ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ РФ
Государственное образовательное учреждение высшего
профессионального образования
АМУРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
(ГОУВПО «АмГУ»)

УТВЕРЖДАЮ
Зав. кафедрой ОМиИ
____________Г.В. Литовка
«___»__________2007г.

Математика

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКИЙ КОМПЛЕКС

часть I

для специальности:
220301 – Автоматизация технологических процессов и производств

Составители:
С.В. Костенко, старший преподаватель
Н.А. Ермилова, доцент

Благовещенск, 2007 г.

Печатается по решению
редакционно-издательского совета
факультета математики и информатики

Авторы-составители: Костенко С.В., Ермилова Н.А.

Учебно-методический комплекс «Математика» для специальности: 220301 – Автоматизация технологических процессов и производств. Благовещенск:АмГУ, 2007 105с.

Роль математики в подготовке специалиста

Учебно-методический комплекс по учебной дисциплине «Математика» предназначен для студентов первого и второго курсов специальности 220301.

Математика является не только мощным средством решения прикладных задач и универсальным языком науки, но так же и элементом общей культуры. Поэтому математическое образование следует рассматривать как важнейшую составляющую фундаментальной подготовки специалиста.

Учебно-методический комплекс дисциплины (УМКД) разработан в помощь студентам первого и второго курсов обучения. Он создан в связи с необходимостью культивирования в стенах учебного заведения полноценной среды интеллектуального, творческого общества, атмосферы нравственного самосовершенствования, как преподавателей, так и студентов, необходимостью развития их самостоятельности активности, повышения математической культуры, привлечения широкого круга вопросов, касающихся работы учебного заведения, в том числе и учебного процесса, формирования и воспитания у молодежи чувства ответственности за свое будущее.

УМКД включает требования к обязательному минимуму содержания дисциплины по государственному образовательному стандарту, учебную программу, тематический план занятий, вопросы к экзамену и зачету, образцы контрольных работ, рекомендуемую литературу.

1. РАБОЧАЯ ПРОГРАММА

Цели и задачи учебной дисциплины «Математика» и ее место в учебном процессе.

1.1. Цели преподавания учебной дисциплины «Математика»

- формирование личности студента, развитие его интеллекта и способностей к логическому мышлению;
- обучение основным математическим методам, необходимым для анализа и моделирования устройств, процессов и явлений при поиске решений.

1.2. Задачи изучения дисциплины.

- На примерах математических понятий и методов продемонстрировать сущность научного подхода, специфику математики, ее роль в развитии других наук;
- научить студентов приемам исследования и решения, математически формализованных задач;
- выработать умения анализировать полученные результаты, привить навыки самостоятельного изучения литературы по математике.

1.3. Перечень учебных дисциплин с указанием разделов, усвоение которых необходимо для изучения осознания учебных тем, вопросов курса «Математика»

- основные понятия и методы математического анализа, аналитической геометрии, линейной алгебры, теории функций комплексного переменного, операционного исчисления, основы теории вероятностей и математической статистики, дискретной математики;
- математические модели простейших систем и процессов в естествознании;
- математическую символику для выражения количественных и качественных отношений объектов;
- основные приемы обработки экспериментальных данных;
- методы аналитического и численного решения алгебраических уравнений;
- методы исследования решений обыкновенных дифференциальных уравнений;
- исследование математических моделей решения прикладных задач.

1.4. После изучения дисциплины студент должен знать и уметь использовать:

- основные понятия и методы математического анализа, аналитической геометрии, дискретной математики и теории множеств, функционального анализа, векторной алгебры, линейной алгебры, основы теории вероятностей; теории функции комплексного переменного, операционное исчисление;
- математическую символику для выражения количественных и качественных отношений объектов;
- основные приемы обработки экспериментальных данных;
- методы аналитического и численного решения алгебраических уравнений;
- методы статистического оценивания и проверки гипотез.

2. Содержание учебной дисциплины «Математика».

2.1. Согласно государственному стандарту математических и естественных дисциплин студент должен изучить:

Аналитическая геометрия, многомерная евклидовая геометрия, дифференциальная геометрия кривых и поверхностей, элементы топологии: линейная алгебра: последовательности и ряды; дифференциальное и интегральное исчисления: векторный анализ и элементы теории поля; гармонический анализ; преобразования Лапласа и Фурье; дифференциальные уравнения: численные методы: погрешности вычислений, численные методы линейной алгебры, интерполирование и приближение функций, численное решение нелинейных уравнении и систем, численное интегрирование и дифференцирование, численное решение обыкновенных дифференциальных уравнений: основы вычислительного эксперимента: элементы теории функции и функционального анализа: функции комплексного переменного; дискретная математика: основы математической логики, теория алгоритмов, языки и грамматики, графы, автоматы, комбинаторный анализ: вероятность и статистика: теория вероятностей, случайные процессы, статистическое оценивание и проверка гипотез, статистические методы обработки экспериментальных данных: вариационное исчисление и оптимальное управление: уравнения математической физики.

2.2. ТЕМАТИЧЕСКОЕ ПЛАНИРОВАНИЕ ЛЕКЦИОННЫХ ЗАНЯТИЙ

	1 СЕМЕСТР **лекции 36часов, практические занятия 72час**	Кол-во часов	
		Лек.	Прак
1.	**ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА.** Матрицы. Линейные операции над матрицами. Умножение матриц. Определители второго и третьего порядков. Решение системы двух и трех линейных уравнений методом Крамера. Определители n-го порядка. Свойства определителей. Алгебраические дополнения и миноры. Методы вычисления определителей. Обратная матрица. Решение матричных уравнений. Решение систем линейных уравнений матричным методом Ранг матрицы. Решение систем линейных уравнений методом Гаусса. Критерий совместности. Теорема Кронекера-Капелли. Однородные системы.	6	18
2.	**ВЕКТОРНАЯ АЛГЕБРА.** Понятие вектора. Линейные операции над векторами. Базис векторного пространства, координаты вектора на в данном базисе. Скалярное умножение векторов Проекция вектора на ось. Направляющие косинуса. Векторное произведение векторов, его свойства. Смешанное произведение векторов. Операции над векторами в координатах. Физические и геометрические приложение векторной алгебры.	4	8
3.	**АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ.** Системы координат на плоскости и в пространстве. Простейшие задачи в координатах. Геометрическое место точек (ГМТ). Уравнение ГМТ. Общая схема решения задачи на составление уравнения ГМТ. Прямая линия на плоскости и ее уравнения. Взаимное расположение прямых на плоскости. Расстояние от точки до прямой на плоскости. Угол между двумя прямыми. Плоскость в пространстве и ее уравнения. Прямая в пространстве и ее уравнения. Взаимное расположение плоскостей, плоскости и прямой, двух прямых в пространстве. Метрические задачи теории плоскости и прямой. Линии второго порядка. Окружность. Эллипс. Парабола. Гипербола. Приведение уравнения линии второго порядка к каноническому виду. Поверхности второго порядка. Сфера. Эллипсоид. Параболоиды. Гиперболоиды. Цилиндры второго порядка. Коническая поверхность второго порядка.	12	20
4.	**ВВЕДЕНИЕ В МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ.** Числовые последовательности. Предел числовой последовательности. Функция. Элементарные функции. Предел функции. Непрерывность функции. Классификация точек разрыва. Бесконечно малые функции, их свойства. Сравнение бесконечно малых. Свойства функции, непрерывных на сегменте.	4	8

5.	**ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ.** Производная функции, ее физический и геометрический смысл. Производные элементарных функций Правило нахождения производной, производная сложной и обратной функции. Параметрические функции и их дифференцирование. Производные высших порядков. Дифференциал функции. Применение дифференциала к приближенным вычислениям; дифференциалы высших порядков: теоремы Ролля, Лагранжа, Коши; правило Лопиталя. Экстремумы функции одной переменной. Необходимые и достаточные условия возрастания и убывания функции. Выпуклость и вогнутость графика функции, точки перегиба, асимптоты графика функции. Необходимые и достаточные условия перегиба. Общая схема исследования функции и построение ее графика.	8	14
6	**КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА**	2	4
	Итого	36	72

ТЕМАТИЧЕСКОЕ ПЛАНИРОВАНИЕ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ И ФОРМЫ ТЕКУЩЕГО КОНТРОЛЯ

№	**Тема занятия**	Час.	Вид контр.
	1 СЕМЕСТР – 72 часа		
	Элементы линейной алгебры – 18час.		
1.	Определители второго и третьего порядков. Решение систем двух и трех линейных уравнений методами Крамера.	2	
2.	Матрица, операции над ними. Умножение матриц.	2	
3.	Методы вычисления определителей n-го порядка.	2	
4.	Обратная матрица. Решение матричных уравнений. Решение систем линейных уравнений матричным методом.	2	
5.	Ранг матрицы. Решение систем линейных уравнение методом Гаусса.	4	РГР
6.	Собственные векторы и собственные значения линейных операторов. Приведение матрицы линейного оператора к диагональному виду.	2	
7.	Общая теория систем линейных уравнений. Фундаментальная система решений. Общее решение неоднородной системы.	2	Колл.
8.	Контрольная работа №1.	2	КР
	Элементы векторной алгебры– 8 ч.		
1.	Линейные операции над векторами.	2	
2.	Скалярное умножение векторов.	2	
3.	Векторное и смешанное умножения векторов.	2	
4.	Физические и геометрические приложения векторной алгебры.	2	РГР
	Аналитическая геометрия на плоскости и в пространстве– 20ч.		
1.	Простейшие задачи в координатах.	2	
2.	Решение задач на составление уравнений ГМТ.	2	
3.	Прямая линия на плоскости. Аффинные и метрические задачи теории прямой и плоскости.	2	
4.	Плоскость в пространстве.	2	
5.	Прямая линия в пространстве.	2	
6.	Линии второго порядка.	4	
7.	Контрольная работа №2.	2	КР
8.	Поверхности второго порядка.	4	РГР

	Введение в анализ – 8ч.		
1.	Предел числовой последовательности.	2	
2.	Предел функции.	2	
3.	Непрерывность функции. Классификация точек разрыва.	2	
4.	Бесконечно малые функции. Сравнение бесконечно малых.	2	РГР
	Дифференциальное исчисление функций одной переменной – 14ч.		
1.	Производные элементарных функций.	2	
2.	Производная сложной функции. Дифференцирование функций, заданных параметрически.	4	
3.	Правило Лопиталя.	2	
4.	Оптимизация функций с помощью первой производной.	2	
5.	Исследование функций. Построение графиков.	2	
6.	Контрольная работа №3.	2	КР
	Комплексные числа – 4ч.		
1.	Алгебраическая и тригонометрическая формы комплексного числа.	1	
2.	Решение алгебраических уравнений над полем комплексных чисел.	1	
3.	Контрольная работа №4.	2	КР

3. ЛЕКЦИИ

ПЕРВЫЙ СЕМЕСТР

Тема 1. Определители второго и третьего порядка.

Решение систем линейных уравнений методом Крамера.

Таблица чисел вида $A = \begin{pmatrix} a_{11} \; a_{12} \\ a_{21} a_{22} \end{pmatrix}$ состоящая из двух строк и двух столбцов, называется квадратной матрицей второго порядка. Определителем второго порядка соответствующим матрице А называется число $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$. Обозначается

$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} a_{12} \\ a_{21} a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$. Числа $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$ называются элементами определителя. первый индекс указывает на номер строки, а второй на номер столбца. Элементы a_{11}, a_{22} образуют главную диаграмму определителя, элементы a_{12}, a_{21} побочную. Схематически правило вычисления:

$$\begin{vmatrix} oo \\ oo \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \bullet & o \\ o & \bullet \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} o & \bullet \\ \bullet & o \end{vmatrix}$$, пример: $\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -5 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-5) - (-2) \cdot 3 = -5 - (-6) = -5 + 6 = 1$

Рассмотрим систему 2-х линейного уравнения с двумя неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}\, x_1 + a_{12}\, x_2 = b_1 \\ a_{21}\, x_1 + a_{22}\, x_2 = b_2 \end{cases} \qquad (1)$$

Числа $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$ называются коэффициентами при неизвестных, числа x_1, x_2 - неизвестными, $b_1.b_2$ - свободными членами.

Определение: Пара чисел (α_1, α_2) называется решением системы (1), если после замены неизвестных x_1, x_2 числитель α_1 и α_2 соответственно каждый из уравнения системы обращается в тождество. Найдем неизвестные x_1, x_2. Умножим первое уравнение на a_{22}, второе на a_{12} и вычтем из первого второе $\begin{cases} a_{11}\, a_{22}\, x_1 \quad + a_{12}\, a_{22}\, x_2 = b_1\, a_{22} \\ a_{21}\, a_{12}\, x_1 \quad + a_{22}\, a_{12}\, x_2 = b_2\, a_{12} \end{cases}$

$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 = b_1a_{22} - b_2a_{12}$. Если $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$, то $\quad x_1 = \dfrac{ba_{22} - b_2a_{1211}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}$

Обозначим $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ - определитель системы (1)

$\Delta x_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} = b_1a_{22} - b_2a_{12}$ получен из Δ знаменной 1 столбца столбцом свободного члена

тогда $x_1 = \frac{\Delta x_1}{\Delta}$ Аналогично можно получить $x_2 = \frac{\Delta x_2}{\Delta}$, где $\Delta x_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$ получен из Δ заменой 2-го столбца столбцом свободного члена.

Формулы: $x_1 = \frac{\Delta x_1}{\Delta}, x_2 = \frac{\Delta x_2}{\Delta}$ называют формулами Крамера.

Пример: Решим систему методом Крамера $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 = -7 \\ 5x_1 + 4x_2 = 12 \end{cases}$

$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = 8 + 15 = 23 \neq 0$ $\Delta x_1 = \begin{vmatrix} -7 & -3 \\ 12 & 4 \end{vmatrix} = -28 + 36 = 8$

$\Delta x_2 = \begin{vmatrix} 2 & -7 \\ 5 & 12 \end{vmatrix} = 24 + 35 = 59$ $x_1 = \frac{\Delta x_1}{\Delta} = \frac{8}{23};$ $x_2 = \frac{\Delta x_2}{\Delta} = \frac{59}{23}$

Ответ: $(\frac{8}{23};\frac{59}{23})$.

Определение: Система уравнений называется совместной, если она имеет, по крайней мере, одно решение. Совместная система называется определенной, если она имеет единственное решение и неопределенной – если решений больше, чем одно. Если система не имеет решения – называется несовместной.

Система (1) имеет единственное решение, если $\Delta \neq 0$. Если $\Delta = 0$, и при этом хотя бы один из определенных $\Delta x_1 . \Delta x_2$ отличается от 0, система не имеет решения. Если $\Delta = 0$ и $\Delta x_1 = \Delta x_2 = 0$, то система имеет бесчисленное множество решений (x_1, x_2), найти которые можно, задавая производные, например x_1 и получаем затем из уравнения x_2.

Таблица вида $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ состоит из трех строк и трех столбцов, называется квадратной матрицей третьего порядка.

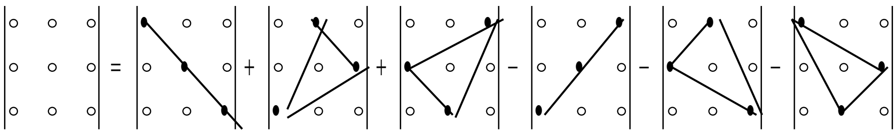
Определение третьего порядка соответствует матрице А, называется число

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{23}a_{32}a_{11}$$

Числа $a_{11}...a_{33}$ - элементы определитель 1-ый индекса указывает на номер строки определителя, 2-й – на номер столбца.

a_{11}, a_{22}, a_{33} образуют главную диаграмму; a_{13}, a_{22}, a_{31} - побочную.

Схематически правила вычисления определителя третьего порядка:



Пример: $\begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 2 & 0 & 3 \\ -2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 1\cdot 0\cdot 2 + 3\cdot 3(-2) + 2\cdot 1\cdot(-2) - 2\cdot 0\cdot(-2) - 2\cdot 3\cdot 2 - 1\cdot 3\cdot 1 =$

$= 0 - 18 - 4 - 0 - 12 - 3 = -37$

Система 3-х линейных уравнений с тремя неизвестными имеет вид:

$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$ если определитель системы

$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0$, то, система которая имеет единственное решение, находится

по формулам Крамера $x_1 = \dfrac{\Delta x_2}{\Delta}$; $x_2 = \dfrac{\Delta x_2}{\Delta}$; $x_3 = \dfrac{\Delta x_3}{\Delta}$;

$$\Delta x_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}; \Delta x_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}; \quad \Delta x_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix};$$

Пример решения:

$\begin{cases} 2x - 3y + 5z = 1 \\ x + 2y - 3z = 7 \\ 3x - y - 2z = 5 \end{cases}$ $\Delta = -28;\ ;\Delta y = -85;\Delta z = -21\ x = \dfrac{89}{28};\quad y = \dfrac{85}{28};\quad z = \dfrac{3}{4}$

Тема 2. Определители n-го порядка.

Дан определитель третьего порядка $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \Delta$

Минором Mij элемента aij определитель Δ называется новый определитель, полученный из данного вычеркиванием *i*-той строки и *j*-того столбца.

Пример: найти M_{32} элемента a_{32}. $M_{32} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}$

Алгебраическим дополнением элемента aij определителя Δ называется его минор, взятый со знаком $(-1)i+j$ $Aij = (-1)^{i+j} Mij$

$$A_{32} = (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}$$

Теорема: Определитель Δ равен сумме произведений элементов какой-либо строки (столбца) на их алгебраические дополнения (без доказательства).

Пример: Вычислить определитель путем разложения по элементам 2-й строки.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 7 & -2 \\ 2 & 19 & 3 \\ -1 & -17 & 8 \end{vmatrix}$$

$$\Delta = a_{21} \cdot A_{21} + a_{22}A_{22} + a_{23}A_{23} = 2 \cdot (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 7 & -2 \\ -17 & 8 \end{vmatrix} + 19 \cdot (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 8 \end{vmatrix} + 3 \cdot (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 7 \\ -1 & -17 \end{vmatrix} =$$

$$= -2(56-34) + 19(8-2) - 3(-17+7) = 100$$

Эта теорема допускает обобщение, которое может быть принято за определение определителя любого порядка.

Определителем n-го порядка, соответствующим матрице n-го порядка $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}\dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}\dots & a_{2n} \\ a_{n1} & a_{n22}\dots & a_{nn} \end{pmatrix}$ будем называть число, равное сумме произведений элементов к какой-либо строки (столбца) на их алгебраические дополнения. Обозначим $|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{2n} \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{nn} \end{vmatrix}$

Пример: Записать разложение определителя 4-го порядка по элементам 1-го столбца.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 & 4 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \\ 5 & 0 & 6 & 11 \\ 7 & 2 & 4 & 4 \end{vmatrix};$$

Свойство определителей n-го порядка.

1. Операция замены в определителе строк столбцами с сохранением порядка следования называется транспонированием определителя . величина определителя не меняется при транспонировании.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12\ldots} & \ldots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22\ldots} & \ldots a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \; \ldots \\ a_{m} & a_{n2\ldots} & \ldots a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \ldots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \ldots & a_{n2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{1n} & a_{2n} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

2. Определитель, у которого две строки (два столбца) одинаковы, равен нулю.

3. Величина определителя равно нулю, если элементы какой-либо строки (столбца) равны нулю.

4. Величина определителя меняет знак, если у него переменить местами две строки (2 столбца).

5. Величина определителя умножается на число k, если элементы какой-нибудь строки (столбца) умножить на число k. Иначе, общий множитель элементов какой-нибудь строки (столбца) можно выносить за знак определителя.

6. Определитель, у которого элементы 2-х строк (столбцов) соответственно пропорциональны, равен нулю.

7. Если все элементы определителя, стоящие ниже (или выше) главной диагонали равен нулю, то определитель равен произведению элементов главной диагонали.

Пример:

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 100 & 8 \\ 0 & 40 & 5 & 17 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{vmatrix} = 2 \cdot 40 \cdot (-1) \cdot (-3) = 80 \cdot 3 = 240$$

8. Определитель не меняет своего значения от прибавления ко всем элементам какой-нибудь строки (столбца), соответствующих элементов другой строки (столбца), умноженных на одно и то же число.

Пример: вычислить определитель 4-го порядка, пользуясь свойствами определителей.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & 7 & 4 \\ 1 & -2 & 5 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 4 & 0 \\ 0 & -4 & 2 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 5 \end{vmatrix} = 4\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 5 \end{vmatrix} = 4\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 4 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 5 = 20$$

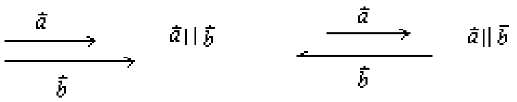
Тема 3. Понятие вектора. Линейный операции над векторами.

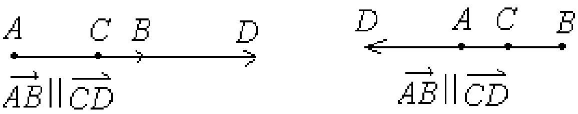
Определение: Вектор над направлением отрезок, т.е. отрезок, для которого указано, какая из его кольцевых точек считается первой, а какая второй. Обозначается $\overrightarrow{AB}$, $\vec{a}$

Определение: вектор, начало и конец которого совпадают, называются нуль-вектором. Обозначают $\vec{0}$ или $\overrightarrow{AA}$, изображают точкой.

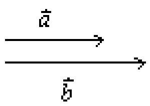
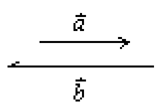
Длиной вектора (модулем) ненулевого вектора называется длина отрезка, изображающего вектор. Длиной нулевого вектора называется число «0». $\left|\overrightarrow{AB}\right|$, $|\vec{a}|$, $|\vec{0}| = 0$.

Определение: Два вектора называются коллинеарными, если они лежат на одной прямой или на параллельных прямых. Нуль-вектор считается коллинеарным любому вектору.



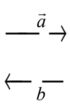
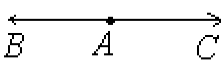


Коллинеарные векторы могут быть сонаправленными и противонаправленными.

$\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$  $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$ 

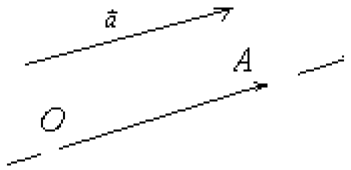
Определение: два вектора называются равными, если равны их длины и они сонаправлены. $\vec{a} = \vec{b} \leftrightarrow |\vec{a}| = |\vec{b}|, \vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$

 $\vec{a} = \vec{b}$ Все $\vec{0}$ векторы считаются равными.

Определение: Два вектора называются противоположными, если они противонаправлены а длины их равны.  

Пусть, $\vec{a}$ - вектор, O – некоторая точка на плоскости. Тогда существует единственная А такая, что $\vec{OA} = \vec{a}$ От всякой точки плоскости можно отложить вектор, равный данному, ипритом только один.

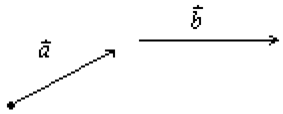
$\overline{OA} = \vec{a}$

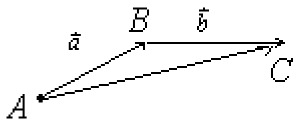


Равные векторы, но отложенные от разных точек, различать не будем

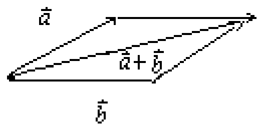
Возьмем произвольные векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ от каких-нибудь точек A отложим $AB = \vec{a}$, затем от $\vec{B}$ отложим $BC = \vec{b}$, вектор $AC = \vec{c}$ называется суммой векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$: $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$

Определение: Суммой векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называют вектор $\vec{c}$, начало которого находится в начале 1-го вектора, а конец – в конце 2-го при условии, что 2-ой вектор отложен от конца первого





Правило сложения векторов, описанное выше, называется правилом треугольника. Второе правило построения суммы векторов – правило параллелограмма:



$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$

– вектор главной диагонали

Сложение векторов обладает свойствами:

1. $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$

2. $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$

3. $\vec{a} + \vec{o} = \vec{a}$

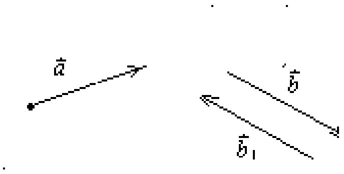
4. $\vec{a} + \vec{a}^1 = \vec{o}$

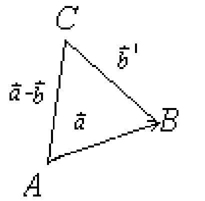
$\vec{a}^1$ - вектор, противоположный вектору $\vec{a}$

Определение: разностью векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется вектор $\vec{x}$, который в сумме с вектором $\vec{b}$ дает вектор $\vec{a}$

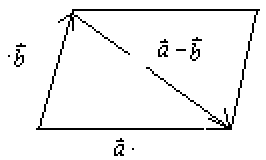
$\vec{b} + \vec{x} = \vec{a}$, $\vec{x}$ - разность векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

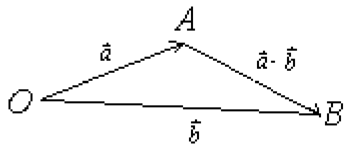
Обозначается $\vec{x} = \vec{a} - \vec{b}$. Найдем $\vec{x}$ из определения $\vec{b} + \vec{x} = \vec{a}$ прибавим $\vec{b}^1$: $\vec{b}^1 + (\vec{b} + \vec{x}) = \vec{b}^1 + \vec{a}$, $(\vec{b}^1 + \vec{b}) + \vec{x} = \vec{a} + \vec{b}$, $\vec{o} + \vec{x} = \vec{a} + \vec{b}^1$, $\vec{x} = \vec{a} + \vec{b}^1$, $\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + \vec{b}^1$. Разность векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ есть сумма $\vec{a}$ с вектором, противоположным вектору $\vec{b}$





Если векторы отложены от одной точки $AC = \vec{a} - \vec{b}$ плоскости, то вектор разности соединяет их концы и направлен от вычитаемого вектора к уменьшаемому





$\vec{a} - \vec{b} = \vec{OA} - \vec{OB}$

В параллелограмме вектор разности – это вектор второй диагонали.

Определение: Произведением вектора на действительное число α называется вектор $\vec{b} = \alpha\vec{a}$, который удовлетворяет условиям: 1) $|\vec{b}| = |\alpha| \cdot |\vec{a}|$; 2) $\vec{b} \uparrow\uparrow \vec{a}$, если $\alpha > 0$ $\vec{b} \downarrow\uparrow \vec{a}$, если $\alpha < 0$.

Из определения следует, что $\vec{b} = \vec{0} \leftrightarrow \alpha = 0$ или $\vec{a} = \vec{0}$. Из определения следует, что $\vec{a}$ и $\alpha\vec{a},\ \alpha \in R$ коллинеарные.

Теорема: Если $\vec{a}\ \vec{b} \parallel \vec{a} \ne \vec{0}$, то $\exists\ \alpha \in R \quad \vec{b} = \alpha\vec{a}$.

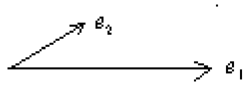
Операция умножения вектора на число обладает свойствами:

1. $\vec{a} = \vec{a}$; 2. $(-1)\vec{a} = -\vec{a} = \vec{a}^1$; 3. $\alpha(\beta\vec{a}) = (\alpha\beta)\vec{a}$; 4. $\alpha(\vec{a} + \vec{b}) = \alpha\vec{a} + \alpha\vec{b}$; 5. $(\alpha + \beta)\vec{a} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{a}$

Тема 4. Базис плоскости. Координаты вектора в данном базисе.

Определение: Совокупность любых двух неколлинеарных векторов плоскости, взятых в определенной порядке, называется базисом плоскости. $\{\vec{e}_1\vec{e}_2\}$, $\vec{e}_1 \| \vec{e}_2$ V (аффинным)

Если $\{\vec{e}_1\vec{e}_2\}$ базис плоскости и $\vec{a} = \alpha_1\vec{e}_1 + \alpha_2\vec{e}_2$, $\alpha_1\alpha_2$ – д.ч., то говорят, что $\vec{a}$ разложен по векторам базиса с коэффициентом разложения α_1, α_2



Теорема: Всякий вектор плоскости можно единственным образом разложить по векторам ее базиса. (без доказательства)

Определение: Координатами вектора в данном базисе называются коэффициенты его разложения по векторам базиса.

-$\{\vec{e}_1\vec{e}_2\}$ - базис, $\vec{a} = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 \leftrightarrow \vec{a} = (a_{1,}a_2)\{\vec{e}_1\vec{e}_2\}$.

-$\vec{e}_1 = 1\cdot\vec{e}_1 + 0\cdot\vec{e}_2 \Rightarrow \vec{e}_1 = (1.0)$

-$\vec{e}_2 = 0\cdot\vec{e}_1 + 1\cdot\vec{e}_2 \Rightarrow \vec{e}_2 = (0.1)$

-$\vec{0} = 0\cdot\vec{e}_1 + 0\cdot\vec{e}_2 \Rightarrow \vec{0} = (0.0)$

Имеют место следующие утверждения:

1) Каждая координата суммы векторов равна сумме соответствующих координат этих векторов: $\vec{a} = (a_1, a_2)$, $\vec{b} = (b_1, b_2)$ $\vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2)$.

2) Каждая координата разности векторов равна разности соответствующих координат этих векторов. $\vec{a} - \vec{b} = (a_1 - b_1, a_2 - b_2)$.

3) Каждая координата произведения вектора на число равна произведению соответствующих координат данного вектора на это число.

4) Для того, чтобы векторы $\vec{a} = (a_1, a_2)$ и $\lambda\vec{a} = (\lambda a_1, \lambda a\ )$. $\vec{b} = (b_1, b_2)$ были коллинеарны необходимо и достаточно, чтобы их координаты были пропорциональны. $\vec{a} \parallel \vec{b} \Leftrightarrow a_1 = \lambda b_1, a_2 = \lambda b_2, \lambda \in R$

5)Векторы $\vec{a} = (a_1, a_2)$ и $\vec{b} = (b_1, b_2)$ равны тогда и только тогда, когда ровны их соответствующих координат $\vec{a} = \vec{b} \leftrightarrow a_1 = b_1, a_2 = b_2$.

Определение: Аффинный базис площади называется ортонормированным, если векторы этого базиса единичные и взаимно перпендикулярные: $\{\vec{i}, \vec{j}\}$; $|\vec{i}| = |\vec{j}| = 1$; $\vec{i} \perp \vec{j}$.

Тема 5. Скалярное произведение векторов.

Определение: Скалярным произведением двух ненулевых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется число, равное произведению длин этих векторов и косинуса угла между ними.

