)$ связаны равенством:

$$F_\xi(x) = \int_{-\infty}^{x} f_\xi(y)\,dy.$$

При $x \le -1$: $F_\xi(x)=0$; при $-1< x \le 0$:

$$F_\xi(x) = \frac{2}{7}\int_{-1}^{x}(2+y)dy = \frac{1}{7}(2+y)^2\Big|_{-1}^{x} = \frac{1}{7}(3+4x+x^2);$$

при $0 < x \le 2$:

$$F_\xi(x) = \frac{2}{7}\int_{-1}^{0}(2+y)dy + \frac{2}{7}\int_{0}^{x}(2-y)dy = \frac{1}{7}(3+4x-x^2);$$

при $x > 2$: $F_\xi(x)=1$. Следовательно,

$$F_\xi(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \le -1; \\ 1/7\,(3+4x+x^2), & \text{при } -1 < x \le 0; \\ 1/7\,(3+4x-x^2), & \text{при } 0 < x \le 2; \\ 1, & \text{при } x > 2. \end{cases}$$

в). Определяем математическое ожидание:

$$E\xi = \frac{2}{7}\int_{-1}^{0}x(2+x)dx + \frac{2}{7}\int_{0}^{2}x(2-x)dx = \frac{4}{27}.$$

Для определения дисперсии предварительно вычисляем $E\xi^2$:

$$E\xi^2 = \int_{-\infty}^{\infty}x^2 f_\xi(x)dx = \frac{2}{7}\int_{-1}^{0}x^2(2+x)dx + \frac{2}{7}\int_{0}^{2}x^2(2-x)dx = \frac{1}{2}.$$

Дисперсия случайной величины ξ будет равна :

$$D\xi = E\xi^2 - (E\xi)^2 = 1/2 - (4/21)^2 = 409/441.$$

г). Характеристическая функция случайной величины ξ будет равна:

$$\varphi_\xi(t) = \frac{2}{7}\int_{-1}^{0}(2+x)\,e^{it\xi}dx + \frac{2}{7}\int_{0}^{2}(2-x)\,e^{it\xi}dx = \frac{2}{7}\left[\frac{1}{t^2}(2 - e^{-it} - e^{2it}) - \frac{1}{it}e^{-it}\right].$$

д) Для определения плотности распределения случайной величины $\eta=\xi^2$, найдем сначала функцию распределения этой случайной величины. Заметим, что при $y\le 0$, $F_\xi(y)=0$, так как случайная величина $\eta=\xi^2$ может принимать только неотрицательное значения. При $y>0$ имеем:

$$F_\eta(y) = P\{\eta < y\} = P\{\xi^2 < y\} = P\{-\sqrt{y} < \xi < \sqrt{y}\} = F_\xi(\sqrt{y}) - F_\xi(-\sqrt{y}).$$

Продифференцировав $F_\eta(y)$, получаем выражение плотности распределения случайной величины η через плотность распределения случайной величины ξ:

$$f_\eta(y) = f_\xi(\sqrt{y})\frac{1}{2\sqrt{y}} + f_\xi(-\sqrt{y})\frac{1}{2\sqrt{y}}.$$

При $0 < y \le 1$: $f_\xi(\sqrt{y}) = f_\xi(-\sqrt{y}) = \frac{2}{7}(2-\sqrt{y})$.

При $1 < y \le 4$: $f_\xi(\sqrt{y}) = \frac{2}{7}(2-\sqrt{y})$; $f_\xi(-\sqrt{y}) = 0$.

При $y > 4$: $f_\xi(\sqrt{y}) = f_\xi(-\sqrt{y}) = 0$.

Следовательно,

$$f_\eta(y) = \begin{cases} 0, & \text{при } y \le 0, \\ 2(2-\sqrt{y})/(7\sqrt{y}), & \text{при } 0 < y \le 1, \\ (2-\sqrt{y})/(7\sqrt{y}), & \text{при } 1 < y \le 4, \\ 0, & \text{при } y > 4. \end{cases}$$

Варианты заданий.

