Федеральное агентство по образованию

АМУРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

ГОУВПО «АмГУ»

Факультет математики и информатики

УТВЕРЖДАЮ

Зав. кафедрой МАиМ

______Т.В. Труфанова

7 мая 2007г.

МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ПОВЫШЕННОЙ СЛОЖНОСТИ ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКИ

Учебно – методический комплекс дисциплины для специальности 010101 – математика

Составитель: **Н.В. Кван**

Благовещенск

2007

ББК
К

Печатается по решению редакционно-издательского совета факультета математики и информатики Амурского государственного университета

Кван Н.В.

Методы решения задач повышенной сложности элементарной математики. Учебно – методический комплекс факультативной дисциплины для студентов АмГУ 4 курса очной формы обучения по специальности 010101 «Математика». – Благовещенск: Амурский гос. ун–т, 2007. − с.

Учебно – методический комплекс дисциплины " Методы решения задач повышенной сложности" содержит рабочую программу дисциплины, краткий курс лекций, материалы для проведения практических занятий, контролирующие материалы для осуществления промежуточного и итогового контроля, библиографический список.

1. РАБОЧАЯ ПРОГРАММА

по факультативной дисциплине

ФТД. 02 «Методы решения задач повышенной сложности элементарной математики»

для специальности 010101 – математика

4 курс 8 семестр

Лекции (часов)	Практ. Занятия (часов)	Самост. раб. (часов)	Всего (часов)	Экзамен (семестр)	Зачет
45	**45**	**78**	**168**	**8**	нет

Составитель ст. преподаватель **Кван Наталья Владимировна**

Факультет **математики и информатики**

Кафедра **МАиМ**

2006г.

1.1 ЦЕЛИ И ЗАДАЧИ ДИСЦИПЛИНЫ

Факультативная дисциплина «Методы решения задач повышенной сложности по элементарной математике» преследует своей целью обобщить знания фактического материала по основам элементарной математики студентов 4 курса специальности 010101 – математика, сформировать устойчивые навыки решения задач любого уровня сложности, в том числе и повышенной, познакомить с особенностями подходов решения тестовых заданий ЕГЭ и ЦТ, а так же олимпиадных задач по элементарной математике.

Данный курс призван помочь профессионально сориентировать студентов – математиков для работы в образовательных учреждениях различного уровня, поэтому наряду с фактическим материалом по различным разделам элементарной математики на занятиях по данной дисциплине должны формироваться методические навыки обучения методам решения задач.

1.2 СОДЕРЖАНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ

Введение. Современное состояние математического образования в России. Предмет элементарной математики. Различные современные методы, средства и технологии контроля и оценки знаний по элементарной математике. Олимпиадное движение по математике в России и за рубежом.

Алгебра.

Задачи на преобразование алгебраических выражений и их вычисления. Арифметический корень. Свойства логарифмов.

Равенство, тождество, уравнение. Равносильные уравнения. Уравнение, являющееся следствием данного. Дизъюнкция уравнений. Наиболее важные приемы преобразования и решения уравнений. Алгебраические уравнения: рациональные уравнения, уравнения, содержащие переменную под знаком модуля, иррациональные уравнения. Показательные и логарифмические уравнения.

Системы уравнений: равносильные системы, системы, являющиеся следствием данного. Основные приемы и методы решения систем.

Однородные системы двух уравнений с двумя неизвестными. Симметрические системы.

Неравенства. Основные свойства неравенств. Некоторые часто встречающиеся неравенства. Рациональные неравенства. Неравенства с модулем. Иррациональные неравенства. Показательные и логарифмические неравенства.

Тригонометрия.

Тождественные преобразования тригонометрических выражений. Тождественные преобразования выражений, содержащих обратные тригонометрические функции. Задачи на вычисления тригонометрических выражений. Тригонометрические уравнения: простейшие, уравнения вида $\sin f(x) = a$ и $f(\sin x) = a$, однородные, введение вспомогательного угла, метод замены неизвестного, метод разложения на множители, оценка левой и правой части уравнения. Системы тригонометрических уравнений. Тригонометрические неравенства.

Текстовые задачи: задачи на проценты, задачи на работу, задачи на движение, задачи на сплавы и растворы, задачи на целочисленные данные, задачи, решаемые с помощью неравенств. Прогрессии: арифметическая и геометрическая.

Геометрия.

Планиметрия: треугольник, трапеция, параллелограмм, ромб, квадрат, произвольный четырехугольник и многоугольник, окружность и круг, задачи на доказательство, задачи на построение.

Стереометрия: прямые и плоскости, пирамида, куб, параллелепипед, призма, круглые тела, комбинации тел; задачи на построение сечений.

1.3 НАИМЕНОВАНИЕ ТЕМ, ИХ СОДЕРЖАНИЕ, ОБЪЕМ В ЧАСАХ

Лекции

Наименование темы	Кол-во часов
Введение.	1
Задачи на преобразование алгебраических выражений и их вычисления. Арифметический корень. Свойства логарифмов.	4
Равенство, тождество, уравнение. Равносильные уравнения. Уравнение, являющееся следствием данного. Дизъюнкция уравнений. Наиболее важные приемы преобразования и решения уравнений. Алгебраические уравнения: рациональные уравнения, уравнения, содержащие переменную под знаком модуля, иррациональные уравнения. Показательные и логарифмические уравнения.	6
Системы уравнений: равносильные системы, системы, являющиеся следствием данного. Основные приемы и методы решения систем. Однородные системы двух уравнений с двумя неизвестными. Симметрические системы.	2
Неравенства. Основные свойства неравенств. Некоторые часто встречающиеся неравенства. Рациональные неравенства. Неравенства с модулем. Иррациональные неравенства.	6

Показательные и логарифмические неравенства. Системы неравенств	
Тождественные преобразования тригонометрических выражений. Тождественные преобразования выражений, содержащих обратные тригонометрические функции. Задачи на вычисления тригонометрических выражений.	4
Тригонометрические уравнения: простейшие, уравнения вида $\sin f(x) = a$ и $f(\sin x) = a$, однородные, введение вспомогательного угла, метод замены неизвестного, метод разложения на множители, оценка левой и правой части уравнения. Системы тригонометрических уравнений. Тригонометрические неравенства.	8
Текстовые задачи: задачи на проценты, задачи на работу, задачи на движение, задачи на сплавы и растворы, задачи на целочисленные данные, задачи, решаемые с помощью неравенств. Прогрессии: арифметическая и геометрическая.	4
Планиметрия: треугольник, трапеция, параллелограмм, ромб, квадрат, произвольный четырехугольник и многоугольник, окружность и круг, задачи на доказательство, задачи на построение.	6
Стереометрия: прямые и плоскости, пирамида, куб, параллелепипед, призма, круглые тела, комбинации тел; задачи на построение сечений.	4
ИТОГО	45

Практические занятия

Наименование темы	Кол-во часов

1. Задачи на преобразование алгебраических выражений	2
2. Решение рациональных уравнений, уравнений с модулем, иррациональных уравнений	2
3. Логарифмические и показательные уравнения	2
4. Смешанные уравнения. Уравнения с параметрами	2
5. Системы уравнений	2
6. Рациональные неравенства, неравенства с модулем, иррациональные неравенства	2
7. Логарифмические и показательные неравенства	2
8. Системы неравенств. Смешанные неравенства. Неравенства с параметрами	2
9. Контрольная работа № 1	2
10. Преобразование тригонометрических выражений. Задачи на вычисление. Обратные тригонометрические функции	2
11. Решение тригонометрических уравнений	4
12. Системы тригонометрических уравнений. Тригонометрические неравенства.	2
13. Текстовые задачи: задачи на проценты, задачи на работу, задачи на движение, задачи на сплавы и растворы, задачи на целочисленные данные, задачи, решаемые с помощью неравенств. Прогрессии: арифметическая и геометрическая.	4
14. Контрольная работа № 2	1
15. Планиметрия	4
16. Стереометрия	6
17. Итоговая контрольная работа	2
ИТОГО	45

2. ФОРМЫ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ СТУДЕНТОВ ПО ДИСЦИПЛИНЕ

Наименование темы	Кол-во часов
1. Индивидуальное задание «Уравнения и неравенства»	10
2. Индивидуальное задание «Тригонометрия»	10
3. Индивидуальное задание «Текстовые задачи»	10
4. Индивидуальное задание «Геометрия»	10
5. Решение тестовых заданий ЕГЭ, ЦТ, олимпиадных заданий, составление олимпиадных заданий для школьников (в течение всего семестра)	38

ВИДЫ КОНТРОЛЯ

Текущий контроль за аудиторной и самостоятельной работой обучаемых осуществляется во время проведения практических занятий посредством проведения и проверки контрольных и самостоятельных работ, а также проверки отчетов по индивидуальным заданиям.

3. ИТОГОВЫЙ КОНТРОЛЬ

Экзамен в тестовой форме с индивидуальной беседой.

Продолжительность экзамена 3 часа.

Критерии оценок за экзаменационную работу

Критерий	оценка
Кол – во баллов 100 - 75	отлично
Кол – во баллов 50 - 74	хорошо

Кол – во баллов 25 - 49	удовлетворительно
Кол - во баллов 24 - 0	неудовлетворительно

4. УЧЕБНО – МЕТОДИЧЕСКИЕ МАТЕРИАЛЫ ПО ДИСЦИПЛИНЕ

1. Болтянский В.Г., Сидоров Ю.В., Шабунин М.И. Лекции и задачи по элементарной математике. – М.: Наука, 1971.– 576 с.
2. Купцов Л.П. и др. Российские математические олимпиады школьников: Кн. Для учащихся. – Ростов - на - Дону: изд – во «Феникс», 1996. 640 с.
3. Куланин Е.Д., Федин С.Н, 5000 конкурсных задач по математике . – М.: ООО «Фирма «Издательство АСТ» »,1999. – 720с.

Материалы ЕГЭ, ЦТ сложности 1 и 2,материалы областных, зональных, всероссийских олимпиад по математике различных лет.

5. МАТЕРИАЛЫ ДЛЯ ЧТЕНИЯ ЛЕКЦИЙ

1. РАЦИОНАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

В настоящем параграфе рассматриваются уравнения вида *P(x)=0*, $\frac{P(x)}{Q(x)}$=*0*, где *P(x)* и *Q(x)* – многочлены, а также уравнения вида f(x)=g(x) – рациональные выражения.

Напомним некоторые сведения из алгебры.

1. Если $x=a$ – корень многочлена *P(x)*, то *P(x)* делится без остатка на двучлен $x – a$.

2. Пусть все коэффициенты многочлена *P(x)* – целые числа, причем старший коэффициент равен 1. Если такой многочлен имеет своим корнем рациональное число, то это число целое.
3. Пусть все коэффициенты многочлена $P(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n$ – целые числа. Если корнем многочлена является целое число b, то b – делитель свободного члена a_n (необходимое условие существования целочисленного корня).

Отметим, что при решении целых рациональных уравнений преобразования, выполняемые в процессе решения, приводят только к уравнениям, равносильным заданному. Поэтому, естественно, найденные корни не проверяют и упоминать об этом в каждом конкретном случае не следует. При решении же дробно-рациональных уравнений выполняется умножение обеих частей уравнения на одно и то же число $Q(x)$, что может привести к появлению посторонних корней. Поэтому при решении дробно-рациональных уравнений проверка необходима.

При решении рациональных (и других) уравнений основными являются следующие методы: 1) разложение на множители; 2) введение новых (вспомогательных) переменных.

Метод разложения на множители заключается в следующем: если

$$f(x)=f_1(x)\cdot f_2(x)\cdot\ldots\cdot f_n(x),$$

то всякое решение уравнения f(x)=0 (1) является решением совокупности уравнений $f_1(x)=0;\ f_2(x)=0;\ \ldots;\ f_n(x)=0$ (2).

Обратное утверждение, вообще говоря, неверно: не всякое решение совокупности уравнений (2) является решением уравнения (1).

Так, например, решение уравнения

$$\frac{x^2-3x+2}{x}\cdot\left(\frac{x+2}{x-1}+2\right)=0. \qquad (3)$$

сводится к решению совокупности уравнений

$$\frac{x^2-3=2}{x}=0;\frac{x+2}{x^2-1}+2=0. \qquad (4)$$

Решениями совокупности (4) являются значения: $x_1=1$, $x_2=2$, $x_3=0$, $x_4=-\frac{1}{2}$.

Но при $x=1$ не определено выражение $\frac{x+2}{x^2-1}$, а при $x=0$ не определено выражение $\frac{x^2-3x+2}{x}$.

Таким образом, значения $x=1$, $x=0$ не являются корнями уравнения (3).

Вообще при решении уравнения (1) методом разложения на множители из найденных корней уравнений совокупности (2) корнями уравнения (1) являются те и только те значения x, которые принадлежат области определения уравнения (1).

2. УРАВНЕНИЯ, СОДЕРЖАЩИЕ ПЕРЕМЕННУЮ ПОД ЗНАКОМ МОДУЛЯ

При решении уравнений, содержащих переменную под знаком модуля, применяют чаще всего следующие методы: 1) раскрытие модуля по определению; 2) возведение обеих частей уравнения в квадрат; 3) метод разбиения на промежутки.

3. СИСТЕМЫ РАЦИОНАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

1. Основные понятия. Несколько уравнений с двумя переменными *x, y* образуют *систему*, если ставится задача об отыскании всех таких пар *(x;y)*, которые удовлетворяют каждому из заданных уравнений. Каждая такая пара называется *решением* системы. Множество решений системы может быть, в частности, пустым – в этом случае говорят, что система не имеет решений или что система *несовместна*.

Несколько систем уравнений с двумя переменными *x, y* образуют *совокупность систем*, если ставится задача об отыскании всех таких пар *(x;y)*, каждая из которых удовлетворяет по крайней мере одной из заданных систем. Каждая такая пара называется *решением совокупности систем*.

Процесс решения системы уравнений состоит, как правило, в последовательном переходе с помощью некоторых преобразований от данной системы к другой, более простой, затем к еще более простой и т.д. Если в результате некоторых преобразований системы

$$\begin{cases} f_1(x;y) = g_1(x;y), \\ f_2(x;y) = g_2(x;y), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ f_n(x;y) = g_n(x;y) \end{cases} \tag{1}$$

мы перешли к системе

$$\begin{cases} f'_1(x;y) = g'_1(x;y), \\ f'_2(x;y) = g'_2(x;y), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ f'_n(x;y) = g'_n(x;y) \end{cases} \tag{2}$$

и если при этом каждое решение системы (1) является в то же время решением системы (2), то система (2) называется *следствием системы* (1). Следствием системы уравнений может быть и одно уравнений. Например, уравнение $3x–2y=3$ является следствием системы

$$\begin{cases} 2x + y = 5, \\ x - 3y = -2. \end{cases}$$

(как сумма уравнений системы). Вообще следствием системы уравнений может быть система как с меньшим, так и с большим числом уравнений. Так, система

$$\begin{cases} 2x + y = 5, \\ x - 3y = -2, \\ 3x - 2y = 3 \end{cases}$$

есть следствие системы

$$\begin{cases} 2x + y = 5, \\ x - 3y = -2. \end{cases}$$

Две системы уравнений называются равносильными, если множества их решений совпадают. Ясно, что две системы равносильны тогда и только тогда, когда вторая является следствием первой и первая является следствием второй. Отсюда, в частности, следует, что если к системе уравнений добавить еще одно уравнение, являющееся следствием данной системы, то новая система будет равносильна исходной. Если же опустить какое-либо уравнение системы, то полученная система уравнений (или одно оставшееся уравнение) будет следствием исходной системы.

Приведем две теоремы, применяющиеся при решении систем уравнений.

Теорема 1. *Если уравнение* $f_1'(x;y)=g_1'(x;y)$ *равносильно уравнению* $f_1(x;y)=g_1(x;y)$ *(или является его следствием), а уравнение* $f'_2(x;y)=g'_2(x;y)$ *равносильно уравнению* $f_2(x;y)=g_2(x;y)$, *(или его следствию), то система*

$$\begin{cases} f_1'(x;y)=g_1'(x;y), \\ f_2'(x;y)=g_2'(x;y) \end{cases}$$

равносильна системе

$$\begin{cases} f_1(x;y)=g_1(x;y), \\ f_2(x;y)=g_2(x;y) \end{cases}$$

(или является ее следствием).

Теорема 2. *Если уравнение* $f(x;y)=g(x;y)$ *является следствием уравнений* $f_1(x;y)=g_1(x;y)$ *и* $f_2(x;y)=g_2(x;y)$, *то каждая из систем*

$$\begin{cases} f_1(x;y)=g_1(x;y), \\ f(x;y)=g(x;y) \end{cases} и \begin{cases} f_2(x;y)=g_2(x;y), \\ f(x;y)=g(x;y) \end{cases}$$

является следствием системы

$$\begin{cases} f_1(x;y)=g_1(x;y), \\ f_2(x;y)=g_2(x;y), \end{cases} \qquad (3)$$

а система

$$\begin{cases} f_1(x;y)=g_1(x;y), \\ f_2(x;y)=g_2(x;y), \\ f(x;y)=g(x;y) \end{cases}$$

равносильна системе (3).

В частности, следствиями системы (3) будут такие системы:

$$\begin{cases} f_1(x;y) = g_1(x;y), \\ f_1(x;y) \pm f_2(x;y) = g_1(x;y) \pm g_2(x;y); \end{cases} \quad (4)$$

$$\begin{cases} f_1(x;y) = g_1(x;y), \\ f_1(x;y) \cdot f_2(x;y) = g_1(x;y) \cdot g_2(x;y); \end{cases} \quad (5)$$

$$\begin{cases} f_1(x;y) = g_1(x;y), \\ \left(f_2(x;y) \right)^2 = \left(g_2(x;y) \right)^2. \end{cases} \quad (6)$$

Если не существует таких пар *(x;y)*, при которых оба выражения $f_2(x;y)$ и $g_2(x;y)$ одновременно обращаются в нуль, то уравнение $\frac{1}{f_2(x;y)} = \frac{1}{g_2(x;y)}$ равносильно уравнению $f_2(x;y)=g_2(x;y)$. Тогда системе (3) равносильна следующая система:

$$\begin{cases} f_1(x;y) = g_1(x;y), \\ \dfrac{1}{f_2(x;y)} = \dfrac{1}{g_2(x;y)}. \end{cases}$$

Ее следствием, в свою очередь, является система:

$$\begin{cases} f_1(x;y) = g_1(x;y), \\ f_1(x;y) \cdot \dfrac{1}{f_2(x;y)} = g_1(x;y) \cdot \dfrac{1}{g_2(x;y)}. \end{cases}$$

Таким образом, приходим к следующему выводу: *если не существует таких пар (x;y), при которых оба выражения f(x; y) и g(x;y) одновременно обращаются в нуль, то система*

$$\begin{cases} f_1(x;y) = g_1(x;y), \\ \dfrac{f_1(x;y)}{f_2(x;y)} = \dfrac{g_1(x;y)}{g_2(x;y)}. \end{cases}$$

является следствием системы (3).