$\vec{a}\cdot\vec{b} = (\vec{a}, \vec{b}) = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos(\vec{a}, \vec{b})$ - Если хотя бы один из векторов нулевой, то скалярным произведением векторов по определению равно нулю.

Теорема: Два ненулевых вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ перпендикулярны тогда и только тогда, когда их скалярное произведение равно нулю.

1. $\vec{a} \perp \vec{b}$, $\vec{a} \neq \vec{0}$, $\vec{b} \neq \vec{0}$ $(\vec{a}, \vec{b}) = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos(\vec{a}, \vec{b}) = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos 90^0 = 0$.

2. $(\vec{a}, \vec{b}) = 0$, $\vec{a} \neq \vec{0}$, $\vec{b} \neq \vec{0} \Rightarrow |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos(\vec{a}, \vec{b}) = 0 \Rightarrow \cos(\vec{a}, \vec{b}) = 0$, $(\vec{a}^1, b) = 90^0$, $\vec{a} \perp \vec{b}$.

Теорема: Скалярный квадрат вектора равен квадрату его модуля. $\vec{a}^2 = (\vec{a},\vec{a}) = |\vec{a}|\cdot|\vec{a}|\cdot\cos(\vec{a},\vec{a}) = |\vec{a}\ |^2\cos 0 = |\vec{a}|^2\ \ \vec{a}^2 = |\vec{a}|^2$.

Операция скалярного умножения обладает свойствами:

1. $(\vec{a},\vec{b}) = (\vec{b},\vec{a})$ или $\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{a}$

2. $\alpha(\vec{a},\vec{b}) = (\alpha\vec{a},\vec{b})$ - ассоциативность. $\alpha(\vec{a}\cdot\vec{b}) = (\alpha\vec{a})\cdot\vec{b} = \vec{a}\cdot(\alpha\vec{b})$,

3. $(\vec{a},\vec{b}+\vec{c}) = (\vec{a},\vec{b})+(\vec{a},\vec{c})$, $\quad\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c}) = \vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}$.

Выражение скалярного произведения в координатах:

пусть $\vec{a} = (a_1,a\ )$, $\vec{b} = (b_1,b_2)$ в ортонормированном базисе $\{\vec{i},\vec{j}\}$.

$\vec{a} = a_1\vec{i}+a_2\vec{j}$, $\vec{b} = b_1\vec{i}+b_2\vec{j}$, тогда

$$(\vec{a},\vec{b}) = (a_1\vec{i}+a_2\vec{j},b_1\vec{i}+b_2\vec{j}) = (a_1\vec{i},b_1\vec{i})+(a_1\vec{i},b_2\vec{j})+(a_2\vec{j},b_1\vec{i})+(a_2\vec{j},b_2\vec{j}) = a_1b_1(\vec{i},\vec{i})+$$
$$+a_1b_2(\vec{i},\vec{j})+a_2b_1(\vec{j},\vec{i})+a_2b_2(\vec{j},\vec{j}) = a_1b_1|\vec{i}\ |^2+0+0+a_2b_2|\vec{j}\ |^2 = a_1b_1+a_2b_2,$$

$|\vec{i}|^2 = \vec{i}^2 = 6,$

$|\vec{j}|^2 = \vec{j}^2 = 1 \quad (\vec{i},\vec{j}) = 0 \quad \vec{i}\perp\vec{j}$

$$(\vec{a}_1\vec{b}) = \vec{a}\cdot\vec{b} = a_1b_1+a_2b_2+b\{\vec{i},\vec{j}\}$$

Следствие:

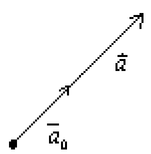
1) $|\vec{a}|^2 = \vec{a}^2 = (\vec{a},\vec{a}) = a_1\cdot a_1+a_2\cdot a_2 = a_1^2+a_2^2 \Rightarrow |\vec{a}| = \sqrt{\vec{a}^2} = \sqrt{a_1^2+a_2^2}$ - формула для нахождения длины вектора через его координаты.

2) $\cos(\vec{a}_1,\vec{b}_1) = \dfrac{(\vec{a},\vec{b})}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|} = \dfrac{a_1b_1+a_2b_2}{\sqrt{a_1^2+a_2^2}\cdot\sqrt{b_1^2+b_2^2}}$ - формула, для нахождения угла между векторами в координатах.

Пример: $\vec{a} = (1,3)$, $\vec{b} = (-1;2)$. Найти угол между ними

$$\cos(\vec{a}_1,\vec{b}) = \frac{1\cdot(-1)+3\cdot 2}{\sqrt{1^2+3^2}\cdot\sqrt{(-1)^2+2^2}} = \frac{-1+6}{\sqrt{10}\cdot\sqrt{5}} = \frac{5}{5\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} =$$
$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow (\vec{a}^1\vec{b}) = \pi/4 = 45^0$$

Определение: Единичный вектор, сонаправленный с вектором $\vec{a}$, называется ортом вектора $\vec{a}$



$|\vec{a}_0| = 1$, $\quad \vec{a}_0 \uparrow\uparrow \vec{a} \quad \vec{a}_0$ - орт $\vec{a}$

Пример: Найти орт вектора $\vec{a} = (3,-4)$

$\vec{a}_0 = \dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$, $|\vec{a}| = \sqrt{9+(-4)^2} = \sqrt{25} = 5 \Rightarrow \vec{a}_0 = \left(\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}\right)$.

Пусть материальная точка M под действием силы $\vec{f}$ переместилась из точки M в точку M_2по прямолинейному пути. Как известно из физики, работа A силы $\vec{f}$ при таком перемещении вычисляется по формуле $A = |\vec{f}| \cdot |\overrightarrow{M_1M_2}| \cdot \cos\varphi$, φ -угол между $\overrightarrow{M_1M_2}$ и $\vec{f} \Rightarrow A = \left(\vec{f}, \overrightarrow{M_1M_2}\right)$. Работа A постоянной силы $\vec{f}$ действующей на материальную точку при прямолинейном перемещении M_1M_2 равна скалярному произведению векторов $\vec{f}$ и $\overrightarrow{M_1M_2}$.

Пример: Даны две силы $\vec{f}_1 = (5,2)$ и $\vec{f}_2 = (1,-3)$, приложенные к единственной точке. Вычислить, какую работу производит равнодействие этих сил, когда ее точка приложения перемещается из начала в конец вектора $\vec{S} = (3,7)$

$\vec{f} = \vec{f}_1 + \vec{f}_2 = (6,-1) \cdot A = (\vec{f}, \vec{S}) = 6 \cdot 3 - 1 \cdot 7 = 18 - 7 = 11$ (единица работы).

Пусть $\vec{a} \neq \vec{0}$, $\quad \vec{a} = (a_1, a_2)$ в базисе $\{\vec{i}, \vec{j}\}$, $\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j}$ Умножим обе части этого равенства скалярно на $\vec{i}$ затем на $\vec{j}$:

$(\vec{a}, \vec{i}) = (\vec{a}_1\vec{i}, \vec{i}) + (a_2\vec{j}, \vec{i}) = a_1\vec{i}^{\,2} + 0 = a_1$, $\qquad (\vec{a}, \vec{j}) = (a_1\vec{i}, \vec{j}) + (a_2\vec{j}, \vec{j}) = a_2\vec{j}^{\,2} = a_2$

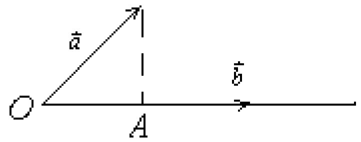
$a_1 = (\vec{a}_1, \vec{i}) = |\vec{a}| \cdot |\vec{i}| \cos(\vec{a}_1, \vec{i}) = |\vec{a}| \cdot \cos\varphi_1, \quad \varphi_1 = (\vec{a}, \vec{i})$

$a_2 = (\vec{a}, \vec{j}) = |\vec{a}| \cdot |\vec{j}| \cos(\vec{a}, \vec{j}) = |\vec{a}| \cos\varphi_{2,} \quad \varphi_2 = (\vec{a}, \vec{j})$

Где $\cos\varphi_1$ и $\cos\varphi_2$ - направляющие косинусы вектора $\vec{a}$ в базисе $\{\vec{i}, \vec{j}\}$. Каждая координата вектора в ортонормированном базисе равна произведению длины вектора на соответствующий косинус.

$$\cos^2\varphi_1 + \cos^2\varphi_2 = \left(\frac{a_1}{|a|}\right)^2 + \left(\frac{a_2}{|\vec{a}|}\right)^2 = \frac{a_1^{\,2} + a_2^{\,2}}{|\vec{a}|^2} = \frac{|\vec{a}|^2}{|\vec{a}|^2} = 1$$

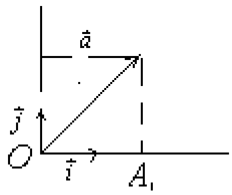
Пусть OA - проекция вектора $\vec{a}$ на ось, имеющую направление вектора $\vec{b}$



ось

$\frac{OA}{|\vec{a}|} = \cos(\vec{a},^1\vec{b}) \Rightarrow OA = |\vec{a}| \cdot \cos(\vec{a},^1\vec{b}) = |\vec{a}| \cdot \frac{(\vec{a},\vec{b})}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{(\vec{a},\vec{b})}{|\vec{b}|}$ $\quad Пр_{\vec{b}}^{\vec{a}} = \frac{(\vec{a},\vec{b})}{|\vec{b}|}$ -пр. $\vec{a} = (2{,}10), \quad \vec{b} = (12{,}5)$

$пр_{\vec{b}}^{\vec{a}} = \frac{-24+50}{\sqrt{144+25}} = \frac{26}{13} = 2$ $\vec{a} = (a_1, a_2)$ найдем проекции $\vec{a}$ на базисные векторы $\vec{i}$ и $\vec{j}$.

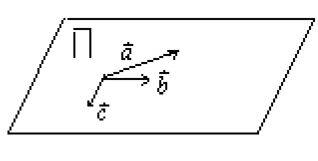


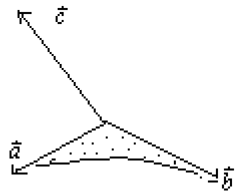
$пр_{\vec{i}}^{\vec{a}} = \frac{(\vec{a},\vec{i})}{|\vec{i}|} = \frac{a_1}{1} = a_1 \qquad пр_{\vec{j}}^{\vec{a}} = \frac{(\vec{a},\vec{j})}{|\vec{j}|} = \frac{a_2}{1} = a_2 \qquad OA_1 = a_1 \quad OA_2 = a_2$

$\Rightarrow$ проекции вектора а базисные векторы $\vec{i}, \vec{j}$ - это координаты вектора в базисе $\{\vec{i}, \vec{j}\}$,

Тема 6. Базис пространства. Координаты вектора в данном базисе.

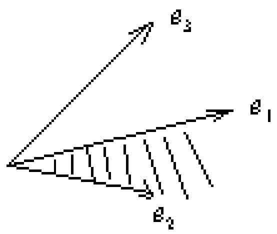
Определение: Векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ называются компланарными, если они параллельны одной плоскости или лежат в одной точке *O* пространства, то они будут лежать в одной плоскости.



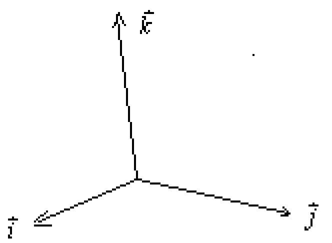


Определение: Совокупность трех некомпланарных векторов, взятых в определенном порядке, называется базисом пространства.

$\{\vec{e}_1,_1\vec{e}_2,\vec{e}_3\}$



Определение: Базис пространства называется ортонормированным, если векторы базиса единичные и взаимно перпендикулярные $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$.



$|\vec{i}| = |\vec{j}| = |\vec{k}| = 1$, $\quad \vec{i} \perp \vec{j}$, $\quad \vec{i} \perp \vec{k}$, $\quad \vec{j} \perp \vec{k}$.

Теорема (без доказательства): Всякий вектор пространства можно единственным образом разложить по векторам базиса.

$$\vec{a} = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3 \Leftrightarrow \vec{a} = (a_1, a_2, a_3)_{\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}}.$$

Определение: Координатами вектора в данном базисе называется коэффициент разложения этого вектора по векторам базиса.

$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\qquad \vec{b} = (b, b_2, b_3)$.

Справедливы следующие утверждения:

1. $\vec{a} \pm \vec{b} = (a \pm b_1; a_2 \pm b_2; a_3 \pm b_3)$

2. $\lambda\vec{a} = (\lambda a, \lambda a_2, \lambda a_3)$

3. $\vec{a} \| \vec{b} \Leftrightarrow \exists \lambda \in R$, такое что, $b_1 = \lambda a_1$, $\quad b_2 = \lambda a_2$, $\quad b_3 = \lambda a_3$, $\quad \lambda$ - множитель пропорциональности.

4. $\vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow a_1 = b_1$, $\quad a_2 = b_2$, $\quad a_3 = b_3$.

5. $(\vec{a}, \vec{b}) = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$, $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$ тогда

$$\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{a_{1,}b_1 + a_2b_2 + a_3b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \cdot \sqrt{b^2{}_1 + b_2^2 + b_3^2}}.$$

Обозначим $\alpha = (\vec{a}, \vec{i})$, $\qquad \beta = (\vec{a}, \vec{j})$, $\qquad \gamma = (\vec{a}, \vec{k})$.. $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ - направляющие косинусы вектора $\vec{a}$. Имеют место равенства: $a_1 = |\vec{a}|\cos\alpha$, $a_2 = |\vec{a}|\cos\beta$, $a_3 = |\vec{a}|\cos\gamma$

$$\Rightarrow \cos\alpha = \frac{a_1}{|\vec{a}|} = \frac{a_1}{\sqrt{a_1^2 + a_2^21 + a_3^2}}, \cos\beta = \frac{a_2}{|\vec{a}|} = \frac{a_2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}}, \cos\gamma = \frac{a_3}{|\vec{a}|} = \frac{a_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}}.$$

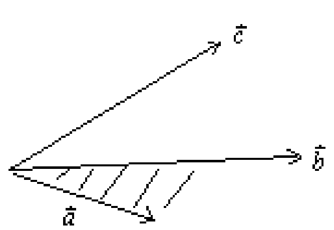
Сумма квадратов направляющих косинусов равна единице:

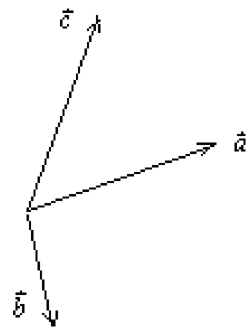
$cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2 j = 1$

$np_{\vec{i}}{}^{\vec{a}} = a_1$, $\qquad np_{\vec{j}}{}^{\vec{a}} = a_2$,1 $np_{\vec{k}}{}^{\vec{a}} = a_3$– проекции вектора на базисные векторы $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ это координаты вектора в базисе $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$.

Тема 7. Векторное произведение векторов.

Три вектора $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ рассмотренные в определенном порядке, называются упорядоченной тройки векторов. Упорядоченная тройка некомплектных векторов $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ является правой, если кратчайший поворот от первого вектора $\vec{a}$ ко второму вектору $\vec{b}$ из конца третьего вектора $\vec{c}$ виден совершающийся против часовой стрелки. Если же указанный поворот совершается по направлению часовой стрелки, то упорядоченная тройка $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ - левая.





правая левая

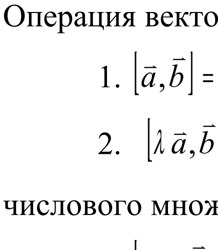
Определение: Векторным производным двух неколлинеарных векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется вектор, обозначенный $\left[\vec{a},\vec{b}\right]$ или $\vec{a}x\vec{b}$ удовлетворяющий следующим условиям:

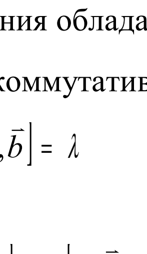
1) $\left|\left[\vec{a},\vec{b}\right]\right| = |\vec{a}|\cdot\left|\vec{b}\right|\cdot\sin\left(\vec{a},\vec{b}\right)$; $\left(0\angle\left(\vec{a}\,\hat{,}\,\vec{b}\right)\angle\,\Pi\right)$ 2) $\left[\vec{a},\vec{b}\right]\perp\vec{b}$,

3) $\vec{a},\vec{b}$ и $\left[\vec{a},\vec{b}\right]$ - правая тройка.

Векторное произведение параллельных векторов по определению равно $\vec{0}$.

$\left[\vec{a},\vec{b}\right] = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{a} \parallel \vec{b}$





Операция векторного умножения обладают свойствами:

1. $\left[\vec{a},\vec{b}\right] = -\left[\vec{b},\vec{a}\right]$ - антикоммутативность.

2. $\left[\lambda\,\vec{a},\vec{b}\right] = \left[\vec{a},\lambda\,,\vec{b}\right] = \left[\vec{a},\vec{b}\right] = \lambda \quad \left[\vec{a},\vec{b}\right], \quad \lambda \in R$ - ассоциотивность относительно числового множителя.

3. $\left[\vec{a}+\vec{b},\vec{c}\right] = \left[\vec{a},\vec{c}\right]+\left[\vec{b},\vec{c}\right], \quad \left[\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right] = \left[\vec{a},\vec{b}\right]+\left[\vec{a},\vec{c}\right]$- дистрибутивность относительно сложения векторов.

Выражение векторных произведений в координатах.

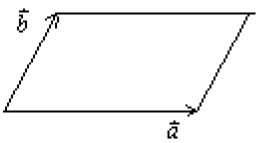
Зададим ортонормированный базис пространства $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ Пусть $\vec{a} = (a_{1,} a_2 a_3)$,

$\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$. $[\vec{a}, \vec{b}] = \left(\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & d_2 \end{vmatrix} \right)$; $\begin{pmatrix} a_1 \, a_2 \, a_3 \\ b_1 \, b_2 \, b_3 \end{pmatrix}$ - вспомогательная матрица.

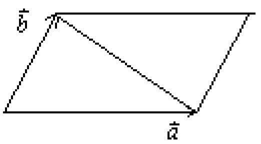
Пример: $\vec{a} = (2,1,3)$ $\vec{b} = (-1,0,4)$

$$[\vec{a}, \vec{b}] = \left(\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 4 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & -1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} \right) = (4, -11, 1) = 4\vec{i} - 11\vec{j} + \vec{k}$$

Приложения векторного произведения.



Из определения векторного произведения следует, что длина векторного произведения численно равна площади параллелограмма, построенного на этих векторах как на сторонах $\left|[\vec{a}, \vec{b}]\right| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \sin(\vec{a}, \vec{b}) = S$.



$$S_\Delta = \frac{1}{2} \quad S = \frac{1}{2}\left|[\vec{a}, \vec{b}]\right|,$$

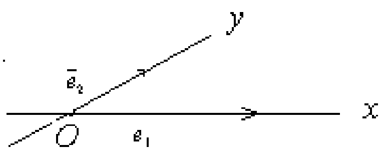
Пусть дано твердое тело и одна из точек этого тела, точка *O*, неподвижно закреплена, тогда возникает вращательный момент (момент силы), если в другой точке *P* тела приложить силу $\vec{F}$. Момент силы $\vec{m} = \left[\overset{\rightarrow}{OP}, \vec{F} \right]$.

Пример: Сила $\vec{F} = (3,2,-4)$ приложена к точке A. Определить момент этой силы относительно начала координат, если $\overline{OA} = (2,-1,1)$.

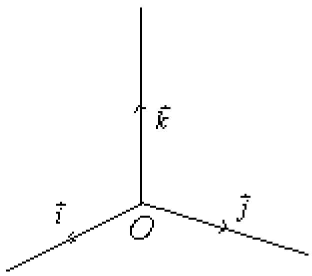
$$\vec{m} = [O\vec{A}, \vec{F}] = \overline{OA} \cdot \vec{F} = \left(\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -4 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -4 & 3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} \right) = (2, 11, 7) = 2\vec{i} + 11\vec{j} + 7\vec{k}$$ - момент силы.

Тема 8. Системы координат на плоскости и в пространстве. Простейшие задачи.

Возьмем на плоскости точку O и произвольный базис $\{\vec{e}_1\vec{e}_2\}$. Определить совокупность точки O и векторов базиса $\vec{e}_1,\vec{e}_2$ называется общей декартовой (аффинной) системой координат на плоскости: $\{o,\vec{e}_1,\vec{e}_2\}$ точка O над началом системы координат, а векторы $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$ координат векторами ($\vec{e}_1$ - первый координатный вектор, $\vec{e}_2$ - второй.)



Прямые, проходящие через начало координат, в направлении векторов $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$ называются осями координат, ось направление которой определяется вектором $\vec{e}_1$, называется осью абсцисс и обозначалась *ox,* а ось, направление которой определяется вектором $\vec{e}_2$, называется осью ординат и $\{0,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ - ортонормированный базис.



$\{0,\vec{e}_1,\vec{e}_2\vec{e}_3\}$ - аффинная система координат, M – производная точки пр-ва. ОМ называется радиус вектора точки *M*. $JO\vec{M}$ имеет координаты x_1, y_1, z в $\{\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3\}$: $O\vec{M} = (x_1,y_1,z)$ или $O\vec{M} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3$.

Определение: Координатами точек в $\{\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3\}$ *M(x,y,z)*$\{o,\vec{e}_1,\vec{e}_2\vec{e}_3\}$ $\Rightarrow O\vec{M} = (x,y,z)$ $\{\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3\}$ *x*- абсцисса, y- ордината, z – аппликата точки *M*.

Система координат в пространстве устанавливает взаимно однозначное соответствие между точками пространства и упорядоченными тройками действительных чисел.

1. $\{0,\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3\}$. $A(x_1,y_1,z_1)$, $B(x_2,y_2,z_2)$

$\Rightarrow A\vec{B} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$ $x = \dfrac{x_1 + y_2}{2}$, $y = \dfrac{y_1 + y_2}{2}$,

$z = \frac{z_1 + z_2}{2}$ - координаты середины отрезка AB, $x_0 = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}$, $y_0 = \frac{y_1 + y_{21} + y_3}{3}$,

$z_0 = \frac{z_1 + z_2 + z_3}{3}$ – координаты центра тяжести ΔABC. $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$, $C(x_3, y_3, z_3)$ в $\{0, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$

$$\rho\,(A, B) = \left|\vec{AB}\right| = AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

Тема 9. Смешанное произведение векторов

Определение: Смешанным произведением векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, взятых в указанном порядке, называют скалярное произведение вектора $\vec{a}$ на векторном произведении векторов $\vec{b}$ и $\vec{c}$ $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c},)$=($\vec{a}$,$\left(\left[\vec{b}, \vec{c}\right]\right)$ - число.

Операция смешанного умножения обладает свойствами:

1. $\lambda\left(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right) = \left(\lambda\,\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right) = \left(\vec{a}, \lambda\,\vec{b}, \vec{c}\right) = \left(\vec{a}, \vec{b}, \lambda\,\vec{c}\right)$- ассоциативное отношение числового множителя.

2. $$\left(\vec{a} + \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}\right) = \left(\vec{a}, \vec{c}, \vec{d}\right) + \left(\vec{d}, \vec{c}, \vec{d}\right)$$
$$\left(\vec{a}, \vec{b} + \vec{c}, \vec{d}\right) = \left(\vec{a}, \vec{b}, \vec{d}\right) + \left(\vec{a}, \vec{c}, \vec{d}\right)$$
$$\left(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} + d\right) = \left(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right) + \left(\vec{a}, \vec{b}, d\right)$$

3. Смешанное произведение не меняется при перестановке сомножителей $\left(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right) = \left(\vec{b}, \vec{c}, \vec{a}\right) = \left(\vec{c}, \vec{a}, \vec{b}\right)$

4. При перестановке двух сомножителей смешанного произведения меняет знак, а его абсолютная величина не меняется.

Например: $\left(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right) = -\left(\vec{b}, \vec{a}, \vec{c}\right)$

5. Векторы компланарны тогда и только тогда когда их смешанное произведение равно нулю.

Следствие: Если смешанные произведения содержат хотя бы два одинаковых сомножителя, то оно равно нулю. (эти векторы всегда компланарны).

Теорема: $\left(\vec{a}, \left[\vec{b}, \vec{c}\right]\right) = \left(\left[\vec{a}, \vec{b}\right], \vec{c}\right)$

$\left(\vec{a}, \left[\vec{b}, \vec{c}\right]\right) = \left(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right) = \left(\vec{b}, \vec{c}, \vec{a}\right) = \left(\vec{c}, \vec{a}, \vec{b}\right) = \left(\vec{c}\left[\vec{a}, \vec{b}\right]\right) = \left(\left[\vec{a}, \vec{b}\right]\vec{c}\right) \Rightarrow$смешанные произведения векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ можно было бы определить так: $\left(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right) = \left(\left[\vec{a}, \vec{b}\right], \vec{c}\right)$ - скалярное произведение векторного произведения $\vec{a}$ и $\vec{b}$ с вектором $\vec{c}$.

Выражение смешанного произведения в координатах

Пусть $\{0, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$. $\vec{a} = (a_1 a_2 a_3)$, $\vec{b} = (b_1 b_2 b_3)$, $\vec{c} = (c_1 c_2 c_3)$.

$$[\vec{b}, \vec{c}] = \left(\begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} b_3 & b_1 \\ c_3 & c_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} \right)$$

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{a}, [\vec{b}, \vec{c}]) = a_1 \cdot \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} + a_2 \cdot \begin{vmatrix} b_3 & b_1 \\ c_3 & a \end{vmatrix} + a_3 \cdot \begin{vmatrix} b & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

Пример: $\vec{a} = 3\vec{c} + \vec{k}$, $\vec{b} = \vec{i} + \vec{j}$, $\vec{c} = 2\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$ $\vec{a} = (3,0,1)$, $\vec{b} = (-1,1,0)$, $\vec{c} = (2,-1,2)$

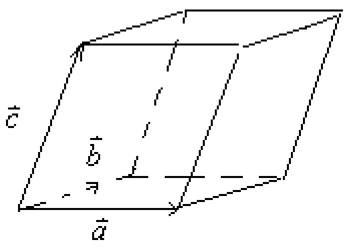
$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 5$$

Пример: Установить компланарны ли векторы $\vec{a} = (3,-2,1), \vec{b} = (3,-1,-2)$,

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & -2 \end{vmatrix} = -6 - 2 - 12 - 3 + 6 - 8 \neq 0 \Rightarrow$$ не компланарны.

Геометрические приложения

Абсолютная величина смешанного произведения численно равна объему параллелепипеда, построенном на векторах как на сторонах



$|(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})| = V_n$ Следствие: $V_n = \frac{1}{6} V_n = \frac{1}{6} \cdot |(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})|$

Тема 10. Уравнение геометрически места точек на плоскости.

Определение: Геометрическим местом точек (ГМТ) называется фигура, которая состоит из всех точек, обладающих заданными геометрическими свойствами.

Перед уравнением геометрические места точек будем понимать уравнения, которому удовлетворяют координаты всех точек данного геометрического места и не удовлетворяют координаты точек, не принадлежащих этому ГМТ.

Общая схема решения задач на составление уравнения ГМТ.

1. Целесообразно выбираем систему координат

2. Выбираем произвольную точку из ГМТ и приписываем ей текущие координаты (x,y)

3. Записываем в виде соотношения свойство произвольной точки ГМТ.

4. Выражаем это соотношение в координатах.

5. Приводим это соотношение к простейшему вид путем равносильных преобразований.

6. Определяем вид ГМТ и делаем чертеж.

Вывод уравнения окружности.

Определение: Окружностью называют геометрическое место точек плоскости, удаленных от некоторых фиксированных точек на данное расстояние – радиусом окружности.

Пусть *A* – центр окружности, r – ее радиус. Составим уравнение окружности, пользуясь общей схемой решения задач на составление уравнения ГМТ.

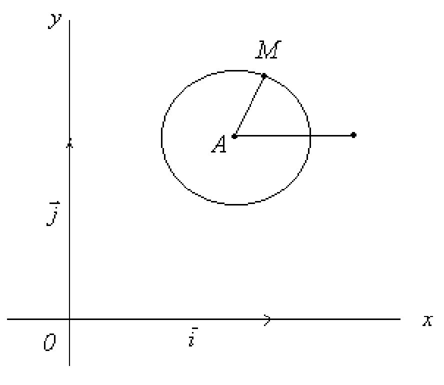
1. $\{0,\vec{i},\vec{j}\}$ - прямоугольная система координат. Пусть $A(x_0, y_0)$;

2. Пусть *M* - произвольная точка окружности, припишем ей текущие координаты *x, y*: *M(x,y);*

3. $MA = \rho(M,A) = r$;

4. $\rho(A,M) = \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}$, $\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2} = r$

5. $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2 = r^2$ (1)



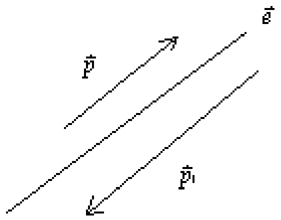
Таким образом, если точка *M* (x,y) лежит на окружности то ее координаты удовлетворяют уравнению (1). Если же точка N $(x_1,y_1) \notin$ окружности, то ее координаты x_1,y_1 не удовлетворяют уравнению окружности, т.к. AN≠r $\Rightarrow \sqrt{(x_1-x_0)^2+(y_1-y_0)^2} \neq r$ или $(x_1-x_0)^2+(y_1-y_0)^2 \neq r^2$ по определению уравнения ГМТ уравнение $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2 = r^2$ является уравнением окружности с центром (x_0, y_0) и радиус r. В частности, если центр окружности находится в начале координат, то уравнение окружности: $x^2 + y^2 = r^2$. Уравнение (1) называется каноническим уравнением окружности.

Тема 11. Способы задания прямой на плоскости и ее уравнения.

Все вопросы будем рассматривать в прямоугольной системе координат $\{0, \vec{i}, \vec{j}\}$

1. Уравнение прямой, заданной точкой и направляющим вектором.

Определение: Каждый ненулевой вектор, коллинеарный прямой, называется ее направляющим вектором.



$\vec{p} \parallel e, \quad \vec{p} \neq \vec{0}, \ \vec{p}$ - направленный вектор

$\vec{p} \parallel e, \quad \vec{p} \neq \vec{0}, \ \vec{p}^1$ - не направленный вектор

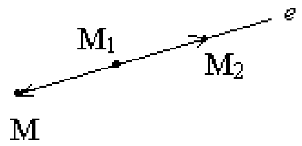
$\vec{p}^1 \parallel \vec{p}^1$

Прямая на плоскости однозначно задается точкой и направляющим вектором. Через точку вне прямой, содержащей направленный вектор, можно провести единую прямую, параллельную данной.

