Федеральное агентство по образованию

АМУРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

ГОУВПО «АмГУ»

Факультет математики и информатики

УТВЕРЖДАЮ

Зав. кафедрой МАиМ

_______Т.В. Труфанова

19 сентября 2007г.

ОСНОВАНИЯ ГЕОМЕТРИИ

Учебно – методический комплекс дисциплины

для специальности 010101 – математика

Составитель: Н.В. Кван

Благовещенск

2007

ББК
К

*Печатается по решению
редакционно-издательского
совета
факультета математики и
информатики
Амурского государственного
университета*

Кван Н.В.

Основания геометрии. Учебно – методический комплекс дисциплины для студентов АмГУ 4 курса очной формы обучения по специальности 010101 «Математика». – Благовещенск: Амурский гос. ун–т, 2007. − 41 с.

Учебно – методический комплекс дисциплины "Основания геометрии" содержит рабочую программу дисциплины, краткий курс лекций, библиографический список.

1. РАБОЧАЯ ПРОГРАММА

по дисциплине **"Основания геометрии"**

для специальностей: 010101–"Математика"

Курс 4 Семестр 7

Лекции: 32 час Экзамен 7 семестр

Практические занятия 32 час Зачет (нет)

Лабораторные занятия (нет).

Самостоятельная работа 36 час.

Всего 100 часов

Рабочая программа составлена на основании Государственного образовательного стандарта высшего профессионального образования
по специальности 010101–"Математика"

1.1 Цели и задачи дисциплины, ее место в учебном процессе.

1.1.1 Цель преподавания учебной дисциплины.

Целью преподавания дисциплины является глубокое овладение студентами аксиоматическим методам в геометрии, ознакомление их с различными эквивалентными системами аксиом евклидовой геометрии и неевклидовой геометрии Лобачевского, с реализацией аксиоматического метода, логическим построением геометрии в школьном курсе математики, приобретение студентами умений и навыков исследования различных систем аксиом и построения аксиоматических теорий, реализация принципа историзма в процессе преподавания.

1.1.2 Задачи изучения дисциплины

Основной задачей является обеспечение качественной математической подготовки студентов на современном уровне.

1.1.3 Перечень дисциплин с указанием разделов, усвоение которых студентами необходимо для изучения данной дисциплины.

Школьный курс геометрии, линейная алгебра, аналитическая геометрия, теория множеств, общая алгебра, векторная алгебра, дифференциальная геометрия, история математики, математическая логика, философия математики, числовые системы.

1.2 Содержание дисциплины

1.2.1 Наименование тем, их содержание, объем в часах лекционных занятий.

7 семестр – 32 час.

1. Общие вопросы аксиоматики – 8 час.

Понятие о математической структуре. База структуры. Аксиомы структуры – 2 час.

Понятие об интерпретации системы аксиом. Изоморфизм – 2 час.

Требования, предъявляемые к системе аксиом. Непротиворечивость системы аксиом – 2 час.

Независимость аксиом, полнота системы аксиом – 2 час.

2. Обоснование евклидовой геометрии – 13 час.

Система аксиом Г. Вейля трехмерного евклидова пространства – 1 час.

Определение некоторых понятий в системе аксиом Вейля – 1 час.

Примеры доказательств некоторых теорем в системе аксиом Вейля–1 час.

Непротиворечивость системы аксиом Вейля. Арифметическая модель системы аксиом Вейля – 1 час.

Полнота системы аксиом Вейля – 1 час.

Система аксиом А.В. Погорелова школьного курса геометрии – 1 час.

Простейшие следствия 1-6 групп системы аксиом Погорелова – 2 час.
Непротиворечивость системы аксиом Погорелова. Арифметическая модель – 1 час.
Независимость аксиомы существования отрезка заданной длины – 1 час.
Система аксиом Д. Гильберта – 3 час.

3. Неевклидовы геометрии – 9 час.

Система аксиом плоскости Лобачевского. Определение параллельных прямых в системе аксиом плоскости Лобачевского – 3 час.
Расходящиеся прямые и их свойства. Угол параллельности. Взаимное расположение прямых на плоскости Лобачевского – 3 час.
Непротиворечивость геометрии Лобачевского. Модели Кели – Клена и А. Пуанкаре – 3 час.

4. Независимость аксиомы параллельных от остальных аксиом евклидовой геометрии. Решение проблемы 5 постулата – 2 час.

1.2.2. Практические занятия, их содержание и объем в часах

7 семестр –32 час

Исторический обзор обоснования геометрии. Геометрия до Евклида. «Начала» Евклида – 4 час.

5 постулат, роль 5 постулата в геометрии, эквивалентные 5 постулата, постановка проблемы 5 постулата, попытки доказательства 5 постулата -3 час

Работы Саккери, Ламберта, Лежандра, посвященные 5 постулату – 2 час

Открытие неевклидовой геометрии: К. Гаусс, Я. Бойяи, Н.И. Лобачевский – 3час.

Жизнь и деятельность Н.И. Лобачевского – 2 час.

Работы по основаниям геометрии в конце 19 века – 4 час.

Следствия аксиом 1 – 5 групп Д. Гильберта – 4 час

Теория измерений в системе аксиом Д. Гильберта. Длина отрезка.-3час.

Теория измерений в системе аксиом Г. Вейля. Длина отрезка. -2 час.

Площадь многоугольника. Теорема существования и единственности -3 час.

Теория объемов (обзор). – 2 час.

1.2.3. Перечень и темы промежуточных форм контроля знаний студентов.

1. Контрольные работы (КР):

   КР №1 – «Система аксиом Г. Вейля»,

   КР №2 – «Система аксиом плоскости Лобачевского».

2. Коллоквиумы (Колл):

   Колл №1 – «5 постулат»,

   Колл №2 – «Система аксиом школьного курса геометрии».

3. Расчётно-графические работы (РГР) и рефераты (реф):

   реф. №1 – «Исторический обзор обоснования геометрии»,

   реф №2 – «Система аксиом Д. Гильберта».

1.2.4. Самостоятельная работа студентов (36 час.)

Проективная геометрия. Аксиомы проективной геометрии. Аксиомы принадлежности. Теорема Дезарга. Гармоническая четверка точек. Сложное отношение четырех точек. Система проективных координат. Аксиомы порядка. Расширенная плоскость. Проективная плоскость как связка прямых. Принцип двойственности. Кривые второго порядка. Аффинная классификация кривых второго порядка. Проективная геометрия в схеме Вейля. Геометрия Лобачевского в схеме Вейля. Псевдоевклидово пространство. Гиперболическая геометрия Лобачевского. Модель Кели-Клейна плоскости Лобачевского. Сферическая геометрия. Предмет сферической геометрии. Метрика на сфере. Теоремы синусов и косинусов. О сферической геометрии в малом. Эллиптическая геометрия.

1.2.5. Требования к знаниям студентов, предъявляемые на экзамене

Необходимым условием допуска на экзамен является выполнение студентом индивидуальной контрольной работы, в которую включены задачи по линейному программированию (текстовая форма задачи), транспортная задача, задача коммивояжера, задача о назначении и предоставление реферата. В предлагаемый билет входят два вопроса: основной, дополнительный и три задания. Студент должен дать развернутый ответ на основной вопрос, и краткий – на дополнительный, решить предложенные задачи. Развернутый ответ предполагает полное знание теории по данной части курса, свободную ориентацию в материале, краткий ответ – основных теоретических моментов: понятий и терминологии.

Знания студента оцениваются «отлично» при полном изложении теоретического материала экзаменационного билета, ответах на дополнительные вопросы со свободной ориентацией в материале и других литературных источниках, при правильно выполненной практической части.

Оценка «хорошо» ставится при твердых знаниях студентом всех разделов курса (в пределах конспекта лекций) и при преимущественно правильно выполненной практической части (допускаются ошибки вычислительного характера, небольшие недочеты или неточности).

Оценку «удовлетворительно» студент получает, если дает неполные ответы на теоретические вопросы билета, показывая поверхностное знание учебного материала, владение основными понятиями и терминологией; при неверном ответе на билет или на дополнительные вопросы, при этом по крайней мере одно из практических заданий должно быть выполнено верно.
Оценка «неудовлетворительно» выставляется за незнание студентом одного из разделов курса, если студент не дает ответы на теоретические вопросы билета, показывая лишь фрагментарное знание учебного материала, незнание основных понятий и терминологии, либо если не решена ни одна задача из трех предлагаемых в билете.