Если, решая систему, мы преобразовали ее в систему, являющуюся следствием исходной, то найденные решения новой системы безусловно подлежат проверке (например, подстановкой найденных значений переменных в исходную систему). В дальнейшем будут полезными следующие утверждения:

1. Система (4) равносильна системе (3).

2. Если не существует таких пар $(x;y)$, при которых обе части уравнения $f_1(x;y)=g_1(x;y)$ одновременно обращаются в нуль, то система (5) равносильна системе (3).
3. Система (6) равносильна системе (3), если для любых x, y из области определения системы (3) выполняется неравенство $f_2(x;y)\cdot g_2(x;y)\geq 0$.
4. Если не существует таких пар $(x;y)$, при которых одновременно обращаются в нуль обе части второго уравнения системы (3), то система (7) равносильна системе (3).

Отметим еще один результат, вытекающий из теорем 1 и 2.

Теорема 3. *Если совокупность уравнений*

$$\left[\begin{array}{l} f_{21}(x;y)=g_{21}(x;y), \\ f_{22}(x;y)=g_{22}(x;y), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ f_{2k}(x;y)=g_{2k}(x;y) \end{array}\right.$$

равносильна уравнению $f_2(x;y)=g_2(x;y)$, (или является его следствием), то совокупность систем

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} f_1(x;y)=g_1(x;y), \\ f_{21}(x;y)=g_{21}(x;y); \end{cases} \\ \begin{cases} f_1(x;y)=g_1(x;y), \\ f_{22}(x;y)=g_{22}(x;y); \end{cases} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \begin{cases} f_1(x;y)=g_1(x;y), \\ f_{2k}(x;y)=g_{2k}(x;y) \end{cases} \end{array}\right.$$

равносильна системе (3) *(или является ее следствием).*

В частности, следствием системы

$$\begin{cases} f_1(x;y)=g_1(x;y), \\ f_{21}(x;y)\cdot f_{22}(x;y)\cdot\ldots\cdot f_{2k}(x;y)=0 \end{cases}$$

является совокупность систем:

$$\begin{cases} f_1(x;y)=g_1(x;y), \\ f_{21}(x;y)=0; \end{cases} \begin{cases} f_1(x;y)=g_1(x;y), \\ f_{22}(x;y)=0; \end{cases} \ldots; \begin{cases} f_1(x;y)=g_1(x;y), \\ f_{2k}(x;y)=0. \end{cases}$$

2. Основные методы решения систем уравнений. Остановимся на трех основных методах: 1) метод линейного преобразования системы

(или метод алгебраического сложения); 2) метод подстановки; 3) метод замены переменных.

Метод линейного преобразования системы основан на следующей теореме:

Теорема 4. *Если* $\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0,$ *то система*

$$\begin{cases} a_1 f_1(x;y) + a_2 f_2(x;y) = 0, \\ b_1 f_1(x;y) + b_2 f_2(x;y) = 0 \end{cases}$$

равносильна системе

$$\begin{cases} f_1(x;y) = 0, \\ f_2(x;y) = 0. \end{cases}$$

В частности, если a_1=1, a_2=0, b_1=1, b_2=±1, то получаем систему

$$\begin{cases} f_1(x;y) = 0, \\ f_1(x;y) \pm f_2(x;y) = 0, \end{cases}$$

равносильную исходной по утверждению 1.

Эта теорема распространяется на случай, когда число уравнений больше двух. Например, для трех уравнений с тремя переменными имеет место следующая теорема:

Теорема 4'. *Если* $\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \neq 0,$ *то система*

$$\begin{cases} a_1 f_1 + a_2 f_2 + a_3 f_3 = 0, \\ b_1 f_1 + b_2 f_2 + b_3 f_3 = 0, \\ c_1 f_1 + c_2 f_2 + c_3 f_3 = 0 \end{cases}$$

равносильна системе

$$\begin{cases} f_1(x;y;z) = 0, \\ f_2(x;y;z) = 0, \\ f_3(x;y;z) = 0. \end{cases}$$

Метод подстановки основан на следующей теореме:

Теорема 5. *Система уравнений*

$$\begin{cases} x = F(y), \\ f(F(y);y) = g(F(y);y) \end{cases}$$

равносильна системе

$$\begin{cases} x = F(y), \\ f(x;y) = g(x;y). \end{cases}$$

Так, равносильными будут следующие системы:

$$\begin{cases} x = 2y - 5, \\ (2y-5)^2 + y^2 = 2(2y-5) + y \end{cases} \text{ и } \begin{cases} x = 2y - 5, \\ x^2 + y^2 = 2x + y. \end{cases}$$

Следствие. *Если уравнение x=F(y) (или y=Φ(x)) равносильно уравнению φ(x;y)=0, то система*

$$\begin{cases} x = F(y), \\ f(F(y);y) = g(F(y);y) \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} y = \Phi(x), \\ f(x;\Phi(x)) = g(x;\Phi(x)) \end{cases}$$

равносильна системе

$$\begin{cases} \varphi(x;y) = 0, \\ f(x;y) = g(x;y). \end{cases}$$

Например, система уравнений

$$\begin{cases} y^2 + x = 2(x-5), \\ \dfrac{y}{x} + \dfrac{x}{y} = x^2 + y^2 \end{cases}$$

равносильна следующей системе:

$$\begin{cases} x = y^2 + 10, \\ \dfrac{y}{y^2+10} + \dfrac{y^2+10}{y} = \left(y^2+10\right)^2 + y. \end{cases}$$

Для системы трех уравнений с тремя переменными соответствующая теорема формулируется следующим образом:

Теорема 5’. *Система уравнений*

$$\begin{cases} f_1(x;y;F(x;y)) = g_1(x;y;F(x;y)), \\ f_2(x;y;F(x;y)) = g_2(x;y;F(x;y)), \\ z = F(x;y) \end{cases}$$

равносильна следующей системе:

$$\begin{cases} f_1(x;y;z) = g_1(x;y;z), \\ f_2(x;y;z) = g_2(x;y;z), \\ z = F(x;y). \end{cases}$$

Метод замены переменных состоит в следующем. *Если*

$$F_1(x;y) = f_1(\varphi_1(x;y);\varphi_2(x;y)),$$
$$F_2(x;y) = f_2(\varphi_1(x;y);\varphi_2(x;y)),$$

то систему

$$\begin{cases} F_1(x;y) = 0, \\ F_2(x;y) = 0 \end{cases}$$

с помощью новых переменных $\varphi_1(x;y)= u$, $\varphi_2(x;y)= \upsilon$ можно записать в виде $\begin{cases} f_1(u;\upsilon), \\ f_2(u;\upsilon). \end{cases}$

Пусть $(u_1;\upsilon_1)$, $(u_2;\upsilon_2)$, $\ldots(u_n;\upsilon_n)$ – решения последней системы. Тогда задача сводится к решению следующей совокупности систем:

$$\begin{cases} \varphi_1(x;y) = u_1, \\ \varphi_2(x;y) = \upsilon_1; \end{cases} \begin{cases} \varphi_1(x;y) = u_2, \\ \varphi_2(x;y) = \upsilon_2; \end{cases} \ldots; \begin{cases} \varphi_1(x;y) = u_n \\ \varphi_2(x;y) = \upsilon_n. \end{cases}$$

Решения этой совокупности будут одновременно и решениями системы

$$\begin{cases} F_1(x;y) = 0, \\ F_2(x;y) = 0. \end{cases}$$

3. Однородные системы. Система двух уравнений с двумя переменными вида

$$\begin{cases} a_0x^n + a_1x^{n-1}y + a_2x^{n-2}y^2 + \ldots + a_{n-1}xy^{n-1} + a_ny^n = c, \\ b_0x^n + b_1x^{n-1}y + b_2x^{n-2}y^2 + \ldots + b_{n-1}xy^{n-1} + b_ny^n = d \end{cases}$$

называется *однородной* (левые части обоих уравнений – однородные многочлены степени *n* от двух переменных). Однородные системы решаются комбинацией двух методов: линейного преобразования и введения новых переменных.

4. Симметрические системы. Напомним основные сведения о симметрических выражениях. Выражение *F(x;y)* называется

симметрическим, если оно при замене переменных x на y, y на x не изменится. Так, симметрическими будут следующие выражения:

$$F(x;y)=x^2+3xy+y^2,\ F(x;y)=\sqrt{x+y}+2xy+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}.$$

Основными симметрическими многочленами с двумя переменными считаются $x+y$ и xy. Все остальные симметрические многочлены с двумя переменными могут быть выражены через основные. Положив для краткости $u=x+y$, $\upsilon=xy$, получаем, например:

$x^2+y^2=(x+y)^2-2xy=u^2-2\upsilon,$

$x^3+y^3=(x+y)(x^2-xy+y^2)=u(u^2-3\upsilon)=u^3-3u\upsilon,$

$x^4+y^4=(x^2+y^2)^2-2x^2y^2=(u^2-2\upsilon)^2-2\upsilon^2=u^4-4u^2\upsilon+2\upsilon^2,$

$x^5+y^5=(x^2+y^2)(x^3+y^3)-x^2y^2(x+y)=(u^2-2\upsilon)(u^3-3u\upsilon)-\upsilon^2u=u^5-5u^3\upsilon+5u\upsilon^2,$

$x^2+xy+y^2=(x^2+2xy+y^2)-xy=u^2-\upsilon$ и т.д.

Система, все уравнения которой симметрические, называется *симметрической*. Ее можно решить методом замены переменных, выбрав в качестве новых переменных основные симметрические многочлены.

2. ЗАДАЧИ НА СОСТАВЛЕНИЕ УРАВНЕНИЙ И СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ

Решение задач на составление уравнений (или систем уравнений) обычно осуществляется в три этапа: 1)выбор неизвестного, обозначаемого, как правило, через x (или неизвестных, обозначаемых x, y, z, …), и составление уравнения (или системы уравнений), связывающего некоторой зависимостью выбранное неизвестное с величинами, заданными условием задачи; 2) решение полученного уравнения (или системы уравнений); 3) отбор решений по смыслу задачи.

1. Задачи на числовые зависимости. При решении задач на числовые зависимости могут оказаться полезными следующие сведения:

1) Если натуральное число A имеет n знаков, то $A=a_{n-1}\cdot 10^{n-1}+\ldots +a_1\cdot 10+a_0$, где a_0, a_1, a_2, …, a_{n-1} соответственно количество единиц, десятков, сотен, … в числе A.

2) Если при делении натурального числа A на натуральное число B в частном получается q, а в остатке r $(r<B)$, то $A=Bq+r$.

2. Задачи на прогрессии. Числовая последовательность (a_n) называется *арифметической прогрессией*, если существует число d, такое, что для любого $n \in N$ выполняется равенство $a_{n+1}=a_n+d$; число d называется *разностью прогрессии*. Последовательность (b_n), у которой $b_1\neq 0$, называется *геометрической прогрессией*, если существует число $q\neq 0$, такое, что для любого $n \in N$ выполняется равенство $b_{n+1}=b_n\cdot q$; число q называется *знаменателем прогрессии*.

Основные свойства арифметической прогрессии:

1) $a_n=a_1+d(n-1)$.

2) $S_n=\dfrac{a_1+a_n}{2}\cdot n$, *где* $S_n=a_1+a_2+\ldots+a_n$.

3) *Последовательность* (a_n) *является арифметической прогрессией тогда и только тогда, когда для любого* $n \in N$ *выполняется равенство* $a_{n+1}=\dfrac{a_n+a_{n+2}}{2}$ *(характеристическое свойство арифметической прогрессии).*

Основные свойства геометрической прогрессии:

1) $b_n=b_1 q^{n-1}$.

2) $S_n=\dfrac{b_1(1-q^n)}{1-q}$, если q_1, и $S_n=nb_1$, если $q=1$ $(S_n=b_1+b_2+\ldots+b_n)$.

3) *Последовательность* (b_n) *является геометрической прогрессией тогда и только тогда, когда для любого* $n \in N$ *выполняется равенство* $|b_{n+1}|=\sqrt{b_n\cdot b_{n+2}}$ *(характеристическое свойство геометрической прогрессии).*

На практике вместо равенства удобнее использовать равносильное ему равенство $b_{n+1}^2 = b_n \cdot b_{n+2}$.

4) *Если геометрическая прогрессия является бесконечно убывающей, т.е.* $|q|<1$, *то* $S=\frac{b_1}{1-q}$, *где* $S=\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

3. Задачи на совместную работу. Содержание задач этого типа сводится обычно к следующему. Некоторую работу, объем которой не указывается и не является искомым (например, перепечатка рукописи, рытье котлована, заполнение резервуара и т.д.), выполняют несколько человек или механизмов, работающих равномерно (т.е. с постоянной для каждого из них производительностью). В таких задачах объем всей работы, которая должна быть выполнена, принимается за единицу. Время t, требующееся для выполнения всей работы, и V – производительность труда, т.е. величина работы, выполняемой за единицу времени, связаны соотношением

$$V=\frac{1}{t}.$$

4. Задачи на сплавы и смеси. Решение этих задач связано с понятиями «концентрация», «процентное содержание», «проба», «влажность» и т.д. и основано на следующих допущениях:

1. Все рассматриваемые смеси (сплавы, растворы) однородны.

2. Не делается различия между литром как единицей емкости и литром как единицей массы.

Если смесь (сплав, раствор) массы m состоит из веществ A, B, C (которые имеют массы соответственно m_1, m_2, m_3, то величина $\frac{m_1}{m}$ (соответственно $\frac{m_2}{m}, \frac{m_3}{m}$) называется концентрацией вещества A (соответственно B, C) в смеси. Величина $\frac{m_1}{m} \cdot 100\%$ (соответственно

$\frac{m_2}{m} \cdot 100\%$, $\frac{m_3}{m} \cdot 100\%$) называется процентным содержанием вещества *A* (соответственно *B*, *C*) в смеси. Ясно, что $\frac{m_1}{m} + \frac{m_2}{m} + \frac{m_3}{m} = 1$, т.е. от концентрации двух веществ зависит концентрация третьего.

При составлении уравнения обычно прослеживают содержание какого-нибудь одного вещества из тех, которые сплавляются (смешиваются и т.д.).

5. Задачи на движение. При решении этих задач принимают следующие допущения:

1. Если нет специальных отговорок, то движение считают равномерным.
2. Скорость считается величиной положительной.
3. Всякие переходы на новый режим движения, на новое направление движения считают происходящими мгновенно.
4. Если тело с собственной скоростью x движется по реке, скорость течения которой равна y, то скорость движения тела по течению считается равной $(x+y)$, а против течения – равной $(x - y)$.

3. ИРРАЦИОНАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ

Иррациональными называются уравнения, в которых переменная содержится под знаком корня или под знаком операции возведения в дробную степень.

Основными методами решения иррациональных уравнений являются следующие: 1) метод возведения обеих частей уравнения в одну и ту же степень; 2) метод введения новых переменных. В некоторых случаях оказывается целесообразным применение различных искусственных приемов. Появление посторонних корней может произойти за счет того, что при возведении обеих частей заданного уравнения $f(x)=g(x)$ в четную степень мы получаем уравнение, являющееся следствием не только этого уравнения, но и уравнения $f(x)=-g(x)$. Действительно, $(g(x))^2=(-g(x))^2$.

Если уравнение $f(x)=-g(x)$ имеет корни, то именно они являются посторонними корнями заданного уравнения $f(x)=g(x)$. Так, если заданным является уравнение $x-1=3$, то при возведении обеих частей уравнения $x-1=3$ в квадрат мы получаем уравнение $(x-1)^2=3^2$, т.е. $x^2-2x-8=0$, корнями которого являются и корень заданного уравнения $x=4$, и значение $x=-2$, являющееся корнем уравнения $x-1=-3$, но не удовлетворяющее заданному уравнению.

Еще пример. Дано уравнение $\sqrt{1-x}=-x-1$. Возведя обе части уравнения в квадрат, мы получаем уравнение $1-x=x^2+2x+1$, т.е. $x^2+3x=0$. Это уравнение является следствием заданного уравнения. Его корнями будут $x_1=-3$ и $x_2=0$. Нетрудно убедиться, что $x_1=-3$ является корнем заданного уравнения, а $x_2=0$ – посторонний корень (это корень уравнения $\sqrt{1-x}=-x-1$). Напомним, что если обе части уравнения $f(x)=g(x)$ неотрицательны, то уравнения $f(x)=g(x)$ и $(f(x))^n=(g(x))^n$ равносильны.

Отметим еще, что уравнения $f(x)=g(x)$ и $f(x)=-g(x)$ имеют одну и ту же область определения. Поэтому, решив заданное уравнение методом возведения обеих его частей в четную степень и даже убедившись затем, что найденный корень $x=x_0$ принадлежит его области определения, еще нельзя утверждать, что $x=x_0$ является корнем заданного уравнения. Однако если $x=x_0$ не принадлежит области определения заданного уравнения, то это точно посторонний корень, который получен за счет расширения области определения заданного уравнения в результате использования формулы $\left(\sqrt[2n]{f(x)}\right)^{2n}=f(x)$.

Рассмотрим уравнение $\sqrt{x-2}+\sqrt{x+1}=\sqrt{2x+3}$. Его областью определения является луч $[2;\infty)$. После возведения обеих частей этого уравнения в квадрат и уединения радикала получим уравнение $\sqrt{x^2 - x - 2} = 2$.

Областью определения этого уравнения является множество $(-\infty; -1] \cup [2; \infty)$. Корнями уравнения $\sqrt{x^2 - x - 2} = 2$ являются значения $x_1=3$ и $x_2=-2$. Первый корень принадлежит области определения заданного уравнения, т.е. может являться его корнем. Второй же корень не принадлежит области определения заданного уравнения, т.е. является посторонним корнем.

Вместе с тем второй корень принадлежит области определения уравнения $\sqrt{x^2 - x - 2} = 2$. Таким образом, посторонний корень появился за счет расширения области определения заданного уравнения.

Причиной появления посторонних корней могут быть также некоторые замены, выполняемые в ходе решения иррационального уравнения.

Мы назвали основные причины появления посторонних корней при решении иррациональных уравнений (возведение обеих частей уравнения в одну и ту же степень, расширение области определения и др.). По этим причинам необходимой частью решения иррационального уравнения является проверка.

В зависимости от вида корней (простые или громоздкие), от их количества (один, два или бесконечное множество), а иногда и в зависимости от выбранного способа решения эти корни проверяются либо подстановкой в заданное уравнение, либо путем доказательства равносильности уравнений, получаемых на всех этапах решения, либо каким-то другим путем (с использованием области определения заданного уравнения, с обращением к промежуточным уравнениям и т.д.).

4. ПОКАЗАТЕЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

При решении показательных уравнений используются два основных метода: 1) переход от уравнения $a^{f(x)}=a^{g(x)}$ к уравнению $f(x)=g(x)$; 2) введение новых переменных. Иногда приходится применять искусственные приемы.

Рассмотрим уравнения вида $a^{f(x)}=a^{g(x)}$, где $a>0$ и $a\neq 1$, и уравнения, сводящиеся к ним. Решение таких уравнений основано на следующей теореме:

Теорема. *Если $a>0$ и $a\neq 1$, то уравнение $a^{f(x)}=a^{g(x)}$ равносильно уравнению $f(x)=g(x)$.*

5. ЛОГАРИФМИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ

При решении логарифмических уравнений во многих случаях приходится использовать свойства логарифма произведения, частного, степени, корня. Напомним эти свойства:

1^0. $\log_a f(x)+\log_a g(x)=\log_a (f(x)\cdot g(x))$.

