Федеральное агентство по образованию РФ
АМУРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
(ГОУВПО «АмГУ»)

УТВЕРЖДАЮ
Зав. каф. МАиМ
_______Т.В. Труфанова
«__»_________2008г.

Учебно-методический комплекс дисциплины

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ

для специальности
010501 – «Прикладная математика и информатика»

Составитель: Масловская А.Г.

2008

Печатается по решению
редакционно-издательского совета
факультета математики и
информатики
Амурского государственного
университета

Масловская А.Г.

Численные методы. Учебно-методический комплекс дисциплины для студентов АмГУ по направлению подготовки дипломированных специалистов по специальности 010501 – «Прикладная математика и информатика» – Благовещенск: Амурский гос. ун-т, 2008 – 98 с.

Учебно-методический комплекс по дисциплине содержит рабочую программу дисциплины, краткий курс лекций, варианты индивидуальных заданий к практическим занятиям, а также контролирующие материалы для осуществления контроля усвоения знаний учащимися.

СОДЕРЖАНИЕ

1	Цели и задачи дисциплины, ее место в учебном процессе	5
1.1	Цели и задачи курса	5
1.2	Требования к уровню содержания дисциплины	5
1.3	Перечень дисциплин с указанием разделов (тем), усвоение которых необходимо при изучении данной дисциплины	6
2	Содержание дисциплины	6
2.1	Федеральный компонент	6
2.2	Наименование тем, их содержание, объем в лекционных часах	6
2.3	Практические занятия, их содержание, и объем в часах	10
2.4	Самостоятельная работа студентов	11
2.5	Вопросы к зачету	11
2.6	Виды контроля	14
2.7	Требования к знаниям студентов, предъявляемые на экзамене	15
3	Краткий курс лекций	16
	Решение нелинейных уравнений	16
	Решение систем линейных алгебраических уравнений	25
	Решение систем нелинейных уравнений	32
	Интерполирование функций	38
	Обработка экспериментальных данных	42
	Численное дифференцирование и интегрирование	46
	Численные методы решения начальных задач для обыкновенных дифференциальных уравнений	53
	Численные методы решения краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений	61
	Приближенные методы решения краевых задач для дифференциальных уравнений с частными производными	68
4	Учебно-методические материалы по дисциплине	75
4.1	Практикум	75
	Практическая работа №1 «Решение нелинейных уравнений»	76
	Практическая работа №2 «Решение систем линейных алгебраических уравнений»	77
	Практическая работа №3 «Решение систем нелинейных уравнений»	79
	Практическая работа №4 «Интерполирование функций»	81
	Практическая работа №5 «Обработка экспериментальных данных»	83
	Практическая работа №6 «Численное дифференцирование и	84

	интегрирование»	
	Практическая работа №7 «Численные методы решения начальных задач для обыкновенных дифференциальных уравнений»	86
	Практическая работа №8 «Численные методы решения краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений»	88
	Практическая работа №9 «Численные методы решения уравнений в частных производных»	90
4.2	Перечень обязательной литературы	91
4.3	Перечень дополнительной литературы	92
4.4	Перечень методических пособий	93
5	Комплект экзаменационных билетов	93
6	Необходимое техническое и программное обеспечение	98
7	Карта кадровой обеспеченности дисциплины	98

1 ЦЕЛИ И ЗАДАЧИ ДИСЦИПЛИНЫ, ЕЕ МЕСТО В УЧЕБНОМ ПРОЦЕССЕ

1.1 Цели и задачи курса

Методы вычислений занимают важное место в системе прикладного математического образования. Целью преподавания дисциплины является изучение численных методов решения задач алгебры, математического анализа и дифференциальных уравнений, а также освоение методологических подходов разработки численных вычислений и изучение основных методов для решения задач исследовательского и прикладного характера.

Задачи изучения курса составляют следующие вопросы: численные методы построения, решения и исследования различных задач, разработка и выбор оптимального алгоритма решения конкретных задач, обработка и анализ полученных результатов, корректировка способа решения при наличии особенностей задачи, анализ вопроса устойчивости и сходимости метода решения, оценка границ применимости построенной математической модели.

1.2Требования к уровню освоения содержания дисциплины

В результате освоения дисциплины студенты должны иметь четкое представление о видах математических моделей, основанных на численных методах, о способах их построений, методах моделирования, возможностях программной реализации, разрабатывать алгоритм реализации метода решения, анализировать полученные результаты, оценивать погрешность вычислений. В процессе обучения студенты должны приобрести навыки применения численных методов для решения задач, самостоятельно осуществлять выбор методики решения и построения алгоритма той или иной задачи, давать полный анализ результатов решения и оценивать границы применимости выбранного метода.

1.3 Перечень дисциплин с указанием разделов (тем), усвоение которых студентами необходимо при изучении данной дисциплины

Данный курс базируется на ранее изученных дисциплинах: «Математический анализ», «Аналитическая геометрия и линейная алгебра», связан с дисциплинами: «Дифференциальные уравнения», «Уравнения в частных производных».

2 СОДЕРЖАНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ

2.1 Федеральный компонент

Дисциплина «Численные методы» является дисциплиной, входящей в блок дисциплин федерального компонента для специальности 010501 – «Прикладная математика и информатика». Государственный стандарт – ОПД.Ф.09.

Численные методы решения задач математического анализа, алгебры и обыкновенных дифференциальных уравнений, численные методы решения задач математической физики, методы решений сеточных уравнений.

2.2 Наименование тем, их содержание, объем в лекционных часах

ТЕМАТИЧЕСКИЙ ПЛАН ЛЕКЦИОННЫХ ЗАНЯТИЙ

Наименование темы	Кол-во часов
1. Введение.	2
2. Точность вычислительного эксперимента.	6
3. Численные методы решения нелинейных алгебраических уравнений.	6
4. Численные методы линейной алгебры.	8
5. Численное решение систем нелинейных уравнений.	4
6. Аппроксимация функций	6

7.	Численное дифференцирование	4
8.	Численное интегрирование	4
9.	Обработка экспериментальных данных.	4
10.	Приближенное решение начальных задач для обыкновенных дифференциальных уравнений.	6
11.	Краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений	6
12.	Численное решение интегральных уравнений и уравнений с частными производными.	12
	ИТОГО	68

Тема 1. Введение.

Предмет вычислительной математики. Методы вычислительной математики. Численные методы как раздел вычислительной математики. Общие сведения о моделировании. Применение численных методов в математическом моделировании. Классификация математических моделей и основные этапы моделирования.

Тема 2. Точность вычислительного эксперимента.

Правила приближенных вычислений и элементы теории погрешностей. Приближенные числа, абсолютные и относительные погрешности. Арифметические действия над приближенными числами. Виды и источники погрешностей. Устойчивость. Корректность. Сходимость.

Тема 3. Численные методы решения нелинейных алгебраических уравнений.

Метод половинного деления. Метод хорд. Метод Ньютона. Метод простых итераций. Метод релаксаций. Метод Чебышева третьего порядка. Геометрическая интерпретация рассмотренных методов.

Тема 4. Численные методы линейной алгебры.

Численное решение систем линейных алгебраических уравнений. Основные понятия. Прямые и итерационные методы. Метод Гаусса. Схема Гаусса с выбором главного элемента. Метод прогонки для решения систем линейных алгебраических уравнений. Метод выражений. Компактная схема метода Гаусса или схема Халецкого. Применение метода Гаусса к вычислению определителей и к обращению матриц. Метод квадратных корней. Метод LU-разложения. Метод простой итерации. Метод Якоби и метод Зейделя. Вычисление определителей. Задачи на собственные значения. Метод Крылова для нахождения собственных чисел и векторов матриц. Нормы и обусловленность матриц. Теорема о достаточном условии сходимости. Теорема о достаточном условии сходимости методов Якоби и метода Зейделя.

Тема 5. Численное решение систем нелинейных уравнений.

Метод Ньютона. Метод простой итерации. Метод градиентного спуска. Варианты итерационных схем.

Тема 6. Аппроксимация функций.

Постановка задачи аппроксимации функций. Виды аппроксимаций. Использование рядов. Многочлены Чебышева и наилучшие равномерные приближения. Интерполирование функций. Постановка задачи интерполяции. Линейная и квадратичная интерполяции. Интерполяционные сплайны. Полиномиальная интерполяция. Интерполяционные формулы Ньютона для равноотстоящих узлов. Интерполяционный многочлен Лагранжа. Схема Эйткена. Интерполяционные формулы Гаусса, Стирлинга, Бесселя. Обратное интерполирование. Нахождение корней уравнения методом обратного интерполирования. Подбор эмпирических формул. Поиск параметров формул.

Тема 7. Численное дифференцирование.

Аппроксимация производных. Погрешности, возникающие при численном дифференцировании. Выбор оптимального шага. Аппроксимация производных интерполяционными многочленами с постоянным и переменным шагом. Метод неопределенных коэффициентов. Улучшение аппроксимации методом Рунге. Аппроксимация частных производных.

Тема 8. Численное интегрирование.

Квадратурные формулы. Выбор шага интегрирования. Интегрирование с помощью степенных рядов. Интегралы от разрывных функций. Метод Гаусса. Интегралы с бесконечными пределами. Кратные интегралы. Метод повторного интегрирования. Метод Диткина. Метод Монте-Карло. Вычисление интегралов в нерегулярных случаях.

Тема 9. Обработка экспериментальных данных.

Подбор эмпирических формул. Эмпирические формулы. Определение параметров эмпирической зависимости. Метод наименьших квадратов. Локальное сглаживание данных. Нахождение приближающей функции в виде линейной функции и квадратичного трехчлена. Аппроксимация функцией произвольного вида.

Тема 10. Приближенное решение начальных задач для обыкновенных дифференциальных уравнений.

Основные понятия и методы решения. Задача Коши. Одношаговые методы. Метод последовательных приближений. Метод Эйлера. Модификации метода Эйлера. Метод Рунге-Кутта. Многошаговые методы. Метод Адамса. Метод Милна. Аппроксимация, устойчивость, сходимость численного решения задач для дифференциального уравнения.

Тема 11. Краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений.

Постановка задачи. Метод конечных разностей для линейных и нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка. Метод прогонки. Метод Галеркина. Метод коллокации.

Тема 12. Численное решение интегральных уравнений и уравнений с частными производными.

Основные виды линейных интегральных уравнений. Уравнения Вольтера и Фредгольма. Метод последовательных приближений. Метод конечных сумм. Метод коллокации. Метод наименьших квадратов.

Классификация дифференциальных уравнений с частными производными. Начальные и краевые условия. Задача Коши. Смешанная задача. Метод сеток для уравнений эллиптического типа. Метод сеток для уравнений параболического и гиперболического типа.

2.3 Практические занятия, их содержание и объем в часах.

ТЕМАТИЧЕСКИЙ ПЛАН ПРАКТИЧЕСКИХ
И ЛАБОРАТОРНЫХ ЗАНЯТИЙ

Наименование темы	Кол-во часов
1. Теория погрешностей	2
2. Численные методы решения нелинейных алгебраических уравнений	2
3. Численное решение систем линейных уравнений	2
4. Численное решение систем нелинейных уравнений	2
5. Численные методы линейной алгебры	2
6. Интерполирование функций	2

7. Численное дифференцирование	2
8. Численное интегрирование	2
9. Обработка экспериментальных данных	2
10. Приближенное решение задач Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений	4
11. Численные методы решения краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений	4
12. Численное решение уравнений с частными производными	4
13. Численные методы решения интегральных уравнений	4
ИТОГО	18+16=34

2.4 **Самостоятельная работа студентов (51 час.).**

В качестве самостоятельной работы по дисциплине «Численные методы» студентам предлагается изучить дополнительный раздел и рассмотреть вопросы:

Вычисление значений функции. Вычисление значений многочлена. Схема Горнера. Вычисление значений трансцендентных функций с помощью степенных рядов. Применение метода итераций для приближенного вычисления значений функций.

Для промежуточного контроля приобретенных практических и вычислительных навыков предусмотрены индивидуальные задания для типового расчета (по вариантам).

2.5Вопросы к экзамену

1. Математическое моделирование и вычислительный эксперимент. Этапы математического моделирования.
2. Приближенные числа, их абсолютные и относительные погрешности. Верные знаки числа.

3. Погрешности вычислений. Арифметические действия над приближенными числами.
4. Устойчивость. Корректность. Сходимость.
5. Численное решение систем линейных алгебраических уравнений. Прямые методы. Метод Гаусса. Схема Гаусса с выбором главного элемента.
6. Численные методы линейной алгебры. Вычисление определителей. LU-разложение матриц.
7. Численное решение систем линейных алгебраических уравнений. Прямые методы. Метод квадратных корней.
8. Численное решение систем линейных алгебраических уравнений. Прямые методы. Метод прогонки.
9. Численное решение систем линейных алгебраических уравнений. Прямые методы. Метод вращения ЛАУ.
10. Обусловленность линейных алгебраических систем.
11. Численное решение систем линейных алгебраических уравнений. Итерационные методы. Метод Якоби.
12. Численное решение систем линейных алгебраических уравнений. Итерационные методы. Метод простой итерации. Метод Зейделя.
13. Аппроксимация функций. Понятие о приближении функции. Точечная аппроксимация и мера отклонения. Использование рядов. Многочлены Чебышева.
14. Интерполирование функций. Полиномиальная интерполяция.
15. Аппроксимация функций. Интерполяционные формулы Ньютона для равноотстоящих узлов.
16. Аппроксимация функций. Интерполяционные сплайны. Построение интерполяционных сплайнов второго и третьего порядков.
17. Аппроксимация функций. Интерполирование функций. Интерполяционный многочлен Лагранжа.
18. Аппроксимация функций. Подбор эмпирических формул. Метод наименьших квадратов. Локальное сглаживание данных.

19. Численное дифференцирование. Аппроксимация производных. Погрешности. Выбор оптимального шага. Использование интерполяционных формул. Частные производные.
20. Численное интегрирование. Квадратурные формулы. Выбор шага интегрирования.
21. Численное интегрирование. Квадратурная формула Гаусса. Метод Канторовича. Интегрирование с помощью рядов.
22. Численные методы решения нелинейных алгебраических уравнений. Метод половинного деления. Метод хорд. Геометрическая интерпретация рассмотренных методов.
23. Численные методы решения нелинейных алгебраических уравнений. Метод Ньютона. Метод простых итераций. Геометрическая интерпретация рассмотренных методов.
24. Численное решение систем нелинейных уравнений. Метод Ньютона. Метод простой итерации.
25. Численные методы решения начальных задач для ОДУ. Постановка задачи. Классификация методов. Метод Пикара.
26. Численные методы решения начальных задач для ОДУ. Метод Эйлера и его модификации.
27. Численные методы решения начальных задач для ОДУ. Семейство методов Рунге-Кутты.
28. Приближенное решение обыкновенных дифференциальных уравнений Многошаговые методы. Метод Адамса. Метод Милна.
29. Численные методы решения краевых задач для ОДУ. Постановка краевой задачи. Классификация методов.
30. Численные методы решения краевых задач для ОДУ. Методы сведения краевой задачи к задаче Коши.
31. Численные методы решения краевых задач для ОДУ. Метод конечных разностей.
32. Численные методы решения краевых задач для ОДУ. Метод коллокации.

33. Численные методы решения краевых задач для ОДУ. Метод Галеркина.
34. Численные методы решения краевых задач для дифференциальных уравнений с частными производными. Классификация. Начальные и краевые условия. Задача Коши. Смешанная задача. ЧМ решения задач эллиптического типа.
35. Численные методы решения краевых задач для дифференциальных уравнений с частными производными. Классификация. Начальные и краевые условия. Задача Коши. ЧМ решения задач параболического типа.
36. Численные методы решения краевых задач для дифференциальных уравнений с частными производными. Классификация. Начальные и краевые условия. Задача Коши. ЧМ решения задач гиперболического типа.
37. Интегральные уравнения. Виды интегральных уравнений. Методы решения. Решение уравнений Фредгольма и уравнения Вольтера второго рода методом конечных сумм.

2.6Виды контроля

Текущий контроль за аудиторной и самостоятельной работой обучаемых осуществляется во время проведения практических занятий посредством устного опроса по контрольным вопросам соответствующего раздела, а также проверки отчетов по индивидуальным заданиям. Промежуточный контроль осуществляется два раза в семестр в виде анализа итоговых отчетов на аттестационные вопросы. Итоговый контроль осуществляется после успешного прохождения студентами текущего и промежуточного контроля в виде экзамена.

2.7 Требования к знаниям студентов, предъявляемые на экзамене

Экзамен сдается в конце второго семестра курса. Форма сдачи экзамена – устная. Необходимым условием допуска на экзамен является сдача всех расчетных работ. В предлагаемый билет входят два вопроса: основной и дополнительный. Студент должен дать развернутый ответ на основной вопрос, и краткий – на дополнительный. Развернутый ответ предполагает полное знание теории по данной части курса, свободную ориентацию в материале, краткий ответ – основных теоретических моментов: понятий и терминологии. При выполнении указанных требований ставится дифференцированная отметка.

3 КРАТКИЙ КУРС ЛЕКЦИЙ
РЕШЕНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

Рассмотрим задачу приближенного нахождения корней уравнения вида:

$$f(x) = 0, \qquad (1)$$

где $f : R_1 \to R_1$ – алгебраическая или трансцендентная функция. Аналитические методы решений скалярных уравнений (1) существуют только в отдельных классах уравнений. В общем случае можно говорить лишь о приближенном вычислении корней уравнения (1), т.е. таких значений аргумента $x = \xi$, при которых равенство $f(\xi) = 0$ истинно. При этом под близостью приближенного значения $\bar{x}$ к корню ξ уравнения (1) понимают выполнение неравенства:

$$|\xi - \bar{x}| < \varepsilon. \qquad (2)$$

При малых $\varepsilon > 0$ часто важно контролировать не абсолютную погрешность, а относительную: $\dfrac{|\xi - \bar{x}|}{|\bar{x}|}$.

Локализация корней

Нелинейная функция $f(x)$ в своей области определения $D(f) \subseteq R_1$ может иметь конечное или бесконечное количество нулей или не иметь их вообще. Большинство же методов нахождения корней требует знания промежутков, где имеется и притом единственный нуль функции. Таким образом, ставится подзадача существования и единственности, нахождения границ и локализации (изоляции, отделения) корней. Для функций общего вида нет универсальных способов решения поставленных подзадач. На практике используют следующие подходы.

1. *Графический способ локализации корней*. Если по геометрической интерпретации функции $f(x)$ можно однозначно представить ситуацию, касающуюся количества и расположения нулей, то локализацию производят, отделяя те промежутки на оси абсцисс, где график функции $y = f(x)$ пересекает ось Ox.

Если построение графика функции $y = f(x)$ вызывает затруднения, но исходное уравнение (1) очевидным образом представляется в виде $f_1(x) = f_2(x)$ и функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$ таковы, что построение их графиков возможно, задача определения корней и областей их единственности решается отслеживанием точек пересечения этих графиков и выделением на оси абсцисс тех промежутков, которым принадлежат проекции данных точек.

Пример 1. Найти промежутки локализации корней уравнения $x^2 - \sin x - 1 = 0$.

Представив уравнение в виде $x^2 - 1 = \sin x$, строим графики функций

2. *Аналитический способ отделения корней.* Убедиться в том, что на данном отрезке $[a, b]$ (определенным, например, «грубым» графическим способом) имеется нуль непрерывной функции $f(x)$ можно, используя теорему Больцано-Коши, наложив дополнительное требование монотонности функции на этом отрезке.

Утверждение 1. Непрерывная строго монотонная функция $f(x)$ имеет и притом единственный нуль на отрезке $[a, b]$ тогда и только тогда, когда на его концах она принимает значения разных знаков.

Реально установить монотонность на данном отрезке можно для дифференцируемой функции, потребовав знакопостоянства ее производной на всем отрезке.

Утверждение 2. Пусть $f \in C^1_{[a,b]}$. Тогда если $f'(x)$ не меняет знак на (a, b), то условие $f(a)f(b) < 0$ является необходимым и достаточным для того, чтобы уравнение (1) имело и притом единственный корень на $[a,b]$.

Пример 2. Локализовать корни уравнения $x^2 e^x = \pi$.

Пусть $f(x) = x^2 e^x - \pi$, тогда $f'(x) = 2xe^x + x^2 e^x = x(x+2)e^x$. $f'(x) = 0$ только при $x = 0$ и $x = -2$. Исследуем знаки значений производной и самой функции:

	$(-\infty, -2)$	-2	$(-2, 0)$	0	$(0,+\infty)$
$f'(x)$	+	0	–	0	+
$f(x)$	–	$\frac{4}{e^2} - \pi$	–	$-\pi$	+

На основании утверждения 2 можно заключить, что данное уравнение имеет единственный корень и этот корень положителен. Установив знаки функции $f(x)$ в дополнительных точках $x = 1$ (минус) и $x = 2$ (плюс), область поиска решения $[0, +\infty]$ сужаем до промежутка конечной длины $[1, 2]$.