Ниже записаны выражения для плотности распределения $f_\xi(x)$ случайной величины ξ.

Требуется определить:

а) число A; б) функцию распределения $F_\xi(x)$ случайной величины ξ; в) математическое ожидание $E\xi$ и дисперсию $D\xi$; г) характеристическую функцию $\varphi_\xi(t)$; д) плотность распределения случайной величины $\eta = \psi(\xi)$.

1. $f_\xi(x) = \begin{cases} A\,x^2 \exp\{-k\,x\}, & x \ge 0, \\ 0, & x < 0; \end{cases}$ $\quad \psi(\xi) = 2\xi^2 - 1.$

2. $f_\xi(x) = \begin{cases} A\,x \sin x, & x \in (0, \pi/2), \\ 0, & \text{иначе}; \end{cases}$ $\quad \psi(\xi) = -2\xi + 1.$

3. $f_\xi(x) = \begin{cases} A(1 - \dfrac{|x|}{a}), & x \le a, \\ 0, & x > a; \end{cases}$ $\quad \psi(\xi) = 3\xi + 2.$

4. $f_\xi(x) = \begin{cases} A\,x^m \exp\{-x\}, & x > 0, \\ 0, & x \le 0; \end{cases}$ $\quad \psi(\xi) = 2\xi^2.$

5. $f_\xi(x) = A \exp\{-2\,|x|\}; \quad \psi(\xi) = 2\sqrt{\xi}.$

6. $f_\xi(x) = \begin{cases} A\,x \exp\{-3\,x\}, & x \ge 0, \\ 0, & x < 0; \end{cases}$ $\quad \psi(\xi) = \ln \xi.$

7. $f_\xi(x) = \begin{cases} A\,x \exp\{-x^2/2\}, & x \ge 0, \\ 0, & x < 0; \end{cases}$ $\quad \psi(\xi) = 2\xi^2 + 1.$

8. $f_\xi(x) = A \exp\{-\dfrac{1}{2}|x - 1|\}; \quad \psi(\xi) = 2\xi^2 - 1.$

9. $f_\xi(x) = \begin{cases} A \cos(x/2), & x \in (0, \pi/2), \\ 0, & \text{иначе}; \end{cases}$ $\quad \psi(\xi) = \cos \xi.$

10. $f_\xi(x) = \begin{cases} A\,x^2 \exp\{-x^2/2\}, & x > 0, \\ 0, & x \le 0; \end{cases}$ $\quad \psi(\xi) = 2\xi^2.$

11. $f_\xi(x) = \begin{cases} A\,(2\,x - x^2), & x \in [-1; 2], \\ 0, & x \notin [-1; 2]; \end{cases}$ $\quad \psi(\xi) = |2\xi - 1|.$

12. $f_\xi(x) = \begin{cases} A|x - 1|, & x \in (0; 3), \\ 0, & x \notin (0; 3); \end{cases}$ $\quad \psi(\xi) = 1 - \xi^2.$

13. $f_{\xi}(x)=\begin{cases} A\,|\,2x-1\,|, & x\in(0;2),\\ 0, & x\notin(0;2);\end{cases}$ $\psi(\xi)=\mathrm{e}^{\xi}$.

14. $f_{\xi}(x)=\begin{cases} 3/4-A\,(x-1)^2, & x\in(0;2),\\ 0, & x\notin(0;2);\end{cases}$ $\psi(\xi)=|\,\xi-1\,|$.

15. $f_{\xi}(x)=\begin{cases} A\,|\,x+2\,|, & x\in(-3;3),\\ 0, & x\notin(-3;3);\end{cases}$ $\psi(\xi)=\arcsin\dfrac{\xi}{3}$.

16. $f_{\xi}(x)=\begin{cases} A\,x(1-x), & x\in(0;1),\\ 0, & x\notin(0;1);\end{cases}$ $\psi(\xi)=|\,2\xi-1\,|$.

17. $f_{\xi}(x)=\begin{cases} A\,x(2+x), & x\in(-2;0),\\ 0, & x\notin(-2;0);\end{cases}$ $\psi(\xi)=-\xi^2$.

