Министерство образования Российской Федерации
АМУРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
Факультет математики и информатики

М. Г. Ляпунова

Приложение определенных интегралов к решению задач геометрии и физики

Учебно-методическое пособие

Благовещенск
2000

ББК 22.161
Л 97

Печатается по решению
редакционно-издательского совета
факультета математики и информатики
Амурского государственного
университета

Ляпунова М.Г.

Приложение определенных интегралов к решению задач геометрии и физики: Учебно-методическое пособие. / Благовещенск: Амурский гос. ун-т, 2000.

В пособии даны краткие теоретические аспекты приложения определенных интегралов к решению некоторых задач геометрии и физики, приводятся решения многих наиболее типичных задач геометрии и физики на приложение определенного интеграла, а также составлены расчетные задания по данной теме.

Учебно-методическое пособие полезно студентам первого курса специальностей 010100, 010200, 010400 и преподавателям, работающим на первом курсе, при изучении темы «Приложения определенного интеграла».

Рецензенты: А.В. Миронов, кандидат физ.-мат. наук, профессор кафедры МАиМ АмГУ,
И.В. Квасова, ст. препод. кафедры математического анализа Благовещенского гос. пед. университета.

Глава I. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ПРИЛОЖЕНИЯ ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА

§1. Площадь плоской фигуры

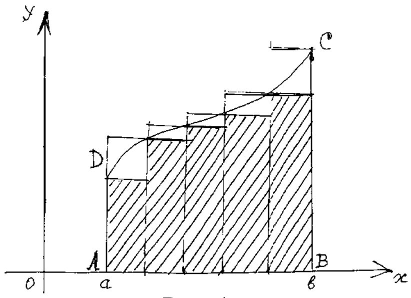

Рис. 1.

Вначале в строгом изложении рассмотрим задачу об определении площади криволинейной трапеции ABCD (рис.1). Эта фигура ограничена сверху кривой DC, являющейся графиком функции $y = f(x)$, где *f(x)* - положительная и непрерывная на отрезке $[a,b]$ функция, снизу – отрезком AB оси O*x*, а с боков –двумя ординатами AD и BC (каждая из которых может свестись к точке).

Разобьем отрезок $[a,b]$ на n частей точками:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_i < x_{i+1} < ... < x_n = b .$$

Обозначим через m_i и M_i соответственно наименьшее и наибольшее значения функции $f(x)$ на i-м отрезке $[x_i, x_{i+1}]$ (i=0,1,…,n-1) и составим суммы Дарбу

$$s = \sum_{i=0}^{n-1} m_i \Delta x_i \quad , \quad S = \sum_{i=0}^{n-1} M_i \Delta x_i \ .$$

Они представляют собой площади ступенчатых фигур, составленных соответственно из входящих и выходящих прямоугольников (см. рис. 1). Поэтому *s<P<S*. Но при стремлении к нулю $\lambda_\theta = \max_i \{\Delta x_i\}$ обе суммы имеют своим пределом интеграл $\int_a^b f(x)dx$, следовательно, искомая площадь равна

$$P = \int_a^b f(x)dx . \qquad (1)$$

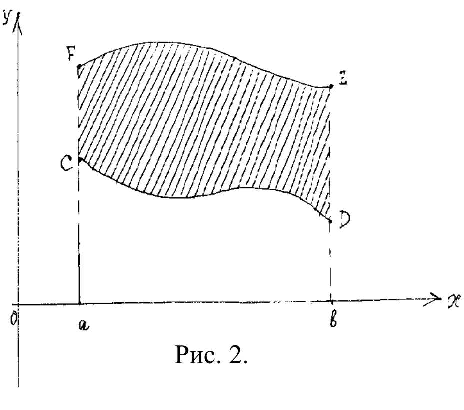

Рис. 2.