2^0. $\log_a f(x)-\log_a g(x)=\log_a \dfrac{f(x)}{g(x)}$.

3^0. $\log_a (f(x))^n=\begin{cases} n\log_a f(x), & \text{если} \quad n\in R, n\neq 2k, k\in Z, \\ n\log_a |f(x)|, & \text{если} \quad n \text{ - четное} \quad \text{число.} \end{cases}$

Все логарифмы в формулах 1^0 – 3^0 имеют одно и то же основание $a>0$, $a\neq 1$. В тех случаях, когда в одном логарифмическом уравнении имеются логарифмы с разными основаниями, применение формул 1^0 – 3^0 возможно лишь после перехода к логарифмам с равными основаниями. Этот переход осуществляется с помощью формулы

4^0. $\log_a f(x)=\dfrac{\log_b f(x)}{\log_b a}$, где $b>0$, $b\neq 1$,

частным случаем которой является формула

5^0. $\log_{a^r} f(x)^r=\log_a f(x)$, где $r\in R$, $r\neq 0$.

Отметим, что замена выражения $\log_a f(x)+\log_a g(x)$ выражением $\log_a (f(x)\cdot g(x))$ приводит, как правило, к расширению области определения выражения $\log_a f(x)+\log_a g(x)$. Действительно, область определения выражения $\log_a f(x)+\log_a g(x)$ задается системой неравенств

$$\begin{cases} f(x) = 0, \\ g(x) = 0, \end{cases}$$

а область определения выражения $\log_a (f(x)\cdot g(x))$ задается совокупностью систем неравенств

$$\begin{cases} f(x) \succ 0, \\ g(x) \succ 0; \end{cases} \begin{cases} f(x) \prec 0, \\ g(x) \prec 0. \end{cases}$$

Таким образом, если вторая система этой совокупности имеет решение, то область определения выражения $\log_a (f(x)\cdot g(x))$ будет шире, чем область определения выражения $\log_a f(x) + \log_a g(x)$.

Аналогично может произойти расширение области определения выражения $\log_a f(x) - \log_a g(x)$ при замене его выражением $\log_a \frac{f(x)}{g(x)}$.

1. Решение уравнений вида $\log_a f(x) = \log_a g(x)$ и уравнений, сводящихся к этому виду. Уравнения вида

$$\log_a f(x) = \log_a g(x) \qquad (1)$$

и уравнения, сводящиеся к этому виду, можно решить одним из следующих способов:

1-й способ. Решить уравнение

$$f(x) = g(x) \qquad (2)$$

являющееся следствием уравнения (1), и выполнить проверку корней уравнения (2) подстановкой их в заданное уравнение. Если уравнение (1) само является следствием некоторого заданного логарифмического уравнения, то проверку найденных корней выполняют подстановкой их в заданное уравнение, а не в уравнение (1).

2-й способ. Решить уравнение (2) и проверить корни этого уравнение подстановкой их либо в систему неравенств

$$\begin{cases} f(x) \succ 0, \\ g(x) \succ 0, \end{cases} \qquad (3),$$

которой задается область определения уравнения (1), либо в неравенства, являющиеся решением системы (3). Если же уравнение (1) само является следствием некоторого заданного логарифмического уравнения, то проверку найденных корней выполняют подстановкой их в неравенства, с помощью которых записывается область определения заданного уравнения, а не уравнения (1).

3-й способ. Этот способ отличается от 2-го способа практически лишь тем, что обращение к неравенствам, с помощью которых записывается область определения уравнения (1), происходит не в проверке, а уже непосредственно в процессе решения уравнения (1). Применяя этот способ, решают смешанную систему

$$\begin{cases} f(x) = g(x), \\ f(x) \succ 0, \\ g(x) \succ 0, \end{cases}$$

которая составлена из уравнения (2) и неравенства системы (3). Эта смешанная система равносильна уравнению (1). Если же уравнение (1) само является следствием некоторого заданного логарифмического уравнения, то в смешанную систему, равносильную этому уравнению, войдут, кроме уравнения (2), неравенства, с помощью которых записывается область определения заданного уравнения, а не уравнения (1).

При решении логарифмических уравнений применяются три основных метода: метод потенцирования, т.е. переход от уравнения $\log_a f(x)= \log_a g(x)$ к уравнению-следствию $f(x)=g(x)$; метод введения новых переменных; метод логарифмирования, т.е. переход от уравнения $f(x)=g(x)$ к уравнению $\log_a f(x)= \log_a g(x)$ (об этом методе идет речь ниже в п.3).

2. Решение уравнений вида $\log_{a(x)} f(x)= \log_{a(x)} g(x)$ и уравнений, сводящихся к этому виду. При решении уравнений вида

$$\log_{a(x)} f(x)= \log_{a(x)} g(x) \qquad (4)$$

и уравнений, сводящихся к этому виду, может применяться любой из трех способов, которые применяются при решении уравнений вида (1). Следует лишь учесть, что к неравенствам, с помощью которых записывается область определения уравнения (1), необходимо добавить еще условия $a(x)>0$ и $a(x)\neq 1$.

Таким образом, при решении уравнений вида (4) вторым или третьим способом из корней уравнения (2) отбирают лишь те, которые удовлетворяют следующей системе:

$$\begin{cases} f(x) \succ 0, \\ g(x) \succ 0, \\ a(x) \succ 0, \\ a(x) \neq 1. \end{cases}$$

6. СИСТЕМЫ ПОКАЗАТЕЛЬНЫХ И ЛОГАРИФМИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

При решении систем показательных и логарифмических уравнений применяются те же приемы, что при решении систем алгебраических уравнений. Следует лишь участь, что во многих случаях, прежде чем применить тот или иной метод решения систем, следует преобразовать каждое уравнение системы к возможно более простому виду.

7. РАЦИОНАЛЬНЫЕ НЕРАВЕНСТВА

1. Основные понятия. *Областью определения* неравенства $f(x)>g(x)$ называется множество таких значений x, при которых и функция $f(x)$, и функция $g(x)$ определены. Иными словами, область определения неравенства $f(x)>g(x)$ – это пересечение областей определения функций $f(x)$ и $g(x)$.

Частным решением неравенства $f(x)>g(x)$ называется всякое удовлетворяющее ему значение переменной x. *Решением* неравенства называется множество всех его частных решений.

Два неравенства с одной переменной x называются *равносильными*, если их решения совпадают (в частности, если оба неравенства не имеют решений). Если каждое частное решение неравенства $f_1(x)>g_1(x)$ является в то же время частным решением неравенства $f_2(x)>g_2(x)$, полученного после преобразований неравенства $f_1(x)>g_1(x)$, то неравенство $f_2(x)>g_2(x)$

называется *следствием* неравенства $f_1(x)>g_1(x)$. В следующих теоремах речь идет о преобразованиях, приводящих к равносильным неравенствам.

Теорема 1. *Если к обеим частям неравенства прибавить одну и ту же функцию φ(x), которая определена при всех значениях x из области определения исходного неравенства, и при этом оставить без изменения знак неравенства, то получится неравенство, равносильное исходному.*

Таким образом, неравенства

$$f(x) > g(x) \text{ и } f(x) + \varphi(x) > g(x) + \varphi(x)$$

равносильны, если $\varphi(x)$ удовлетворяет условию теоремы.

Следствие. *Неравенства*

$$f(x) + \varphi(x) > g(x) \text{ и } f(x) > g(x) \text{ и } f(x) > g(x) - \varphi(x)$$

равносильны.

Теорема 2. *Если обе части неравенства умножить (или разделить) на одну и ту же функцию φ(x), которая при всех значениях x из области определения исходного неравенства принимает только положительные значения, и при этом оставить без изменения знак исходного неравенства, то получится неравенство, равносильное исходному.*

Таким образом, если $\varphi(x)>0$, то неравенства

$$f(x) > g(x) \text{ и } f(x) \cdot \varphi(x) > g(x) \cdot \varphi(x)$$

(или $\frac{f(x)}{\varphi(x)} > \frac{g(x)}{\varphi(x)}$) равносильны.

Следствие. *Если обе части неравенства умножить (или разделить) на одно и то же положительное число, сохраняя знак неравенства, то получится неравенство, равносильное данному.*

Теорема 3. *Если обе части неравенства умножить (или разделить) на одну и ту же функцию φ(x), которая при всех значениях x из области определения исходного неравенства принимает только* *отрицательные значения, и при этом изменить на противоположный знак неравенства, то получится неравенство, равносильное исходному.*

Таким образом, если *φ(x)*<0, то неравенства

$$f(x) > g(x) \text{ и } f(x) \cdot \varphi(x) < g(x) \cdot \varphi(x)$$

(или $\frac{f(x)}{\varphi(x)} < \frac{g(x)}{\varphi(x)}$) равносильны.

Следствие. *Если обе части неравенства умножить (или разделить) на одно и то же отрицательное число, изменив знак неравенства на противоположный, то получится неравенство, равносильное данному.*

Теорема 4. *Пусть дано неравенство f(x) > g(x), причем f(x) ≥0 и g(x)≥0 при всех x из области определения неравенства. Если обе части неравенства возвести в одну и ту же натуральную степень n и при этом знак неравенства оставить без изменения, то получится неравенство* $(f(x))^n > (g(x))^n$, *равносильное данному.*

Замечание. При выполнении тождественных преобразований возможно изменение области определения выражения; например, при приведении подобных членов, при сокращении дроби может произойти расширение области определения. При решении неравенства в результате тождественных преобразований может получиться неравносильное неравенство. Рассмотрим для примера неравенство

$$\sqrt{x} + x - 1 > \sqrt{x} - 5. \qquad (1)$$

Прибавив к обеим частям неравенства (1) одну и ту же функцию $\varphi(x) = -\sqrt{x}$, получим неравенство

$$\sqrt{x} + x - 1 - \sqrt{x} > \sqrt{x} - 5 - \sqrt{x}, \qquad (2)$$

равносильное (по теореме 1) неравенству (1). Далее имеем:

$$x - 1 > -5, \qquad (3)$$

откуда $x > -4$. Но неравенство (1) имеет решение $x \geq 0$, т.е. неравенства (1) и (3) неравносильны (неравенство (3) есть следствие неравенства (1)). Дело в том, что неравенство $x - 1 > -5$ имеет более широкую область определения, чем неравенство (1); это расширение произошло в результате приведения подобных членов в неравенстве (2). Поэтому после выполнения тождественных преобразований, которые привели к расширению области определения неравенства, из найденных решений нужно отобрать те, которые принадлежат области определения исходного неравенства.

2. Рациональные неравенства. Рассмотрим функцию

$$f(x)=\frac{(x-a_1)^{n_1}(x-a_2)^{n_2}\cdot\ldots\cdot(x-a_k)^{n_k}}{(x-b_1)^{m_1}(x-b_2)^{m_2}\cdot\ldots\cdot(x-b_p)^{m_p}}, \qquad (4)$$

где $n_1, n_2, \ldots, n_k, m_1, m_2, \ldots, m_p$ – натуральные числа и где $a_i \neq a_j$, $b_i \neq b_j$, при $i \neq j$; $a_i \neq b_j$ $(i=1, 2, \ldots, k;\ j=1, 2, \ldots, p)$.

В точках $x=a_i$ функция обращается в нуль (эти точки называют нулями функции), точки $x=b_j$ – точки разрыва функции $f(x)$. Если все нули функции и точки разрыва отметить на числовой прямой, то они разобьют ее на $k+p+1$ промежутков. Из курса математического анализа известно, что внутри каждого из этих промежутков функция $f(x)$ непрерывна и сохраняет постоянный знак. Для установления этого знака достаточно взять любую точку из интересующего нас промежутка и определить знак функции в этой точке.

На практике для решения неравенства $f(x)>0$ (соответственно $<$, $\geq$, $\leq$), где $f(x)$ – функция вида (4), применяют так называемый *метод интервалов* – геометрический метод решения, основанный на трех достаточно очевидных утверждениях:

1) Если c – наибольшее из чисел a_j, b_j, то в промежутке (c, ∞) функция $f(x)$ положительна.

2) Если a_j (соответственно b_j) – такая точка, что показатель степени h_i в выражениях $(x-a)^{h_1}$ есть число нечетное, то справа и слева от a_j (или b_j), т.е. в смежных промежутках, функция $f(x)$ имеет противоположные знаки.

Такую точку a_j (соответственно b_j) будем называть *простой*. Высказанное выше утверждение означает, что при переходе через простую точку функция $f(x)$ меняет знак на противоположный.

1) Если a_j (соответственно b_j) – такая точка, что показатель степени h_i выражения $(x-a)^{h_1}$ есть число четное, то справа и слева от a_i, т.е. в смежных промежутках, функция имеет одинаковые знаки.

Такую точку a_j (соответственно b_j) будем называть *двойной*. Высказанное выше утверждение означает, что при переходе через двойную точку функция $f(x)$ не имеет знака.

Метод интервалов, основанный на сформулированных выше трех утверждениях, применяется для решения неравенства вида

$$\frac{(x-a_1)^{n_1}(x-a_2)^{n_2}\cdot\ldots\cdot(x-a_k)^{n_k}}{(x-b_1)^{m_1}(x-b_2)^{m_2}\cdot\ldots\cdot(x-b_p)^{m_p}} > 0\ (< 0). \qquad (5).$$

Он заключается в следующем:

1) Отмечают все нули и точки разрыва функции $f(x)$,содержащейся в левой части неравенства (5), незакрашенными кружочками на числовой прямой.

2) Проводят волнообразную кривую, которую начинают всегда в какой-нибудь точке, находящейся над числовой прямой, правее наибольшего из чисел a_i и b_j. При этом проводят ее так, чтобы она проходила все отмеченные точки с учетом того, что при переходе через простые точки кривая пересекает числовую прямую, а при переходе через двойные точки она остается по ту же сторону от числовой прямой. Эту волнообразную кривую называют *кривой знаков*.

3) Выбирают промежутки числовой прямой в соответствии со знаком неравенства (5) (а именно *f(x)*>0 там, где кривая знаков располагается над числовой прямой, и *f(x)*<0 там, где кривая располагается под числовой прямой). Объединение отобранных промежутков представляет собой решение неравенства (5).

Условимся двойные точки показывать на рисунке подчеркнутыми числами.

3. Системы и совокупности неравенств с одной переменной. Несколько неравенств с одной переменной образуют *систему неравенств* в том случае, если ставится задача об отыскании всех тех значений переменной, которые удовлетворяют *одновременно каждому* из этих неравенств.

Несколько неравенств с одной переменной образуют *совокупность неравенств* в том случае, если ставится задача об отыскании всех тех значений переменной, каждое из которых удовлетворяет *по крайней мере одному из этих неравенств.*

Из сказанного выше следует, что *решением системы неравенств является перечисление решений неравенств,* образующих систему, а *решением совокупности неравенств является объединение решений неравенств,* образующих совокупность (здесь, как и выше, под решением понимается общее решение, т.е. множество всех частных решений).

Если неравенства $f_1(x)>g_1(x)$ и $f_2(x)>g_2(x)$ образуют систему неравенств, то их записывают в столбик с помощью фигурной скобки:

$$\begin{cases} f_1(x) \succ g_1(x), \\ f_2(x) \succ g_2(x). \end{cases}$$

В некоторых случаях неравенства, образующие систему, можно записать в строчку. Так, если неравенства $f_1(x)>g_1(x)$ и $f_2(x)>g_2(x)$ образуют систему, то эту систему можно записать в виде так называемого двойного неравенства:

$$g_1(x) < f(x) < g_2(x).$$

Из определения системы неравенств следует, что если неравенство $f(x) > g(x)$ является следствием неравенств $f_1(x)>g_1(x)$ и $f_2(x)>g_2(x)$ (или следствием только одного из этих неравенств), то система неравенств

$$\begin{cases} f_1(x) \succ g_1(x), \\ f_2(x) \succ g_2(x). \end{cases}$$

равносильна следующей системе:

$$\begin{cases} f_1(x) \succ g_1(x), \\ f_2(x) \succ g_2(x), \\ f(x) \succ g(x.) \end{cases}$$

Иными словами, если к заданной системе неравенств приписать неравенство-следствие или, наоборот, из заданной системы неравенств исключить неравенство-следствие, то получится система неравенств, равносильная заданной. Так, равносильны системы неравенств

$$\begin{cases} f_1(x) \succ g_1(x), \\ f_2(x) \succ g_2(x), \\ f_1(x) + f_2(x) \succ g_1(x) + g_2(x) \end{cases} \text{ и } \begin{cases} f_1(x) \succ g_1(x), \\ f_2(x) \succ g_2(x) \end{cases}$$

(из первой системы исключено неравенство $f_1(x)+f_2(x)>g_1(x)+g_2(x)$, являющееся следствием неравенств $f_1(x)>g_1(x)$ и $f_2(x)>g_2(x)$).

Если неравенства $f_1(x)>g_1(x)$ и $f_2(x)>g_2(x)$ образуют совокупность неравенств, то их записывают либо в столбик с помощью квадратной скобки:

$$\left[\begin{array}{l} f_1(x) \succ g_1(x), \\ f_2(x) \succ g_2(x), \end{array} \right.$$

либо в строчку с помощью знака «;»:

$$f_1(x)>g_1(x); f_2(x)>g_2(x).$$

Всякое нестрогое неравенство $f(x) \geq g(x)$ является совокупностью строгого неравенства $f(x) > g(x)$ и уравнения $f(x) = g(x)$ и поэтому может быть записано так, как обычно записывается совокупность:

$$\left[\begin{array}{l} f(x) \succ g(x), \\ f(x) = g(x) \end{array} \right. \text{ или } f(x) > g(x); \; f(x) = g(x).$$

Всякое «не равенство» $f(x) \neq g(x)$ можно записать и в виде совокупности двух строгих неравенств:

$$\left[\begin{array}{l} f(x) \succ g(x), \\ f(x) \prec g(x) \end{array}\right. \quad \text{или} \quad f(x) > g(x);\ f(x) < g(x).$$

Несколько систем неравенств с одной переменной образуют *совокупность систем* неравенств в том случае, если ставится задача об отыскании всех тех значений переменной, каждое из которых удовлетворяет *по крайней мере одной из этих систем.*

4. Неравенства, содержащие переменную под знаком модуля. При решении неравенств, содержащих переменную под знаком модуля, иногда бывает полезна теорема 4 о равносильности неравенств.

Пусть, например, нужно решить неравенство $|f(x)| > |g(x)|$. Воспользуемся тем, что если $p(x)$ – некоторая функция, то $|p(x)| \geq 0$ и $|p(x)|^2 = (p(x))^2$. Кроме того, иногда полезно воспользоваться геометрической интерпретацией модуля действительного числа. Дело в том, что геометрически $|a|$ означает расстояние от точки a числовой прямой до начала координат, а $|a - b|$ означает расстояние между точками a и b.