18. $f_{\xi}(x)=\begin{cases} A\,(2x+1), & x\in(0;2),\\ 0, & x\notin(0;2);\end{cases}$ $\psi(\xi)=3\mathrm{e}^{2\xi}$.

19. $f_{\xi}(x)=\begin{cases} A\,x\cos(x/2), & x\in[0;\pi/2],\\ 0, & x\notin[0;\pi/2]\end{cases}$ $\psi(\xi)=\sqrt{\xi}$.

20. $f_{\xi}(x)=\begin{cases} A\,(2x+1)\exp\{-x/2\}, & x\geq 0,\\ 0, & x<0;\end{cases}$ $\psi(\xi)=\ln\xi$.

21. $f_{\xi}(x)=\begin{cases} A\,(\pi/2-x)\sin x, & x\in(0,\pi/2)\\ 0, & x\notin(0;\pi/2)\end{cases}$ $\psi(\xi)=\pi-\xi$.

22. $f_{\xi}(x)=\begin{cases} A\,(1-x/2), & x\in(-4;2),\\ 0, & x\notin(-4;2);\end{cases}$ $\psi(\xi)=2\xi$.

23. $f_{\xi}(x)=\begin{cases} A\,(x+1)\exp\{-x^2\}, & x\geq 0,\\ 0, & x<0;\end{cases}$ $\psi(\xi)=4\xi^2-1$.

24. $f_{\xi}(x)=\begin{cases} A\,(x+1)\exp\{-2x), & x\geq 0,\\ 0, & x<0;\end{cases}$ $\psi(\xi)=2\sqrt{\xi}$.

25. $f_{\xi}(x)=\begin{cases} A(2x+1)\cos x, & x\in(0;\pi/2),\\ 0, & x\notin(0;\pi/2);\end{cases}$ $\psi(\xi)=1-\xi^2$.

8. Распределение функций пары случайных величин.

Функция распределения $f(x,y)$ пары случайных величин (ξ,n) определяется формулой: $\mathrm{F}(x,y) = P(\xi < x, \eta < y)$.

Если существует функция $f(x,y)$ такая, что

$$\mathrm{F}(x,y) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(u,v)dudv,$$

то она называется плотностью распределения пары случайных величин. В каждой точке непрерывности функции $f(x,y)$ выполняется равенство:

$$f(x,y) = \frac{\partial^2 \mathrm{F}}{\partial x\, \partial y}.$$

Функцию распределения пары случайных величин можно рассматривать как вероятность попадания точки со случайными координатами в область, определяемую неравенствами: $\{\xi < x;\ \eta < y\}$.

Вероятность попадания точки с координатами (ξ,n) в область D плоскости xOy равна интегралу от плотности распределения по этой области.

Если для всех x и y выполняются равенства $\mathrm{F}(x,y)=\mathrm{F}_\xi(x)\ \mathrm{F}_\eta(y)$ или $f(x,y)=f_\xi(x)\, f_\eta(y)$, то случайные величины ξ и η называются независимыми.

Функция распределения случайной величины $\zeta=\varphi(\xi,\eta)$ равна:

$$\mathrm{F}_\zeta(z) = \iint_D f(x,y)dxdy,$$

где область D определяется неравенством $\varphi(\xi,\eta) < z$.

Пример. Случайные величины ξ и η независимы и ξ равномерно распределена в интервале [0,1], а η имеет показательное распределение с параметром λ. Найти плотность распределения случайной величины $\zeta = \xi + \eta$

Решение. По условию плотности распределения случайных величин ξ и η имеют вид:

$$f_\xi(x)=\begin{cases}1, & x\in[0,1],\\ 0, & x\notin[0,1];\end{cases}\qquad f_\eta(y)=\begin{cases}\lambda\,\mathrm{e}^{-\lambda y}, & y\ge 0,\\ 0, & y<0].\end{cases}$$

Так как ξ и η независимы, то плотность распределения пары (ξ,η) будет равна произведению этих случайных величин:

$$f(x,y)=\begin{cases}\lambda\,\mathrm{e}^{-\lambda y}, & 0\le x\le 1, y\ge 0;\\ 0, & \text{в остальных случаях.}\end{cases}$$

Функция распределения $\mathrm{F}_\zeta(z)$ случайной величины ζ определяется равенством

$$\mathrm{F}_\varsigma(x)=\iint\limits_D f(x,y)dxdy,$$

где $D=\{(x,y)\colon x+y<z\}$.