Если криволинейная трапеция CDEF ограничена и снизу, и сверху графиками функции (рис.2), уравнения которых $y_1 = f_1(x)$ и $y_2 = f_2(x)$ ($a \le x \le b$), то, рассматривая ее как разность двух фигур ABEF и ABCD, выразим площадь названной трапеции в виде:

$$P = \int_a^b \left(f_2(x) - f_1(x)\right)dx . \qquad (2)$$

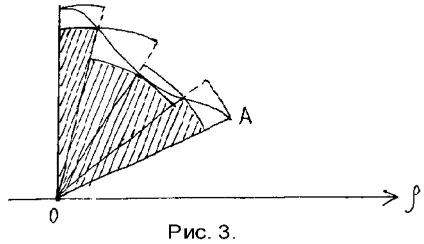

Рис. 3.

Пусть теперь дан сектор AOB (рис.3), ограниченный кривой AB, заданной уравнением $\rho = \rho(\theta)$ $(\alpha \le \theta \le \beta)$, и двумя радиус-векторами OA и OB (каждый из которых может свестись к точке). Пусть $\rho = \rho(\theta)$ непрерывная функция на отрезке $[\alpha,\beta]$. Разобьем отрезок $[\alpha,\beta]$ точками

$$\alpha = \theta_0 < \theta_1 < \ldots < \theta_i < \theta_{i+1} < \ldots < \theta_n = \beta$$

и проведем соответствующие этим углам радиусы-векторы. Обозначим через μ_i и M_i наименьшее и наибольшее значения функции $\rho(\theta)$ на каждом из элементарных отрезков $[\theta_i, \theta_{i+1}]$ (i=0,1,…,n-1), круговые секторы, описанные этими радиусами, будут соответственно входящими и выходящими для фигуры (P).

Составим отдельно из входящих и выходящих секторов две фигуры, площади которых

$$\sigma = \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n-1}\mu_i^2\Delta\theta_i \text{ и } \Sigma = \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n-1}M_i^2\Delta\theta_i .$$

Эти суммы будут суммами Дарбу для интеграла $\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta \rho^2(\theta)d\theta$, при стремлении к нулю $\lambda_\theta = \max_i\{\Delta\theta_i\}$ обе суммы имеют пределом этот интеграл, а следовательно, площадь сектора

$$P = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta \rho^2(\theta)d\theta . \qquad (3)$$

Формула (1) может быть использована и в том случае, когда кривая, ограничивающая криволинейную трапецию, задана параметрически, т.е. уравнениями $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ ($t_0 \le t \le T$).

Произведя замену переменной в интеграле (1), получим (в предположении, что $x = a$ при $t=t_0$ и $x = b$ при $t=T$)

$$P = \int_{t_0}^{T} yx_t' dt = \int_{t_0}^{T}\psi(t)\cdot\varphi'(t)dt .$$

Если, например, при вычислении площади эллипса исходить из его параметрического представления $x = a\cdot\cos t$, $y = b\cdot\sin t$ и учесть, что x возрастает от $-a$ до a, когда t убывает от π до нуля, то найдем

$$P = 2\cdot\int_\pi^0 b\sin t\cdot(-a\sin t)dt = 2\pi ab\int_0^\pi \sin^2 t dt = \pi ab .$$

Мы вычислили площадь верхней половины эллипса и удвоили ее.

§2. Выражение длины дуги интегралом

Рассмотрим на плоскости кривую AB, заданную параметрическими уравнениями

$$x = \varphi(t),\ y = \psi(t)\ \ (t_0 \le t \le T),$$

где функции φ и ψ непрерывны на $[t_0,T]$ и на этом отрезке имеют непрерывные производные φ' и ψ'. Докажем, что кривая спрямляема при этих условиях и длина дуги выражается формулой

$$L=\int_{t_0}^{T}\sqrt{x_t'^2+y_t'^2}\,dt=\int_{t_0}^{T}\sqrt{[\varphi'(t)]^2+[\psi'(t)]^2}\,dt\,. \qquad (4)$$

Будем исходить из разбиения отрезка $[t_0,T]$ точками $t_0<t_1<t_2<...<t_i<t_{i+1}<...<t_n=T$ на части длины $\Delta t_i=t_{i+1}-t_i$. Этим значениям t отвечают вершины ломаной $A\ A_1A_2...B$, вписанной в дугу AB.