1.2.6. Вопросы к экзамену

1. Математическая структура. База, отношения, аксиомы структуры. Примеры.
2. Инерция системы аксиом. Непротиворечивость системы аксиом.
3. Независимость и полнота системы аксиом.
4. Система аксиом Г. Вейля. Структура трёхмерного евклидова пространства.
5. Определение некоторых понятий в системе аксиом Вейля.
6. Примеры доказательства утверждений в системе аксиом Вейля. Теорема о единственности прямой, параллельной данной.
7. Арифметическая модель системы аксиом Г Вейля. Непротиворечивость системы аксиом Г. Вейля.
8. Полнота системы аксиом Г. Вейля.
9. Система аксиом А.В. Погорелова школьного курса геометрии.
10. Определение некоторых понятий в системе аксиом А.В. Погорелова. Примеры доказательства теорем.
11. Арифметическая модель системы аксиом А.В. Погорелова (планиметрия). Непротиворечивость системы аксиом А.В. Погорелова.
12. «Начала» Евклида.
13. 5 постулат. Постановка проблемы. Основные эквиваленты.
14. Исторический обзор работ, посвященных проблеме 5 постулата.
15. Система аксиом Д. Гильберта.
16. Определение понятий в системе аксиом Д. Гильберта. Примеры доказательства теорем в системе аксиом Д. Гильберта.
17. Система аксиом плоскости Лобачевского. Определение параллельных прямых в системе аксиом плоскости Лобачевского.
18. Простейшие факты геометрии Лобачевского. Примеры доказательств утверждений геометрии Лобачевского.
19. Непротиворечивость геометрии Лобачевского. Модели А. Пуанкаре и Кэли-Клейна.
20. Независимость аксиомы параллельных от остальных аксиом евклидовой геометрии. Решение проблемы 5 постулата.

21. Теория измерений в системе аксиом Д. Гильберта (обзор).
22. Теория измерений в системе аксиом Г. Вейля (обзор).

1.3 Учебно-методические материалы по дисциплине.

1.3.1 Основная литература:

2. Александров А.Д., Вернер А.Л., Рыжик В.И. Геометрия. 7-9 кл: Учебник для общеобразовательных учреждений .- 3-е изд, дораб..- М.: Просвещение, 2003.- 272 с.
3. Атанасян Л.С. Геометрия Лобачевского (стереометрия и планиметрия). – М.: Просвещение, 2001.- 336с.
4. Вернер А.Л., Кантор Б.Е., Франгулов С.А. Геометрия. ч. I,II. Санкт-Петербург «Специальная литература», 1997.
5. Гильберт Д. Основания геометрии. – М. – Л.: 1948.
6. Ефимов Н.В. Высшая геометрия.-7-е изд. Издательство: ЛБЗ, 2003.- 584 с.
7. Чешкова М.А. Основания геометрии. Барнаул: Изд-во Алт. гос. ун-та, 1999.- 58с.

1.3.2 Дополнительная литература:

1. Атанасян Л.С., Гуревич Г.В. Геометрия. ч. II. – М.:1976.
2. Атанасян Л.С., Бутузов В.Ф., Кадолицев С.Б., Киселёва Л.С., Позняк Э.Г. Геометрия 10-11. – М.: Просвещение, 1994.
3. Базылев В.Т., Дуничев К.И. Геометрия. ч. 2 – М.: 1975.
4. Лаптев В.Л. Геометрия Лобачевского, её история и значение. – М.: 1976.

2. МАТЕРИАЛЫ ДЛЯ ЧТЕНИЯ ЛЕКЦИЙ

§1.Происхождение аксиом

Одним из важнейших вопросов, возникающих при аксиоматическом построении науки, является вопрос об источниках, из которых черпаются ее фундаментальные истины — аксиомы и основные понятия. Геометрические аксиомы и основные понятия обладают исключительной достоверностью. В то время, как в других областях знаний щилиды, теории все время менялись, многие геометрические истины оставались неизменными. Это ставило геометрию в особое положение, вызывало настойчивую работу мысли по вопросу об источниках геометрических знаний.

На протяжении всей истории создания и развития геометрии по этому вопросу происходила борьба двух различных точек зрения — идеалистической и материалистической. Признавая первичность сознания и вторичность материи, сторонники идеалистической точки зрения на природу аксиом и основных понятий утверждали, что основные понятии и аксиомы не зависят от опыта. Они предшествуют всякому опыту человека, являются врожденными, не отражают никаких отношений и связей реального мира, являются свободными творениями и фантазиями человеческого разума.

Полное выяснение вопроса о природе и подлинном значении аксиом и основных понятий геометрии стало возможным лишь с позиции диалектического материализма. Опираясь на достижения науки и практики, основоположники Марксистско-ленинской философии доказали, что простран-ство — объективная, независящая от человека и его сознании коренная форма бытия материи. Материя существует Объективно и не может существовать вне пространства. Аксиомы, основные понятия геометрии выражают существенные свойства объективно существующего пространства.

В работе «Анти-Дюринг» Энгельс раскрывает сущность материалистического воззрения на природу геометрических знаний: «Как понятие числа, так и понятие фигуры заимствованы исключительно из внешнего мира, а не возникли в голове из чистого мышления. Должны были существовать вещи, имеющие определенную форму, и эти формы должны подвергаться сравнению, прежде чем можно было придти к понятию фигуры. Чистая математика имеет своим объектом пространственные формы и количественные отношения действительного мира, стало быть — весьма реальный материал. Тот факт, что этот материал принимает чрезвычайно абстрактную форму, может лишь слабо затушевывать его происхождение из внешнего мира» (Ф. Энгельс. Анти-Дюринг, 1969, стр. 33).

Большое значение в упрочении диалектико-материалистических представлений о природе пространства, происхождении аксиом имеет борьба В. И. Ленина против Э. Маха и его последователей. В своих философских работах «Материализм и эмпириокритицизм», «Философские тетради» В. И. Ленин последовательно разоблачил кантианские, махистские и другие приемы «опровержения» материалистических представлений о пространстве и убедительно доказал необходимость признания объективного характера времени и пространства. Ленин показал, что наши представления о времени и пространстве, будучи относительными на-данной ступени человеческого познания, развиваются, приближаясь к абсолютной истине. В «философских тетрадях» В. И. Ленин пишет: «...практическая деятельность человека миллиарды раз должна была приводить сознание человека к повторению различных логических фигур, дабы эти фигуры могли получить значение аксиом» (стр. 172). «От живого созерцания к абстрактному мышлению, а от него к практике — таков диалектический путь познания истины, познания объективной реальности» (1969, стр. 152, 153).

§2. Накопление геометрических знаний на Востоке

История возникновения и развития геометрии полностью подтверждает точку зрения диалектического материализма на природу геометрических аксиом, понятий, на процесс познания. Геометрия возникла и развивалась под влиянием жизненных потребностей.

Чтобы изучить геометрические свойства реальных тел и отношения между ними, люди должны были отвлечься от всех прочих свойств реальных тел, кроме геометрических. Так появились точки без протяжений, линии без ширины, поверхности, имеющие длину и ширину.

Геометрия в своей первоначальной форме представляла собой механическое собрание не связанных друг с другом фактов элементарного характера, заимствованных из природы путем наблюдений. Для обоснования высказываемых утверждений часто обращались к интуиции, как единственному аргументу. Яркий пример такого «обоснования» имеется у индусского математика Ганеши. Утверждение, что площадь круга равна половине произведения длины окружности на радиус, он подтверждает чертежом (рис. 1), под которым имеется надпись «Смотри». Ганеши предполагает, что если соединить две зубчатые фигуры, то получится параллелограмм, основания которого равны длине полуокружностей, а высота — радиусу. Очевидно, что это предположение неверно, хотя вывод получился верный.

Апелляция к интуиции, характерная для первоначального периода зарождения геометрии, явилась источником ошибочных правил индусской, вавилонской и египетской геометрии.

§3. Возникновение аксиоматического метода изложения геометрии в Греции

Застой и упадок экономики Египта затормозили дальнейшее развитие геометрии в этой стране. Постепенно центр математической культуры из Египта перемещается в Грецию. В VII — VI веках до н. э. в Греции наблюдается развитие городского строительства, мореплавания, зарождение астрономии, физики. Требовались уже более точные измерения-. При этом обнаружились ошибки и противоречия в египетской геометрии. Элементарные приемы непосредственного наблюдения, доказательства с помощью обращения к интуиции не могли решить стоящие перед геометрией сложные задачи. Нужно было оторвать геометрию от задач измерения реальных объектов (земледелие, строительство пирамид), придать ей теоретический характер.