Так как плотность $f(x,y)$ отлична от нуля в области $\{(x,y)\colon 0\le x\le z, y\ge 0\}$, то $\mathrm{F}_\zeta(z)$ для различных значений z будет иметь различные выражения. Для $z\le 0$ имеем $\mathrm{F}_\zeta(z)=0$. Для $0<z\le 1$ областью интегрирования, которая определят $\mathrm{F}_\zeta(z)$, является заштрихованная область, изображенная на рис.1, а для $z>1$ – на рис.2.

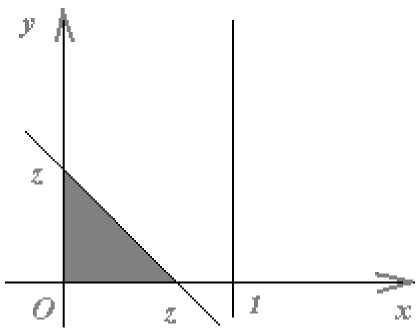


Рис. 1

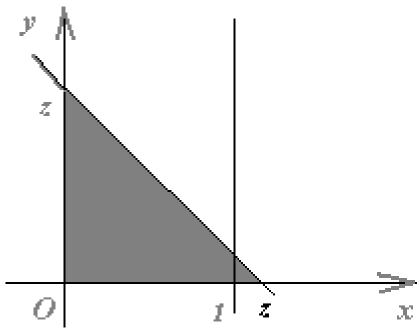


Рис. 2

Для $0<z\le 1$ имеем:

$$\mathrm{F}_\varsigma(z)=\int_0^z dx\int_0^{z-x}\lambda\,\mathrm{e}^{-\lambda y}dy=\int_0^x(1-\mathrm{e}^{-\lambda(z-x)})dx=z-\frac{1}{\lambda}(1-\mathrm{e}^{-\lambda z}).$$

Для $z>1$ аналогичным образом получим:

$$\mathrm{F}_\varsigma(z)=\int_0^1 dx\int_0^{z-x}\lambda\,\mathrm{e}^{-\lambda y}dy=\int_0^1(1-\mathrm{e}^{-\lambda(z-x)})dx=1-\frac{1}{\lambda}(\mathrm{e}^{-\lambda(z-1)}-\mathrm{e}^{-\lambda z}).$$

Таким образом,

$$F_\zeta(z)=\begin{cases}0, & z\le 0,\\ z-(1-e^{-\lambda z})/\lambda, & 0<z\le 1,\\ 1-(e^{-\lambda(z-1)}-e^{-\lambda z})/\lambda, & z>1.\end{cases}$$

Продифференцировав $F_\zeta(z)$, получаем выражение для плотности распределения случайной величины ζ:

$$f_\zeta(z)=\begin{cases}0, & z\le 0,\\ 1-e^{-\lambda z}, & 0<z\le 1,\\ e^{-\lambda(z-1)}-e^{-\lambda z}, & z>1.\end{cases}$$

Варианты задания

1. Пара случайных величин (ξ,η) имеет плотность распределения

$$f(x,y)=\begin{cases}x+y, & \text{при } 0\le x\le 1,\ 0\le y\le 1,\\ 0, & \text{в остальных случаях.}\end{cases}$$

   Найти плотность распределения случайной величины $\zeta=\xi+\eta$.

2. Случайные величины ξ и η независимы и имеют показательное распределение с параметром λ. Определить плотность распределения случайной величины ξ/η.