8. ИРРАЦИОНАЛЬНЫЕ НЕРАВЕНСТВА

При решении иррациональных неравенств используются те же приемы, что и при решении иррациональных уравнений: возведение обеих частей неравенства в одну и ту же натуральную степень, введение новых (вспомогательных) переменных и т.д. Осуществлять решение можно, придерживаясь, например, следующего плана:

1) Найти область определения заданного неравенства.

2) Руководствуясь предложениями о равносильности неравенств, решить заданное неравенство.

3) Из найденных решений отобрать значения переменной, принадлежащие области определения заданного неравенства.

При получении определенных навыков решения иррациональных неравенств можно не расчленять решение на три этапа, а сразу сводить данное неравенство к системе или совокупности систем более простых неравенств.

9. ПОКАЗАТЕЛЬНЫЕ НЕРАВЕНСТВА

Решение показательных неравенств вида $a^{f(x)} > a^{g(x)}$, где $\begin{cases} a \succ 0, \\ a \neq 1, \end{cases}$ основано на следующих теоремах:

Теорема 1. *Если a>1, то неравенство* $a^{f(x)} > a^{g(x)}$ *равносильно неравенству f(x)>g(x).*

Теорема 2. *Если 0<a<1, то неравенство* $a^{f(x)} > a^{g(x)}$ *равносильно неравенству f(x)<g(x).*

10.ЛОГАРИФМИЧЕСКИЕ НЕРАВЕНСТВА

Решение логарифмических неравенств вида

$$\log_a f(x) > \log_a g(x), \tag{1}$$

где $\begin{cases} a \succ 0, \\ a \neq 1, \end{cases}$ основано на следующих двух теоремах:

Теорема 1. *Если a>1, то неравенство* (1) *равносильно системе неравенств*

$$\begin{cases} f(x) \succ 0, \\ g(x) \succ 0, \\ f(x) \succ g(x). \end{cases} \tag{2}$$

Теорема 2. *Если 0<a<1, то неравенство* (1) *равносильно системе неравенств*

$$\begin{cases} f(x) \succ 0, \\ g(x) \succ 0, \\ f(x) \prec g(x). \end{cases} \tag{3}$$

Замечания. 1) В системе (2) можно опустить первое неравенство, так как оно следует из третьего неравенства. Аналогично в системе (3) можно опустить второе неравенство.

2) Первыми двумя неравенствами систем (2) и (3) задается область определения неравенства (1).

3) При решении логарифмических уравнений область определения уравнений, как правило, не находилась (выписывались лишь условия, задающие эту область). И при решении логарифмических неравенств, как показывает практика, нахождение области определения заданного неравенства в большинстве случаев является нецелесообразным. Обычно условия, задающие область определения неравенства, подключают к тому неравенству, которое является следствием заданного логарифмического неравенства, и решают затем полученную систему.

11. УРАВНЕНИЯ, СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ И НЕРАВЕНСТВА С ПАРАМЕТРАМИ

Пусть дано уравнение

$$F\ (x;a) = 0. \tag{1}$$

Если ставится задача отыскать все такие пары *(x; a)*, которые удовлетворяют данному уравнению, то уравнение (1) – это уравнение с двумя переменными x и a. Однако относительно уравнения (1) можно поставить и другую задачу. Дело в том, что если придать a какое-либо фиксированное значение, то уравнение (1) можно рассматривать как уравнение с одной переменной x. Решения этого уравнения, естественно, определяются выбранным значением a.

Если ставится задача для каждого значения a из некоторого числового множества A решить уравнение (1) относительно x, то уравнение (1) называют уравнением с переменной x и параметром a, а множество A – областью изменения параметра.

Условимся всюду в настоящем параграфе уравнение (1) понимать как уравнение с переменной *x* и параметром *a*.

Уравнение (1) – это, по существу, краткая запись семейства уравнений. Уранения этого семейства получаются из уравнения (1) при различных конкретных значениях параметра *a*. Так, уравнение $2a(a-2)x = a-2$, у которого областью изменения параметра *a* является множество A= {-1; 0; 1; 2; 3}, есть краткая запись следующего семейства уравнений:

$$\left\{\begin{array}{ccc} 6x=-3 & \textit{при} & a=-1 \\ 0\cdot x=-2 & \textit{при} & a=0 \\ -2x=-1 & \textit{при} & a=1 \\ 0\cdot x=0 & \textit{при} & a=2 \\ 6x=1 & \textit{при} & a=3 \end{array}\right\}$$

Условимся всюду в дальнейшем под областью изменения параметра подразумевать (если не сделано специальных оговорок) множество всех действительных чисел, а задачу решения уравнения с параметром формулировать следующим образом: *решить уравнение* (1) (с переменной *x* и параметром *a*) – *это значит на множестве действительных чисел решить семейство уравнений, получающихся из уравнений (1) при всех действительных значениях параметра.*

Ясно, что выписать каждое уравнение из бесконечного семейства уравнений невозможно. Тем не менее каждое уравнение семейства должно быть решено. Сделать это можно, если, например, по некоторому целесообразному признаку разбить множество всех значений параметра на подмножества и решить затем заданное уравнение на каждом из этих подмножеств.

Для разбиения множества значений параметра на подмножества удобно воспользоваться теми значениями параметра, при которых или при переходе через которые происходят качественные изменения уравнения. Такие значения параметра будем называть *контрольными*.

ТРИГОНОМЕТРИЯ

ТОЖДЕСТВЕННЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

1. ТОЖДЕСТВЕННЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ВЫРАЖЕНИЙ

Напомним основные факты тригонометрии.

I. Знаки тригонометрических функций по четвертям:

Четверть	$\sin x$	$\cos x$	$\operatorname{tg} x$	$\operatorname{ctg} x$
I	+	+	+	+
II	+	–	–	–
III	–	–	+	+
IV	–	+	–	–

II. Некоторые значения тригонометрических функций:

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	–1
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	–1	0
$\operatorname{tg} x$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	–	0	–
$\operatorname{ctg} x$	–	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	–	0

III. Четность, периодичность.

Функция $y = \cos x$ является четной, остальные тригонометрические функции нечетные:

$$\sin(-x) = -\sin x$$

$$\cos(-x) = \cos x$$

$$\operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg} x \; (x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n),$$

$$\operatorname{ctg}(-x) = -\operatorname{ctg} x \; (x \neq \pi n).$$

Все тригонометрические функции являются периодическими. При этом $T=2\pi$ – основной период функций $y=\sin x$, $y=\cos x$, а $T=\pi$ – основной период функций $y=\mathrm{tg}\ x$, $y=\mathrm{ctg}\ x$. (Напомним, что основным периодом называется наименьший из множества всех положительных периодов периодической функции.) Таким образом,

$$\sin(x+2\pi) = \sin(x-2\pi) = \sin x,$$

$$\cos(x+2\pi) = \cos(x-2\pi) = \cos x,$$

$$\mathrm{tg}\,(x+\pi) = \mathrm{tg}\,(x-\pi) = \mathrm{tg}\,x \ (x\neq \frac{\pi}{2}+\pi n),$$

$$\mathrm{ctg}\,(x+\pi) = \mathrm{ctg}\,(x-\pi) = \mathrm{ctg}\,x \ (x\neq \pi n).$$

IV. Формулы сложения аргументов:

$$\sin(\alpha\pm\beta) = \sin\alpha\cdot\cos\beta \pm \sin\beta\cdot\cos\alpha, \quad \text{(IV.1)}$$

$$\cos(\alpha\pm\beta) = \cos\alpha\cdot\cos\beta \pm \sin\alpha\cdot\sin\beta, \quad \text{(IV.2)}$$

$$\mathrm{tg}\,(\alpha\pm\beta) = \frac{tg\alpha \pm tg\beta}{1\pm tg\alpha\cdot tg\beta} \ (\alpha\neq \frac{\pi}{2}+\pi n,\ \beta\neq\pi k,\ \alpha\pm\beta\neq \frac{\pi}{2}+\pi m), \quad \text{(IV.3)}$$

$$\mathrm{ctg}\,(\alpha\pm\beta) = \frac{ctg\alpha\cdot ctg\beta \pm 1}{ctg\beta \pm ctg\alpha} \ (\alpha\neq\pi n,\ \beta\neq\pi k,\ \alpha\pm\beta\neq\pi m). \quad \text{(IV.4)}$$

V. Формулы, связывающие тригонометрические функции одного и того же аргумента:

$$\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1, \quad \text{(V.1)}$$

$$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \ (\alpha\neq \frac{\pi}{2}+\pi n), \quad \text{(V.2)}$$

$$\mathrm{ctg}\,\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} \ (\alpha\neq \pi n), \quad \text{(V.3)}$$

$$1 + \mathrm{tg}^2\,\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha} \quad (\alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi n), \qquad \text{(V.4)}$$

$$1 + \mathrm{ctg}^2\,\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha} \quad (\alpha \neq \pi n) \qquad \text{(V.5)}$$

VI. Формулы, связывающие тригонометрические функции аргументов, из которых один вдвое больше другого:

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cdot\cos\alpha, \qquad \text{(VI.1)}$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha, \qquad \text{(VI.2)}$$

$$\mathrm{tg}\,2\alpha = \frac{2tg\alpha}{1 - tg^2\alpha} \ (\alpha \neq \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2},\ \alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi k), \qquad \text{(VI.3)}$$

$$\mathrm{ctg}\,2\alpha = \frac{ctg^2\alpha - 1}{2ctg\alpha} \quad (\alpha \neq \frac{\pi n}{2}), \qquad \text{(VI.4)}$$

$$1 + \cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha, \qquad \text{(VI.5)}$$

$$1 - \cos 2\alpha = 2\sin^2\alpha, \qquad \text{(VI.6)}$$

$$1 \pm \sin 2\alpha = (\cos\alpha + \sin\alpha)^2. \qquad \text{(VI.7)}$$

VII. Формулы приведения:

x	$\frac{\pi}{2} - \alpha$	$\frac{\pi}{2} + \alpha$	$\pi - \alpha$	$\pi + \alpha$	$\frac{3\pi}{2} - \alpha$	$\frac{3\pi}{2} + \alpha$	$2\pi - \alpha$
$\sin x$	$\cos\alpha$	$\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\sin\alpha$
$\cos x$	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\sin\alpha$	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$

tg x	ctg α	– ctg α	– tg α	tg α	ctg α	– ctg α	– tg α
ctg x	tg α	– tg α	– ctg α	ctg α	tg α	– tg α	– ctg α

Для облегчения запоминания указанных в таблице формул приведения можно применять следующее мнемоническое правило:

1) если дуга α откладывается от горизонтального диаметра (π±α, 2π – α), то название функции сохраняется; если дуга α откладывается от вертикального диаметра ($\frac{\pi}{2}$±α, $\boxed{\frac{3}{2}}$±α), то название функции меняется (синус на косинус, косинус на синус, тангенс на котангенс, котангенс на тангенс);

2) перед полученной функцией ставят тот знак, который имела бы приводимая функция в случае, если $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$.

VIII. Формулы преобразования суммы тригонометрических функций в произведение:

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}, \qquad \text{(VIII.1)}$$

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\boxed{\frac{\alpha-\beta}{2}}\cos\boxed{\frac{\alpha+\beta}{2}}, \qquad \text{(VIII.2)}$$

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\boxed{\frac{\alpha+\beta}{2}}\cos\boxed{\frac{\alpha-\beta}{2}}, \qquad \text{(VIII.3)}$$

$$\cos\alpha - \cos\beta = 2\sin\boxed{\frac{\alpha+\beta}{2}}\sin\frac{\beta-\alpha}{2}, \qquad \text{(VIII.4)}$$

$$\text{tg}\,\alpha \pm \text{tg}\,\beta = \frac{\sin(\alpha\pm\beta)}{\cos\alpha\cdot\cos\beta} \quad (\alpha\neq \boxed{\frac{\;}{2}}+\pi n,\ \ \beta\neq \boxed{\frac{\;}{2}}+\pi k), \qquad \text{(VIII.5)}$$

$$\operatorname{ctg}\alpha \pm \operatorname{ctg}\beta = \frac{\sin(\beta \pm \alpha)}{\sin\alpha \cdot \sin\beta} \quad (\alpha\neq\pi n, \quad \beta\neq\pi k).$$

(VIII.6)

IX. Формулы преобразования произведения тригонометрических функций в сумму:

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{\sin(\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta)}{2},$$

(XI.1)

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)}{2},$$

(IX.2)

$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)}{2}.$$

(IX.3)

2. ТОЖДЕСТВЕННЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ВЫРАЖЕНИЙ, СОДЕРЖАЩИХ ОБРАТНЫЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

Напомним определения обратных тригонометрических функций.

1) y=arcsin x – это функция, определенная на отрезке [– 1; 1], обратная функции x=sin y, $y \in \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$. Таким образом,

$$(y=\arcsin x) \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{\pi}{2} \le y \le \frac{\pi}{2}, \\ \sin y = x. \end{cases}$$

Для любого x из отрезка [– 1; 1] имеем:

$$-\frac{\pi}{2} \le \arcsin x \le \frac{\pi}{2}, \tag{1}$$

$$\sin(\arcsin x) = x. \tag{2}$$

2) y=arccos x – это функция, определенная на отрезке [– 1; 1], обратная функции x=cos y, $y \in$ [0; π]. Таким образом,

$$(y=\arccos x) \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \le y \le \pi, \\ \cos y = x. \end{cases}$$

Для любого x из отрезка [– 1; 1] имеем:

$$0 \le \arccos x \le \pi, \tag{3}$$

$$\cos(\arccos x) = x. \tag{4}$$

3) y=arctg x – это функция, определенная на (– ∞; ∞), обратная функции x=tg y, $y \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$. Таким образом,

$$(y=\operatorname{arctg} x) \quad \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{\pi}{2} \prec y \prec \frac{\pi}{2}, \\ tgy = x. \end{cases}$$

Для любого x имеем:

$$-\frac{\pi}{2} < \operatorname{arctg} x < \frac{\pi}{2}, \tag{5}$$

$$\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x) = x. \tag{6}$$

4) y=arcctg x – это функция, определенная на (– ∞; ∞), обратная функции x=ctg y, $y \in (0; \pi)$. Таким образом,

$$(y=\operatorname{arcctg} x) \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \prec y \prec \pi, \\ ctgy = x. \end{cases}$$

Для любого x имеем:

$$0 < \operatorname{arcctg} x < \pi, \tag{7}$$

$$\operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} x) = x. \tag{8}$$

Функции y=arcsin x, y=arccos x, y=arctg x, y=arcctg x называются *обратными тригонометрическими* функциями или *аркфункциями*.

Отметим некоторые важные тождества:

$\arcsin(-x) = -\arcsin x \ (-1 \le x \le 1)$,

$\arccos(-x) = \pi - \arccos x \ (-1 \le x \le 1)$,

$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$ $(-1 \le x \le 1)$,

$\operatorname{arctg}(-x) = -\operatorname{arctg} x$,

$\operatorname{arcctg}(-x) = \pi - \operatorname{arcctg} x$,

$\operatorname{arctg} x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$.

3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО НЕРАВЕНСТВ

При доказательстве тригонометрических неравенств используются те же приемы, что и при доказательстве алгебраических неравенств. Отметим лишь, что при доказательстве тригонометрических неравенств синтетическим методом в качестве опорных часто используются следующие неравенства:

$$|\sin x| \le 1,\ |\cos x| \le 1,\ \sin x < x < \operatorname{tg} x, \text{ где } 0 < x < \frac{\pi}{2}.$$

Иногда в качестве опорных используют неравенства, вытекающие из монотонности тригонометрических функций. Так, в интервале $(0; \frac{\pi}{2})$ функции $y=\sin x$, $y=\operatorname{tg} x$ возрастают, а функции $y=\cos x$, $y=\operatorname{ctg} x$ убывают. Поэтому если $0 < x_1 < x_2 < \frac{\pi}{2}$, то $\sin x_1 < \sin x_2$, $\cos x_1 < \cos x_2$, $\operatorname{tg} x_1 < \operatorname{tg} x_2$, $\operatorname{ctg} x_1 < \operatorname{ctg} x_2$. Аналогичные неравенства могут быть получены для других промежутков монотонности тригонометрических функций.

РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ, СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ И НЕРАВЕНСТВ

4. УРАВНЕНИЯ

Напомним общие формулы решений простейших тригонометрических уравнений (если не сделано оговорок, то предполагается, что параметры n, k, l, m, … принимают любые целые значения).

Уравнение	Решение

$\sin x = a$, где $\lvert a\rvert \le 1$	$x = (-1)^k \arcsin a + \pi k$
$\cos x = a$, где $\lvert a\rvert \le 1$	$x = \pm \arccos a + 2\pi k$
$\operatorname{tg} x = a$	$x = \operatorname{arctg} a + \pi k$
$\operatorname{ctg} x = a$	$x = \operatorname{arcctg} a + \pi k$

Отметим особо некоторые частные случаи простейших тригонометрических уравнений, когда решение может быть записано без применения общих формул:

$$\sin x = 0 \Leftrightarrow \quad x = \pi k,$$

$$\sin x = 1 \ \square\ x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k,$$

$$\sin x = -1 \ \square\ x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k,$$

$$\cos x = 0 \ \square\ x = \square + \pi k,$$

$$\cos x = 1 \ \square\ x = 2\pi k,$$

$$\cos x = -1 \ \square\ x = \pi + 2\pi k,$$

$$\operatorname{tg} x = 0 \ \square\ x = \pi k.$$

Проверка найденных решений необходима:

1) если в процессе решения произошло расширение области определения уравнения в результате некоторых преобразований (освобождение от знаменателей, сокращение дроби, приведение подобных членов),

2) если в процессе решения уравнения использовалось возведение обеих частей уравнения в одну и ту же четную степень,

3) если при решении применялись тригонометрические тождества, левая и правая части которых имеют неодинаковые области определения, например,

$$\frac{2tg\frac{\alpha}{2}}{1+tg^2\frac{\alpha}{2}}=\sin\alpha,\quad \frac{1-tg^2\frac{\pi}{2}}{1+tg^2\frac{\alpha}{2}}=\cos\alpha,\quad \frac{2tg\frac{\alpha}{2}}{1-tg^2\frac{\alpha}{2}}=tg\alpha,\quad tg\alpha\cdot ctg\alpha=1,$$

$$\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}=tg\frac{\alpha}{2},\quad \frac{tg\alpha+tg\beta}{1-tg\alpha\cdot tg\beta}=tg(\alpha+\beta)$$ и др.

Использование этих тождеств «слева направо» приводит к расширению области определения уравнения, а, значит, может привести к появлению посторонних корней; использование этих тождеств «справа налево» ведет к сужению области определения, что, вообще говоря, недопустимо, так как это может привести к потере корней.

Так, решим уравнение

$$\text{tg}\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=2\ \text{ctg}\,x-1. \quad (1)$$

Так как

$$\text{tg}\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{tgx+1}{1-tgx} \quad (2)$$

и

$$\text{ctg}\ x=\frac{1}{tgx}, \quad (3)$$

то уравнений(1) преобразуется к виду

$$\frac{tgx+1}{1-tgx}=\frac{2}{tgx}-1.$$

Положив y = tg x, получим: $\frac{y+1}{1-y}=\frac{2}{y}-1$, откуда находим $y=\frac{1}{2}$, т.е. tg $x=\frac{1}{2}$, и, следовательно, x = arctg $\frac{1}{2}+\pi n$.