В общем случае, если указанные процедуры затруднительны для анализа, всю область определения или какую-нибудь ее часть, вызывающую по тем или иным соображениям интерес, разбивают на отрезки точками x_i, расположенными на условно небольшом расстоянии h одна от другой. Вычислив значения во всех этих точках, проверяют выполнение условия $f(x_{i-1})f(x_i) \le 0$. Если заранее известно число корней в исследуемой области, то, измельчая шаг h поиска, таким процессом можно либо их все локализовать, либо утверждать, что возможно наличие пар корней, не различимых с точностью $h = \varepsilon$.

Методы дихотомии. Метод половинного деления

Пусть функция $f(x)$ определена и непрерывна при всех $x \in [a,b]$ и на $[a,b]$ меняет знак. Согласно утверждению 2 уравнение (1) на (a, b) имеет единственный корень.

Выберем произвольную точку $c \in (a, b)$, $[a,b]$ – промежуток существования корня, c – пробная точка. Вычисление значения $f(c)$ приведет к какой-либо одной из следующих взаимоисключающих ситуаций:

1) $f(a)f(c) < 0$, 2) $f(c)f(b) < 0$, 3) $f(c) = 0$,

которые можно интерпретировать следующим образом:

1) корень находится на интервале (a, c),
2) корень находится на интервале (c, b),
3) точка c – искомый корень.

Таким образом, одно вычисление значения функции позволяет уменьшить промежуток $[a,b]$ существования корня. Описанная процедура сужения промежутка существования нуля непрерывной функции может быть применена к промежутку (a, c) (случай 1) или к промежутку (c, b) (случай 2) и далее повторена циклически. Такой легко программируемый процесс объединяет семейство *методов дихотомии* (деление на две части).

Наиболее употребительным частным случаем метода дихотомии является *метод половинного деления*, реализующий самый простой способ выбора пробной точки – деление промежутка существования корня пополам: $c = \dfrac{a+b}{2}$.

За один шаг метода половинного деления промежуток существования корня сокращается ровно вдвое. Поэтому если за k-е приближение этим методом к корню ξ уравнения (1) примем точку x_k, являющуюся серединой полученного на k-м шаге отрезка $[a_k, b_k]$ в результате последовательного сужения $[a, b]$, то получим:

$$\left|\xi - x_k\right| < \frac{b-a}{2^k}, \ \forall k \in N. \qquad (3)$$

Неравенство (3), являясь априорной оценкой абсолютной погрешности приближенного равенства $x_k \approx \xi$, дает возможность подсчитать число итераций метода половинного деления, достаточное для получения корня с заданной точностью. Для этого достаточно найти наименьшее натуральное k, удовлетворяющее неравенству $\dfrac{b-a}{2^n} \le \varepsilon$.

Рис. 1 иллюстрирует алгоритм нахождение корня методом половинного деления.

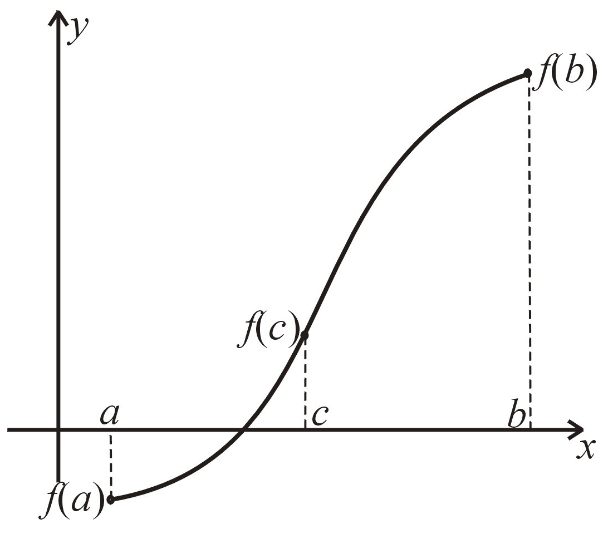


Рис. 1. – Приближение к корню уравнения методом половинного деления.

Метод хорд

В семействе методов дихотомии можно достичь несколько лучших результатов, если отрезок $[a,b]$ делить не пополам, а пропорционально величинам ординат $f(a)$ и $f(b)$ графика данной функции $f(x)$. Это означает, что точку *c* есть смысл находить как абсциссу точки пересечения оси О*x* с прямой, проходящей через точки $A(a,f(a))$ и $B(b,f(b))$ – с хордой *AB* дуги *A*ξ*B*. Из уравнения прямой, проходящей через точки *A* и *B*, находим:

$$c = a - \frac{f(a)(b-a)}{f(b)-f(a)} \tag{4}$$

Метод, получающийся из метода дихотомии таким фиксированием пробной токи, называют *методом хорд* (методом секущих, методом линейной интерполяции).

Рис. 2 иллюстрирует алгоритм нахождение корня методом хорд.

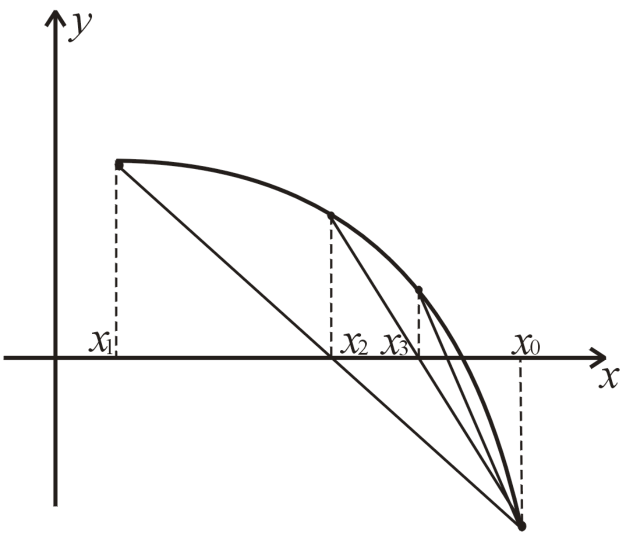


Рис. 2. – Приближение к корню уравнения методом хорд.

Счет обычно ведется до совпадения значений *c* на двух соседних итерациях с точностью ε или с точностью

$\dfrac{m\varepsilon}{M-m}$, если $0 < m \le |f'(x)| \le M, \quad \forall x \in [a,b]$.

Метод Ньютона

Метод Ньютона является одним из популярных итерационных методов решения нелинейных уравнений, что связано с его идейной простотой и быстрой сходимостью.

Пусть функция $f(x)$ дважды дифференцируема на отрезке $[a,b]$, содержащем корень ξ уравнения (1), пусть $x_n \in [a,b]$ – уже известный член последовательности приближений к ξ. Для любого $x \in [a,b]$ можно записать формальное представление $f(x)$ по формуле Тейлора:

$$f(x) = f(x_n) + f'(x_n)(x - x_n) + \frac{1}{2} f''(\theta_n)(x - x_n)^2 + \ldots \tag{5}$$

Так как ξ – корень уравнения (1), то разложение (5) справедливо и для $x = \xi$. Считая, что значение x_n достаточно близко к ξ (разность $(x-\xi)^2$ – достаточно мала), ограничимся двумя членами разложения в правой части выражения (5), при этом будет найдено новое приближение x_{n+1}. Предполагая, что, по крайней мере, на элементах последовательности x_n первая производная данной функции в ноль не обращается, итерационный процесс Ньютона определится в явном виде формулой:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad n = 0,1,2,\ldots \tag{6}$$

В полученном выражении легко усмотреть уравнение касательной к кривой $f(x)$, проведенной в точке $(x_n, f(x_n))$. Отсюда геометрический смысл метода Ньютона: приближения к корню ξ совершаются по абсциссам точек пересечения касательных к графику данной функции, проводимых в точках, соответствующих предыдущим приближениям.

Рис. 3 иллюстрирует алгоритм нахождение корня методом касательных.

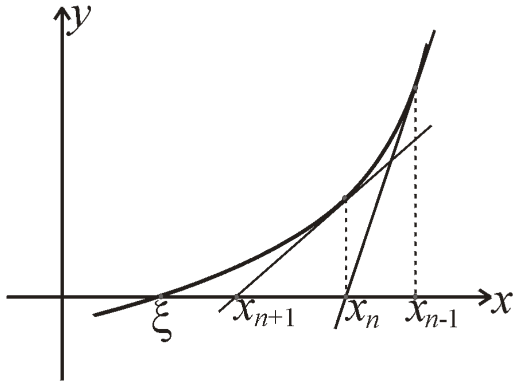


Рис. 3. – Приближение к корню уравнения методом Ньютона.

Для оценки скорости сходимости метода Ньютона можно использовать следующее утверждение.

Утверждение 3. Пусть функция $f(x)$ удовлетворяет условиям

$$\begin{cases} |f'(x)| \ge \alpha > 0, \\ |f''(x)| \le \beta, \end{cases} \quad \forall x \in [a,b].$$

Тогда, если члены последовательности (x_n), определяемые методом Ньютона (6), при любом фиксированном $n \in N_0$ принадлежат отрезку $[a, b]$ и эта последовательность сходится к корню ξ уравнения (1), то справедливы неравенства:

$$|x_{n+1} - \xi| \le \frac{\beta}{2 \cdot \alpha} |x_n - \xi|^2,$$

$$|x_{n+1} - \xi| \le \frac{\beta}{2 \cdot \alpha} |x_{n+1} - x_n|^2.$$

Модификации метода Ньютона

Если заведомо известно число m – показатель кратности корня ξ, то для ускорения сходимости метода Ньютона в формулу (6) рекомендуется ввести корректирующий множитель m:

$$x_{n+1} = x_n - m \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad n = 0,1,2,... \tag{7}$$

Такую модификацию называют *методом Ньютона-Шредера*.

Цель всех последующих видоизменений формулы (6) – сокращение вычислительных затрат, связанных с вычислением производной на каждом шаге.

Использование на каждом шаге одного и того же шагового множителя $\dfrac{1}{f'(x_0)}$ дает модифицированный или *упрощенный метод Ньютона*:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_0)}, \quad n = 0,1,2,... \tag{8}$$

Этот метод имеет очевидную геометрическую интерпретацию: в начальной точке x_0 проводится касательная к графику функции $f(x)$, а во всех последующих точках проводятся прямые, параллельные этой касательной (рис. 4).

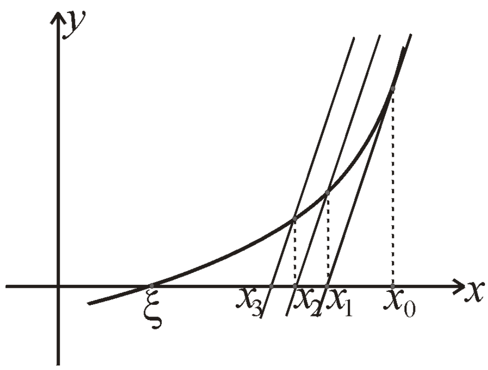


Рис. 4. – Приближение к корню уравнения упрощенным методом Ньютона.

Заменяя производную, вычисленную в точке x_n, ее разностным аналогом получим *разностный метод Ньютона*:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)h_n}{f(x_n + h_n) - f(x_n)}, \quad n = 0,1,2,..., \tag{9}$$

где h_n – конечное приращение аргумента на n-ой итерации.

При выборе $h_n = f(x_n)$ формула (9) преобразуется к виду:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)^2}{f(x_n + f(x_n)) - f(x_n)}, \quad n = 0,1,2,... \tag{10}$$

и называется *методом Стеффенсена*.

Принимая $h_n = x_{n-1} - x_n$ в выражении (9), получим итерационный процесс, который носит название *двушагового метода Ньютона*:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)(x_{n-1} - x_n)}{f(x_{n-1}) - f(x_n)}, \quad n = 1,2,... \tag{11}$$

Метод Чебышева третьего порядка

Пусть производные функции $f(x)$ первого, второго и третьего порядков непрерывны на отрезке $[a,b]$, причем $f'(x) \neq 0$ на $[a,b]$. Пусть начальное приближение $x_0 \in [a,b]$, тогда итерационный процесс *метода Чебышева* осуществляется по формуле:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} - \frac{f''(x_n)}{2\cdot(f} \tag{12}$$

Данный метод обладает скоростью сходимости порядка 3, оценка погрешности имеет вид

$$\left|\bar{x} - x_n\right| \le \left(\alpha \cdot \frac{\beta^3}{3!} \cdot \left|\bar{x} - x_0\right|\right)^{\frac{3^n - 1}{2}},$$

где $\alpha = \max\limits_{x\in[a,b]}\left|F'''(f(x))\right|$, $\beta = \max\limits_{x\in[a,b]}\left|f'(x)\right|$, $F(f(x))$ – функция, обратная $f(x)$ на отрезке $[a,b]$, имеет непрерывные производные первого, второго и третьего порядков.

Численные примеры. Реализация в пакете Matlab

Пример 3. Методом хорд найти корень уравнения $f(x) = x^3 + 8x^2 - 14x - 20 = 0$, расположенного на отрезке $[2,3]$.

РЕШЕНИЕ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Все методы решения систем линейных алгебраических уравнений можно разбить на два класса: прямые и итерационные. *Прямые методы* приводят к решению за конечное число арифметических итераций. Если отсутствуют ошибки округления, то получаемые решения всегда являются точными. *Итерационными методами* решения систем линейных алгебраических уравнений называются методы, дающие решение как предел последовательности приближений, вычисляемых по единообразной схеме.

Пусть дана система n линейных алгебраических уравнений с n неизвестными.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases} \quad (1)$$

или в матрично-векторном виде:

$$AX = B, \quad (1')$$

где B – вектор свободных коэффициентов, A – вещественная матрица $n\times n$ коэффициентов системы (1), X – вектор неизвестных. Эффективность способов решения системы (1) во многом зависит от структуры и свойств матрицы A. Будем считать, что $\det A \neq 0$ и решение системы (1) существует и единственно.

Прямые методы

В силу больших вычислительных затрат весьма привлекательные в теоретическом плане и используемые на практике (при небольшом числе неизвестных n) формулы Крамера и метод обратной матрицы становятся неприемлемыми при их реализации как численных алгоритмов. Наиболее известным способом решения системы (1) является метод Гаусса, суть которого состоит в последовательном исключении неизвестных.

Метод Гаусса с выбором главного элемента

Будем поэтапно преобразовывать систему (1), исключая последовательно сначала x_1 из второго, третьего, …, n-го уравнений, затем x_2 из третьего, четвертого, …, n-го уравнений и т. д. на (n-1)-м этапе *прямого хода метода Гаусса* систему (1) приведем к треугольному виду:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots a_{22}^{(1)}x_2 + \ldots + a_{2n}^{(1)}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots a_{nn}^{(n-1)}x_n = b_n^{(n-1)} \end{cases} \tag{2}$$

Коэффициенты этой системы могут быть получены из коэффициентов системы (1) последовательным пересчетом по формулам:

$$a_{ij}^{(k)} = a_{ij}^{(k-1)} - \frac{a_{ik}^{(k-1)}}{a_{kk}^{(k-1)}} a_{kj}^{(k-1)}, \quad b_i^{(k)} = b_i^{(k-1)} - \frac{a_{ik}^{(k-1)}}{a_{kk}^{(k-1)}} b_k^{(k-1)}, \tag{3}$$

где k – номер этапа, который изменяется от 1 до n-1, индексы i и j – от k+1 до n; кроме того, по определению полагаем $a_{ij}^{(0)} = a_{ij}$, $b_i^{(0)} = b_i$.

Трапециевидная структура системы (2) позволяет последовательно одно за другим вычислять значения неизвестных, начиная с последнего. Этот процесс носит название *обратного хода метода Гаусса* и определяется формулой:

$$x_k = \frac{1}{a_{kk}^{(k-1)}} \left(b_k^{(k-1)} - \sum_{j=k+1}^{n} a_{kj}^{(k-1)} x_j \right), \quad k = n, n-1, \ldots, 2, 1 \tag{4}$$

Учитывая цикличность выполняемых операций, а также нецелесообразность хранения промежуточных результатов, можно записать алгоритм метода Гаусса в упрощенном виде:

1) Для $k = 1,2,..n-1,\ \ i = k+1,...n$ $\ t_{ik} = \dfrac{a_{ik}}{a_{kk}},\ \ b_i = b_i - t_{ik}b_k$; 2) для $j = k+1, \ldots, n$

$a_{ij} = a_{ij} - t_{ik}a_{kj}$ $\ x_n = \dfrac{b_n}{a_{nn}}$; 3) для $k = n-1, \ldots, 2, 1$ $\ x_k = \dfrac{b_k - \sum_{j=k+1}^{n} a_{kj}x_j}{a_{kk}}$.

Подав на вход квадратную матрицу A, вектор свободных членов B и выполнив три вложенных цикла вычислений прямого входа и один цикл обратного, получим вектор-решение X.

Так как реальные машинные вычисления производятся с накоплением ошибки округления, то, анализируя формулы (3), можно заключить, что выполнение алгоритма может прекратиться или привести к неверным результатам, если знаменатели дробей на некотором этапе окажутся равными нулю или очень маленькими числами. Чтобы уменьшить влияние ошибок округления и исключить деление на нуль, на каждом этапе прямого хода уравнения системы обычно представляют так, чтобы деление производилось на наибольший по модулю в данном столбце элемент. Числа, на которые производится деление, называют *ведущими* или *главными элементами*, а сам метод Гаусса – *метод Гаусса с постолбцовым выбором главного элемента*. Устойчивость алгоритма к погрешностям исходных данных и результатов промежуточных вычислений можно еще больше усилить, если выполнять деление на каждом этапе на элемент, наибольший по модулю во всей матрице. Такая модификация метода Гаусса носит название *метода главных элементов*.

Метод прогонки

Часто возникает необходимость в решении линейных алгебраических систем, матрицы которых имеют ленточную структуру – ненулевые элементы располагаются на главной диагонали и на нескольких побочных. Будем искать решение системы вида:

$$b_i x_{i-1} + c_i x_i + d_i x_{i+1} = r_i, \quad i = 1,2,\dots n, \quad b_1 = 0, \quad d_n = 0 \cdot \tag{5}$$

Система (5) имеет трехдиагональную структуру:

$$\begin{vmatrix} c_1 & d_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ b_2 & c_2 & d_2 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_3 & c_3 & d_3 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & b_{n-1} & c_{n-1} & d_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & b_n & c_n \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \dots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \\ \dots \\ r_{n-1} \\ r_n \end{vmatrix} \qquad (6)$$

Предполагая, что существуют такие наборы чисел δ_i, λ_i, при которых

$$x_i = \delta_i x_{i+1} + \lambda_i, \qquad (7)$$

подставляя (7) в (5), получим:

$$x_i = -\frac{d_i}{c_i + b_i\delta_{i-1}} x_{i+1} + \frac{r_i - b_i\lambda_{i-1}}{c_i + b_i\delta_{i-1}}. \qquad (8)$$

Последнее имеет место, если при всех $i = 1,2,\ldots,n$ выполняются рекуррентные соотношения:

$$\delta_i = -\frac{d_i}{c_i + b_i\delta_{i-1}}, \quad \lambda_i = \frac{r_i - b_i\lambda_{i-1}}{c_i + b_i\delta_{i-1}}. \qquad (9)$$

Процесс вычисления в силу условия $b_1 = 0$ может быть начат со значений: $\delta_1 = -\frac{d_1}{c_1}, \ \lambda_1 = \frac{r_1}{c_1}$ и продолжен далее по формулам (9).

При $i = n$ в силу $d_n = 0$ получим $\delta_n = 0$ и

$$x_n = \lambda_n = \frac{r_n - b_n\lambda_{n-1}}{c_n + b_n\delta_{n-1}}, \qquad (10)$$

где $\lambda_{n-1}, \ \delta_{n-1}$ – уже известные с предыдущего шага числа. Далее по формулам (7) последовательно находятся $x_{n-1}, x_{n-2}, \ldots, x_1, \ \ i = n-1, n-2, \ldots, 1$.

Описанное решение уравнений вида (5) носит название *метода прогонки*, который состоит из двух этапов: вычисление *прогоночных коэффициентов* по формулам (9) – *прямая прогонка* и вычисление неизвестных по формулам (10), (7) – *обратная прогонка*.

Для успешного применения метода прогонки требуется, чтобы в процессе вычислений не возникало ситуаций с делением на ноль и накоплением ошибки округления.

Прогонку называют *корректной*, если знаменатель прогоночных коэффициентов (9) не обращается в нуль, и *устойчивой*, если $|\delta_i| < 1, \ \ i \in \{1,2,\ldots,n\}$.

Следующее утверждение устанавливает достаточные условия корректности и устойчивости метода прогонки.

Утверждение 1. Пусть коэффициенты b_i и d_i уравнения (5) при i = 2,3,.., n–1 отличны от нуля и пусть $|c_i| > |b_i| + |d_i| \ \forall \ \ i = 1,2,...,n.$ Тогда метод прогонки является корректным и устойчивым (т.е. $c_i + b_i \delta_{i-1} \neq 0, \ |\delta| < 1$).

Итерационные методы

Во многих практических задачах приходится решать системы линейных алгебраических уравнений, размерность которых достаточно велика. В этом случае наиболее эффективными оказываются итерационные методы решения.