3. Случайные величины ξ и η независимы и имеют плотности распределения:

$$f_\xi(x)=\begin{cases}12x^2(1-x), & x\in(0,1),\\ 0, & x\notin(0,1).\end{cases}\quad f_\eta(y)=\begin{cases}2y, & y\in(0,1),\\ 0, & y\notin(0,1).\end{cases}$$

   Найти плотность распределения случайной величины $\xi\cdot\eta$.

4. Случайные величины ξ и η независимы и нормально распределены с параметрами $a=0$, $\sigma^2=1$), вычислить $P\{\xi^2+\eta^2<R^2\}$.

5. Пусть ξ и η – независимые случайные величины, имеющие распределение Коши:

   Найти плотность распределения случайной величины $\xi\cdot\eta$.

$$f_\xi(x)=f_\eta(x)=\frac{1}{\pi}\frac{1}{1+x^2}.$$

6. Случайные величины ξ и η независимы и равномерно распределены в интервале [-1;3]. Найти плотность распределения случайной величины$\xi\cdot\eta$.
7. Случайная двумерная величина (ξ ,η) имеют нормальную совместную плотность распределения $f(x,y)=\dfrac{1}{2\pi\sigma^2}\exp\{-\dfrac{x^2+y^2}{2\sigma^2}\}$. Вычислить вероятность события $\{\eta<|\xi|\}$.
8. Случайные величины ξ и η независимы и нормально распределены с параметрами $(0,\sigma^2)$. Доказать, что отношение ξ/η имеет распределение Коши.
9. Случайные величины ξ и η - независимы и нормально распределены с параметрами $(0,\sigma^2)$. Определить плотность случайной величины ξ-η.
10. Случайные величины ξ и η независимы и равномерно распределены: ξ в интервале (0,1), а η в интервале (-1,2). Найти плотность распределения случайной величины $\xi+\eta$.
11. Случайные величины ξ и η независимы и имеют показательное распределение: ξ с параметром 1/2, а η с параметром 1/3. Найти плотность распределения их суммы $\xi+\eta$.
12. Найти плотность распределения суммы независимых случайных величин, имеющих плотность распределения
$$f_\xi(x)=f_\eta(x)=\frac{1}{\pi}\frac{1}{\operatorname{ch}x}.$$
13. Случайные величины ξ и η независимы и имеют показательное распределение с параметром λ. Найти плотность распределения случайной величины $3\xi+2\eta$.

14. Случайные величины ξ и η независимы и равномерно распределены в интервале [-1,3]. Найти плотность распределения их отношения ξ/η.
15. Случайные величины ξ и η независимы и имеют показательное распределение с параметром λ. Найти плотность распределения случайной величины $\xi/(\xi+\eta)$.
16. Случайные величины ξ и η независимы и имеют нормальное распределение с параметрами (0;1) каждая. Доказать, что случайные величины $\xi-\eta$ и $\xi+\eta$ независимы.
17. Случайные величины ξ и η независимы и равномерно распределены в интервале [0,1]. Найти функцию распределения случайной величины $\xi/(\xi+\eta)$.
18. Случайные величины ξ и η независимы и одинаково распределены с плотностями

$$f_\xi(x) = f_\eta(x) = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-|x|}.$$

Найти плотность распределения случайной величины $\xi+\eta$.
19. Случайные величины ξ и η независимы и одинаково распределены с плотностями распределения

$$f_\xi(x) = f_\eta(x) = \begin{cases} x\exp\{-\frac{x^2}{2}\}, & x \ge 0. \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

Найти плотность распределения частного ξ/η.
20. Случайные величины ξ и η независимы с плотностью распределения

$$f_\xi(x) = \begin{cases} (\pi\sqrt{1-x^2}, & |x|<1, \\ 0, & |x|>1; \end{cases} \quad f_\eta(y) = \begin{cases} x\exp\{-\mathrm{x}^2/2\}, & x \ge 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

Найти плотность распределения случайной величины $\xi\cdot\eta$.
21. Случайные величины ξ и η независимы и имеют показательное распределение с параметром λ. Доказать, что случайные величины $\xi+\eta$ и ξ/η также независимы.

