Федеральное агентство по образованию РФ
ГОУ ВПО «АМУРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
Факультет математики и информатики

А.В.Голик, Н.Н. Двоерядкина

МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Учебно-методическое пособие.

Благовещенск, 2008

Печатается по решению
редакционно-издательского совета
факультета математики и информатики
Амурского государственного
Университета

Голик А.В., Двоерядкина Н.Н.

Методы решения задач линейного программирования: Учебно-методическое пособие. Благовещенск: Амурский гос. ун-т, 2008.

В пособии рассматриваются основные методы решения задач линейного программирования. Приведены краткие теоретические сведения, разобраны примеры решения задач линейного программирования аналитическим, графическим и симплексным методами. Содержатся практические задания для организации самостоятельной работы студентов.

Практикум предназначен для студентов очного отделения экономических специальностей.

Введение

Раздел математики «Линейное программирование» является базовым при изучении экономико-математических методов и моделей. Задачи линейного программирования являются задачами оптимизации. Термином «оптимизация» в литературе обозначают процесс или последовательность операций, позволяющих получить уточненное решение. Выбранное решение должно по возможности гарантировать от ошибок, связанных с неточным программированием. Для обоснования такого решения приводится в действие сложная система математических расчетов.

В условиях рыночной экономики выработка и принятие оптимальных решений особенно актуальны. Поэтому раздел «Линейное программирование» важен для студентов экономических специальностей. К сожалению, при изучении экономико-математических методов и моделей нет возможности достаточно подробно рассмотреть все методы решения задач линейного программирования.

Для этой цели в пособии приведены три способа решения классической задачи линейного программирования: аналитический, графический и симплексный. Каждый из этих методов по-своему хорош и удобен. Графический метод позволяет быстро получить решение без долгих последовательных итераций. Аналитический метод будет удобен тем, кто плохо ориентируется в чертежах, но владеет элементарной логикой, а симплексный метод универсален и легко программируется.

Ввиду небольшого объема пособия, остались без внимания некоторые важные и интересные аспекты задач линейного программирования, в частности, составление, решение и анализ двойственных задач. Это будет предметом рассмотрения следующей работы.

Авторы надеются, что учебно-методическое пособие «Методы решения задач линейного программирования» окажет помощь студентам и будет удобно для преподавателей.

1. Постановка задачи линейного программирования

Линейное программирование – раздел математики, в котором изучаются методы исследования и отыскания экстремальных значений линейной функции, на неизвестные которой наложены линейные ограничения.

Математическое выражение целевой функции и системы ограничений называется математической моделью задачи линейного программирования.

В общем виде задача линейного программирования формулируется следующим образом:

Дана линейная функция $F = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n$ и система m линейных уравнений и неравенств с n переменными

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \le b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \le b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \ldots + a_{kn}x_n \le b_k \\ a_{k+1,1}x_1 + a_{k+1,2}x_2 + \ldots + a_{k+1,n}x_n = b_{k+1} \\ a_{k+2,1}x_1 + a_{k+2,2}x_2 + \ldots + a_{k+2,n}x_n = b_{k+2} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Необходимо найти такое неотрицательное решение системы $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, при котором линейная функция F принимает оптимальное (максимальное или минимальное) значение.

Система называется *системой ограничений,* а функция F – *целевой функцией*.

Если система ограничений состоит лишь из одних неравенств, то говорят, что задача линейного программирования представлена в стандартной форме.

Если система ограничений содержит только уравнения, то задачу линейного программирования называют канонической.

Любая задача линейного программирования может быть сведена к канонической путем введения балансовых переменных. Балансовые переменные x_{n+i} вводятся в каждое неравенство. Если знак неравенства ≤, то балансовая переменная вводится со знаком плюс, если знак неравенства ≥, то– минус.

Для решения задач линейного программирования используют графический и симплексный методы.

2. Графический метод решения задач линейного программирования

Графический метод решения задач является наиболее простым и наглядным. Он применяется, если задача линейного программирования задана в неканонической форме и содержит только две переменные, или в канонической форме и содержит много переменных, но число переменных больше числа уравнений на 2.

Алгоритм графического метода.

1. Построить область допустимых решений. Для нахождения области необходимо построить граничные прямые, уравнения которых получаются в результате замены в ограничениях задачи знаков неравенств на знаки равенств. Затем найти полуплоскости, определяемые каждым из ограничений задачи.

Областью допустимых решений может быть выпуклый многоугольник, выпуклая многоугольная неограниченная область, пустая область, отрезок, точка.

2. Если область допустимых решений является пустым множеством, то задача не имеет решения из-за несовместности системы ограничений.

3. Если область допустимых решений является непустым множеством, построить вектор $\vec{g} = grad\ Z = \left(\frac{\partial Z}{\partial x_1}; \frac{\partial Z}{\partial x_2}\right) = (c_1; c_2)$, который называют целевым, и линии, на которых значение целевой функции Z постоянно ($Z=c_1x_1+c_2x_2=const$), их называют линиями уровня. Вектор g, перпендикулярный к линиям уровня, указывает направление наискорейшего возрастания Z, а противоположный вектор – направление убывания Z.

4. Линию уровня переместить параллельно самой себе в направлении вектора g. В первой встречаемой вершине многоугольника решений получим min Z, а в последней пересекаемой линией уровня вершине – max Z.

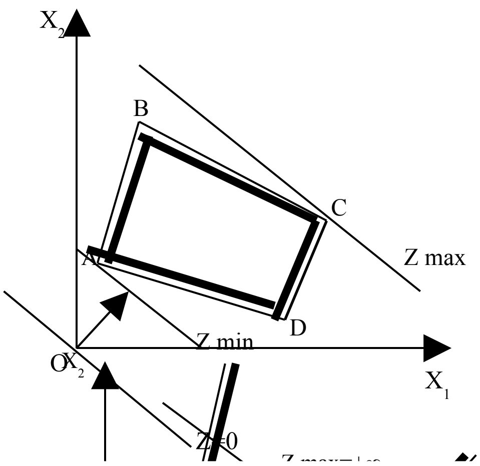
5. Если при перемещении линии уровня по области допустимых решений она уходит в бесконечность, то задача не имеет решения, т.к. целевая функция неограниченна или говорят, что $Z \to \infty$.

6. Если задача линейного программирования имеет оптимальное решение, то, чтобы найти компоненты решения, достаточно решить систему из двух уравнений, определяющих вершину, в которой достигается оптимальное значение.

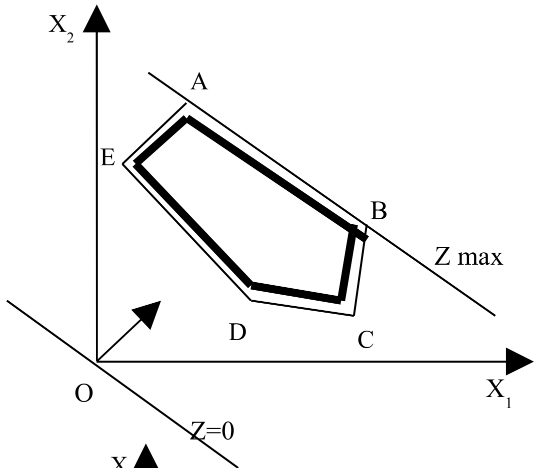
7. Если целевая функция достигает экстремума в нескольких крайних точках, то задача имеет бесконечное множество решений. Оптимальным решением является линейная комбинация этих крайних точек (альтернативный оптимум), который находится в виде: $X_{опт} = t \cdot X_{опт\,1} + (1-t) \cdot X_{опт\,2}$, где $0 \le t \le 1$.

8. После нахождения оптимальных решений необходимо вычислить значение целевой функции Z при этих решениях.

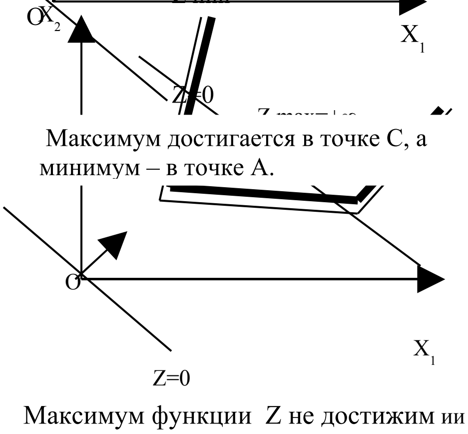
Изобразим графически различные ситуации нахождения оптимального решения.



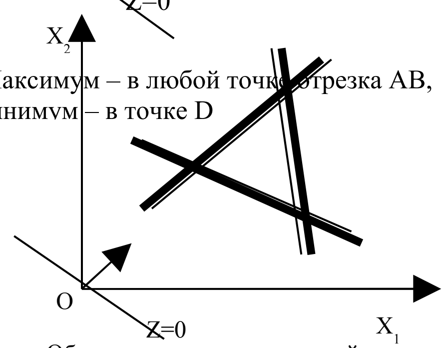
Максимум достигается в точке С, а минимум – в точке А.



Максимум – в любой точке отрезка АВ, минимvм – в точке D



Максимум функции Z не достижим ии Z недостижим



Область допустимых решений – пустая область – решений нет

Рис.1 Возможные расположения оптимального решения.