Решение этой задачи взяла на себя школа Фалеса*. В школе Фалеса геометрия стала предметом тонкого исследования. Наряду с интуицией в геометрии видную роль начинают играть логические рассуждения.

С VI до III века дон. э. происходит всестороннее развитие и уточнение геометрического материала в трудах Фалеса, Пифагора, Демокрита, Аристотеля, Манехма, Евдокса. В трудах этих ученых производится систематизация фактического материала геометрии. Большое значение для дальнейшего развития геометрии имело открытие школой Пифагора существования несоизмеримых отрезков. До этого открытия считалось, что отношение любых двух отрезков может быть выражено рациональным числом. Греческие математики не владели понятием иррационального числа, поэтому наличие отношений двух отрезков, не выражающихся рациональным числом, положило резкую грань между понятиями числа и непрерывной величины, выражаемой отрезком. Известные грекам рациональные числа оказались недостаточными для выражения меры произвольных отрезков. Это положение в математике привело греческих ученых к убеждению, что геометрическая непрерывная величина является более общим понятием, чем число; геометрия —более общая наука, чем наука о числе, —она должна развиваться независимо от науки о числе, занимать господствующее положение.

Большой интерес для развития геометрии представляют труды греческих ученых Менехма и Евдокса. Современник и друг Платона* Евдокс являлся создателем теории пропорций и метода исчерпания. Метод исчерпания основывается на таком допущении: «Если от некоторой величины отнять половину или более и с остатком проделать ту же операцию и так поступать все дальше и дальше, то можно получить такую величину, которая будет меньше заданной величины». Метод исчерпания позволяет решать задачу измерения объема пирамиды, конуса, шара. Ученик Евдокса Менехм, решая задачу об удвоении куба, открывает конические сечения.

Возникает задача строго логического обоснования геометрии. Постановку задачи о логическом обосновании геометрии обычно связывают с именем Платона. Платон считал, что во всякой отрасли знаний необходимо выделять основные понятия и утверждения, из которых все остальные понятия и утверждения должны вытекать как их логические следствия. Эти основные понятия и утверждения должны составлять научную базу рассматриваемого вопроса. Общий замысел логического построения науки у Платона не сформулирован, все его учение было построено на полумистической базе.

Четкая формулировка логических принципов построения математической науки была дана Аристотелем. По мысли Аристотеля наука представляет собой совокупность предложений, относящихся к этой науке, расположенных и определенном порядке. Эти предложения делятся на основные, или исходные, и выводы из них — теоремы. Понятия, входящие в эти предложения, делятся на оновные понятия и выводные. Основные предложения должны быть непосредственно очевидны и не допускать доказательства. Основные понятия должны быть непосредственно понятны и не допускать определения.

К основным утверждениям (аксиомам) Аристотель предъявляет требование, чтобы они выражали совершенно необходимые факты. Таким образом, уже к III веку до н. э. геометрия в Греции достигла высокой степени абстрактности.

§4. «Начала» Евклида

В трудах Фалеса, Пифагора, Платона, Демокрита, Аристотеля, Евдокса, Менехма и др. греческих математиков и философов постепенно систематизируется материал классической геометрии, приводится в стройную логическую систему.

К IV веку э. появляются сводные сочинения под , в которых делаются попытки строгого логического изложения математики. Ни одно из этих сочинений до нас не дошло. Они утратили свое значение после появления замечательного сочинения «Начала», написанного Евклидом*. Воспитанник школы Платона Евклид создал математическую школу в Александрии. При изложении геометрии в «Началах» Евклид следует принципу Аристотеля построения науки, но до конца его не выдерживает. «Начала» Евклида состоят из 13 книг**. В I—IV книгах излагается планиметрия, книги VII—IX посвящены арифметике, X книга — несоизмеримым величинам, в XI—XIII книгах излагается стереометрия.

Евклид пытается строить геометрию исключительно геометрическими средствами, не внося в нее чужеродных элементов, каковыми он считает числовые соотношения. Не пользуясь численными соотношениями, Евклид устанавливает геометрические соотношения, эквивалентные алгебраическим тождествам. Например, теорема о квадрате суммы в «Началах» утверждает, что квадрат, построенный на сумме двух отрезков, равносоставлен двум квадратам, построенным на слагаемых отрезках плюс двум прямоугольникам, сторонами которых являются данные отрезки (рис. 2).

Каждая книга «Начал» начинается с определения понятий, которые впервые в ней встречаются. В первой книге, за определениями следуют постулаты и аксиомы. Затем идут «Предложения». Предложениями Евклид называет как теоремы, так и задачи конструктивного характера. Все предложения излагаются по единой схеме. После формулировки предложения в соответствии с чертежом повторяются, что дано и что требуется доказать или построить. Затем идет доказательство, аргументами для которого служат аксиомы, постулаты, определения, предшествующие предложения. Доказательство излагается подробно, указываются все возможные случаи расположения геометрических образов, свойства которых изучаются в предложении, но доказательство часто дается только для более сложных случаев. Доказательство заканчивается повторением доказываемого утверждения и словами «что и требовалось доказать». Материал излагается догматически, не устанавливается связь между отдельными предложениями, не указывается на их значение.

Остановимся несколько подробнее на первой книге «Начал». В ней излагается учение об отрезках, углах, треугольниках, о перпендикулярных прямых, строится теория параллельных прямых, изучается параллелограмм, рассматриваются свойства равносоставленных параллелограммов и треугольников. Заканчивается книга теоремой Пифагора (47 предложение) и обратной ей теоремой (48 предложение).

Начинается первая книга с 23 определений. Вот некоторые из них: «1. Точка есть то, что не имеет частей.

2.Линия же — длина без ширины.

3.Концы же линии — точки.

4.Прямая линия есть та, которая равнорасположена но отношению к точкам на ней.

5.Поверхность есть то, что имеет только длину и шири ну.

6. Концы поверхности — линии.

7.Плоская поверхность есть та, которая равнораспо ложена по отношению к прямым на ней.

8.Плоский угол есть наклонение друг к другу двух линий в плоскости, встречающихся друг с другом, но не расположенных на одной прямой.

9. Когда линии, содержащие угол, прямые, то угол Называется прямолинейным».

Определения 10, 11, 12 разъясняют понятия прямого, Тупого, острого углов.

«13. Граница есть то, что является оконечностью чего-либо.

14. Фигура есть то, что содержится внутри какой-нибудь или каких-нибудь границ».

В определениях 15,16, 17, 18, 19, 20, 21, 22 определяются понятия: круг, центр круга, диаметр круга, полукруг, многоугольник, равносторонний и равнобедренный треугольник, прямоугольный треугольник, прямоугольник, квадрат, ромб, параллелограмм.

«23. Параллельные прямые суть прямые, которые, находясь в одной плоскости и будучи продолжены в обе стороны неограниченно, ни с той ни с другой стороны между собой не встречаются.»

После определений помещены пять постулатов.

«Допустим:

I. Что от всякой точки до всякой точки можно провести прямую линию;

II. И что ограниченную прямую можно непрерывно продолжать по прямой;

III. И что из всякого центра всяким раствором можно описать круг;

IV. И что все прямые углы равны;

V. И если прямая, падающая на две прямые, образует внутренние и по одну сторону углы, в сумме меньшие двух прямых, то продолженные эти две прямые неограниченно встретятся с той стороны, где эта сумма меньше двух пря мых.»

За постулатами следует 9 аксиом. «1. Равные одному и тому же равны.

2. И если к равным прибавляются равные, то и целые будут равны.

3. И если от равных отнимаются равные, то и остатки будут равны.

4. Если к неравным прибавляются равные, то целые будут не равны.

5. И удвоенные одного и того же равны между собой.

6. И половины одного и того же равны между собой.

7. И совмещающиеся друг с другом равны между собой.

8. И целое больше части.

9. И две прямые не содержат пространства.»

После перечисления аксиом и постулатов Евклид в первой книге формулирует и доказывает 48 предложений.

«Предложение 1. На данной ограниченной прямой построить равносторонний треугольник.»

«Предложение 2. От данной точки отложить прямую, равную данной прямой.

Предложение 3. Из двух заданных неравных прямых от большей отнять прямую, равную меньшей».