Пусть $M_0(x_0 y_0)$ - неизвестная точка прямой ℓ, $\vec{p} = (p_1, p_2)$ – направляющий вектор прямой. Возьмем произвольную точку $M \in \ell \Leftrightarrow \overrightarrow{M_0M} \parallel \vec{p}$, $\overrightarrow{M_0M} = (x - x_0, y - y_0)$. Векторы параллельны $\Leftrightarrow$ когда их соответствующие координаты пропорциональны, следовательно ℓ : $\dfrac{x - x_0}{p_1} = \dfrac{y - y_0}{p_2}$ - уравнение прямой, проходящей через точку (x_0, y_0) и имеющей направленный вектор $\vec{p} = (p_1, p_2)$. Это уравнение называется каноническим уравнением прямой.

Пример: Составить каноническое уравнение прямой ℓ, проходящей через точку N(3,-2) параллельно вектору $\vec{p} = (1,4)$ $\quad e: \dfrac{x - 3}{1} = \dfrac{y + 2}{4}$

2. Уравнение прямой, заданной двумя точками. Прямая на плоскости однозначно задается двумя точками, так как через 2 различные точки можно провести прямую.



Пусть $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2 y_2)$ $M_1 \neq M_2$ - две разные точки принадлежат прямой ℓ .

Пусть $M(x, y)$ - произвольные точки, принадлежащие ℓ. $M \in e \Leftrightarrow$ $M_1\vec{M}$ параллельны $M_1\vec{M}_2$ $M_1\vec{M} = (x - x_1, y - y_1)$, $M_1\vec{M}_2 = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$,

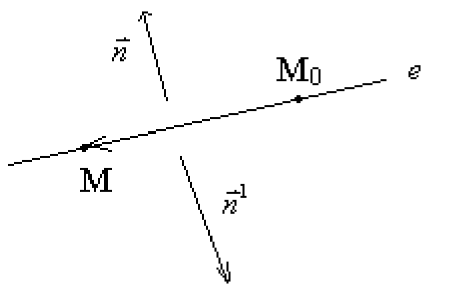
$M \in e \Leftrightarrow \dfrac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{y - y_1}{y_2 - y_1}$ - уравнение прямой, проходящей через две точки.

Пример: Составить уравнение прямой, проходящей через точки A(1,-2) и B (3,4).

$\ell : \dfrac{x - 1}{3 - 1} = \dfrac{y + 2}{4 + 2}$; $\ell : \dfrac{x - 1}{2} = \dfrac{y + 2}{6}$; $\ell : \dfrac{x - 1}{1} = \dfrac{y + 2}{3}$ – канонические уравнения прямой.

3. Уравнение прямой, заданной точкой и вектором нормали

Определение: Каждый вектор, ортогональной прямой линии, называется ее вектором нормали



$\vec{n} \perp \ell$, $\vec{n} \neq \vec{0}$, $\vec{n}$ - вектор нормали. Пусть $\vec{n} \; || \; \vec{n}^1$, $\vec{n}^1 \perp \ell$, $\vec{n}^1 \neq \vec{0}$, $\vec{n}^1$ - другой вектор нормали.

Пусть $M_0(x_0, y_0)$ известная точка прямой; $\vec{n} = (a, b)$ - ее вектор нормали. Пусть $M(x, y)$ произвольная точка прямой ℓ, $M_0\vec{M} \perp \vec{n} \Leftrightarrow \left(\overrightarrow{M_0M}, \vec{n}\right) = 0$, $\overrightarrow{M_0M} = (x - x_0, y - y_0)$,

$(M_0\vec{M}, \vec{n}) = a(x - x_0) + b(y - y_0) \Rightarrow M \in \ell \Leftrightarrow a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0$ – уравнение прямой, проходящей через точку M_0 перпендикулярно $\vec{n}$.

Пример: составить уравнение прямой ℓ, проходящей через точки A (1,-3) перпендикулярно вектору $\vec{n} = (-2, 2)$.

$\ell : -2(x - 1) + 2(y + 3) = 0$, $\ell : -2x + 2y + 2 + 6 = 0$, $\ell : 2x - 2y - 8 = 0$.

$\ell: x - y - 4 = 0$ - общее уравнение прямой.

Определение: Уравнение вида $ax + by + c = 0$, $a^2 + b^2 \neq 0$ - называется общим уравнением прямой. ($\vec{n} \neq \vec{0}, \bar{a}$ и b одновременно не обращается в нуль.)

Теорема: (без доказательства) Любая прямая на плоскости имеет уравнение вида: $ax + by + c = 0$, $a^2 + b^2 \neq 0$. Обратно, каждое уравнение вида $ax + by + c = 0$, $a^2 + b^2 \neq 0$ является уравнением некоторой прямой. Геометрический смысл коэффициентов при неизвестных в общем уравнении прямой: они являются координатами вектора нормали прямой.

Связь между координатами направляющего и нормального векторов прямой:

$\vec{n} = (\bar{a}, b)$, $\bar{p} = (p_1, p_2)$, $\vec{n} \perp \ell$, $\bar{p}$ параллельно $\ell: \dfrac{x - x_0}{p_1} = \dfrac{y - y_0}{p_2}$,

$\ell: ax + by + c = 0$; $(x - x_0)p_2 = (y - y_0)p$, $p_0 x - p_1 y + (-x_0 p_2 + y_0 \bar{p}) = 0 \Rightarrow$

$p_1 = -b, p_2 = a$. $\vec{n}(a, b)$.

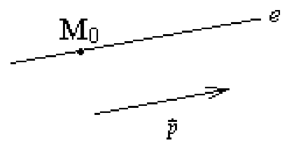
4. Уравнение прямой «в отрезках». Прямая ℓ пересекает оси координат в точках

(A,O). B(o,b). $\ell: \dfrac{x - a}{-a} = \dfrac{y}{b}$ $-\dfrac{x}{a} + 1 = \dfrac{y}{6}$ $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{6} = 1$ -уравнение прямой «в отрезках».

Здесь a - абсцисса, точка пересечения ℓ с Ox, b - ордината точки пересечения ℓ с Oy.

5. Параметрические уравнения прямой.

Зададим прямую ℓ точкой $M_0(x_0, y_0)$ и направим вектором $\bar{p} = (p_1 p_2)$.



Пусть $M(x, y)$ произвольные точки ℓ; $M \in \ell \Leftrightarrow M_0\bar{M} \parallel \bar{p}$; $M_{0,}\bar{M}$ = (x-x$_0$, y-y$_0$).

$M_0\bar{M} \parallel \bar{p} \Leftrightarrow$ э$t \in R / M_0\bar{M} = t\bar{p}$ или в координатах: $\begin{cases} x - x_0 = t\bar{p} \\ y - y_0 = tp_2 \end{cases}$ $M \in e \Leftrightarrow \begin{cases} x = x_0 + p_1 t_1 \\ y = y_0 + p_2 t \end{cases}$

, $t \in R$ параметрические уравнения ℓ, t – параметры. Каждому значку $t \in R$ соответствует определенная точка прямой ℓ и обратно.

Пример: Прямая задана точкой А (1,-4) и направлена вектором $\bar{p} = (-2, 11)$ записать параметры уравнения прямой. $\ell: \begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = -4 + 11t \end{cases}$.

6. Уравнение прямой с угловым коэффициентом.

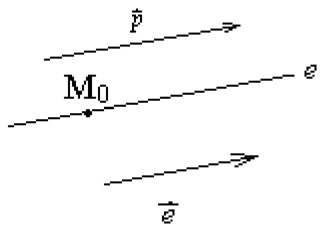
Выберем точку в прямоугольной системе координат $\{0,\vec{i},\vec{j}\}$. Пусть ℓ - прямая, непараллельная оси Оу, т.е. ℓ пересекает ось ординат. Пусть $\vec{p}=(\vec{p}_1\vec{p}_2)$ направляющий вектор прямой ℓ, тогда $\vec{p}$ непараллелен оси Оу.

В таком случае можно ввести число k=$\frac{p_2}{p_1}$.

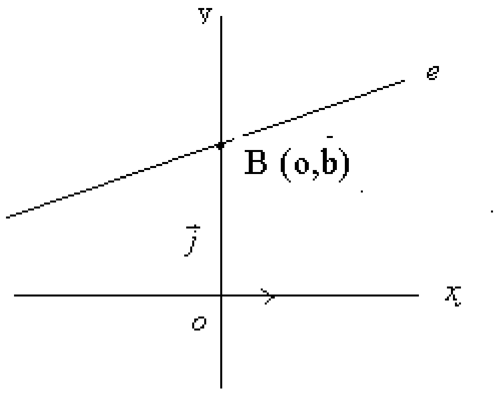
Определение: Число k= $\frac{p_2}{p_1}$, равное отношению второй координаты направленного вектора прямой к первой координате этого вектора, называется угловым коэффициентом этой прямой.

Угловой коэффициент прямой не зависит от выбора направления вектора прямой.

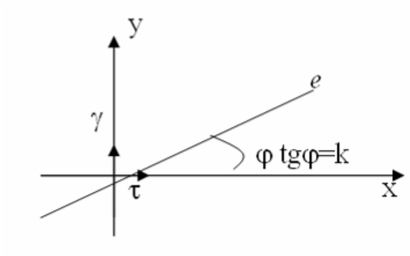
Если $\vec{p}^1=(p^1{}_1,p_2{}^1)$ другой направленный вектор, но $k=\frac{p_2}{p_1}=\frac{p_2{}^1}{p_1{}^1}$. Пусть прямая ℓ задана точкой $M_0(x_0y_0)$ и угловой коэффициент. Тогда в качестве ее направленного вектора можно взять $\vec{e}=(1,b)$ т.к. $\frac{p_1}{1}=\frac{p_2}{k}\Rightarrow\ \vec{e}$ параллельна $\vec{p}$



Запишем уравнение прямой, проходящей через точку M_0, с направленным вектором (1,k) $=\vec{e}$: $\vec{e}:\frac{x-x_0}{1}=\frac{y-y_0}{k}\Rightarrow\ y-y_0=k(x-x_0)$- уравнение прямой с угловым коэффициентом k, проходящим через точку M_0. Если будет известна точка $B(0,b)$ пересечение при e с осью *Oy*, то уравнение прямой ℓ: y-b=k (x-0), $\ell: y=kx+b$- уравнение прямой с угловым коэффициентом k, пересекающего О*y*. Геометрический смысл углового коэффициента: угловой коэффициент k при e является tg φ



Где угол φ образован полупрямой, расположенной выше оси ох с положительным лучом оси ох.



Пример. Прямая пересекает ось абсцисс под углом 45° и проходит через точку $M_0(-11,2)$. Составить общее уравнение этой прямой tg45°=k=1

ℓ: $y-y_0=k(x-x_0)$, ℓ:y-2=1(x+11), ℓ:y-x-13=0 – общее уравнение прямой.

Тема 12. Взаимное расположение прямых на плоскости

Прямые на плоскости могут пересекаться в единственной точке, быть параллельными (в этом случае они не имеют общей точки) и совпадать.

Зададим прямые l_1 и l_2 общими уравнениями:

l_1: $a_1x+b_1y+c_1=0$, l_2: $a_2x+b_2y+c_2=0$. Вопрос о взаимном расположении прямых сводится к исследованию системы уравнений:

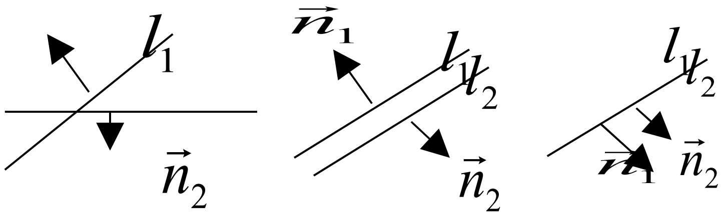
$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0 \end{cases}$ (1) в случае пересечения прямых эта система имеет единственное решение. Пара чисел, являющиеся решением (1) есть координаты точки пересечения прямых.

Можно показать, что прямые пересекаются только тогда когда $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$.

Геометрически это означает, что $\vec{n}_1 \parallel \vec{n}_2$ прямые параллельные тогда и только тогда, когда

$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2}$.

В случае совпадения прямых $l_1 = l_2$ тогда и только тогда, когда $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$ $\vec{n}_1 \parallel \vec{n}_2$



Пример. Определить взаимное расположение прямых

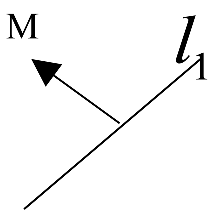
l_1: 6x+4y-1=0, l_2:3x+2y+5=0. $\vec{m}\,(6,4)$. $\vec{n}\,(3,2)$. $\frac{6}{3}=\frac{4}{2}\neq\frac{-1}{5}$, следовательно, прямые параллельные.

Уравнение прямой, параллельной заданной ax+by+c=0, можно записать в виде $ax+by+c_1=0$, то есть уравнения параллельных прямых можно записать в общем виде, в котором будут свободные члены.

Условие перпендикулярности прямых l_1,l_2 : $l_1\perp l_2$, $\vec{m}\perp\vec{n}$, следовательно, $(\vec{m},\vec{n})=0$, тогда $a_1a_2+b_1b_2=0$. $l_1\perp l_2 \Leftrightarrow a_1a_2+b_1b_2=0$ $\vec{m}\,(a_1,b_1)$, $\vec{n}\,(a_2,b_2)$.

Тема 14. Расстояние от точки до прямой. Угол между двумя прямыми.

Расстояние то точки M_0 до прямой l есть длина перпендикуляра, опущенного из точки M_0 на прямую. Обозначим $\rho\left(M_0,l\right)$



Его можно подсчитать по формуле $\rho\,(M_0,l)=\dfrac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$ $M_0(x_0,\,y_0)$, l: $ax+by+c=0$.

Пример. Найти расстояние от точки K(-1,2) до l: 2x-11y+5=0,

$\rho\,(K_0,l)=\dfrac{|2\cdot(-1)-11\cdot 2+5|}{\sqrt{4+121}}=\dfrac{19}{5\sqrt{5}}$ Пусть заданы параллельные прямые l: $ax+by+c=0$ и l_1: $a_1x+b_1y+c_1=0$, $l_1 \| l$

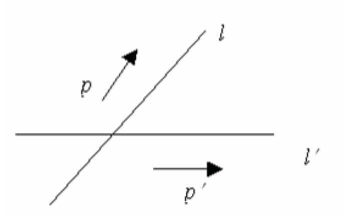
$\rho\left(l,l_1\right)=\rho\left(M_0,l\right)$; $M_0\in l$ – произвольная точка на l

$\rho\,(l,l_1)=\dfrac{|c_1-c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

Пример. Найти расстояние между прямыми l и d:

l: 3x+4y-1=0, d: 6x+8y-12=0, d: 3x+4y-6=0, $\rho\,(l,d) = \dfrac{|-6+1|}{\sqrt{9+16}} = \dfrac{5}{5} = 1$.

Определение. Углом между пересекающимися прямыми называется угол между направляющими векторами этих прямых



Следовательно, $\left(l\hat{.}l'\right) = \left(\vec{p}\hat{,}\vec{p}'\right)$,

$$\cos\left(l\hat{.}l'\right) = \cos\left(\vec{p}\hat{,}\vec{p}'\right) = \frac{\left(\vec{p},\vec{p}'\right)}{|\vec{p}||\vec{p}'|} = \frac{a_1a_2 + b_1b_2}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}\sqrt{a_2^2 + b_2^2}};$$

l_1: $a_1x + b_1y + c_1 = 0$, $\vec{n}\,(a_1, b_1) \Rightarrow \vec{p} = (-b_1, a_1)$;

l_2: $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ $\vec{n}'\,(a_2, b_2) \Rightarrow \vec{p}' = (-b_2, a_2)$; $\cos\left(l\hat{.}l'\right) = \dfrac{a_1a_2 + b_1b_2}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}\sqrt{a_2^2 + b_2^2}}$.

Замечание. Угол между прямыми можно определить и как угол между векторами нормалей этих прямых.

$\cos\left(l\hat{.}l'\right) = \cos\left(\vec{n}\hat{,}\vec{n}'\right) = \dfrac{a_1a_2 + b_1b_2}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}\sqrt{a_2^2 + b_2^2}}$ - получим ту же самую формулу.

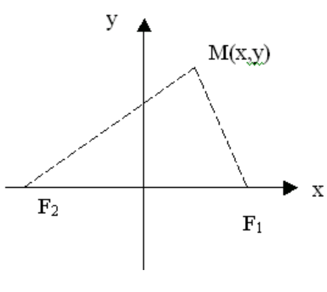
Тема 15. Эллипс.

Определение. Эллипсом называется геометрическое место точек плоскости, сумма расстояний каждой из которых до двух данных точек, называемых фокусами, есть величина постоянная, большая расстояния между фокусами.

F_1 F_2 – фокусы, $M \in \alpha$ – эллипсу.

MF_1+MF_2 =const=2a>2c, где F_1F_2 =2c

Составим уравнение эллипса, пользуясь общей схемой решения задачи на составление



уравнения ГМТ. Выберем прямоугольную систему координат $\{0, \vec{i}, \vec{j}\}$ следующим образом: Пусть точка О – середина отрезка F_1 F_2, а $\vec{i} \uparrow\uparrow \overrightarrow{OF_1}$. Так как F_1F_2 =2c, то F_1 (c,0) F_2 (-c,0).

Пусть M(x, y) – произвольная точка эллипса α. По определению эллипса $MF_1+MF_2=const=2a$, $F_1M=\sqrt{(x-c)^2+y^2}$, $F_2M=\sqrt{(x+c)^2+y^2}\Rightarrow$

$\sqrt{(x-c)^2+y^2}=\sqrt{(x+c)^2+y^2}=2a$ или $\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a-\sqrt{(x+c)^2+y^2}$. Возведем обе части в квадрат: $(x-c)^2+y^2=4a^2-4a\sqrt{(x+c)^2+y^2}+(x+c)^2+y^2$, $-4xc-4a^2=-4a\sqrt{(x+c)^2+y^2}$, $xc+a^2=a\sqrt{(x+c)^2+y^2}$. Снова возведем в квадрат $x^2x^2+2xca^2+a^4=x^2+2xc+c^2+y^2$, $x^2\left(a^2-c^2\right)+a^2y^2=a^2\left(a^2-c^2\right)$. Обозначим $b^2=a^2-c^2$, так как 2a>2c по условию, то a–c>0, $a^2-c^2>0$. Следовательно, $x^2b^2+a^2y^2=a^2b^2$. Разделим обе части на $a^2b^2\neq0$, тогда получим формулу $\boxed{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1}$ (1), $b^2=a^2-c^2$.

Итак, если точка M(x,y) $\in$ эллипсу α, то ее координаты удовлетворяют условию (1). Справедливо и обратное, если координаты некоторой точки удовлетворяют условию уравнения (1), то эта точка принадлежит эллипсу. Таким образом, уравнение (1) является уравнением эллипса.

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ - каноническое уравнение эллипса.

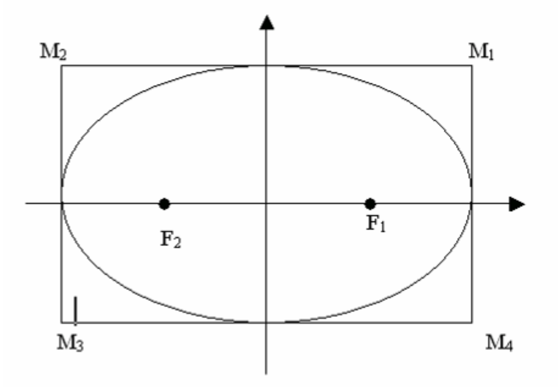
Отрезки, MF_1 и MF_2, называются фокальными радиусами точки M. Расстояние между фокусами эллипса F_1, F_2, называется фокальным расстоянием. $F_1 F_2$ – фокальное расстояние.

Если фокусы F_1 и F_2 эллипса совпадают, то c=0. Так как $b^2=a^2-c^2$, то при c=0, a=b и уравнение эллипса примет вид $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$ или $x^2+y^2=a^2$. Это окружность радиуса a, с центром в начале координат.

Вывод: окружность есть частный случай эллипса. Фокусы этого эллипса совпадают с центром окружности.

Рассмотрим некоторые свойства эллипса.

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ если точка M(x,y) $\in$ эллипсу α, то x и y удовлетворяют уравнению $|x|\le a$, $|y|\le b$ или $-a\le x\le a$, $-b\le y\le b$,следовательно, все точки эллипса принадлежат прямоугольнику M_1 M_2 M_3 M_4.



Если точка $M(x,y) \in$ эллипсу α, то $M'(-x,-y) \in$ эллипсу α, следовательно, точка O – центр симметрии эллипса. Если $M(x,y) \in$ эллипсу α, то $M''(-x,y) \in$ эллипсу α, и $M'''(x,-y)$, следовательно, ox и oy являются осями симметричности эллипса. Других осей симметрии эллипс, в отличии от окружности, не имеет. Ось симметрии, проходящая через фокусы, называется первой, или фокальной осью, симметрии. Ox – фокальная ось симметрии. Перпендикулярная к фокальной оси ось симметрии называется второй осью симметрии. Oy – вторая ось симметрии. Каждая ось симметрии пересекается с эллипсом в двух точках $A_1(a,0)$, $A_2(-a,0)$ – точки пересечения эллипса с фокальной осью, и $B_1(0,b)$ и $B(0,-b)$ – точки пересечения эллипса со второй осью ($x=0$, $y=\pm b$). Точки A_1, A_2, B_1, B_2 называются вершинами эллипса.

Отрезок A_1A_2 называется большой осью эллипса, отрезок B_1B_2 – малой осью эллипса. Числа a и b называются большой и малой полуосями эллипса. Рассмотрим I координатный угол ($x \geq 0,\ y \geq 0$) $y = b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$. При возрастании абсциссы x от 0 до a, ордината y убывает от b до 0. Затем строим по оси симметрии.

Если центр эллипса помещен в точку (x_0, y_0), то его каноническое уравнение: $\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$.

Замечание. Если $b>a$, то фокальной осью эллипса является ось Oy и для точки $M(x,y) \in$ эллипсу α: $MF_1+MF_2=const=2b$. Эллипс вытянут вдоль оси Oy, то $F_1\ (0,b)$ $F_2\ (0,-b)$. b – большая полуось, a – малая.

Тема 16. Гипербола

Определение. Гиперболой, называется, геометрическое место точек плоскости, абсолютная величина разности расстояний каждой из которых до двух данных точек F_1, F_2, называемых фокусами, есть величина постоянная, меньшая чем, расстояние между фокусами.

F_1 и F_2 – фокусы. M(x,y) $\in$ гиперболе α.

$\left|MF_1 - MF_2\right|$=const=2a<2c, где F_1F_2 =2c.

Вывод каноническое уравнение гиперболы аналогичен таковому для эллипса.

$\boxed{\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1}$ – (1) каноническое уравнение гиперболы $b^2 = a^2 - c^2$.

Рассмотрим некоторые свойства гиперболы:

1. Точка O(0,0) $\notin$ α(гиперболе), так как не удовлетворяет (1)

2. Точки пересечения гиперболы с осями координат:

пусть x=0, следовательно, $-\frac{y^2}{b^2}=1$ не имеет решения, тогда гипербола не пересекает ось Oy.

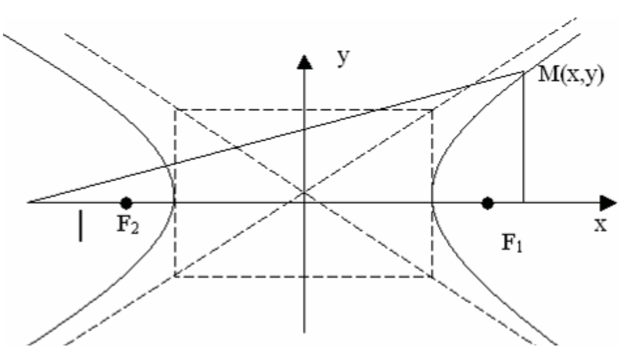
Пусть y=0 следовательно $\frac{x^2}{a^2}=1$, x=±a, следовательно, A_1(a,0), A_2(–a,0) – точки пересечения гиперболы с осью Ox. Эти точки являются вершинами гиперболы.

3. Из уравнения гиперболы $|x| \le a$, следовательно, внутри полосы, образованной прямыми x=a и x=–a, нет точек гиперболы. Гипербола имеет две ветви, одна из которых лежит в полуплоскости $x \ge a$, а другая в полуплоскости $x \le a$.

4. Если M(x,y) $\notin$ α(гиперболе), то M′(-x,y), M″(x, -y), M‴(-x,-y) $\notin$ α(гиперболе), следовательно, оси Ox и Oy являются осями симметрии гиперболы. Точка O(0,0) является центром симметрии гиперболы.

Определение. Прямые *l*: $y = \frac{b}{a}x$, $y = -\frac{b}{a}x$ называются асимптотами гиперболы.

Гипербола лежит во внутренних областях вертикальных углов, образуемых асимптотами, которым принадлежат ее фокусы.

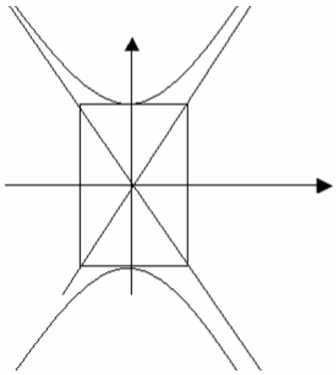


Ось симметрии гиперболы проходит через фокусы, называется первой или фокальной осью гиперболы, а перпендикулярная называется второй или мнимой осью симметрии. отрезок A_1A_2 называется действительной осью гиперболы. Числа a и b называются соответственно вещественной (действительной) или мнимой полуосями гиперболы.

Расстояние между фокусами F_1 и F_2 называется фокальным расстоянием. отрезки μF_1 и μF_2 называются фокальными радиусами точки м.

Определение Гипербола, полуоси которой равны, называется равносторонней. Асимптоты равносторонней гиперболы перпендикулярные.

Пример. Построить гиперболу $-\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$. Здесь Оу – действительная ось симметрии. то есть фокальная ось, ох – мнимая ось симметрии. a=2 – мнимая полуось, b=3 – действительная полуось. $B_1(0,3)$ и $B_2(0,-3)$ – вершины. F_1 и F_2 располагаются на оси оу.



Каноническое уравнение гиперболы со смещенным центром $\frac{(x-x_0)^2}{a^2}-\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1$

Тема17. Парабола

Определение. Параболой называется геометрическое место точек плоскости. расстояние каждой их которых до данной точки, называемой фокусом, равно расстоянию до данной прямой, называемой директрисой. F - фокус. M(x,y) $\in$ парабола α. *d* – директриса.

$\rho(M,F)=\rho(M,d)$ составим уравнение нормали, пользуясь общей схемой решения задачи на составление уравнения ГМТ.

пусть прямая, проходящая через А перпендикулярно директрисе, пересекает эту директрису в точке Д

ДF = p – фокальный параметр параболы

Пусть O(0,0) – середина отрезка FД, $\vec{i}\uparrow\uparrow\overrightarrow{OF}$. В пр. с.к. $F\left(\frac{p}{2},0\right)$, $Д\left(-\frac{p}{2},0\right)$

d: $x=-\frac{p}{2}$ или $x+\frac{p}{2}=0$.

M$\in$ параболе, $\rho(M,F)=\rho(M,d)$ по определению

$\rho(F,M)=\sqrt{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2}$, $\rho(M,d)=\frac{\left|x+\frac{p}{2}\right|}{\sqrt{1+0}}=\left|x+\frac{p}{2}\right|$, $\sqrt{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2}=\left|x+\frac{p}{2}\right|$ возведем в квадрат $\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2=x^2+px+\frac{p^2}{4}$ $\quad y^2=2px$ (1)

Если M(x,y) принадлежит параболе, то ее координаты удовлетворяют уравнению (1). Справедливо и обратное утверждение. Если координаты некоторой точки (x,y) удовлетворяют уравнению (1), то эта точка принадлежит параболе.

Формула (1) называется каноническим уравнением параболы. Из (1) $x\ge 0$, следовательно, парабола располагается в полуплоскости $x\ge 0$ Точка (0,0) принадлежит параболе, парабола пересекает ось Oy в точке O(0,0), следовательно O(0,0) вершина параболы. Если M(x,y) $\in$ параболе, M′(x,-y) следовательно парабола симметрична относительно Ox, одна оси симметрии она называется осью параболы при $x\to\infty$ $|y|\to\infty$

парабола со смещенной вершиной $(y-y_0)^2=2p(x-x_0)$ (x_0, y_0) – вершина.

Тема 18. Плоскость в пространстве

1. Уравнение плоскости, заданной точкой и двумя параллельными ей векторами.

Пусть П – произвольная плоскость в пространстве. M_0 – некоторая точка этой плоскости $M_0\in П$, векторы $\vec{l}$, $\vec{m}$ – некоторые векторы, параллельные плоскости П $\vec{l}\parallel П$, $\vec{m}\parallel П$, $\vec{l}$, $\vec{m}$ не параллельные. Отложим векторы $\vec{l}$, $\vec{m}$ от точки M_0, тогда $\vec{l}$, $\vec{m}$ будут лежать в плоскости П. Пусть $\{0,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\}$ - прямоугольная система координат, $M_0(x_0, y_0, z_0)$, $\vec{m}\,(m_1, m_2, m_3)$, $\vec{l}\,(l_1, l_2, l_3)$.

Возьмем произвольную точки M плоскости П и припишем ей текущие координаты x, y, z: M(x, y, z). Векторы $\overrightarrow{M_0M}$ и $\vec{l}$, $\vec{m}$ компланарны тогда и только тогда, когда их смешанное произведение равно 0. Имеем $(\overrightarrow{M_0M},\vec{l},\ \vec{m})=0$.

Запишем это равенство в координатах $\overrightarrow{M_0M}=(x-x_0, y-y_0, z-z_0)$

$$(\overrightarrow{M_0M},\vec{l},\ \vec{m})=\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0\\ m_1 & m_2 & m_3\\ l_1 & l_2 & l_3\end{vmatrix}=0$$ (1), следовательно, $\overrightarrow{M_0M},\vec{l},\ \vec{m}$ –компланарны.

Если точка $M\in П$, то ее координаты удовлетворяют (1). Если точка $M\notin П$. то $\overrightarrow{M_0M}$, $\vec{l}$, $\vec{m}$ не являются компланарными, поэтому координаты точки не удовлетворяют (1). Следовательно, (1) является уравнением плоскости П.

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ m_1 & m_2 & m_3 \\ l_1 & l_2 & l_3 \end{vmatrix} = 0$$ уравнение плоскости, заданное точкой и двумя параллельными ей векторами.