Метод простых итераций

Запишем систему (1) в следующем эквивалентном виде:

$$\begin{cases} x_1 = \alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + \ldots + \alpha_{1n}x_n + b_1, \\ x_2 = \alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2 + \ldots + \alpha_{2n}x_n + b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n = \alpha_{n1}x_1 + \alpha_{n2}x_2 + \ldots + \alpha_{nn}x_n + b_n, \end{cases} \tag{11}$$

или в матрично-векторной форме:

$$X = DX + B. \tag{11′}$$

Итерационный процесс, определяемый рекуррентным равенством $X^{(k)} = DX^{(k-1)} + B$, носит название *метода простых итераций*.

Начиная с некоторого произвольного вектора $X^{(0)}$:

$$X^{(0)} = \begin{pmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \\ \cdots \\ x_n^{(0)} \end{pmatrix},$$

на каждой k-ой итерации соответствующее k-е приближение определяется через значение вектора X на k-1-ой итерации:

$$
\begin{cases}
x_1^{(k)} = \alpha_{11} x_1^{(k-1)} + \alpha_{12} x_2^{(k-1)} + \ldots + \alpha_{1n} x_n^{(k-1)} + b_1, \\
x_2^{(k)} = \alpha_{21} x_1^{(k-1)} + \alpha_{22} x_2^{(k-1)} + \ldots + \alpha_{2n} x_n^{(k-1)} + b_2, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
x_n^{(k)} = \alpha_{n1} x_1^{(k-1)} + \alpha_{n2} x_2^{(k-1)} + \ldots + \alpha_{nn} x_n^{(k-1)} + b_n.
\end{cases} \tag{12}
$$

Итерационная последовательность точек n-мерного пространства

$$x^{(0)},\ x^{(1)},\ \ldots,\ x^{(k)},\ \ldots$$

сходится и ее предел является решением системы (1) при выполнении одного из условий

$$\sum_{j=1}^{n} \left|\alpha_{ij}\right| \le \lambda < 1,\ i = \overline{1,n} \tag{13}$$

или:

$$\sum_{i=1}^{n} \left|\alpha_{ij}\right| \le \gamma < 1,\ j = \overline{1,n}. \tag{14}$$

Оценка погрешности приближенного решения $X^{(k)}$ может быть вычислена с помощью формул

$$\left|X_i - X_i^{(k)}\right| \le \frac{\lambda}{1-\lambda} \max_{j=\overline{1,n}} \left|X_j^{(k)} - X_j^{(k-1)}\right| \tag{15}$$

или:

$$\left|X_i - X_i^{(k)}\right| \le \frac{\gamma}{1-\gamma} \sum_{j=1}^{n} \left|X_j^{(k)} - X_j^{(k-1)}\right|. \tag{16}$$

Для установления момента прекращения итераций при достижении заданной точности ε может быть использована формула

$$\left|X_i^{(k)} - X_i^{(k-1)}\right| \le \varepsilon \cdot \frac{\lambda}{1-\lambda}. \tag{17}$$

Метод Зейделя

Под *методом Зейделя* обычно понимается такая модификация метода простых итераций, при которой на каждом шаге итерационного процесса при вычислении k-го приближения переменной x_i учитываются уже найденные ранее k-е приближения неизвестных $x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}$. Таким образом, вычисления производятся по формулам

$$
\begin{cases}
x_1^{(k)} = \alpha_{11}x_1^{(k-1)} + \alpha_{12}x_2^{(k-1)} + \ldots + \alpha_{1n}x_n^{(k-1)} + b_1, \\
x_2^{(k)} = \alpha_{21}x_1^{(k)} + \alpha_{22}x_2^{(k-1)} + \ldots + \alpha_{2n}x_n^{(k-1)} + b_2, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
x_n^{(k)} = \alpha_{n1}x_1^{(k)} + \alpha_{n2}x_2^{(k)} + \ldots + \alpha_{n,n-1}x_{n-1}^{(k)} + \alpha_{nn}x_n^{(k-1)} + b_n.
\end{cases} \tag{18}
$$

Достаточные условия сходимости (13), (14) также являются достаточными условиями сходимости метода Зейделя.

Существует возможность автоматического преобразования исходной системы к виду, обеспечивающему сходимость итерационного процесса метода Зейделя.

Для этого умножим левую и правую части уравнения (1′) на A^T, получим равносильную систему:

$$
C \cdot X = P, \quad C = A^T \cdot A, \;\; P = A^T \cdot B. \tag{19}
$$

Систему уравнений (19) называется *нормальной* и она обладает свойствами: матрица C – симметрическая; все элементы главной диагонали матрицы C положительны.

Указанные свойства позволяют приводить систему (19) к виду, пригодному для итерационного процесса Зейделя:

$$
x_i = \sum_{i \neq j} \alpha_{i,j} x_j + \beta_j, \;\; i = \overline{1,n}, \;\; \alpha_{ij} = -\frac{c_{ij}}{c_{ii}}, i \neq j, \;\; \beta_i = \frac{d_i}{c_{ii}}, \; i = \overline{1,n}. \tag{20}
$$

Численные примеры. Реализация в пакете Matlab

Пример 1. Методом простой итерации найти решение системы уравнений

$$
\begin{cases}
x_1 = 0.12x_1 - 0.23x_2 + 0.25x_3 - 0.16x_4 + 1.24, \\
x_2 = 0.14x_1 + 0.34x_2 - 0.18x_3 + 0.24x_4 - 0.89, \\
x_3 = 0.13x_1 + 0.03x_2 + 0.46x_3 - 0.32x_4 + 1.15, \\
x_4 = 0.12x_1 - 0.05x_2 + 0.15x_4 - 0.57
\end{cases} \quad \text{с точность } \varepsilon = 10^{-3} \tag{21}
$$

Для решения систем линейных уравнений средствами пакета Matlab применяются операторы возведения в степень и умножения, действие которых определяется правилами линейной алгебры.

Пример 2. Используя встроенные функции пакета Matlab, найдите решение системы линейных уравнений (21).

РЕШЕНИЕ СИСТЕМ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

Многие прикладные задачи сводятся к решению систем алгебраических или трансцендентных уравнений, которые в общем случае являются нелинейными.

Пусть требуется решить систему уравнений

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0, \\ f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ f_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0, \end{cases} \tag{1}$$

где f_1, f_2, …, f_n – заданные нелинейные вещественнозначные функции n вещественных переменных $x_1,\ x_2, \ldots, x_n$.

Введем n – мерные векторы

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix},\ F(X) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ \ldots \\ f_n(x) \end{pmatrix},\ 0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \ldots \\ 0 \end{pmatrix}$$

и систему (1) запишем в матрично-векторном виде:

$$F(X) = 0 \tag{1'}$$

Исходную задачу (1′) можно рассматривать как задачу о нулях нелинейного отображения $F: R_n \to R_n$.

Метод простых итераций. Метод покоординатных итераций

Пусть система (1) преобразована к виду:

$$\begin{cases} x_1 = \varphi_1(x_1, x_2, \ldots, x_n), \\ x_2 = \varphi_2(x_1, x_2, \ldots, x_n), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n = \varphi_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) \end{cases} \tag{2}$$

или:

$$X = \Phi(X) \tag{2'}$$

Рекуррентное равенство:

$$X^{(k+1)} = \Phi(X^{(k)}), \quad k = 0,1,2,..., \tag{3}$$

определяет *метод простых итераций* для задачи (1) – (1′).

Если начать построение последовательности $X^{(k)}$ с некоторого вектора $X^{(0)}$ и продолжать по формуле (3), то при определенных условиях эта последовательность будет приближаться к вектору X^* – неподвижной точке отображения Ф(X): $R_n \to R_n$. Условия сходимости метода определяет следующее утверждение.

Утверждение 1. Пусть функция Ф(X) и замкнутое множество $M \subseteq D(\Phi) \subseteq R_n$ таковы, что: 1) $\Phi(X) \in M \quad \forall X \in M$; 2) $\exists \quad q < 1: \ \|\Phi(X) - \Phi(\bar{X})\| \le q\|X - \bar{X}\| \quad \forall \quad X, \bar{X} \in M$. Тогда Ф($X$) имеет в M единственную неподвижную точку X^*, последовательность $X^{(k)}$, определяемая методом простых итераций (3), при любом $X^{(0)} \in M$ сходится к X^* и справедливы оценки:

$$\|X^* - X^{(k)}\| \le \frac{q}{1-q}\|X^{(k)} - X^{(k-1)}\| \le \frac{q^k}{1-q}\|X^{(1)} - X^{(0)}\| \quad \forall \quad k \in N.$$

При решении систем нелинейных уравнений, также как и в случае решения систем линейных алгебраических уравнений, может оказаться полезной модификация – аналог метода Зейделя. Можно реализовать так называемый *метод покоординатных итераций*:

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \varphi_1\left(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \ldots, x_{n-1}^{(k)}, x_n^{(k)}\right), \\ x_2^{(k+1)} = \varphi_2\left(x_1^{(k+1)}, x_2^{(k)}, \ldots, x_{n-1}^{(k)}, x_n^{(k)}\right), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n^{(k+1)} = \varphi_n\left(x_1^{(k+1)}, x_2^{(k+1)}, \ldots, x_{n-1}^{(k+1)}, x_n^{(k)}\right) \end{cases} \qquad (4)$$

Метод Ньютона и его модификации

Для нахождения приближенных решений системы уравнений (1) можно формально записать итерационный процесс:

$$X^{(k+1)} = X^{(k)} - A_k F(X^{(k)}), \quad k = 0,1,2,\ldots, \qquad (5)$$

определяющий большое семейство методов с матричными параметрами A_k. Положим $A_k = \left[F'(X^{(k)})\right]^{-1}$, где

$$F'(X) = J(X) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{pmatrix} \qquad (6)$$

– матрица Якоби вектор-функции $F(X)$.

Подставляя (6) в (5), получим явную формулу метода Ньютона:

$$X^{(k+1)} = X^{(k)} - J(X^{(k)})F(X^{(k)}), \quad k = 0,1,2,\ldots \qquad (7)$$

Перепишем формулу (7) в явном виде:

$$F'(X^{(k)})(X^{(k+1)} - X^{(k)}) = -F(X^{(k)}), \quad k = 0,1,2,\ldots \qquad (8)$$

Сравнивая (8) с формальным разложением $F(X)$ в ряд Тейлора:

$$F(X) = F(X^{(k)}) + F'(X^{(k)})(X - X^{(k)}) + \frac{1}{2!}F''(X^{(k)})(X - X^{(k)})^2 + \ldots, \qquad (9)$$

можно заключить, что последовательность $X^{(k)}$ в методе Ньютона получается пошаговой линеаризацией соответствующих нелинейных уравнений системы (1). При достаточной гладкости $F(X)$ и достаточно хорошем начальном приближении $X^{(0)}$ сходимость порождаемой методом Ньютона последовательности $X^{(k)}$ к решению X^* будет квадратичной и в многомерном случае.

Необходимость решения n-линейных задач, а также обращение матрицы производных на каждом шаге проводит к росту вычислительных затрат. Пути уменьшения таких затрат приводят к различным модификациям метода Ньютона.

Если матрицу Якоби вычислить и обратить всего один раз – в начальной точке $X^{(0)}$, получим *модифицированный метод Ньютона*:

$$X^{(k+1)} = X^{(k)} - J(X^{(k)})F(X^{(k)}), \quad k = 0,1,2,... \tag{10}$$

Этот метод требует значительно меньше вычислительных затрат на один итерационный шаг, но итераций при этом может потребоваться значительно больше для достижения заданной точности, метод имеет скорость сходимости геометрической прогрессии.

Вычисление и обращение матриц Якоби не на каждом шаге, а через несколько шагов приводят к *рекурсивному двушаговому* ступенчатому *процессу*:

$$\begin{cases} Z^{(k)} = X^{(k)} - A_k F\left(X^{(k)}\right), \\ X^{(k+1)} = Z^{(k)} - A_k F\left(Z^{(k)}\right) \end{cases}. \tag{11}$$

На базе метода Ньютона можно построить близкий к нему по поведению итерационный процесс, не требующий вычисления производных. Заменим частные производные в матрице Якоби разностными отношениями, подставив в формулу (5) матрицу $J(X^{(k)}, h^{(k)})^{-1}$, где

$$J(X,h) = \left(\frac{f_i(x_1,...,x_j + h_j,...,x_n) - f_i(x_1,...,x_j,...,x_n)}{h_j} \right)_{i,j=1}^{n}.$$

При удачном задании последовательности малых векторов $h^{(k)} = (h_1^{(k)}, h_2^{(k)}, .., h_n^{(k)})$ получим *разностный метод Ньютона*:

$$X^{(k+1)} = X^{(k)} - \left[J(X^{(k)}, h^{(k)})\right]^{-1} F(X^{(k)}), \qquad (12)$$

имеющий сверхлинейную скорость сходимости.

Метод Брауна

В отличие от пошаговой линеаризации векторной функции $F(X)$, приведшей к методу Ньютона (5), *метод Брауна* предполагает проведение на каждом итерационном шаге поочередной линеаризации компонент вектор-функции $F(X)$. Приведем расчетные формулы метода Брауна в двумерном случае. Пусть требуется найти решение системы уравнений:

$$\begin{cases} f(x,y) = 0, \\ g(x,y) = 0 \end{cases} \qquad (13)$$

и пусть уже получены приближения x_k, y_k. Итерационный процесс метода Брауна определяется соотношениями:

$$\hat{x}_k = x_k - \frac{f(x_k, y_k)}{f'_x(x_k, y_k)}, \quad q_k = \frac{g(\hat{x}_k, y_k) \cdot f'_x(x_k, y_k)}{f'_x(x_k, y_k) \cdot g'_y(\hat{x}_k, y_k) - f'_y(x_k, y_k) \cdot g'_x(\hat{x}_k, y_k)}$$
$$p_k = \frac{f(x_k, y_k) - q_k \cdot f'_y(x_k, y_k)}{f'_x(x_k, y_k)}, \quad x_{k+1} = x_k - p_k, \quad y_{k+1} = y_k - q_k \qquad .(14)$$

Метод скорейшего спуска

Локальных характер сходимости всех рассмотренных выше методов затрудняет их применение в случаях, когда имеются проблемы с выбором хороших начальных приближений. В этом случае на помощь могут прийти численные методы оптимизации.

В этом методе решение системы (1) сводится к задаче отыскания минимумов функции

$$\Phi(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} f_i^2(x_1, x_2, \ldots, x_n). \qquad (15)$$

Так как функция (15) неотрицательная, то найдется точка

$x^*: \left(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*\right)$ такая, что

$$\Phi\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right) \geq \Phi\left(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*\right) \geq 0, \quad \left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right) \in R^n.$$

Следовательно, если удается найти точку x^*, минимизирующую функцию (15), и если при этом $\min\limits_{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in R^n} \Phi\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right) = \Phi\left(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*\right) = 0,$ то точка x^* – истинное решение системы (1). Последовательность точек $x^{(k)}$ – приближений к точке x^* вычисляется по формуле $x^{(k+1)} = x^{(k)} - \lambda_k \cdot \Phi_x\left(x^{(k)}\right)$,

где $\Phi_x\left(x^{(k)}\right) = grad\,\Phi\left(x^{(k)}\right) = \left(\dfrac{\partial \Phi\left(x^{(k)}\right)}{\partial x_1}, \dfrac{\partial \Phi\left(x^{(k)}\right)}{\partial x_2}, \cdots, \dfrac{\partial \Phi\left(x^{(k)}\right)}{\partial x_n}\right)$, а λ_k – находится из условия минимума функции:

$$\psi_k\left(\lambda_k\right) = \Phi\left(x^{(k)} - \lambda_k \cdot \Phi_x\left(x^{(k)}\right)\right). \tag{16}$$

Рис. 1 иллюстрирует алгоритм нахождение решения системы уравнений методом наискорейшего спуска.

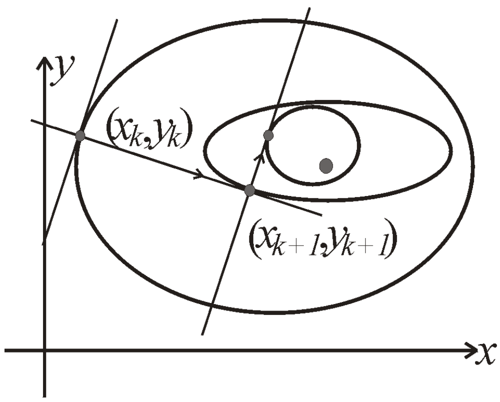


Рис. 1. – Траектория наискорейшего спуска для функции (13).

Главное достоинство градиентных методов решения нелинейных систем – глобальная сходимость. Процесс градиентного спуска приведет к какой-либо точке минимума функции из любой начальной точки. При определенных условиях найденная точка минимума будет искомым решением исходной нелинейной системы уравнений. Однако этот метод обладает и недостатком – медленной сходимостью. Поэтому на практике часто используют построение *гибридных алгоритмов*, которые начинали бы поиск решения искомого решения нелинейной системы глобально сходящимся градиентным методом, а затем производили бы уточнение каким-либо быстросходящимся методом, например, методом Ньютона.

Численные примеры. Реализация в пакете Matlab

Пример 1. Решить систему уравнений методом скорейшего спуска

$$\begin{cases} x^2 \cdot y^2 - 3 \cdot x^2 - 6 \cdot y^3 + 6 = 0, \\ x^4 - 9 \cdot y^2 + 1.5 = 0. \end{cases} \tag{17}$$

Для решения систем нелинейных уравнений средствами пакета Matlab применяется функция **fsolve(),** возвращающая вектор-столбец, компоненты которого являются корнями системы.

Пример 2. Решить систему уравнений (17) с помощью встроенной функции Matlab.

ИНТЕРПОЛИРОВАНИЕ ФУНКЦИЙ

Пусть функция $f(x)$ задана множеством своих значений для дискретного набора точек:

x_0	x_1	…	x_n
f_0	f_1	…	f_n

здесь $f_i = f(x_i)$.

Требуется найти интерполяционный многочлен $P(x) = P_n(x)$ степени не выше *n*, значения которого в узлах интерполяции x_i совпадают со значениями данной функции $P(x_i) = f_i$.

Интерполяционный полином Лагранжа

Для функции $f(x)$, заданной таблицей, построим интерполяционный многочлен $L_n(x)$, степень которого не выше *n*, в следующем виде:

$$L_n(x) = l_0(x) + l_1(x) + \ldots + l_n(x),$$

где $l_i(x)$ – многочлен степени *n*, причем

$$l_i(x_k) = \begin{cases} f_i, \text{если } i = k, \\ 0, \text{если } i \neq k. \end{cases} \tag{1}$$

Многочлены $l_i(x)$ составим следующим образом

$$l_i(x) = c_i(x - x_0)(x - x_1)\cdot\ldots\cdot(x - x_{i-1})(x - x_{i+1})\cdot\ldots\cdot(x - x_n),$$

где c_i – постоянный коэффициент, значение которого находится из первой части условия (1)

$$c_i = \frac{f_i}{(x_i - x_0)(x_i - x_1)\cdot\ldots\cdot(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})\cdot\ldots\cdot(x_i - x_n)}.$$

Тогда *интерполяционный многочлен Лагранжа* имеет вид

$$L_n(x) = \sum_{i=1}^{n} f_i \frac{(x - x_0)(x - x_1)\cdot\ldots\cdot(x - x_{i-1})(x - x_{i+1})\cdot\ldots\cdot(x - x_n)}{(x_i - x_0)(x_i - x_1)\cdot\ldots\cdot(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})\cdot\ldots\cdot(x_i - x_n)}.$$

Интерполяционные формулы Ньютона

Формулы Ньютона предназначены для таблиц с равноотстоящими узлами, т.е. $h = x_{i+1} - x_i$, $i = \overline{1,n}$. Определим разности между значениями функции в узлах интерполяции. Конечная разность первого порядка имеет вид

$$\Delta f_i = f_{i+1} - f_i.$$

Конечная разность второго порядка:

$$\Delta^2 f_i = \Delta f_{i+1} - \Delta f_i = f_{i+2} - 2f_{i+1} + f_i.$$

Конечная разность *n*-го порядка вычисляется по формуле:

$$\Delta^k f_i = f_{i+k} - k \cdot f_{i+k-1} + \frac{k(k-1)}{2!} f_{i+k-2} - \ldots + (-1)^k f_i .$$

Первая интерполяционная формула Ньютона используется для интерполирования и экстраполирования в точках *x*, близких к началу таблицы x_0, и имеет следующий вид:

$$P_n(x) = f_0 + t \cdot \Delta f_0 + \frac{t(t-1)}{2!} \Delta^2 f_0 + \ldots + \frac{t(t-1) \cdot \ldots \cdot (t-n+1)}{n!} \Delta^n f_0 ,$$

где $t = \frac{x - x_0}{h}$, число *n* выбирают так, чтобы конечные разности *n*-го порядка были практически постоянными.

Когда значение аргумент находится ближе к концу отрезка интерполяции x_n, используется *вторая интерполяционная формула Ньютона*:

$$P_n(x) = f_n + q \cdot \Delta f_{n-1} + \frac{q(q+1)}{2!} \Delta^2 f_{n-2} + \ldots + \frac{q(q+1) \cdot \ldots \cdot (q+n-1)}{n!} \Delta^n f_0 ,$$

где $q = \frac{x - x_n}{h}$.