Пример 1. Решить графическим методом следующую задачу линейного программирования:

$$F(x) = x_1 + 4x_2 \to \max,$$

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \le 12 \\ x_1 + 2x_2 \le 6 \\ x_1 \le 3{,}5 \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0 \end{cases}$$

Решение. Строим область допустимых решений задачи. Для этого последовательно определяем области решений каждого неравенства. Вместо неравенств $3x_1+2x_2 \le 12$ рассмотрим прямую $3x_1+2x_2=12$. Изобразим ее график. Построим прямую по двум точкам (0;6) и (4;0), которые легко получить, если найти точки пересечения с осями координат

x_1	0	4
x_2	6	0

(на рисунке прямая 1)

Граничная прямая делит плоскость на две полуплоскости. Возьмем в любой из полуплоскостей точку (в качестве нее проще всего взять начало координат – O (0;0)) и подставим ее координаты в неравенство $3x_1+2x_2 \le 12$. Если координаты точки удовлетворяют этому неравенству, то вся полуплоскость, где лежит данная точка, является решением этого неравенства. Если нет, то решением неравенства является другая полуплоскость.

При подстановке значений x_1=0 и x_2=0 в первое неравенство получаем 0 $\le$ 12; следовательно, область решения этого неравенства включает начало координат (берется нижняя полуплоскость).

Аналогично строим область решения остальных неравенств

$$x_1+2x_2=6$$

x_1	0	6
x_2	3	0

(на рисунке прямая 2)

$x_1+2x_2 \le 6$ при x_1=0, x_2=0, 0 $\le$ 6 неравенство выполняется, берется нижняя полуплоскость.

x_1=3,5 (на рисунке прямая 3) неравенство выполняется, следовательно область решений включает начало координат.

Если граничная прямая проходит через начало координат, то вместо точки О (0;0) необходимо испытать другую точку.

Находим общую область полуплоскостей решений, учитывая при этом условия неотрицательности, означающие, что область расположена в I четверти, т.к. по условию задачи $x_1 \ge 0$, $x_2 \ge 0$.

Полученную область допустимых решений, выпуклый многоугольник ABCDE отметим на рисунке штриховкой.

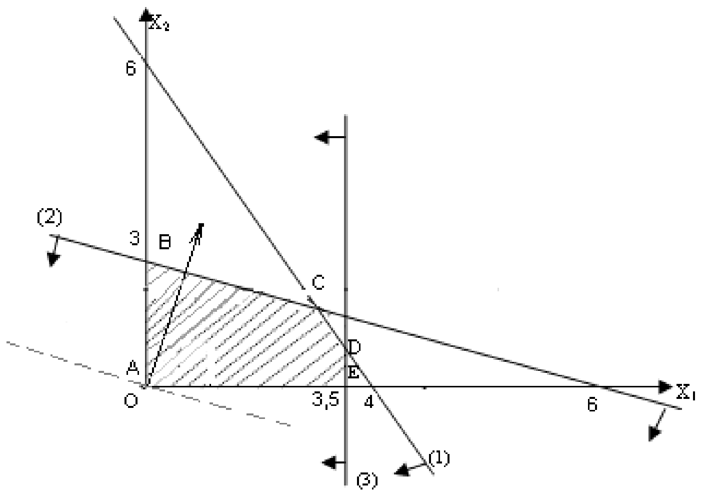


Рис. 2 Изображение области допустимых решений.

Изобразим целевой вектор $g = (1;4)$. Его координаты – это коэффициенты целевой функции F. Перпендикулярно вектору строим линию уровня $F=x_1+4x_2=0$ и передвигаем параллельно самой себе в направлении, которое указывает вектор.

Т.к. у нас задача максимизации, то последняя точка выхода из области и будет точкой максимума. В ней функция $F=x_1+4x_2$ принимает максимальное значение – это точка В. Точка В лежит на пересечении прямых (2) и оси ox_2. Для определения её координат решим систему уравнений:

$$\begin{cases} \tilde{o}_1 + 2\tilde{o}_2 = 6, \\ \tilde{o}_1 = 0. \end{cases}$$

Получаем
$$\begin{cases} \tilde{o}_1 = 0, \\ \tilde{o}_2 = 3. \end{cases}$$

Оптимальный план задачи $\tilde{O}^* = (0;3)$. Подставляя найденные значения в целевую функцию, получим:

$$F_{max}=0 + 4 \cdot 3 = 12.$$

<u>Пример 2.</u> Решить задачу графическим методом.

$$Z=4x_1+2x_2 \rightarrow \min,$$

$$\begin{cases} 4x_1 - x_2 \geq 0, \\ 2x_1 + x_2 \geq 6, \\ x_1 + 2x_2 \leq 12, \\ x_1 - x_2 \leq 0, \\ x_1 \qquad \leq 3, \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0; x_2 \geq 0.$$

<u>Решение</u>. Строим область допустимых решений – многоугольник ABCDE. Целевой вектор $g = (4;2)$.

Перпендикулярно вектору строим линию уровня. Перемещаем линию уровня в направлении, противоположном вектору, так как решается задача минимизации. Минимум достигается на отрезке AB, т.к. линия уровня параллельна прямой, на которой лежит отрезок AB. Задача имеет бесконечное множество оптимальных решений.

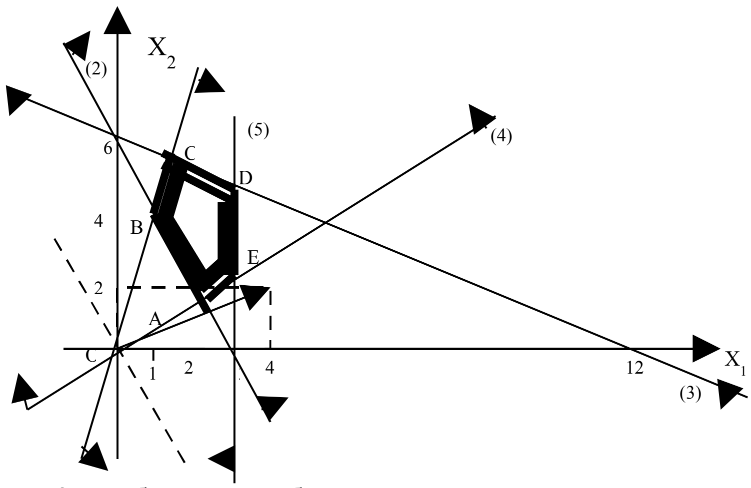


Рис.3 Изображение области допустимых решений.

Найдем координаты точек A и B, решая соответствующие системы уравнений.

т. А

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 6 \quad (2), \\ x_1 - x_2 = 0 \quad (4), \end{cases}$$

$$3x_1 = 6,$$

$x_1=2$, $x_2=2$, $X_1^*=(2; 2)$.

т. В

$$\begin{cases} 4x_1 - x_2 = 0 \quad (1), \\ 2x_1 + x_2 = 6 \quad (2) \end{cases}$$

$$6x_1 = 6,$$

$x_1=1$, $x_2=4$, $X_2^*=(1; 4)$.

Следовательно, любое оптимальное решение X^* равно:

$$X^* = (1-t)\cdot X_1^* + tX_2^*,\ 0 \le t \le 1.$$

Вычисляем $Z_{min}=4\cdot 2+2\cdot 2=12$.

<u>Пример 3.</u> Решить задачу графическим методом.

$$L(x) = 2x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 \to \max$$

ïðè îãðàíè÷åíèÿõ

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 = 2 \\ 2x_1 + x_3 + 2x_4 = 1 \end{cases}$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

<u>Решение.</u> Задача представлена в каноническом виде и количество переменных больше числа уравнений на 2. Для построения области допустимых решений выделим базисные переменные:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 2 & 0 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} \frac{3}{2} & 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 2 & 0 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

Базисными переменными являются x_2 и x_3. Составим по последней расширенной матрице систему уравнений и выразим базисные переменные:

$$\begin{cases} \frac{3}{2}x_1 + x_2 + \frac{1}{2}x_4 = \frac{3}{2} \\ 2x_1 + x_3 + 2x_4 = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_2 = \frac{3}{2} - \frac{3}{2}x_1 - \frac{1}{2}x_4 \\ x_3 = 1 - 2x_1 - 2x_4 \end{cases}$$

По условию $x_2>0$ и $x_3>0$, следовательно $\begin{cases} \frac{3}{2} - \frac{3}{2}x_1 - \frac{1}{2}x_4 \geq 0 \\ 1 - 2x_1 - 2x_4 \geq 0 \end{cases}$ или

$\begin{cases} \frac{3}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_4 \leq \frac{3}{2} \\ 2x_1 + 2x_4 \leq 1 \end{cases}$. Выразим целевую функцию только через базисные переменные. Для этого подставим найденные значения для x_2 и x_3 в функцию L(x). Имеем:

$$L(x) = 2x_1 + 2 \cdot \left(\frac{3}{2} - \frac{3}{2}x_1 - \frac{1}{2}x_4 \right) - (1 - 2x_1 - 2x_4) + x_4 = 2 + x_1 + 2x_4$$

Итак, получили задачу линейного программирования с двумя переменными, решая которую находим максимальное значение целевой функции и оптимальные значения переменных x_1 и x_4.

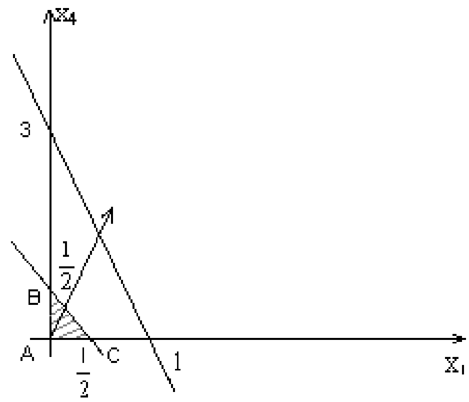


Рис.4 Область допустимых решений задачи.

Треугольник ABC – область допустимых решений. Целевой вектор $g = (1;2)$.