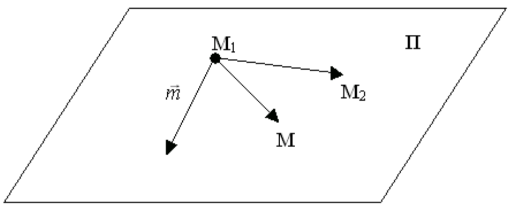
Пример. Написать уравнение плоскости, проходящей через точку (2,0,-1) и параллельной вектора $\vec{a}$=(1,1,0), b=(0,1,1)

П: $\begin{vmatrix} x-2 & y & z+1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$; П: x-2+z+1-y=0; П: x-y+z-1=0.\

1. <u>Уравнение плоскости, заданной двумя точками и параллельным ей векторам.</u>

Пусть П – произвольная плоскость в пространстве, M_1 и M_2 – некоторые точки этой плоскости. $M_1 \in П$ и $M_2 \in П$. Вектор $\vec{m} \parallel$ плоскости П.

Отложим вектор $\vec{m}$ от точки M_1, тогда $\vec{m}$ будет лежать в плоскость П



$\{0, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ - прямоугольная система координат.

$M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$

$\vec{m}$ (m_1, m_2, m_3).

Пусть M(x, y, z) – произвольная точка плоскости П. $\overrightarrow{M_1M_2}$, $\overrightarrow{M_1M}$, $\vec{m}$ компланарны ($\overrightarrow{M_1M_2}$, $\overrightarrow{M_1M}$, $\vec{m}$) =0 $\overrightarrow{M_1M}$=$(x-x_1, y-y_1, z-z_1)$,

$\overrightarrow{M_1M_2}$=$(x_2-x_1, y_2-y_1, z_2-z_1)$, $\vec{m}$ (m_1, m_2, m_3)

$$\left(\overrightarrow{M_1M}, \overrightarrow{M_1M_2}, \vec{m}\right) = \begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{vmatrix}$$, если M(x, y, z)$\in$П, то

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{vmatrix} = 0$$, если M$\notin$П, то $\overrightarrow{M_1M_2}$, $\overrightarrow{M_1M}$, $\vec{m}$ не компланарны, следовательно, координаты точки M не удовлетворяют этому уравнению. Это уравнение плоскости проходящей через две точки M_1 и M_2 параллельно $\vec{m}$.

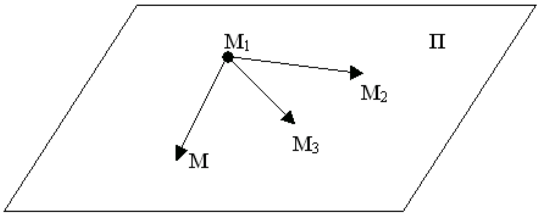
Пример. Написать уравнение плоскости, проходящей через точки A(1,1,1). B(0,5,-3), параллельно вектору $\vec{a}$ =(-1,2,-4)

П: 4x-2-3=0

П: $\begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-1 \\ -1 & 4 & -4 \\ -1 & 2 & -4 \end{vmatrix} = 0$.

3. Уравнение плоскости заданной тремя неколлинеарными прямыми.

Плоскости называются коллинеарными, если лежат на одной прямой



$\{0,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\}$ - прямоугольная система координат.

$M_1\ M_2\ M_3 \in$ П, $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$

$M_3(x_3, y_3, z_3)$

Векторы $\overrightarrow{M_1M}$, $\overrightarrow{M_1M_2}$, $\overrightarrow{M_1M_3}$ компланарны А это будет тогда и только тогда, когда ($\overrightarrow{M_1M}$, $\overrightarrow{M_1M_2}$, $\overrightarrow{M_1M_3}$) =0 $\overrightarrow{M_1M}$ =(x-x_1, y-y_1, z-z_1), $\overrightarrow{M_1M_2}$ =(x_2-x_1, y_2-y_1, z_2-z_1), $\overrightarrow{M_1M_3}$ =(x_3-x_1, y_3-y_1, z_3-z_1) Таким образом, если точка M(x, y, z)$\in$П, то ее координаты удовлетворяют условию

$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0$, Если же точка M(x, y, z)$\notin$П, то ($\overrightarrow{M_1M}$, $\overrightarrow{M_1M_2}$, $\overrightarrow{M_1M_3}$) $\neq$0 и координаты точки M не удовлетворяют уравнению. Уравнение плоскости, проходящей через три точки.

Пример A(-1,-2,-3) B(1,2,3). C(0,0,-1)

П: $\begin{vmatrix} x+1 & y+2 & z+3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 0$,   П: 2x-y=0.

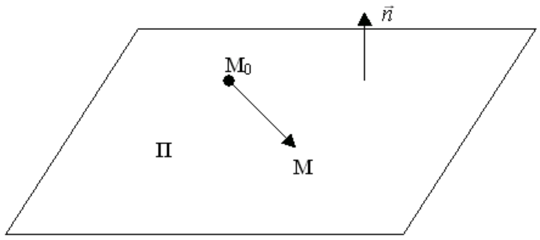
4. Уравнение плоскости, заданной точкой и вектором нормали

$\vec{n} \perp \Pi$ $\{0,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\}$ $M_0 \in$ П

$M_0(x_0, y_0, z_0)$, $\vec{n}$ (A, B, C)

$\overrightarrow{M_1M}$ =(x-x_0, y-y_0, z-z_0),

($\overrightarrow{M_0M}$, $\vec{n}$) =0



П: A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0

Пример. Вектор $\vec{n}$ (3,2,0) $\perp$П M_0 (-1,2,4) $\in$ П

П: 3(x+1)+2(y-2)+0(z-4)=0 П: 3x+2y-1=0

Определение. Уравнение вида Ax+By+Cz+Д=0, $A^2+B^2+C^2\neq0$ называется общим уравнением плоскости.

Геометрический смысл коэффициентов при неизвестных в общем уравнении плоскости: A,B, C – есть координаты вектора нормали плоскости.

Теорема. Любая плоскость в пространстве имеет уравнение вида Ax+By+Cz+Д=0.

$A^2+B^2+C^2\neq0$. Обратно, любое уравнение вида Ax+By+Cz+Д=0. $A^2+B^2+C^2\neq0$. является уравнением некоторой плоскости.

Тема 19. Взаимное расположение двух плоскостей в пространстве.

Пусть плоскости заданы общими уравнениями

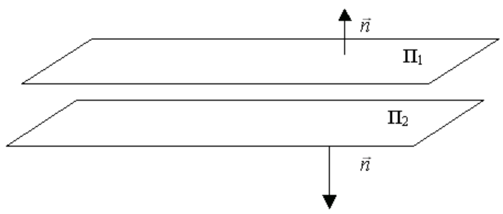
$П_1$: $A_1x+B_1y+C_1z+Д_1=0$; $П_2$: $A_2x+B_2y+C_2z+Д_2=0$

Вопрос о взаимном расположении двух плоскостей в пространстве сводится к исследованию системы двух линейных уравнений

$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+Д_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2z+Д_2=0 \end{cases}$ (1) пусть $r=rang\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{pmatrix}$ $r'=rang\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & Д_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & Д_2 \end{pmatrix}$

1. Плоскости $П_1$ и $П_2$ параллельные, то есть не имеют общих точек тогда и только тогда, когда $r'=2$, $r=1$. $r\neq r'$ (система несовместна). А это будет тогда и только тогда, когда

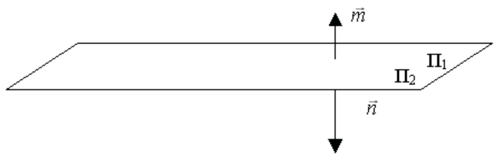
$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}\neq\frac{Д_1}{Д_2}$ условие параллельности плоскостей.



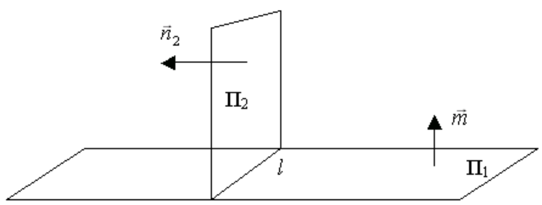
2. Плоскость $П_1$ совпадает с плоскостью $П_2$,

тогда $\vec{n}_1$ (A_1,B_1,C_1) параллелен $\vec{n}_2$ (A_2,B_2,C_2). Следовательно, $r'=r=1<n \Leftrightarrow$

$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}=\frac{Д_1}{Д_2}$ –условие совпадения плоскостей в пространстве.



3. Плоскость $П_1$ пересекает плоскость $П_2$, тогда $\overrightarrow{n_1}$ (A_1, B_1, C_1) непараллелен $\overrightarrow{n_2}$ (A_2, B_2, C_2), т.е. $r'=r=2$ и система (11) совместна. Имеется бесконечное множество решений – линия пересечения. $П_1 \cap П_2$.



Взаимное расположение плоскостей:

$П_1$: $-3x+5y-z+18=0$; $П_2$: $3x-5y+2z-9=0$ $r=rang\begin{pmatrix} -3 & 5 & -1 \\ 3 & -5 & 2 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} -3 & 5 & -1 \\ 3 & -5 & 2 \end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix} -3 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ r=2 следовательно $П_1$ и $П_2$ пересекаются по прямой.

Тема 20. Расстояние от точки до плоскости. Угол между плоскостями.

$\{0,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\}$

П: Ax+By+Cz+Д=0,

$M_0(x_0, y_0, z_0)\notin П$,

$\rho(M_0,П)$ – длина $\perp$, опущенного из M_0 на П

$M_0M_1=\rho(M_0,П)$

$M_0M_1\perp П$

Пусть $M_0(x_0, y_0, z_0)$ следовательно $\rho(M_0,П)=\dfrac{|Ax_0+By_0+Cz_0+Д|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$.

Если две плоскости параллельны, то их общие уравнения можно записать в виде:

$П_1$: Ax+By+Cz+$Д_1$=0

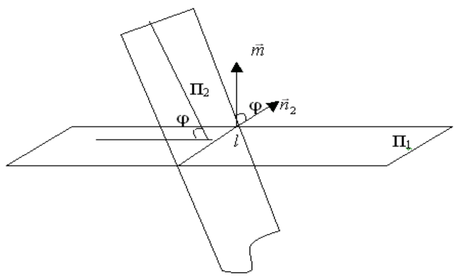
$П_2$: Ax+By+Cz+$Д_2$=0

$\rho(П_1,П_2)=\dfrac{|Д_2-Д_1|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$ – функция для вычисления расстояния между параллельными плоскостями.

Пример. Вычислим расстояние от точки К(-1,2,11) до П: 2x-y-z-11=0

$\rho(K,П)=\dfrac{|2(-1)-1\cdot 2-11-11|}{\sqrt{4+1+1}}=\dfrac{|-2-2-22|}{\sqrt{6}}=\dfrac{14}{3}$ пусть $П_1$ и $П_2$ пересекаются по прямой.

Две пересекающие плоскости образуют четыре двугранных угла. Любой из этих углов называется углом между данными плоскостями. Как известно, двугранный угол измеряется



линейным углом. φ - линейный угол одного из двугранных углов.

Угол между векторами $\vec{m}$ $\vec{n_2}$ равен φ, так как линейный угол φ и $(\vec{m},\vec{n_2})$ - это углы со взаимно $\perp$ сторонами $\vec{m}\perp П_1$ $\vec{n_2}\perp П_2$

$\cos\varphi=\cos(\vec{m},\ \vec{n})=\dfrac{(\vec{m},\ \vec{n})}{|\vec{m}||\vec{n}|}=\dfrac{A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}$ - формула для вычисления угла между плоскостями .

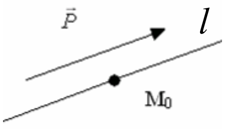
Следствие: плоскости $П_1$ и $П_2$ $\perp$ тогда и только тогда, когда $A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0$ $(\vec{m},\ \vec{n})=0$. Пр. Вычислить угол между плоскостями. $П_1$: 11x+y-2z=0 $П_2$: 2x-2y+3=0

$$\cos\varphi=\frac{11\cdot 2-1\cdot 2-2\cdot 0}{\sqrt{121+1+4}\sqrt{4+4+0}}=\frac{20}{\sqrt{126}\sqrt{8}}=\frac{5}{\sqrt{63}}$$

Тема 21. Прямая в пространстве

1. <u>Уравнение прямой, заданной точкой и направляющим вектором.</u>

Пусть задана прямоугольная система координат $\{0, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$.



$\vec{p} \parallel l \quad \vec{p} \neq 0 \qquad \vec{p}$

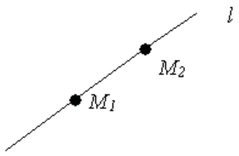
, , $M_0 \in l$ $M_0(x_0, y_0, z_0)$, (p_1, p_2, p_3),

$\boxed{l: \frac{x - x_0}{p_1} = \frac{y - y_0}{p_2} = \frac{z - z_0}{p_3}}$ - каноническое уравнение прямой в пространстве

2. <u>Уравнение прямой, заданной двумя точками</u>

$M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$ $M_1 \neq M_2$

$\boxed{l: \frac{x - x_0}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_0}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_0}{z_2 - z_1}}$

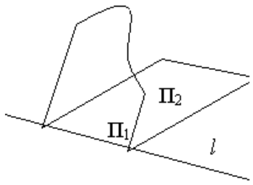


3. <u>Параметрические уравнения прямой в пространстве</u>

$$l: \begin{cases} x = x_0 + p_1 t \\ y = y_0 + p_2 t \\ z = z_0 + p_3 t \end{cases} \quad M_0(x_0, y_0, z_0) \in l, \ \vec{p}\,(p_1, p_2, p_3), \ \vec{p} \parallel l$$

4. <u>Прямую в пространстве можно задать как линию пересечения двух плоскостей</u>

$$l = \Pi_1 \cap \Pi_2 \quad \begin{cases} A_1 x + B_1 y + C_1 z + Д_1 = 0 \\ A_2 x + B_2 y + C_2 z + Д_2 = 0 \end{cases}; \ rang \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{pmatrix} = 2;$$



$П_1$: $A_1x + B_1y + C_1z + Д_1 = 0$

$П_2$: $A_2x + B_2y + C_2z + Д_2 = 0$ общее уравнение прямой l в пространстве.

Направляющий вектор $\vec{p}$ такой прямой вычисляется по формуле:

$\vec{p} = [\vec{n}_1 \vec{n}_2] = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2$, где $\overrightarrow{n_1} \perp П_1$, $\overrightarrow{n_2} \perp П_2$

Пример. Прямая задана общими уравнениями $l: \begin{cases} x - 2y + 5z - 1 = 0 \\ 2z + y + z + 1 = 0 \end{cases}$.

Найти направляющий вектор этой прямой.

Решение. $\vec{p} = [\vec{n}_1 \vec{n}_2] = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2$, $\overrightarrow{n_1} = (1, -2, 5)$, $\overrightarrow{n_2} = (2, 1, 1)$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \vec{p} = \left(\begin{vmatrix} -2 & 5 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \ \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \ \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \right) = (-7, 9, 5)$$

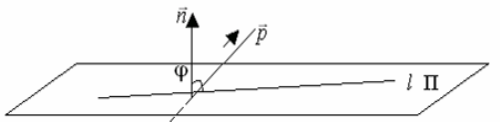
<u>Угол между прямыми в пространстве, вычисляется как угол между их направляющими векторами</u>.

$$\cos\varphi = \cos\left(l_1 \hat{,} l_2\right) = \cos\left(\vec{p}_1 \hat{,} \vec{p}'\right) = \frac{(\vec{p}_1, \vec{p}')}{|\vec{p}||\vec{p}'|} = \frac{p_1 p_1' + p_2 p_2' + p_3 p_3'}{\sqrt{p_1^2 + p_2^2 + p_3^3}\sqrt{p_1'^2 + p_2'^2 + p_3'^3}} \quad \vec{p} \parallel l_1 \ \vec{p}' \parallel l_2$$

В частности, прямая $l_1 \perp l_2 \Leftrightarrow (\vec{p}_1, \vec{p}')=0,\ \ p_1p_1' + p_2p_2' + p_3p'=0$

Углом между прямой и плоскостью в пространстве называют острый угол между прямой и ее ортогональной проекцией на эту плоскость.

Пусть прямая α пересекает плоскость П. П: Ax+By+Cz+Д=0.



l – ортогональная проекция прямой α на П

$l: \dfrac{x-x_0}{p_1} = \dfrac{y-y_0}{p_2} = \dfrac{z-z_0}{p_3}$, $\vec{p}$ (p_1, p_2, p_3) || α.

Формула для вычисления угла между прямой и плоскостью

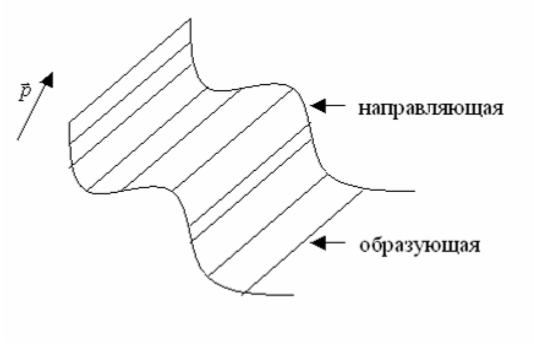
$$\sin\varphi = \frac{|(\vec{n},\vec{p})|}{|\vec{n}||\vec{p}|} = \frac{|Ap_1 + Bp_2 + Cp_3|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{p_1^2+p_2^2+p_3^2}}.$$

Тема 22. Цилиндрическая поверхность

Определение. Пусть $\vec{p} \neq 0$ - некоторый не нулевой вектор пространства. Поверхность, обладающая тем свойством, что вместе с каждой точкой М она содержит всю прямую, проходящую через эту точку и параллельную данному вектору $\vec{p} \neq 0$, называется цилиндр. Поверхностью или цилиндром прямые, параллельные вектору $\vec{p}$ и принадлежащие цилиндрической поверхности называются образующими этой поверхности.

Цилиндрическая поверхность может быть образована следующим образом.

Пусть l некоторая линия, а $\vec{p} \neq 0$ поверхность образованная всеми прямыми, каждая из которых проходит через некоторую точку линии l параллельно вектору $\vec{p}$, являются цилиндрическими линиями. Линия l называется направляющей этой поверхности.



Теорема: Пусть в плоскости Оху задана прямоугольная систем координат$\{0, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ и задана линия α уравнением F (x, y)=0 (1).

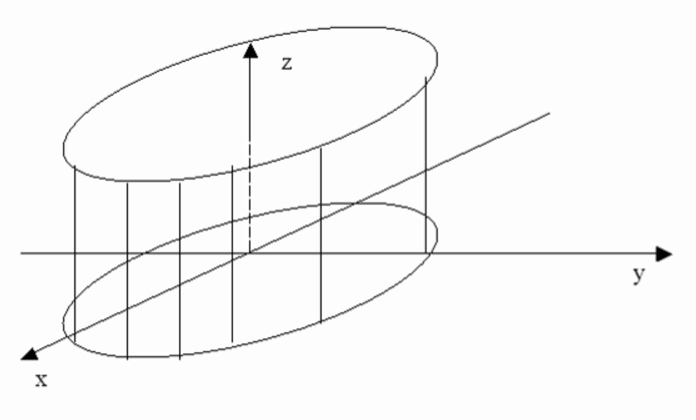
Тогда уравнение (1) определяет в пространстве цилиндрическую поверхность S с направляющей линией α и образующими, параллельными единичному вектору k (оси Oz).

Тема 23. Классификация цилиндров второго порядка

1. Эллиптический цилиндр

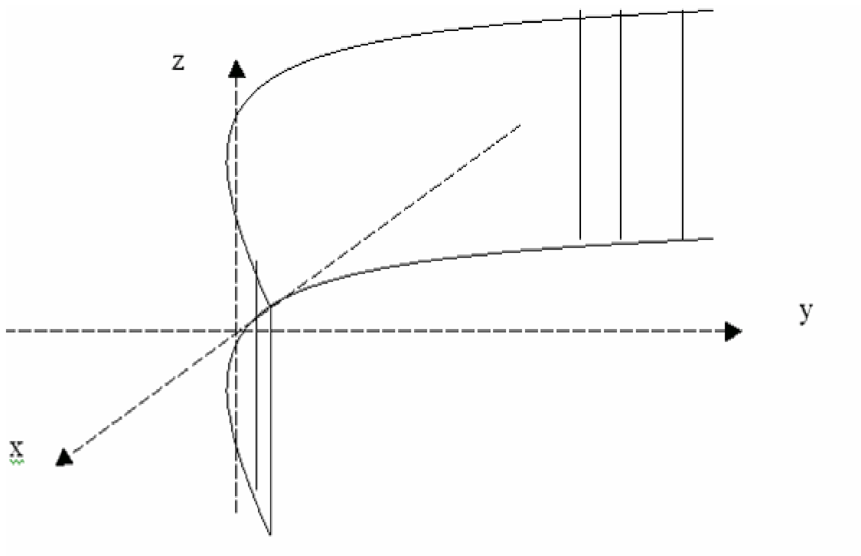
$\alpha : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, z=0 – эллипс в плоскости Oxy – направляющая цилиндрическая

поверхность S. Тогда уравнение $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ в пространстве задает эллиптический цилиндр S с направляющим – эллипсом и образующими, параллельно оси oz.



2. Параболический цилиндр

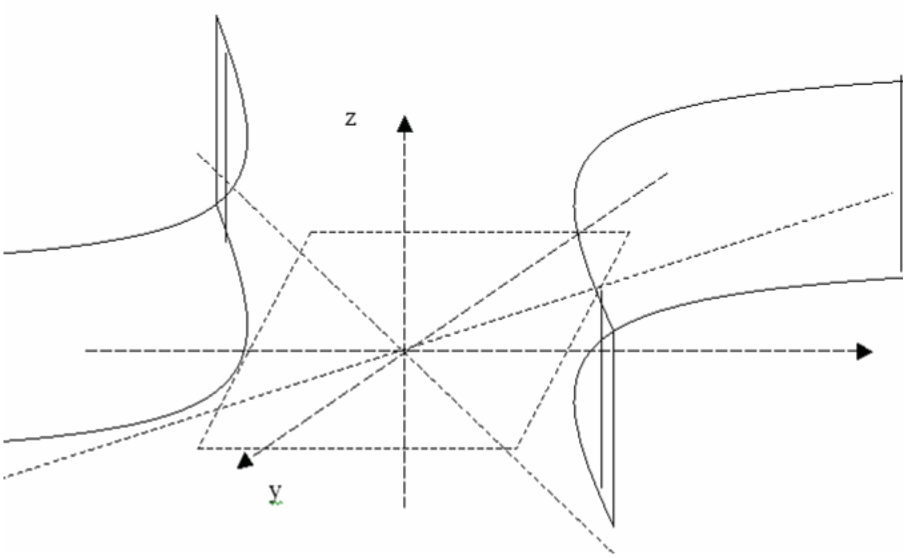
$\alpha : \quad y^2 = 2px$, z=0 – парабола в плоскости Oxy – направляющая цилиндрическая поверхность S. Тогда уравнение $y^2 = 2px$ в пространстве задает параболический цилиндр S с направляющей параболой и образующими, параллельно оси oz.



3. Гиперболический цилиндр

$\alpha : \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, z=0 – гипербола в плоскости Оху – направляющая цилиндрическая

поверхность S. Тогда уравнение $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ в пространстве задает гиперболический цилиндр S с направляющей гиперболой и образующими, параллельно оси oz.

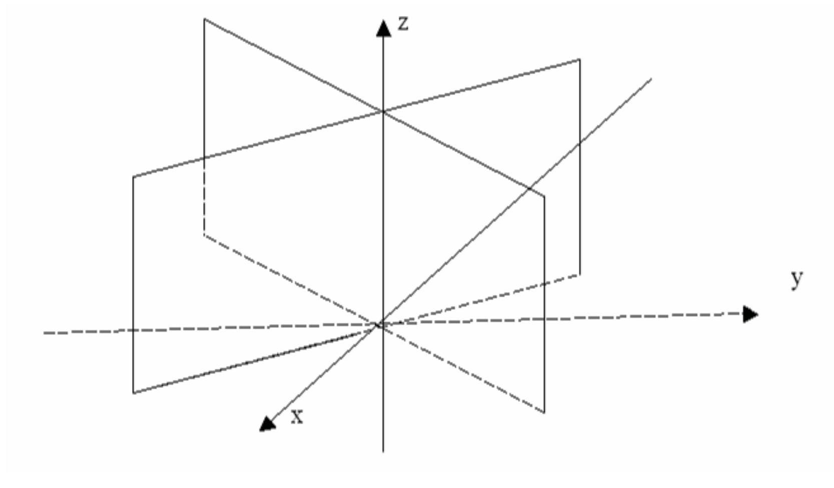


4. Цилиндр, распавшийся на пару пересекающихся по оси oz плоскостей

$\alpha : \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$, z=0 – гипербола в плоскости Оху – направляющая представляет

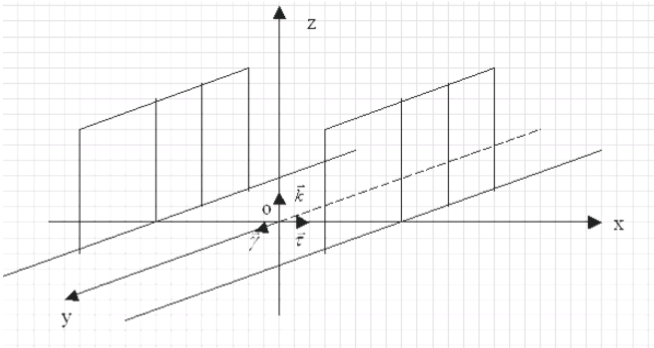
собой пару пересекающих в точке (0,0) прямых $\frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 0$ $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 0$ Тогда цилиндр S:

$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$ представляет собой пару пересекающихся на оси oz плоскостей

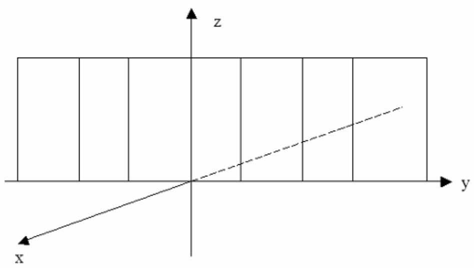


5. Цилиндр, распавшийся на пару параллельных плоскостей

$\alpha\ :\ x^2 - a^2 = 0$, (a≠0) z=0 – гипербола в плоскости Oxy – направляющая представляет собой пару параллельных x–a=0, x+a=0 Тогда цилиндр S: $x^2 - a^2 = 0$ представляет собой пару параллельных плоскостей.

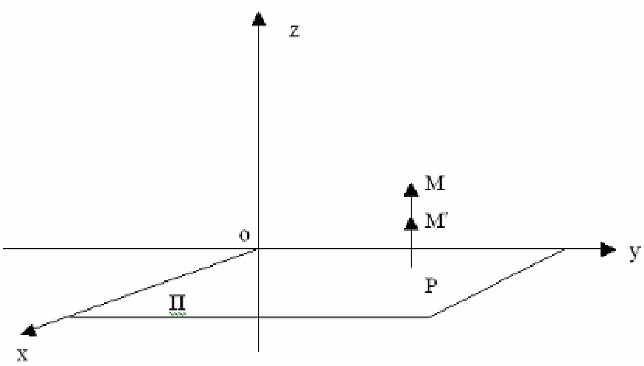


6. Цилиндр, представляет собой пару слившихся плоскостей. $\gamma : x^2 = 0,\ z = 0$ - например на Oxy, представляет собой пару прямых (слившихся): x=0, x=0. Тогда в пространстве цилиндрическая поверхность S есть пара слившихся плоскостей: S: $x^2 = 0,\ x = 0$ – плоскость Oyz в пространстве



Тема 24. Эллипсоид

Пусть $\{0,\ \vec{i},\ \vec{j},\ \vec{k}\}$ - прямоугольная система координат в пространстве. Пусть П – некоторая плоскость пространства, $k \neq 0$ - действительное число . Пусть M – произвольная точка пространства, а P – ее ортогональная проекция на плоскость П.



Рассмотрим отображение *f*, которое каждой точке M пространства ставит в соответствие точку M′ так, что $\overrightarrow{PM'} = k\overrightarrow{PM}$.

Отображение f является преобразованием пространства, которое называется сжатием пространства к плоскости П, k называется коэффициентом сжатия. Например, функция сжатия в плоскости Oxy:

$$f:\begin{cases} x' = x \\ y' = y \\ z' = kz \end{cases} \quad \begin{matrix} M(x,y,z) \\ M'(x',y',z') \end{matrix} \quad k\text{ - } \textit{коэффициент сжатия}.$$

Определение: Поверхность, образованная вращением эллипса вокруг одной из его осей симметрии, называется <u>эллипсоидом вращения</u>. *Определение:* Трехосным эллипсоидом (эллипсоидом) называется поверхность, в которую переходит эллипсоид вращения при сжатии к плоскости, проходящей через его ось вращения.

Каноническое уравнение эллипсоида:

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$. Числа a, b, c – называются полуосями эллипсоида.

Из уравнения эллипсоида следует, что для каждой точки M(x,y,z) эллипсоида выполняются соотношения: $|x|\le a$, $|y|\le b$, $|z|\le c$, следовательно, все точки эллипсоида принадлежат прямоугольному параллелепипеду, длинные ребра которого соответственно равны 2a, 2b, 2c. Если M(x,y,z) принадлежит эллипсоиду. То и точки M_1(-x,y,z), M_2(x,-y,z), M_3(x,y,-z), M_4(-x,-y,z), M_5(-x,y,-z), M_6(x,-y,-z) и M_7(-x,-y,-z) принадлежат эллипсоиду. Следовательно, координатные плоскости Oxy, Oxz, Oyz являются плоскостями симметрии эллипсоида, оси координат ox, oy, oz – осями симметрии эллипсоида, начало координат O(0,0,0) – центром симметрии эллипсоида. Оси симметрии эллипсоида называются его осями. Каждая ось симметрии эллипсоида пересекает его в двух точках, которые называются вершинами эллипсоида. Точки A_1(a,0,0), A_1(-a,0,0), B_1(0,b,0), B_2(0,-b,0), C_1(0,0,c), C_2(0,0,-c) – вершины эллипсоида. Центр симметрии эллипсоида называется его центром.

<u>Изучение формы эллипсоида методом сечений.</u>

Пусть задан эллипсоид Ф: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$.

1. Сечение Ф координатной плоскостью Oxy: z = 0

$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \\ z=0 \end{cases}$. В сечении лежит эллипс полуосями a и b

2. Сечение Ф координатной плоскостью Oxz: x=0

$\begin{cases} \frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \\ x=0 \end{cases}$ в сечении лежит эллипс полуосями b и c.