Сплайн-интерполяция

При большом количестве узлов интерполяции приходится использовать полиномы высокой степени. Можно этого избежать, разбив отрезок интерполяции на несколько частей и построив на каждой части свой интерполяционный многочлен. Существенный недостаток такого интерполирования состоит в том, что в точках сшивки разных интерполяционных полиномов их первая производная будет разрывной, поэтому для решения задачи кусочно-линейной интерполяции используют особый вид кусочно-полиномиальной интерполяции – сплайн-интерполяцию.

Сплайн – это функция, которая на каждом частичном отрезке интерполирования является алгебраическим многочленом, а на заданном отрезке непрерывна вместе с несколькими своими производными.

Пусть интерполируемая функция задана таблично. Длина частичного отрезка $[x_{i-1}, x_i]$ – $h_i = x_i - x_{i-1},\ i = \overline{1, n}$.

Найдем кубический сплайн на каждом из отрезков $[x_{i-1}, x_i]$:

$$S(x) = a_i + b_i(x - x_{i-1}) + c_i(x - x_{i-1})^2 + d_i(x - x_{i-1})^3, \qquad (2)$$

где a_i, b_i, c_i, d_i – неизвестные коэффициенты.

Пусть значения $S(x)$ совпадают в узлах с табличными значениями функции $f(x)$

$$\begin{aligned} &S(x_{i-1}) = f_{i-1} = a_i, \\ &S(x_i) = f_i = a_i + b_i h_i + c_i h_i^2 + d_i h_i^3. \end{aligned} \qquad (3)$$

Для получения дополнительных условий потребуем непрерывности первой и второй производных сплайна (2) во всех точках, включая узлы:

$$\begin{aligned} &\frac{dS(x)}{dx} = b_i + 2c_i(x - x_{i-1}) + 3d_i(x - x_{i-1})^2, \\ &\frac{d^2S(x)}{dx^2} = 2c_i + 6d_i(x - x_{i-1}). \end{aligned} \qquad (4)$$

Найдем левые и правые производные (4) во внутреннем узле x_i:

$$\begin{aligned} &\frac{dS(x_i - 0)}{dx} = b_i + 2c_i h_i + 3d_i h_i^2, \quad \frac{dS(x_i + 0)}{dx} = b_{i+1}, \\ &\frac{d^2S(x_i - 0)}{dx^2} = 2c_i + 6d_i h_i, \qquad \frac{d^2S(x_i + 0)}{dx^2} = 2c_{i+1}, \quad i = \overline{1, n-1}. \end{aligned} \qquad (5)$$

Приравнивая найденные производные, получаем $2(n-1)$ условие. Потребуем нулевой кривизны сплайна на концах отрезка интерполирования

$$c_1 = 0, \; c_n + 3d_n h_n = 0. \qquad (6)$$

Решая систему (3), (5), (6), найдем значения неизвестных коэффициентов, определяющих совокупность всех формул для искомого интерполяционного сплайна

$$S_i(x) = f_{i-1} + b_i(x - x_{i-1}) + c_i(x - x_{i-1})^2 + d_i(x - x_{i-1})^3.$$

Численные примеры. Реализация в пакете Matlab

Пример 1. Решить задачу интерполяции с помощью многочлена Лагранжа для функции $f(x) = \sin(x)$, заданной таблично на интервале $[0, 2\pi]$ при $n = 8$.

Пример 2. Решить задачу интерполяции для функции $f(x) = \sin(x)$, заданной таблично на интервале $[0, 2\pi]$ при $n = 8$ средствами пакета Matlab.

Для решения задачи одномерной интерполяции в пакете Matlab используется функция **interp1()**.

Решение задачи с помощью кубических сплайнов можно построить, используя функцию пакета Matlab **spline()**.

ОБРАБОТКА ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ДАННЫХ

Пусть в результате измерений получена таблица некоторой зависимости $f(x)$:

x	x_1	x_2	…	x_n
$F(x)$	y_1	y_2	…	y_n

Требуется найти формулу, выражающую данную зависимость аналитически. Один из подходов состоит в построении интерполяционного многочлена, значения которого в узлах интерполяции x_i совпадают со значениями данной функции $f(x_i) = f_i$.

Если значения функции $f(x)$ известны с некоторой погрешностью, то требование совпадения значений в узлах интерполяции не оправдано, поскольку оно не означает совпадение характеров исходной и интерполирующей функции. Поэтому поставим задачу следующим образом – найти функцию вида

$$y = F(x),$$

которая в точках $x_1, x_2, \dots, x_n$ принимает значения, близкие к табличным значениям $y_1, y_2, \dots, y_n$.

Предположим, что приближающая функция $F(x)$ в точках $x_1, x_2, \dots, x_n$ имеет значения $\bar{y}_1, \bar{y}_2, \dots, \bar{y}_n$. Тогда нужно найти функцию $F(x)$ определенного вида так, чтобы сумма квадратов

$$(y_1 - \bar{y}_1)^2 + (y_2 - \bar{y}_2)^2 + \ldots + (y_n - \bar{y}_n)^2 \tag{1}$$

была наименьшей.

Нахождение приближающей функции в виде линейной

Пусть приближающая функция имеет вид

$$F(x) = ax + b, \tag{2}$$

где a, b – параметры.

Составим сумму вида (1) для этого случая:

$$\Phi(a,b) = \sum_{i=1}^{n} (y_i - ax_i - b)^2 \to \min \qquad (3)$$

Функция $\Phi(a,b)$ является неотрицательной квадратичной, поэтому в некоторой области она имеет единственную точку минимума (a^*, b^*), удовлетворяющую условиям:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial a} = 0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial b} = 0,$$

т.е. системе уравнений:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} (y_i - ax_i - b)x_i = 0, \\ \sum_{i=1}^{n} (y_i - ax_i - b) = 0. \end{cases}$$

Разделив каждое уравнение на n, получаем

$$\begin{cases} \left(\frac{1}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)\cdot a + \left(\frac{1}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\cdot b = \frac{1}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n} x_i y_i, \\ \left(\frac{1}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\cdot a + b = \frac{1}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n} y_i. \end{cases} \qquad (5)$$

Вычислив значения параметров a, b, получаем конкретный вид функции (2).

В зависимости от характера табличных данных, изучаемого с помощью их изображения в соответствующей системе координат, при обработке экспериментальных данных часто используют иные семейства двухпараметрических функций. Существует возможность с помощью подходящего преобразования переменных получить линейную зависимость и использовать метод (5) для следующих семейств функций:

Функция $y = f(x)$	Линеаризованная форма, $Y = ax + b$	Замена переменных и постоянных

$y = \frac{a}{x} + b$	$y = a \cdot \frac{1}{x} + b$	$X = \frac{1}{x},\ Y = y$
$y = \frac{d}{x + c}$	$y = -\frac{1}{c} \cdot xy + \frac{d}{c}$	$X = xy,\ Y = y,$ $c = -\frac{1}{a},\quad d = -\frac{b}{a}$
$y = \frac{1}{ax + b}$	$\frac{1}{y} = ax + b$	$X = x,\ Y = \frac{1}{y}$
$y = \frac{x}{ax + b}$	$\frac{1}{y} = a \cdot \frac{1}{x} + b$	$X = \frac{1}{x},\ Y = \frac{1}{y}$
$y = a \cdot \ln(x) + b$	$y = a \cdot \ln(x) + b$	$X = \ln(x),\ Y = y$
$y = c \cdot e^{ax}$	$\ln(y) = ax + \ln(c)$	$X = x,\ Y = \ln(y),\ c = e^{b}$
$y = c \cdot x^{a}$	$\ln(y) = a \cdot \ln(x) + \ln(c)$	$X = \ln(x),\ Y = \ln(y),$ $c = e^{b}$
$y = \frac{1}{(ax + b)^2}$	$\frac{1}{\sqrt{y}} = ax + b$	$X = x,\ Y = \frac{1}{\sqrt{y}}$
$y = \frac{c \cdot x}{e^{dx}}$	$\ln\left(\frac{y}{x}\right) = -dx + \ln(c)$	$X = x,\ Y = \ln\left(\frac{y}{x}\right),$ $c = e^{b},\ d = -a$
$y = \frac{1}{1 + c \cdot e^{ax}}$	$\ln\left(\frac{1}{y} - 1\right) = ax + \ln(c)$	$X = x,\ Y = \ln\left(\frac{1}{y} - 1\right),$ $c = e^{b}$

Нахождение приближающей функции в виде квадратного трехчлена

Приближающая функция имеет вид:

$$F(x) = ax^2 + bx + c, \tag{6}$$

где $a,\ b,\ c$ – параметры.

Составим сумму вида (1) как функцию $\Phi(a,b)$ для этого случая:

$$\Phi(a,b) = \sum_{i=1}^{n} (y_i - ax_i^2 - bx_i - c)^2 \to \min \tag{7}$$

Функция $\Phi(a,b)$ является неотрицательной квадратичной, поэтому в некоторой области она имеет единственную точку минимума (a^*, b^*), удовлетворяющую условиям:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial a} = 0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial b} = 0,$$

т.е. системе уравнений:

$$\begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{n} \left(y_i - ax_i^2 - bx_i - c\right)x_i^2 = 0, \\ \sum\limits_{i=1}^{n} \left(y_i - ax_i^2 - bx_i - c\right)x_i = 0, \\ \sum\limits_{i=1}^{n} \left(y_i - ax_i^2 - bx_i - c\right) = 0. \end{cases}$$

Разделив каждое уравнение на n, имеем

$$\begin{cases} \left(\frac{1}{n}\cdot\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^4\right)\cdot a + \left(\frac{1}{n}\cdot\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^3\right)\cdot b + \left(\frac{1}{n}\cdot\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2\right)\cdot c = \frac{1}{n}\cdot\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 y_i, \\ \left(\frac{1}{n}\cdot\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^3\right)\cdot a + \left(\frac{1}{n}\cdot\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2\right)\cdot b + \left(\frac{1}{n}\cdot\sum\limits_{i=1}^{n} x_i\right)\cdot c = \frac{1}{n}\cdot\sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i, \\ \left(\frac{1}{n}\cdot\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2\right)\cdot a + \left(\frac{1}{n}\cdot\sum\limits_{i=1}^{n} x_i\right)\cdot b + c = \frac{1}{n}\cdot\sum\limits_{i=1}^{n} y_i. \end{cases}$$

Решив систему относительно неизвестных a, b, c, находим значения параметров приближающей функции (6).

Численные примеры. Реализация в пакете Matlab

Пример 1. Даны табличные значения квадратичной зависимости. Найти коэффициенты квадратичной аппроксимирующей функции (6).

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y	- 0.28	0.42	2.11	4.82	7.75	12.43	12.16	15.41	23.07	31.06	36.68

Пример 2. Используя табличные значения примера 1, найти параметры квадратичной аппроксимирующей функции (6) с помощью встроенной функции Matlab.

Для решения задачи обобщенной нелинейной регрессии в пакете Matlab имеется функция **lsqnonlin()**, возвращающая решение задачи нахождения точки минимума функции:

$$\min_x\left(f(x)\right) = f_1^2(x) + f_2^2(x) + \ldots + f_n^2(x) + L,$$

где $f(x)$ – вектор-функция, x – столбец искомых переменных, L – искомая константа.

ЧИСЛЕННОЕ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ И ИНТЕГРИРОВАНИЕ

Методики дифференцирования и интегрирования имеют важное применение при разработке алгоритмов многих прикладных задач, в т. ч. задач, сводящихся к решениям дифференциальных уравнений и уравнениям в частных производных. К сожалению, аналитические методы не всегда оказываются применимыми. Численные методы дифференцирования приходят на помощь в следующих случаях: аналитический вид функции не задан, возможно сильное усложнение функции при ее аналитическом дифференцировании или требуется получить значения производных с помощью однотипных вычислительных процессов без привлечения аналитических выкладок. Задачи численного интегрирования возникают каждый раз, когда необходимо провести интегрирование функций, для которых в общем случае первообразная среди элементарных функций может и не существовать.

Численное дифференцирование аналитически заданных функций

По определению производная функции $f(x)$ равна:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Переходя от бесконечно малых разностей к конечным, получаем приближенную формулу численного дифференцирования:

$$f'(x) \approx \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}. \quad (1)$$

Используя разложение функции $f(x)$ в ряд Тейлора, можно записать

$$f'(x) \approx f'(x) + \frac{f''(x)}{2!} \Delta x + \ldots \quad (2)$$

Согласно формуле (2), основной член погрешности равен

$\frac{f''(x)}{2!}\Delta x$, т.е. формула (1) имеет первый порядок точности по Δx.

Используя симметричную разностную схему, можно записать следующее:

$$f'(x) \approx \frac{f(x+\Delta x) - f(x-\Delta x)}{2 \cdot \Delta x}. \quad (3)$$

Используя разложение в ряд Тейлора, получаем

$$f'(x) \approx f'(x) + \frac{f'''(x)}{3!}(\Delta x)^2 + \ldots \quad (4)$$

Формула (4) имеет второй порядок точности по Δx.

Численное дифференцирование функций, заданных таблицей

Пусть функция $f(x)$ задана таблично в конечном числе точек отрезка $[a,b]$. Требуется определить значение производной в некоторой точке отрезка $[a,b]$.

Выбрав $(n+1)$ узлов, заменим функцию $f(x)$ интерполяционным многочленом $P_n(x)$. Тогда производная от этого многочлена применяется для приближенного представления производной функции $f(x)$:

$$f'(x) \approx P_n'(x).$$

Как правило, формулы численного дифференцирования применяют для нахождения производных в узлах x_i. Дифференцирование интерполяционных многочленов Ньютона в точке x_0 приводит к формуле:

$$f'(x_0) \approx \frac{1}{h}\left(\Delta f_0 - \frac{1}{2}\Delta^2 f_0 + \frac{1}{3}\Delta^3 f_0 - \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{n}\Delta^n f_0\right), \quad (5)$$

$$f'(x_0) \approx \frac{1}{h}\left(\Delta f_{-1} + \frac{1}{2}\Delta^2 f_{-2} + \frac{1}{3}\Delta^3 f_{-3} - \ldots + \frac{1}{n}\Delta^n f_{-n}\right). \quad (6)$$

Формула (5) применяется для начальных строк таблицы, формула (6) – для последних строк.

Для середины таблицы применяют формулы центрированной разности второго порядка точности по h.

$$f'(x_0) = \frac{f_1 - f_{-1}}{2h}$$
$$f''(x_0) = \frac{f_1 - 2f_0 \ldots}{h^2}$$
$$f'''(x_0) = \frac{f_2 - f_1 \ldots}{2 \ldots}$$

(7)

где $f_k = f(x_0 + kh),\ k = -2, -1, 0, 1, 2.$

Численное интегрирование методом прямоугольников

Геометрический смысл определенного интеграла

$$F = \int_a^b f(x)dx$$

– площадь фигуры, ограниченной графиком функции $f(x)$ и прямыми: $x = a,\ \ x = b$.

Разделим отрезок $[a,b]$ на n равных отрезков длиной Δx:

$$\Delta x = \frac{b-a}{n}.$$

Координата правого конца i-го отрезка определяется по формуле

$$x_i = x_0 + i \cdot \Delta x,$$

где $x_0 = a$, $i = \overline{0,n}$.

Простейшая оценка площади кривой может быть получена как сумма площадей прямоугольников, одна из сторон которого равна длине отрезка $[x_i, x_{i+1}]$, а высота равна значению $f(x_i)$ – *метод левых прямоугольников* (рис. 1), или $f(x_{i+1})$ – *метод правых прямоугольников* (рис. 2).

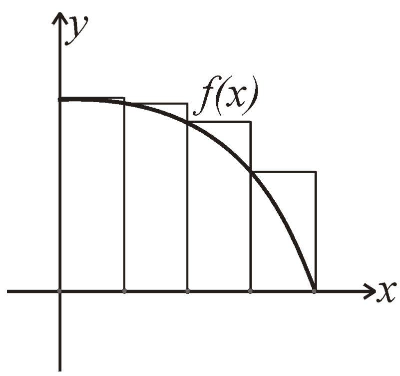


Рис. 1. – Геометрическая интерпретация метода левых прямоугольников.

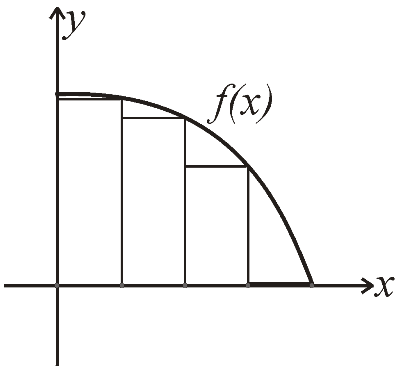


Рис. 2. – Геометрическая интерпретация метода правых прямоугольников.

Тогда для левых прямоугольников определенный интеграл вычисляется по формуле

$$F_L = \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)\cdot \Delta x, \tag{8}$$

а для правых прямоугольников – по формуле

$$F_R = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\cdot \Delta x. \tag{9}$$

Погрешность метода левых и правых прямоугольников пропорциональна n^{-1}.

Численное интегрирование методом трапеций

Заменим функцию на каждом интервале $[x_i, x_{i+1}]$, $i=\overline{0,n-1}$ отрезком прямой, проходящей через точки $(x_i, f(x_i))$ и $(x_{i+1}, f(x_{i+1}))$. Тогда фигура, ограниченная графиком функции и прямыми $x=x_i$, $x=x_{i+1}$, является трапецией.

Тогда определенный интеграл определяется как сумма площадей всех трапеций по формуле:

$$F_n = \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n-1}\left(f(x_{i+1}) + f(x_i)\right)\cdot \Delta x = \left[\frac{1}{2}f(a) + \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + \frac{1}{2}f(b)\right]\cdot \Delta x. \tag{10}$$

Полная погрешность формулы трапеций на отрезке $[a,b]$ по порядку величины равна $O(n^{-2})$.

Численное интегрирование методом Симпсона

Формула получается при использовании параболической интерполяции по трем соседним точкам

$$y = ax^2 + bx + c. \qquad (11)$$

Для нахождения параметров a, b, c полинома, проходящего через три точки (x_0, y_0), (x_1, y_1), (x_2, y_2), решаем систему линейных уравнений

$$\begin{cases} y_0 = ax_0^2 + bx_0 + c, \\ y_1 = ax_1^2 + bx_1 + c, \\ y_2 = ax_2^2 + bx_2 + c. \end{cases} \qquad (12)$$

Решив систему (12), подставим найденные значения в (11) и получим

$$y = y_0 \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} + y_1 \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} + y_0 \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}. \qquad (13)$$

Интегрируя (13) на отрезке $[x_0, x_2]$, находим

$$F_0 = \frac{1}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2) \cdot \Delta x,$$

где $\Delta x = x_1 - x_0 = x_2 - x_1$.

Искомый определенный интеграл находится как площадь всех параболических сегментов:

$$F_n = \frac{1}{3}[f(a) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + \ldots + 2f(x_{n-2}) + 4f(x_{n-1}) + f(b)] \cdot \Delta x.$$

В формуле Симпсона число n должно быть четным.

Полная погрешность формулы Симпсона на отрезке $[a, b]$ по порядку величины составляет $O(n^{-4})$.

Численное интегрирование методом трех восьмых

$$F_n = \frac{3 \cdot \Delta x}{8}[f(a) + f(x_{3m}) + 2(f(x_3) + f(x_6) + \ldots + f(x_{3m-3})) + \\ + 3(f(x_1) + f(x_2) + f(x_4) + f(x_5) + \ldots + f(x_{3m-2}) + f(x_{3m-1}))], \qquad (14)$$

где $\Delta x = \dfrac{b - a}{n} = \dfrac{b - a}{3m}$.

В формуле (14) число n должно быть равно $3m$.

Значение полной погрешности правила трех восьмых по порядку величины совпадает со значением полной погрешности формулы Симпсона.

Заметим, что оценка погрешности вычисления интеграла от функции, зависящей от d переменных, определяется следующим образом: если для одномерного случая погрешность составляет $O\left(n^{-\alpha}\right)$, то в d-мерном случае она равна $O\left(n^{-\frac{\alpha}{d}}\right)$.

Численное интегрирование методом Монте-Карло

Пусть существует прямоугольник высотой H и длиной $(b-a)$, такой, что функция $f(x)$ целиком лежит внутри прямоугольника. Сгенерируем n пар случайных чисел, равномерно распределенных в данном прямоугольнике: $a \le x_i \le b,\ 0 \le y_i \le H$.

Доля точек (x_i, y_i), удовлетворяющих условию $y_i \le f(x_i)$, является оценкой отношения интеграла от функции $f(x)$ к площади рассматриваемого прямоугольника. Оценка интеграла может быть получена по формуле

$$F_n = A\frac{n_s}{n}, \tag{15}$$

где n_s – число точек, удовлетворяющих условию $y_i \le f(x_i)$, A – площадь прямоугольника.

Можно вычислить определенный интеграл как среднее значение функции $f(x)$ на отрезке $[a,b]$:

$$F_n = \frac{(b-a)}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_i), \tag{16}$$

где x_i – последовательность случайных чисел с равномерным законом распределения на отрезке $[a,b]$.