22. Случайные величины ξ и η независимы и равномерно распределены: ξ в интервале [-1,3], а η в интервале [0,2]. Найти плотность распределения случайной величины $\xi+\eta$.
23. Случайные величины ξ и η независимы и равномерно распределены: ξ в интервале [0,4], а η в интервале [1,3]. Найти плотность распределения случайной величины $\xi\cdot\eta$.
24. Случайные величины ξ и η независимы. Величина ξ имеет показательное распределение с параметром 2, а η равномерно распределена в интервале [1,3]. Найти плотность распределения случайной величины $\xi+\eta$.
25. Случайные величины ξ и η независимы и имеют показательное распределение с параметром 1. Найти плотность распределения случайной величины $|\xi-\eta|$.

9. Закон больших чисел. Предельные теоремы теории вероятностей.

Обозначим через $S_n=\xi_1+\ldots+\xi_n$ частичную сумму первых n элементов последовательности случайных величин $\xi_1,\xi_2,\ldots$. Пусть $\mathrm{E}\xi_n$ существует при любом n, тогда для последовательности $\xi_1,\xi_2,\ldots$ выполнен закон больших чисел (ЗБЧ), если при $n\to\infty$ $\frac{S_n-\mathrm{E}S_n}{n}\xrightarrow{p}0.$

Если случайные величины $\xi_1,\xi_2,\ldots$попарно независимы, одинаково распределены, имеют математическое ожидание a и ограниченную дисперсию $\sigma^2<C$ (C=const), тогда выполнен ЗБЧ в форме Чебышёва

$$\mathrm{P}\left(\left|\frac{S_n}{n}-a\right|\geq\varepsilon\right)\leq\frac{C}{n\varepsilon^2}\to 0\quad\text{при } n\to\infty.$$

Неравенство даёт оценку того, что среднее арифметическое случайных величин отклонится от математического ожидания по абсолютной величине более,чем на ε .

Если случайная величина ξ имеет конечную дисперсию, то при любом ε>0 справедливо неравенство Чебышёва:

$$\mathrm{P}\{|\ \xi\ \text{-}\mathrm{E}\xi| \geq \varepsilon\} \leq \mathrm{D}\xi/\varepsilon^2$$

Для оценки вероятности отклонения частоты появления события от его вероятности можно использовать теорему Бернулли:

$$\mathrm{P}\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{pq}{n\varepsilon^2}.$$

Пусть $S_n=\xi_1+\ldots+\xi_n$, где $\xi_1,\xi_2,\ldots$ – независимые одинаково распределённые случайные величины со средним значением a и дисперсией $\sigma^2<\infty$. Тогда выполнена центральная предельная теорема (ЦПТ), т.е. для любого вещественного x имеет место сходимость

$$\mathrm{P}\left\{\frac{S_\mathrm{n} - an}{\sqrt{n\sigma^2}} < x-\right\} \to \int\limits_{-\infty}^{x} \frac{\exp\{-y^2/2\}}{\sqrt{2\pi}}\,dy \equiv \Phi(x) \quad \text{при } n \to \infty.$$

Следствием ЦПТ является интегральная теорема Муавра-Лапласа:

$$\mathrm{P}\left(a \leq \frac{m - np}{\sqrt{np(1-p)}} < b\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} \int\limits_a^b \exp\{-x^2/2\}dx = \Phi(b) - \Phi(a).$$

Здесь m – число появлений события A в n независимых испытаниях по схеме Бернулли с вероятностью p ($0<p<1$) для любых a и b, $a < b$.

На ней основана приближенная формула

$$\mathrm{P}\{S_n \leq k\} = \sum_{i=0}^{k} \mathrm{P}_n(i) \approx \Phi\left(\frac{k - np}{\sqrt{np(1-p)}}\right),$$

которая используется при $p\leq 1/2$ и при сравнительно больших $\lambda=np$ (обычно при $\lambda>9$), а при малых значениях λ – приближение Пуассона

$$\mathrm{P}\{S_n \leq k\} \approx \sum_{i=0}^{k} \frac{\lambda^i}{i!}\mathrm{e}^{-\lambda}.$$

Для функций нормального распределения и распределения Пуассона имеются таблицы.