3. Сечение Ф координатной плоскостью Oxz: y=0

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1 \\ y=0 \end{cases}$$ в сечении лежит эллипс полуосями a и c

4. Сечение Ф плоскостью: z=k параллельной координатной плоскости Oxy.

Если $|k|<c$, то $\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1-\dfrac{k^2}{c^2} \\ z=k \end{cases}$

$$\frac{k^2}{c^2}<1,\ 1-\frac{k^2}{c^2}>0 \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2\left(1-\dfrac{k^2}{c^2}\right)}+\dfrac{y^2}{b^2\left(1-\dfrac{k^2}{c^2}\right)}=1 \\ z=k \end{cases}$$ – это эллипс.

Если $|k|=c$, то $1-\dfrac{k^2}{c^2}=0$, следовательно, точки $C_1(0,0,c)$, $C_2(0,0,-c)$ – вершины эллипсоида.

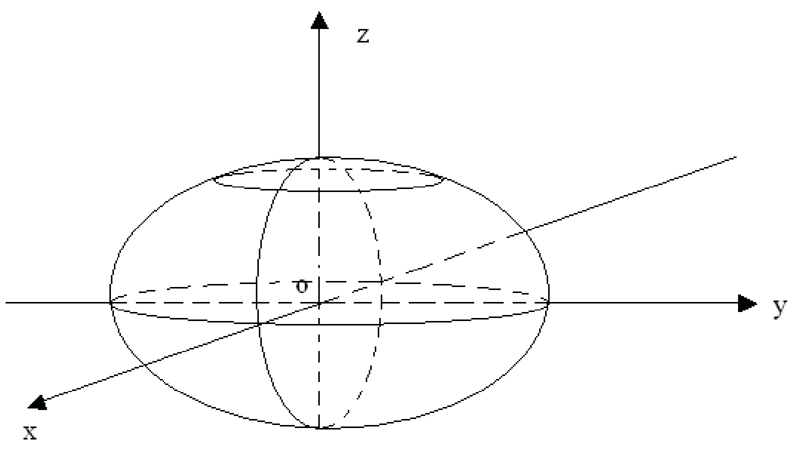
Если $|k|>c$,то $1-\dfrac{k^2}{c^2}<0$ в сечении пустое множество.

Аналогично можно показать, что сечение эллипсоида Ф плоскостью x=k, параллельной Oxz является эллипсом, вершиной эллипсоида или пустым множеством.

Если a=b=c, то Ф: $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$;

Ф: $x^2+y^2+z^2=a^2$ - это сфера радиуса а и с центром в точке O(0,0,0). Сфера является частным случаем эллипсоида.

Изображение эллипсоида.



Каноническое уравнение эллипсоида со смещенным центром

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}+\frac{(z-z_0)^2}{c^2}=1$$

Тема 25. Гиперболоид

1. Однополостный гиперболоид

Определение. Поверхность, образованная вращением гиперболы вокруг ее мнимой оси, называется однополостным гиперболоидом вращения.

Определение. Однополостным гиперболоидом называется поверхность Ф, в которую переходит однополостный гиперболоид вращения при сжатии пространства к точке, проходящей через ось его вращения.

Каноническое уравнение однополостного гиперболоида:

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$. Числа a, b, c называются полуосями однополостного гиперболоида. Так как в уравнение x,y,z входят в четных степенях, то Ф симметрична относительно координатных плоскостей, координатных осей Ox, Oy, Oz и начала координат O(0,0,0). Оси симметрии Ф называются его осями, центр симметрии – центром Ф. Ox пересекается с Ф в точках $A_1(a,0,0)$, $A_1(-a,0,0)$, Oy пересекается с Ф $B_1(0,b,0)$, $B_2(0,-b,0)$ эти оси называются действительными осями однополостного гиперболоида. Oz не имеет общих точек с Ф: x=0, y=0, следовательно, $-\frac{z^2}{c^2}=1$ решений нет. Эта ось называется мнимой осью однополостного гиперболоида.

a, b – действительные полуоси, c- мнимая полуось.

Изучение однополостного гиперболоида методом сечений.

Ф: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$

1. Сечение Ф плоскость Oxy: z=0 в сечении лежит эллипс: $\begin{cases}\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\\ z=0\end{cases}$ Этот эллипс называется главным эллипсом однополостного гиперболоида.

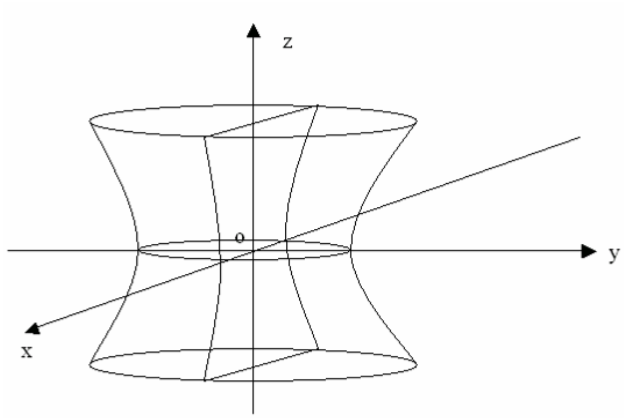
2. Сечение Ф плоскость Oxz: y=0 в сечении лежит гипербола: $\begin{cases}\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1\\ y=0\end{cases}$ с мнимой осью Oz и действительной осью Oy.

3. Сечение Ф плоскость z=k, параллельной плоскости Oxy

$\begin{cases}\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1+\frac{k^2}{z^2}\\ z=k\end{cases}$ этот эллипс.

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2\left(1+\dfrac{k^2}{c^2}\right)}+\dfrac{y^2}{b^2\left(1+\dfrac{k^2}{c^2}\right)}=1 \\ z=k \end{cases}$$

Изображение однополосного гиперболоида.



2. Двуполостный гиперболоид

Определение. Поверхность, образованная вращением гиперболы вокруг ее действительной оси, называется двуполостным гиперболоидом вращения.

Определение. Поверхность, в которую переходит двуполостный гиперболоид вращения при сжатии пространства к плоскости, проходящей через ось вращения, называется двуполостным гиперболоидом.

Каноническое уравнение двуполостного гиперболоида

$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=-1$ или $-\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$.

Так как в уравнение x,y,z входят в четных степенях, то двуполостный гиперболоид симметричен относительно координатных плоскостей Oxy, Oyz, Oxz и начала координат O(0,0,0). Ось Oz имеет две точки пересечения с двуполостным гиперболоидом: x=0 и y=0, следовательно, $z^2=c^2$, $z=\pm c$ $C_1(0,0,c)$ и $C_2(0,0,-c)$. Оси Ox и Oy не имеют общих точек с двуполостным гиперболоидом:

Ox: y=0, z=0, следовательно, $x^2=-a^2$ действительных точек нет;

Oy: x=0, z=0, следовательно, $y^2=-b^2$ действительных точек нет.

Ось Oz называется действительной осью двуполостного гиперболоида. Ox и Oy называются мнимыми осями. Центр симметрии двуполостного гиперболоида называют его центром. O(0,0,0) – центр, число c - действительная полуось, а числа a, b - мнимые полуоси.

Изучение формы двуполостного гиперболоида методом сечения

1. Сечение плоскостью Оху: z=0 $\begin{cases} -\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1 \\ z=0 \end{cases}$ - пустое множество.

2. Сечение плоскостью Oxz: y=0 $\begin{cases} -\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1 \\ y=0 \end{cases}$ - гипербола с действительной осью Oz, мнимой Ox.

3. Сечение плоскостью Oyz: x=0 $\begin{cases} -\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1 \\ x=0 \end{cases}$ - гипербола с действительной осью Oz, мнимой Oy.

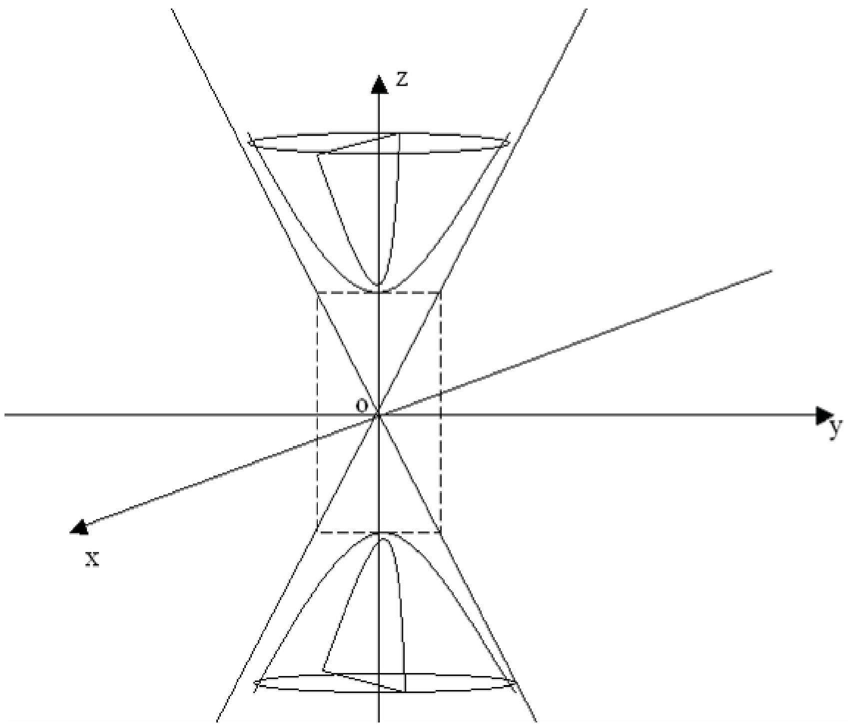
4. Сечение плоскостью z=k, параллельной плоскости Оху

а) $|k|<0$ - пустое множество;

б) $|k|=0$, следовательно, $C_1(0,0,c)$ и $C_2(0,0,-c)$;

в) $|k|>0$ $\begin{cases} -\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1-\dfrac{k^2}{c^2} \\ z=k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2\left(\dfrac{k^2}{c^2}-1\right)}+\dfrac{y^2}{b^2\left(\dfrac{k^2}{c^2}-1\right)}=1 \\ z=k \end{cases}$, $\dfrac{k^2}{c^2}-1>0$ – эллипс.

Изображение двуполостного гиперболоида



Тема 26. Параболоид

1. Эллиптический параболоид.

Определение. Поверхность, образованная вращением параболы вокруг ее оси, называется параболоидом вращения.

Определение. Поверхность, в которую переходит параболоид вращения при сжатии к плоскости, проходящей через ось вращения. Называется эллиптическим параболоидом.

Каноническое уравнение эллиптического параболоида $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=2pz$

Из уравнения следует, что эллиптический параболоид симметричен относительно плоскостей Oxz, Oxz и относительно оси Oz. Ось симметрии Oz называется осью эллиптического параболоида. Начало системы координат O(0,0,0) является точкой пересечения эллиптического параболоида с его осью и называется вершиной эллиптического параболоида. Из уравнения следует, что $z \le 0$ следовательно эллиптический параболоид располагается по одну сторону от плоскости Oxy.

Изучение формы эллиптического параболоида методом сечений

Пусть задан параболоид Ф: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=2pz$

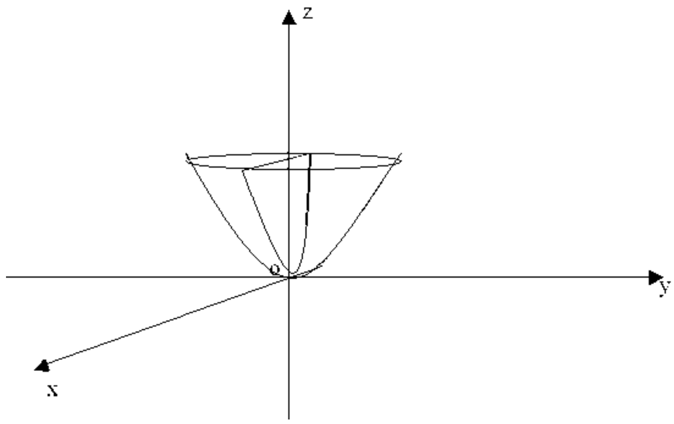
1. Сечение плоскостью Oxy: z=0. $\begin{cases}\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=0\\ z=0\end{cases}$, следовательно, O(0,0,0) – вершина эллиптического параболоида.

2. Сечение плоскостью Oxz: y=0. $\begin{cases}x^2=2pza^2\\ y=0\end{cases}$ - парабола с осью Oz вершина (0,0,0).

3. Сечение Oxz: x=0 $\begin{cases}y^2=2pzb^2\\ x=0\end{cases}$ парабола с осью oz вершина (0,0,0).

4. Сечение плоскостью z=k, параллельно плоскости Oxy,

k>0 $\begin{cases}\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=2pk\\ z=k\end{cases}$ $\begin{cases}\frac{x^2}{a^2 2pk}+\frac{y^2}{b^2 2pk}=1\\ z=k\end{cases}$ - эллипс.



3. Гиперболический гиперболоид

Определение. Гиперболическим гиперболоидом называется поверхность, которая в некоторой прямоугольной системе координат определяется уравнением.

$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2z$ - каноническое уравнение.

Гиперболический гиперболоид симметричен относительно плоскостей Oxz, Oyz, оси Oz. Ось Oz называется осью поверхности. Точка O(0,0,0) гиперболического параболоида, называется его вершиной.

Изучение формы гиперболического параболоида

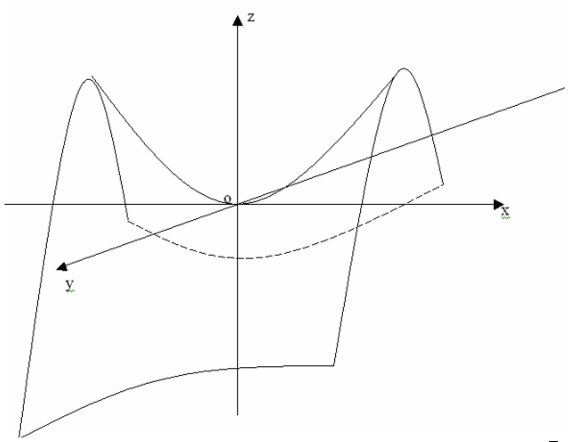
1. Сечение плоскостью Oxz: y=0 $\begin{cases} x^2 = 2a^2 z \\ y = 0 \end{cases}$ - парабола с осью Oz.

2. Сечение плоскостью Oyz: x=0 $\begin{cases} y^2 = -2b^2 z \\ x = 0 \end{cases}$ - парабола с осью Oz.

3. Сечение плоскостью z=k, параллельно Oxz.

а) k>0; $\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2k \\ z = k \end{cases}$ - гипербола с действительной осью, параллельно Ox.

б) k<0; $\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2k \\ z = k \end{cases}$ - гипербола с действительной осью, параллельно Oy.



Изображение гиперболического параболоида

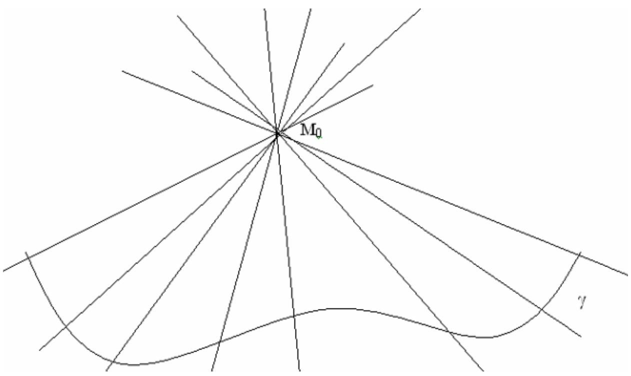
Гиперболический параболоид называют «седловой» поверхностью.

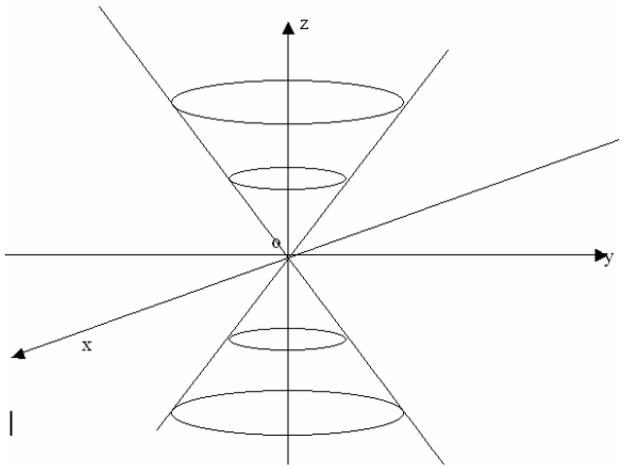
Тема 27. Коническая поверхность 2-го порядка

Определение. Конической поверхностью (конусом) с вершиной в т M_0 называется поверхность, которая вместе с каждой своей точкой $M \neq M_0$ содержит прямую M_0M. Прямые, проходящие через вершину и лежащие на нем, называются образующими конуса. Коническую поверхность можно получить следующим образом. Рассмотрим в пространстве линию γ и т. $M_0 \notin \gamma$. Поверхность, образованная всеми прямыми, каждая из которых проходит через точку M_0 и через некоторую точку линии γ, является конической поверхностью с вершиной M_0. Линия γ называется направляющей конуса.

Каноническое уравнение конуса: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$.

Изображение конуса





Тема 28. Комплексные числа.

__Определение.__ **Комплексным числом** ***z*** называется выражение $z = a + ib$, где a и b – действительные числа, i – мнимая единица, которая определяется соотношением: $i^2 = -1$; $i = \sqrt{-1}$.

При этом число a называется **действительной частью** числа z ($a = Re\, z$), а b- **мнимой частью** ($b = Im\, z$).

Если $a = Re\, z = 0$, то число z будет чисто мнимым, если $b = Im\, z = 0$, то число z будет действительным.

__Определение.__ Числа $z = a + ib$ и $\bar{z} = a - ib$ называются **комплексно – сопряженными.**

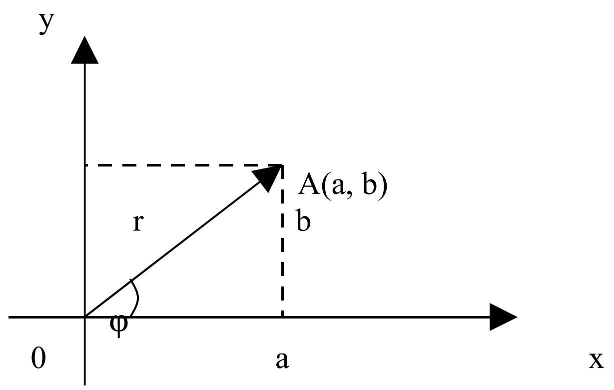
__Определение.__ Два комплексных числа $z_1 = a_1 + ib_1$ и $z_2 = a_2 + ib_2$ называются равными, если соответственно равны их действительные и мнимые части: $a_1 = a_2$; $b_1 = b_2$;

Определение. Комплексное число равно нулю, если соответственно равны нулю действительная и мнимая части.

$$a = b = 0.$$

Понятие комплексного числа имеет геометрическое истолкование. Множество комплексных чисел является расширением множества действительных чисел за счет включения множества мнимых чисел. Комплексные числа включают в себя все множества чисел, которые изучались ранее. Так натуральные, целые, рациональные, иррациональные, действительные числа являются, вообще говоря, частными случаями комплексных чисел.

Если любое действительное число может быть геометрически представлено в виде точки на числовой прямой, то комплексное число представляется точкой на плоскости, координатами которой будут соответственно действительная и мнимая части комплексного числа. При этом горизонтальная ось будет являться действительной числовой осью, а вертикальная - мнимой осью.



Таким образом, на оси OX располагаются действительные числа, а на оси OY – чисто мнимые.

С помощью подобного геометрического представления можно представлять числа в так называемой тригонометрической форме.

Тригонометрическая форма числа.

Из геометрических соображений видно, что $a = r\cos\varphi$; $b = r\sin\varphi$. Тогда комплексное число можно представить в виде: $z = a + ib = r\cos\varphi + ir\sin\varphi = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$

Такая форма записи называется **тригонометрической формой записи комплексного числа.**

При этом величина *r* называется **модулем** комплексного числа, а угол наклона φ - **аргументом** комплексного числа.

$$r = |z|; \qquad \varphi = Arg\, z.$$

Из геометрических соображений видно:

$$\boxed{r = |a + ib| = \sqrt{a^2 + b^2}; \quad \varphi = Arg\, z = arctg\frac{b}{a};}$$

Очевидно, что комплексно – сопряженные числа имеют одинаковые модули и противоположные аргументы.

$$|z| = |\bar{z}|; \qquad Arg\, z = -Arg\, \bar{z}.$$

Действия с комплексными числами.

Основные действия с комплексными числами вытекают из действий с многочленами.

1) **Сложение и вычитание.**

$$z = z_1 \pm z_2 = (a_1 + ib_1) \pm (a_2 + ib_2) = (a_1 \pm a_2) + i(b_1 \pm b_2)$$

$$|z| = \sqrt{(a_1 \pm a_2)^2 + (b_1 \pm b_2)^2}$$

2) **Умножение.**

$$z = z_1 z_2 = (a_1 + ib_1)(a_2 + ib_2) = a_1 a_2 + ia_1 b_2 + ib_1 a_2 + i^2 b_1 b_2$$

$$z = z_1 z_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + i(a_1 b_2 + b_1 a_2)$$

В тригонометрической форме: $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$, $z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$.

$$z = z_1 z_2 = r_1 r_2(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2))$$

В случае комплексно – сопряженных чисел:

$$z\bar{z} = (a + ib)(a - ib) = a^2 + b^2 = |z|^2 = |\bar{z}|^2.$$

3) **Деление.**

$$z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1 + ib_1}{a_2 + ib_2} = x + iy$$

$$z = \frac{(a_1 + ib_1)(a_2 - ib_2)}{(a_2 + ib_2)(a_2 - ib_2)} = \frac{(a_1 a_2 + b_1 b_2) + i(a_2 b_1 - a_1 b_2)}{a_2^2 + b_2^2}$$

$$z = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} + i\frac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2}$$

В тригонометрической форме: $z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2))$

4) **Возведение в степень.**

Из операции умножения комплексных чисел следует, что $z^2 = zz = r^2(\cos 2\varphi + i\sin 2\varphi)$

В общем случае получим: $z^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$, где n – целое положительное число.

Это выражение называется **формулой Муавра.**

Формулу Муавра можно использовать для нахождения тригонометрических функций двойного, тройного и т.д. углов.

Пример. Найти формулы sin2φ и cos2φ.

Рассмотрим некоторое комплексное число $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$.

Тогда с одной стороны $z^2 = r^2(\cos^2\varphi + 2i\cos\varphi\sin\varphi - \sin^2\varphi)$.

По формуле Муавра: $z^2 = r^2(\cos 2\varphi + i\sin 2\varphi)$

Приравнивая, получим $\cos 2\varphi + i\sin 2\varphi = \cos^2\varphi - \sin^2\varphi + 2i\cos\varphi\sin\varphi$

Т.к. два комплексных числа равны, если равны их действительные и мнимые части, то

$$\cos 2\varphi = \cos^2\varphi - \sin^2\varphi$$

$$\sin 2\varphi = 2\sin\varphi\cos\varphi$$

Получили известные формулы двойного угла.

5) **Извлечение корня из комплексного числа.**

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)} = \rho(\cos\psi + i\sin\psi)$$

Возводя в степень, получим:

$$\rho^n(\cos n\psi + i\sin n\psi) = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

Отсюда: $\rho = \sqrt[n]{r}$; $\quad n\psi = \varphi + 2\pi k$; $\quad k \in Z$.

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right)$$

Таким образом, корень n – ой степени из комплексного числа имеет n различных значений.

Показательная форма комплексного числа.

Рассмотрим показательную функцию $w = e^z$; $z = x + iy$.

Можно показать, что функция w может быть записана в виде:

$$w = e^{x+iy} = e^x(\cos y + i\sin y)$$

Данное равенство называется **уравнением Эйлера.** Вывод этого уравнения будет рассмотрен позднее.

Для комплексных чисел будут справедливы следующие свойства:

1) $e^{z_1+z_2} = e^{z_1}e^{z_2}$;

2) $e^{z_1-z_2} = \dfrac{e^{z_1}}{e^{z_2}}$;

3) $\left(e^z\right)^m = e^{mz}$; где m – целое число.

Если в уравнении Эйлера показатель степени принять за чисто мнимое число ($x=0$), то получаем: $e^{iy} = \cos y + i\sin y$

Для комплексно – сопряженного числа получаем: $e^{-iy} = \cos y - i\sin y$

Из этих двух уравнений получаем:

$$\begin{cases} \cos y = \dfrac{e^{iy}+e^{-iy}}{2} \\ \sin y = \dfrac{e^{iy}-e^{-iy}}{2i} \end{cases}$$

Этими формулами пользуются для нахождения значений степеней тригонометрических функций через функции кратных углов.

Если представить комплексное число в тригонометрической форме:

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

и воспользуемся формулой Эйлера: $\boxed{e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi}$

Полученное равенство и есть **показательная форма комплексного числа.**

Разложение многочлена на множители.

Определение. Функция вида $f(x) = A_0x^n + A_1x^{n-1} + \ldots + A_n$ называется **целой рациональной** функцией от x.

<u>Теорема Безу.</u>

При делении многочлена f(x) на разность x – a получается остаток, равный f(a).

<u>Доказательство.</u> При делении многочлена *f(x)* на разность *x – a* частным будет многочлен $f_1(x)$ степени на единицу меньшей, чем *f(x),* а остатком – постоянное число *R*.

$$f(x) = f_1(x)(x - a) + R$$

Переходя к пределу при $x \to a$, получаем *f(a) = R.*

<u>Следствие.</u> *Если, a – корень многочлена, т.е. f(a) = 0, то многочлен f(x) делится на (x – a) без остатка.*

<u>Определение.</u> Если уравнение имеет вид *P(x)* = 0, где *P(x)* – многочлен степени *n*, то это уравнение называется **алгебраическим** уравнением степени *n*.

<u>Теорема.</u> (Основная теорема алгебры) *Всякая целая рациональная функция f(x) имеет, по крайней мере, один корень, действительный или комплексный.*

<u>Теорема.</u> *Всякий многочлен n – ой степени разлагается на n линейных множителей вида (x – a) и множитель, равный коэффициенту при* x^n.

<u>Теорема.</u> *Если два многочлена тождественно равны друг другу, то коэффициенты одного многочлена равны соответствующим коэффициентам другого.*

Если среди корней многочлена встречаются кратные корни, то разложение на множители имеет вид:

$$f(x) = A_0(x - a_1)^{k_1}(x - a_2)^{k_2}...(x - a_m)^{k_m}.$$

$k_1 + k_2 + ... + k_m = n$, где k_i - кратность соответствующего корня.

Отсюда следует, что *любой многочлен n – ой степени имеет ровно n корней (действительных или комплексных).*

Это свойство имеет большое значение для решения алгебраических уравнений, дифференциальных уравнений и играет важную роль в анализе функций.

Рассмотрим несколько примеров действий с комплексными числами.

<u>Пример.</u> Даны два комплексных числа $z_1 = 1 - \frac{7}{2}i; \quad z_2 = -7 - 2i$. Требуется

а) найти значение выражения $\left(\dfrac{1 - \frac{7}{2}i}{-7 - 2i}\right)^{-4}$ в алгебраической форме, б) для числа $z = 2 - 2\sqrt{3}i$ найти тригонометрическую форму, найти z^{20}, найти корни уравнения $w^3 + z = 0$.

а) Очевидно, справедливо следующее преобразование:

$$\left(\frac{1-\frac{7}{2}i}{-7-2i}\right)^{-4}=\left(\frac{2-7i}{-14-4i}\right)^{-4}=\left(\frac{-14-4i}{2-7i}\right)^{4}=16\left(\frac{-7-2i}{2-7i}\right)^{4}$$

Далее производим деление двух комплексных чисел:

$$\frac{-7-2i}{2-7i}=\frac{(-7-2i)(2+7i)}{(2-7i)(2+7i)}=\frac{-14-49i-4i+14}{4+49}=\frac{-53i}{53}=-i.$$

Получаем значение заданного выражения: $16(-i)^4=16i^4=16$.

б) Число $z=2-2\sqrt{3}i$ представим в виде $z=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$, где

$$r=|z|=\sqrt{4+12}=4; \qquad \varphi=arctg\frac{b}{a}=arctg\left(-\sqrt{3}\right)=-60^0$$

Тогда $z=4(\cos 60^0-i\sin 60^0)$.

Для нахождения z^{20} воспользуемся формулой Муавра.

$$z^{20}=4^{20}(\cos 1200^0-i\sin 1200^0)=4^{20}(\cos(3\cdot 2\pi+120^0)-i\sin(3\cdot 2\pi+120^0))=$$

$$=4^{20}(\cos 120^0-i\sin 120^0)=-4^{20}\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right).$$

Если $w^3+z=0$, то $w=\sqrt[3]{z}$

$$\sqrt[3]{z}=\sqrt[3]{r}\left(\cos\frac{\varphi+2\pi k}{3}+i\sin\frac{\varphi+2\pi k}{3}\right)=\sqrt[3]{4}\left(\cos\frac{-60^0+2\pi k}{3}+i\sin\frac{-60^0+2\pi k}{3}\right); \quad k\in Z.$$

Тема 29. Числовая последовательность и ее предел.

Пусть N-множество натуральных чисел. Если каждому числу n принадлежит N поставлено в соответствие действительное число x_n принадлежит R, то множество чисел x_1, $x_2,\dots, x_n,\dots$называется числовой последовательностью, которая обозначается $\{x_n\}$. Числа x_1, …, x_n… называются членами последовательности $\{x_n\}$, x_n-общий член последовательности. Последовательность считается заданной, если указан способ получения любого ее элемента. Геометрически последовательность изображается на числовой прямой точками, координаты которых равны соответствующим элементам последовательности.

Пусть даны последовательности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$. Арифметические операции над последовательностями вводятся следующим способом:

1. $\{x_n\}+\{y_n\}=\{x_n+y_n\}$
2. $\{x_n\}-\{y_n\}=\{x_n+y_n\}$

3. $\{x_n\}\times\{y_n\}=\{x_n\times y_n\}$

4. $\dfrac{\{x_n\}}{\{y_n\}}=\left\{\dfrac{x_n}{y_n}\right\}$

5. $C\times\{x_n\}=\{C\times x_n\}$, C=const.