В отличие от рассмотренных выше методов, погрешность метода Монте-Карло не зависит от размерности подынтегральной функции d и составляет $O\left(n^{-0.5}\right)$. Поэтому при достаточно больших d интегрирование по методу Монте-Карло приводит к меньшим погрешностям при тех же значениях n.

Численные примеры. Реализация в Matlab

Пример 1. Вычислить значение производной функции на отрезке $[0, 6\pi]$.

$$f(x) = \sin\left(0.1 \cdot x^2\right) \tag{17}$$

Для аппроксимации производных конечными разностями в пакете Matlab существует функция **diff()**:

diff(x) – возвращает конечные разности, вычисленные по смежным элементам вектора x;

diff(x, n) – возвращает конечные разности n-го порядка, вычисленные по смежным элементам вектора x.

Пример 2. Вычислить значение производной функции (17) на отрезке $[0, 6\pi]$ с использованием соответствующей функции Matlab.

Пример 3. Вычислить значение определенного интеграла

$$\int\limits_0^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} x \cdot \sin\left(x^2\right) dx \tag{18}$$

методом правых прямоугольников.

Пример 4. Вычислить значение определенного интеграла (18) методом Симпсона.

Пример 5. Вычислить значение определенного интеграла (18) методом Монте-Карло.

Для вычисления значений определенных интегралов в пакете Matlab применяются функции **quad ()**, **quad1 ()**, **trapz ()**.

Функция **quad (*fun*, *a*, *b*)** – возвращает значение интеграла от функции *fun* на отрезке $[a, b]$, при вычислении используется метод Симпсона.

Функция **quad1 (*fun*, *a*, *b*)** – возвращает значение интеграла от функции *fun* на отрезке $[a, b]$, используя для вычисления метод Лоббато.

Функция **trapz (*y*)** – возвращает значение определенного интеграла в предположении, что $x = 1 : length(y)$.

Функция **trapz (*x*, *y*)** – возвращает значение определенного интеграла на отрезке $[x(1), x(n)]$.

Пример 6. Вычислить значение определенного интеграла (18) с помощью встроенной функции Matlab trapz ().

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ НАЧАЛЬНЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Рассмотрим обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка:

$$y' = f(x,y), \quad x \in [x_0, b] \tag{1}$$

с начальным условием:

$$y(x_0) = y_0, \tag{2}$$

где $f(x,y)$ – некоторая заданная, в общем случае, нелинейная функция двух переменных.

Будем считать, что для задачи (1) – (2), называемой *задачей с начальными условиями* или *задачей Коши*, выполняются требования, обеспечивающие существование и единственность ее решения $y = y(x)$ на отрезке $[x_0, b]$, также будем считать, что искомое решение обладает той или иной степенью гладкости.

Аналитическое решение задачи (1) удается найти только для специальных типов уравнений. Используемые на практике приближенные методы решения задач Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений можно условно разделить на три группы:

1. *Приближенно-аналитические методы*. К методам этой группы относят такие, которые позволяют находить приближение решения $y = y(x)$ сразу в виде некоторой функции $\varphi(x)$. Таким методом является, напр., метод степенных рядов, реализация которого основана на представлении искомой функции отрезком ряда Тейлора с учетом заданной точности, где коэффициенты определяются последовательным дифференцированием самого уравнения. К этой группе

методов относят также методы неопределенных коэффициентов и последовательных приближений.

2. *Графические методы* основаны на приближенном представлении искомого решения $y = y(x)$ на промежутке $[x_0, b]$ в виде графика, который можно строить по тем или иным правилам, связанными с графическим толкованием задачи.

3. *Численные методы* предполагают получение набора приближенных значений y_i искомого решения $y(x)$ на некоторой сетке аргументов $x_i \in [x_0, b]$.

Метод Пикара

Проинтегрируем обе части уравнения (1) в границах от x_0 до x:

$$\int_{x_0}^{x} y'(t)dt = \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))dt.$$

Отсюда, с учетом условия (2), получим:

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))dt. \tag{3}$$

Применяя к последнему интегральному уравнению метод простых итераций:

$$y_{n+1} = \varphi(y_n), \quad n = 0,1,2,...,$$

и выбирая в качестве начальной функции $y(x_0) = y_0$, по формуле (3) при n=0 находим первое приближение:

$$y_1(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y_0)dt,$$

подстановка которого в (3) при n = 1 дает второе приближение, и т.д. Таким образом, получим *метод последовательных приближений* или *метод Пикара*:

$$y_{n+1}(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y_n(t))dt, \quad n = 0,1,2,... \quad y_0(x) \equiv y_0. \tag{4}$$

Оценка погрешности k-го приближения имеет вид:

$$|y(x) - y_k(x)| \le M^k N \frac{d^{k+1}}{(k+1)!}, \qquad (5)$$

где $M = \max|f'_y(x)|$ – константа Липшица, $|f(x,y)| \le N$ – верхняя грань модуля функции $f(x,y)$, d – величина, определяющая окрестность $|x - x_0| \le d$, $d = \min\left(a, \frac{b}{N}\right)$.

Метод Эйлера

Пусть требуется построить таблицу приближенных значений y_i решения $y = y(x)$ задачи Коши (1) – (2) в расчетных точках $x_i = x_0 + ih$, $i = \overline{1,n}$ с расчетным шагом $h = \frac{b - x_0}{n}$:

x	x_0	x_1	…	$x_n = b$
y	y_0	y_1	…	$y_n \approx y(b)$

Для построения метода Эйлера можно использовать различные подходы. Рассмотрим идею графического построения решения дифференциальных уравнений (рис. 1).

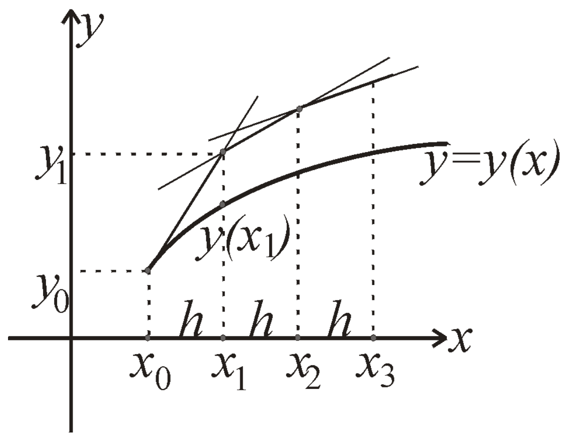


Рис. 1. – Геометрическая интерпретация метода Эйлера.

Запишем уравнение касательной к кривой $y = y(x)$ в точке (x_0, y_0):

$$y = y_0 + f(x_0, y_0)(x - x_0). \qquad (6)$$

При достаточно малом шаге h ордината $y_1 = y_0 + hf(x_0, y_0)$ этой касательной (при подстановке значения $x_1 = x_0 + h$) по непрерывности должна мало отличаться от ординаты $y(x_1)$ решения $y(x)$ задачи (1) – (2). Следовательно, точка (x_1, y_1) пересечения касательной (6) с прямой $x = x_1$ может быть приближенно принята за начальную точку. Через эту точку снова проведем прямую $y = y_1 + f(x_1, y_1)(x - x_1)$, которая уже приближенно отражает поведение касательной к $y = y(x)$ в точке $(x_1, y(x_1))$. Пересекая эту касательную с прямой $x = x_2$, получив приближенное значение $y(x_2)$ и т.д., строим итерационный процесс *метода Эйлера*:

$$y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i), \quad i = 0,1,2,...,n, \tag{7}$$

который приближенно график решения $y = y(x)$ представляет в виде ломанной, составленный из отрезков приближенных касательных.

Соотношение (1) можно получить и аналитически. Линеаризуя решение в окрестности начальной точки по формуле Тейлора, получим:

$$y(x) = y(x_0) + y'(x_0)(x - x_0) + \frac{y''(\xi)}{2!}(x - x_0)^2,$$

откуда легко получить и саму формулу метода Эйлера (7) для n последовательных шагов и ее остаточный член: $r_k(h) = \dfrac{y''(\xi_k)}{2}h^2$, где ξ_k – некоторая точка интервала (x_0, x_k). Остаточный член характеризует локальную ошибку метода Эйлера – $O(h^2)$, совершаемую на каждом шаге. После $n \sim \dfrac{1}{h}$ шагов глобальная ошибка будет $O(h)$, т.е. метод Эйлера относится к методам первого порядка.

Другим подходом к получению формулы (7) является аппроксимация производной в выражении (1) правыми разностями.

Известны различные модификации метода Эйлера, которые направлены на уточнение направления перехода из точки (x_i, y_i) в точку

(x_{i+1}, y_{i+1}). Например, в *методе Эйлера-Коши* используется следующий порядок вычисления:

$$y_{i+1}^{*} = y_i + hf(x_i, y_i), \quad y_{i+1} = y_i + h\frac{f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_{i+1}^{*})}{2}. \tag{8}$$

Метод второго порядка точности можно получить, используя разложение в ряд Тейлора функции $y(x)$ в окрестности некоторой точки x_i:

$$y(x_{i+1}) = y(x_i) + hy'(x_i) + \frac{1}{2!}h^2 y''(x_i) + O(h^3). \tag{9}$$

Дифференцируя (1) по формуле полной производной

$$y''(x) = f_x'(x, y) + f_y'(x, y)y'$$

найдем приближенное значение второй производной:

$$y''(x_i) = f_x'(x_i, y(x_i)) + f_y'(x_i, y(x_i))f(x_i, y(x_i)) =$$
$$= f_x'(x_i, y_i) + f_y'(x_i, y_i)f(x_i, yx_i).$$

Подставляя последнее выражение в (9), получим *исправленный метод Эйлера*:

$$y(x_{i+1}) = y_i + h\left[f(x_i, y_i) + \frac{h}{2}\left(f_x'(x_i, y_i) + f_y'(x_i, y_i)\cdot f(x_i, y_i)\right)\right]. \tag{10}$$

Метод Рунге-Кутты

Идея построения явных *методов Рунге-Кутты p-го порядка* заключается в получении приближений к значениям $f(x_{i+1})$ по формуле вида:

$$y_{i+1} = y_i + h\varphi(x_i, y_i, h), \tag{11}$$

где $\varphi(x, y, h)$ – некоторая функция, приближающая отрезок ряда Тейлора до

p-го порядка и не содержащая частных производных функции $f(x, y)$.

Полагая в (11), что $\varphi(x, y, h) \equiv f(x, y)$, приходим к методу Эйлера, который можно считать частным случаем метода Рунге-Кутты при $p = 1$.

Рассмотрим построение методов Рунге-Кутты для $p = 2$. Пусть функция $\varphi(x, y, h)$ имеет следующую структуру:

$$\varphi(x, y, h) = c_1 f(x, y) + c_2 f(x + ah, y + bhf(x, y)).$$

Параметры c_1, c_2, a, b будем подбирать так, чтобы формула (11) определяла метод второго порядка, т.е. чтобы максимальная локальная ошибка составляла величину $O(h^3)$. Разложим функцию двух переменных $f(x + ah, y + bhf(x, y))$ по формуле Тейлора, ограничиваясь линейными членами:

$$f(x + ah, y + bhf(x, y)) = f(x, y) + f'_x(x, y)ah + f'_y(x, y)bhf(x, y) + O(h^2).$$

Подстановка этого выражения в (11) дает:

$$y_{i+1} = y_i + h\left[(c_1 + c_2)f(x_i, y_i) + h(c_2 a f'_x(x_i, y_i) + c_2 b f'_y(x_i, y_i) f(x_i, y_i))\right] + O(h^3)$$

Сравнение последнего выражения с тейлоровским квадратичным представлением решения $y(x)$ (10) с точностью до $O(h^3)$ требует выполнения совокупности условий:

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 1, \\ c_2 a = 0.5, \\ c_2 b = 0.5, \end{cases}$$

считая c_2 свободным параметром α, получим *однопараметрическое семейство методов Рунге-Кутты второго порядка*:

$$y_{i+1} = y_i + h\left[(1 - \alpha)f(x_i, y_i) + \alpha f\left(x_i + \frac{h}{2\alpha}, y_i + \frac{h}{2\alpha} f(x_i, y_i)\right)\right] + O(h^3)$$

(12)

Данный метод является *двухэтапным* по количеству вычислений на каждом шаге.

Анализ метода Рунге-Кутты второго порядка позволяет представить, в какой форме следует конструировать *метод Рунге-Кутты произвольного* *порядка*. Используется запись, состоящая из следующей последовательности формул, параметры c_k, a_k, b_{kj} в которых подбираются так, чтобы получаемое значение y_{i+1} совпадало со значением разложения $y(x_{i+1})$ по формуле Тейлора с погрешностью $O(h^{p+1})$:

$$\begin{cases} \theta_1^i = f(x_i, y_i), \\ \theta_k^i = f(x_i + a_k h, y_i + h\sum_{j=1}^{k-1} b_{kj}\theta_j^i), \ k = 2,3,...,p, \\ y_{i+1} = y_i + h\sum_{k=1}^{p} c_k\theta_k^i. \end{cases} \tag{13}$$

Наиболее употребительным частным случаем семейства методов (13) является *метод Рунге-Кутты четвертого порядка*:

$$\begin{cases} \theta_1^i = f(x_i, y_i), \\ \theta_2^i = f(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2}\theta_1^i), \\ \theta_3^i = f(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2}\theta_2^i), \\ \theta_4^i = f(x_i + h, y_i + h\theta_3^i), \\ y_{i+1} = y_i + \frac{h}{6}\left(\theta_1^i + 2\theta_2^i + 2\theta_3^i + \theta_4^i\right). \end{cases} \tag{14}$$

Численные примеры. Реализация в пакете Matlab

Пример 1. Найти решение задачи Коши дифференциального уравнения

$$\frac{dy}{dx} = x^2, \quad y(0) = 1.3 \tag{15}$$

методом Рунге-Кутты четвертого порядка.

Решение задачи Коши для дифференциальных уравнений методом Рунге-Кутты 4 порядка может быть реализовано в пакете Matlab в виде функции **ode 45()**. Описание других функций, реализующих метод Рунге-

Кутты и другие методы, а также решатели систем дифференциальных уравнений можно найти, используя справочную систему Matlab.

Пример 2. Найти решение задачи (15), используя встроенные функции пакета Matlab.

Входными данными для функции ode45 являются: имя файла, содержащего определение функции, стоящей в правой части уравнения (1), вектор, определяющий интервал интегрирования, начальное условие.

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Общая постановка краевой задачи. Классификация приближенных методов

Будем рассматривать двухточечные краевые задачи для ОДУ второго порядка. Такие задачи имеют общий вид:

$$F(x, y, y', y'') = 0, x \in [a,b], \tag{1}$$

$$\varphi_1(y(a), y'(a)) = 0, \varphi_2(y(b), y'(b)) = 0,$$

где F, φ_1, φ_2 – заданные функции определенной гладкости.

Наиболее употребительны и лучше всего изучены линейные краевые задачи, т.е. задачи вида (1), где F, φ_1, φ_2 – линейные функции. Для определенности будем полагать, что объектом изучения является линейная краевая задача:

$$L[y] = y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x), x \in [a,b] \tag{2}$$

$$l_a[y] = \alpha_0 y(a) + \alpha_1 y'(a) = A, \tag{3}$$

$$l_b[y] = \beta_0 y(b) + \beta_1 y'(b) = B, \tag{4}$$

где коэффициенты краевых условий не обращаются в ноль одновременно, а функции $p(x), q(x)$ выбраны таким образом, что данная задача имеет единственное решение в заданном функциональном пространстве. Краевые условия (3-4) определяют в общем случае смешанную краевую задачу, при $\alpha_1 = \beta_1 = 0$ первую краевую задачу, при $\alpha_0 = \beta_0 = 0$ – вторую краевую задачу.

Аналитическое решение краевых задач вызывает большие трудности по сравнению с решением задачи Коши. Отсюда и большое разнообразие численных методов решения таких задач. По типу представления результатов решения задачи все методы можно разделить на приближенно-аналитические, дающие решение краевой задачи в виде некоторой функции и численные или сеточные методы, дающие совокупность решений в узлах выбранной сетки.

Приведем общую классификацию приближенных методов:

1) методы сведения к задаче Коши (метод пристрелки, метод дифференциальной прогонки, метод редукции);
2) метод конечных разностей;
3) метод коллокации;
4) проекционные методы (метод Галеркина);
5) вариационные методы (наименьших квадратов, метод Ритца);
6) проекционно-разностные методы (метод конечных элементов);
7) методы сведения к интегральным уравнениям Фредгольма и др.

Методы сведения краевых задач к начальным задачам

Зная способы решения задач Коши поставленную краевую задачу можно считать решенной, если исходную задачу преобразовать к начальной.

2.1 Метод пристрелки.

Пусть требуется найти приближенное решение уравнения (в общем случае нелинейного):

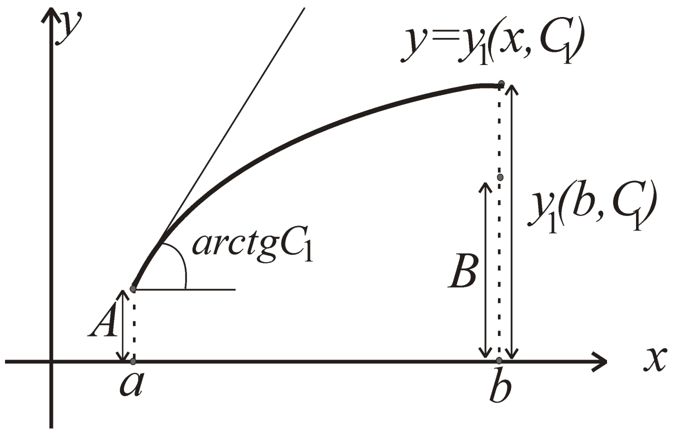
$$y'' = f(x, y, y'), x \in [a, b]$$

с краевыми условиями первого рода:

$$y(a) = A, y(b) = B$$

Зададим некоторое число C_1 и будем рассматривать задачу Коши для уравнения с начальными условиями: $y(a) = A, y'(a) = C_1$.

Построение последовательности приближений $y_k(b, C_k)$ показано на рисунке. Если при заданном $\varepsilon > 0$ и некотором $k = n$ будет выполнено неравенство $|B - y_n(b, C_n)| \le \varepsilon$ за искомое приближенное решение краевой задачи принимается функция $y_n(b, C_n)$.



Геометрическая интерпретация одного шага метода пристрелки

Метод редукции. Будем искать решение $y = y(x)$ линейной краевой задачи (2-4) в виде:

$y = Cu(x) + v(x)$,

где C и $u = u(x), v = v(x)$ – константа и функции, условия на которые мы определим далее.

$u(a) = k\alpha_1, u'(a) = -k\alpha_0$.

если $\alpha_0 \ne 0$

$$v(a) = \frac{A}{\alpha_0}, v'(a) = 0$$

или если $\alpha_1 \ne 0$

$$v(a) = 0, v'(a) = \frac{A}{\alpha_1}$$

(α_0, α_1 одновременно в ноль не обращаются).

Функции u, v можно найти, решая уравнения:

$u'' + p(x)u' + q(x)u = 0$

$v'' + p(x)v' + q(x)v = 0$

с начальными условиями, применяя какие-либо методы решения задач Коши для уравнений второго порядка. Приближенное решение этих задач строится на отрезке $[a, b]$, в результате чего становятся известными, в частности значения $u(b), u'(b), v(b), v'(b)$. Это позволяет подобрать постоянную C так, чтобы с этим значением C и найденными функциями $u(x), v(x)$ функция $y = Cu + v$ удовлетворяла уравнению (2) и условиям (3-4).

Имеем: $l_b[y] = l_b[Cu + v] = Cl_b[u] + l_b[v] = B$,

Если $C = \dfrac{B - l_b[v]}{l_b[u]} = \dfrac{B - \beta_0 v(b) - \beta_1 v'(b)}{\beta_0 u(b) + \beta_1 u'(b)}$

Пример 1. Найти решение однородного уравнения:

$y'' + y \cdot chx = 0$,

удовлетворяющее краевым условиям: $y(0) = 0, y(1) = 1$.

Метод конечных разностей

Идея метода конечных разностей решения краевых задач весьма проста: вместо производных в дифференциальном уравнении используются их конечно-разностные аппроксимации. В отличие от методов решения начальных задач, где последовательно, шаг за шагом находится каркас приближенного решения, для краевой дифференциальной задачи возникает необходимость решать алгебраическую систему.

Рассмотрим наиболее типичные К-Р аппроксимации.

Введем на отрезке $[a, b]$ сетку с шагом h: $h = \dfrac{b - a}{n}$:

$\omega_h := \{x_i | x_i = x_0 + ih; i = 0,1,...,n; x_0 := a, x_n := b\}$.

На этой сетке определим сеточные функции:

$p_i := p(x_i), q_i := q(x_i), f_i := f(x_i)$,

отвечающие функциональным коэффициентам дифференциального уравнения (2).

Через y_i будем обозначать i-ую компоненту приближенного решения задачи (2-4).

Фиксируя в уравнении (2) $x = x_i$ с учетом введенных обозначений получим уравнение:

$y''(x_i) + p_i y'(x_i) + q_i y(x_i) = f_i$, где $i=\overline{0,n}$ по числу узлов сетки, $y''(x_i), y'(x_i), y(x_i)$ – значение точного решения и его производных в i –ом узле.