Предложение 4 представляет собой первый признак равенства треугольников. Доказательство проводится с помощью совмещения.

В предложении 5 утверждается, что в треугольнике против равных сторон лежат и равные углы.

В предложении 6 формулируется утверждение, обратное утверждению 5.

В предложении 8 формулируется третий признак равенства треугольников. Доказательство проводится с помощью совмещения.

В предложении 9 доказывается существование биссектрисы угла, а в 10 — середины отрезка.

В предложениях 11, 12 решается задача о построении прямой, проходящей через данную точку и перпендикулярную данной прямой.

В предложении 15 утверждается и доказывается равенство вертикальных углов.

Предложение 16 утверждает, что внешний угол треугольника больше внутреннего угла, с ним не смежного.

«Предложение 17. Во всяком треугольнике сумма двух углов меньше двух прямых углов.

Предложение 18. Во всяком треугольнике большая сторона стягивает больший угол».

В предложении 19 высказывается утверждение, обратное утверждению предложения 18.

В предложении 20 утверждается, что сумма двух сторон треугольника больше его третьей стороны.

Предложение 23 представляет собой задачу о построении угла, равного данному углу.

Предложение 28 утверждает, что если прямая *c* пересекает прямые *a, b* так, что соответственные углы равны или сумма внутренних односторонних углов равна двум прямым углам, то прямые *aи b* параллельны.

Предложение 29 утверждает, что параллельные прямые образуют с любой секущей равные соответственные углы и сумма внутренних односторонних углов равна двум прямым.

В предложениях 30,31, 32, 33,34,35,36,37,38,39 40, 41, 42, 43, 44, 45 изучаются свойства параллельных прямых, равносоставленных треугольников, параллелограммов.

Предложение 46. На данном отрезке построить квадрат.

В предложении 47 формулируется теорема Пифагора, а в предложении 48 — обратное ей утверждение.

«Начала» Евклида имели исключительно большое значение для всего последующего развития математической науки. В них приведен в стройную логическую систему огромный материал, составляющий основу геометрии до настоящего времени. Эта система расположения геометрического материала без существенного изменения воспроизводится во многих учебниках элементарной геометрии.

В логическом отношении в «Началах» сделана попытка осуществить схему Аристотеля построения науки. Несмотря на огромные достоинства «Начал», следует отметить в них и существенные недостатки.

Намеченная Аристотелем логическая схема в «Началах» Евклида не выдержана полностью. В «Началах» не выделены основные понятия. Евклид пытается определить все понятия геометрии, не опираясь на категории более общего характера. Определения таких понятий, как точка, линия, поверхность и многие другие, туманны и бессодержательны, поэтому в дальнейшем изложении нигде не используются; они являются бесполезными для следующих логических рассуждений.

В «Началах» Евклид пользуется и такими понятиями, которые не содержатся в списке его определений. Такими понятиями, например, являются понятия «лежать на», «лежать по одну сторону от прямой» и т. д. Иногда Евклид дает различные определения одного и того же понятия, но не доказывает их эквивалентность.

Евклидом не выдерживается логическое требование, чтобы всякое доказательство проводилось только на основании установленных постулатов и аксиом. Например, при доказательстве предложения 1 Евклид оставляет необоснованным факт существования точки С пересечения окружностей *АСЕ* и *СВД* (см. рис. 3). Евклид, по-видимому, и этом месте пользуется наглядностью. Для доказательства существования точки *С* необходима аксиома непрерывности, которая отсутствует в списке аксиом и постулатов Евклида. Таким образом, система аксиом и постулатов Евклида не является полной. Кроме аксиомы непрерывности, отсутствуют аксиомы и постулаты, определяющие понятия «лежать между», «равно». Пользуясь для обоснования ра-иснства фигур понятием движения, Евклид не опирается на какие-либо предложения, которые позволяли бы судить о свойствах движения.

Можно сказать, что рассуждения Евклида представляют собой смесь логики и интуиции.

§5. Комментарии «Начал» Евклида

«Начала» Евклида на протяжении более 2000 лет подвергались тщательному изучению. Имеется огромная литература, содержащая комментарии к «Началам». Уже древние комментаторы заметили, что «Начала» содержат существенные недостатки, и предпринимали попытки устранить их. Улучшение «Начал» Евклида шло по двум направлениям — дополнение недостающих постулатов и доказательство некоторых постулатов.

Существенный вклад в дело дополнения системы аксиом Евклида внес Архимед. В противоположность Евклиду в сочинении «О шаре и цилиндре» Архимед последовательно с большой строгостью развил теорию измерения площадей и объемов. В этой работе вычисление поверхностей и объемов круглых тел сведено к определению длины окружности и площади круга, вычисление которых изложено в небольшом сочинении «Об измерении круга». При доказательстве новых теорем Архимед пользовался материалом имеющимся в «Началах» Евклида. Но для того, чтобы решать математические задачи, он вынужден был дополнить аксиоматику Евклида новыми аксиомами. В работе «О шаре и цилиндре» он формулирует пять аксиом, из которых существенным добавлением к системе аксиом и постулатов Евклида являлась лишь пятая аксиома. Она теперь называется аксиомой Архимеда или аксиомой измерения. В сочинении Архимеда она сформулирована так: «из неравных линий, поверхностей или тел большая превышает меньшую на такую величину, которая, будучи прибавлена к себе достаточное число раз, может быть сделана больше любой наперед заданной величины, которая допускает с ней сравнение». Аксиома Архимеда не устанавливает свойства непрерывности геометрических образов.

Если присоединить к системе аксиом Евклида аксиому непрерывности Дедекинда*, то аксиома Архимеда может быть доказана, как их следствие. Аксиома Дедекинда позволяет доказать существование точки пересечения окружностей *АСЕ* и *СВД* (в первом предложении Евклида, см. рис. 3). Проблемой совершенствования системы аксиом геометрии Евклида занимались многие математические школы.

В конце XIX столетия в итальянской школе Пеано и немецкой школе Паша были сформулированы аксиомы, определяющие понятия «лежать», «лежать между», «равно». Одна из аксиом Паша утверждает: «Если прямая *а* лежит в плоскости треугольника *АВС,* не проходит через его вершины и пересекает одну его сторону, тогда она пересечет одну из двух других сторон». В 1899 г. была опубликована работа Д. Гильберта**** под названием «Основания геометрии», в которой решается проблема аксиоматического обоснования геометрии Евклида. В главе II рассмотрим содержание этой работы.

Особое внимание критиковавших «Начала» Евклида привлекал к себе его V постулат. Это объясняется рядом глубоких причин. По своему содержанию V постулат является утверждением, менее очевидным, чем утверждения других постулатов.

В самом деле, возьмем точку *B* вне прямой *a* (рис. 4) и в плоскости, проходящей через *B* и *a,* проведем прямые *(BA)**, перпендикулярную *a* и *(BB'),* перпендикулярную прямой *(AB).* Прямая *(BB')* не пересечет *a.* Проведем внутри угла <*C(B'BA)* произвольную прямую *(BB*$_l$*)* и обозначим угол < *(B'BBi)* через $y_{\{}$, а угол <*(BjBA)* через pY Так как угол р[1],- меньше прямого и *(AB)* перпендикулярна *a,* тоV постулат утверждает, что прямая *(BBi)* всегда пересечет прямую *a.* Это утверждение не поддается

наглядной экспериментальной проверке, так как угол $y_{\{}$ может быть сделан настолько малым, что он будет недоступен для нашего глаза и измеряющих его инструментов.

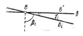


Рис. 4

При тщательном изучении «Начал» Евклида создается впечатление, что Евклид хочет как можно дольше не использовать V постулат, по возможности обойтись без него. Впервые ссылка на V постулат у Евклида сделана при доказательстве 29 предложения, хотя некоторые предложения, предшествующие ему, можно было бы проще доказать, если бы воспользоваться V постулатом.

«Начала» Евклида V постулатом как бы разбиваются на две части: первая — совокупность предложений, независящих от V постулата. Эта часть называется абсолютной геометрией; она включает в себя 28 предложений Евклида; вторая—собственно евклидова, содержит предложения, доказательства которых опираются на V постулат или на его следствия.