Последовательность $\{\alpha_n\}$ называется бесконечно малой, если для любого положительного числа ε существует номер N такой, что при n>N выполняется неравенство $|x_n|<\varepsilon$. Так последовательность $\left\{\dfrac{1}{n}\right\}$ является бесконечно малой. Если взять N> , то для всех n>N $\left\{\dfrac{1}{n}\right\}$ $<\varepsilon$. Последовательность $\{x_n\}$ называется бесконечно большой, если для любого положительного числа M существует номер N такой, что при n<N выполняется неравенство $|x_n|>M$. Например $\{n\}$ является бесконечно большой. Если взять N≥M, то для всех n>N, $|x_n|>M$.

Алгебраическая сумма любого конечного числа бесконечно малых последовательностей есть бесконечно малая. Произведение любого конечного числа бесконечно малых последовательностей есть бесконечно малая. Далее, если $\{x_n\}$-бесконечно большая последовательность и все ее члены отличны от нуля, то $\left\{\dfrac{1}{x_n}\right\}$ - бесконечно малая. Обратно, если $\{\alpha_n\}$-бесконечно малая последовательность и $\alpha_n\neq 0$, то $\left\{\dfrac{1}{\alpha_n}\right\}$ - бесконечно большая.

Число a называется пределом последовательности $\{x_n\}$, если для любого положительного числа ε существует номер N такой, что при n>N выполняется неравенство $|x_n-a|<\varepsilon$. Последовательность, имеющая предел, называется сходящейся; в противном случае – последовательность называется расходящейся. Запись: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ или $x_n\to a$ при $n\to\infty$ означает, что $\{x_n\}$ сходится и имеет своим пределом число a. В случае бесконечно большой последовательности пишем: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=\infty$. Если при этом, начиная с некоторого номера, все члены последовательности положительны (отрицательны), то пишем: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=+\infty$, ($\lim\limits_{n\to\infty} x_n=-\infty$). Всякая бесконечно малая последовательность является сходящейся и имеет своим пределом число а=0: $\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n = 0$. Любая сходящаяся последовательность имеет единственный предел. Основные теоремы о пределах последовательностей:

1.Сумма(разность) двух сходящихся последовательностей $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ есть сходящаяся последовательность, предел которой равен сумме(разности) пределов этих последовательностей.

$\lim\limits_{n\to\infty}(x_n \pm y_n) = \lim\limits_{n\to\infty}x_n + \lim\limits_{n\to\infty}y_n$.

2.Произведение сходящихся последовательностей $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ есть сходящаяся последовательность, предел которой произведению пределов $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$.

$\lim\limits_{n\to\infty}(x_n \times y_n) = \lim\limits_{n\to\infty}x_n \times \lim\limits_{n\to\infty}y_n$

3.Предел постоянной С равен самой постоянной. $\lim\limits_{n\to\infty}C = C$.

4.Частоное двух сходящихся последовательностей $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ при условии, что $\lim\limits_{n\to\infty}y_n \neq 0$, есть сходящаяся последовательность, предел которой равен частному пределов

$\{x_n\}$ и $\{y_n\}$. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{x_n}{y_n}\right) = \frac{\lim\limits_{n\to\infty}x_n}{\lim\limits_{n\to\infty}y_n}$.

Тема 30. Функция. Предел функции.

Определение. Переменная величина у называется функцией независимой переменной величины (аргумента) х на множестве Д, если каждому значению х из множества Д по некоторому правилу (закону) поставлено в соответствие одно определение значения у.

Если у является функцией от х, то пишут $y = f(x)$, $y = F(x)$, $y = \varphi(x)$, … Символ *f*(a) обозначает частное значение функции $y = f(x)$, то есть то значение, которое принимает функция $y = f(x)$ при х=а.

Множество Д называется областью определения функции.

Если функция задана аналитическим выражением, то под областью определения функции понимают область существования аналитического выражения, то есть множество значений аргумента х, для которого аналитическое выражение $y = f(x)$ имеет определенное конечное значение.

Определение. Графиком функции $y = f(x)$ называется множество точек (х, у) плоскости, координаты которых связаны соотношением $y = f(x)$.

Если уравнение $y = f(x)$ может быть однозначно разрешимо относительно х, то есть существует функция $x = \varphi(y)$ такая, что $f[\varphi(x)] \equiv y$, то функция $x = \varphi(y)$ называется обратной по отношению к функции $y = f(x)$.

Функция $y = f(x)$ называется четной, если $f(-x) = f(x)$; нечетной, если $f(-x) = -f(x)$. График четной функции симметричен относительно оси ординат, нечетной – начала координат.

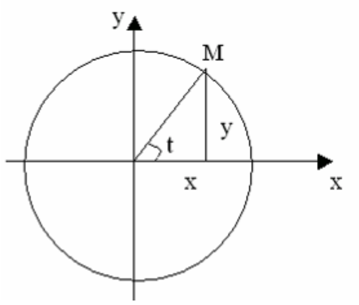
Функция $y = f(x)$ называется периодической с периодом T, если $f(x+T) = f(x)$.

Будем говорить, что переменная y как функция аргумента x задана параметрически, если обе переменные x и y заданы как функции некоторого параметра (новой переменной) t:

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}.$$

Например, параметрическое уравнение прямой на плоскости: $\begin{cases} x = x_0 + p_1 t \\ y = y_0 + p_2 t \end{cases}$ или

параметрическое уравнение окружности на плоскости: $\begin{cases} x = R\cos t \\ y = R\sin t \end{cases}$ с центром в точке O(0,0).



Пусть f(x) – функция, заданная на некотором множестве X, а $x_0 \in X$ или $x_0 \notin X$. Пусть x_1, x_2,…, x_n,…-последовательность точек из X, отличных от x_0, которая сходится к x_0.Пусть $f(x_1)$, $f(x_1)$,…, $f(x_n)$,…- последовательность значений функции f(x) в этих точках. Число A называется пределом функции f(x) в точке x_0 (при $x \to x_0$), если для любой сходящейся к x_0 последовательности значений функции сходится к числу A, при этом записывают $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$. Функция может иметь в точке x_0 только один предел.

Число A называется правым (левым) пределом функции f(x) в точке x_0, если для любой сходящейся к x_0 последовательности значений аргумента, элементы x_n которой больше (меньше) x_0, соответствующая последовательность значений функции сходится к A: $\lim\limits_{x \to x_0+} f(x) = A$ ($\lim\limits_{x \to x_0-} f(x) = A$). Функция f(x)имеет в точке x_0 предел, тогда и только тогда, когда в этой точке существует как правый, так и левый пределы, и они равны между собой. В этом случае предел функции равен односторонним пределам.

Число A называется пределом функции f(x) при $x \to \infty$, если для любой бесконечно большой последовательности значений аргумента соответствующая последовательность значений функции сходится к А: $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = A$. Число А называется пределом функции f(x) при x→ +∞ (x→ -∞), если для любой бесконечно большой последовательности значений аргумента, элементы x_n которой положительны (отрицательны), соответствующая последовательность значений сходится к А: $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = A$. Число А называется пределом функции f(x) при x→ +∞ (x→ -∞), если для любой бесконечно большой последовательности значений аргумента, элементы x_n которой положительны (отрицательны), соответствующая последовательность значений функции сходится к А: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = A$ $\left(\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = A\right)$.

Если функции f(x) и φ(x), имеют в точке x_0 пределы. Тогда функции f(x)±φ(x), f(x)×φ(x), $\dfrac{\varphi(x)}{f(x)}$ имеют в точке x_0 пределы и выполняются равенства:
$\lim\limits_{x\to x_0}[f(x) \pm \varphi(x)] = \lim\limits_{x\to x_0} f(x) \pm \lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)$, $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x) \times \varphi(x)] = \lim\limits_{x\to x_0} f(x) \times \lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)$,
$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{\varphi(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)}$, $\left(\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x) \neq 0\right)$.

Далее, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x} = 1$. Этот предел называется первым замечательным пределом. Равенство $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x = e$ называется вторым замечательным пределом. Если в этом пределе произвести замену переменной $\dfrac{1}{x} = t$, t→ 0 при x→ ∞ , то получим $\lim\limits_{x\to 0}(1+t)^{\frac{1}{t}} = e$.

Тема31. Бесконечно малые и бесконечно большие функции. Эквивалентные бесконечно малые.

Функция f(x) называется бесконечно малой в точке x= x_0, если $\lim\limits_{n\to\infty} f(x) = 0$. Функция f(x) называется бесконечно большой в точке x_0, если для любого положительного ε существует положительное число δ такое, что для всех $x \in X$, $x \neq x_0$, удовлетворяющих неравенству $|x-x_0|<\delta$, выполняется неравенство $|f(x)|<\varepsilon$. При этом записывают $\lim\limits_{n\to x_0} f(x) = \infty$. Бесконечно малую функцию по аналогии можно определить и при x→± ∞ , x→ x_0± . Так же по аналогии с конечными односторонними пределами определяются и бесконечные односторонние пределы.

Бесконечно малые и бесконечно большие функции связаны между собой. Функция, обратная бесконечно малой, является бесконечно большой, и обратно.

Пусть даны две бесконечно малые функции α(x) и β(x). При выполнении равенства $\lim\limits_{n\to x_0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=1$ α(x) и β(x) называются эквивалентными бесконечно малыми: α(x)~ β(x), если

α(x)~α_1(x) и β(x)~β_1(x) при x→ x_0 и существует $\lim\limits_{n\to x_0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}$, то существует и $\lim\limits_{n\to x_0}\frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}$, причем

$\lim\limits_{n\to x_0}\frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}=\lim\limits_{n\to x_0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}$.

Основные эквивалентности :

1) sinα(x) ~α(x) ;
2) tgα(x) ~α(x) ;
3) arcsinα(x) ~α(x) ;
4) arctgα(x) ~α(x) ;
5) ln(1+α(x)) ~α(x) ;
6) $e^{\alpha(x)}$-1~α(x) ; здесь α(x) - бесконечно малая функция.

Пример. Вычислить $\lim\limits_{n\to 0}\frac{\arcsin 3x}{tg6x}$.

Решение. 3x, 6x – бесконечно малые при x→ 0, отсюда arcsin3x~3x, tg6x~6x. Поэтому $\lim\limits_{n\to 0}\frac{\arcsin 3x}{tg6x}=\lim\limits_{n\to 0}\frac{3x}{6x}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$.

Тема 32. Непрерывность функции. Классификация точек разрыва.

Функция f(x),определенная в некоторой окрестности точки x_0, называется непрерывной в этой точке, если $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$. Если функции f(x) и φ(x), имеют в точке x_0 пределы. Тогда функции f(x)±φ(x), f(x)×φ(x), $\frac{\varphi(x)}{f(x)}$ $(\varphi(x_0)\neq 0)$ являются непрерывными в этой точке. Из определения непрерывной функции можно переставлять знак функции и знак предела. Элементарные функции непрерывные в каждой точке, в окрестности которой они определены.

Функция f(x) является непрерывной в (a, b), если она непрерывна в каждой точке этого интервала. В случае сегмента [a, b] функция f(x)непрерывна в (a, b) и непрерывна в точке a справа, в точке b слева: $\lim_{x\to a+} f(x) = f(a)$, $\lim_{x\to b} f(x) = f(b)$.

Если функция f(x) не является непрерывной в некоторой точке x_0, то эта точка называется точкой разрыва функции.

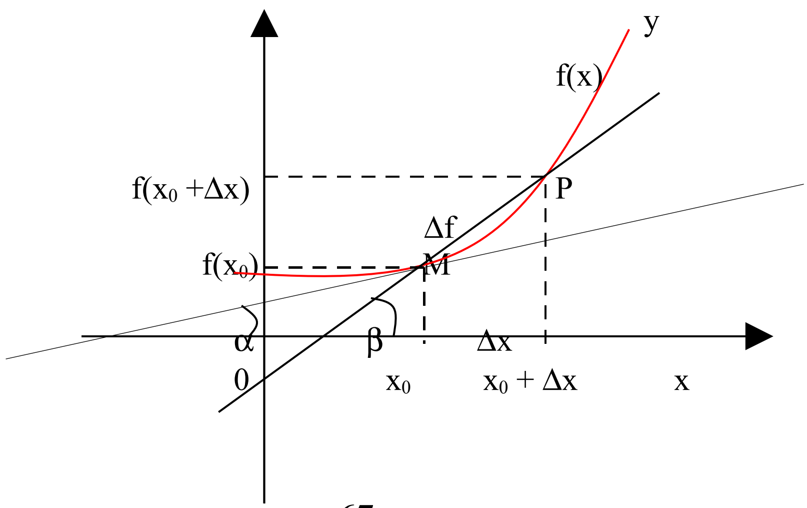
Точка x_0 называется точкой разрыва функции $f(x)$, если $f(x)$ в точке x_0 не является непрерывной. Разрывы функций классифицируются следующим образом. Точка x_0 называется точкой разрыва I рода функции $f(x)$, если в этой точке $f(x)$ имеет конечные, но не равные друг другу правый и левый пределы. Точка x_0 называется точкой разрыва II рода функции $f(x)$, если в этой точке $f(x)$ не имеет, по крайней мере, одного из односторонних пределов бесконечен. Точка x_0 называется точкой устранимого разрыва функции $f(x)$, если в этой точке существует предел $f(x)$, но он не равен значению функции $f(x)$ в указанной точке.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ.

Тема 33. Производная функции, ее геометрический и физический смысл.

Определение. **Производной** функции *f(x)* в точке $x = x_0$ называется предел отношения приращения функции в этой точке к приращению аргумента, если он существует.

$$f'(x) = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$



Пусть *f(x)* определена на некотором промежутке (a, b). Тогда $tg\beta = \frac{\Delta f}{\Delta x}$ – тангенс угла наклона секущей МР к графику функции.

$$\lim_{\Delta x \to 0} tg\beta = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = f'(x_0) = tg\alpha ,$$

где α - угол наклона касательной к графику функции *f(x)* в точке (x_0, $f(x_0)$).

Угол между кривыми может быть определен как угол между касательными, проведенными к этим кривым в какой- либо точке.

Уравнение касательной к кривой: $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$

Уравнение нормали к кривой: $y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)$.

Производная функции показывает скорость изменения функции при изменении переменной.

Физический смысл производной функции f(t), где t- время, а f(t)- закон движения (изменения координат) – мгновенная скорость движения.

Соответственно, вторая производная функции - скорость изменения скорости, т.е. ускорение.

Односторонние производные функции в точке.

Определение. Правой (левой) производной функции *f(x)* в точке $x = x_0$ называется правое (левое) значение предела отношения $\frac{\Delta f}{\Delta x}$ при условии, что это отношение существует.

$$f'_+(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0+} \frac{\Delta f}{\Delta x} \qquad\qquad f'_-(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0-} \frac{\Delta f}{\Delta x}$$

Если функция *f(x)* имеет производную в некоторой точке $x = x_0$, то она имеет в этой точке односторонние производные. Однако, обратное утверждение неверно. Во- первых функция может иметь разрыв в точке x_0, а во- вторых, даже если функция непрерывна в точке x_0, она может быть в ней не дифференцируема.

Например: $f(x) = |x|$ - имеет в точке x = 0 и левую и правую производную, непрерывна в этой точке, однако, не имеет в ней производной.

Теорема. (Необходимое условие существования производной) *Если функция f(x) имеет производную в точке x_0, то она непрерывна в этой точке.*

Понятно, что это условие не является достаточным.

Основные правила дифференцирования.

Обозначим $f(x) = u$, $g(x) = v$- функции, дифференцируемые в точке x.

1) $(u \pm v)' = u' \pm v'$

2) $(u \cdot v)' = u \cdot v' + u' \cdot v$

3) $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - v'u}{v^2}$, если $v \neq 0$

Производные основных элементарных функций.

1) $C' = 0$; 2) $(x^m)' = mx^{m-1}$; 3) $\left(\sqrt{x}\right)' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$; 4) $\left(\dfrac{1}{x}\right)' = -\dfrac{1}{x^2}$; 5) $\left(e^x\right)' = e^x$;

6) $\left(a^x\right)' = a^x \ln a$; 7) $\left(\ln x\right)' = \dfrac{1}{x}$; 8) $\left(\log_a x\right)' = \dfrac{1}{x \ln a}$; 9) $\left(\sin x\right)' = \cos x$;

10) $\left(\cos x\right)' = -\sin x$; 11) $\left(tgx\right)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$; 12) $\left(ctgx\right)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$; 13) $\left(\arcsin x\right)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

14) $\left(\arccos x\right)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$; 15) $\left(arctgx\right)' = \dfrac{1}{1+x^2}$; 16) $\left(arcctgx\right)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$.

Производная сложной функции.

Теорема. *Пусть $y = f(x)$; $u = g(x)$, причем область значений функции и входит в область определения функции f.*

Тогда $y' = f'(u) \cdot u'$

Логарифмическое дифференцирование.

Рассмотрим функцию $y = \ln|x| = \begin{cases} \ln x, & при \quad x > 0 \\ \ln(-x), & при \quad x < 0 \end{cases}$.

Тогда $(\ln|x|)' = \dfrac{1}{x}$, т.к. $\left(\ln x\right)' = \dfrac{1}{x}$; $(\ln(-x))' = \dfrac{(-x)'}{x} = \dfrac{1}{x}$.

Учитывая полученный результат, можно записать $\left(\ln|f(x)|\right)' = \dfrac{f'(x)}{f(x)}$.

Отношение $\dfrac{f'(x)}{f(x)}$ называется **логарифмической производной** функции f(x).

Способ **логарифмического дифференцирования** состоит в том, что сначала находят логарифмическую производную функции, а затем производную самой функции по формуле

$$f'(x) = (\ln|f(x)|)' \cdot f(x)$$

Способ логарифмического дифференцирования удобно применять для нахождения производных сложных, особенно показательных и показательно-степенных функций, для которых непосредственное вычисление производной с использованием правил дифференцирования представляется трудоемким.

<u>Производная обратных функций.</u>

Пусть требуется найти производную функции *y = f(x)* при условии, что обратная ей функция *x = g(y)* имеет производную, отличную от нуля в соответствующей точке.

Для решения этой задачи дифференцируем функцию x = g(y) по x:

$$1 = g'(y)y', \text{ т.к. } g'(y) \neq 0; \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}; \quad y' = \frac{1}{g'(y)},$$

т.е. производная обратной функции обратна по величине производной данной функции.

<u>Пример.</u> Найти формулу для производной функции arctg x.

Функция arctg x является функцией, обратной функции tg x, $y = tgx; \quad x = arctgy;$

Известно, что $y' = (tgx)' = \dfrac{1}{\cos^2 x};$

По приведенной выше формуле получаем: $y' = \dfrac{1}{d(arctgy)/dx}; \quad \dfrac{d(arctgy)}{dy} = \dfrac{1}{1/\cos^2 x}$

Т.к. $\dfrac{1}{\cos^2 x} = 1 + tg^2 x = 1 + y^2;$ то можно записать окончательную формулу для производной арктангенса: $(arctgy)' = \dfrac{1}{1 + y^2};$

Таким образом получены все формулы для производных арксинуса, арккосинуса и других обратных функций, приведенных в таблице производных.

Тема 34. Дифференциал функции.

Пусть функция y = f(x) имеет производную в точке x: $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x)$

Тогда можно записать: $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \alpha$, где $\alpha \to 0$, при $\Delta x \to 0$.

Следовательно: $\Delta y = f'(x)\cdot\Delta x + \alpha\cdot\Delta x$.

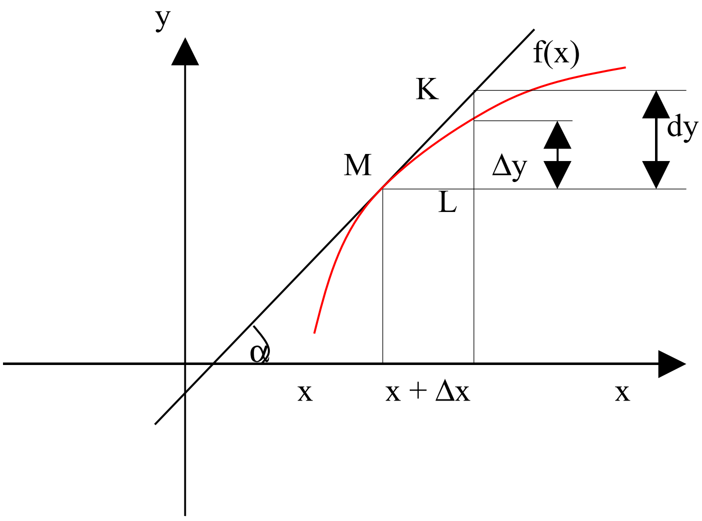
Величина $\alpha\Delta x$- бесконечно малая более высокого порядка, чем $f'(x)\Delta x$, т.е. $f'(x)\Delta x$- главная часть приращения Δy.

Определение. **Дифференциалом** функции f(x) в точке x называется главная линейная часть приращения функции. Обозначается dy или df(x).

Из определения следует, что $dy = f'(x)\Delta x$ или $dy = f'(x)dx$. Можно также записать:

$$f'(x) = \frac{dy}{dx}$$

Геометрический смысл дифференциала.



Из треугольника ΔMKL: $KL = dy = tg\alpha\cdot\Delta x = y'\cdot\Delta x$

Таким образом, дифференциал функции *f(x)* в точке x равен приращению ординаты касательной к графику этой функции в рассматриваемой точке.

Свойства дифференциала.

Если $u = f(x)$ и $v = g(x)$- функции, дифференцируемые в точке x, то непосредственно из определения дифференциала следуют следующие свойства:

1) $d(u \pm v) = (u \pm v)'dx = u'dx \pm v'dx = du \pm dv$

2) $d(uv) = (uv)'dx = (u'v + v'u)dx = vdu + udv$

3) $d(Cu) = Cdu$

4) $d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vdu - udv}{v^2}$

Дифференциал сложной функции.

Инвариантная форма записи дифференциала.

Пусть $y = f(x)$, $x = g(t)$, т.е. у - сложная функция.

Тогда $dy = f'(x)g'(t)dt = f'(x)dx$.

Видно, что форма записи дифференциала dy не зависит от того, будет ли х независимой переменной или функцией какой- то другой переменной, в связи с чем эта форма записи называется **инвариантной формой записи дифференциала**.

Однако, если х - независимая переменная, то $dx = \Delta x$, но если х зависит от t, то $\Delta x \neq dx$.

Таким образом, форма записи $dy = f'(x)\Delta x$ не является инвариантной.

Теоремы о среднем.

Теорема Ролля.

Если функция f(x) непрерывна на отрезке [a, b], дифференцируема на интервале (a, b) и значения функции на концах отрезка равны f(a) = f(b), то на интервале (a, b) существует точка ε, $a < \varepsilon < b$, *в которой производная функция f(x) равная нулю,* $f'(\varepsilon) = 0$.

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(\varepsilon)}{\Delta x} = 0, \quad т.е. \quad f'(\varepsilon) = 0.$$

Теорема Ролля имеет несколько **следствий**:

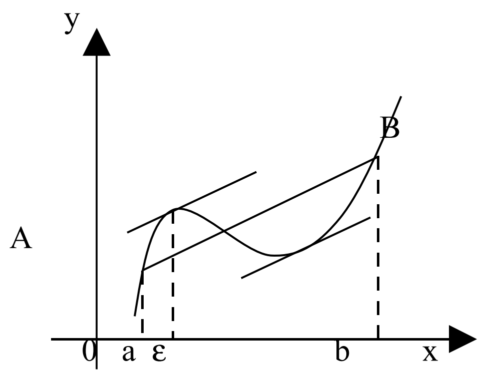
1) Если функция f(x) на отрезке [a, b] удовлетворяет теореме Ролля, причем f(a) = f(b) = 0, то существует по крайней мере одна точка ε, a < ε < b, такая, что $f'(\varepsilon) = 0$. Т.е. между двумя нулями функции найдется хотя бы одна точка, в которой производная функции равна нулю.
2) Если на рассматриваемом интервале (a, b) функция f(x) имеет производную (n-1)- го порядка и n раз обращается в нуль, то существует по крайней мере одна точка интервала, в котором производная (n – 1) – го порядка равна нулю.

Теорема Лагранжа.

Если функция f(x) непрерывна на отрезке [a, b] и дифференцируема на интервале (a, b), то на этом интервале найдется по крайней мере одна точка ε $a < \varepsilon < b$, *такая, что*

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\varepsilon).$$

Отношение $\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ равно угловому коэффициенту секущей АВ.



Если функция f(x) удовлетворяет условиям теоремы, то на интервале (a, b) существует точка ε такая, что в соответствующей точке кривой y = f(x) касательная параллельна секущей, соединяющей точки А и В. Таких точек может быть и несколько, но одна существует точно.

$$f'(\varepsilon) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

<u>Определение.</u> Выражение $f(b) - f(a) = f'(\varepsilon)(b - a)$ называется **формулой Лагранжа** или **формулой конечных приращений.**

В дальнейшем эта формула будет очень часто применяться для доказательства самых разных теорем.

Иногда формулу Лагранжа записывают в несколько другом виде: $\Delta y = f'(x + \theta \Delta x)\Delta x$,
где $0 < \theta < 1$, $\Delta x = b - a$, $\Delta y = f(b) - f(a)$.

<u>Теорема Коши.</u>

Если функции f(x) и g(x) непрерывны на отрезке [a, b] и дифференцируемы на интервале (a, b) и $g'(x) \neq 0$ на интервале (a, b), то существует по крайней мере одна точка ε, $a < \varepsilon < b$, такая, что $\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\varepsilon)}{g'(\varepsilon)}$.

Т.е. отношение приращений функций на данном отрезке равно отношению производных в точке ε.

<u>Раскрытие неопределенностей.</u>

Правило Лопиталя.

К разряду неопределенностей принято относить следующие соотношения:

$$\frac{0}{0}; \frac{\infty}{\infty}; \infty\cdot 0; \infty^0; 1^\infty; \infty-\infty$$

Теорема (правило Лопиталя). *Если функции f(x) и g(x) дифференцируемы в вблизи точки а, непрерывны в точке а, g′(x) отлична от нуля вблизи а и f(a) = g(a) = 0, то предел отношения функций при x→a равен пределу отношения их производных, если этот предел (конечный или бесконечный) существует.*

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Пример: Найти предел $\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1+\ln x}{e^x-e}$.

Как видно, при попытке непосредственного вычисления предела получается неопределенность вида $\frac{0}{0}$. Функции, входящие в числитель и знаменатель дроби удовлетворяют требованиям теоремы Лопиталя.

$f'(x) = 2x + \frac{1}{x}$; $g'(x) = e^x$; $\lim_{x\to 1}\frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{2x+\frac{1}{x}}{e^x} = \frac{2+1}{e} = \frac{3}{e}$;

Производные и дифференциалы высших порядков.

Пусть функция f(x)- дифференцируема на некотором интервале. Тогда, дифференцируя ее, получаем первую производную

$$y' = f'(x) = \frac{df(x)}{dx}$$

Если найти производную функции f′(x), получим **вторую производную** функции f(x).

т.е. $y'' = (y')'$ или .

Этот процесс можно продолжить и далее, находя производные степени n.

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right).$$

Тема 35. Исследование функций с помощью производной.

Возрастание и убывание функций. Экстремум функции.

<u>Теорема.</u>

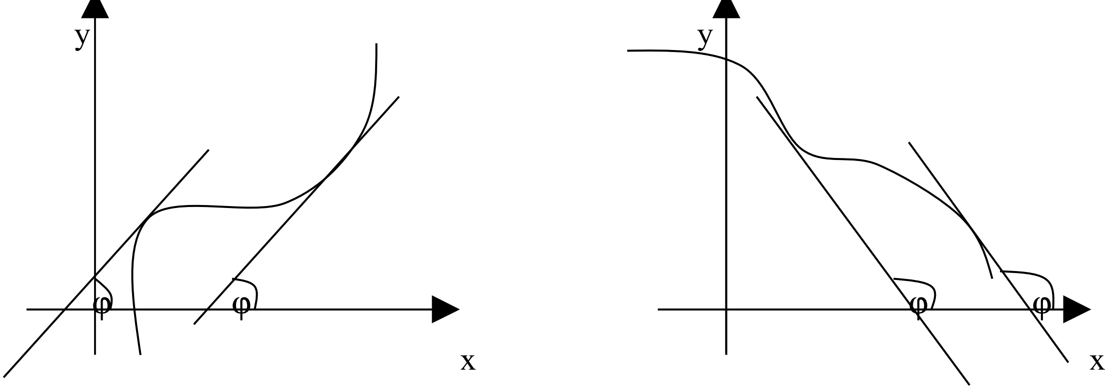
1) *Если функция f(x) имеет производную на отрезке [a, b] и возрастает на этом отрезке, то ее производная на этом отрезке неотрицательна, т.е.* $f'(x) \geq 0$.

2) *Если функция f(x) непрерывна на отрезке [a, b] и дифференцируема на промежутке (a, b), причем* $f'(x) > 0$ *для* $a < x < b$, *то эта функция возрастает на отрезке [a, b].*

Аналогично можно сделать вывод о том, что если функция f(x) убывает на отрезке [a, b], то $f'(x) \leq 0$ на этом отрезке. Если $f'(x) < 0$ в промежутке (a, b), то f(x) убывает на отрезке [a, b].

Конечно, данное утверждение справедливо, если функция f(x) непрерывна на отрезке [a, b] и дифференцируема на интервале (a, b).

Доказанную выше теорему можно проиллюстрировать геометрически:



<u>Точки экстремума.</u>

<u>Определение.</u> Функция f(x) имеет в точке x_1 максимум, если ее значение в этой точке больше значений во всех точках некоторого интервала, содержащего точку x_1. Функция f(x) имеет в точке x_2 минимум, если $f(x_2 + \Delta x) > f(x_2)$ при любом Δx (Δx может быть и отрицательным).

Очевидно, что функция, определенная на отрезке может иметь максимум и минимум только в точках, находящихся внутри этого отрезка. Нельзя также путать максимум и минимум функции с ее наибольшим и наименьшим значением на отрезке – это понятия принципиально различные.

<u>Определение.</u> Точки максимума и минимума функции называются **точками экстремума.**

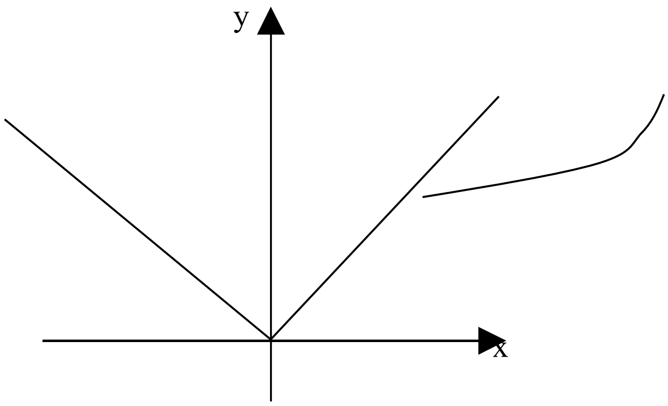
<u>Теорема.</u> (необходимое условие существования экстремума) *Если функция f(x) дифференцируема в точке* $x = x_1$ *и точка* x_1 *является точкой экстремума, то производная функции обращается в нуль в этой точке.*

<u>Следствие.</u> Обратное утверждение неверно. Если производная функции в некоторой точке равна нулю, то это еще не значит, что в этой точке функция имеет экстремум. Красноречивый пример этого – функция $y = x^3$, производная которой в точке $x = 0$ равна нулю, однако в этой точке функция имеет только перегиб, а не максимум или минимум.