Это семейство удовлетворяет уравнению (1). Однако нетрудно заметить, что значения $x=\frac{\pi}{2}+\pi k$ также удовлетворяют уравнению (1).

Причина потери решений – применение тождеств (2) и (3). Замена выражения tg $\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$ выражением $\frac{tgx+1}{1-tgx}$, также как и замена выражения ctg x выражением $\frac{1}{tgx}$, сужает область определения уравнения (1), а именно из области определения «выпадают» значения $x = \frac{\pi}{2}+\pi k$. Они-то и оказались в данном случае «потерянными» решениями уравнения (1).

Основными методами, используемыми при решении тригонометрических уравнений, являются следующие методы: 1) разложение на множители; 2) введение новых переменных.

В результате разложения на множители решение заданного уравнения сводится к решению совокупности уравнений. Это, в свою очередь, означает, что после решения всех уравнений совокупности найденные семейства (множества решений) следует объединить. Объединяя семейства решений, иногда добиваются более компактной записи ответа.

Например, объединяя семейства $x = \pi k$ и $x = \frac{\pi}{2}+\pi n$, получим $x = \frac{\pi}{2}m$.

В тех случаях, когда среди найденных значений x имеются повторяющиеся, объединяя семейства решений, ищут такую запись ответа, в которой повторяющихся значений x нет.

Например, среди значений x, принадлежащим семействам $x = \frac{\pi}{3}k$ и $x = \frac{\pi}{2}n$, есть повторяющиеся значения x, а именно $x = \pi m$. Исключая значения $x = \pi m$, например, из первого семейства, можно записать ответ так: $x = \pm\frac{\pi}{3}+\pi k$; $x = \frac{\pi}{2}n$. Если же исключить значения из второго семейства, то ответ можно записать по-другому: $x = \frac{\pi}{3}k$; $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$. (Как видим, полученные записи одного и того же ответа оказываются неодинаковыми. Это следует иметь в виду, сверяя свое решение с ответом, имеющимся, например, в книге.)

Объединение решений удобно выполнять с помощью окружности Σ, на которую наносят семейства решений совокупности уравнений.

Так, пусть требуется объединить семейства $x = \frac{\pi}{3} + \frac{2\pi}{3}k$ и $x = \pi n$. Отметим на окружности Σ (рис. 1) значения x из первого семейства кружочками, а значения x из второго семейства – квадратиками. Значение x (а точнее, значения $x = \pi + 2\pi m$) при записи объединения семейств $x = \frac{\pi}{3} + \frac{2\pi}{3}k$ и $x = \pi n$ следует оставить только в одном семействе. Ответ можно записать, например, так: $x = \frac{\pi}{3} + \frac{2\pi}{3}k$ и $x = \pi n$, или так: $x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi k$; $x = \pi n$.

При решении уравнений методом введения новых переменных следует помнить, что важную роль играет выбор функции, через которую выражаются остальные функции. Может оказаться, что при одном выборе такой функции получается иррациональное уравнение, а при другом – рациональное. Ясно, что второй выбор предпочтительнее. Если, например, в уравнении $2\cos^2 x + 4\cos x = 3\sin^2 x$ положить $y = \sin x$, то получится совокупность двух иррациональных уравнений:

$$2(1 - y^2) + 4\sqrt{1 - y^2} = 3y^2; \quad 2(1 - y^2) - 4\sqrt{1 - y^2} = 3y^2.$$

Если же положить $y = \cos x$, то получится рациональное уравнение $2y^2 + 4y = 3(1 - y^2)$.

Мы будем обозначать через $R(\cos x; \sin x)$ рациональное выражение от $\cos x$ и $\sin x$, т.е. выражение, получающееся из $\cos x$ и $\sin x$ и постоянных с помощью сложения, умножения и деления.

Рассмотрим уравнение вида R (cos x; sin x) = 0. В некоторых случаях удается свести такое уравнение к рациональному уравнению относительно sin x (или относительно cos x). Укажем некоторые правила, облегчающие выбор подстановки при решении тригонометрических уравнений. Если cos x входит в уравнение лишь в четных степенях, то, заменяя всюду $\cos^2 x$ на $1 - \sin^2 x$, получим рациональное уравнение относительно sin x. Точно также если sin x входит в уравнение лишь в четных степенях, то заменяя всюду $\sin^2 x$ на $1 - \cos^2 x$ приводит уравнение к рациональному виду относительно cos x.

Однородным тригонометрическим уравнением 1-й степени называется уравнение вида

$$a\sin x + b\cos x = 0.$$

Однородным тригонометрическим уравнением 2-й степени называется уравнение вида

$$a \sin^2 x + b \sin x{\cdot}\cos x + c \cos^2 x = 0.$$

Аналогично может быть определено однородное тригонометрическое уравнение любой натуральной степени n.

Рассмотрим случай, когда $a \neq 0$. Нетрудно видеть, что при $a \neq 0$ однородному уравнению не удовлетворяют те значения x, при которых $\cos x = 0$. Поэтому деление на cos x (на $\cos^2 x$) обеих частей однородного уравнения 1-й (2-й) степени в случае $a \neq 0$ приводит к равносильному уравнению. Разделим обе части равносильного уравнения 1-й степени на cos x, а обе части однородного уравнения 2-й степени на $\cos^2 x$. В результате получим соответственно следующие уравнения, рациональные относительно tg x:

$$a \operatorname{tg} x + b = 0 \quad \text{и} \quad a \operatorname{tg}^2 x + b \operatorname{tg} + c = 0.$$

Эти уравнения решаются с помощью подстановки $y = \operatorname{tg} x$.

Рассмотрим теперь подстановку, позволяющую свести к рациональному любое уравнение вида $R(\cos x; \sin x) = 0$. Эта подстановка $u = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$.

Если $x \neq \pi + 2\pi k$, то

$$\cos x = \frac{1 - tg^2 \frac{x}{2}}{1 + tg^2 \frac{x}{2}}, \quad \sin x = \frac{2tg \frac{x}{2}}{1 + tg^2 \frac{x}{2}}.$$

Поэтому подстановка $u = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$ преобразует уравнение $R(\cos x; \sin x) = 0$ в уравнение

$$R\left(\frac{1 - u^2}{1 + u^2}; \frac{2u}{1 + u^2}\right) = 0.$$

Левая часть последнего уравнения является рациональным выражением. Значит, наша подстановка привела уравнение к рациональному виду. Подстановка $u = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$ называется универсальной. Поскольку использование универсальной подстановки исключает из области определения уравнения множество значений вида $x = \pi + 2\pi k$, т.е. может привести к потере решений, то после решения уравнения необходимо еще выяснить, не являются ли числа вида $x = \pi + 2\pi k$ решениями заданного уравнения.

5. СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ

При решении систем тригонометрических уравнений используются те же приемы, что и при решении систем алгебраических уравнений. Часто бывает удобнее вместо общих формул, по которым решаются уравнения вида $\sin x = a$, $\cos x = a$, записывать решения этих уравнений в виде совокупности двух семейств. Пусть, например, нужно решить систему уравнений

$$\begin{cases} \sin(x+y) = \dfrac{1}{2}, \\ \cos(x-y) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}. \end{cases}$$

(1)

Если воспользоваться общими формулами, то придем к системе

$$\begin{cases} x+y = (-1)^k \dfrac{\pi}{6} + \pi k, \\ x-y = \pm \dfrac{\pi}{4} + 2\pi n, \end{cases}$$

(2)

откуда находим:

$$\begin{cases} x = (-1)^k \dfrac{\pi}{12} \pm \dfrac{\pi}{8} + \dfrac{\pi k}{2} + \pi n, \\ y = (-1)^k \dfrac{\pi}{12} \mp \dfrac{\pi}{8} + \dfrac{\pi k}{2} - \pi n \end{cases}$$

(3)

– решение системы (1). Если решение первого уравнения системы (1) записать в виде совокупности $x + y = \dfrac{\pi}{6} + 2\pi k$; $x + y = \dfrac{5\pi}{6} + 2\pi k$, а решение второго уравнения системы (1) записать в виде совокупности $x - y = \dfrac{\pi}{4} + 2\pi n$; $x - y = -\dfrac{\pi}{4} + 2\pi n$, то получим совокупность четырех систем:

$$\begin{cases} x+y = \dfrac{\pi}{6} + 2\pi k, \\ x-y = \dfrac{\pi}{4} + 2\pi n; \end{cases} \qquad \begin{cases} x = y = \dfrac{5\pi}{6} + 2\pi k, \\ x-y = \dfrac{\pi}{4} + 2\pi n; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+y = \dfrac{\pi}{6} + 2\pi k, \\ x-y = -\dfrac{\pi}{4} + 2\pi n; \end{cases} \qquad \begin{cases} x = y = \dfrac{5\pi}{6} + 2\pi k, \\ x-y = -\dfrac{\pi}{4} + 2\pi n, \end{cases}$$

(4)

Откуда

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{5\pi}{24} + \pi\,(k+n), \\ y_1 = -\dfrac{\pi}{24} + \pi\,(k-n); \end{cases} \qquad \begin{cases} x_2 = \dfrac{13\pi}{24} + \pi\,(k+n), \\ y_2 = \dfrac{7\pi}{24} + \pi\,(k-n); \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_3 = -\dfrac{\pi}{24} + \pi\,(k+n), \\ y_3 = \dfrac{5\pi}{24} + \pi\,(k-n); \end{cases} \qquad \begin{cases} x_4 = \dfrac{7\pi}{24} + \pi\,(k+n), \\ y_4 = \dfrac{13\pi}{24} + \pi\,(k-n). \end{cases}$$

Эта совокупность семейств представляет собой решение системы (1). Конечно, такая запись не столь компактна, как запись решения в виде системы (3), но более наглядна, поэтому часто подобной записи отдают предпочтение.

Обратим внимание читателя еще на одно обстоятельство: при переходе от системы (1) к системе (2) или к совокупности систем (4) мы использовали для записи решений первого уравнения системы (1) параметр *k*, а для записи решений второго уравнения системы – другой параметр *n*. Употребление только одного параметра, например *k*, привело бы нас к потере решений: так, в этом случае из первой системы

совокупности (4) мы получили бы $\begin{cases} x'_1 = \dfrac{5\pi}{24} + 2\pi k, \\ y'_1 = -\dfrac{\pi}{24}, \end{cases}$

а множество Z_1' пар вида $(x_1'; y_1')$ представляет собой собственное

подмножество множества Z_1 пар вида $(x_1; y_1)$, где $\begin{cases} x_1 = \dfrac{5\pi}{24} + \pi\,(k+n), \\ y_1 = -\dfrac{\pi}{24} + \pi\,(k-n). \end{cases}$

Итак, $Z' \subset Z_1$, $Z' \neq Z_1$, поэтому все пары $(x;\ y)$ такие, что $(x;\ y) \in Z_1 \setminus Z'$ оказываются «потерянными» решениями.

6. НЕРАВЕНСТВА

Решение тригонометрических неравенств сводится, как правило, к решению простейших тригонометрических неравенств, т.е. неравенств вида $\sin x > 0$, $\cos x > 0$ и т.д., а также к решению совокупностей, систем или совокупностей систем простейших тригонометрических неравенств. Для решения простейших тригонометрических неравенств во многих случаях удобно пользоваться окружностью, на которой множество значений переменной, удовлетворяющих заданному простейшему неравенству, изображается в виде одной или нескольких дуг.

Аналогично тому, как с помощью неравенств задаются промежутки на числовой прямой, можно записывать и множество точек, принадлежащих той или иной дуге окружности Σ.

Условимся символом $\cup\, M_1M_2$ обозначать дугу, для которой M_1 – начальная точка (в обозначении дуги она записывается первой), M_2 – конечная точка пути, описываемого текущей точкой по окружности Σ в положительном направлении (против часовой стрелки).

Так, пусть с помощью неравенств требуется записать следующие дуги окружности Σ (рис. 2): 1)$\cup\ \Theta_0\Theta_1$; 2)$\cup\ \Theta_1\Theta_3$; 3)$\cup\ \Theta_1\Theta_0$; 4)$\cup\ \Theta_2\Theta_1$; 5)$\cup\ \Theta_0M$; 6)$\cup\ M\Theta_0$; 7)$\cup\ \Theta_3M$, где точка M – середина дуги $\Theta_1\Theta_2$.

1) Точка Θ_0 соответствует числу 0, точка Θ_1 соответствует числу $\frac{\pi}{2}$, поэтому текущая точка дуги $\Theta_0\Theta_1$ соответствует числу x такому, что $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$.

Учитывая, однако, что если точка окружности соответствует числу x, то она соответствует и всем числам вида $x + 2\pi k$ (k – целое), получаем, что точки дуги $\Theta_0\Theta_1$ соответствуют числам x, удовлетворяющим следующей системе неравенств:

$$0 + 2\pi k \le x \le \frac{\pi}{2} + 2\pi k, \text{ или } 2\pi k \le x \le \frac{\pi}{2} + 2\pi k.$$

2) Для дуги $\Theta_1\Theta_3$ получаем: $\frac{\pi}{2} + 2\pi k \le x \le \frac{3\pi}{2} + 2\pi k.$

3) Как было отмечено выше, в этом случае под записью $\Theta_1\Theta_0$ понимается дуга $\Theta_1\Theta_2\ \Theta_3\Theta_0$. При первом обходе окружности точка Θ_1

соответствует числу $\frac{\pi}{2}$, а точка Θ_0 – числу 2π (но не числу 0, так как обход окружности от Θ_1 к Θ_0 идет в положительном направлении), значит, аналитически $\cup\ \Theta_1\Theta_0$ можно записать следующим образом:

$$\frac{\pi}{2} + 2\pi k \le x \le 2\pi + 2\pi k.$$

4) Дугу $\Theta_2\Theta_1$ можно записать двумя способами:

$$-\pi + 2\pi k \le x \le \frac{\pi}{2} + 2\pi k \text{ или } \pi + 2\pi k \le x \le \frac{5\pi}{2} + 2\pi n.$$

5) $\cup\ \Theta_0 M$: $2\pi k \le x \le \frac{3\pi}{4} + 2\pi k.$

6) $\cup\ M\Theta_0$: $\frac{3\pi}{4} + 2\pi k \le x \le 2\pi + 2\pi k.$

7) $\cup\ \Theta_3 M$: $-\frac{\pi}{2} + 2\pi k \le x \le \frac{3\pi}{4} + 2\pi k.$

Замечание: Записывая дугу в виде

$$\alpha + 2\pi k \le x \le \beta + 2\pi k,$$

необходимо следить за тем, чтобы выполнялось неравенство $\alpha < \beta$, иначе система неравенств (1) окажется противоречивой.

Пусть теперь каждая четверть окружности Σ разбита на три равные части (рис. 3). Найдем аналитические записи следующих дуг: 1) $\cup\ B_1B_2$; 2) □$\Theta_1 B_4$; 3) □ B_3A_1; 4) □ A_2B_1; 5) □$A_4\Theta_2$; 6) A_3B_2.

1) Рассмотрим дугу B_1B_2. Так как каждая из дуг $\Theta_0 A_1$, A_1B_1, $B_1\Theta_1$, $\Theta_1 A_2$, …, $B_4\Theta_0$ имеет длину $\frac{\pi}{6}$, то при первом положительном обходе окружности точка B_1 соответствует числу $\frac{\pi}{3}$, точка B_2 – числу $\frac{5\pi}{6}$. Следовательно, аналитическая запись дуги B_1B_2 будет:

$$\frac{\pi}{3} + 2\pi k \le x \le \frac{5\pi}{6} + 2\pi k.$$

2) □$\Theta_1 B_4$: $\frac{\pi}{2} + 2\pi k \le x \le \frac{11\pi}{6} + 2\pi k.$

3) □ B_3A_1: $-\frac{2\pi}{3} + 2\pi k \le x \le \frac{\pi}{6} + 2\pi k$ (или $\frac{4\pi}{3} + 2\pi n \le x \le \frac{13\pi}{6} + 2\pi n$).

Замечание: Еще раз обращаем внимание на необходимость контроля при записи концов дуг. Так, при первом обходе окружности Σ точка B_3 соответствует числу $\frac{4\pi}{3}$; продолжая движение в направлении от точки B_3 к A_1, мы при переходе через точку Θ_0 начинаем обходить окружность второй раз, т.е. точка A_1 соответствует теперь числу $\frac{13\pi}{6}$. Отсюда и получается вторая запись для дуги B_3A_1.

4) □ A_2B_1: $-\frac{4\pi}{3} + 2\pi k \le x \le \frac{\pi}{3} + 2\pi k$ (или $\frac{2\pi}{3} + 2\pi n \le x \le \frac{7\pi}{3} + 2\pi n$).

5) □ $A_4\Theta_2$: $-\frac{\pi}{3} + 2\pi k \le x \le \pi + 2\pi k$ (или $\frac{5\pi}{3} + 2\pi n \le x \le 3\pi + 2\pi n$).

6) □ A_3B_2: $-\frac{5\pi}{6} + 2\pi k \le x \le \frac{5\pi}{6} + 2\pi k$ (или $\frac{7\pi}{6} + 2\pi n \le x \le \frac{17\pi}{6} + 2\pi n$).

6. ЗАДАНИЯ ДЛЯ ПРОВЕДЕНИЯ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ

Разложить на множители:

1. $1 + m^4 + m^8$.

Ответ: $(m^2 + m + 1)(m^2 - m + 1)(m^2 + \sqrt{3}m + 1)(m^2 - \sqrt{3}m + 1)$.

2. $6x^4 - 5x^3y - 38x^2y^2 - 5xy^3 + 6y^4$.

Ответ: $(x - 3y)(3x - y)(x + 2y)(2x + y)$.

Вычислить:

3. $\dfrac{\sqrt[3]{\sqrt[3]{2} - 1}}{\sqrt[3]{\frac{1}{9}} - \sqrt[3]{\frac{2}{9}} + \sqrt[3]{\frac{4}{9}}}$.

Ответ: 1.

4. $1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot 101 - (1\cdot 1 + 2\cdot 1\cdot 2 + 3\cdot 1\cdot 2\cdot 3 + \ldots + 100\cdot 1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot 100)$.

Ответ: 1.

5. $\left(\sqrt[6]{8\sqrt{5} + 16} + \sqrt{\sqrt{5} + 1}\right)\cdot \sqrt{\sqrt{5} - 1}$.

Ответ: 4.

6. Доказать, что $1996^2 + 1996^2 \cdot 1997^2 + 1997^2$ - квадрат целого числа.

7. Доказать, что число $3^{54} - 3^{27} \cdot 2^{12} + 2^{24}$ - составное.

8. Доказать , что число $333^{666} + 666^{333}$ делится на 37.

9. Представить число 1991 в виде произведения простых чисел.

Ответ: 11 и 181.

10. Разность $\sqrt{\left|40\sqrt{2} - 57\right|} - \sqrt{\left|40\sqrt{2} + 57\right|}$ является целым числом. Найти это число.