Перпендикулярно вектору строим линию уровня. Перемещаем линию уровня в направлении вектора. Оптимальное решение достигается в точке B с координатами $\tilde{o}_1 = 0$, $\tilde{o}_4 = \frac{1}{2}$. Подставляя найденные значения x_1 и x_4 в выражения для x_2 и x_3 получаем: $x_2 = \frac{3}{2} - \frac{3}{2} \cdot 0 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{5}{4}$ и $x_3 = 1 - 2 \cdot 0 - 2 \cdot \frac{1}{2} = 0$.

Определяем максимальное значение целевой функции $L_{\max} = 2 \cdot 0 + 2 \cdot \frac{5}{4} - 0 + \frac{1}{2} = 3$.

Оптимальный план задачи $\tilde{O}^* = \left(0; \frac{5}{4}; 0; \frac{1}{2}\right)$; $L_{\max} = 3$.

3. Симлексный метод решения задач линейного программирования

Симплексный метод универсален, так как позволяет решить практически любую задачу линейного программирования, записанную в каноническом виде, то есть в таком виде, где система ограничений представлена в форме уравнений.

Чтобы перейти от неканонической модели к канонической, необходимо в каждое неравенство ввести балансовую переменную x_{n+i}. Если знак неравенства ≤, то балансовая переменная вводится со знаком плюс, если знак неравенства ≥, то – минус. В целевую функцию балансовые переменные не вводятся.

Идея симплексного метода заключается в том, что, начиная с некоторого исходного опорного решения, осуществляется последовательно направленное перемещение по опорным решениям задачи к оптимальному. Значение целевой функции при этом улучшается. Через конечное число шагов получаем оптимальное решение.

Алгоритм симплексного метода.

1. Приводим математическую модель задачи к каноническому виду и выделяем базисные переменные.

2. Сравниваем знаки базисных переменных и свободных членов.

Если знаки не совпадают, используем М-метод (метод искусственного базиса) или метод фиктивной функции.

Если все базисные переменные имеют тот же знак, что и свободные члены, находим исходное опорное решение и проверяем его на оптимальность. Для этого заполняем симплексную таблицу:

c_i	БП	c_1 c_2 c_3 … c_m c_{m+1} … c_n	$L(x)$
		x_1 x_2 x_3 … x_m x_{m+1} … x_n	b_i
c_1	x_1	1 0 0 … 0 $h_{1,m+1}$… $h_{1,n}$	f_1
c_2	x_2	0 1 0 … 0 $h_{2,m+1}$… $h_{2,n}$	f_2
…	…	…………………………………...	…
c_m	x_m	0 0 0 … 1 $h_{m,m+1}$… $h_{m,n}$	f_m
	Δ_j	0 0 0 … 0 Δ_{m+1} … Δ_n	$L(\overline{x}_1)$

Все строки таблицы 1-го шага, за исключением строки Δ_j (индексная строка), заполняются по данным системы ограничений и целевой функции. Индексная строка для переменных находится по формуле:

$$\Delta_j = \sum_{i=1}^{m} c_i h_{ij} - c_j\ ,\ j = \overline{1,n}\ ,$$

а для свободного члена:

$$\Delta_j = \sum_{i=1}^{m} c_i f_i\ .$$

Возможны следующие случаи при решении задач на максимум (минимум):

– если все оценки $\Delta_j \geq 0$ ($\Delta_j \leq 0$), то найденное решение оптимально;

– если хотя бы одна оценка $\Delta_j \leq 0$ ($\Delta_j \geq 0$), но при соответствующей переменной нет ни одного положительного коэффициента, решение задачи прекращаем, так как $L(x) \to \infty$, то есть целевая функция неограниченна в области допустимых решений;

– если найдется $\Delta_j < 0$ ($\Delta_j > 0$), а при соответствующей переменной есть хотя бы один положительный коэффициент, то нужно перейти к другому опорному решению. Причем среди нескольких отрицательных (положительных) оценок выбирают наибольшую по модулю.

Пусть $\Delta_k < 0$ ($\Delta_k > 0$), k-ый столбец принимаем за разрешающий. За разрешающую строку принимаем ту, которой соответствует минимальное отношение свободных членов к положительным коэффициентам k-ого столбца. Элемент, находящийся на пересечении разрешающих строки и столбца называется разрешающим элементом.

3. Заполняем симплексную таблицу 2-ого шага:

- заполняем базисный столбец;
- в столбцах, соответствующих базисным переменным, проставляем нули и единицы: 1 – против «своей» базисной переменной, 0 – против «чужой» базисной переменной, 0 – в индексной строке для всех базисных переменных;
- переписываем разрешающую строку, разделив на разрешающий элемент;
- все остальные элементы вычисляем по правилу «прямоугольника»:

пусть h_{ij} – разрешающий элемент 1-го шага

$$\begin{array}{ccc} \boxed{h_{ij}} & \text{- - - -} & h_{i+s,j} \\ \vdots & & \vdots \\ h_{i,j+k} & \text{- - - -} & h_{i+s,j+k} \end{array}$$

, тогда

Рис.5 Правило «прямоугольника»

Оценки можно считать по приведенным выше формулам или по правилу «прямоугольника». Получаем новое опорное решение, которое проверяем на оптимальность.

Метод искусственного базиса

Метод искусственного базиса или М- метод заключается в следующем: в каждое уравнение, где знак базисной переменной и свободного члена не совпадает, вводим свою новую неотрицательную искусственную переменную y_1, y_2…, y_k, которая имеет тот же знак, что и свободный член. В первой таблице в число базисных включаем все искусственные переменные и оставшиеся базисные.

Составляем новую линейную функцию (М-функцию: $M_ф = M(y_1 + y_2 + y_k)$, где М – большое положительное число) и находим ее минимум. Если он равен нулю и все искусственные переменные обращаются в нуль, то далее можно отбросить эти переменные и решать исходную задачу.

Если хотя бы одна из искусственных переменных отлична от нуля, то исходная задача неразрешима.

В симплекс-таблицу заносят и М-функцию и целевую функцию L(x).

			0	0	…	0	…	0	…	0	M	M	…	M	$M_ф(y)$
			c_1	c_2	…	c_s	…	c_m	…	c_n	0	0	…	0	L(x)
c_iM	c_iL	БП	x_1	x_2	…	x_s	…	x_m	…	x_n	y_1	y_2	…	y_k	b_i
0	c_1	x_1	1	0	…	0	…	h_{1m}	…	h_{1n}	0	0	…	0	g_1
0	c_2	x_2	0	1	…	0	…	h_{2m}	…	h_{2n}	0	0	…	0	g_2

…	…	…	…………………………………………	…
0	c_s	x_s	0 0 … 1 … h_{sm} … h_{sn} 0 0 … 0	g_s
M	0	y_1	0 0 … 0 … h_{s+1m} …h_{s+1n} 1 0 … 0	g_{s+1}
M	0	y_2	0 0 … 0 … h_{s+2m} …h_{s+2n} 0 1 … 0	g_{s+2}
…	…	…	…………………………………………	…
M	0	y_k	0 0 … 0 … h_{s+km} …h_{s+kn} 0 0 … 1	g_{s+k}
		$\Delta_j L$	0 0 … 0 … $\Delta_m L$ …$\Delta_n L$ 0 0 … 0	$L(\bar{x})$
		$\Delta_j M$	0 0 … 0 … $\Delta_m M$ …$\Delta_n M$ 0 0 … 0	$M_{\phi}(\bar{y})$

Метод фиктивной функции

1. Вводят фиктивную целевую функцию φ(x) и отводят ей дополнительную строку в симплекс - таблице.

2. Элементами строки для φ(x) являются суммы соответствующих элементов строк, где знаки базисных переменных и свободных членов не совпадают.

3. Максимизируют фиктивную целевую функцию φ(x), используя симплексный метод.

– Если max φ(x)=0 и все коэффициенты в строке для φ(x) равны нулю, то полученное при этом базисное решение является опорным, исключаем строку для φ(x) и решаем исходную задачу, проверяя полученное решение на оптимальность.

– Если max φ(x)=0, а среди элементов строки для φ(x) есть ненулевые, то соответствующие этим элементам переменные тождественно равны нулю, исключаем строку для φ(x) и столбцы соответствующие ненулевым элементам.

– Если max φ(x)≠0, то система ограничений противоречива и исходная задача не имеет решения.

Рассмотрим сначала метод решения, который не использует симплекс таблицы, но может быть применен в тех же условиях.

Пример 1.

$F(x) = x_1 + 4x_2 \to \max$

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \le 12 \\ x_1 + 2x_2 \le 6 \\ x_1 \le 3{,}5 \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0 \end{cases}$$

Решение. Преобразуем систему неравенств в систему уравнений

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 3_3 = 12 \\ x_1 + 2x_2 + x_4 = 6 \\ x_1 + x_5 = 3{,}5 \end{cases}$$

$F(x) = x_1 + 4x_2 \to \max$

Этап 1. Опорный план.

$x_1 = x_2 = 0.\quad F(x) = 0\qquad x_3 = 12\qquad x_4 = 6\qquad x_5 = 3{,}5$

$$\begin{cases} x_3 = 12 - 3x_1 + 2x_2 \\ x_4 = 6 - x_1 - 2x_2 \\ x_5 = 3{,}5 - x_1 \end{cases}$$

$F(x) = x_1 + 4x_2 \to \max$

Чтобы скорее увеличить целевую функцию целесообразно увеличить переменную x_2.