<u>Определение.</u> **Критическими точками** функции называются точки, в которых производная функции не существует или равна нулю.

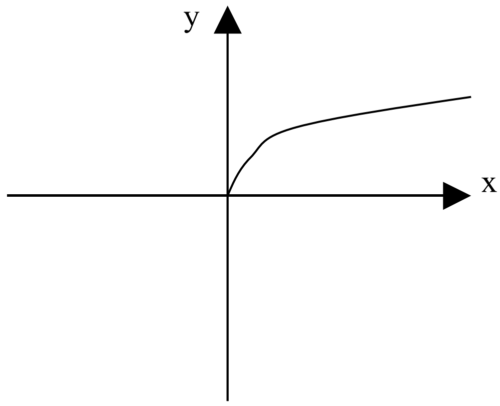
Рассмотренная выше утверждение дает нам необходимые условия существования экстремума, но этого недостаточно.

<u>Пример:</u> $f(x) = |x|$



В точке $x = 0$ функция имеет минимум, но не имеет производной

<u>Пример:</u> $f(x) = \sqrt[3]{x}$



В точке $x = 0$ функция не имеет максимума, ни минимума, но имеет производную.

Вообще говоря, функция $f(x)$ может иметь экстремум в точках, где производная не существует или равна нулю.

<u>Теорема.</u> (Достаточные условия существования экстремума).

Пусть функция $f(x)$ непрерывна в интервале (a, b), который содержит критическую точку x_1, и дифференцируема во всех точках этого интервала (кроме, может быть, самой точки x_1).

Если при переходе через точку x_1 слева направо производная функции $f'(x)$ меняет знак с "+" на "-", то в точке $x = x_1$ функция $f(x)$ имеет максимум, а если производная меняет знак с "-" на "+"- то функция имеет минимум.

На основе вышесказанного можно выработать единый порядок действий при нахождении наибольшего и наименьшего значения функции на отрезке:

1) Найти критические точки функции.
2) Найти значения функции в критических точках.
3) Найти значения функции на концах отрезка.
4) Выбрать среди полученных значений наибольшее и наименьшее.

<u>Исследование функции на экстремум с помощью производных высших порядков.</u>

Пусть в точке $x = x_1$ $f'(x_1) = 0$ и $f''(x_1)$ существует и непрерывна в некоторой окрестности точки x_1.

<u>Теорема.</u> *Если $f'(x_1) = 0$, то функция $f(x)$ в точке $x = x_1$ имеет максимум, если $f''(x_1)<0$ и минимум, если $f''(x_1)>0$.*

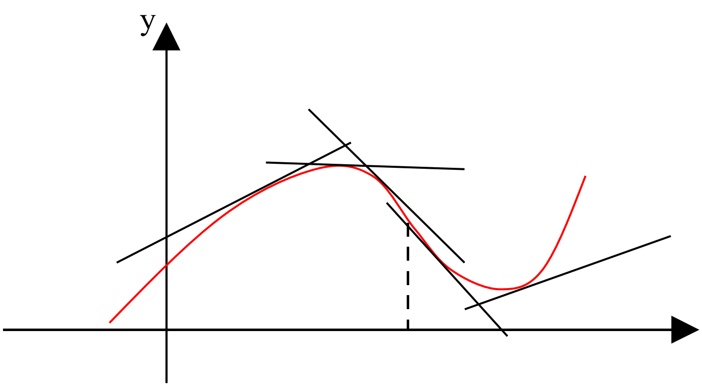
Для случая минимума функции теорема доказывается аналогично.

Если $f''(x) = 0$, то характер критической точки неизвестен. Для его определения требуется дальнейшее исследование.

Тема 36. Выпуклость вогнутость, асимптоты графика функции. Полное исследование функций.

<u>Выпуклость и вогнутость кривой. Точки перегиба.</u>

Определение. Кривая обращена выпуклостью **вверх** на интервале (a, b), если все ее точки лежат ниже любой ее касательной на этом интервале. Кривая, обращенная выпуклостью вверх, называется **выпуклой**, а кривая, обращенная выпуклостью вниз – называется **вогнутой**.



На рисунке показана иллюстрация приведенного выше определения.

Теорема 1. *Если во всех точках интервала (a, b) вторая производная функции f(x) отрицательна, то кривая y = f(x) обращена выпуклостью вверх (выпукла).*

Определение. Точка, отделяющая выпуклую часть кривой от вогнутой, называется **точкой перегиба**.

Очевидно, что в точке перегиба касательная пересекает кривую.

Теорема 2. *Пусть кривая определяется уравнением y = f(x). Если вторая производная f′′(a) = 0 или f′′(a) не существует и при переходе через точку x = a f′′(x) меняет знак, то точка кривой с абсциссой x = a является точкой перегиба.*

Асимптоты.

При исследовании функций часто бывает, что при удалении координаты х точки кривой в бесконечность кривая неограниченно приближается к некоторой прямой.

Определение. Прямая называется **асимптотой** кривой, если расстояние от переменной точки кривой до этой прямой при удалении точки в бесконечность стремится к нулю.

Следует отметить, что не любая кривая имеет асимптоту. Асимптоты могут быть прямые и наклонные. Исследование функций на наличие асимптот имеет большое значение и позволяет более точно определить характер функции и поведение графика кривой.

Вообще говоря, кривая, неограниченно приближаясь к своей асимптоте, может и пересекать ее, причем не в одной точке, как показано на приведенном ниже графике функции $y = x + e^{-\frac{x}{3}} \sin x$. Ее наклонная асимптота y = x.

Рассмотрим подробнее методы нахождения асимптот кривых.

Вертикальные асимптоты.

Из определения асимптоты следует, что если $\lim\limits_{x \to a+0} f(x) = \infty$ или $\lim\limits_{x \to a-0} f(x) = \infty$ или $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty$, то прямая х = а – асимптота кривой у = f(x).

Например, для функции $f(x) = \dfrac{2}{x-5}$ прямая х = 5 является вертикальной асимптотой.

Наклонные асимптоты.

Предположим, что кривая y = f(x) имеет наклонную асимптоту

y = kx + b, где $k = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{f(x)}{x}$; $b = \lim\limits_{x \to \infty} [f(x) - kx]$.

Отметим, что горизонтальные асимптоты являются частным случаем наклонных асимптот при k =0.

Пример. Найти асимптоты и построить график функции $y = \frac{x^2 + 2x - 1}{x}$.

1) Вертикальные асимптоты: $y \to +\infty$ $x \to 0-0$: $y \to -\infty$ $x \to 0+0$, следовательно, x = 0- вертикальная асимптота.

2) Наклонные асимптоты: $k = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^2 + 2x - 1}{x^2} = \lim\limits_{x\to\infty}\left(1 + \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2}\right) = 1$

$$b = \lim_{x\to\infty}(f(x) - x) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2 + 2x - 1}{x} - x\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2 + 2x - 1 - x^2}{x}\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x - 1}{x}\right) = \lim_{x\to\infty}\left(2 - \frac{1}{x}\right) = 2$$

Таким образом, прямая y = x + 2 является наклонной асимптотой.

Схема исследования функции и построение графика

Процесс исследования функции состоит из нескольких этапов. Для наиболее полного представления о поведении функции и характере ее графика необходимо отыскать:

1) Область существования функции.

Это понятие включает в себя и область значений и область определения функции.

2) Точки разрыва. (Если они имеются).
3) Интервалы возрастания и убывания.
4) Точки максимума и минимума.
5) Максимальное и минимальное значение функции на ее области определения.
6) Области выпуклости и вогнутости.
7) Точки перегиба. (Если они имеются).
8) Асимптоты. (Если они имеются).
9) Построение графика.

Применение этой схемы рассмотрим на примере.

Пример. Исследовать функцию $y = \frac{x^3}{x^2 - 1}$ и построить ее график.

Находим область существования функции. Очевидно, что *областью определения* функции является область $(-\infty; -1) \cup (-1; 1) \cup (1; \infty)$.

В свою очередь, видно, что прямые x = 1, x = -1 являются *вертикальными асимптотами* кривой.

Областью значений данной функции является интервал $(-\infty; \infty)$.

Точками разрыва функции являются точки x = 1, x = -1.

Находим *критические точки*.

Найдем производную функции

$$y' = \frac{3x^2(x^2-1)-2x\cdot x^3}{(x^2-1)^2} = \frac{3x^4-3x^2-2x^4}{(x^2-1)^2} = \frac{x^4-3x^2}{(x^2-1)^2}$$

Критические точки: x = 0; x = $-\sqrt{3}$; x = $\sqrt{3}$; x = -1; x = 1.

Найдем вторую производную функции

$$y'' = \frac{(4x^3-6x)(x^2-1)^2-(x^4-3x^2)4x(x^2-1)}{(x^2-1)^4} =$$

$$= \frac{(4x^3-6x)(x^4-2x^2+1)-(x^4-3x^2)(4x^3-4x)}{(x^2-1)^4} =$$

$$= \frac{4x^7-8x^5+4x^3-6x^5+12x^3-6x-4x^7+4x^5+12x^5-12x^3}{(x^2-1)^4} =$$

$$= \frac{2x^5+4x^3-6x}{(x^2-1)^4} = \frac{2x(x^4+2x^2-3)}{(x^2-1)^4} = \frac{2x(x^2+3)(x^2-1)}{(x^2-1)^4} = \frac{2x(x^2+3)}{(x^2-1)^3}.$$

Определим выпуклость и вогнутость кривой на промежутках.

$-\infty < x < -\sqrt{3}$, $y'' < 0$, кривая выпуклая

$-\sqrt{3} < x < -1$, $y'' < 0$, кривая выпуклая

$-1 < x < 0$, $y'' > 0$, кривая вогнутая

$0 < x < 1$, $y'' < 0$, кривая выпуклая

$1 < x < \sqrt{3}$, $y'' > 0$, кривая вогнутая

$\sqrt{3} < x < \infty$, $y'' > 0$, кривая вогнутая

Находим промежутки *возрастания* и *убывания* функции. Для этого определяем знаки производной функции на промежутках.

$-\infty < x < -\sqrt{3}$, $y' > 0$, функция возрастает

$-\sqrt{3} < x < -1$, $y' < 0$, функция убывает

$-1 < x < 0$, $y' < 0$, функция убывает

$0 < x < 1$, $y' < 0$, функция убывает

$1 < x < \sqrt{3}$, $y' < 0$, функция убывает

$\sqrt{3} < x < \infty$, $y'' > 0$, функция возрастает

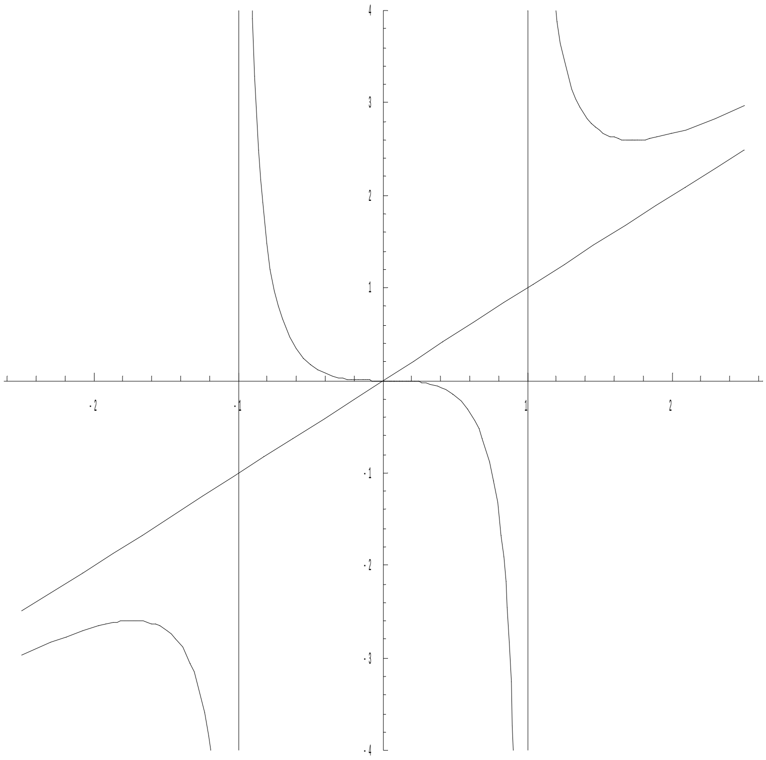
Видно, что точка x = -$\sqrt{3}$ является точкой *максимума*, а точка x = $\sqrt{3}$ является точкой *минимума*. Значения функции в этих точках равны соответственно -3$\sqrt{3}$/2 и 3$\sqrt{3}$/2.

Про вертикальные *асимптоты* было уже сказано выше. Теперь найдем *наклонные асимптоты*.

$$k = \lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x^2-1} = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{1-\frac{1}{x^2}} = 1;$$

$$b = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3}{x^2-1} - x\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3 - x^3 + x}{x^2-1}\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{x}{x^2-1} = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{x^2}} = 0$$

Уравнение наклонной асимптоты – y = x. Построим *график* функции:



4. ОРГАНИЗАЦИЯ КОНТРОЛЯ ЗНАНИЙ

4.1. ВОПРОСЫ К ЭКЗАМЕНУ

1. Определители второго, третьего, и более высоких порядков. Способы их вычисления.
2. Свойства определителей.
3. Матрицы, их свойства.
4. Действия над матрицами.
5. Обратная матрица.
6. Ранг матрицы.
7. Решение линейных систем матричным методом.
8. Метод Крамера решение линейных систем.
9. Метод Гаусса решения линейных систем.
10. Теорема Кронекера-Капелли.
11. Решение систем однородных линейных уравнений.
12. Векторы и линейные операции над ними.
13. Проекция вектора на ось.
14. Разложение вектора по трем некомпланарным векторам, по ортам координатных осей.
15. Модуль вектора, направляющие косинусы.
16. Действия над векторами, заданными проекциями.
17. Скалярное произведение векторов, его свойства.
18. Выражение скалярного произведения векторов через координаты.
19. Векторное произведение векторов, его свойства.
20. Смешанное произведение векторов. Его свойства. Вычисление.
21. Различные виды уравнений прямой на плоскости.
22. Окружность. Эллипс. Гипербола. Парабола.
23. Общее уравнение линий второго порядка.
24. Различные виды уравнений плоскости в пространстве.
25. Плоскость. Основные задачи.
26. Различные виды уравнений прямой в пространстве.
27. Цилиндрические поверхности.
28. Поверхности вращения. Конические поверхности.
29. Канонические уравнения поверхностей.
30. Определения функции. Способы задания.
31. Сложная функция. Обратная функция и ее график.
32. Последовательность. Предел последовательности.
33. Предел функции при $x \to x_0; x \to +\infty; x_0 \to -\infty$
34. Бесконечно большие и бесконечно малые функции и основные теоремы о них.
35. Основные теоремы о пределах функции.
36. Признаки существования пределов.
37. Первый замечательный предел.
38. Второй замечательный предел.
39. Сравнение бесконечно малых функций.
40. Эквивалентные бесконечно малые, их применение к вычислению пределов.
41. Непрерывность функций. Классификация точек разрыва.
42. Определение производной, ее физический и геометрический смысл.
43. Уравнение касательной и нормали к кривой.
44. Производные суммы, разности, произведения и частного функций.
45. Производная сложной и обратной функции.
46. Производные основных элементарных функций.
47. Гиперболические функции и их производные.

48. Дифференцирование функций, заданных неявно и параметрически.
49. Логарифмическое дифференцирование.
50. Производные высших порядков, заданных неявно, и параметрически.
51. Дифференциал функции, его геометрический смысл.
52. Применение дифференциала к приближенным вычислениям.
53. Теорема Ролля, Коши, Лагранжа.
54. Правило Лопиталя.
55. Раскрытие неопределенностей различных видов.
56. Возрастание, убывание, максимум и минимум функции.
57. Выпуклость графика функции. Точки перегиба.
58. Асимптоты графика функции.
59. Общая схема исследования функции и построения графика.
60. Формула Тейлора для многочлена и произвольной функции.
61. Комплексные числа. Изображение. Действия над ними, в алгебраической, тригонометрической и показательной формах.
62. Возведение в степень и извлечение корня.

4.2. Примерный перечень вопросов для проверки уровня подготовленности студентов

Раздел	№	*Вопросы*
1)Алгебра и геометрия	1.	Свойства определителей
	2.	Вычисление определителей по правилу треугольника
	3.	Вычисление определителей разложением по элементам столбца (строки)
	4.	Матрицы, их виды и свойства
	5.	Умножение матриц
	6.	Миноры и алгебраические дополнения
	7.	Обратная матрица
	8.	Ранг матрицы
	9.	Собственные векторы матрицы
	10.	Приведение матрицы к треугольному виду
	11.	Виды систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) и особенности их решения
	12.	Теорема Кронекера-Капелли
	13.	Метод Крамера решения СЛАУ
	14.	Метод Гаусса решения СЛАУ
	15.	Метод Жордана-Гаусса решения СЛАУ
	16.	Векторы и их виды. Примеры
	17.	Линейные операции над векторами
	18.	Модуль вектора
	19.	Направляющие косинусы вектора
	20.	Какие векторы называются линейно зависимыми?
	21.	Что такое базис?
	22.	Скалярное произведение векторов
	23.	Векторное произведение векторов
	24.	Смешанное произведение векторов
	25.	Уравнение прямой в общем виде, с угловым коэффициентом
	26.	Уравнение прямой, проходящей через две заданные точки
	27.	Уравнение прямой в отрезках
	28.	Уравнение прямой в векторной форме и в нормальном виде
	29.	Угол между прямыми
	30.	Уравнения плоскости в общем виде и в отрезках
	31.	Угол между плоскостями
	32.	Канонические уравнения прямой в пространстве
	33.	Параметрические уравнения прямой
	34.	Уравнение прямой, проходящей через две заданные точки в пространстве
	35.	Угол между прямой и плоскостью
	36.	Эллипс. Каноническое и параметрическое уравнение окружности и эллипса
	37.	Парабола и гипербола, их определение, канонические уравнения.
	38.	Какие поверхности второго порядка вы знаете? В чем состоит сущность исследования поверхностей второго порядка методом сечения?
	39.	Написать общий вид Бинома Ньютона и несколько первых его членов
	40.	Свойства биномиальных коэффициентов
	41.	Определения, теоремы, необходимые и достаточные условия, основные символы математической логики, кванторы.
	42.	Множества, операции на множествах

1) Основы анализа	43.	Полярная система координат и ее связь с прямоугольной
	44.	Предел последовательности
	45.	Предел функции
	46.	Первый и второй замечательный пределы
	47.	Бесконечно малые и бесконечно большие величины и их свойства
	48.	Эквивалентные величины и их использование в теории пределов
	49.	Непрерывность функций
	50.	Горизонтальные, вертикальные и наклонные асимптоты функций, их уравнения
	51.	Механический и геометрический смысл производной
	52.	Таблица производных
	53.	Дифференциал, его определение, геометрический смысл и применение в приближенных вычислениях
	54.	Показать на примере применение логарифмического дифференцирования
	55.	Теорема Лагранжа о конечных приращениях, ее геометрический смысл
	56.	Уравнения касательной и нормали
	57.	Правило Лопиталя раскрытия неопределенностей
	58.	Общая схема исследования функций
	59.	Формулы Тейлора и Маклорена, их практическое применение

4.3. ЗАДАЧИ ДЛЯ ПОДГОТОВКИ К ЭКЗАМЕНУ

1. Упростить и вычислить определители $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & -4 & 7 \\ -3 & 12 & -15 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} 12 & 6 & -4 \\ 6 & 4 & 4 \\ 3 & 2 & 8 \end{vmatrix}$.

2. Упростить и вычислить определители $\begin{vmatrix} a & -a & a \\ a & a & -a \\ a & -a & -a \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} x^2 & x & 1 \\ y^2 & y & 1 \\ z^2 & z & 1 \end{vmatrix}$,.

3. Решить уравнения $\begin{vmatrix} 1 & 3 & x \\ 4 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & 5 \end{vmatrix} = 0$, $\begin{vmatrix} 2 & x+2 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 5 & -3 & x \end{vmatrix} = 0$.

4. Найти решение уравнений: $(1 + i)x + (2 + i)y = 5 + 3i$;

   $(3 - y + x)(1 + i) + (x - y)(2 + i) = 6 - 3i$.

5. Решить квадратные уравнения:

$x^2 - 4x + 13 = 0$; $x^2 + 3x + 4 = 0$; $x^2 + 2x + 2 = 0$; $2{,}5\,x^2 + x + 1 = 0$.

6. Найти суму, разность, произведение и частное комплексных чисел z_1 и z_2, изобразить геометрически данные числа и результаты операций:

   $z_1 = -2 + i$, $z_2 = 3 + (-1)i$; $z_1 = 2 + (-1)i$, $z_2 = 0 + 2i$; $z_1 = 2 + (-2)i$, $z_2 = -1 + i$.

7. Найти модуль и аргумент следующих комплексных чисел:

$z = \sqrt{3} - i$, $z = -5 - 5i\sqrt{3}$, $z = 1 + i$.

8. Представить комплексные числа в тригонометрической форме: $z = 3 - 3i$, $z = -\frac{3}{2} + 3i\frac{\sqrt{3}}{2}$,

$z = 2 - 2i\sqrt{3}$.

9. Вычислить $|z|$, $\arg(z)$, если $z = \frac{1 - i}{\sqrt{3} + i}$ и записать z в тригонометрической форме.

10. Доказать, что: $\left(\frac{1 + i\,\mathrm{tg}(\alpha)}{1 - i\,\mathrm{tg}(\alpha)}\right)^n = \frac{1 + i\,\mathrm{tg}(n\alpha)}{1 - i\,\mathrm{tg}(n\alpha)}$.

11. Извлечь корень из комплексного числа: $\sqrt[4]{i}$, $\sqrt[4]{1}$, $\sqrt[5]{-1 + i}$.

12. Найти тригонометрическую и алгебраическую форму для чисел:

$z = 2e^{\pi i/4}$; $z = 3e^{\pi i}$; $z = e^{2 + 3i}$.

13. Доказать, что последовательность: $3^{\sqrt{n}}$ - бесконечно большая; $(-1)^{n+1} n$ - бесконечно большая; $\frac{(-1)^n 2}{\sqrt[5]{n} + 1}$ - бесконечно малая.

14. Найти пределы:

$\lim\limits_{n \to \infty}\left[\frac{2n^2 + n + 1}{2n^2 - 1}\right]$; $\lim\limits_{n \to \infty}\left[\frac{2n^3 + 4}{n^2 + 5}\right]$; $\lim\limits_{n \to \infty}\left(\frac{n}{5n + 11} + \frac{\cos n}{10n}\right)$; $\lim\limits_{n \to \infty}(\sqrt{n + 1} - \sqrt{n})$;.

15. Найти пределы:

$\lim\limits_{n \to \infty}\left[\left(\frac{n}{n + 1}\right)^n\right]$; $\lim\limits_{n \to \infty}\left[\left(1 + \frac{2}{n}\right)^{3n}\right]$; $\lim\limits_{n \to \infty}[n(\ln n - \ln(n + 2))]$; $\lim\limits_{n \to \infty}(\sqrt{n^2 + n - 1} - \sqrt{n^2 - n + 1})$; $\boxed{}$.

16. Используя определение доказать: $\lim\limits_{x \to 6}(2x - 5) = 7$; $\lim\limits_{x \to 0}[\cos(x)] = 1$; $\lim\limits_{x \to 2}(3x + 5) = 11$; $\lim\limits_{x \to 1}\left[\frac{x - 1}{\sqrt{x} - 1}\right] = 2$.

17. Найти пределы функций (не используя правило Лопиталя):

$\lim\limits_{x \to 5}\left[\frac{x^2 - 25}{x - 5}\right]$; $\lim\limits_{x \to 1}\left[\frac{\sin(3x)}{x}\right]$; $\lim\limits_{x \to \infty}\left[\frac{x^2 + 2x + 3}{2x^2 + 3x + 4}\right]$; $\lim\limits_{x \to \infty}\left[\frac{5x^3 - 7x}{1 - 2x^3}\right]$; $\lim\limits_{x \to 3}\left[\frac{9 - x^2}{\sqrt{3x} - 3}\right]$;.

18. Найти пределы функций (не используя правило Лопиталя):

$\lim\limits_{x \to \infty}\left[\frac{(x^2 + 1)^{50}}{(x + 1)^{100}}\right]$; $\lim\limits_{x \to \infty}\left(\sqrt{1 + x^2} - x\right)$; $\lim\limits_{x \to \infty}\left|x - \sqrt{x^2 + x + 1}\right|$; $\lim\limits_{x \to 0}\left[\frac{\sin(4x)}{\sin(5x)}\right]$;.

19. Найти пределы функций (не используя правило Лопиталя):

$\lim\limits_{x\to\infty}\left[\dfrac{x+3}{2x^2+3x+4}\right]$; $\lim\limits_{x\to\infty}\left[\dfrac{2x-3}{x^2+2}\right]$; $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\left[\dfrac{\sin(x)-\cos(x)}{\cos(2x)}\right]$; $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+4x}-x\right)$;.

20.Найти пределы функций (не используя правило Лопиталя): $\lim\limits_{x\to-1}\left[\dfrac{x^2-x-2}{x^3+1}\right]$;

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+3x+1}-\sqrt{x^2-3x-4}\right)$; $\lim\limits_{x\to\infty}\left[\dfrac{x^3+5}{x^2+3}\right]$; $\lim\limits_{x\to\infty}\left[\dfrac{2x^3+4}{x^2+5}\right]$;.

21.Определить при $x\to 0$ порядки бесконечно малых функций относительно бесконечно малой функции *x*: $x\sin(x)$; $x^2\cos(x)$; $x\ln(1+2x)$; $\operatorname{tg}(x)-\sin(x)$; $\dfrac{x^5}{x^7+1}\arcsin(x)$; $\ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$.

22. Найти производные функций:

$y=\ln\left[\ln\left(\sqrt{x}\right)\right]$; $y=\sqrt{x}e^{\sqrt{x}}$; $y=\log_5\cos(7x)$; $y=e^{\cos(x)}$; $y=\sqrt[7]{x^2}$.

23.Найти производные функций: $y=x^2e^{-x}$; $y=e^{1/\ln(x)}$; $y=\ln[\arccos(2x)]$; $y=\operatorname{tg}[\sin(\cos(x))]$;

$y=\dfrac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}$; $y=\dfrac{1+\sin(2x)}{1-\sin(2x)}$.

24. Найти дифференциалы функций:

$y=\sin^3(2x)$; $y=\ln(\sin\sqrt{x})$; $y=2^{-x^2}$; $y=x\ln(x)$.

25. Найти производные третьего порядка:

$y=\operatorname{arctg}(x/2)$; $y=xe^{-x}$; $y=e^x\cos x$.

26.Найти производные n-го порядка:

$y=\ln(x)$; $y=\sin(3x)$; $y=e^{x/2}$; $y=2^{3x}$.

27.Найти дифференциалы указанного порядка: $y=\sqrt{x-1}$, d^4y; $y=\cos(2x)$, d^2y; $y=4x^5-7x^2+3$, d^2y; $y=\sin^2(x)$, d^3y.

28. Найти производные первого и второго порядков для функций:

$x=t^2$, $y=t^3/3-t$; $x=e^{2t}$, $y=e^{3t}$; $x=t^2$.

29. Найти пределы по правилу Лопиталя:

$\lim\limits_{x\to0}\left[\dfrac{1-\cos x}{x^2}\right]$; $\lim\limits_{x\to0}\left[\dfrac{e^x-1}{x}\right]$; $\lim\limits_{x\to1}\left[\dfrac{x^3-3x^2+2}{x^3-4x^2+3}\right]$; $\lim\limits_{x\to0+}\left[\dfrac{\ln(x)}{1/x}\right]$.

30. Найти пределы по правилу Лопиталя:

$\lim\limits_{x\to\infty+}\left[\dfrac{e^x}{x^2}\right]$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\dfrac{\ln(x)}{x}\right]$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[xe^{-x}\right]$; $\lim\limits_{x\to0}[x\sin(x)]$.

31. Разложить многочлен $P(x) = x^5 - 2x^4 + x^3 - x^2 + 2x - 1$ по степеням $x - 1$ по формуле Тейлора.

32. Разложить по формуле Маклорена: $f(x) = e^x$; $f(x) = \cos x$; $f(x) = \operatorname{tg} x$ (до x^3 включительно).

33. Исследовать функции и построить графики: $f(x) = \frac{x^2+1}{x-1}$; $f(x) = \frac{\ln(x)}{x}$; $f(x) = x^2 e^{-x}$.

4.4. ПРИМЕРНЫЕ КОНТРОЛЬНЫЕ РАБОТЫ

Контрольная работа №1

Вариант 1

1. Найти матрицу X, если $2*\begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} + X = 3*\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 8 & 4 \end{pmatrix}$

2. Найти произведение матриц A и B, если $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 5 & 2 \\ 3 & 5 \\ 6 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$.

3. Решить систему матричных уравнений $\begin{cases} X - Y = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \\ X + Y = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 7 \end{pmatrix} \end{cases}$.

4. Вычислить определитель

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 & 3 & 5 \\ 3 & 3 & -2 & -1 \\ 5 & 4 & -2 & -1 \\ -5 & -1 & 5 & 5 \end{vmatrix}$$

5. Решить систему уравнений:

а) $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 4, \\ x_1 + x_2 - 2x_3 = 2, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 6. \end{cases}$ б) $\begin{cases} x + 3y - z = 0 \\ x - 7y + z = 0 \\ x - 3y - 2z = 0 \end{cases}$

6. Найти общее решение неоднородной системы, используя фундаментальную систему решений соответствующей однородной:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 - x_4 + x_5 = 1, \\ x_1 - x_2 + x_3 + x_4 - 2x_5 = 0, \\ 4x_1 + 5x_2 - 5x_3 - 5x_4 + 7x_5 = 3, \\ 3x_1 + 3x_2 - 3x_3 - 3x_4 + 4x_5 = 2. \end{cases}$$

Вариант 2

1. Найти матрицу X, если $X - 3*\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 8 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$.