В каждом внутреннем узле сетки ω_h значения производных аппроксимируются конечно-разностными отношениями по симметричным формулам второго порядка точности:

$$y'(x_i) = \frac{y(x_{i+1}) - y(x_{i-1})}{2h} + O(h^2),$$

$$y''(x_i) = \frac{y(x_{i+1}) - 2y(x_i) + y(x_{i-1})}{h^2} + O(h^2).$$

В результате подстановки последних в уравнение при $i=\overline{1,n-1}$ получаем стандартное трехточечное разностное уравнение второго порядка:

$$\left(1+\frac{h}{2}p_i\right)y_{i+1} - \left(2-h^2q_i\right)y_i + \left(1-\frac{h}{2}p_i\right)y_{i-1} = h^2 f_i, i = 1,2...n-1.$$

Два недостающих уравнения системы получим из краевых условий (3-4) данной задачи, для этого воспользуемся несимметричными аппроксимациями первого и второго порядков точности:

$$y'(a) = \frac{y(x_1) - y(x_0)}{h} + O(h) = \frac{-3y(x_0) + 4y(x_1) - y(x_2)}{2h} + O(h^2)$$

$$y'(b) = \frac{y(x_n) - y(x_{n-1})}{h} + O(h) = \frac{y(x_{n-2}) - 4y(x_{n-1}) + 3y(x_n)}{2h} + O(h^2).$$

При аппроксимации производных разностями первого порядка получим два недостающих уравнения в виде:

$$\alpha_0 y(x_0) + \alpha_1 \frac{y(x_1) - y(x_0)}{h} = A \Leftrightarrow (h\alpha_0 - \alpha_1)y_0 + \alpha_1 y_1 = Ah$$

$$\beta_0 y(x_n) + \beta_1 \frac{y(x_n) - y(x_{n-1})}{h} = B \Leftrightarrow -\beta_1 y_{n-1} + (h\beta_0 - \beta_1)y_n = Ah.$$

При аппроксимации производных разностями второго порядка уравнения будут иметь вид:

$$\begin{gathered}\alpha_0 y(x_0) + \alpha_1 \frac{-3y(x_0) + 4y(x_1) - y(x_2)}{2h} = A \Leftrightarrow \\ (2h\alpha_0 - 3\alpha_1)y_0 + 4\alpha_1 y_1 - \alpha_1 y_2 = 2Ah\end{gathered} \tag{28}$$

$$\begin{gathered}\beta_0 y(x_n) + \beta_1 \frac{3y(x_n) - 4y(x_{n-1}) + y(x_{n-2})}{2h} = B \Leftrightarrow \\ -\beta_1 y_{n-2} - 4\beta_1 y_{n-1} + (2h\beta_0 + 3\beta_1)y_n = 2Bh\end{gathered} \tag{29}$$

Пример 2. Методом конечных разностей найти решение краевой задачи: $x^2 y'' + xy' = 1, y(1) = 0, y(1.4) = \frac{1}{2}\ln^2(1.4) \cong 0.0566$.

Метод коллокации

Будем искать приближенное решение линейной краевой задачи (2-4) в виде функции:

$$y_n(x) := \varphi_0(x) + \sum_{i=1}^{n} c_i \varphi_i(x),$$

где определяемые на отрезке $[a,b]$ базисные функции $\varphi_i(x), i = \overline{1,n}$ и дополнительная функция $\varphi_0(x)$ должны быть дважды дифференцируемыми и попарно линейно независимыми. Кроме того, функция $\varphi_0(x)$ должна удовлетворять краевым условиям (3-4), а функции $\varphi_i(x), i = \overline{1,n}$ – соответствующим однородным краевым условиям:

$$\begin{cases} \alpha_0 \varphi_i(a) + \alpha_1 \varphi_i'(a) = 0, \\ \beta_0 \varphi_i(b) + \beta_1 \varphi_i'(b) = 0 \end{cases} \quad i = [1,2...n]$$

В таком случае функция $y_n(x)$, определяемая выражением при любых значениях коэффициентов c_i удовлетворяет краевым условиям (3-4).

Представление приближенного решения в таком виде характерно для многих аналитико-приближенных методов решения краевых задач, главное их различие состоит в том, на какой основе находятся коэффициенты c_i в линейной комбинации базисных функций.

В методе коллокации коэффициенты c_i подбираются так, чтобы в узлах коллокации $x_i : a < x_1 < x_2 < ... < x_n < b$ значения $y_n(x_i)$ с приближенного решения были согласованы с точными значениями $y(x_i)$. Согласование в узлах коллокации проводится подстановкой $y_n(x)$ в уравнение (2).

Пример 3. Методом коллокации найти приближенное решение уравнения: $4y'' + x^6 y' - x^5 y = 6 - 3x^3,\ \ y(1) = 1,\ \ 3y(2) + y'(2) = 0.5,\ \ x \in [1,2]$.

Пример 3*. Методом коллокации решить краевую задачу:

$$y'' + (1+x^2)y' + 1 = 0, \quad y(-1) = 0, \quad y(1) = 0 \cdot$$

Метод Галеркина

Метод Галеркина принадлежит группе проекционных методов.

Пусть L – некоторый линейный оператор, действующий в гильбертовом пространстве H, т.е. в полном нормированном пространстве со скалярным произведением. Ставится задача приближенного решения операторного уравнения:

$$Ly = f,$$

т.е. задача отыскания приближения к неизвестному элементу $y \in H$, соответствующему заданному элементу $f \in H$. Пусть $\{\varphi_i\}_{i=1}^{\infty}$ – некоторая полная замкнутая система линейно независимых элементов из H. Ее n первых элементов $\varphi_1, \dots \varphi_n$ выделяют в H конечномерное подпространство H_n, в котором и ищется приближенное решение уравнения (41):

$$y_n = \sum_{i=1}^{n} c_i \varphi_i$$

$$(f - Ly_n) \perp \varphi_i \Leftrightarrow (f - Ly_n, \varphi_i) = 0 \Leftrightarrow (Ly_n, \varphi_i) = (f, \varphi_i).$$

Пользуясь свойствами скалярного произведения, получаем:

$$\left(L\sum_{j=1}^{n} c_j \varphi_j, \varphi_i \right) = (f, \varphi_i) \Leftrightarrow \sum_{j=1}^{n} (L\varphi_j, \varphi_i) c_j = (f, \varphi_i)$$

Метод Галеркина приближенного решения операторного уравнения сводится к нахождению коэффициентов $c_1, \dots c_n$ линейной комбинации некоторых, задаваемых определенным образом линейно независимых функций, называемых координатными $\varphi_1, \dots \varphi_n$ так, чтобы эти коэффициенты удовлетворяли линейной системе:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} c_j = d_i, i = \overline{1, n}$$

где $a_{ij} = (L\varphi_j, \varphi_i), d_i = (f, \varphi_i)$.

Рассмотрим решение краевой задачи (2-4). Введем в рассмотрение также гильбертово пространство $L_2[a,b]$ функций, интегрируемых на отрезке $[a,b]$. Скалярное произведение определяется равенством: $(u,v)=\int_a^b u(x),v(x)dx$. Система ЛАУ, определяющих коэффициенты $c_1,...c_n$ будет иметь общий вид:

$$\sum_{j=1}^{n} c_j \int_a^b \varphi_i(x)L[\varphi_i]dx=\int_a^b [f(x)-L[\varphi_0]]\varphi_i(x)dx, i=\overline{1,n}.$$

Пример 4. Методом Галеркина найти приближенное решение уравнения: $y''+y+x=0, y(0)=y(1)=0$.

ПРИБЛИЖЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

Классификация ДУ с частными производными

Будем рассматривать приближенные методы решения некоторых задач для ДУ с частными производными второго порядка с двумя независимыми переменными, которые в общем случае имеют вид:

$$F(x,y,u,u_x,u_y,u_{xx},u_{xy},u_{yy})=0 \qquad (1)$$

Решением уравнения (1) будем считать функцию $u(x,y)$, график решения представляет собой поверхность в пространстве $Oxyu$.

Уравнение (1) называется линейным, если оно перовой степени относительно искомой функции и всех ее производных и не содержит их произведений:

$$A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2B\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+a\frac{\partial u}{\partial x}+b\frac{\partial u}{\partial y}+cu=F(x,y) \qquad (2)$$

Если коэффициенты A,B,C,a,b не зависят от x,y, то уравнение (2) называют ЛДУ с постоянными коэффициентами.

Классификация. Пусть $D=AC-B^2$ – дискриминант уравнения (2):

$D>0$ – эллиптическое уравнение,

$D=0$ – параболическое уравнение,

$D<0$ – гиперболическое уравнение.

Простейшее уравнение эллиптического типа $\Delta u = 0$ – уравнение Лапласа, $\Delta u = f(x, y)$ – уравнение Пуассона.

Начальные и краевые условия. Задача Коши. Смешанная задача.

ДУ с частными производными в общем случае имеет бесчисленное множество решений, для выделения конкретного решения из широкого круга задач требуется задание начальных и граничных условий.

Примеры.

Общая задача Коши – найти решение $u(x, y)$, удовлетворяющее начальным условиям.

Смешанная задача в общем аспекте может быть сформулирована с.о.: дана конечная или бесконечная область *G*, имеющая кусочно-гладкую границу *Г*. Требуется найти решение ДУ, если на некоторых частях границы выполнены некоторые соотношения.

Краевые задачи для уравнений эллиптического типа

Исследование стационарных процессов различной физической природы (колебания, теплопроводность и др.) часто приводят к уравнениям эллиптического типа

$$L[u] = \Delta u + au_x + bu_y + cu = F(x, y) \tag{3}$$

где $a = a(x, y), b = b(x, y), c = c(x, y), F = F(x, y)$ – непрерывные функции.

Для этих уравнений обычно ставятся только краевые задачи, так как задача Коши может быть некорректной.

Наиболее часто встречающиеся краевые задачи:

Первая краевая задача. На контуре *Г*, ограничивающем область *G* задана непрерывная функция $\varphi(P) = \varphi(x, y)$. Требуется найти функцию $u(x, y)$, удовлетворяющую внутри области *G* уравнению (3) и принимающую на границе заданные значения:

$$L[u(P)] = F(P) при P \in G; u(P) = \varphi(P) при P \in Г.$$

Вторая краевая задача. На контуре *Г*, ограничивающем область *G*, задана непрерывная функция $\varphi_1(P)$. Требуется найти такую функцию

$u(x, y)$, удовлетворяющую внутри G уравнению (3), нормальная производная которой на Г принимает заданные значения $\varphi_1(P)$:

$$L[u(P)] = F(P) при P \in G; \frac{\partial u(P)}{\partial n} = \varphi_1(P) при P \in \Gamma.$$

Третья краевая задача. На контуре Г, ограничивающем область *G*, задана непрерывная функция $\psi(P) = \psi(x, y)$. Требуется найти такую функцию $u(x, y)$, удовлетворяющую внутри *G* уравнению (3), чтобы:

$$L[u(P)] = F(P) при P \in G; \alpha_0 u(P) + \alpha_1 \frac{\partial u(P)}{\partial n} = \psi(P) при P \in \Gamma, |\alpha_0| + |\alpha_1| \neq 0$$ Если область ограничена, то задачу называют внутренней, иначе – внешней..

Для уравнения Лапласа первая краевая задача называется задачей Дирихле, вторая – Неймана и третья – смешанной краевой задачей.

Уравнение Лапласа в конечных разностях

Получим КР уравнение, соответствующее уравнению Лапласа:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \tag{4}$$

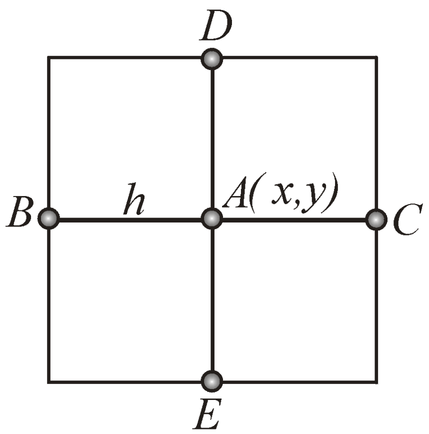
используя формулу Тейлора:

$$f(x+h, y+k) = f(x, y) + \left(\frac{\partial}{\partial x} h + \frac{\partial}{\partial y} k\right) f(x, y) + \frac{1}{2!}\left(\frac{\partial}{\partial x} h + \frac{\partial}{\partial y} k\right)^2 f(x, y) + \ldots +$$
$$\frac{1}{n!}\left(\frac{\partial}{\partial x} h + \frac{\partial}{\partial y} k\right)^n f(x + \theta h, y + \theta k), 0 < \theta < 1 \tag{5}$$

При этом пользуются различными схемами.

Первая схема.

Рассмотрим точки $A(x, y), B(x-h, y), C(x+h, y), D(x, y+h), E(x, y-h)$ и выразим значение функции $u(x, y)$ в точках через значения этой функции и ее производных в центральной точке *A*.



Согласно формуле (5), полагая $n = 4$:

$$u(x-h,y) = u(x,y) - hu_x + \frac{1}{2!}h^2u_{xx} - \frac{1}{3!}h^3u_{xxx} + \frac{1}{4!}h^4\overline{u_{xxxx}},$$

$$u(x+h,y) = u(x,y) + hu_x + \frac{1}{2!}h^2u_{xx} + \frac{1}{3!}h^3u_{xxx} + \frac{1}{4!}h^4\overline{\overline{u_{xxxx}}}, \qquad (6)$$

$$u(x,y-h) = u(x,y) - hu_y + \frac{1}{2!}h^2u_{yy} - \frac{1}{3!}h^3u_{yyy} + \frac{1}{4!}h^4\overline{u_{yyyy}},$$

$$u(x+h,y+h) = u(x,y) + hu_y + \frac{1}{2!}h^2u_{yy} + \frac{1}{3!}h^3u_{yyy} + \frac{1}{4!}h^4\overline{\overline{u_{yyyy}}}.$$

Складывая (6), получим:

$$u(x-h,y) + u(x+h,y) + u(x,y-h) + u(x,y+h) = 4u(x,y) + h^2(u_{xx} + u_{yy}) +$$
$$+ R_h(x,y)$$

Остаточный член имеет порядок $O(h^4)$. Отсюда будем иметь:

$$\Delta u = \frac{1}{h^2}\left[u(x-h,y) + u(x+h,y) + u(x,y-h) + u(x,y+h) - 4u(x,y)\right] + O(h^2).$$

Уравнению Лапласа приближенно соответствует уравнение в конечных разностях:

$$u(x,y) = \frac{1}{4}\left[u(x-h,y) + u(x+h,y) + u(x,y-h) + u(x,y+h)\right]. \qquad (7)$$

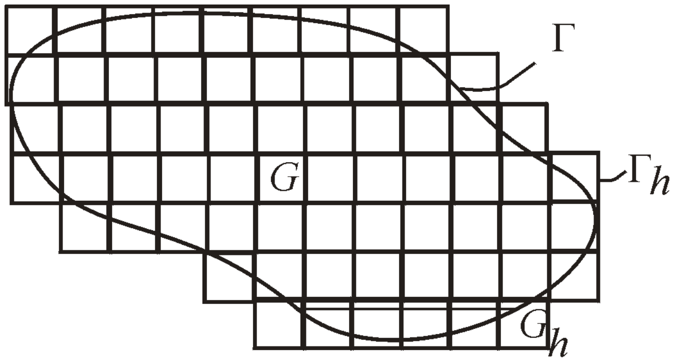
Решение задачи Дирихле методом сеток

Идея метода сеток:

1) в плоской области *G*, в которой разыскивается решение, строится сеточная область G_h, состоящая из одинаковых ячеек;

2) заданное ДУ в узлах построенной сетки заменяется соответствующим КР уравнением.

3) на основании граничных условий устанавливаются значения искомого решения в граничных узлах области G_h.



Решив полученную систему КР уравнений, находим значения искомой функции в узлах сеточной области. Сеточные методы легко программируются.

Покажем построение решения методом сеток задачи Дирихле:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 при (x, y) \in G, u(P) = \varphi(P) при P \in \Gamma \tag{8}$$

Будем считать, что область ограничена простым кусочно-гладким контуром.

Выбрав шаг h, построим квадратную сетку:

$x_i = x_0 + ih, y_j = y_0 + jh, i, j = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$.

Значение искомой функции в точках (x_i, y_j) обозначим u_{ij}. Следуя общей схеме (7), получим разностные уравнения:

$$u_{ij} = \frac{1}{4}\left[u_{i-1,j} + u_{i+1,j} + u_{i,j-1} + u_{i,j+1}\right] \tag{9}$$

В граничных узлах первого рода сетки полагаем:

$$u(B) = \varphi(B), \tag{10}$$

где B – ближайшая точка границы Г.

Система (9) является неоднородной линейной системой, причем число неизвестных (внутренних узлов) равно числу уравнений. Система (9) всегда совместна и имеет единственное решение.

Метод сеток для уравнений параболического типа

В качестве уравнения параболического типа рассмотрим одномерное уравнение теплопроводности для однородного стержня $0 \le x \le l$:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \qquad (11)$$

где $u(x)$ – температура, t – время, $a^2 = 1$.

Пусть задано начальное условие $u(x,0) = f(x)$ и граничные условия первого рода: $u(0,t) = \varphi(t), u(l,t) = \psi(t)$.

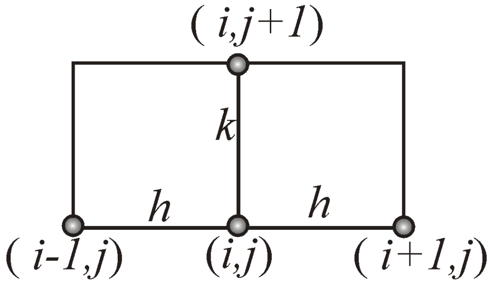
В системе координат $\{x,t\}$ в полуполосе $t \ge 0, 0 \le x \le l$ построим прямоугольную сетку: $x = ih, t = jk, i = \overline{0,n}$, где $h = \frac{l}{n}, k = \sigma h^2$ – шаги вдоль соответствующих осей.

Заменим исходное уравнение конечно-разностным:

$$\frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{\sigma h^2} = \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2}.$$

Или $u_{i,j+1} = \sigma u_{i-1,j} + (1-2\sigma)u_{i,j} + \sigma u_{i+1,j}$. (12)

В вычислении участвуют четыре соседних узла:



Реализуется так называемая ***явная схема***.

Исходя из начального условия находим значение температуры в первой полуполосе, а затем последовательно вычисляем значения на последующих слоях через значения в предыдущих, используя для граничных узлов краевые условия.

КР схема (12) для решения уравнения теплопроводности будет устойчивой, если σ удовлетворяет условию: $0 < \sigma \le \frac{1}{2}$. При вычислениях часто выбирают значение $\sigma = 1/6$.

Метод сеток для уравнений гиперболического типа

Остановимся на простейшем уравнении гиперболического типа – уравнении свободных колебаний однородной ограниченной струны:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{13}$$

с н. и г. условиями: $u(x,0) = f(x), u_t(x,0) = F(x), 0 \le x \le l$, $u(0,t) = \varphi(t), u(l,t) = \psi(t), 0 \le t < \infty$.

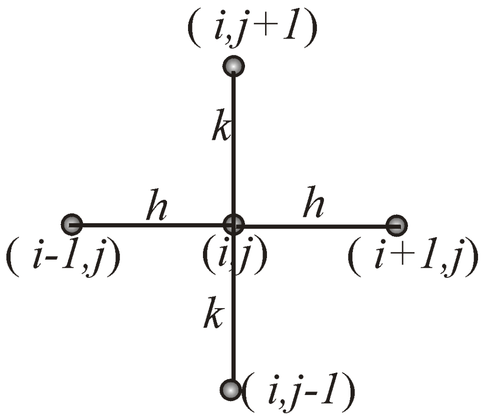
В системе координат $\{x,t\}$ покроем полуполосу $t \ge 0, 0 \le x \le l$ прямоугольной сеткой: $x = ih, t = jk, i = \overline{0,n}$, где h, k – шаги вдоль соответствующих осей.

Заменим исходное уравнение конечно-разностным:

$$\frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{k^2} = a^2 \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2}.$$

При $k = \frac{h}{a}$ уравнение упрощается:

$$u_{i,j+1} = u_{i+1,j} + u_{i-1,j} - u_{i,j-1}. \tag{14}$$



Для начала вычислительного процесса необходимо знать значение температуры на двух предыдущих узлах $j = 1, j = 0$, на нулевом слое используем начальное условие, а для нахождения недостающих уравнений в системе найдем значение $u(x,t)$ на фиктивном слое с номером $j = -1$. Для этого заменим производную во втором начальном условии КР отношением:

$$\frac{u_{i,-1} - u_{i0}}{-k} = F_i \Rightarrow u_{i,-1} = u_{i,0} - kF_i.$$

4. УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКИЕ МАТЕРИАЛЫ ПО ДИСЦИПЛИНЕ

4.1. Практикум

Практическая работа №1 «Решение нелинейных уравнений»

Контрольные вопросы

1. Поясните геометрический смысл методов: половинного деления, секущих, касательных.
2. Назовите основную сущность итерационных методов.
3. Почему в методе касательных начальное приближение $x_0 \in [a,b]$ целесообразно выбирать из условия $f(x_0) \cdot f''(x_0) > 0$?
4. Чему равны порядки сходимости рассмотренных методов?
5. Поясните, почему метод секущих можно считать частным случаем метода Ньютона, а метод Ньютона – частным случаем метода Чебышева?