Учитывая то, что x_1 остается равной 0 мы можем увеличить x_2 так, чтобы переменная x_3, x_4, x_5 не стали отрицательными. Отсюда логично вытекает условие $x_2 = \min\left\{\frac{12}{2}; \frac{6}{2}; \frac{3{,}5}{0}\right\} = 3$

Этап 2: $x_1 = 0\ \ x_2 = 3\ \ x_3 = 6\ \ x_4 = 0\ \ x_5 = 3{,}5$ преобразуем систему с учетом новых основных и новых неосновных неизвестных.

$$\begin{cases} x_5 = 3{,}5 - x_1 \\ x_2 = 3 - 0{,}5x_1 - 0{,}5x_4 \\ x_3 = 12 - 3x_1 - 2(3 - 0{,}5x_1 - 0{,}5x_4) \end{cases}$$

$F(x) = x_1 + 4(3 - 0{,}5x_1 - 0{,}5x_4)$

$$\begin{cases} x_5 = 3{,}5 - x_1 \\ x_2 = 3 - 0{,}5x_1 - 0{,}5x_4 \\ x_3 = 6 - 2x_1 + x_4 \end{cases}$$

$F(x) = 12 - x_1 - 2x_4$

Оба коэффициента в целевой функции уже отрицательны, значит, увеличение переменных не приведет к увеличению целевой функции.

Оптимальное решение: $x_2 = 3,\ \ x_1 = 0 \quad F_{\max} = 12$

<u>Пример 2.</u> Рассмотрим более объемную задачу

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 + 3x_3 \le 200 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 \le 80 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 \le 140 \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0 \end{cases}$$

$F = 40x_1 + 60x_2 + 80x_3 \to \max$

<u>Решение.</u> Перейдем к системе уравнений

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 + 3x_3 + x_4 = 200 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + x_5 = 80 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + x_6 = 140 \\ x_i \ge 0 \end{cases}$$

$F = 40x_i + 60x_2 + 80x_3 \to \max$

Этап 1. Опорный план $x_1 = x_2 = x_3 = 0$. $x_4 = 200 \quad x_5 = 80 \quad x_6 = 140. \qquad F = 0$.

$$\begin{cases} x_4 = 200 - x_1 - 4x_2 - 3x_3 \\ x_5 = 80 - x_1 - x_2 - 2x_3 \\ x_6 = 140 - x_1 - x_2 - 2x_3 \\ x_i \ge 0 \end{cases} \qquad F = 40x_1 + 60x_2 + 80x_3 \to \max$$

Проанализировав целевую функцию, видим, что следует увеличивать переменную x_3, т.к. у нее самый большой коэффициент. Исходя из ограничений, имеем $x_3 = \min\left\{\frac{200}{3};\ \frac{80}{2};\ \frac{140}{2}\right\} = 40$

Этап 2.

$$\begin{cases} x_3 = 0{,}5(80 - x_1 - x_2 - x_5) \\ x_4 = 200 - x_1 - 4x_2 - 120 + 1{,}5x_1 + 1{,}5x_2 + 1{,}5x_5 \\ x_6 = 140 - x_1 - x_2 - 80 + x_1 + x_2 + x_5 \\ x_i \geq 0 \end{cases}$$

$$F = 40x_1 + 60x_2 + 3200 - 40x_1 - 40x_2 - 40x_5$$

после преобразований:

$$\begin{cases} x_3 = 40 - 0{,}5x_1 - 0{,}5x_2 - 0{,}5x_5 \\ x_4 = 80 + 0{,}5x_1 - 2{,}5x_2 + 1{,}5x_5 \\ x_6 = 60 + x_5 \\ x_i \geq 0 \end{cases} \qquad F = 3200 + 20x_2 - 40x_5$$

Это второе решение $x_1 = 0 \quad x_2 = 0 \quad x_3 = 40 \quad x_4 = 80 \quad x_6 = 60 \quad F = 3200$.

Видно, что целевую функцию можно еще увеличить, если увеличить переменную $x_2 = \min\left\{\frac{40}{0{,}5};\ \frac{80}{2{,}5};\ \frac{60}{0}\right\} = 32$

Этап 3.

$$\begin{cases} x_2 = 32 + 0{,}2x_1 + 0{,}6x_5 - 0{,}4x_4 \\ x_6 = 60 + x_5 \\ x_3 = 40 - 0{,}5x_1 - 0{,}5x_5 - 0{,}5(32 + 0{,}2x_1 + 0{,}6x_5 - 0{,}4x_4) \\ x_i \geq 0 \end{cases}$$

$$F = 3200 + 20(32 + 0{,}2x_1 + 0{,}6x_5 - 0{,}4x_4) - 40 \cdot x_5$$

Преобразуем систему

$$\begin{cases} x_2 = 32 + 0{,}2x_1 - 0{,}4x_4 + 0{,}6x_5 \\ x_6 = 60 + x_5 \\ x_3 = 24 - 0{,}6x_1 + 0{,}2x_4 - 0{,}8x_5 \\ x_i \geq 0 \end{cases} \qquad F = 3840 + 4x_1 - 8x_4 - 28x_5$$

Это третье решение $x_1 = 0 \quad x_2 = 32 \quad x_3 = 24 \quad x_4 = 0 \quad x_5 = 0 \quad x_6 = 60 \quad F = 3840$

По виду целевой функции понятно, что увеличивать надо переменную

$$x_1 = \min\left\{\frac{24}{0{,}6}\right\} = 40$$

Первое и второе уравнения не рассматриваются, т.к. увеличение переменной x_1 сколько угодно не приведет к уменьшению x_2 и x_6, а значит x_2 и x_6 не станут отрицательными.

Этап 4. $x_1 = \frac{1}{0{,}6}(24 - x_3 + 0{,}2x_4 - 0{,}8x_5)$

Далее подставим в систему.

$$\begin{cases} x_1 = 40 - \frac{5}{3}x_3 + \frac{1}{3}x_4 - \frac{4}{3}x_5 \\ x_5 = 60 + x_5 \\ x_2 = 32 + \frac{0{,}2}{0{,}6}(24 - x_3 + 0{,}2x_4 - 0{,}8x_5) + 0{,}6x_5 - 0{,}6x_5 - 0{,}4x_4 \\ x_i \geq 0 \end{cases}$$

$$F = 3840 + (40 - \frac{5}{3}x_3 + \frac{1}{3}x_4 - \frac{4}{3}x_5) - 8x_4 - 28x_5$$

Итого получим

$$\begin{cases} x_1 = 40 - \frac{5}{3}x_3 + \frac{1}{3}x_4 - \frac{4}{3}x_5 \\ x_6 = 60 + x_5 \\ x_2 = 40 - \frac{1}{3}x_3 - \frac{1}{3}x_4 + \frac{1}{3}x_5 \\ x_i \geq 0 \end{cases} \qquad F = 4000 - \frac{20}{3}x_3 + \frac{4}{3}x_4 - \frac{16}{3}x_5 - 8x_4 - 28x_5$$

Даже без преобразования видно, что все коэффициенты целевой функции отрицательны. Значит это решение оптимально.

$x_1 = 40 \quad x_2 = 40 \quad x_3 = 0 \quad x_4 = 0 \quad x_5 = 0 \quad x_6 = 60 \quad F = 4000$.

Алгоритм симплекс-метода легко программируется, поэтому рассмотрим примеры решения задач с использованием симплексных таблиц.

Пример 3.

$$L = 2x_1 - 13x_2 - 6x_3 \to \max \text{ при ограничениях}$$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 \geq 1 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 \leq -1 \end{cases}$$

$$x_i \geq 0, i = \overline{1,3}.$$

Решение. Приведем задачу к каноническому виду:

$$L = 2x_1 - 13x_2 - 6x_3 \to \max \text{ ïðè îãðàíè÷åíèÿõ}$$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 - \tilde{o}_4 = 1 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 + \tilde{o}_5 = -1 \end{cases}$$

$$x_i \geq 0, i = \overline{1,5}.$$

Выделяем базисные переменные:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 3 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} -1 & 1 & -3 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

Знаки базисных переменных x_4 и x_5 и соответствующих свободных членов не совпадают, значит используем М-метод или метод фиктивной функции.

Рассмотрим М–метод. И в первое, и во второе уравнение ограничений вводим искусственные переменные y_1, $y_2 \geq 0$ со знаком минус:

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 - y_1 = -1 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 + x_5 - y_2 = -1 \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 + y_1 = 1 \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 - x_5 + y_2 = 1 \end{cases}$$

Новые базисные переменные y_1 и y_2 имеют тот же знак, что и свободные члены. Составляем М-функцию:

$$M_ф = M(y_1 + y_2) \to \min.$$

Находим для нее опорное решение и проверяем его на оптимальность.

Для чего составляем симплекс-таблицу:

			0	0	0	0	0	M	M	$M_ф$
			2	-13	-6	0	0	0	0	L
c_iM	c_iL	БП	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	y_1	y_2	b_i
M	0	y_1	1	-1	3	-1	0	1	0	1
M	0	y_2	-1	2	-1	0	-1	0	1	1
		Δ_jL	-2	13	6	0	0	0	0	0
		Δ_jM	0	M	2M	-M	-M	0	0	2M

Критерий оптимальности для минимума М-функции: $\Delta_jM \le 0$.

В индексной строке Δ_jM имеются две положительные оценки, значит, решение не является оптимальным и его надо улучшить. В качестве разрешающего столбца выбираем столбец переменной x_3 (так как 2M>M), а за разрешающую строку – строку переменной y_1. Разрешающим элементом является 3.