Сомнение в том, что утверждение, высказанное в V постулате, следует принимать без доказательства, и вызвало многочисленные попытки доказать V постулат. Возникла проблема V постулата: доказать V постулат, как логическое следствие предложений абсолютной геометрии. Разрешением этой проблемы занимались многие математики, среди которых были имена таких крупнейших, как Гаусс, Лежандр, Лобачевский* и др. Несмотря на кажущуюся простоту, проблема V постулата содержала огромные трудности логического характера, так как она была связана с основаниями геометрической науки.

Попытки доказать V постулат предпринимались еще древними комментаторами «Начал» Евклида. Например, Посидоний пытался доказать V постулат исходя из другого, чем у Евклида, определения параллельных линий. Параллельными он называл такие прямые, которые, находясь в одной плоскости, не сближаются и не удаляются одна от другой, так что все перпендикуляры, проведенные из точек одной из них к другой, равны между собой. Приняв такое определение параллельных, Посидоний «доказал» V постулат Евклида. Но при определении параллельных Посидоний необоснованно допускает, что точки плоскости, расположенные по одну сторону от прямой и одинаково удаленные от нее, принадлежат одной прямой.

Если к аксиомам и постулатам абсолютной геометрии присоединить утверждение Посидония, то V постулат получается как их логическое следствие. Обратно, если к аксиомам и-постулатам абсолютной геометрии присоединить V постулат, то можно доказать предложение Посидония.

Определение 1. Пусть дана совокупность утверждений {Ai\. Два утверждения A и B называются эквивалентными, или равносильными, относительно {At}, если утверждение A есть логическое следствие утверждений {A t} + B и утверждение B есть следствие из предложений

Несомненный интерес представляют комментарии первой книги «Начал», написанные Проклом. В сочинениях Прокла даны комментарии к большинству определений, аксиом, постулатов и предложений первой книги «Начал» Евклида. Комментарии к предложениям начинаются с разъяснения текста. После этого излагаются высказывания по поводу этого предложения других авторов. Затем указываются дефекты доказательства и делаются попытки их исправить. Прокл замечает, что не все постулаты Евклида являются независимыми и дает доказательство IV постулата.

Особое внимание Прокла привлекает V постулат Евклида. Он убежден, что V постулат может быть доказан с помощью остальных аксиом и постулатов Евклида и делает попытку доказать его. Комментируя 31-е предложение первой книги «Начал» Евклида, Прокл устанавливает предложение, эквивалентное V постулату Евклида.

ЖИЗНЬ И ТВОРЧЕСТВО ЕВКЛИДА

Спросите своего коллегу, или знакомого, или ученика: «Какая древняя книга оказала наибольшее влияние на развитие европейской цивилизации?». Не думаю, что ответы будут отличаться большим разнообразием, но вряд ли кто-нибудь вспомнит о «Началах» Евклида. А ведь именно по этой книге (или по её обработкам) учились все творцы современной математики: Декарт и Ферма, Ньютон и Лейбниц, Колмогоров и Понтрягин… Всех не перечислишь.

Нельзя сказать, что в течение многих веков не появлялись другие своды математических знаний, но все они забывались и вновь вытеснялись «Началами» Евклида. С 1482 г. она издавалась более 500 раз на самых различных языках. Можно с уверенностью утверждать, что все современные так называемые точные науки выросли из древнегреческой науки, т.е. из «Началах» Евклида – самого древнего свода математических знаний, дошедшего до нашего времени.

ЕВКЛИД: ЖИЗНЬ И СОЧИНЕНИЯ

Так кто же был Евклид? Исследователь, энциклопедист, методист? Увы, о жизни этого знаменитого учёного сохранилось крайне мало сведений. Годы его жизни относят к промежутку времени приблизительно между 365 и 300 гг. до н.э.

Известно, что Евклид был приглашён в Александрию царём Птолемеем I Сотером для организации математической школы и преподавал там математику.

Известно, что он учился в платоновской Академии в Афинах.

Итак, какие же труды Евклида нам известны?

Кроме «Начал» до нас дошли, хотя и в сильно искажённом виде, трактаты «Оптика» и «Катоптрика». В «Оптике» Евклид формулирует и доказывает правило «угол падения равен углу отражения», а в «Катоптрике» он выводит, опираясь на это правило, законы отражения от выпуклых и вогнутых зеркал. В этих трактатах содержится первое в истории изложение геометрической оптики. Кроме того, Евклиду принадлежит сочинение по математической астрономии «Явления», ему также приписывается сочинение «Сечение канона» по теории музыки.

Во всех этих произведениях Евклид сначала постулирует некоторые свойства исследуемых объектов (например, то, что свет распространяется по прямой) и необходимые математические сведения, а затем на этой основе дедуктивно строит излагаемую теорию.

Евклиду принадлежат сочинения о конических сечениях (т.е. эллипсе, гиперболе, параболе) и «О поверхностных местах», которые до нас дошли.

В арабском переводе нам известно сочинение Евклида «О делении фигур»

Но главным трудом Евклида, несомненно, являются «Начала» (в 13 книгах). Он собрал и систематизировал современную ему математику, строго дедуктивно изложив её в этом объёмном труде.

Ниже описаны наиболее интересные, с точки зрения современной математики, достижения Евклида и его предшественников, изложенные в «Началах».

«НАЧАЛА»

В течение двух тысяч лет геометрию узнавали либо из “Начал” Евклида, либо из учебников, написанных на основе этой книги. Лишь профессиональные математики обращались к трудам других великих греческих геометров: Архимеда, Аполлония и геометров более позднего времени. Классическую геометрию стали называть евклидовой в отличие от появившихся в XIX в “неевклидовой геометрий”.

Об этом поразительном человеке история сохранила настолько мало сведений, что не редко высказываются сомнения в самом его существовании.

Что же дошло до нас? Каталог греческих геометров Прокла Диадоха Византийского, жившего в V в н.э., -первый серьёзный источник сведений о греческой геометрии. Из каталога следует, что Евклид был современником царя Птолемея I,который царствовал с 306-283г.до н.э.

Евклид должен быть старше Архимеда, который ссылался на “Начало”. До наших времён дошли сведения, что он преподавал в Александрии, столица

Птолемея I, начинавший превращаться в один из центров научной жизни. Евклид был последователем древнегреческого философа Платона, и преподавал он, вероятно, четыре науки, которые, по мнению Платона, должны предшествовать занятиям философией: арифметику, геометрию, теорию гармонии, астрономию. Кроме "Начал" до нас дошли книги Евклида, посвящённые гармонии и астрономии.

Что касается места Евклида в науке, то оно определяется не столько собственными его научными исследованиями, сколько педагогическими заслугами. Евклиду приписывается несколько теорем и новых доказательств, но их значение не может быть сравнимо с достижениями великих греческих геометров: Фалеса и Пифагора(VI век до н. э.), Евдокса и Теэтета (IV век до н.э.). Величайшая заслуга Евклида в том, что он подвёл итог построению геометрии и придал изложению столь совершенную форму, что на 2000 лет "Начала" стали энциклопедией геометрии.

Евклид с величайшим искусством расположил материал по 13 книгам так, чтобы трудности не возникали преждевременно. Позже греческие математики включили в "Начало" ещё две книги-XIV- и XV-ю, написанные другими авторами.

Первая книга Евклида начинается с 23"определений", среди них такие: точка есть то, что не имеет частей; линяя есть длина без ширины; линия ограничена точками; прямая есть линия, одинакова расположенная относительно всех своих точек; наконец, две прямые, лежащие в одной плоскости, называются параллельными, если они, сколь угодно продолжены, не встречаются. Это скорее наглядные представления об основных объектах и слово "определение" в современном понимании не точно передаёт смысл греческого слова "хорой", которым пользовался Евклид.

В книге I рассматриваются основные свойства треугольников, прямоугольников, параллелограммов, сравниваются их площади. Здесь появляется теорема о сумме углов треугольника. Затем следует пять геометрических постулатов: через две точки можно провести одну прямую; каждая прямая может быть сколь угодно продолжена ; данным радиусом из данной точки можно провести окружность; все прямые углы равны; если две прямые проведены к третьей под углами, составляющими в сумме меньше двух прямых, то они встречаются с той же стороны от этой прямой. Все эти постулаты, кроме одного, вошли в современные курсы основной геометрии. За постулатами приводятся общие предположения, или аксиомы,- 8 общематематических утверждений о равенствах и неравенствах. Книга заканчивается теоремой Пифагора.

В книге II излагается геометрическая алгебра, с помощью геометрических чертежей даются решения задач, сводящихся к квадратным уравнениям. Алгебраической символики тогда не существовало.