Индивидуальные задания

1. Используя один из методов, найти область существования решения предложенного уравнения.
2. Найти корень уравнения $f(x) = 0$ в найденной области с точностью $\varepsilon = 10^{-4}$ указанными методами в соответствии с номером варианта. Реализовать алгоритмы указанных методов.
3. Определить число итераций каждого метода и оценить погрешности решения.
4. Выполнить проверку, используя возможности пакета Matlab. Сравнить решения, полученные всеми способами. Сделать вывод.
5. Оформить отчет по работе.

Номер варианта	**Уравнение** $f(x) = 0$	**Численные методы**
1	$x^3 + 0.3 \cdot x^2 + 1.8 \cdot x - 15 = 0$	Метод Ньютона Метод Чебышева
2	$x^3 + 0.2 \cdot x^2 + 5 \cdot x + 4 = 0$	Метод половинного деления Двушаговый метод Ньютона
3	$x^3 + 0.7 \cdot x^2 + 4.7 \cdot x - 1.5 = 0$	Метод секущих Метод Чебышева

4	$x^3 + 11 \cdot x^2 - 8 \cdot x - 25 = 0$	Упрощенный метод Ньютона Метод секущих
5	$x^3 + 3 \cdot x^2 + 3 \cdot x + 4 = 0$	Метод половинного деления Метод Стеффенсена
6	$x^3 - 2 \cdot x - 0.4 = 0$	Метод половинного деления Метод Чебышева
7	$x^3 + x^2 + 3 \cdot x - 13 = 0$	Разностный метод Ньютона Метод секущих
8	$x^3 + x^2 + 3.8 \cdot x - 2 = 0$	Метод половинного деления Двушаговый метод Ньютона
9	$x^3 + 3.5x^2 + 12 \cdot x + 19 = 0$	Упрощенный метод Ньютона Метод Чебышева
10	$x^3 + 6x^2 - 17 \cdot x - 21 = 0$	Метод Ньютона-Шредера Метод хорд

Практическая работа №2

«Решение систем линейных алгебраических уравнений»

Контрольные вопросы

1. В чем заключается основное преимущество метода Гаусса с выбором главного элемента?
2. В чем состоит особенность реализации метода прогонки?
3. Какие существуют способы приведения исходной матрицы к виду, удобному для решения методом простой итерации?
4. Каким образом может быть выбран вектор начальных приближений?
5. Назовите достаточное условие сходимости метода простой итерации.
6. В чем заключается преимущество метода Зейделя при программировании?

Индивидуальные задания

1. Реализовать алгоритм метода Гаусса с выбором главного элемента (по столбцу или по строке) и найти решение предложенной системы уравнений $AX = B$. Значения матрицы A и вектора B приведены в таблице.

2. Привести систему уравнений к виду, пригодному для итерационного процесса Зейделя, реализовать метод в пакете Matlab и решить систему уравнений с точностью $\varepsilon = 10^{-3}$ и исходными данными, приведенными в табл.

Номер варианта	Значения матрицы A и вектора B
1	$A = \begin{pmatrix} 2.1 & -4.5 & -2 \\ 3 & 2.5 & 4.3 \\ -6 & 3.5 & 2.5 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 19.07 \\ 3.21 \\ -18.25 \end{pmatrix}$
2	$A = \begin{pmatrix} -6.7 & 5.9 & 4.1 & -9.1 \\ 5.4 & -8.7 & 11.2 & -0.5 \\ 2.7 & -4.9 & 6.8 & 3.3 \\ 1.6 & 7.2 & 8.3 & -7.9 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 7.12 \\ 58.07 \\ 47.1 \\ 36.8 \end{pmatrix}$
3	$A = \begin{pmatrix} 3.81 & 0.25 & 1.28 & 0.75 \\ 2.25 & 1.32 & 4.58 & 0.49 \\ 5.31 & 6.28 & 0.98 & 1.04 \\ 9.39 & 2.45 & 3.35 & 2.28 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 4.21 \\ 6.47 \\ 2.38 \\ 10.48 \end{pmatrix}$
4	$A = \begin{pmatrix} 2.34 & -4.21 & -11.61 \\ 8.04 & 5.22 & 0.27 \\ 3.92 & -7.99 & 8.37 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 14.41 \\ -6.44 \\ 55.56 \end{pmatrix}$
5	$A = \begin{pmatrix} 0.18 & 0.25 & -0.44 \\ 0.42 & -0.35 & 1.12 \\ 1.14 & 0.12 & -0.83 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1.15 \\ 0.86 \\ 0.68 \end{pmatrix}$
6	$A = \begin{pmatrix} 21.54 & -95.5 & -96.12 \\ 10.22 & -91.06 & -7.34 \\ 51.21 & 12.29 & 86.45 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -49.93 \\ -12.46 \\ 60.81 \end{pmatrix}$
7	$A = \begin{pmatrix} 2.51 & -3.12 & 4.64 \\ -3.25 & 2.62 & 1.85 \\ -6.53 & -3.5 & 7.31 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} -1.05 \\ -14.46 \\ -17.73 \end{pmatrix}$
8	

	$A = \begin{pmatrix} 8.2 & 1.4 & -2.3 & 0.2 \\ -1.6 & 5.4 & -7.7 & 3.1 \\ 0.7 & 1.9 & -8.5 & 4.8 \\ 5.3 & -5.9 & 2.7 & -7.9 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 32.76 \\ 54.39 \\ 59.18 \\ -71.95 \end{pmatrix}$
9	$A = \begin{pmatrix} 4.21 & 22.42 & 3.85 \\ 2.31 & 31.49 & 1.52 \\ 3.49 & 4.85 & 28.72 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 30.24 \\ 4.095 \\ 42.81 \end{pmatrix}$
10	$A = \begin{pmatrix} 0.63 & 0.07 & 0.2 \\ 0.05 & 0.34 & 0.3 \\ 0.15 & 0.1 & 0.71 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0.34 \\ 0.32 \\ 0.42 \end{pmatrix}$

3. Найти решение этой же системы, используя возможности пакета Matlab. Сравните найденное решение с полученным при реализации метода Гаусса и метода Зейделя. За сколько шагов достигается заданная точность в каждом из методов?

4. Методом прогонки найти вектор $(u_1, u_2, \dots, u_{10})$, являющийся решением системы уравнений:

$$a_k u_{k-1} + b_k u_k + c_k u_{k+1} = f_k, \quad k = 1,2,\dots,10; \quad a_1 = c_{10} = 0$$

Коэффициенты $a_k,\ k = 2,3,\dots,10,\ b_k,\ k = 1,2,\dots,10,\ c_k,\ k = 1,2,\dots,9$ и $f_k,\ k = 1,2,\dots,10$ задаются следующей таблицей, где N – номер соответствующего варианта.

a_k	b_k	c_k	f_k
$\frac{4}{k \cdot N}$	$\frac{30}{k \cdot N}$	$\frac{6}{k \cdot N}$	$\frac{10}{k \cdot N}$

Что можно сказать о сходимости метода прогонки в вашем случае?

5. Оформить отчет по работе.

Практическая работа №3 «Решение систем нелинейных уравнений»

Контрольные вопросы

1. Поясните геометрический смысл методов спуска.

2. Каким образом выбираются начальные приближения в рассмотренных методах?
3. Как выбор начального приближения влияет на сходимость метода Ньютона?
4. Почему предложенные методы являются итерационными?
5. Что произойдет, если в окрестности решения нелинейной системы функция будет иметь несколько минимумов?

Индивидуальные задания

1. Найти решение системы уравнений с точностью $\varepsilon = 10^{-3}$ указанными методами. Для определения начального приближения использовать графический способ локализации корней.
2. Найти решение системы нелинейных уравнений, используя возможности пакета Matlab.
3. Определить число итераций, оценить погрешности решения, сравнить используемые методы.
4. Оформить отчет по работе.

Номер варианта	Система уравнений	Метод
1	$\begin{cases} 2x^3 - y^2 - 1 = 0, \\ x \cdot y^3 - y - 4 = 0. \end{cases}$	Метод градиентного спуска Метод простых итераций
2	$\begin{cases} e^{x \cdot y} - x^2 + y - 1.06 = 0, \\ (x + 0.5)^2 + y^2 - 0.6 = 0, \end{cases} \quad x > 0,\ y > 0.$	Метод покоординатных итераций Метод градиентного спуска

3	$\begin{cases} y-4+\sqrt{1-(x-2.7)^2}=0, \\ x+2\sin(y-5)-1=0. \end{cases}$	Метод градиентного спуска Метод Ньютона
4	$\begin{cases} (x-y)^3-8\cdot(x+y)=0, \\ 2\cdot(x+y)+15\cdot\ln(x+y)-5=0. \end{cases}$	Метод градиентного спуска Модифицированный метод Ньютона
5	$\begin{cases} x^2+y^2+z^2-1=0, \\ 2x^2+y^2-4z=0, \\ 3x^2-4y+z^2-1=0. \end{cases}$	Метод градиентного спуска Рекурсивный метод Ньютона
6	$\begin{cases} tg(x\cdot y+0.1)-x^2=0, \\ 0.6x^2+2y^2-1=0, \end{cases} \quad x>0, y>0.$	Метод градиентного спуска Разностный метод Ньютона
7	$\begin{cases} \cos(y+1.5)-x-0.4=0, \\ \sin(1.1\cdot x)-3y-1=0. \end{cases}$	Метод простых итераций Метод Брауна
8	$\begin{cases} x^2\cdot y^2-3x^3-6y^3+8=0, \\ x^4-9y+2=0. \end{cases}$	Метод покоординатных итераций Метод Брауна
9	$\begin{cases} 0.8x^2+2x\cdot y+1.3y^2+20x-15y=0, \\ e^{0.6y-0.8x}-1.14x-1.52y=0. \end{cases}$	Метод Ньютона Метод Брауна
10	$\begin{cases} 2y-\cos(x+0.9)-0.2=0, \\ x+\sin(y-0.5)+0.6=0. \end{cases}$	Разностный метод Ньютона Метод покоординатных итераций

Практическая работа №4 «Интерполирование функций»

Контрольные вопросы

1. Какие точки называются узлами интерполяции?
2. При решении каких задач используются интерполяционные формулы Ньютона?
3. Какие узлы называются равноотстоящими?
4. В каких случаях применяется сплайн-интерполяция?
5. В чем заключается основное отличие одномерной интерполяции от кубической?

Индивидуальные задания

1. Пользуясь первой и второй интерполяционными формулами Ньютона, вычислить значение функции для указанных значений аргумента.

2. Решить задачу интерполяции средствами пакета Matlab с помощью линейных и кубических сплайнов. Привести графики исходных данных, результатов сплайн-интерполяции и погрешности аппроксимации.

3. Оформить отчет по работе.

Номер варианта	x	$f(x)$	Значения аргумента	Номер варианта	x	$f(x)$	Значения аргумента
1	1.50	0.51183	$x = 1.50911$ $x = 1.59513$	6	0.50	1.6487	$x = 0.50721$ $x = 0.56894$
	1.51	0.50624			0.51	1.6653	
	1.52	0.50064			0.52	1.6820	
	1.53	0.49503			0.53	1.6989	
	1.54	0.48940			0.54	1.7160	
	1.55	0.48376			0.55	1.7333	
	1.56	0.47811			0.56	1.7507	
	1.57	0.47245			0.57	1.7683	
	1.58	0.46678			0.58	1.7860	
	1.59	0.46110			0.59	1.8040	
	1.60	0.45540			0.60	1.8221	

2	0.00	0.28081	$x =$ 0.01928 $x =$ 0.47113	7	1.1	0.89121	$x =$ 1.1511 $x =$ 2.0316
	0.05	0.31270			1.2	0.93204	
	0.10	0.34549			1.3	0.96356	
	0.15	0.37904			1.4	0.98545	
	0.20	0.41318			1.5	0.99749	
	0.25	0.44774			1.6	0.99957	
	0.30	0.48255			1.7	0.99166	
	0.35	0.51745			1.8	0.97385	
	0.40	0.55226			1.9	0.94630	
	0.45	0.58682			2.0	0.90930	
	0.50	0.62096			2.1	0.86321	
3	1.0	0.5652	$x =$ 1.0113 $x =$ 1.9592	8	0.10	3.63004	$x =$ 0.1006 $x =$ 2.5304
	1.1	0.6375			0.35	3.75680	
	1.2	0.7147			0.60	3.88933	
	1.3	0.7973			0.85	4.03258	
	1.4	0.8861			1.10	4.19310	
	1.5	0.9817			1.35	4.38042	
	1.6	1.0848			1.60	4.60963	
	1.7	1.1964			1.85	4.90697	
	1.8	1.3172			2.10	5.32331	
	1.9	1.4482			2.35	5.97322	
	2.0	1.5906			2.60	7.18210	
4	0.50	1.6487	$x =$ 0.52301 $x =$ 0.58967	9	1.50	0.51183	$x =$ 1.50253 $x =$ 1.59614
	0.51	1.6653			1.51	0.50624	
	0.52	1.6820			1.52	0.50064	
	0.53	1.6989			1.53	0.49503	
	0.54	1.7160			1.54	0.48940	
	0.55	1.7333			1.55	0.48376	
	0.56	1.7507			1.56	0.47811	
	0.57	1.7683			1.57	0.47245	
	0.58	1.7860			1.58	0.46678	
	0.59	1.8040			1.59	0.46110	
	0.60	1.8221			1.60	0.45540	

5	0.10	3.63004	$x =$ 0.10056 $x =$ 2.57321	10	0.00	0.28081	$x =$ 0.02475 $x =$ 0.48675
	0.35	3.75680			0.05	0.31270	
	0.60	3.88933			0.10	0.34549	
	0.85	4.03258			0.15	0.37904	
	1.10	4.19310			0.20	0.41318	
	1.35	4.38042			0.25	0.44774	
	1.60	4.60963			0.30	0.48255	
	1.85	4.90697			0.35	0.51745	
	2.10	5.32331			0.40	0.55226	
	2.35	5.97322			0.45	0.58682	
	2.60	7.18210			0.50	0.62096	

Лабораторная работа №5 «Обработка экспериментальных данных»

Контрольные вопросы

1. Как можно добиться повышения качества приближения?
2. Какая ошибка является среднеквадратической?
3. За счет чего возникает полиномиальное раскачивание?

Индивидуальные задания

1. Осуществив замену переменных, получите линеаризованную форму для каждой из приведенных функций. С помощью метода наименьших квадратов найти значения параметров приближающей линейной функции. Построить графики исходных данных и полученной аппроксимирующей функции.

2. Найти аппроксимирующую функцию средствами пакета Matlab. Сравнить с результатом, полученным методом наименьших квадратов. Рассчитать значение среднеквадратического отклонения.

3. Оформить отчет по работе.

Номер варианта	Функция $y = f(x)$	Исходные данные		Номер варианта	Функция $y = f(x)$	Исходные данные	
		x	y			x	y

1	$y = c \cdot e^{ax}$	0	1.5	6	$y = a \cdot \ln(x) + b$	1.5	-0.72
		1	2.5			2.5	0.33
		2	3.5			3.5	1.09
		3	5			4	1.28
		4	7.5			5	1.85
2	$y = c \cdot x^a$	1	0.6	7	$y = \dfrac{x}{ax + b}$	1	0.03
		2	1.9			2	0.54
		3	4.3			3	0.28
		4	7.6			4	0.55
		5	12.6			5	0.78
3	$y = \dfrac{1}{ax + b}$	-1	6.62	8	$y = \dfrac{c \cdot x}{e^{dx}}$	1.6	3.36
		0	3.94			1.8	3.35
		1	2.17			2.1	3.19
		2	1.35			2.3	2.79
		3	0.89			2.9	2.67
4	$y = \dfrac{1}{(ax + b)^2}$	-1	13.45	9	$y = \dfrac{d}{x + c}$	2.4	1.30
		0	3.01			2.9	1.14
		1	0.67			3.1	1.24
		2	0.15			3.6	1.16
5	$y = \dfrac{a}{x} + b$	1	5.51	10	$y = \dfrac{1}{1 + c \cdot e^{ax}}$	0.1	0.90
		1.5	4.72			0.4	0.71
		1.9	4.54			0.7	0.95
		2.2	4.33			1.3	0.92
		2.5	4.02			1.9	1.14

Практическая работа №6

«Численное дифференцирование и интегрирование»

Контрольные вопросы

1. Каким образом можно повысить точность численного дифференцирования?

2. В чем основные преимущества формулы трапеций по отношению к методу прямоугольников?

3. Как выбирается шаг интегрирования?

4. Чему равен порядок погрешности формулы Симпсона для двумерной подынтегральной функции?

5. Какие условия обязательно должны выполняться в методе трех восьмых и почему?

Индивидуальные задания

1. Дана таблица значений функции $y = f(x)$.

x	y	x	y	x	y
1.0	1.2661	1.6	1.7500	2.2	2.6291
1.1	1.3262	1.7	1.8640	2.3	2.8296
1.2	1.3937	1.8	1.9896	2.4	3.0493
1.3	1.4693	1.9	2.1277	2.5	3.2898
1.4	1.5534	2.0	2.2796	2.6	3.5533
1.5	1.6467	2.1	2.4463	2.7	3.8417
				2.8	4.1573

Найдите: *а*) значение первой производной функции в точке $x = 0.8 + i \cdot 0.2$, где i – номер вашего варианта; *б*) значение второй производной функции в точке $x = 2.6 - i \cdot 0.1$, где i – номер вашего варианта.

2. С помощью интерполяционных формул Ньютона найдите значение первой и второй производных функции, заданной таблично в пункте 4 вашего варианта, в указанных точках.

Номер варианта	x	Номер варианта	x
1	$x = 1.50,\ \ x = 1.51,$ $x = 1.59,\ \ x = 1.60.$	6	$x = 0.50,\ \ x = 0.51,$ $x = 0.59,\ \ x = 0.60.$
2	$x = 0.00,\ \ x = 0.05,$ $x = 0.45,\ \ x = 0.50.$	7	$x = 1.1,\ \ x = 1.2,$ $x = 2.0,\ \ x = 2.1.$
3	$x = 1.0,\ \ x = 1.1,$ $x = 1.9,\ \ x = 2.0.$	8	$x = 0.10,\ \ x = 0.35,$ $x = 2.35,\ \ x = 2.60.$
4	$x = 0.50,\ \ x = 0.51,$ $x = 0.59,\ \ x = 0.60.$	9	$x = 1.50,\ \ x = 1.51,$ $x = 1.59,\ \ x = 1.60.$
5	$x = 0.10,\ \ x = 0.35,$ $x = 2.35,\ \ x = 2.60.$	10	$x = 0.00,\ \ x = 0.05,$ $x = 0.45,\ \ x = 0.50.$

3. Вычислить приближенное значение интеграла по формулам трапеций и трех восьмых, разбивая отрезок интегрирования на 9 одинаковых частей. Вычислить определенный интеграл с помощью функции quad(). Сравнить полученные значения интеграла с точным.

4. Оформить отчет по работе.

Номер варианта	Интеграл	Номер варианта	Интеграл
1	$\int_1^e \frac{\ln^2(x)}{x} dx$	6	$\int_1^2 \frac{dx}{x^2 + x}$

2	$\int_0^2 \sqrt{4-x^2}dx$	7	$\int_1^{e^{\pi/2}} \cos(\ln(x))$
3	$\int_0^1 \frac{x}{1+x^4}dx$	8	$\int_1^3 x^3\sqrt{x^2-1}dx$
4	$\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\sin^2(x)}{\cos(x)}dx$	9	$\int_{\ln(2)}^{2\ln(2)} \frac{dx}{e^x-1}$
5	$\int_{-1}^1 x\cdot\arctan(x)dx$	10	$\int_0^1 \frac{2\cdot\arcsin(x)}{\sqrt{1-x^2}}dx$

Практическая работа №7 «Численные методы решения начальных задач для обыкновенных дифференциальных уравнений»

Контрольные вопросы

1. В чем заключается основная особенность метода Пикара?

2. Поясните геометрический смысл метода Эйлера для решения обыкновенных дифференциальных уравнений.

3. Как определяется порядок точности рассмотренных методов Эйлера и Рунге-Кутты?

Индивидуальные задания

1. Применяя указанные методы, реализовать алгоритм численного решения дифференциального уравнения с начальным условием на отрезке $[a,b]$ с произвольно заданным шагом.
2. Решить предложенную задачу Коши, используя встроенные функции пакета Matlab.
3. Оформить отчет по работе.