Ответ: -10.

2. Алгебраические уравнения.

Рациональные уравнения

1. Найти сумму квадратов корней уравнения

$$\left(x^2 + 2x\right)^2 - 1996(x^2 + 2x) + 1997 = 0$$

Ответ: 4000.

2. Найдите наименьшее значение y , при котором существуют числа x и z, удовлетворяющие уравнению

$$x^2 + 2y^2 + z^2 + xy - xz + yz = 3$$

Ответ: $-\sqrt{3}$.

Иррациональные уравнения

3. Решить уравнение

$$\sqrt{\frac{1 - 4x\sqrt{1 - x^2}}{2}} = 1 - 8x.$$

Ответ: $x_1 = \dfrac{1}{2\sqrt{2}},\ x_2 = \dfrac{1 - \sqrt{3}}{4\sqrt{2}}.$

4. Решить уравнение

$$(2x + 1)\left(2 + \sqrt{(2x + 1)^2 + 3}\right) + 3x\left(2 + \sqrt{9x^2 + 3}\right) = 0$$

Ответ: $x = -\dfrac{1}{5}.$

Уравнения с целочисленными решениями

5. Сколько существует различных пар (x, y) целых чисел x и y, удовлетворяющих уравнению

$$\left|x^2 + y^2 - 5\right| + \left|x^2 - 4\right| + \left|y^2 - 9\right| = 8?$$

Ответ: 8 пар.

6. Найти все целочисленные решения уравнения

$$14x^4 - 5y^2 - 3x^2y^2 + 82y^2 - 125x^2 + 151 = 0.$$

Ответ: $x_1 = 2,\ y_1 = 3;\ x_2 = 2,\ y_2 = -3;\ x_3 = -2,\ y_3 = -3;\ x_4 = -2,\ y_4 = 3.$

Уравнения с параметрами

7. Найти все значения параметра a, при которых уравнение

$$(a + 1)x^2 + \left(\left|a + 2\right| - \left|a + 10\right|\right)x + a = 5$$

имеет два различных положительных корня.

Ответ: $a \in (7; +\infty)$.

8. Для всех значений параметра a решить уравнение

$$\left|x^4 + \frac{2a - 1}{3} \cdot x^2 + \frac{2a^2 + a + 2}{12}\right| = \frac{a}{2} \cdot \left|x^2 + \frac{a}{3} - \frac{1}{6}\right| + \frac{a + 1}{6}.$$

Ответ: нет решений при $a < -1$; $x_{1,2} = \pm\sqrt{\dfrac{2 - a}{6}}$, $x_{3,4} = \pm\sqrt{-\dfrac{a}{2}}$, при

$-1 \le a \le 0$; $x_{1,2} = \pm\sqrt{\dfrac{2 - a}{6}}$ при $0 < a \le \dfrac{1}{2}$; $x_{1,2} = \pm\sqrt{\dfrac{2 - a}{6}}$, $x_3 = 0$ при

$\dfrac{1}{2} \le a \le 2$; $x = 0$ при $a > 2$.

9. Найти все значения параметра a, при которых уравнение

$$\sqrt{2xy + a} = x + y + 1$$

имеет решение.

Ответ: $a \in [-\dfrac{1}{2}; +\infty)$.

Системы уравнений

10. Найти все решения системы

$$\begin{cases} (x+3)^3 = 3 - 2y, \\ x^2 + 4y^2 = 8y, \\ (2z - x)\cdot(x+3) = 5x + 16, \end{cases}$$

удовлетворяющие условию $z \geq 0$.

Ответ: $x_1 = -4,\ y_1 = 2,\ z_1 = 0;\ x_2 = -2,\ y_2 = 1,\ z_2 = 2.$

11. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} y^2(1+y)^4 - 2xy(1+y)^2 = 2, \\ \dfrac{y^2}{4} + xy(1-y)^2 = 2(1-y)^4. \end{cases}$$

Ответ: $x_1 = \dfrac{-3+\sqrt{17}}{2},\ y_1 = \dfrac{-187+45\sqrt{17}}{32};\ x_2 = \dfrac{-3-\sqrt{17}}{2},$

$y_2 = \dfrac{-187-45\sqrt{17}}{32}.$

Системы уравнений с параметрами

12. Найти все значения параметра a, при которых система

$$\begin{cases} 1 - \sqrt{5|y|} = \sqrt{|2x-3|}, \\ 25y^2 + 4x^2 + 4a = 12x - 9 \end{cases}$$

имеет ровно четыре значения.

Ответ: $a_1 = -\dfrac{1}{4},\ a_2 = -\dfrac{1}{32}.$

13. Найти все пары значений параметров a и b, при которых система уравнений

$$\begin{cases} x^2 - y^2 + a(x+y) = x - y + a \\ x^2 + y^2 + bxy - 1 = 0 \end{cases}$$

имеет не менее пяти решений (x, y).

Ответ: $a_1 = 1,\ b_1 = -2;\ a_2 = -1,\ b_2 = -2;$ a – любое; b=2.

3. Преобразование тригонометрических выражений

1. Доказать, что если $\cos\alpha + \cos\beta = a$ и $\sin\alpha + \sin\beta = b$, то

$$\cos(\alpha + \beta) = \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}.$$

2. Вычислить

$\log_{\frac{18}{7}}\left|\sin\left(\gamma + \frac{\pi}{4}\right)\right| + \log_{\frac{18}{7}}\left|\cos\left(3\gamma + \frac{\pi}{4}\right)\right|$, если известно, что

$$\cos\gamma + \sin\gamma = -\sqrt{\frac{1}{3}}.$$

Ответ: -1.

Упростить:

3. $\dfrac{\sin^3 x + \cos^3 x}{(a^2 - 3)a}$, если $\cos x + \sin x = a$.

Ответ: -0,5.

4. $\dfrac{\sqrt{1 + \sin\alpha} - \sqrt{1 - \sin\alpha}}{4\sin\frac{\alpha}{2}} \quad (0 < \alpha < 90^\circ)$.

Ответ: 0,5.

5. $\sin 5\alpha \sin 4\alpha + \sin 4\alpha \sin 3\alpha - \sin 2\alpha \sin\alpha - 2\sin 3\alpha \sin 5\alpha \cos\alpha$.

Ответ: 0.

6. При каких x одно из чисел $\sin x$, $\cos x$, $\sin 2x$ больше двух других и равно их сумме?

Ответ: $x = \arcsin\frac{4}{5} + 2\pi n.$.

7. Исключить α и φ из уравнений:

$x\sin^2\alpha + y\cos^2\alpha = 1$, $x\cos^2\varphi + y\sin^2\varphi = 1$, $xtg\alpha = ytg\varphi \quad (x \neq y)$.

Ответ: $x + y = 2xy$.

Вычислить:

8. $(\sqrt{5} + 1)\sin 18^\circ$

Ответ: $\dfrac{\sqrt{5} - 1}{4}$.

9. $\sin 18^\circ \sin 54^\circ$

Ответ: 0,25.

10. Найти условие, при котором имеет место тождество

$tgA + tgB + tgC = tgA \cdot tgB \cdot tgC.$

Ответ: $A + B + C = \pi n$.

4. Тригонометрические уравнения.

Решить уравнения:

1. $\sin^8 x + \cos^8 x = \dfrac{17}{32}$

Ответ: $x = \pm \dfrac{\pi}{8} + \dfrac{\pi n}{2}$.

2. $\left|1 + \cos(\pi\sqrt{x})\right| + \left|x^2 - 15x + 44\right| = 15x - x^2 - \cos(\pi\sqrt{x}) - 45$

Ответ: $x = 9$.

3. $x^2 + 1 - 2x\sin(\pi y) + \sqrt{yz - 2z^2 - 64} = (41 - yz)(\cos(2\pi y) + \cos(\pi z))^2$

Ответ: $x_1 = 1,\ y_1 = 256{,}5,\ z_1 = 128,\ x_2 = -1,\ y_2 = -256{,}5,\ z_2 = -128.$

4. Сумма корней $\dfrac{\sqrt{99 + 98x - x^2}\sin\dfrac{\pi x}{3}}{\sin\dfrac{\pi x}{4}\sin\dfrac{\pi(x - 5)}{20}} = 0$

Ответ: 1205.

5. Найти все решения уравнения $\sin 2\pi x + \sin^2 4\pi x = \sin^2 6\pi x$,

удовлетворяющие неравенству $\log_{4x-36}(10 - x) < 1$.

Ответ: $x_1 = 9\dfrac{1}{20},\ x_2 = 9\dfrac{9}{20},\ x_3 = 9\dfrac{1}{2},\ x_4 = 9\dfrac{13}{20},\ x_5 = 9\dfrac{17}{20}.$

Решить системы:

6. $\begin{cases} 4\sin(3x + 2y) + \sin x = 0, \\ 4\sin(2x + 3y) + \sin y = 0. \end{cases}$

Ответ: $x_1 = \pi n,\ y_1 = \pi k,\ x_2 = \pm\dfrac{1}{2}\arccos(-\dfrac{3}{4}) + \pi n,\ y_2 = \pm\dfrac{1}{2}\arccos(-\dfrac{3}{4}) + \pi k.$

7. $\begin{cases} x^2 + 2x\sin y + 1 = 0, \\ 8|x|y(x^2 + y^2) + \pi^3 + 4\pi = 0. \end{cases}$

Ответ: $x = 1,\ y = -\dfrac{\pi}{2}$.

8. Найти все значения *a*, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} \sin x \sin y = \dfrac{1}{z^2}, \\ \cos x \cos y = -\dfrac{(x+y)^2}{(a-\pi)^2}, \\ \sin(x-y) = \dfrac{2(x+y)}{(a-\pi)z} \end{cases}$$

имеет единственное решение, удовлетворяющее условиям $0 \le y \le \dfrac{\pi}{2}$ и $z > 0$.

Ответ: $a \in [-2\pi;0) \cup (2\pi;4\pi]$.

9. Найти все значения параметра *a*, при каждом из которых уравнение

$[10\cos^2 x + (2-\sqrt{50})\cos x - \sqrt{2}](a\cos x + 2a - 3) = 0$

имеет на отрезке $[0;\dfrac{\pi}{3}]$ ровно два различных корня.

Ответ: $a \in [1;\dfrac{6}{4+\sqrt{2}}) \cup (\dfrac{6}{4+\sqrt{2}};\dfrac{6}{5}]$.

10. Для каждого значения параметра *a* решить уравнение

$4\cos x \sin a + 2\sin x \cos a - 3\cos a = 2\sqrt{7}.$

Ответ: $x = \pi + 4\pi n,\ y = 2\pi k$ при *a=-1* или *a=3*; при остальных *a* решений нет.

5. Показательные и логарифмические уравнения

Решить уравнения:

1. $\log_2(6x - x^2 - 5) = x^2 - 6x + 11$.

Ответ: $x = 3$.

2. $\log_x(3x-2)-2=\sqrt{\log_x^2(2x-2)+4\log_x\left(\frac{x}{3x-2}\right)}$.

Ответ: $x\in\left(\frac{2}{3};1\right)\cup(1;2]$.

3. Для каждого значения a решить уравнение

$(\log_2 3)^{\sqrt{x+a+2}}=(\log_9 4)^{\sqrt{x^2+a^2-6a-5}}$.

Ответ: $x=\frac{-5+\sqrt{3}}{2}$ при $a=\frac{1-\sqrt{3}}{2}$; $x=\frac{-5-\sqrt{3}}{2}$ при $a=\frac{1+\sqrt{3}}{2}$; нет решений при остальных значениях a.

4. Решить уравнение

$(\cos x)^{\lg\lg x+2}+(\lg x)^{\lg\cos x}\cdot\sin^2 x=1$.

Ответ: $x=2\pi n,\ n=1,2,...$

5. Для каждого значения параметра a определить число корней уравнения

$|\lg x|=-(x-1)^2+a$.

Ответ: 2 при $a>0$; 1 при $a=0$; 0 при $a<0$.

Решить системы:

6. $\begin{cases}4\log_2^2 x+1=2\log_2 y,\\ \log_2 x^2\geq\log_2 y.\end{cases}$

Ответ: $x=\sqrt{2},\ y=2$.

7. $\begin{cases}\log_2\sin x-\log_2 2y+|\log_2\cos x-\log_2 2y|=-2,\\ \left(x-\frac{\pi}{4}\right)^2+\frac{1}{2y^2}\leq 1.\end{cases}$

Ответ: $x=arctg\frac{1}{4},\quad y\geq\frac{1}{\sqrt{2-2\left(arctg\frac{1}{4}-\frac{\pi}{2}\right)^2}}$.

8. $\begin{cases}400\cdot 5^y\cdot 50^x\cdot 100^{x+y}=1,\\ \log_{0.5x+0,4y}\left(8^{-x}\cdot 4^{-y}+25^{-2x}\cdot 125^{-y}\right)\cdot\log_{41}(0,5x+0,4y)=1.\end{cases}$

Ответ: $x=8\log_5 2-6\log_2 5,\ y=8\log_2 5-12\log_5 2$.

9. $\log_{2x}\dfrac{2}{x}\log_2^2 x+\log_2^4 x=1;\ x>1.$

Ответ: $x=2.$

10. Сколько различных корней имеет уравнение

$\log_2\left(40-5x^2+x^2\cdot 2^x\right)=x+3.$

Ответ: 3.

6. Неравенства

Иррациональные неравенства и неравенства с модулями

1. $\left|\left|\sqrt{10^{x^2-10x+24}-1}-1\right|-3\right|>\sqrt{10^{x^2-10x+24}-1}-2.$

Ответ: $\left(5-\sqrt{2};4\right]\cup\left[6;5+\sqrt{2}\right).$

2. $2\sqrt{x^2-|x|-2}\geq 2-x.$

Ответ: $\left(-\infty;\dfrac{-4-2\sqrt{13}}{3}\right]\cup\left[2;+\infty\right).$

Показательные и логарифмические неравенства

3. $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\sqrt{\left(x^2-2x-15\right)^3}}\cdot 7^{(x+3)^2(x-5)}\leq 1.$

Ответ: $(-8;-3]\cup\{5\}.$

4. $\left|x^2-3\right|^{x^2-4x-5}\leq 1.$

Ответ: $\left[-2;-\sqrt{3}\right)\cup\left(-\sqrt{3};-\sqrt{2}\right)\cup\left[-1;\sqrt{2}\right]\cup[2;5].$

Тригонометрические и смешанные неравенства

5. $\log_{2\sin x-1}\left(43-4\sin x+4\sin^2 x-x^2+x\right)\leq\dfrac{3\log_3 2}{\log_3(2\sqrt{2})}.$

Ответ: $\left(-\dfrac{11\pi}{6};-\dfrac{3\pi}{2}\right)\cup\left(-\dfrac{3\pi}{2};-\dfrac{7\pi}{6}\right)\cup\left(\dfrac{\pi}{6};\dfrac{\pi}{2}\right)\cup\left(\dfrac{\pi}{2};\dfrac{5\pi}{6}\right)\cup\left(\dfrac{13\pi}{6};7\right].$

6. $1\leq|\cos x|^{\sqrt{2x-3}\cdot\log_{|\cos x|}\left(\frac{1+2\sqrt{3}|\sin x|}{8\left(1-2\cos^2 x\right)}\right)}.$

Ответ: $\left\{\frac{3}{2}\right\} \cup \left[\frac{\pi}{4}+\pi k;\frac{\pi}{3}+\pi k\right] \cup \left[\frac{2\pi}{3}+\pi n;\frac{3\pi}{4}+\pi n\right]$, $k=1,2,3,...;$ $n=0,1,2,...$

.

7. $-3+\log_2 x^6 < \sqrt{7+\log_2 x^2}$.

Ответ: $\left(-2;-2^{\frac{7}{2}}\right] \cup \left[2^{\frac{7}{2}};2\right)$.

Неравенства с параметрами

8. Найти все значения параметра a, при котором неравенство

$$\left|3\sin^2 x+2a\sin x\cos x+\cos^2 x+a\right| \le 3$$

выполняется для любых значений x.

Ответ: $a \in \left(-\frac{12}{5};0\right]$.

9. Найти наибольшее значение параметра a, при котором неравенство

$$a\sqrt{a}\left(x^2-2x+1\right)+\frac{\sqrt{a}}{x^2-2x+1} \le \sqrt[4]{a^3} \cdot \left|\sin\frac{\pi}{2}x\right|$$

имеет хотя бы одно решение.

Ответ: $a=\frac{1}{16}$.

10. Найти все значения параметра b, при каждом из которых число целочисленных решений неравенства $x^2+3x+3|x+b|-b \le 0$ максимально.

Ответ: $b \in \{4\} \cup \left[\frac{9}{4};\frac{5}{2}\right]$.

11. При каких значениях a множество решений неравенства $\sqrt{7+x}+\sqrt{x^2-2ax+a^2} \le 4$ является отрезком?

Ответ: $a \in \left(-11;-\frac{13}{14}\right) \cup (-3;9)$.

12.Найти все значения параметра a, при каждом из которых единственное решение имеет система неравенств

$$\begin{cases} ax^2 + 4ax - y + 7a + 2 \geq 0, \\ ay^2 - x - 2ay + 4a - 1 \geq 0. \end{cases}$$

Ответ: $a = -\frac{1}{2}$.

7. Текстовые задачи.

1. Садовник подготовил в теплице лунки для выращивания помидоров (по одной лунке на растение). В питомнике продавалась рассада помидоров в ящиках трех типов (в каждом ящике одного типа – некоторое количество растений одного сорта). У него хватало денег, чтобы купить по одному ящику рассады 1-го и 2-го сорта и 4 ящика рассады 3-го сорта. При посадке оказалось, что общее количество лунок больше, чем общее количество растений, на 2. Если бы он купил 4 ящика рассады 1-го сорта и один ящик рассады 3-го сорта, то 60 лунок остались бы пустыми. Если купить 4 ящика 2-го сорта и один 3-го, то 44 лунки останутся пустыми. Какое количество лунок останутся пустыми, если даже он купит по 3 ящика рассады каждого сорта. Сколько лунок заготовил садовник?

Ответ: 92 лунки.

2. Сумма всех трехзначных чисел, составленных их трех различных. отличных от нуля, цифр *k, l,* и *m,* больше 2700, но не превосходит 2900. Каждая из указанных цифр встречается в записи числа один раз. Найти число $\overline{klm}$, если известно, что оно четное и наибольшее из всех трехзначных чисел, удовлетворяющих условиям задачи.

Ответ: 832.

3. Имеются три слитка: первый слиток – сплав меди и никеля, второй слиток – сплав никеля с цинком, третий слиток – сплав цинка с медью. Если сплавить первый слиток со вторым, то проценты меди в полученном сплаве будет в 2 раза меньше, чем он был в первом слитке. Если сплавить второй слиток с третьим, то процент никеля в полученном сплаве будет в 3 раза меньше, чем он был во втором слитке. Какой процент цинка будет

содержать слиток, полученный при сплаве всех трех слитков, если во втором слитке цинка 12%. А в третьем – 5%?

Ответ: 5,5%.