2. Найти произведение матриц A и B, если

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

3. Решить систему матричных уравнений:

$$\begin{cases} X - Y = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 0 \end{pmatrix} \\ X + 2Y = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \end{cases}$$

4. Вычислить определитель: $\begin{vmatrix} 3 & 7 & 5 & 3 \\ 4 & -2 & -3 & 5 \\ -2 & 2 & 1 & -2 \\ 5 & -4 & 4 & 3 \end{vmatrix}$

5. Решить систему уравнений:

а) $\begin{cases} -x_1 - x_2 + x_3 = 0, \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 = 1, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 1. \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x + 3y - z = 0 \\ x + y + z = 0 \\ 5x - 3y - z = 0 \end{cases}$

6. Найти общее решение неоднородной системы, используя фундаментальную систему решений соответствующей однородной:

$$\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = 1, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 - 2x_5 = 1, \\ 4x_1 - 10x_2 + 5x_3 - 5x_4 + 7x_5 = 1, \\ 2x_1 - 14x_2 + 7x_3 - 7x_4 + 11x_5 = 1. \end{cases}$$

Контрольная работа №2

Вариант 1

1. Даны векторы $\vec{a} = 4\vec{i} + 3\vec{k}, \vec{b} = -\vec{i} + 3\vec{j} + 2\vec{k}, c = 3\vec{i} + 5\vec{j}$.

   Необходимо: а) вычислить смешанное произведение трех векторов $\vec{a}, \vec{b}, 5\vec{c}$; б) найти модуль векторного произведения векторов $3\vec{c}, \vec{b}$; в) вычислить скалярное произведение двух векторов $\vec{a}, 3\vec{b}$; г) проверить, будут ли коллинеарными или ортогональными два вектора $\vec{a}, \vec{b}$; д) проверить, будут ли компланарны три вектора $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$.
2. Даны вершины тетраэдра A(1,2,-3,B(4,-2,1),C(2,1,3),D(3,-4,1). Найти объем тетраэдра.
3. Привести уравнение кривой второго порядка $x - 2y^2 + 4y - 3 = 0$ к каноническому виду и найти точки пересечения ее с прямой $x - 2y + 1 = 0$. Построить графики кривой и прямой.
4. Построить кривую $x^2 + y^2 - 4x - 2y - 18 = 0$.

5. Найти точку пересечения прямой $\frac{x-4}{2}=\frac{y-6}{1}=\frac{z+3}{-1}$ и плоскости $\alpha: x+3y+z-3=0$ и угол между ними.

Вариант 2

1. Даны векторы $\vec{a}=2\vec{i}-3\vec{j}, \vec{b}=-2\vec{i}+\vec{j}-3\vec{k}, c=3\vec{j}+2\vec{k}$.

Необходимо: а) вычислить смешанное произведение трех векторов $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$; б) найти модуль векторного произведения векторов $\vec{c},4\vec{b}$; в) вычислить скалярное произведение двух векторов $3\vec{a},\vec{b}$; г) проверить, будут ли коллинеарными или ортогональными два вектора $\vec{a},\vec{c}$; д) проверить, будут ли компланарными три вектора $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$.

2. Даны вершины тетраэдра A(3,-1,4,),B(-3,2,4),C(1,1,1),D(2,-1,2). Найти объем тетраэдра.
3. Привести уравнение кривой второго порядка к каноническому виду и найти точки пересечения ее с данной прямой. Построить графики кривой и прямой. $2x^2-4x+y+3=0$, $2x-y-1=0$.
4. Построить кривую $x^2+y^2+8x-2y-20=0$.
5. Найти точку пересечения прямой $\frac{x-1}{1}=\frac{y+5}{2}=\frac{z-1}{-1}$ и плоскости $\alpha: 12x+9y+3=0$ и угол между ними.

Контрольная работа №3

Вариант 1

1) Вычислить производную $y'(x)$:

а) $y=\frac{x^6+x^3-2}{\sqrt{1-x^3}}$, б) $y=\ln\frac{a^2+x^2}{a^2-x^2}$, в) $y=(ctg3x)^{2e^x}$.

2) Составить уравнение касательной и нормали к данной кривой в точке x_0:

$y=\frac{x}{x^2+1}, x_0=1.$

3) а) Найти наибольшее и наименьшее значения функции на заданном промежутке:

$y=\frac{4}{\sqrt{x^2+16}}; x\in\left[2\sqrt{5};8\right].$

б) В какой круг можно вписать прямоугольник наибольшей площади, с периметром, равным 56 см?

4) Построить график функции: а) $y = \dfrac{1}{1 + x}$; б) $y = \dfrac{2x^2 - 1}{\sqrt{x^2 - 2}}$; в) $y = 3\ln\dfrac{x}{x - 3} - 1$.

5). Найти пределы функций, применяя правило Лопиталя:

а) $\lim\limits_{x \to 1}\left(\dfrac{x}{x - 1} - \dfrac{1}{\ln x}\right)$, б) $\lim\limits_{x \to +\infty}\dfrac{x^2}{e^x}$.

6) Вычислить приближенно с помощью дифференциала: $y = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$, $x = 4{,}16$.

Вариант 2

1) Вычислить производную $y'(x)$.

$$\text{а) } y = \frac{2x^2 - x - 1}{3\sqrt{2 + 4x}}, \text{ б) } y = \left(\arcsin\frac{x}{3}\right)^2, \text{ в) } y = (tgx)^{4e^x}.$$

2) Составить уравнение касательной и нормали к данной кривой в точке x_0: $y = \dfrac{1 + 3x^2}{3 + x^2}, x_0 = 1$

.

3) а) Найти наибольшее и наименьшее значения функции на заданном промежутке.

$$y = tgx + ctg2x; x \in \left[\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{3}\right].$$

б) Найти длины сторон прямоугольника наибольшей пощади, периметр которого 72 см.

4) Построить график функции: а) $y = \sqrt{\dfrac{1 - x}{x}}$; б) $y = \dfrac{3x^2 - 7}{2x + 1}$; в) $y = \dfrac{e^{2 - x}}{2 - x}$.

5). Найти пределы функций, применяя правило Лопиталя:

а) $\lim\limits_{x \to 1}(1 - x)tg\dfrac{\pi x}{2}$, б) $\lim\limits_{x \to 0}(ctgx)^{\sin x}$.

6) Вычислить приближенно с помощью дифференциала: $y = \sqrt[5]{x^2}$, $x = 1{,}03$.

Контрольная работа №4

Вариант 1

1. Записать число в тригонометрической и показательной форме: $z = \left(\sin\dfrac{6\pi}{5} + i\left(1 + \cos\dfrac{6\pi}{5}\right)\right)^5$

.

2. Представить число в алгебраической форме: $z = \dfrac{(2i)^7}{\left(-\sqrt{2} + i\sqrt{2}\right)^6}$.

3. При каких значениях $x \in R, y \in R$ числа $z_1 = x^2 + yi - 5 - \dfrac{7}{i}$ и $z_2 = -y - x^2 - 4i$ будут: а) равными; б) сопряженными; в) противоположными?

4. Найдите $\sqrt[3]{-4+i\sqrt{48}}$.

5. Решить уравнение: а) $x^2-4x+20=0$; б) $z^2-2z+5=0$,

в) $|z|=2|\bar{z}|-|z+1|$.

6. Решите систему уравнений $\begin{cases} |z+1|=|z+2|, \\ |3z+9|=|5z+10i|. \end{cases}$

7. Какое множество точек комплексной плоскости задается условием $\lg|z-10i|<1$?

Вариант 2

1. Записать число $z=(tg2-i)^4$ в тригонометрической форме.

2. Представить число $z=\left(\dfrac{\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}}{2i}\right)^3$ в алгебраической форме.

3. При каких значениях $x\in R, y\in R$ числа $z_1=x=\dfrac{y^2}{i}-4+5i$ и $z_2=y^2+1-3xi$ будут:

а) равными; б) сопряженными; в) противоположными?

4. Найти все значения корня $\sqrt[4]{-1-i\sqrt{3}}$.

5. Решить уравнение: а) $x^2-5x+13=0$; б) $z^2-2iz-5=0$,

в) $|z|i-4z=\bar{z}+10$.

6. Решите систему уравнений $\begin{cases} z_1+2z_2=1+i, \\ 3z_1+iz_2=2-3i. \end{cases}$

7. Какое множество точек комплексной плоскости задается условием $|z+2|<|z-2|$?

5. ОБЩИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ПО ИЗУЧЕНИЮ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ДИСЦИПЛИН

Чтение учебника

1. Изучая материал по учебнику, следует переходить к следующему вопросу только после правильного понимания предыдущего, проделывая на бумаге все вычисления (в том числе, и те, которые из-за их простоты в учебнике опущены), а также воспроизводя имеющиеся в учебнике чертежи и схемы.

2. Особое внимание следует обратить на определение основных понятий. Студент должен подробно разобрать примеры, которые поясняют такие определения, и уметь привести аналогичные примеры самостоятельно.

3. Необходимо помнить, что каждая теорема состоит из предположений и утверждения. Все предположения должны обязательно использоваться в доказательстве. Нужно добиваться точного представления о том, в каком месте доказательства использовано каждое из предположений теоремы. Полезно составить схемы доказательства сложных теорем. Правильному пониманию многих теорем помогает разбор примеров математических объектов, обладающих и не обладающих свойствами, указанными в предположениях и утверждениях теорем.

4. При изучении материала по учебнику полезно вести конспект, в который рекомендуется выписывать определения, формулировки теорем, формулы, уравнения и т. п. На полях конспекта следует отмечать вопросы, выделенные для письменной или устной консультации с преподавателем.

5. Письменное оформление работы студента имеет исключительно важное значение. Записи в конспекте должны быть сделаны аккуратно. Хорошее внешнее оформление конспекта по изученному материалу не только приучит студента к необходимому в работе порядку, но и позволит ему избежать многочисленных ошибок, которые происходят из-за небрежных, беспорядочных записей.

6. Выводы, полученные в виде формул, рекомендуется в конспекте подчеркивать или обводить рамкой, чтобы при перечитывании конспекта они выделялись и лучше запоминались. Опыт показывает, что многим студентам помогает в работе составление листа, содержащего важнейшие и наиболее часто употребляемые формулы и теоремы курса. Такой лист не только помогает запомнить формулы и теоремы, но и может служить постоянным справочником для студента.

Решение задач

1. Освоение материала дисциплины невозможно без умения решать практические задачи математическими методами. Поэтому чтение учебника должно сопровождаться решением задач, для чего рекомендуется завести специальную тетрадь.

2. При решении задач нужно обосновывать каждый этап решения исходя из теоретических положений дисциплины. Если студент видит несколько путей решения задачи, то он должен сравнить их и выбрать из них самый удобный. Полезно до начала вычислений составить краткий план решения.

3. Решения задач и примеров следует записывать подробно, вычисления должны располагаться в строгом порядке, при этом рекомендуется отделять вспомогательные вычисления от основных. Ошибочные записи следует не стирать и не замазывать, а зачеркивать. Чертежи можно выполнять от руки, но аккуратно и в соответствии с данными условиями. Если чертеж требует особо тщательного выполнения (например, графическая проверка решения, полученного путем вычислений), то следует пользоваться линейкой, транспортиром, циркулем и указывать масштаб на координатных осях либо готовить чертежи при помощи компьютера.

4. Решение каждой задачи должно доводиться до окончательного ответа, которого требует условие.

5. Полученный ответ следует проверять способами, вытекающими из существа данной задачи. Полезно решить задачу несколькими возможными способами и сравнить полученные результаты.

6. Решение задач определенного типа нужно продолжать до приобретения твердых навыков в их решении.

7. При решении задач следует особое внимание уделять экономическому содержанию задачи, итоговых и промежуточных результатов и используемых при решении задачи формул, теорем и методов.

Самопроверка

1. После изучения определенной темы по учебнику и решения достаточного количества соответствующих задач студенту рекомендуется по памяти воспроизвести определения, выводы формул, формулировки и доказательства теорем, проверяя себя каждый раз по учебнику. Вопросы для самопроверки, приведенные в настоящем пособии, должны помочь студенту в таком повторении, закреплении и проверке прочности усвоения изученного материала. В случае необходимости нужно еще раз внимательно разобраться в материале учебника и перерешать задачи.

2. Иногда недостаточность усвоения того или иного материала выясняется только при изучении дальнейшего материала. В этом случае нужно вернуться назад и повторить плохо усвоенный раздел.

3. Важным критерием усвоения теории является умение решать задачи на пройденный материал. Однако здесь следует предостеречь студента от весьма распространенной ошибки, состоящей в том, что благополучное
решение задач воспринимается им как признак усвоения теории. Часто правильное решение задачи получается в результате механического применения заученных форм без понимания существа дела. Можно сказать, что решение задач является необходимым, но недостаточным условием хорошего знания теории.

Использование вычислительной техники

При решении задач полезно использовать вычислительную технику. Компьютер может помочь как при проведении простейших вычислений и оформления графических результатов, так и при решении сложных комплексных задач, которые без применения компьютера являются очень трудоемкими. Мы советуем студенту ориентироваться на распространенный пакет Microsoft Excel, и использовать его при изучении всех разделов математики.

Консультации

1. Если в процессе работы над изучением теоретического материала или при решении задач у студента возникают вопросы, разрешить которые самостоятельно не удается (неясность терминов, формулировок теорем, отдельных задач и др.), то он может обратиться к преподавателю для получения от него указаний в виде письменной или устной консультации.

2. В своих запросах студент должен точно указать, в чем он испытывает затруднение. Если он не разобрался в теоретических объяснениях, в доказательстве теоремы или в выводе формулы по учебнику, то нужно указать название учебника, его авторов, год издания, номер страницы, где рассмотрен затрудняющий студента материал и описать, что именно затрудняет студента. Если студент испытывает затруднение при решении задачи, то следует указать характер этого затруднения, привести предполагаемый план решения.

3. За консультацией следует обращаться и в случае, если возникнут сомнения в правильности ответов на вопросы для самопроверки.

Расчетно - графические работы

1. При изучении дисциплины «Математика» студент должен выполнить ряд расчетно-графических работ, главная цель которых – оказать помощь студенту в его работе. Рецензии на эти работы позволяют студенту судить о степени усвоения им соответствующего раздела курса, указывают на имеющиеся у него пробелы, на желательное исправление дальнейшей работы, помогают сформулировать вопросы для консультации с преподавателем.

2. Не следует приступать к выполнению контрольного задания до изучения теоретического материала, соответствующего данному заданию, и решения достаточного количества задач по этому материалу. Опыт показывает, что чаще всего неумение решить ту или иную задачу контрольного задания вызывается тем, что студент не выполнил это требование.

3. Расчетные работы должны выполняться самостоятельно. Выполненная не самостоятельно работа не дает возможности преподавателю указать студенту на недостатки в его работе, в усвоении им учебного материала, в результате чего студент не приобретает необходимых знаний и может оказаться неподготовленным к экзамену.

4. Расчетно-графические работы выполняются аккуратно на одной стороне листа стандартного формата А 4, либо рукописным способом, либо компьютерным (для компьютерного оформления работы рекомендуется использование пакета Microsoft Word). В любом случае необходимо приложение необходимых распечаток результатов работы компьютерных программ, которые требовалось использовать при выполнении заданий. Графики строятся либо при помощи компьютера (рекомендуется использование пакета Microsoft Excel), либо от руки (черными или цветными карандашами средней твердости на обычной или миллиметровой бумаге). Листы с текстом заданий и графики должны быть сшиты.

5. В работу должны быть включены все требуемые задания строго по положенному варианту. Работы, содержащие задания не своего варианта, не засчитываются.

6. Перед решением каждой задачи необходимо полностью выписать ее условие. В том случае, когда формулировка задачи одна для всех вариантов, а различаются лишь исходные данные, необходимо, переписывая общее условие задачи, заменять общие данные конкретными, соответствующими своему варианту.

7. Текст работы должен содержать все необходимые расчеты и пояснения. Обязательны оглавление и сквозная нумерация всех листов.

8. Работа сдается преподавателю до защиты для проверки. При указании рецензента на требуемую переработку все необходимые дополнения студент прилагает к первоначальному варианту работы, не делая в нем никаких исправлений. На защите студент должен

показать умение ставить и исследовать конкретные финансовые задачи, которые он решал при выполнении контрольных заданий.

9. Прорецензированные контрольные задания вместе со всеми исправлениями и добавлениями, сделанными по требованию рецензента, следует сохранять. Без предъявления преподавателю прорецензированного контрольного задания студент не допускается к сдаче экзамена.

Лекции и практические занятия

Студенты очной и заочной формы обучения изучают дисциплину «Математика» с помощью посещения лекций, работе на практических занятиях и самостоятельной работы. Темп лекций и практических занятий одинаков (2 ч. лекций и 2 ч. практических занятий в неделю для студентов очной формы обучения и по одному часу — для студентов, обучающихся по заочной форме). После изучения теоретического материала на лекциях этот материал закрепляется на практических занятиях с помощью решения задач из учебников и учебных пособий, приведенных в списке рекомендованной литературы. При этом студент должен систематически (перед каждым занятием) повторять изученный теоретический материал и регулярно решать самостоятельно задачи, рекомендованные преподавателем. Если для студентов очной лекции и практические занятия являются основной формой обучения и на них подробно рассматривается большая часть теоретического материала и разбирается большое количество задач, то студент-заочник эти виды работ должен выполнять самостоятельно.

Вместе с тем, для заочников организуются установочные лекции и практические занятия. Они носят преимущественно обзорный характер. Их цель — обратить внимание на цели и задачи дисциплины, ее место в профессиональной деятельности специалиста, заинтересовать студента изучением дисциплины, обратить внимание на схему построения курса или некоторых его наиболее важных разделов. Кроме того, на этих занятиях могут быть разобраны вопросы, изложение которых в рекомендуемых учебниках и учебных пособиях отсутствует или является недостаточно полным.

Таким образом, лекции и практические занятия не заменяют собой самостоятельной работы студента, а призваны оказать студенту помощь в его самостоятельной работе!

Экзамен

На экзамене выясняется усвоение всех теоретических и прикладных вопросов дисциплины, а также умение применять полученные знания к решению задач. Определения, теоремы, формулы должны формулироваться точно и с пониманием существа дела, задачи должны решаться безошибочно и уверенно, всякая письменная и графическая работа должна быть аккуратной и четкой. Только при выполнении этих условий знания студента могут быть признаны удовлетворяющими требованиям, предъявляемым программой.

При подготовке к экзамену учебный материал рекомендуется повторить по учебнику и конспекту. Экзамен проводится в устно-письменной форме, каждый студент получает в билете три теоретических вопроса (их список приведен в разделе 5) и 6 задач. Подготовку к ответу на билет следует начинать с решения задачи, так успешное решение задачи является наиболее важным при сдаче экзамена; без ее решения работа студента признается неудовлетворительной. Затем следует подробно ответить на теоретические вопросы билета. На подготовку теоретических вопроса студенту дается не более 1 ч. На решения задач 1,5 ч. После этого студент отвечает преподавателю в устной форме по подготовленному билету. Преподаватель может предложить студенту дополнительные вопросы и задачи, как относящиеся непосредственно к материалу билета, так и из других разделов дисциплины.

Организация самостоятельной работы студентов

Студентам с самого начала учебного года нужно настроиться на серьезную повседневную работу, не откладывая составить расписание занятий в институте (чтобы оно постоянно было на виду). Составить режим работы дома: когда работать, когда отдыхать, когда по дому помогать и заниматься уборкой помещений. Нельзя позволять себе откладывать выполнение текущей работы: написание рефератов, выступлений, выполнение контрольных работ, подготовку к лекциям, практическим и лабораторным занятиям.

Потом чаще всего не будет времени: оно будет бездарно упущено. При чтении лекций, конспектировании сразу учитесь думать, анализировать, выбирать. Старайтесь понять, а не запомнить материал лекции. Всякое настоящее образование добывается путем самообразования. Все, что делаешь и чего добиваешься самолично по своей воле и желанию - остается в голове всего крепче.

Методика формирования результирующей оценки знаний по математики

Результатирующая оценка учитывает:

1) работу студента в течение всего периода изучения дисциплины;
2) получается на основе обобщения отдельных видов работы: работа в течении всего

семестра; экзаменационная оценка за ответ по теории; экзаменационная оценка за выполнение практических заданий.

3) все оценки выставляются по пятибалльной системе;

4) для оценки относительной важности отдельных видов контроля вводиться их весовые коэффициенты:

0,4 - для работы в течении семестра;

0,4 - для экзаменационной оценки за теорию;

0,2 - для экзаменационной оценки по практике.

Дробные значения оценки округляться до целых единиц.

Критерии оценок

- ОТЛИЧНО - полно раскрыто содержание вопросов в объеме программы; четко и правильно даны определения; корректно использованы научные термины; для доказательства использованы различные теоретические знания; ответ самостоятельный и исчерпывающий, без наводящих вопросов.
- ХОРОШО - раскрыто основное содержание вопросов; в основном правильно даны определения и понятия, ответ самостоятельный, но допущены нарушения последовательности изложения, небольшие неточности при использовании научных терминов или выводы, которые исправляться по дополнительным вопросам экзаменатора.
- УДОВЛЕТВОРИТЕЛЬНО - усвоено основное содержание учебного материала, но изложение не всегда последовательна; определение понятий нечеткое; допущены ошибки при изложении, в использовании научных терминов, определений.
- НЕУДОВЛЕТВОРИТЕЛЬНО - ответ неправильный, не раскрыто основное содержание программы, допущены грубые ошибки в определении понятий, при использовании терминологии.

Формы текущего контроля знаний студентов

Результативность работы обеспечивается системой контроля, которая при очной форме обучения включает опрос студентов на практических занятиях, проверку домашних заданий, контрольные работы, выполнения и защита РГР, проведение коллоквиумов, зачеты и экзамены. Каждое практическое занятие рекомендуется начинать с проверки домашнего задания, опроса по теоретическому материалу (10-15 мин.). На лекциях и практических занятиях рекомендуется проведение мини контрольных работ. Данная программа предусматривает в течении семестра проведение двух плановых контрольных работ и двух индивидуальных заданий (РГР). Контроль за выполнение РГР осуществляется в 2 этапа: проверка письменных отчетов и защита заданий в письменной или устной форме. Индивидуальные задания студентами выполняется по большинству тем курса. Выполнение каждого задания требует не менее 10 часов самостоятельной работы студентов.

6. МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ПРОФЕССОРСКО-ПРЕПОДАВАТЕЛЬСКОМУ СОСТАВУ

6.1. Самостоятельная работа

Самостоятельная работа студентов (СРС) - это активны формы индивидуальной и коллективной деятельности, направленные на закрепление материала формирование умений и навыков быстро решать поставленные задачи. СРС предполагает не пассивное «поглощение» готовой информации, а ее поиск и творческое усвоение. Самостоятельная работа призвана подготовить студента к самостоятельной деятельности в будущем.

Строго говоря, все, что не является лекцией, можно отнести к практическим формам обучения. Главная функция практических занятий — организация и проведение отработки (интериоризация) учебного материала и формирование у студентов умений и навыков по применению знаний на практике, самостоятельного их приобретения и углубления.

Занятия такого типа, как правило, состоят из двух частей. Сперва проводится подготовка студентов к самостоятельной работе, затем они самостоятельно решают поставленные задачи. Эта форма занятий обеспечивает индивидуализацию обучения и способствует активизации познавательной деятельности студентов. Занятия должны быть организованны таким образом, чтобы все без исключения студенты были заняты решением посильной для них познавательной задачи. Значит, преподаватель должен хорошо знать (с позиции диагностики) индивидуальные особенности студентов. Желательно так организовать занятия, чтобы они содействовали предъявлению достаточно высоких требований к наиболее подготовленным студентам, обеспечивали их максимальное интеллектуальное развитие и в то же время создавали условия для успешного приобретения знаний и умений менее подготовленными студентами.

6.2. Аудиторные практически занятия

Преподаватель спрашивает основной теоретический материал, относящийся к данной теме либо опросом каждого студента, либо организацией математического диктанта, либо опросом доказательства теорем, вывода формул. После чего педагог предлагает студентам проделать ряд упражнений для усвоения и закрепления рассматриваемого вопроса. Студенты работают под наблюдением преподавателя, который проверяет результаты деятельности и указывает ошибки.

Все виды работы на практическом занятии оцениваются по пятибалльной системе.

Консультация — форма учебного занятия, в процессе которого студент получает ответы от преподавателя на конкретные вопросы или пояснения по соответствующим теоретическим положениям или аспектам их практического применения.

Консультация может быть индивидуальной или групповой, в зависимости от учебной ситуации: индивидуальное занятие, выполняемое студентам, может потребовать индивидуальной консультации, теоретические вопросы по учебному предмету - соответственно групповой консультации.

7. ЛИТЕРАТУРА

7.1. Основная:

1. *Берман Г.Н.* Сборник задач по курсу математического анализа. – С.-П. Профессия, 2001.

2. *Беклемишев Д.В*. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. – М. Наука, 1984.

3. *Беклемишева Л.А. и др.* Сборник задач по аналитической геометрии и линейной алгебре. – М. Наука, 1987.

4. *Бугров Я.С., Никольский С.М.* Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии. – М. Наука, 1988.

5. *Бугров Я.С., Никольский С.М.* Дифференциальное и интегральное исчисление. – М. Наука, 1988.

6. *Бугров Я.С., Никольский С.М.* Дифференциальные уравнения. Кратные интегралы. Ряды. – М. Наука, 1985.

7. *Бугров Я.С., Никольский С.М.* Высшая математика. Задачи – М. Наука, 1987.

8. *Гмурман В.Е.* Теория вероятностей и математическая статистика. - М. Наука 1998.

9. *Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я.* Высшая математика в упражнениях и задачах. – М. Высш. шк., 1999.

10. *Клетеник Д.В.* Сборник задач по аналитической геометрии. – М. Наука, 1986.

11. *Краснов М.Л.,Киселев А.И., Макаренко Г.И.* Функции комплексного переменного. Операционное исчисление. Теория устойчивости. - М. Наука 1990.

12. *Краснов М.Л.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. – М. Наука, 1981.

13. *Кузнецов Л.А.* Сборник заданий по высшей математике. Типовые расчеты. М. Высш. шк., 1983.

14. *Кремер Н.Ш.* Теория вероятностей и математическая статистика. – М. Высш.шк. 2001.

15. *Лавров Л.А., Максимова Л.Л.* Задачи по теории множеств, математической логике и теории алгоритмов. – М. Высш. шк., 1983.

16. *Пискунов Н.С.* Дифференциальное и интегральное исчисление для втузов. – М. Наука, 1990.

17. *Чудесенко В.Ф.* Сборник заданий по специальным курсам высшей математики. Типовые расчеты. М. Высш. шк., 1983.

18. Сборник задач по математике для втузов. В 4-х частях.. *Под ред. А.В. Ефимова, Б.П. Демидовича.* М., Наука, 1993.

7.2. Дополнительная

19. *Агапов Г.И.* Задачник по теории вероятностей. – М. Высш. шк., 1986.

20. *Алексеев В.М.* Сборник задач по оптимизации: Теория, примеры, задачи. – М. Наука, 1984.

21. *Богданов Ю.С.,Мазаник С.А.,Сыроид Ю.Б.* Курс дифференциальных уравнений. – Минск, 1996.

22. *Боревич З.И.* Определители и матрицы. – М. Наука, 1988.

23. *Боровков А.А.* Математическая статистика. – М. Наука, 1984.

24. *Виноградова И.А.,Олехник С.Н., Садовничий В.А.* Математический анализ в упражнениях и задачах (Числовые и функциональные ряды) М. Факториал, 1996.

25. *Воробьев Н.Н.* Теория рядов. – М. Наука, 1986.

26. *Гусак А.А.* Высшая математика.- Минск, 1998.

27. *Гусятников. П. Б., Резниченко С.В.* Векторная алгебра в примерах и задачах. – М. Наука, 1985.

28. *Иванова В.М. и др.* Математическая статистика. – М. Высш. шк., 1986.

29. *Ильин В.А., Позднях Э.Г.* Аналитическая геометрия. – М. Наука, 1983.

30. *Ильин В.А., Позднях Э.Г.* Линейная алгебра. – М. Наука, 1983.

31. *Ильин В.А., Позднях Э.Г* . Основы математического анализа. – М. Наука, 1982.

32. *Кудрявцев Л.Д.* Курс математического анализа. – М. Наука, 1983.

33. Мантуров О.В. Курс высшей математике. – М. Высш. шк., 1986, 1991.

34. *Минорский В.П.* Сборник задач по высшей математике. – М. Наука, 1987.

35. *Морозов В.В. и др.* Исследование операций в упражнениях и задачах. – М. Высш. шк., 1986.

36. *Матвеев Н.М.* Сборник задач и упражнений по обыкновенным дифференциальным уравнениям. Санкт-Петербург. 2002.

37. *Никольский С.М.* Курс математического анализа. – М. Наука, 1983.

38. Орг О. Теория графов. – М. Наука, 1980.

39. *Плис А.И.* Лабораторный практикум по высшей математике. – М. Высш. шк., 1983.

40. *Прохоров А.В. и др.* Задачи по теории вероятностей. – М. Наука, 1986.

41. *Феденко.А.С.* Сборник задач по алгебре и аналитической геометрии. Минск,1999.

42. *Шевцов Г.С.* Линейная алгебра.- М. Гардарики, 1999.

43. *Шмелев П.А.* Терия рядов в задачах и упражнениях – М. Высш. шк., 1983.

44. *Эрроусмит Д., Плейс К.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. Качественная теория с приложениями. – М. Мир, 1986.

8. Карта обеспеченности дисциплины профессорско -преподавательским составом

Ф.И.О. должность по штатному расписанию	Какое образовательное учреждение профессионального образования окончил, специальность по диплому	Ученая степень и ученое звание (почетное звание)	Стаж научно педагогической работы			Основное место работы, долж-ность	Условия привлевчения к трудовой деятельности (штатный, совместитель (внутренний или внешний с указанием доли ставки), иное
			Всего	В т. ч. педагогический			
				Всего	В т. ч. по преподаваемой дисциплине		
3	4	5	6	7	8	9	10
Юрьева Т.А., ст.преподаватель	БГПИ, учитель математики	-	10	10	10	АмГУ, ОМиИ	Штатный
Голик А.В., ассистент	ДВГУ, математик	-	16	16	14	АмГУ, ОМиИ	Штатный
Костенко С.В., ст.преподаватель	МГПИ, учитель математики	-	15	15	11	АмГУ, ОМиИ	Штатный
Ермилова Н.А., доцент	Азербайджанский ГУ, инженер	-	11	11	11	АмГУ, ОМиИ	Штатный

СОДЕРЖАНИЕ