Номер варианта	Задача Коши	Отрезок $[a,b]$	Методы
1	$y' = 2x-3y,\quad y(0)=1$	$[0,10]$	Метод Рунге-Кутты 2-го порядка

			Исправленный метод Эйлера
2	$y' = 0.2y^2 + \frac{0.8}{x^2}, \quad y(1) = 1$	[1,2]	Метод Эйлера-Коши Метод Пикара
3	$y' = \frac{0.2}{x^2} - \frac{y}{x} - 0.8y^2, \quad y(1) = 0.5$	[1,2]	Метод Пикара Метод Рунге-Кутты 4-го порядка
4	$y' = 1.6y^2 + \frac{0.4}{x^2}, \quad y(1) = 1$	[1,2]	Метод Эйлера Метод Рунге-Кутты 4-го порядка
5	$y' = \frac{0.9}{x^2} - \frac{y}{x} - 1.6y^2, \quad y(1) = 0.75$	[1,2]	Метод Эйлера Метод Рунге-Кутты 2-го порядка
6	$y' = 0.9y^2 + \frac{1.6}{x^2}, \quad y(1) = 1$	[1,2]	Исправленный метод Эйлера Метод Пикара
7	$y' = xy^2 + 1, \quad y(0) = 0$	[0,1]	Метод Эйлера Метод Рунге-Кутты 4-го порядка
8	$y' = y^2 + \frac{1}{x^2}, \quad y(1) = 1$	[1,2]	Метод Пикара Метод Эйлера
9	$y' = y^2 + x^2, \quad y(0) = 0$	[0,1]	Исправленный метод Эйлера Метод Рунге-Кутты 4-го порядка
10	$y' = 0.25y^2 + \frac{2}{x^2}, \quad y(1) = 1$	[1,2]	Метод Рунге-Кутты 2-го порядка Метод Пикара

Практическая работа №8 «Численные методы решения краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений»

Контрольные вопросы

1. В чем заключается основная особенность метода коллокации? метода Галеркина?

2. Какой порядок аппроксимации производных применяется для внутренних узлов сетки в методе конечных разностей?.

Индивидуальные задания

1. Используя метод конечных разностей, составить решение краевой задачи для обыкновенного дифференциального уравнения с точностью $\varepsilon = 10^{-3}$ с шагом $h = 0.1$.
2. Используя метод коллокации и метод Галеркина, найти решение уравнений с указанными граничными условиями.
3. Оформить отчет по работе.

№ варианта	Задания
1	1. $y'' + \dfrac{y'}{x} + 2y = x,\quad y(0.7) = 0.5,\quad 2y(1) + 3y'(1) = 1.2$ 2. $y'' - 2xy' + 2y = x,\quad y(0) = 0,\quad y'(1) = 1$
2	1. $y'' + y' + y = x + 1,\quad y'(0.8) = 1.2,\quad y(0.5) - 2y'(0.5) = 1$ 2. $y'' + y = \sin x,\quad y(0) = 0,\quad y(\frac{\pi}{2}) = 1$
3	1. $y'' - xy' + 2y = x + 1,\quad y(1.2) = 1,\quad y(0.9) - 0.5y'(0.9) = 2$ 2. $y'' + 4y' + 4y = 8,\quad y(-1) = 0,\quad y(1) = 0$
4	1. $y'' - 2y' - \dfrac{y}{x} = 3,\quad y(0.2) = 2,\quad 0.5y(0.5) - y'(0.5) = 1$ 2. $y'' + 3y' + y = 1,\quad y(0) = 0,\quad y(1) = 1$
5	1. $y'' + xy' + y = x + 1,\quad y'(0.8) = 1.2,\quad y(0.5) - 2y'(0.5) = 1$ 2. $y'' - 2xy' + 2y = x^2 - 1,\quad y(0) = 0,\quad y(1) = 2$
6	1. $y'' - 0.5y' + 3y = 2x^2,\quad y(1.3) = 1,\quad y(1) + 2y'(1) = 0.6$ 2. $y'' - 3xy' + 2y = x + 1,\quad y(0) = 1,\quad y(1) = 0$
7	1. $y'' + 1.5y' - xy = 0.5,\quad y(1.6) = 3,\quad 2y(1.3) - y'(1.3) = 1$ 2. $y'' + 2xy' + 2y = x - 1,\quad y(0) = 0,\quad y(1) = 1$
8	1. $y'' + 2xy' - y = 0.4,\quad y'(0.6) = 2,\quad 2y(0.3) + y'(0.3) = 1$ 2. $y'' + xy' + y = 2x,\quad y(0) = 0,\quad y(1) = 0$
9	1. $y'' - 0.5y' + y = 2,\quad y(0.4) = 1.2,\quad y(0.7) + 2y'(0.7) = 1.4$

	2. $y'' + (1 + x^2)y' = 1,\quad y(-1) = 0,\quad y(1) = 1$
10	1. $y'' + \frac{2}{x}y' - 3y = 2,\quad y'(0.8) = 1.5,\quad 2y(1.1) + y'(1.1) = 3$ 2. $y'' + \frac{1}{x}y' + y = 0,\quad y(0) = 1,\quad y(1) = 0$
11	1. $y'' + x^2 y' + y = x,\quad y(0.8) = 3,\quad 2y(0.5) - y'(0.5) = 1$ 2. $y'' - 3y' + 2y = x + 1,\quad y(0) = 1,\quad y(1) = 0$
12	1. $y'' + 3xy' + 2y = 1.5,\quad y'(0.7) = 1.3,\quad 0.5y(1) + y'(1) = 2$ 2. $y'' + y = x^2 + 1,\quad y(0) = 0,\quad y(1) = 0$

Практическая работа №9
«Численные методы решения уравнений в частных производных»

1. Применяя метод сеток с шагом h=1/4 найти решение уравнения Лапласа в квадрате с вершинами A(0,0), B(0,1), C(1,1), D(1,0). Краевые условия приведены в таблице:

Вариант	$u\vert_{AB}$	$u\vert_{BC}$	$u\vert_{CD}$	$u\vert_{AD}$
1	$30y$	$30(1-x^2)$	0	0
2	$30y$	$3\cos\frac{\pi x}{2}$	$30\cos\frac{\pi y}{2}$	0
3	$50y(1-y^2)$	0	0	$50\sin\pi x$
4	$20y$	20	$20y^2$	$50x(1-x)$
5	0	$50x(1-x)$	$50y(1-y^2)$	$50x(1-x)$
6	$30\sin\pi y$	$20x$	$20y$	$30x(1-x)$
7	$30(1-y)$	$20\sqrt{x}$	$20y$	$30(1-x)$
8	$50\sin\pi y$	$30\sqrt{x}$	$30y^2$	$50\sin\pi x$
9	$40y^2$	40	40	$40\sin\frac{\pi x}{2}$
10	$50y$	$50(1-x)$	0	$60x$
11	$30(1-y)$	10	$20y$	$50x(1-x)$
12	0	$30\sqrt{x}$	$20y^2$	$50\sin\pi x$

2. Используя метод сеток, составить решение смешанной задачи для дифференциального уравнения параболического типа $\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$ при заданных начальных и граничных условиях:

$u(x,0) = f(x), u(0,t) = q(t), u(0.6;t) = p(t)$, $x \in [0;0.6]$.

Решение выполнять при $h = 0.1$ для $t \in [0;0.01]$ с четырьмя десятичными знаками.

Вариант	$f(x)$	$q(t)$	$p(t)$
1	$x(x-1)+0.2$	$3t+1$	$2t$
2	$\sin(x+0.66)$	0.4652	$0.165+4t$
3	$\cos(2x-0.22)$	$t+0.52$	0,65
4	$\sin(2.63-x)$	$5t-0.25$	0,141
5	$x(x-1)-0.48$	$0.46521-0.1t$	0,68
6	$\sin(2x)$	$3(t-0.12)$	$3t+1$
7	$3x(x-1)$	$0.08+2t$	0,36
8	$2x(x-1)+0.14$	0.122	$3t+1$
9	$\cos(2x+0.33)$	$t-0.47$	0.121
10	$3x(x+1)$	$0.165+4t$	0.157
11	$\sin(3x+0.54)$	0.154	$3(t-0.12)$
12	$1.22+x^2$	$2t$	1.26

4.2. Перечень обязательной (основной) литературы

1. Вержбицкий В. М. Численные методы. (Линейная алгебра и нелинейные уравнения) – М.: Высшая школа, 2001. – 266 с.
2. Вержбицкий В. М. Численные методы. (Математический анализ и обыкновенные дифференциальные уравнения) – М.: Высшая школа, 2001. – 266 с.
3. Бахвалов И.В., Жидков Н. П., Кобельков Г.М. Численные методы. – М.: Лаборатория базовых знаний, 2000.– 624с.
4. Березин И.С., Жидков Н.П. Методы вычислений. – М.: Гл. ред. Физ. – мат. лит., 1991.– 521 с.
5. Демидович Б.П., Марон И.А. Основы вычислительной математики. – М.: Наука, 1992. – 402 с.

6. Копченова Н.В., Марон И.А. Вычислительная математика в примерах и задачах. – М.: Наука, 1992.– 363 с.
7. Боглаев Ю.А. Вычислительная математика и программирование. – М.: Высшая школа, 1994. – 366 с.
8. Турчак Л.И. Основы численных методов. – М.: Наука, 1992. – 310 с.
9. Волков Е.А. Численные методы. – М.: Наука, ФИЗМАТЛИТ, 1997. – 248 с.
10. Самарский А.А. Введение в численные методы: Учеб. Пособие. – М.: Наука, 1998. – 345 с.

4.3. Перечень дополнительной литературы

1. Поршнев С.В. Вычислительная математика. – СПб.: БХВ-Петербург, 2004.– 320 с.
2. Мэтьюз Д.Г., Куртис Ф.Д. Численные методы. Использование Matlab. Пер. с англ. – М.: Изд. дом «Вильямс», 2001. – 720 с.
3. Иглин С.П. Математические расчеты на базе Matlab. – СПб.: БХВ-Петербург, 2005.– 640 с.
4. Ращиков В.И., Рошаль А.С. Численные методы решения физических задач: Учеб пособие. – СПб.: Изд-во «Лань», 2005.– 208 с.
5. Косарев В.И. 12 лекций по вычислительной математике. – М.: Физматкнига, Изд-во МФТИ, 2000. – 221 с.
6. Демидович Б.П., Марон И.А., Шувалова Э.З. Численные методы анализа. – М.: Наука, 1997. – 368 с.
7. Карманов В.Г. Математическое программирование. – М.: Наука, ФИЗМАТЛИТ, 2001. – 259 с.
8. Плохотников К.Э. Математическое моделирование и вычислительный эксперимент. – М.: Едиториал УРСС, 2003. – 280 с.
9. Matlab Дьяконов В. Mathcad 8/2000. – СПб: Питер, 2001. – 592 с.
10. Потемкин В.Г. Система инженерных и научных расчетов. Matlab 5х –в 2-х т. – М.: Диалог МИФИ. 1999. – 670 с.

11. Потемкин В.Г. Инструментальные средства Matlab 5x – М.: Диалог МИФИ, 2001. – 324 с.
12. Кетков Ю., Кетков А., Шульц М. Matlab 6.x: программирование численных методов – СПб: БХВ – Петербург, 2004. – 660 с.
13. Ануфриев И.Е., Смирнов А.Б., Смирнова Е.Н. Matlab 7. – СПб.: БХВ – Петербург, 2005. – 1104 с.
14. Семененко М.Г. Математическое моделирование в Mathcad. – М.: Альтекс-А, 2003. – 208 с.

4.4. Перечень методических пособий

1. Чепак Л.В., Масловская А.Г. Численные методы. Использование Matlab. Уч.-мет. пособие. Часть I. Благовещенск, 2005. – 68 с. (электронный вариант)
2. Масловская А.Г., Чепак Л.В. Численные методы. Моделирование на базе Matlab. Практикум. – Благовещенск, 2006. – 109 с.

5. КОМПЛЕКТ ЭКЗАМЕНАЦИОННЫХ БИЛЕТОВ

Экзаменационный билет №1

1. Численные методы решения краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений. Метод коллокации.
2. Приближенные числа, их абсолютные и относительные погрешности. Верные знаки числа.
3. Решить задачу. Найти вещественные корни системы, используя метод Ньютона, с точностью $\varepsilon = 10^{-3}$:

$$\begin{cases} 2y^3 \cdot x^2 \cdot 1 : 0 \\ yx^3 \cdot x \cdot 4 : 0 \end{cases}$$

Экзаменационный билет №2

1. Численные методы решения начальных задач для обыкновенных дифференциальных уравнений. Постановка задачи. Классификация методов. Метод Пикара.

2. Математическое моделирование и вычислительный эксперимент. Этапы математического моделирования
3. Решить задачу. По данной таблице значений функции $y = \lg x$ найти значение $\lg 1001$, используя интерполяционную формулу Ньютона. Указать оценку остаточного члена.

x	y
1000	3.0000000
1010	3.0043214
1020	3.0086002

Экзаменационный билет №3

1. Численные методы решения начальных задач для обыкновенных дифференциальных уравнений. Метод Эйлера и его модификации.
2. Погрешности вычислений. Арифметические действия над приближенными числами.
3. Решить задачу. Методом Зейделя решить систему линейных алгебраических уравнений с точностью $\varepsilon = 10^{-2}$:

$$\begin{cases} 6x_1 - x_2 - x_3 = 11.33 \\ -x_1 + 6x_2 - x_3 = 32 \\ -x_1 - x_2 + 6x_3 = 42 \end{cases}.$$

Экзаменационный билет №4

1. Численные методы решения нелинейных алгебраических уравнений. Метод половинного деления. Метод хорд. Геометрическая интерпретация рассмотренных методов.
2. Устойчивость. Корректность. Сходимость.
3. Решить задачу. Применяя метод Эйлера, численно решить дифференциальное уравнение с начальным условием на отрезке $[0,1]$ с шагом $h = 0.2$:

$$y' = \frac{1}{2}xy, y(0) = 1.$$

Экзаменационный билет №5

1. Аппроксимация функций. Подбор эмпирических формул. Метод наименьших квадратов. Локальное сглаживание данных.
2. Численные методы решения краевых задач для ОДУ. Методы сведения краевой задачи к задаче Коши.
3. Решить задачу. Вычислить приближенно интеграл по формуле Симпсона и по формуле Ньютона, выбрав шаг $h = 0.1$. Оценить остаточные члены.

$$\int_0^{0.6} \frac{dx}{1+x}.$$

Экзаменационный билет №7

1. Численное решение систем линейных алгебраических уравнений. Прямые методы. Метод Гаусса. Схема Гаусса с выбором главного элемента.
2. Численные методы решения краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений. Постановка краевой задачи. Классификация методов.
3. Решить задачу. Написать интерполяционный многочлен Лагранжа для функции, значения которой заданы таблично:

i	0	1	2	3
x	0	0.1	0.3	0.5
y	-0.5	0	0.2	1

Экзаменационный билет №8

1. Численные методы решения краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений. Метод конечных разностей.
2. Аппроксимация функций. Интерполяционные сплайны. Построение интерполяционных сплайнов второго и третьего порядков.
3. Решить задачу. Для системы уравнений найти положительные корни методом простой итерации с тремя верными знаками:

$$\begin{cases} x^3 + y^3 - 6y + 3 = 0 \\ y^3 - x^3 - 6x + 2 = 0 \end{cases}.$$

Экзаменационный билет №9

1. Численные методы решения нелинейных алгебраических уравнений. Метод Ньютона. Метод простых итераций. Геометрическая интерпретация рассмотренных методов.
2. Обусловленность линейных алгебраических систем.
3. Решить задачу. Методом Рунге-Кутта четвертого порядка найти решение дифференциального уравнения с шагом $h = 0.2$ на отрезке $[0,1]$:

$$y' = y - x, y(0) = 1.5$$

Экзаменационный билет №10

1. Численное решение систем линейных алгебраических уравнений. Итерационные методы. Метод простой итерации. Метод Зейделя.
2. Численные методы решения начальных задач для обыкновенных дифференциальных уравнений. Семейство методов Рунге-Кутты.
3. Решить задачу. По данной таблице значений функции $y = \lg x$ найти значение $\lg 1019$, используя интерполяционную формулу Ньютона. Указать оценку остаточного члена.

x	y
1000	3.0000000

1010	3.0043214
1020	3.0086002

Экзаменационный билет №11

1. Численные методы решения краевых задач для дифференциальных уравнений с частными производными. Классификация. Начальные и краевые условия. Задача Коши. Смешанная задача. Численные методы решения задач эллиптического типа.
2. Аппроксимация функций. Интерполяционные формулы Ньютона для равноотстоящих узлов.
3.

Решить задачу. Используя метод Галеркина, найти решение уравнений с граничными условиями:

$$y'' - 2xy' + 2y = 3x, \quad y(0) = 0, \quad y'(1) = 1$$

Экзаменационный билет №12

1. Численное решение систем нелинейных уравнений. Метод Ньютона. Метод простой итерации.
2. Аппроксимация функций. Интерполирование функций. Интерполяционный многочлен Лагранжа.
3.

Решить задачу. Применяя метод сеток с шагом *h*=1/4 найти решение уравнения Лапласа в квадрате с вершинами *A*(0,0), *B*(0,1), *C*(1,1), *D*(1,0). Краевые условия приведены в таблице:

$u\|_{AB}$	$u\|_{BC}$	$u\|_{CD}$	$u\|_{AD}$
$30y$	$30(1-x^2)$	0	3

Экзаменационный билет №13

1. Численное решение систем линейных алгебраических уравнений. Прямые методы. Метод квадратных корней.
2. Численное интегрирование. Квадратурные формулы. Выбор шага интегрирования.
3.

Решить задачу. Используя метод коллокации, найти решение уравнений с граничными условиями:

$$y'' + 3y' + 3y = 5x, \quad y(-1) = 0, \quad y(1) = 0$$

Экзаменационный билет №14

1. Численные методы решения краевых задач для дифференциальных уравнений с частными производными. Классификация. Начальные и краевые условия. Задача Коши. Численные методы решения задач гиперболического типа.

2. Численные методы линейной алгебры. Вычисление определителей. LU-разложение матриц.
3. Решить задачу. Найти три последовательных приближения (по методу Пикара) дифференциального уравнения: $y' = x^2 + y^2$, с начальным условием: $y(0) = 0$. Оценить погрешность вычислений.

Экзаменационный билет №15

1. Численные методы решения краевых задач для дифференциальных уравнений с частными производными. Классификация. Начальные и краевые условия. Задача Коши. Численные методы решения задач параболического типа.
2. Численное интегрирование. Квадратурная формула Гаусса. Метод Канторовича. Интегрирование с помощью рядов.
3. Решить задачу. Решить систему линейных алгебраических уравнений методом простой итерации с точностью $\varepsilon = 10^{-3}$:

$$\begin{cases} 1.02x - 0.25y - 0.3z = 0.515 \\ -0.41x + 1.13y - 0.15z = 1.555 \\ -0.25x - 0.14y + 1.21z = 2.78 \end{cases}.$$

Экзаменационный билет №16

1. Аппроксимация функций. Понятие о приближении функции. Точечная аппроксимация и мера отклонения. Использование рядов. Многочлены Чебышева.
2. Численное дифференцирование. Аппроксимация производных. Погрешности. Выбор оптимального шага. Использование интерполяционных формул. Частные производные.
3. Решить задачу. Применяя метод Эйлера, составить на отрезке $[1;1.5]$ таблицу значений решения уравнения: $y'' + \frac{y'}{x} + y = 0$ с начальными условиями $y(1) = 0.77, y'(1) = -0.44$, выбрав шаг $h = 0.1$.

Экзаменационный билет №17

1. Численное решение систем линейных алгебраических уравнений. Итерационные методы. Метод Якоби.
2. Численные методы решения начальных задач для обыкновенных дифференциальных уравнений. Семейство методов Рунге-Кутты.
3.

Решить задачу. Используя метод сеток, составить решение смешанной задачи для дифференциального уравнения параболического типа $\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$ при заданных начальных и граничных условиях:
$u(x,0) = f(x), u(0,t) = q(t), u(0.6;t) = p(t)$, $x \in [0;0,8]$.

Решение выполнять при $h = 0.2$ для $t \in [0;0.01]$ с четырьмя десятичными знаками.

$f(x)$	$q(t)$	$p(t)$
$x(x-1)+0.2$	$2t+1$	$3t$

Экзаменационный билет №18

1. Численное решение систем линейных алгебраических уравнений. Прямые методы. Метод прогонки. Метод вращения линейных алгебраических уравнений.
2. Численные методы решения начальных задач для обыкновенных дифференциальных уравнений. Семейство методов Рунге-Кутты.
3. Решить задачу. Функция $y = \sqrt[3]{x}$ задана таблицей:

x	1.0	1.1	1.3	1.5	1.6
y	1	1.032	1.091	1.145	1.17

Применив схему Эйткена, найти $\sqrt[3]{1{,}15}$

6. НЕОБХОДИМОЕ ТЕХНИЧЕСКОЕ И ПРОГРАММНОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ

Лекции и практические занятия проводятся в стандартной аудитории, оснащенной в соответствии с требованиями преподавания теоретических дисциплин.

Аудитория для проведения лабораторных занятий должна быть оснащена компьютерами на 10 посадочных мест. Требования к программному обеспечению – пакет прикладных математических программ Matlab 8.0.

7. КАРТА КАДРОВОЙ ОБЕСПЕЧЕННОСТИ ДИСЦИПЛИНЫ

Лектор и руководитель практических и лабораторных занятий – доцент, к.ф.-м.н. Масловская А.Г.