Составляем симплекс-таблицу 2-го шага:

			0	0	0	0	0	M	M	$M_ф$
			2	-13	-6	0	0	0	0	L
c_iM	c_iL	БП	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	y_1	y_2	b_i
0	-6	x_3	1/3	-1/3	1	-1/3	0	1/3	0	1/3
M	0	y_2	-2/3	5/3	0	-1/3	-1	1/3	1	4/3
		Δ_jL	-4	15	0	2	0	-2	0	-2
		Δ_jM	$-\frac{2}{3}M$	$\frac{5}{3}M$	0	$-\frac{1}{3}M$	-M	$-\frac{2}{3}M$	0	$\frac{4}{3}M$

В индексной строке Δ_jM имеется одна положительная оценка $\frac{5}{3}M$.

Полученное решение можно улучшить. Разрешающим элементом является

.

Составляем симплексную таблицу 3-го шага:

			0	0	0	0	0	M	M	$M_ф$
			2	-13	-6	0	0	0	0	L
c_iM	c_iL	БП	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	y_1	y_2	b_i
0	-6	x_3	1/5	0	1	-2/5	-1/5	2/5	1/5	3/5
0	-13	x_2	-2/5	1	0	-1/5	-3/5	1/5	3/5	4/5
		Δ_jL	2	0	0	5	9	-5	-9	-14
		Δ_jM	0	0	0	0	0	-M	-M	0

В индексной строке Δ_jM все оценки неположительны, следовательно, $M_{min}=0$ при $y_1=0$ и $y_2=0$.

Далее, отбрасываем столбцы для переменных y_1 и y_2 и индексную строку Δ_jM, и решаем исходную задачу:

		2	-13	-6	0	0	L
c_iL	БП	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i
-6	x_3	1/5	0	1	-2/5	-1/5	3/5
-13	x_2	-2/5	1	0	-1/5	-3/5	4/5
	Δ_jL	2	0	0	5	9	-14

Необходимо найти максимум L функции. Критерий оптимальности для максимума: $\Delta_jL \geq 0$ выполняется. Значит, полученное опорное решение является оптимальным:

$$\tilde{O}_{ïïò} = \left(0, \frac{4}{5}, \frac{3}{5}, 0, 0\right) \qquad L_{\max} = -14.$$

Рассмотрим решение данной задачи с использованием фиктивной функции.

$$L = 2x_1 - 13x_2 - 6x_3 \to \max \text{ при ограничениях}$$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 \geq 1 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 \leq -1 \end{cases}$$

$$x_i \geq 0, i = \overline{1,3}.$$

Приведем задачу к каноническому виду:

$$L = 2x_1 - 13x_2 - 6x_3 \to \max \text{ ïðè îãðàíè÷åíèÿõ}$$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 = 1 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 + x_5 = -1 \end{cases}$$

$$x_i \geq 0, i = \overline{1,5}.$$

Выделяем базисные переменные:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 3 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} -1 & 1 & -3 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

Знаки базисных переменных x_4 и x_5 и соответствующих свободных членов не совпадают. Составляем симплекс-таблицу в последнюю строку, которой вводим фиктивную функцию φ(x):

		2	-13	-6	0	0	L
c_iL	БП	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i
0	x_4	-1	1	-3	1	0	-1
0	x_5	1	-2	1	0	1	-1
	Δ_jL	-2	13	6	0	0	0
	φ(x)	0	-1	-2	1	1	-2

Критерий оптимальности для максимума фиктивной функции φ(x): все элементы в строке для φ(x) неотрицательны.

В строке для φ(x) имеются две отрицательные оценки, значит, решение не является оптимальным и его надо улучшить. В качестве разрешающего столбца выбираем столбец переменной x_3 (так как $|-2| > |-1|$), а за разрешающую строку – строку переменной x_4. Разрешающим элементом является -3.

Составляем симплекс-таблицу 2-го шага:

		2	-13	-6	0	0	L
c_iL	БП	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i
-6	x_3	1/3	-1/3	1	-1/3	0	1/3
0	x_5	2/3	-5/3	0	1/3	1	-4/3
	Δ_jL	-4	15	0	2	0	-2
	φ(x)	2/3	-5/3	0	1/3	1	-4/3

В индексной строке φ(x) имеется одна отрицательная оценка $-\frac{5}{3}$. Полученное решение можно улучшить. Разрешающим элементом является $\boxed{-\frac{5}{3}}$.

Составляем симплексную таблицу 3-го шага:

		2	-13	-6	0	0	L
c_iL	БП	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i
-6	x_3	1/5	0	1	-2/5	-1/5	3/5
-13	x_2	-2/5	1	0	-1/5	-3/5	4/5
	Δ_jL	2	0	0	5	9	-14
	φ(x)	0	0	0	0	0	0

Анализируя результаты последней таблицы, замечаем, max φ(x)=0 и все коэффициенты в строке для φ(x) равны нулю, значит полученное при этом базисное решение является опорным. Исключаем строку для φ(x) и решаем исходную задачу, проверяя полученное решение на оптимальность.

		2	-13	-6	0	0	L
c_iL	БП	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i
-6	x_3	1/5	0	1	-2/5	-1/5	3/5
-13	x_2	-2/5	1	0	-1/5	-3/5	4/5
	Δ_jL	2	0	0	5	9	-14

Необходимо найти максимум L функции. Критерий оптимальности для максимума: $\Delta_jL \geq 0$ выполняется. Значит, полученное опорное решение является оптимальным:

$$\tilde{O}_{\text{ïîò}} = \left(0, \frac{4}{5}, \frac{3}{5}, 0, 0\right) \qquad L_{\max} = -14.$$

<u>Пример 4.</u>

$$L(x) = -x_1 - 2x_2 - 3x_3 \to \min \text{ ïðè îãðàíè÷åíèÿõ:}$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 10 \\ 2x_1 + x_3 = 3 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 6 \end{cases}$$

$$x_i \geq 0 \quad i = \overline{1,3}$$

Решение. Задача представлена в каноническом виде. Выделяем базисные переменные:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 & 10 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 6 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} -5 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ -3 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ -3 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Базисные переменные x_2, x_3, x_4 имеют тот же знак, что и свободные члены. Поэтому находим исходное опорное решение и проверяем его на оптимальность.

Составляем симплекс-таблицу:

		-1	-2	-3	0	L
c_iL	БП	x_1	x_2	x_3	x_4	b_i
0	x_4	1	0	0	1	1
-3	x_3	2	0	1	0	3
-2	x_2	-3	1	0	0	0
	Δ_j	1	0	0	0	-9

Критерий оптимальности для минимума $\Delta_j \le 0$ не выполняется.

В индексной строке имеется одна положительная оценка. Выбираем этот столбец в качестве разрешающего. Разрешающей строкой является строка переменной x_4, так как минимум отношений свободных членов к положительным коэффициентам разрешающего столбца: $\min\left\{\frac{1}{1};\frac{3}{2}\right\} = 1$ разрешающий элемент 1. Составляем симплекс-таблицу 2-го шага:

		1	2	3	0	L(x)
c_iL	БП	x_1	x_2	x_3	x_4	b_i
1	x_1	1	0	0	1	1
3	x_3	0	0	1	-2	1
2	x_2	0	1	0	3	3
	Δ_j	0	0	0	-1	-10

Все оценки $\Delta_j \le 0$, следовательно критерий оптимальности для минимума выполнен. Найденное решение оптимально: $\tilde{O}_{\text{îïò}} = (1, 3, 1, 0)$ $L_{\min} = -10.$

4. Реализация симплекс-метода с помощью пакета «Поиск решения».

Симплексный метод решения задач линейного программирования практически реализуем лишь при небольшом количестве переменных и неравенств в математической модели задачи. Данный метод достаточно легко программируется и поэтому при решении задач с большим числом переменных или итераций (симплексных таблиц) целесообразно использовать компьютерные пакеты. Одним из распространенных пакетов, используемых для решения подобных задач является «Поиск решения» MS Excel.

При создании новой или открытии существующей книги Microsoft Excel появится окно активного рабочего листа. Для того чтобы отыскать команду вызова надстройки «Поиск решения», необходимо воспользоваться пунктом меню *Сервис*. При этом возможны следующие ситуации:

1. В меню *Сервис* присутствует команда *Поиск решения* и для ее вызова достаточно щелкнуть указателем мыши по данной команде, чтобы попасть в диалоговое окно надстройки.

2. В меню *Сервис* отсутствует команда *Поиск решения.* В этом случае необходимо в том же меню выполнить команду *Надстройки*. Раскроется одноименное окно со списком доступных надстроек. В этом списке нужно найти элемент *Поиск решения*, поставить рядом с ним «галочку» и щелкнуть по кнопке *ОК*. После этого в меню *Сервис* появится команда *Поиск решения.*

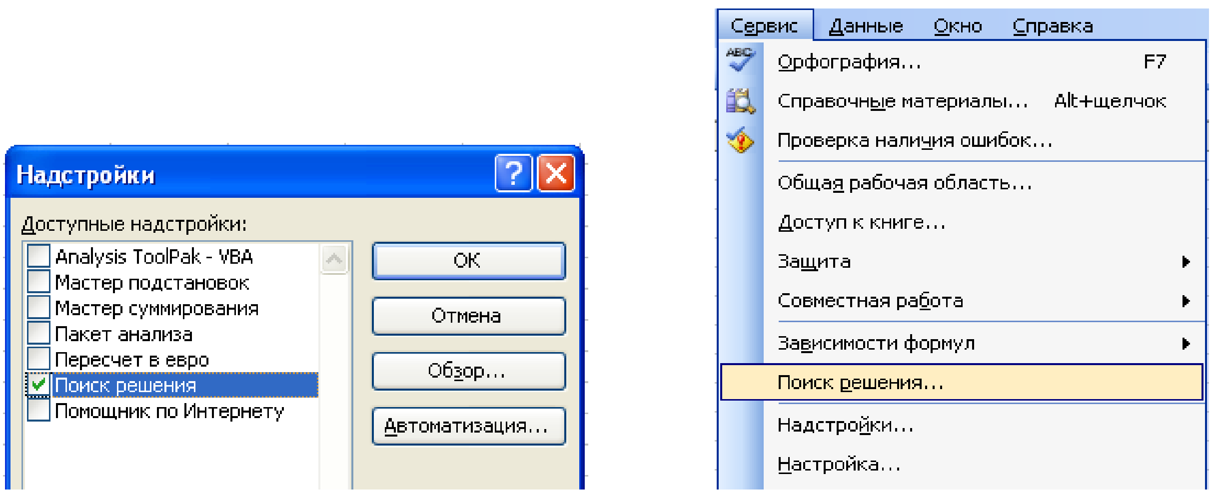


Рис. 6 Надстройка «Поиск решения»

Задачи, для решения которых можно воспользоваться надстройкой *Поиск решения*, имеют ряд общих свойств:

1) Существует единственная целевая ячейка, содержащая формулу, значение которой должно быть сделано максимальным, минимальным или же равным какому-то конкретному значению.