В книге III рассматриваются свойства круга, свойства касательных и хорд, в книге IV-правильные многоугольники, появляются основы учения о подобии. В книгах VII-IX изложены начала теорий чисел, а основанной на алгоритме нахождения наибольшего общего делителя, приводится алгоритм Евклида, сюда входит теория делимости и теорема о бесконечности множества простых чисел.

Последние книги посвящены стереометрии. В книге XI излагаются начала стереометрии, в XII с помощью метода исчерпания определяются отношения площадей двух кругов и отношение объёмов пирамиды и призмы, конуса и цилиндра. Вершина стереометрии у Евклида – теория правильных многогранников. В “Начало” не попало одно из величайших достижений греческих геометров – теория *конических сечений.* О них Евклид написал отдельную книгу “Начала конических сечений”, не дошедшую до нас, но её цитировал в своих сочинениях Архимед.

“Начало” Евклида не дошли до нас в подлиннике. Двенадцать столетий отделяют от Евклида самые старые известные списки, семь столетий – сколь- нибудь подробные сведения о “Началах”. В средневековую эпоху интерес к математике был утрачен, некоторые книги “Начал” пропали и потом с трудом восстанавливались по латинским и арабским переводам. А к тому времени тексты обросли “улучшениями” позднейших комментаторов.

ТЕОРЕМА И АЛГОРИТМ ЕВКЛИДА

Предложение, о котором идёт речь, изложено в IX книге «Начал». Оно формулируется так:

множество простых чисел бесконечно.

Доказательство очень просто: если бы множество всех простых чисел было конечным, то, перемножив их все и добавив единицу, мы получили бы новое число, которое не делится ни на одно из известных простых чисел и, следовательно, простое.

Всем известен алгоритм Евклида нахождения общей меры отрезков. Он состоит в следующем.

Пусть есть два отрезка неравной длины A и B, причём, например, A больше B. Отложим отрезок B на отрезке A столько раз, сколько получится рис 1 . Тогда $A=n_0B + C_1$, где $C_1 < B$.

Теперь берём отрезки B и C_1 и повторяем с ними ту же операцию: $B=n_1C_1 + C_2$, где $C_2 < C_1$ рис 2 .

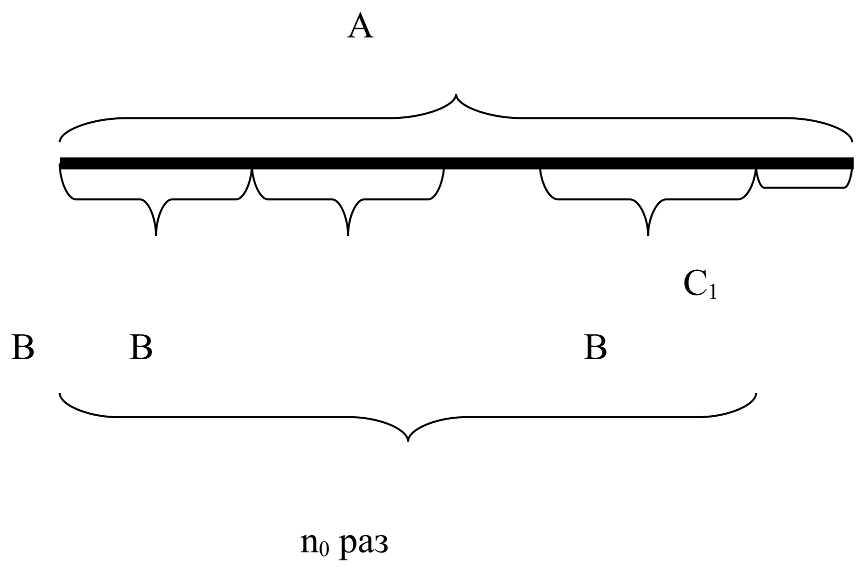
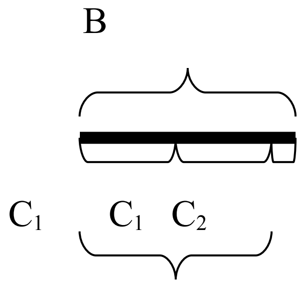


рис 1



n_1 раз.

рис 2

Повторяя эту операцию много раз, мы либо когда-нибудь получим нулевой отрезок-остаток $C_m = n_{m+1}C_{m+1} + 0$ отрезок C_{m+1} окажется общей мерой отрезков A и B, либо процесс откладывания отрезков никогда не закончится.

В последнем случае говорят, что отрезки A и B несоизмеримы (т.е. не имеют общей меры). Числа n_0, n_1, … называются «неполными частными».

Если обнаружена общая мера величин A и B и она равна некоторой величине D, то $A = \lambda D$, $B = \mu D$ и отношение A и B есть отношение λ к μ.

Интересно, что Евклид построил алгоритм отдельно для чисел (т.е. натуральных чисел) и отдельно для отрезков (величин).

Итак, алгоритм Евклида позволяет не только находить общую меру (НОД) двух чисел, сокращать на НОД дроби, но и «округлять» рациональные числа.

ТЕОРИЯ ОТНОШЕНИЙ ЕВДОКСА

В «Началах» изложена другая теория отношений, созданная Евдоксом. Она отвечала на вопрос: как можно сравнивать отношения чисел и что происходит с ними в результате арифметических операций?

Два отношения a/b и c/d считаются равными, если для любых натуральных чисел M, N выполняются условия:

$aM > bN \Leftrightarrow cM > dN$,

$aM = bN \Leftrightarrow cM = dN$,

$aM < bN \Leftrightarrow cM < dN$.

Такой подход к сравнению отношений был революционным прорывом в построении теории действительного числа (пока только для рациональных положительных чисел).

ТЕОРИЯ ИРРАЦИОНАЛЬНОСТЕЙ

Видимо, именно алгоритм Евклида привёл пифагорейца к установлению несоизмеримости стороны и диагонали квадрата (т.е. иррациональности числа $\sqrt{2}$). Это открытие существенно повлияло на дальнейшее развитие и математики, и философии. Оно показало, что ложен основной принцип пифагорейцев «всё есть число». Они считали, что всякую величину можно выразить числом (натуральным) или отношением чисел, но оказалось, что диагональ квадрата со стороной 1 не выражалась отношением чисел.

Теэтет Афинский развил этот подход и доказал, что квадратные корни из квадратных чисел рациональны, а из неквадратных – иррациональны. Кроме того, кубические корни из кубических чисел рациональны, а из некубических – иррациональны.

Более того, он классифицировал некоторые типы иррациональностей, которые можно построить с помощью циркуля и линейки.

ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ АЛГЕЬРА

Важным достижением античной математики стало создание так называемой геометрической алгебры, зачатки которой имелись ещё у вавилонян.

Мы знаем, что в Древней Греции не было возможности записывать буквами алгебраические формулы и уравнения. Кроме того, большие проблемы возникали при операциях с натуральными числами. Античные математики обошли эту проблему, переведя все алгебраические выражения первой и второй степени на геометрический язык. Все построения были планиметрическими. Видимо, именно алгебраическими потребностями объясняется столь бурное развитие планиметрии в античности.

ПЛАТОНОВЫ ТЕЛА И УЧЕНИЕ О ГАРМОНИИ

В последней, XIII книге «Начал» описываются построение и свойства правильных многогранников – тетраэдра, гексаэдра, октаэдра, додекаэдра, икосаэдра.

И Евклид не просто описал правильные многогранники, но и исследовал их свойства. Он нашёл отношения длин рёбер всех правильных многогранников к диаметру описанной около многогранника сферы.

Более того, он предложил способы построения правильных многогранников, вписанных в сферу данного диаметра.

Ещё пифагорейцы знали, что если высоты звука относятся как небольшие целые числа, то сочетание звуков будет приятным, гармоничным. Так, отношение высот 1:2 даёт музыкальный интервал, называемый октавой, отношение 2:3 – даёт квинту, 3:4 кварту. Для того чтобы повысить на квинту звук, например, колеблющейся струны, надо уменьшить её длину на 1/3, заставив звучать оставшиеся 2/3 струны, при этом частота колебаний струны увеличится в 1/(2/3) раза. А для повышения звука на кварту надо извлечь звук из 3/4 струны, т.е. частота колебаний будет в 4/3 раза выше частоты колебаний основного тона. Исходя из этого, можно построить музыкальную шкалу.