4. С завода на стройку нужно перевезти 24 больших и 510 маленьких бетонных блоков. Доставка блоков осуществляется автомашинами, каждая из которых вмещает 44 маленьких блока и имеет грузоподъемность 10 тонн. Вес маленького блока – 0,2 тонны, большой блок весит 3,6 тонны и занимает место 14 маленьких. Найти минимальное число рейсов, достаточное для перевозки всех блоков.

Ответ: $15(30-q)$ при $10<q<\frac{58}{3}$.

5. Путь из *A* в *B* проходит первые 80 км по шоссе, а оставшиеся 120 км – по грунтовой дороге. Первую часть пути автобус проезжает на 2 часа быстрее, чем вторую. Автобус совершил более четырех рейсов по маршруту из *A* в *B* и обратно. На это, включая стоянки в конечных пунктах, ушло менее одной недели (т.е. менее 168 часов). За время, которое он был при этом в движении, автобус мог бы проехать 2100 км, если бы двигался со скоростью, средней арифметической между скоростями движения по шоссе и грунтовой дороге. Найти скорость движения автобуса по шоссе и по грунтовой дороге.

Ответ: 40 км/ч - скорость по шоссе, 30 км/ч – скорость по грунтовой дороге.

6. За время хранения вклада в банке проценты по нему начислялись ежемесячно сначала в размере 5% в месяц, затем $11\frac{1}{9}\%$, потом $7\frac{1}{7}\%$ и, наконец, 12% в месяц. Известно, что под воздействием каждой новой процентной ставки вклад находился целое число месяцев, а по истечении срока хранения первоначальная сумма вклада увеличилась на 180%. Определить срок хранения вклада.

Ответ: 12 месяцев.

7. Предприятие производит детские велосипеды и является убыточным. Известно, что при изготовлении m велосипедов в месяц расходы предприятия на выпуск одного велосипеда и цена реализации каждого велосипеда составляют соответственно не менее $\frac{168000}{m} + 36 - \left|12 - \frac{7200}{m}\right|$ тыс. руб. и $72 - \frac{3}{1000}m$ тыс. руб. Определить ежемесячный объем производства, при котором ежемесячные убытки могут быть снижены до наименьшего из возможных в данных условиях уровня. Вариант полной остановки производства исключен.

Ответ: 4000 или 8000 велосипедов.

8. Четыре бригады разрабатывали месторождение горючих сланцев в течении трех лет, работая с постоянной для каждой бригады производительностью. На втором году в течении четырех месяцев работа не производилась, а все остальное время (то есть в течении 32 месяцев) работала только одна из бригад. Отношения времен работ первой, второй, третьей, и четвертой бригад и количества выработанной продукции соответственно равны:

в первый год 4 : 1 : 2 : 5 и 10 млн.т.;

во второй год 2 : 3 : 2 : 1 и 7 млн.т.;

в третий год 5 : 2 : 1 : 4 и 14 млн.т.

Сколько млн.т. горючих сланцев выработали бы за 4 месяца четыре бригады, работая вместе?

Ответ: 12 млн.т.

9. Партия товара упакована в коробки трех типов. Вес и стоимость содержимого одной коробки составляют 9 кг и 320 тыс. руб. для первого типа, 6 кг и 150 тыс. руб. для второго типа, 4 кг и 120 тыс. руб. для третьего типа. Суммарная стоимость товара равна 4180 тыс. руб.

Определить наименьший и наибольший возможный общий вес партии товара.

Ответ: 123 кг и 158 кг.

10. В начальный момент лечения пациенту была произведена первая инъекция 8 единиц некоторого лекарства, а во время каждой последующей инъекции ему вводится 5 единиц того же лекарства. За время между инъекциями количество лекарства в организме уменьшается в 6 раз. Какое количество лекарства будет содержаться в организме пациента после 25-ой инъекции?

Ответ: $6+2\left(\frac{1}{6}\right)^{24}$.

ИНДИВИДУАЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ.

Вариант 1.

1. Вычислить:

$$\frac{\sqrt[3]{\sqrt[3]{2}-1}}{\sqrt[3]{\frac{1}{9}}-\sqrt[3]{\frac{2}{9}}+\sqrt[3]{\frac{4}{9}}}.$$

2. Для всех значений параметра a решить уравнение:

$$\left|x^4+\frac{6a-1}{3}x^2+\frac{24a^2+2a+2}{12}\right|=\frac{4a}{3}\left|x^2+a-\frac{1}{6}\right|+\frac{2a+1}{6}.$$

3. Доказать, что если $\cos\alpha+\cos\beta=a$ и $\sin\alpha+\sin\beta=b$, то $\cos(\alpha+\beta)=\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}$.

4. Решить уравнение:

$$\left|1+\cos\left(\pi\sqrt{x}\right)\right|+\left|x^2-15x+44\right|=15x-x^2-\cos\left(\pi\sqrt{x}\right)-45.$$

5. Решить уравнение:

$$\log_{\frac{1}{2}}(tg\pi x+ctg\pi x)=8(2x^2+3x+1).$$

6. Доказать, что при $a=2$ неравенство $9^x+(2a+4)\cdot 3^x+3a+1>0$ выполняется для любых x. Найти все другие значения параметра a, при которых неравенство выполняется для любых x.

7. Найти многочлен $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, принимающий максимальное значение 6 при $x = 1$ и минимальное значение 2 при $x = 3$.

8. Доказать, что если три числа x, y, z связаны соотношением $x^2z + xyz + 2y^2z = 2xz^2 + xy^2 + y^3$, то они образуют либо арифметическую, либо геометрическую прогрессию.

9. Дан треугольник ABC, на стороне AC взята точка E так, что AE: $EC = a$, а на стороне AB взята точка D так, что AD: $DB = b$. Проведены отрезки CD и BE. Найти отношение площади получившегося четырехугольника к площади данного треугольника.

10. Сторона основания правильной призмы $ABCA_1B_1C_1$ имеет длину a, а боковое ребро – длину $\frac{5}{4}a$. Точка D – середина ребра A_1C_1, а точка M лежит на отрезке DB_1 и $DM = \frac{1}{6}$ DB_1. Вторая призма симметрична призме $ABCA_1B_1C_1$ относительно прямой BM. Найти объем общей части этих призм.

Вариант 2.

1. Вычислить:

$$\sqrt[3]{6+\sqrt{\frac{847}{27}}}+\sqrt[3]{6-\sqrt{\frac{847}{27}}}.$$

2. При каких значениях параметра a уравнения $x^3+\frac{48}{x}=a$ имеет хотя бы одно решение?

3. Доказать, что из неравенств $\frac{\sin(\varphi-\alpha)}{\sin(\varphi-\beta)}=\frac{a}{b}$ и $\frac{\cos(\varphi-\alpha)}{\cos(\varphi-\beta)}=\frac{c}{d}$ следует, что $\cos(\alpha-\beta)=\frac{ac+bd}{ad+bc}$.

4. Решить уравнение:

$\cos^{-4}x-2\cos^{-2}x-12tgx-16=0$.

5. Решить уравнение:

$2x^2+\log_2(7+2x-x^2)=4+x^4$.

6. Найти все вещественные значения a, при которых все решения неравенства $8\log_a x+\log_x a\le 6$ удовлетворяют неравенству $\cos\left(\pi\frac{x^2}{a^2}\right)\ge\frac{1}{2}$.

7. Составить уравнение касательной к графику четной функции $y=f(x)$ в точке с абсциссой $x_0=1$, если известно, что для всех действительных x справедливо равенство $f(2x^3-x)-4x^2f(x^2-x-1)=8x^5-8x^3-11x^2+2$.

8. Найти x и y, если $2y+7$; $2x$; 1 – геометрическая, а $|x-2|+|x+1|$; $\cos^2\left(\arccos\sqrt{x}\right)$; $1+y$ – арифметическая прогрессия.

9. В треугольнике ABC дано $\angle A=\frac{\pi}{3}$, $\angle B=\frac{\pi}{4}$. Продолжения высот треугольника ABC пересекает около него окружность в точках M, N и P.Найти отношение площадей треугольников ABC и MNP.

10. Сторона основания правильной призмы $ABCA_1B_1C_1$ имеет длину a, а боковое ребро – длину $\frac{9}{8}a$. Точка E – середина ребра AB, а точка M лежит на отрезке EC и $EM=\frac{1}{4}EC$. Вторая призма симметрична призме $ABCA_1B_1C_1$ относительно прямой MC_1. Найти объем общей части этих призм.

Вариант 3.

1. Вычислить:

$$\left(\sqrt[6]{8\sqrt{5}+16}+\sqrt{\sqrt{5}+1}\right)\cdot\sqrt{\sqrt{5}-1}.$$

2. Решить уравнение при всех значениях параметра a:

$$2x^2+2ax-a^2=\sqrt{4x+2a+3a^2}.$$

3. Вычислить:

$$\arccos(\sin 5{,}3)-\frac{5\pi}{2}.$$

4. Решить уравнение:

$$x^2+2x\sin(xy)+1=0.$$

5. Решить уравнение:

$$\log_2(6x-x^2-5)=x^2-6x+11.$$

6. Для каких значений a неравенство $4^{x+1}+9\cdot 4^{-x}-2(2^{x+1}+3\cdot 2^{-x})\geq a$ выполняется при всех $x\geq 0$?

7. Пусть L – касательная к графику функции

$$f(x)=\left[\frac{3+x^2}{2-2x}+\frac{6x^2+24x+26}{3-2x-x^2}+\frac{x^2+4x+7}{2x+6}\right]^{-\frac{1}{3}}\cdot(x+3)$$

в точке B с абсциссой, равной 2; O – начало координат, C – ближайшая к O точка прямой L, удаленная от B на расстояние, равное 2. Найти S – площадь треугольника OBC.

8. Различные числа a, b, c образуют геометрическую прогрессию (в указанном порядке), а числа $\frac{1}{a+1},\frac{1}{b+1},\frac{1}{c+1}$ - арифметическую прогрессию (в том же порядке). Найти сумму арифметической прогрессии.

9. В остроугольном треугольнике ABC высота AD, медиана BE и биссектриса CF пересекаются в точке O. Найти угол C, если $OE=2\cdot OC$.

10. Точка M лежит на ребре DC правильной четырехугольной пирамиды $SABCD$ (S – вершина), $DM : DC = 1 : 15$. Цилиндр касается

боковой поверхностью плоскостей SAD и SCD, одно из оснований цилиндра проходит через точку M, второе основание имеет общую точку с ребром SC. Боковая поверхность цилиндра имеет с высотой SH пирамиды общую точку O, причем $SO : SH = 1 : 3$. Найти отношение объемов цилиндра и пирамиды.

Вариант 4.

1. Вычислить:

$$\left(\frac{3+2\sqrt[4]{5}}{3-2\sqrt[4]{5}}\right)^{\frac{1}{4}}\cdot\frac{\sqrt[4]{5}-1}{\sqrt[4]{5}+1}.$$

2. Найти все значения параметра a, при которых уравнение $2+\sqrt{4x-x^2-3}=a+\sqrt{1-a^2+2ax-x^2}$ имеет ровно одно решение.

3. Вычислить $\log_{\frac{18}{7}}\left|\sin\left(\gamma+\frac{\pi}{4}\right)\right|+\log_{\frac{18}{7}}\left|\cos\left(3\gamma+\frac{\pi}{4}\right)\right|$, если известно, что $\cos\gamma+\sin\gamma=-\sqrt{\frac{1}{3}}$.

4. Найти решения уравнения $(\cos 6x-3\cos 3x+2)(5\cos 2x+tgx+1)=0$, для которых $20\sin\left(x-\frac{\pi}{18}\right)<3$.

5. Решить уравнение:

$x^{2\lg 2}\cdot 2^{-\lg x}=2$.

6. Найти все значения параметра a, при которых неравенство $\left|3\sin^2 x+2a\sin x\cos x+\cos^2 x+a\right|\le 1$ выполняется для любых x.

7. Пусть L – касательная к графику функции

$$f(x)=\left[\frac{((x+1)^2-8x+8)^{\frac{1}{2}}}{x+1}+\frac{(x-2)^2+3}{x^3-3x^2+3x+7}\right]:\frac{x^2-5x+6}{(x-3)(x^2-2x-3)}$$

в точке B с абсциссой, равной 1; O – начало координат, C – ближайшая к O точка прямой L, удаленная от B на расстояние, равное 2. Найти S – площадь треугольника OBC.

8. Числа $\frac{1}{21},\frac{1}{19},\frac{1}{17}$ являются членами некоторой арифметической прогрессии с возрастающими номерами. Каково наибольшее возможное значение разности такой прогрессии?

9. В выпуклом пятиугольнике $ABCDE$ с единичными сторонами середины P, Q сторон AB, CD и S, T сторон BC, CE соединены отрезками

PQ и ST. Пусть M и N – середины отрезков PQ и ST. Найти длину отрезка MN.

10. Точка D лежит на ребре BC треугольной пирамиды $SABC$ (S – вершина), $BD : DC =$ $= 2 : 3$. Цилиндр касается боковой поверхностью плоскостей SAB и SBC, одно из оснований цилиндра проходит через точку D, второе основание имеет общую точку с ребром SC. Боковая поверхность цилиндра имеет единственную общую точку с ребром AC. Найти отношение объемов цилиндра и пирамиды.

Вариант 5.

1. Вычислить:

$(a+b+c)^3 - 27abc$, если $\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{c} = 0$.

2. Найти все значения параметра *a*, при которых уравнение

$a + \sqrt{6x - x^2 - 8} = 3 + \sqrt{1 + 2ax - a^2 - x^2}$ имеет ровно одно решение.

3. Вычислить $\log_{\frac{14}{25}}|\cos\delta| + \log_{\frac{14}{25}}|\cos 3\delta|$, если известно, что

$\sin\left(\delta + \frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(\delta + \frac{\pi}{4}\right) = -\sqrt{\frac{4}{5}}$.

4. Найти все корни уравнения

$\sin^4 2x - \cos 2x + tg^2\left(3x - \frac{\pi}{2}\right) + 3 = \cos^3 x - 4\sin x$, принадлежащие области определения функции $y = \sqrt[4]{(\cos 0{,}9\pi - \cos 0{,}1\pi)\cos x}$.

5. Решить уравнение:

$\log_5 x = \sqrt{1 - x^4}$.

6. Найти все значения параметра *a*, при каждом из которых неравенство $\frac{1}{2}|a-2||x+a-4| + \left(\frac{a^2-4a+3}{|a-2|} - |a-2|\right)|x-2| + \frac{1}{2}|a-2||x-a| \le 1$ выполняется ровно для двух различных значений *x*.

7. Производные функций $f^2(x)$ и $\frac{1}{f(x)}$ в точке $x = 1$ равны, соответственно, 2 и 27. Найдите $f'(1)$.

8. При каких $y \in R$ числа $\sqrt{y^2 + 2y + 1}$, $\frac{y^2 + 3y - 1}{3}$, $y - 1$, взятые в указанном порядке, являются тремя последними членами арифметической прогрессии?

9. В выпуклом четырехугольнике *ABCD* сторона *AB* равна *a*, сторона *AC* равна *b*. Из вершин *B* и *C* опущены перпендикуляры *BK* и *CN* на диагональ *AD*, причем *AK* < *AN*. Найти отношение *OC* : *OA*, где *O* – точка пересечений диагоналей четырехугольника, если *AK* = *k*, *AN* = *n*.

10. Основанием четырехугольной пирамиды $SABCD$ является параллелограмм $ABCD$, точка пересечения диагоналей которого есть ортогональная проекция вершины S на плоскость $ABCD$. Точки E и F выбраны на ребрах BS и BC соответственно так, что $BE = \frac{1}{4}BS$, $BF = \frac{1}{3}BC$. Точки P и Q расположены на прямых AE и SF так, что прямая PQ перпендикулярна плоскости основания пирамиды. Площадь параллелограмма $ABCD$ равна 3, $PQ = 12$. Найти объем пирамиды.

Вариант 6.

1. Вычислить:

$$\frac{\sqrt[3]{\sqrt[3]{2}-1}}{\sqrt[3]{\frac{1}{9}}-\sqrt[3]{\frac{2}{9}}+\sqrt[3]{\frac{4}{9}}}.$$

2. Найти все значения параметра a, при которых уравнение $\sqrt{x^3-24x^2+118x+7}=5\sqrt{7x-x^2}+\sqrt{a^2-11a+18}$ имеет единственное решение.

3. Упростить $\frac{\sin^3 x+\cos^3 x}{(a^3-3)a}$, если $\sin x+\cos x=a$.

4. Решить уравнение:

$$\left|\sin\frac{\pi x}{2}-2\right|^{\log_2\left(2-\frac{x}{\pi}\right)}=(x^3-6x^2+5x+1)^{\arccos\left(\frac{\pi}{x}\right)}.$$

5. Решить уравнение:

$$\log_2(1+x^2)=\log_2 x+2x-x^2.$$

6. Найти все значения параметра a, при каждом из которых неравенство $-\frac{1}{2}|a+3||x+a+6|+\left(|a+3|-\frac{a^2+6a+8}{|a+3|}\right)|x+3|-\frac{1}{2}|a+3||x-a|\ge -2$ выполняется ровно для двух различных значений x.

7. Производные функций $\sqrt{f(x)}$ и $\frac{1}{f(x)}$ в точке $x=0$ равны, соответственно, 4 и -1. Найдите $f(0)$.

8. При каких значениях параметра a четыре корня уравнения $x^4+(a-3)x^2+(a+10)^2=0$ являются последовательными членами арифметической прогрессии?

9. Диагонали с длинами $\sqrt{7}$ и 4 делят четырехугольник на части, площади которых образуют арифметическую прогрессию. Найти площадь четырехугольника, зная, что угол между большей диагональю и меньшей из сторон равен $\frac{\pi}{6}$.

10. Основанием четырехугольной пирамиды $SABCD$ является параллелограмм $ABCD$, точка пересечения диагоналей которого есть ортогональная проекция вершины S на плоскость $ABCD$. Точки P и Q выбраны на ребрах DS и AD соответственно так, что $DP = \frac{1}{5}DS$, $DQ = \frac{1}{4}AD$. Точки N и M расположены на прямых CP и SQ так, что прямая NM перпендикулярна плоскости основания пирамиды. Площадь параллелограмма $ABCD$ равна 6, $NM = 8$. Найти объем пирамиды.

Вариант 7.

1. Вычислить:

$$\sqrt[3]{6+\sqrt{\frac{847}{27}}}+\sqrt[3]{6-\sqrt{\frac{847}{27}}}.$$

2. Найти все значения параметра *a*, при которых уравнение $\sqrt{-3x^3+8x^2+47x-52}=6\sqrt{6x-x^2-5}+\sqrt{a^2-10a+21}$ имеет единственное решение.

3. Упростить $\dfrac{\sqrt{1+\sin\alpha}-\sqrt{1-\sin\alpha}}{4\sin\frac{\alpha}{2}}\quad (0<\alpha<90^0)$.

4. Найти все корни уравнения $(\sin x-1)\left(\left(\sin x+\sqrt{3}\cos x\right)\sin 4x-2\right)=0$, удовлетворяющие неравенству $\lg\left((x+2\pi)\left(-x-\frac{3\pi}{2}\right)+1\right)\geq 0$.