2) Формула в этой целевой ячейке содержит ссылки на ряд изменяемых ячеек.

Поиск решения заключается в том, чтобы подобрать такие значения этих переменных, которые бы давали оптимальное значение для формулы в целевой ячейке.

От пользователя требуется умение с помощью серии диалоговых окон правильно сформулировать условия задачи, и если решение существует, то *Поиск решения* отыщет его. Он позволяет использовать одновременно большое количество изменяемых ячеек, задавать ограничения для изменяемых ячеек.

Диалоговое окно надстройки *Поиск решения* имеет следующий вид:

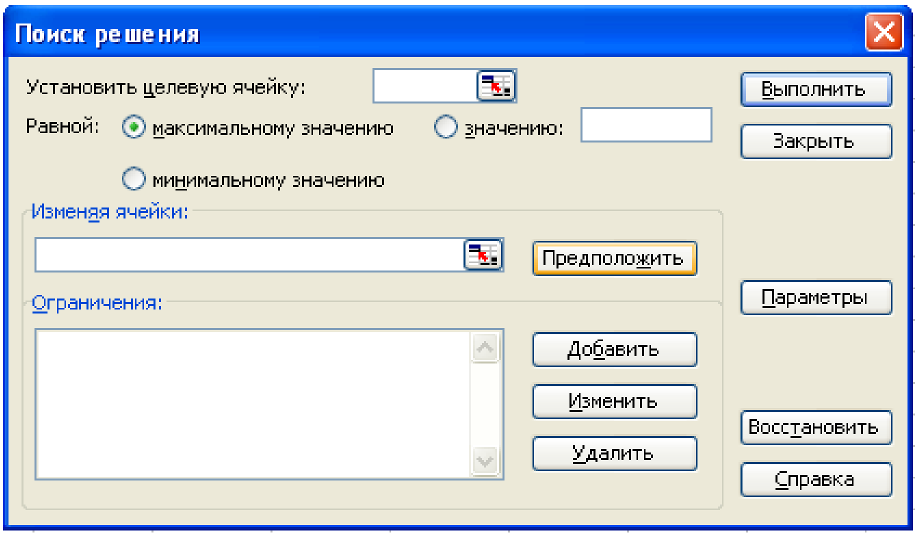


Рис.7 Элементы окна Поиск решения

Рассмотрим применение данного пакета на конкретном примере.

$$F(x) = 9x_1 + 10x_2 + 16x_3 \to \max$$

$$\begin{cases} 18x_1 + 15x_2 12x_3 \le 360 \\ 6x_1 + 4x_2 + 8x_3 \le 192 \\ 5x_1 + 3x_2 + 3x_3 \le 180 \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0$$

Для того чтобы воспользоваться надстройкой «Поиск решения» необходимо ввести исходные данные и формулы в электронную таблицу, например следующим образом:

	A	B	C	D	E	F
1	название	коэффициенты целевой	изменяемые	ограничения		
2	переменной	функции	ячейки	1-ое	2-ое	3-е
3	x1	9	0	=18*C3	=6*C3	=5*C3
4	x2	10	0	=15*C4	=4*C4	=3*C4
5	x3	16	0	=12*C5	=8*C5	=3*C5
6	значение функции	=B3*C3+B4*C4+B5*C5		=СУММ(D3:D5)	=СУММ(E3:E5)	=СУММ(F3:F5)

В меню *Сервис* активизируйте команду *Поиск решения* и опишите его параметры, как указано на рисунке 8.

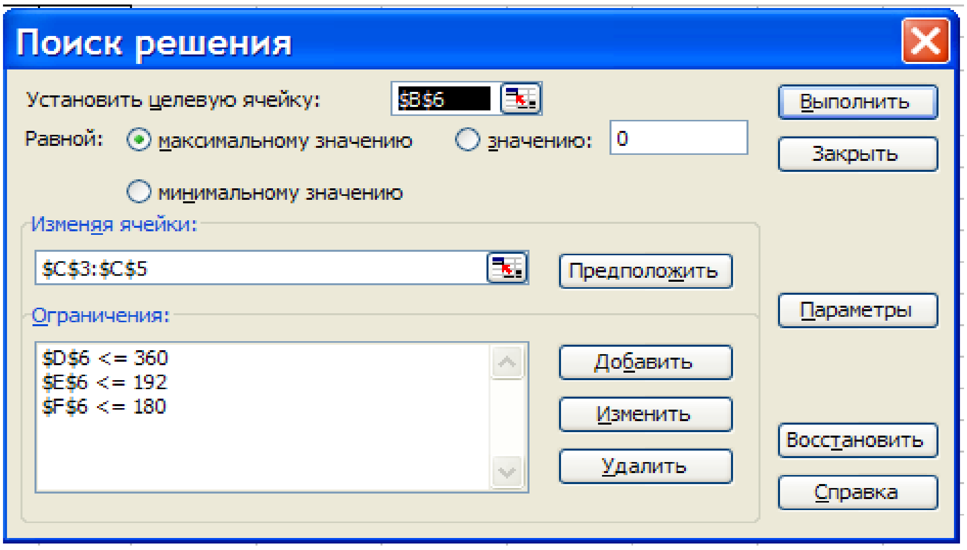


Рис. 8 Диалоговое окно *Поиска решений*

Укажите в пункте *Параметры* на *Линейность модели.*

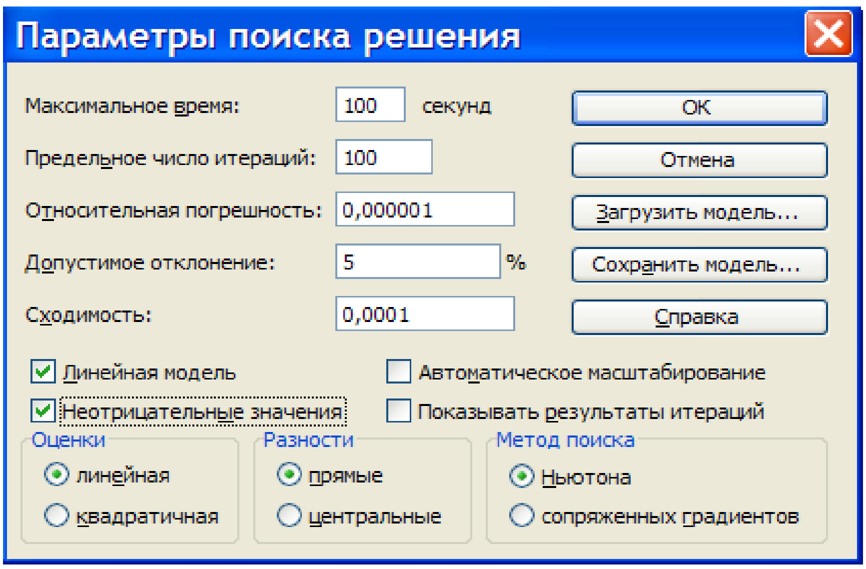


Рис.9 Элементы окна *Параметры*

Нажмите кнопку *Выполнить*. На экране отобразится окно результатов поиска решений. После нажатия кнопки ОК, результаты будут внесены в рабочий лист.

название переменной	коэффициенты целевой функции	изменяемые ячейки	ограничения		
			1-ое	2-ое	3-е
x1	9	**0**	0	0	0
x2	10	**8**	120	32	24
x3	16	**20**	240	160	60
значение функции	**400**		360	192	84

Рис. 10 Результаты *Поиска решений*.