Пример 1. Вероятность выхода из строя изделия за время испытаний на надёжность равна 0,09. Какова вероятность того, что за время испытаний 100 изделий выйдут из строя не более 10 изделий.

Решение. Согласно теореме Муавра-Лапласа имеем

$$P(a \le m < b) \approx \Phi(\frac{b - np}{\sqrt{np(1-p)}}) - \Phi(\frac{a - np}{\sqrt{np(1-p)}}) .$$

По условию задачи n=100, p=0.09, q=(1-p)=0.91, a=0, b=10. Подставляя эти значения и определяя по таблице значения функции $\Phi_0(x) = \int_0^x \frac{\exp\{-y^2/2\}}{\sqrt{2\pi}} dy$,

получаем

$P\{0 \le m \le 10\} \approx \Phi_0(0.35) - \Phi_0(-3.14) = \Phi_0(0.35) + \Phi_0(3.14) = 0.1368 + 0.4991 = 0.6359$.

Пример 2. Определить количество испытаний, которое нужно провести, чтобы с вероятностью не менее 0.9 можно было утверждать, что отклонение частоты появления события от его вероятности P=0.8 было бы не более 0.05?

Решение. Воспользуемся неравенством из теоремы Бернулли:

$$P(|\frac{m}{n} - p| \le \varepsilon) > 1 - \frac{pq}{n\varepsilon^2}$$

По условию задачи нужно найти n такое, что $1 - pq/n\varepsilon^2 = 0.9$, отсюда, подставляя значения p,q и ε, находим значение n=640.

Пример 3. По каналу связи передано 10000 символов. Вероятность искажений каждого символа помехами p=0.001. Действие помех на каждый символ происходит независимо. Какова вероятность, что при передаче будет не более 15 искажений?

Решение. По условию задачи имеем n=10000, p=0,001, q=(1-p)=0,999. Поскольку np=10, то применяем формулу

$$P\{S_n \le k\} \approx \Phi(\frac{k - np}{\sqrt{np(1-p)}}),$$

где k=15. $\Phi(1,58) = \Phi_0(1,58) + 0,5 = 0,943$. Следовательно, $P\{S_n \le k\} \approx 0,943$.

Варианты заданий.

1. Вероятность появления события в одном опыте p=0,003. Определить вероятность того, что в 1000 опытах событие появится не более четырёх раз.
2. Телефонная станция обслуживает 100 абонентов. Вероятность того, что за время t поступит один вызов, равна 0,002. Определить вероятность того, что за время t поступит не более двух вызовов.
3. Вероятность того, что прибор за время испытаний выйдет из строя, равна 0,8. Определить вероятность того, что за время испытаний 100 приборов не менее 70 из них выйдут из строя.
4. Какое наименьшее число испытаний нужно произвести для того, чтобы с вероятностью, не меньшей 0,9 частота отклонялась от вероятности p=0,5 не больше, чем на 0,01?
5. Дисперсия каждой из 800 независимых случайных величин менее 9. Какова верхняя граница абсолютной величины отклонения средней арифметической этих величин от средней арифметической их математических ожиданий, если вероятность этого отклонения превышает 0,997
6. Вероятность появления события в одном опыте равна 0,4. С какой вероятностью можно утверждать, что частота этого события при 100 опытах будет лежать в пределах от 0,2 до 0,5?
7. Определить количество испытаний, которое нужно произвести, чтобы с вероятностью не менее 0,99 можно было бы утверждать, что отклонение частоты появления события от его вероятности p=0,7 было бы не более 0,01.
8. Вероятность наличия зазубрин на брусках, заготовленных для обточки, равна 0,2. Оценить вероятность того, что в партии из 1000 брусков отклонение числа пригодных от 800 не превышает 5%.
9. Вероятность появления события в одном опыте равна 0,002. Определить вероятность того, что в 1000 опытах событие появится не менее двух раз.