Первым точными расчётами музыкальной шкалы стал Архит Тарентский. Евклид продолжил его традицию и изложил учение о гармонии в «Сечении канона» и – частично – в «Началах».

ЕВКЛИД И ЛОБАЧЕВСКИЙ

Имя Евклида навсегда связано с одним из ответвлений математики, получившим название „евклидова геометрия". Столь прочная слава закрепилась за Евклидом заслуженно, благодаря его труду ..Начала". В школах всего мира, долгие столетия геометрия преподавалась по ..Началам" Евклида. В английских школах до сегодняшнего дня учебники геометрии по своей форме напоминают этот ученый трактат. В мировой литературе „Начала" принадлежат к числу самых популярных и распространенных математических трудов. Несмотря на столь огромную популярность Евклида как автора ..Начал", сам он, его облик и жизненный путь известны очень мало. Нет исторически верных сведений о его жизни, неизвестны даже точные даты его рождения и смерти. По сведениям оставленным потомству Проклом (410—485), автором комментариев к „Началам", деятельность Евклида проходила во время правления Птолемея Сотера 1 (305—282 гг. до н.э.).

При этом царе, столица Египта Александрия стала центром научной и культурной жизни тогдашнего мира, и привлекала к себе многих выдающихся ученых со всех сторон, в частности, из Греции. В знаменитой в те времена

Александрийской школе работали тогда многие светила математики и среди них Евклид, который был одним из первых ее преподавателей. Дошедшие до нас произведения Евклида, свидетельствуют о том, что это был весьма способный и даже талантливый преподаватель. Существует мнение, что Евклид был воспитанником Платоновской академии, где, имея доступ к лучшим трудам греческих математиков и философов, достиг высот тогдашних научных знаний. Действительно, произведения Евклида носят на себе признаки увлечения платоновской философией: Евклид, например, в своих трактатах весьма тщательно избегает проблем практического порядка. Некоторый свет на Евклида как человека, математика и философа, проливают два анекдота, правдивость которых, впрочем, как и правдивость вообще всех анекдотов, может быть взята под сомнение.

Рассказывают, например, что однажды царь Птолемей 1, листая книгу ..Начал" обратился к автору с вопросом нет ли более простых путей к овладению наукой геометрии, на что Евклид ответил: В геометрии нет особых дорог даже для царей". В другом анекдоте говорится, что один из учеников Евклида, изучая геометрию и ознакомившись с первой аксиомой, спросил что ему даст изучение геометрии? Вместо ответа Евклид подозвал невольника и распорядился. „Дай ему обола, ибо этот человек ожидает прибыли от науки". Математик Папп (320 г. н. э.) восторгается необыкновенной честностью, скромностью, кротостью и одновременно независимостью, какими чертами характера отличался Евклид. Евклид был весьма плодовитым автором различных трудов. Известно, что его перу принадлежит не менее 10 трактатов, из которых „Начала", состоящие из 13 книг считаются крупнейшим произведением в истории математики. Это первый, сохранившийся математический трактат, в котором со всей полнотой отразился дедуктивный метод. ..Начала" носят характер учебника, в котором Евклид дал полный свод математических знаний своих предшественников. Таким образом, Евклида трудно считать самостоятельным автором содержания „Начал", за небольшими исключениями, касающимися конусных сечений и сферической геометрии. Но в „Началах" Евклид проявил себя великолепным систематиком и выдающимся педагогом из всех существовавших за всю историю математики. «Начала» были написаны около 300 года до н.э., но древнейшие, сохранившиеся рукописи на греческом языке восходят всего лишь к X в нашего летосчисления. Со времен 1 века нашей эры хранилось только несколько отрывков папируса с текстом. Несмотря на отсутствие оригинала, благодаря кропотливому труду ученых, сравнивавших сохранившиеся рукописи, удалось с полной достоверностью восстановить первоначальный текст замечательного труда Евклида. Из тринадцати книг «Начал» первая, вторая, третья и четвертая а также шестая, посвящены геометрии на плоскости, в одиннадцатой, двенадцатой и тринадцатой приведены основы стереометрии, остальные книги «Начал» посвящены теории пропорций и арифметике. В начале труда Евклид приводит десять первичных теорем — без доказательств, из которых пять первых назвал аксиомами, а остальные — постулатами и ввел необходимое число определений. Опираясь на этой системе аксиом и постулатов, Евклид дает доказательства 465 теорем распределенных в цепочку, очередные звенья которой логически вытекают из предыдущих звеньев или из аксиом. Пятая, так называемая „Аксиома параллельности" на целые века заняла умы многих математиков. Сначала, как например, Птолемей в древности и потом, уже в XVIII веке ученые пытались дать доказательство этой аксиомы и после многих неудачных попыток приняли четыре первые аксиомы без доказательств; в конце концов, отказ от пятой аксиомы привел к возникновению новой теории, получившей название неевклидовой геометрии.

Одна из теорем, приведенная в „Началах", авторство которой приписывается Евклиду, известна из школьного курса и гласит: ..Площадь квадрата построенного на высоте прямоугольного треугольника опущенной из прямого угла на гипотенузу, равновелика площади прямоугольника со сторонами равными отрезкам гипотенузы, полученными от пересечения ее высотой" Другие произведения Евклида не сохранились. О том, что они существовали свидетельствуют упоминания в трудах других математиков.

Историю древнегреческой математики можно подразделить на три периода: первый — необыкновенно буйное, почти стихийное развитие, второй — период сомнений, критического отношения к новым трудам и, наконец, третий — период упорядочения результатов полученных великими учеными прошлого.

Труд Евклида относится именно к этому последнему периоду.

Велики заслуги Евклида. О том, как высоко оценены его труды, свидетельствует факт, что „Начала" оставались фундаментальным математическим трудом на протяжении свыше 2000 лет.

Как известно, в III веке до нашей эры греческий геометр Евклид в своей книге “Начала” сформулировал систему аксиом, из которых последовательно, одна за другой, выводятся все основные теоремы геометрии. И никогда не получалось двух противоречащих друг другу теорем, доказательства которых равноправно вытекали бы из принятой системы аксиом. Это означает, что аксиоматика Евклида непротиворечива.

Аксиомы евклидовой геометрии являются продуктом повседневных человеческих наблюдений, кроме одной — аксиомы о параллельных, называемой также пятым постулатом. Кто сформулирует эту аксиому?

Как мы знаем, через точку вне прямой можно провести в плоскости только одну прямую, не пересекающую данной.

У Евклида в “Началах” несколько иная формулировка, но суть та же. И вот эту аксиому, в отличие от остальных, никаким опытом не подтвердишь, не опровергнешь, ведь на практике воспроизводимы лишь отрезки прямых, но никогда сами прямые во всей их бесконечной протяженности.

Но если этот пятый постулат непроверяем физически, то, может быть, следовало исключить его из числа аксиом и доказывать как теорему, опираясь на остальные аксиомы?

Так оно и было. Веками длились попытки придумать доказательство — не удавалось никому. В тайну этих неудач именно и проник Н. И. Лобачевский глубоко и окончательно: пятый постулат недоказуем и от -господствовавшего более двух тысяч лет убеждения, что (евклидова геометрия есть единственная мыслимая система геометрического познания мира, необходимо отказаться.

Вечный... пятый. От Евклида

И до этих вот снегов

Постулат, как черный идол

В жертву требует умов...

“Постулат недоказуем!”

Даже страшно произнесть.

Ах, догматики! Грозу им

Принесет такая весть.

Ещё из уроков геометрии известно, что Лобачевский создал “неевклидову геометрию”, в которой через точку можно провести более одной линии, не пересекающей данную прямую.

Лобачевский заменил евклидов пятый постулат более общей аксиомой параллельности, сохранив прочие аксиомы и постулаты. Чтобы легче было понять смысл аксиом Лобачевского, возьмем прямую *AB* и -вне ее точку С. Пусть *CAB* прямая.

Построим луч *CD,* пересекающий прямую *AB* в точке *D,* лежащей вправо от точки *A,* и вообразим, что он вращается против часовой стрелки. По мере вращения луча *CD* непосредственное наблюдение пересечения его с *AB* становится неосуществимым. По этой причине будет логически правомерным изменить наше представление о прямой линии и луче, которое теперь позволило бы нам вообразить, что луч *CD* в какой-то момент своего вращения “отрывается” от прямой *AB,* т. е. перестает иметь с ней общую точку.