Поиск решения нашел максимальное значение функции F=400, при оптимальных значениях x: $x_1=0$, $x_2=8$, $x_3=20$

5. Задачи для самостоятельной работы

1. Решить графическим методом следующие задачи линейного программирования

1. $Z = 4x_1 + 2x_2 \to \max$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \le 18, \\ -x_1 + 3x_2 \le 9, \\ 2x_1 - x_2 \le 10, \end{cases}$$

$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0.$

2. $Z = 5x_1 + 5x_2 \to \max$

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 \le 2, \\ -x_1 + 3x_2 \ge 9, \\ x_1 + x_2 \ge 3, \end{cases}$$

$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0.$

3. $Z = 2x_1 + 4x_2 \to \max$

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \le 11, \\ -2x_1 + x_2 \le 0, \\ x_1 - 3x_2 \le 0, \end{cases}$$

$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0.$

4. $Z = 3x_1 + 2x_2 \to \max$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 \ge 0 \\ -x_1 + 2x_2 \le 3 \\ x_2 \le 3, \end{cases}$$

$x_1 \ge 0, x_2 \ge$

5. $Z = 5x_1 - 3x_2 \to \min$

$$\begin{cases} 4x_1 - x_2 \ge 0, \\ -x_1 + x_2 \le 3, \\ 2x_1 - 3x_2 \le 6, \end{cases}$$

$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0.$

6. $Z = 4x_1 + 2x_2 \to \min$

$$\begin{cases} -3x_1 + 2x_2 \le 6, \\ x_1 + 2x_2 \ge 10, \\ x_1 - 3x_2 \le 6, \\ x_1 + x_2 \le 3, \end{cases}$$

$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0.$

7. $Z = -3x_1 - x_2 \to \min$

$$\begin{cases} 4x_1 - x_2 \ge 0, \\ 2x_1 - x_2 \le 0, \\ x_1 + x_2 \le 3, \end{cases}$$

$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0.$

8. $Z = 3x_1 - x_2 \to \max$

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \le 6, \\ 2x_1 - 3x_2 \le 6, \\ x_1 \le 6, \\ x_2 \le 6, \end{cases}$$

$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0.$

9. $Z = 4x_1 + 6x_2 \to \max$

$$\begin{cases} 4x_1 - 5x_2 \ge 0, \\ 2x_1 - 3x_2 \le 0, \\ 2x_1 + 3x_2 \ge 6, \\ 2x_1 + x_2 \ge 2, \end{cases}$$

$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0.$

10. $Z = 2x_1 + 4x_2 \to \max$

$$\begin{cases} -3x_1 + 2x_2 \le 6, \\ x_1 + 2x_2 \ge 10, \\ x_1 - 5x_2 \le 5, \\ x_1 + x_2 \le 4, \end{cases}$$

$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0.$

11. $Z = 5x_1 - x_2 \to \max$

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 \le 0, \\ 5x_1 + 9x_2 \le 45, \\ x_1 - 2x_2 \le 4, \end{cases}$$

$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0.$

12. $Z = 3x_1 - x_2 \to \min$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 \le 4, \\ -x_1 + x_2 \le 2, \\ 3x_1 - 2x_2 \ge 0, \\ x_1 - x_2 \le 0, \end{cases}$$

$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0.$

13. $Z = 2x_1 - 4x_2 \to \min$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \ge 9, \\ x_1 + 2x_2 \le 15, \\ x_1 + 2x_2 \ge 9, \\ 2x_1 + x_2 \le 15, \end{cases}$$

$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0.$

14. $Z = x_1 - 3x_2 \to \min$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 12, \\ 2x_1 - x_2 \le 6, \\ -x_1 + x_2 \le 3, \\ 2x_1 + x_2 \le 6, \end{cases}$$

$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0.$

15. $Z = 2x_1 + 3x_2 \to \max$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \ge 2, \\ x_1 + x_2 \ge 2, \\ 2x_1 + x_2 \ge 4, \\ 2x_1 - 3x_2 \le 0, \end{cases}$$

$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0.$

16. $Z = 2x_1 + 3x_2 \to \max$

$$\begin{cases} -4x_1 + x_2 \le 4, \\ x_1 - 2x_2 \le 4, \\ 2x_1 + 3x_2 \le 12, \end{cases}$$

$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0.$

17. $Z = 7x_1 + 6x_2 \to \max$

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 \le 10, \\ 5x_1 + 2x_2 \ge 10, \\ x_1 + x_2 \le 6, \\ x_2 \le 5, \end{cases}$$

$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0.$

18. $Z = -x_1 + 2x_2 \to \max$

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 \le 2, \\ 5x_1 + 2x_2 \ge 10, \\ 3x_1 - x_2 \le 3, \end{cases}$$

$x_1 \ge 0, x \ge 0.$

19. $Z = 4x_1 + 2x_2 \to \max$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \le 18, \\ -x_1 + 3x_2 \le 9, \\ 2x_1 - x_2 \le 10, \end{cases}$$

$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0.$

20. $Z = x_1 + x_2 \to \max$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \le 8, \\ -x_1 + 3x_2 \le 9, \\ 2x_1 - x_2 \le 10, \end{cases}$$

$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0.$

21. $Z = -x_1 + 4x_2 \to \min$

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 \le 6, \\ 3x_1 - 2x_2 \le 6, \\ 2x_1 + 3x_2 \ge 0, \\ x_1 + x_2 \ge -1, \end{cases}$$

$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0.$

22. $Z = x_1 - 2x_2 \to \min$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 \ge -2, \\ -x_1 + 2x_2 \le 7, \\ -4x_1 + 3x_2 \ge -12, \\ x_1 + 3x_2 \ge 18, \end{cases}$$

$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0.$

$$23.\ Z = x_1 - x_2 \to \max$$
$$\begin{cases} -2x_1 + 3x_2 \le 9, \\ x_1 - 2x_2 \le 2, \\ x_1 + x_2 \le 8, \end{cases}$$
$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0.$$

$$24.\ Z = x_1 + 2x_2 \to \min$$
$$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 8, \\ x_1 - x_2 \ge 2, \\ x_1 \quad \ge 3, \end{cases}$$
$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0.$$

2. Решить следующие задачи линейного программирования, представленные в канонической форме, графическим и симплексным методами.

1. $F(x) = 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 + x_4 \to \max$

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 5 \\ x_1 + 4x_2 + 2x_3 + x_4 = 2 \end{cases}$$

$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0, x_3 \ge 0, x_4 \ge 0,$

2. $F(x) = x_1 + x_2 - x_3 + x_4 \to \max$

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = -3 \end{cases}$$

$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0, x_3 \ge 0, x_4 \ge 0,$

3. $F(x) = -4x_1 + 3x_2 + 2x_3 \to \max$

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 2 \\ -x_1 + 2x_3 + x_4 = -4 \end{cases}$$

$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0, x_3 \ge 0, x_4 \ge 0,$

4. $F(x) = 2x_1 + 4x_2 + x_3 - x_4 \to \max$

$$\begin{cases} 3x_1 + 3x_2 - 6x_3 + 3x_4 = 9 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = 1 \end{cases}$$

$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0, x_3 \ge 0, x_4 \ge 0,$

5. $F(x) = 2x_1 + 3x_2 - x_3 - x_4 \to \max$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 8 \\ 3x_1 - 4x_2 + 2x_3 + x_4 = 3 \end{cases}$$

$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0, x_3 \ge 0, x_4 \ge 0,$

6. $F(x) = -2x_1 + x_2 + x_4 \to \max$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - 2x_3 - 3x_4 = -5 \\ 4x_1 + 4x_2 + 2x_3 + x_4 = 2 \end{cases}$$

$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0, x_3 \ge 0, x_4 \ge 0,$

7. $F(x) = 2x_1 - 5x_2 - x_3 + 2x_4 \to \max$

$$\begin{cases} x_1 - 4x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 12 \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 + x_4 = 7 \end{cases}$$

$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0, x_3 \ge 0, x_4 \ge 0,$

8. $F(x) = -2x_1 - 3x_2 + 2x_3 - x_4 \to \max$

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 - x_3 + x_4 = 15 \\ 2x_1 + 4x_2 - x_3 - 3x_4 = 12 \end{cases}$$

$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0, x_3 \ge 0, x_4 \ge 0,$

9. $F(x) = 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 + x_4 - x_5 \to \max$

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 - 4x_5 = 6 \\ x_1 + 4x_2 + 2x_3 + x_4 + x_5 = 2 \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 - x_4 = 12 \end{cases}$$

$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0, x_3 \ge 0, x_4 \ge 0,$

10. $F(x) = x_1 - x_2 - x_3 + x_4 - x_5 \to \max$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 4x_3 - 3x_4 - x_5 = 15 \\ 2x_1 + 4x_2 - 2x_3 + x_5 = 4 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 - x_5 = 12 \end{cases}$$

$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0, x_3 \ge 0, x_4 \ge 0, x_5 \ge 0,$

11. $F(x) = 12x_1 + 10x_2 - 2x_3 - x_4 \to \max$

$$\begin{cases} 6x_1 + 8x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 25 \\ 4x_1 - 4x_2 + x_3 - x_4 = 20 \end{cases}$$

$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0, x_3 \ge 0, x_4 \ge 0,$

12. $F(x) = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \to \max$

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 3 \\ x_1 - 4x_2 - x_3 + 2x_4 = 5 \end{cases}$$

$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0, x_3 \ge 0, x_4 \ge 0,$

13. $F(x) = 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 + x_4 - x_5 \to \min$

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 - 4x_5 = 6 \\ x_1 + 4x_2 + 2x_3 + x_4 + x_5 = 2 \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 - x_4 = 12 \end{cases}$$

$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0,$

14. $F(x) = x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 - x_5 \to \min$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + 3x_4 - 4x_5 = 4 \\ 2x_1 + 4x_2 - 2x_3 + x_4 + x_5 = 3 \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 - x_4 + x_5 = 2 \end{cases}$$

$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0,$

15. $F(x) = 3x_2 - 2x_3 + x_4 - x_5 \to \min$

$$\begin{cases} x_1 + 7x_2 + 2x_3 + 3x_4 - 4x_5 = 15 \\ 2x_1 - 4x_2 + 2x_3 - x_4 + x_5 = 20 \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 - x_5 = 2 \end{cases}$$

$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0,$

16. $F(x) = 4x_1 + 2x_2 + 2x_3 - x_4 - x_5 \to \min$

$$\begin{cases} 4x_1 + x_2 - x_3 + 3x_4 - 4x_5 = 4 \\ x_1 + 4x_2 - 2x_3 + x_4 + x_5 = 3 \\ 2x_1 + 5x_2 + 4x_3 - x_4 + x_5 = 5 \end{cases}$$