5. Решить уравнение:

$$\log_2(4x^2+1)=\log_2 x+8x(1-x).$$

6. При всех *a* решить неравенство

$$\frac{(a^2+1)(2ax+1)x-(a+1)^2}{(a^2+1)x-1}\geq 2a.$$

7. На прямой $2x-3y=6$ найти точку, через которую проходят две перпендикулярные друг другу касательные к графику функции $y=\frac{x^2}{4}$.

8. При каких значениях *q* уравнение $x(x^{12}-qx^6+q^4)=0$ имеет ровно пять корней, образующих арифметическую прогрессию?

9. Диагонали с длинами 4 и $\sqrt{13}$ разбивают четырехугольник на части такие, что величины, обратные их площадям, образуют арифметическую прогрессию. Найти площадь четырехугольника, зная, что угол между большей диагональю и меньшей из сторон равен $\frac{\pi}{3}$.

10. В основании четырехугольной пирамиды *SABCD* лежит ромб *ABCD* с острым углом при вершине *A*. Высота ромба равна 4, точка

пересечения его диагоналей является ортогональной проекцией вершины S на плоскость основания. Сфера радиуса 2 касается плоскостей всех граней пирамиды. Найти объем пирамиды, если расстояние от центра сферы до прямой AC равно $\frac{2\sqrt{2}}{3}AB$.

Вариант 8.

1. Вычислить:

$$\left(\sqrt[6]{8\sqrt{5}+16}+\sqrt{\sqrt{5}+1}\right)\cdot\sqrt{\sqrt{5}-1}.$$

2. Найти все значения параметра a, при которых уравнение $\sqrt{2xy+a}=x+y+1$ имеет решение.

3. Упростить:

$$\sin 5a\sin 4a+\sin 4a\sin 3a-\sin 2a\sin a-2\sin 3a\sin 5a\cos a.$$

4. Найти все решения уравнения $2\sin 2x-tgxsn\frac{29\pi}{6}=\sin\frac{19\pi}{3}$, удовлетворяющие неравенству $\frac{\pi^2}{x}>4x$.

5. Решить уравнение:

$$\log_2(x(1-x))=-2+\left|\sin\left(\frac{\pi}{x}\right)\right|.$$

6. Найти наибольшее значения параметра a, при котором неравенство

$a\sqrt{a}(x^2-2x+1)+\frac{\sqrt{a}}{x^2-2x+1}\leq\sqrt[4]{a^3}\cdot\left|\sin\frac{\pi}{2}x\right|$ имеет хотя бы одно решение.

7. Точка A лежит на графике функции $y=\frac{1}{8}(x^2-12x)$, точка B – на кривой $x^2+y^2-18x-12y+97=0$. Какое наименьшее значение может иметь длина отрезка AB?

8. Найти положительные a, для которых все различные неотрицательные x, удовлетворяющие уравнению $\cos((8a-3)x)=\cos((14a+5)x)$ и расположенные в порядке возрастания, образуют арифметическую прогрессию.

9. Четырехугольник $ABCD$, описанный около некоторой окружности, делится диагональю AC на треугольники ABC и ACD с радиусами вписанных окружностей 1 и $\frac{3}{\sqrt{15}}$ соответственно. Найти

стороны четырехугольника и диагональ BD, если площади ABC и ACD равны 6 и $\sqrt{15}$ соответственно.

10. В основании призмы лежит равносторонний треугольник ABC со стороной $\sqrt{3}$. Боковые ребра AD, BE, CF перпендикулярны основанию. Сфера радиуса $\frac{7}{2}$ касается плоскости ABC и продолжений отрезка AE, BF, CD за точки A, B, C соответственно. Найти длину боковых ребер призмы.

Вариант 9.

1. Вычислить:

$$\left(\frac{3+2\sqrt[4]{5}}{3-2\sqrt[4]{5}}\right)^{\frac{1}{4}}\cdot\frac{\sqrt[4]{5}-1}{\sqrt[4]{5}+1}.$$

2. Найти все значения параметра k, при которых уравнение

$x+2k\sqrt{2x+1}-k+3=0$ имеет решение.

3. Упростить:

$$tg3\alpha-tg\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)tg\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)\cdot tg\alpha+1.$$

4. Найти все решения уравнения $\sin 2\pi x-\sin^2 4\pi x=\sin^2 6\pi x$, удовлетворяющие неравенству $\log_{4x-36}(10-x)<1$.

5. Решить уравнение:

$$(\cos x)^{\lg\lg x+2}+(\lg x)^{\lg\cos x}\cdot\sin^2 x=1.$$

6. Найти наибольшее значения параметра b, при котором неравенство

$\sqrt{b^5}(8x-x^2-16)+\dfrac{\sqrt{b}}{8x-x^2-16}\geq-\dfrac{2}{3}b|\cos\pi x|$ имеет хотя бы одно решение.

7. При каких значениях параметра a наименьшее значение функции $y=3|x-a|+|x^2+x-2|$ меньше 2?

8. Решить уравнение

$\sqrt[3]{x\sqrt{x\sqrt[3]{x\ldots\sqrt{x}}}}=2$. (100 корней)

9. Четырехугольник $ABCD$, описанный около окружности радиуса $\dfrac{3+\sqrt{5}}{4}$, делится диагональю AC на треугольники ABC и ACD с радиусами вписанных окружностей 1 и $\dfrac{2}{\sqrt{5}}$ соответственно. Найти длину диагонали AC и стороны четырехугольника, если расстояние от центра вписанного в ACD круга до D равно $2\sqrt{\dfrac{6}{5}}$.

10. Правильная треугольная пирамида $SKLM$ пересечена плоскостью π, параллельной стороне ML основания пирамиды и ребру SK, причем точки S и K удалены от этой плоскости на расстояние, вдвое меньшее (каждая), чем прямая ML. Длина высоты SP боковой грани MSK равна d, а боковое ребро SL образует с высотой SO пирамиды угол величиной β. Найти площадь сечения пирамиды плоскостью π.

Вариант 10.

1. Вычислить:

$(a+b+c)^3-27abc$, если $\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{c}=0$.

2. Найти все значения параметра a, при которых уравнение $3\sqrt{x+2}=2x+a$ имеет решение.

3. Вычислить:

$\left(\sqrt{5}+1\right)\sin 18^0$.

4. Решить систему:

$$\begin{cases} \left|\cos\left(3x+\dfrac{\pi}{4}\right)\right| = -\sqrt{2}\cos y, \\ \cos 2y + 2\sin 2x + \dfrac{3}{4} = 2\sin^3 2x. \end{cases}$$

5. Решить уравнение:

$$(ctgx)^{\lg\lg x} arctg \lg x + (\lg x)^{\lg ctgx} arctg \lg x = \frac{\pi}{2}.$$

6. Найти все пары p и q, при которых неравенство $\left|x^2+px+q\right|>2$ не имеет решение на отрезке $[1;5]$.

7. При каких значениях параметра a наименьшее значение функции $y=\left|x^2-6x+8\right|-2|x-a|$ меньше -3?

8. Решить уравнение $x^3+3x^2-6x+a=0$, зная, что есть три различных действительных корня, образующих геометрическую прогрессию.

9. Продолжения сторон *KN* и *LM* выпуклого четырехугольника *KLMN* пересекаются в точке *P*, а продолжения сторон *KL* и *MN* – в точке *Q*. Отрезок *PQ* перпендикулярен биссектрисе угла *KQN*. Найти длину стороны *KL*, если *KQ = 12*, *NQ = 8*, а площадь четырехугольника *KLMN* равна площади треугольника *LQM*.

10. Даны правильная четырехугольная пирамида *SABCD* и конус, центр основания которого лежит на прямой *SO* (*SO* – высота пирамиды).

Точка E – середина ребра SD, точка F лежит на ребре AD, причем $AF = \frac{3}{2} FD$. Треугольник, являющийся одним из осевых сечений конуса, расположен так, что две его вершины лежат на прямой CD, а третья – на прямой EF. Найти объем конуса, если $AB = 4$, $SO = 3$.

Вариант 11.

1. Вычислить:

$$\frac{\sqrt[3]{\sqrt[3]{2}-1}}{\sqrt[3]{\frac{1}{9}}-\sqrt[3]{\frac{2}{9}}+\sqrt[3]{\frac{4}{9}}}.$$

2. Найти все значения параметра *a*, при которых уравнение $x|x-2a|-1-a=0$ имеет единственное решение.

3. Вычислить:

$3tg\frac{\alpha}{2}$, если $\sin\alpha+\cos\alpha=1{,}4$, $0<\alpha<\frac{\pi}{4}$.

4. Решить систему:

$$\begin{cases} 17\cos 2x-7=21\sin x\cos y, \\ \cos x=\sqrt{3\sin x}\cos y. \end{cases}$$

5. Решить уравнение:

$$\log_x(3x-2)-2=\sqrt{\log_x^2(2x-2)+4\log_x\left(\frac{x}{3x-2}\right)}.$$

6. Найти все значения параметра *a*, для которых неравенство $\log_5(a\cos 2x)+(1+a^2-\sin^2 x)\cos x+4+a)\le 1$ выполняется при всех *x*.

7. При каких значениях параметра *a* уравнение $ax^6=e^x$ имеет одно положительное решение?

8. Пусть x_1 и x_2 – корни уравнения $x^2-9x+A=0$, x_3, x_4 – корни уравнения $x^2-36x+B=0$. Известно, что последовательность x_1, x_2, x_3, x_4 является геометрической прогрессией, все члены которой положительны. Найти *A* и *B*.

9. В выпуклом четырехугольнике *ABCD* отрезок *CM*, соединяющий вершину *C* с точкой *M*, расположенной на стороне *AD*, пересекает диагональ *BD* в точке *K*. Известно, что $CK:KM=2:1$, $CD:DK=5:3$ и $\angle ABC+\angle ACD=180^0$. Найти отношение стороны *AB* к диагонали *AC*.

10. Длина высоты *SO* правильной четырехугольной пирамиды *SPQR* равна *h*, боковое ребро *SP* наклонено к плоскости основания *PQRT*

под углом γ. Сфера, касающаяся плоскости основания и всех боковых ребер пирамиды, пересекается плоскостью, равноудаленной от всех вершин этой пирамиды. Определить радиус окружности, по которой пересекаются эти сфера и плоскость.

Вариант 12.

1. Вычислить:

$$\sqrt[3]{6+\sqrt{\frac{847}{27}}}+\sqrt[3]{6-\sqrt{\frac{847}{27}}}.$$

2. Найти все значения параметра a, при которых уравнение $x|x+2a|+1-a=0$ имеет единственное решение.

3. Вычислить:

$$\sqrt{5}\sin\left[\frac{1}{2}arctg\left(-\frac{4}{3}\right)\right].$$

4. Решить систему:

$$\begin{cases} 3\cos(4x-2y)=\sqrt{2}\cos(2x-2y), \\ \sqrt{2}\sin(x+y)=3\sin(y-x). \end{cases}$$

5. Решить уравнение:

$$\log_x(6x-5)-2=\sqrt{\log_x^2(6x-5)-4\log_x\left(\frac{6x-5}{x}\right)}.$$

6. Найти все значения a, для которых неравенство $\log_5(a\cos 2x)-(1+a^2-\cos^2 x)\sin x+4-a)\leq 1$ выполняется при всех x.

7. Наименьшее значение функции $y=x^2-2ax+2a^2-4a$ на отрезке $[0;3-a]$ равно $m(a)$. При каком a функция $m(a)$ достигает своего наименьшего значения? Найти это наименьшее значение.

8. Даны две различные геометрические прогрессии, первые члены которых равны 1, а сумма знаменателей равна -4. Известно, что сумма шестых членов прогрессии равна -724. Найти сумму пятых членов прогрессий.

9. В выпуклом четырехугольнике $KLMN$ отрезок MS, соединяющий вершину M с точкой S, расположенной на стороне KN, пересекает диагональ LN в точке O. Известно, что $KL:MN=6:7$, $KM:ON=2:1$ и $\angle KLN+\angle KMN=180^0$. Найти отношение отрезков MO и OS.

10. Все высоты пирамиды $EFGH$, грани которой являются остроугольными треугольниками, равны между собой. Известно, что $FG = 17$, $HG = 14$, а $\angle EHG = 60^0$. Найти длину ребра HF.

Вариант 13.

1. Вычислить:

$$\left(\sqrt[6]{8\sqrt{5}+16}+\sqrt{\sqrt{5}+1}\right)\div\sqrt{\sqrt{5}-1}.$$

2. При каких значениях a уравнения

$a^2+(x^2-x-1)a-(x^3-6x^2+5)=0$,

$(3-x)a^2+(3x^2-3x-2)a-(2x^3-12x^2+10)=0$ не имеют общего решения?

3. Вычислить:

$\sin 18^0 \sin 54^0$.

4. Решить систему:

$$\begin{cases} 4\sin(3x+2y)+\sin x=0, \\ 4\sin(2x+3y)+\sin y=0. \end{cases}$$

5. Решить уравнение:

$(\cos x)^{\lg\lg x+2}+(\lg x)^{\lg\cos x}\cdot\sin^2 x=1$.

6. Найти все значения a, для которых неравенство $x+\dfrac{7a^2+a-2}{x+a+1}<7a-1$ не имеет положительных решений x.

7. Найдите площадь фигуры, описываемой на координатной плоскости системой неравенств $|x+\cos 2y|\le 6$; $|3y+2|\le 7$.

8. Дано: $S=\left(17+\dfrac{1}{3}\right)+\left(17^2+\dfrac{1}{3^2}\right)+\ldots+\left(17^n+\dfrac{1}{3^n}\right)$; A – наибольшее число, не превосходящее S. Найти наименьшее натуральное n, при котором $S-A>\dfrac{79}{160}$.

9. Продолжения сторон KN и LM выпуклого четырехугольника $KLMN$ пересекаются в точке P, а продолжения сторон KL и MN – в точке Q. Отрезок PQ перпендикулярен биссектрисе угла KQN. Найти длину стороны MN, если $KQ = 6$, $NQ = 4$, а площади треугольника LQM и четырехугольника $KLMN$ равны.

10. Сторона основания правильной призмы $ABCA_1B_1C_1$ имеет длину a, а боковое ребро – длину $\frac{5}{4}a$. Точка D – середина ребра A_1C_1, а точка M лежит на отрезке DB_1 и $DM = \frac{1}{6} DB_1$. Вторая призма симметрична призме $ABCA_1B_1C_1$ относительно прямой BM. Найти объем общей части этих призм.

Вариант 14.

1. Вычислить:

$$\left(\frac{3+2\sqrt[4]{5}}{3-2\sqrt[4]{5}}\right)^{\frac{1}{4}}\cdot\frac{\sqrt[4]{5}-1}{\sqrt[4]{5}+1}.$$

2. При каких значениях параметров a и b можно найти 2 различных вещественных корня уравнения $x^3-5x^2+7=a$, которые будут также корнями уравнения $x^3-8x^2+b=0$?

3. Доказать, что если $\cos a+\cos b=a$ и $\sin a+\sin b=b$, то $\cos(a+b)=\dfrac{a^2-b^2}{a^2+b^2}$.

4. Решить систему:

$$\begin{cases}5x^2+8xy+4y^2=4+4x,\\ \sin^2(\pi x)+\sin^2(\pi y)=0.\end{cases}$$

5. Решить уравнение:

$\log_2(4x^2+1)=\log_2 x+8x(1-x)$.

6. Найти все действительные числа a, при которых неравенство $x+\dfrac{7a^2-a-2}{x-a}<-7a$ не имеет решений x, больших 1.

7. Найдите площадь фигуры, описываемой на координатной плоскости системой неравенств $\sqrt{7x+\cos y}\le 3$; $|3y+1|\le 7$.

8. Какое наибольшее число членов может содержать конечная арифметическая прогрессия с разностью 4 при условии, что квадрат ее первого числа в сумме с остальными членами не превосходит 100?

9. Продолжения сторон AB и BC выпуклого четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке M, а продолжения сторон AB и CD – в точке O. Отрезок MO перпендикулярен биссектрисе угла AO. Найти отношение площадей треугольника AOD и четырехугольника $ABCD$, если $OA=12$, $OD=8$, $CD=2$.

10. Основанием четырехугольной пирамиды $SABCD$ является параллелограмм $ABCD$, точка пересечения диагоналей которого есть

ортогональная проекция вершины S на плоскость $ABCD$. Точки P и Q выбраны на ребрах DS и AD соответственно так, что $DP = \frac{1}{5}DS$, $DQ = \frac{1}{4}AD$. Точки N и M расположены на прямых CP и SQ так, что прямая NM перпендикулярна плоскости основания пирамиды. Площадь параллелограмма $ABCD$ равна 6, $NM = 8$. Найти объем пирамиды.

Вариант 15.

1. Вычислить:

$(a+b+c)^3-27abc$, если $\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{c}=0$.

2. При каких значениях параметра a уравнения $x^3+\frac{48}{x}=a$ имеет хотя бы одно решение?

3. Упростить:

$tg3\alpha-tg\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)tg\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)\cdot tg\alpha+1$.

4. Решить систему:

$$\begin{cases}\cos 2x+\cos 2y=z^2+\frac{1}{z^2},\\ x\left(\sqrt{\frac{y}{\pi}}+\sqrt{\frac{\pi}{y}}\right)=243\pi.\end{cases}$$

5. Решить уравнение:

$\log_{\frac{1}{2}}(tg\,px+ctg\,px)=8(2x^2+3x+1)$.

6. При каких a неравенство $y(3tgx-4y)<a(tg^2x+y^2)$ имеет решения?

7. Производные функций $\sqrt{f(x)}$ и $\frac{1}{f(x)}$ в точке $x=0$ равны, соответственно, 4 и -1. Найдите $f(0)$.

8. Доказать, что если три числа x,y,z связаны соотношением $x^2z+xyz+2y^2z=2xz^2+xy^2+y^3$, то они образуют либо арифметическую, либо геометрическую прогрессию.

9. Точки *K*, *L*, *M* делят стороны выпуклого четырехугольника *ABCD* в отношении: $AK:BK=CL:BL=CM:DM=1:2$. Радиус окружности, описанной около треугольника *KLM*, равен $\frac{5}{2}$, $KL=4$, $LM=3$. Какова площадь *ABCD*, если известно, $KM<KL$?

10. Правильная треугольная пирамида *SKLM* пересечена плоскостью π, параллельной стороне *ML* основания пирамиды и ребру

SK, причем точки *S* и *K* удалены от этой плоскости на расстояние, вдвое меньшее (каждая), чем прямая *ML*. Длина высоты *SP* боковой грани *MSK* равна *d*, а боковое ребро *SL* образует с высотой *SO* пирамиды угол величиной β. Найти площадь сечения пирамиды плоскостью π.

7. КАРТА КАДРОВОЙ ОБЕСПЕЧЕННОСТИ ДИСЦИПЛИНЫ

Лектор – старший преподаватель кафедры МАиМ Кван Наталья Владимировна (стаж работы в вузе 14 лет);

ведущий практические занятия – старший преподаватель кафедры МАиМ Кван Наталья Владимировна.

ОГЛАВЛЕНИЕ