Тогда “прямую” *(аа'),* содержащую луч, впервые “оторвавшийся” от *AB,* назовем *прямой, параллельной прямой АР в направлении луча АВ.*

Рассмотрев симметрию с осью 4С, видим, что есть “прямая” *(ЬЬ'),* симметричная “прямой” *(аа')* и проходящая через точку *С* . Ясно, что и эту “прямую” *(ЬЬ')* следует считать параллельной *АВ,* но уже в направлении луча *AB'.* Следовательно, через *С* проходят две “прямые”, параллельные прямой *BB'.*

С каждой из этих “прямых” луч *СА*, перпендикулярный прямой *B'B,* образует угол *л(р),* названный Лобачевским *углом параллельности.* Угол π *(p)* зависит от длины *СА==р* и имеет следующее свойство: все прямые, проходящие через

С и образующие с перпендикуляром *СА* угол, меньший *л (р)*, пересекают *В'В,* все остальные “прямые”, проходящие через *С* , не пересекают *В'В,* их называют *расходящимися прямыми* или *сверхпараллелями к прямой В'В.* Через *С* проходит бесконечное множество таких “прямых”.

В частном случае, когда π *(р)* ==90°, получается постулат Евклида и соблюдаются все предложения обычной геометрии, “употребительной”, как называл ее Н. И. Лобачевский.

Угол π *(р)* возрастает и приближается к прямому углу при приближении точки *С* к прямой *В'В* .

Из допущения, что π (р)<90° вытекают совершенно иные следствия, составляющие содержание но вой геометрии, так же непротиворечивой, как и евклидова геометрия но значительно точнее, чем евклидова, отображающей пространственные геометрические и физические соотношения, например, за предела ми мировых областей “средней величины”.

Оказалось также, что взаимосвязь пространства и времени, от крытая X. Лоренцом, А. Пуанкаре, А. Эйнштейном и Г. Минковским и описываемая в рамках специальной теории относительности, имеет непосредственное отношение к геометрии Лобачевского. Например, в расчетах современных синхрофазотронов используются формулы геометрии Лобачевского.

Такую геометрию Лобачевский сначала назвал “воображаемой”, а потом (в конце жизни)—“пангеометрией”, т. е. всеобщей геометрией. Теперь ее во всем мире называют “геометрией Лобачевского”.

Был мудрым Евклид,
Но его параллели,
Как будто бы вечные сваи легли.
И мысли его, что как стрелы летели,
Всегда оставались в пределах Земли.
А там, во вселенной, другие законы,
Там точками служат иные тела.
И там параллельных лучей миллионы
Природа сквозь Марс, может быть, провела.

Из понимания параллельности “по Лобачевскому” вытекает много диковинных на первый взгляд, но строго обоснованных следствий.

Например, в пространстве Лобачевского параллельные прямые неограниченно сближаются в направлении параллельности и потому существуют “бесконечные треугольники”, стороны которых попарно параллельны , но нет подобных многоугольников.

Скоро порохом вспыхнет рассветная тишь.
Ты на четкий чертеж неотрывно глядишь.
После встал, потянулся устало.
Вечность тайну тебе нашептала,
И душой изумленной увидел ты то,
Что доселе не знал и не ведал никто:
Параллели стрелою нацелены в высь,
Параллели пронзают межзвездные дали.
Параллели — ты, чуешь? — стремятся сойтись,
Только сразу такое постигнешь едва ли.

В геометрии Лобачевского интересна и важна такая теорема: “Сумма углов треугольника всегда меньше 180°”.

По этому поводу у Данте есть такие строки:

Как для смертных истина ясна,
Что в треугольник двум тупым не влиться.

Теперь-то нам понятно, что не может быть двух тупых углов не только в нашем “земном” треугольнике, но и в “звездном” треугольнике геометрии Лобачевского...

Очень интересно, но задержимся еще немного на треугольнике в геометрии Лобачевского.

Пусть α,β и γ— углы треугольника, тогда число $\delta= 180°— (\alpha +\beta+\gamma)$ называют *“дефектом треугольника”* и справедлива поразительная формула выведенная Н. И. Лобачевским $\delta= S/R^2$, где где *S*—площадь треугольника, а *R*— число, одинаковое для всех треугольников Величину *K,* имеющую размерность длины, называют *радиусом кривизны, пространства Лобачевского,* а отрицательную величину $\kappa=1/R^2$ *кривизной* этого пространства.

В евклидовом пространстве $\delta=0$ (так как $\alpha+\beta+\gamma=180°$), поэтому его кривизна считается равной нулю.

Получается так, что наша "употребительная" геометрия является предельным (при $\delta\to 0$) случаем геометрии Лобачевского.

В мире все криволинейно.
Прямота лишь сферы часть.
И Евклидово ученье
В космосе... теряет власть.

Послушайте стихотворение поэта Александра Лихолета (Донецк), напечатанное в альманахе "Истоки" (М.: Молодая гвардия, 1983).

ЛОБАЧЕВСКИЙ

"Все! Перечеркнуты "Начала".
Довольно мысль на них скучала,
Хоть прав почти во всем Евклид,
Но быть не вечно постоянству:
И плоскость свернута в пространство,
И мир
Иной имеет вид...
О чем он думал во вчерашнем?
О звездном облаке, летящем
Из ниоткуда в никуда?
О том, что станет новым взглядом:
Две трассы, длящиеся рядом,
Не параллельны никогда?
Что постоянному движенью

Миров сопутствует сближенье,

И, значит, встретятся они:

Его земная с неземными

Непараллельными прямыми

Когда-нибудь, не в наши дни?..

Ведущий. Открытие Лобачевского настолько опередило развитие математической мысли того времени, было настолько непредвиденным и смелым, что во всем мире почти никто из математиков—его современников — не был готов к восприятию идей “воображаемой геометрии”. Поэтому при жизни Лобачевский попал в тяжелое положение “непризнанного ученого”. Приведу один любопытный факт общественной жизни того времени.

Могучий “властитель дум” передовой интеллигенции — Н. Г. Чернышевский. Казалось, он-то мог, хотя бы интуитивно, ощутить в утверждениях геометрии Лобачевского идею революционного переосмысливания веками укоренившейся системы восприятия пространства. Увы, так не случилось. Иначе Чернышевский не иронизировал бы в письме к сыновьям: “Что такое “кривизна луча” или “кривое пространство”? Что такое геометрия без аксиомы параллельных?” Он сравнивает это с “возведением сапог в квадраты” и “извлечением корней из голенищ” и говорит, что это столь же нелепо, как “писать по-русски без глаголов”, (А ведь Фет писал без глаголов и получалось здорово: “Шелест, робкое дыханье, трели соловья”.)

Отшатнулись коллеги, отстали друзья…

Может, в партии жизни зевнул ты ферзя ?

Чушь,— кричат,— Лобачевский,—нелепица, бред

Ничего смехотворней и в мире-то нет!

Параллели не встретятся — это же просто,

Как дорога от города и до погоста!

Ну хоть рельсы возьми, пересечься им что-ли,

Хоть сто лет рассекая раздольное поле?

Где ж понять им: коль к звездам протянутся рельсы,

Окунутся с разбега в иные законы.

Там, где в нуль обращается зябнущий Цельсий,
Мировые законы пока потаенны.
Проплывают в ухмылке ученые лица,
И насмешек у сердца стоит ледостав.
Так неужто же он, Лобачевский, смирится?
Нет, он целому миру докажет, что прав!

Потребовалось полвека для того, чтобы идеи Лобачевского сделались неотъемлемой частью математических наук, проникли в механику, физику, космологию, стали общекультурным достоянием. Так, в “Братьях Карамазовых” Иван, обладающий, по словам автора романа, “евклидовским” характером ума, .говорит: “Пусть даже параллельные линии сойдутся, и я сам это увижу; увижу и скажу, что сошлись, а все-таки не приму...” Это значит, что Достоевский имел отчетливое представление о новой геометрии.

3. КАРТА КАДРОВОЙ ОБЕСПЕЧЕННОСТИ ДИСЦИПЛИНЫ

Лектор – доцент кафедры МАиМ Кван Наталья Владимировна (стаж работы в вузе 14 лет); старший преподаватель Подопригора Сергей Алексеевич (стаж работы в вузе 10 лет).

ведущий практические занятия – доцент кафедры МАиМ Кван Наталья Владимировна (стаж работы в вузе 14 лет); старший преподаватель Подопригора Сергей Алексеевич (стаж работы в вузе 10 лет).

.

ОГЛАВЛЕНИЕ