10. Вероятность выпуска сверла повышенной хрупкости (брак) равна 0,02. Свёрла укладываются в коробку по 100 штук. Чему равна вероятность того, что: а) в коробке не окажется бракованных свёрл; б) число бракованных свёрл окажется не более 2?
11. Вероятность любого абонента позвонить на коммутатор в течение часа равна 0,01. Телефонная станция обслуживает 200 абонентов. Какова вероятность того, что в течение часа позвонят не менее трёх абонентов?
12. Игральную кость бросают 120 раз. Определить вероятность того, что число выпадений 5 очков будет находиться между 15 и 27.
13. Вероятность брака при изготовлении некоторых деталей равна 0,02. Определить вероятность того, что среди взятых 1000 штук деталей окажется не более 25 бракованных.
14. Вероятность выхода изделий из строя за время испытаний на надёжность равна 0,05. Какова вероятность того, что за время испытания 90 изделий выйдут из строя менее 5 изделий?
15. Вероятность получить бракованное изделие равна 0,002. Найти вероятность того, что среди 500 изделий будет меньше 5 бракованных.
16. Известно, что вероятность выпуска сверла повышенной хрупкости (брак) равна 0,02. Свёрла укладывают в коробку. Сколько их нужно туда положить, чтобы с вероятностью, не меньшей 0,9, в ней было не менее 100 исправных?
17. Вероятность попадания в цель при одном выстреле равна 0,004. Определить вероятность того, что при 500 выстрелах будет больше 5 попаданий.
18. В передаваемой по каналу связи последовательности знаков, образующих сообщение, любой знак из-за помех независимо искажается с вероятностью 0,2. Передано 10000 знаков. Какова вероятность того, что в принятой последовательности будет от 2000 до 2100 искажений?
19. Вероятность появления события в каждом из независимых испытаний равна 0,2. Найти, какое отклонение относительной частоты от его вероятности можно ожидать с вероятностью 0,92 при 5000 испытаниях.

20. Сколько раз нужно бросить монету, чтобы с вероятностью 0,6 можно было ожидать, что отклонение частоты появления герба от вероятности p=0,5 окажется по абсолютной величине не более 0,01?
21. Вероятность того, что деталь не стандартна, равна 0,2. Найти вероятность того, что среди случайно отобранных 400 деталей частота появления нестандартной детали отклонится от вероятности по абсолютной величине не более чем на 0,03.
22. Вероятность попадания в цель при одном выстреле равна 0,8. Определить вероятность того, что при 300 выстрелах число попаданий будет заключено между 200 и 250.
23. Вероятность брака при изготовлении некоторых деталей равна 0,002. Определить вероятность того, что при изготовлении 1000 деталей будет не меньше 5 бракованных.
24. Вероятность появления события в отдельном опыте равна 0,7. Определить, начиная с какого числа n независимых испытаний вероятность неравенства $\{|m/n-0,7|<0,1\}$ будет больше, чем 0,38.
25. Вероятность выхода изделия из строя за время испытаний равна 0,06. Какова вероятность того, что за время испытаний 90 изделий выйдут из строя менее 5 изделий?

Литература

1. Большев Л.Н., Смирнов Н.В. Таблицы математической статистики. – М.: Наука, 1983.
2. Вентцель Е.С. Теория вероятностей.—М.:Высш. шк., 1999.
3. Гнеденко Б.В. Курс теории вероятностей.—М.: Наука, 1988.
4. Гмурман В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике.—М.: Высш. шк.,1998.

5. Коваленко И.Н., Филипова А.А. Теория вероятностей и математическая статистика.—М.: Высш. шк.,1973.
6. Сборник задач по математике для втузов. Т.3. Теория вероятностей и математическая статистика/ Под. ред. Ефимова А.В.—М.: Наука, 1990.

Труфанов Виктор Александрович,
доцент кафедры МАиМ АмГУ

Методические указания по типовому расчёту по курсу “Теория вероятностей” для студентов всех специальностей

Изд-во АмГУ. Подписано к печати . Формат 60х84/16. Усл. печ. л. , уч.-изд. л. . Тираж 100 экз. Заказ .