$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0,$

17. $F(x) = 5x_1 - 3x_2 + 2x_3 - x_4 + x_5 \to \min$

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 - 4x_5 = 6 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = 14 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 7 \end{cases}$$

$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0,$

18. $F(x) = 5x_1 + 10x_2 - 12x_3 + 5x_4 - 12x_5 \to \min$

$$\begin{cases} 9x_1 - x_2 - x_4 + 4x_5 = 4 \\ 8x_1 + 4x_2 - 2x_3 + 5x_4 + x_5 = 8 \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 - 3x_4 + x_5 = 3 \end{cases}$$

$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0,$

19. $F(x) = 4x_1 + 7x_2 - 3x_3 + 2x_4 - x_5 \to \min$

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 2x_3 - 3x_4 - 4x_5 = 8 \\ 3x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 8x_4 + x_5 = 12 \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 - x_4 + \tilde{o}_5 = 1 \end{cases}$$

$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0,$

20. $F(x) = x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 - x_5 \to \max$

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 - x_3 + 3x_4 - 4x_5 = 5 \\ 2x_1 + 4x_2 - 7x_3 + x_4 + x_5 = 3 \\ 2x_1 + 8x_2 + 4x_3 - x_4 + x_5 = 7 \end{cases}$$

$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0,$

21. $F(x) = x_1 + x_2 - x_3 + x_4 - 2x_5 \to \min$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 - 4x_5 = 16 \\ 5x_1 + 4x_2 + 2x_3 + x_4 + x_5 = 12 \\ x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 6 \end{cases}$$

$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0,$

22. $F(x) = 5x_1 + 5x_2 - 2x_3 + x_4 - 2x_5 \to \min$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 - 4x_5 = 13 \\ x_1 + 4x_2 - 5x_3 + x_4 + x_5 = 13 \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 4x_4 + x_5 = 2 \end{cases}$$

$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0,$

23. $F(x) = x_1 + 4x_2 - 2x_3 + 2x_4 - 5x_5 \to \min$

$$\begin{cases} 14x_1 + 7x_2 - 2x_3 + 3x_4 - 4x_5 = 21 \\ 7x_1 + 4x_2 + 2x_3 + x_4 + x_5 = 14 \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 - x_4 = 7 \end{cases}$$

$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0,$

24. $F(x) = 17x_1 + x_2 - 2x_3 + 7x_4 - x_5 \to \min$

$$\begin{cases} x_1 + 9x_2 - x_3 + 3x_4 - 4x_5 = 5 \\ 6x_1 + 4x_2 - 2x_3 + x_4 + x_5 = 23 \\ x_1 + x_2 + 4x_3 - x_4 + 2x_5 = 8 \end{cases}$$

$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0,$

3. Решить следующие задачи линейного программирования, симплексным методом, проверить полученное решение используя пакет MS Excel «Поиск решения».

1. $F(x) = 2x_1 - 13x_2 - 6x_3 \to \max$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 \ge 1 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 \le -1 \end{cases}$$

$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0, x_3 \ge 0$

2. $F(x) = -6x_1 + 10x_2 + 9x_3 + 8x_4 \to \min$

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 + x_3 \ge 2 \\ x_1 - x_2 - x_4 \le 1 \end{cases}$$

$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0, x_3 \ge 0, x_4 \ge 0$

3. $F(x) = x_1 + 3x_2 + 2x_3 \to \min$

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_3 \ge 5 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 \ge 10 \\ -2x_1 + 3x_2 - x_3 \ge 2 \end{cases}$$

$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0, x_3 \ge 0$

4. $F(x) = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \to \min$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 \ge 6 \\ -x_1 + x_3 \le 2 \\ 2x_2 - 3x_3 + 2x_4 \le 8 \end{cases}$$

$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0, x_3 \ge 0, x_4 \ge 0$

5. $F(x) = 4x_1 + 15x_2 + 12x_3 + 2x_4 \to \min$

$$\begin{cases} 2x_2 + 3x_3 + x_4 \ge 1 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 - x_4 \ge 0 \end{cases}$$

$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0, x_3 \ge 0, x_4 \ge 0$

6. $F(x) = 14x_1 + 10x_2 + 14x_3 + 14x_4 \to \min$

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 \le 35 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 \le 30 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 \le 40 \end{cases}$$

$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0, x_3 \ge 0, x_4 \ge 0$

7. $F(x) = -4x_1 - 18x_2 - 30x_3 - 5x_4 \to \max$

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 - 4x_3 - x_4 \le -3 \\ 2x_1 + 4x_2 + x_3 - x_4 \ge 3 \end{cases}$$

$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0, x_3 \ge 0, x_4 \ge 0$

8. $F(x) = -x_1 + 4x_2 - 2x_3 + 2x_4 \to \max$

$$\begin{cases} 4x_1 + 7x_2 + 2x_3 \le 2 \\ 7x_1 + 4x_2 + 2x_3 + x_4 \ge -1 \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 - x_4 = 7 \end{cases}$$

$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0, x_3 \ge 0, x_4 \ge 0$

9. $F(x) = x_1 - 2x_2 + x_3 + 3x_4 \to \max$

$$\begin{cases} x_1 + 12x_2 + 4x_3 + x_4 = 34 \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 + x_4 = 22 \end{cases}$$

$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0, x_3 \ge 0, x_4 \ge 0$

10. $F(x) = x_1 - 3x_2 - 5x_3 - x_4 \to \max$

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 + 4x_3 + x_4 \le 5 \\ x_1 + 7x_2 + 8x_3 + 2x_4 \ge 9 \end{cases}$$

$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0, x_3 \ge 0, x_4 \ge 0$

11. $F(x) = x_1 + 2x_2 + 3x_3 \to \min$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 \le 10 \\ 2x_1 + x_3 = 3 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 \le 6 \end{cases}$$

$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0, x_3 \ge 0, x_4 \ge 0$

12. $F(x) = -2x_1 - x_2 + x_3 + x_4 \to \max$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 2 \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 = 6 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 7 \end{cases}$$

$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0, x_3 \ge 0, x_4 \ge 0$

13. $F(x) = 3x_1 + x_2 + 2x_3 \to \min$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 + \leq 40 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 \leq 10 \end{cases}$$

$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0, x_3 \geq 0$

14. $F(x) = x_1 + x_2 + x_3 \to \max$

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 - x_3 = 5 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 7 \end{cases}$$

$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0, x_3 \geq 0$

15. $F(x) = x_1 + 2x_2 + 2x_3 \to \min$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \geq 4 \\ x_1 - x_2 + x_3 \geq 2 \end{cases}$$

$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0, x_3 \geq 0$

16. $F(x) = 3x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \to \max$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 4x_3 + 3x_4 \leq 3 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 + 5x_4 \leq 1 \end{cases}$$

$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0$

17. $F(x) = x_1 - 5x_2 - x_3 \to \max$

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 3 \\ 2x_1 + 3x_3 \leq 4 \end{cases}$$

$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0, x_3 \geq 0$

18. $F(x) = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \to \min$

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 \geq 8 \\ x_1 + 6x_2 + 9x_3 + 13x_4 \geq 4 \end{cases}$$

$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0$

19. $F(x) = 3x_1 + 5x_2 + 4x_3 \to \max$

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 \leq 9 \\ 2x_1 + 5x_2 + x_3 \leq 8 \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 \geq 7 \end{cases}$$

$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0, x_3 \geq 0$

20. $F(x) = x_1 + 3x_3 + 3x_4 \to \min$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 4x_3 + x_4 \geq 2 \\ x_1 - x_2 + 3x_4 \geq -1 \end{cases}$$

$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0$

21. $F(x) = 2x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 \to \max$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_4 \leq 4 \\ x_1 - x_2 + x_3 + 3x_4 \leq 1 \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 - x_4 = 7 \end{cases}$$

$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0$

22. $F(x) = -x_1 + x_2 + 6x_3 - x_4 \to \min$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 2 \\ -2x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 = 6 \end{cases}$$

$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0$

23. $F(x) = -3x_2 + x_3 - x_4 \to \max$

$$\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 + x_3 + x_4 \leq 32 \\ -x_1 + 3x_2 + x_3 - x_4 \geq 8 \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 - x_4 \leq 7 \end{cases}$$

$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0$

24. $F(x) = -3x_1 + x_2 + 3x_3 - 4x_4 \to \min$

$$\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 3x_4 \geq 9 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 \geq 0 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 \geq 0 \end{cases}$$

$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0$

Литература

1. Красс М.С., Чупрынов Б.П. Основы математики и ее приложения в экономическом образовании: учебник 6-е изд. М.: Дело АНХ, 2008. – 720 с.

2. Кремер Н.Ш. Исследование операций в экономике. М.: Юнити, 2005.– 407 с.

3. Методы оптимизации: методические указания и варианты заданий для студентов дневного отделения второго курса специальности «Статистика» / сост. С. А. Горбушина. – Хабаровск : РИЦ ХГАЭП, 2006. – 52 с.

4. Шапкин А. С., Мазаева Н. П. Математические методы и модели исследования операций : учебник. – М., 2005. –312 с.

СОДЕРЖАНИЕ

Наталья Николаевна Двоерядкина,

кандидат педагогических наук,

доцент кафедры общей математики и информатики АмГУ;

Анжелика Владимировна Голик,

ассистент кафедры общей математики и информатики АмГУ.

Методы решения задач линейного программирования. Учебно-методическое пособие