Положим $\varphi(t_i)=x_i\,,\psi(t_i)=y_i$, $(i=0,1,...,n)$, $\Delta x_i=x_{i+1}-x_i\,,\Delta y_i=y_{i+1}-y_i$. Длина $i-го$ звена A_iA_{i+1} ломаной равна $\overline{A_iA_{i+1}}=\sqrt{\Delta x_i^2+\Delta y_i^2}$. Применяя теорему Лагранжа к приращениям Δx_i и Δy_i, получим

$\Delta x_i=\varphi(t_i+\Delta t_i)-\varphi(t_i)=\varphi'(\tau_i)\Delta t_i$,

$\Delta y_i=\psi(t_i+\Delta t_i)-\psi(t_i)=\psi'(\tau_i^*)\Delta t_i$,

где $\tau_i\,,\tau_i^*$ находятся между t_i и $t_i+\Delta t_i$.

Имеем теперь $\overline{A_iA_{i+1}}=\sqrt{(\varphi'(\tau_i))^2+(\psi'(\tau_i^*))^2}\,\Delta t_i$,

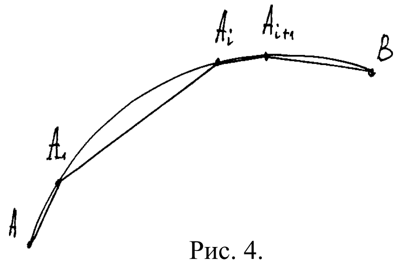

Рис. 4.

тогда периметр всей ломаной

$$P=\sum_{i=0}^{n-1}\sqrt{(\varphi'(\tau_i))^2+(\psi'(\tau_i^*))^2}\,\Delta t_i\ .$$

Если во втором слагаемом заменить τ_i^* на τ_i, то преобразованное выражение

$$\sigma=\sum_{i=0}^{n-1}\sqrt{(\varphi'(\tau_i))^2+(\psi'(\tau_i))^2}\,\Delta t_i$$

представляет собой интегральную сумму как раз для интеграла (4). При стремлении к нулю $\lambda_\theta=\max\limits_i\{\Delta t_i\}$ эта сумма будет иметь своим пределом упомянутый интеграл. Чтобы показать, что к тому же пределу стремится и периметр p ломаной, достаточно обнаружить, что разность $P-\sigma$ стремится к нулю. Для этого проведем оценку для этой разности

$$|P-\sigma|\le\sum_{i=0}^{n-1}\left|\sqrt{(\varphi'(\tau_i))^2+(\psi'(\tau_i))^2}-\sqrt{(\varphi'(\tau_i))^2+(\psi'(\tau_i^*))^2}\right|\Delta t_i\,.$$

Элементарное неравенство $\left|\sqrt{a^2+b_1^2}-\sqrt{a^2+b^2}\right|\le|b_1-b|$, если его применить к каждому слагаемому в отдельности, даст нам $|P-\sigma|\le\sum_{i=0}^{a-1}\left|\psi'(\tau_i^*)-\psi'(\tau_i)\right|\Delta t_i$. Ввиду непрерывности функции $\psi'(t)$, по любому $\varepsilon>0$ найдется $\delta>0$, что $\left|\psi'(\tau^*)-\psi'(\tau)\right|<\varepsilon$ при $\left|t^*-t\right|<\delta$. Если взять $\Delta t_i<\delta$, то $\left|\tau_i^*-\tau_i\right|<\delta$, тогда $\left|\psi'(\tau_i^*)-\psi'(\tau_i)\right|<\varepsilon$ и $|P-\sigma|\le\varepsilon\sum_{i=0}^{n-1}\Delta t_i=\varepsilon(T-t_0)$.

Это и доказывает наше утверждение .

Если кривая задана явным уравнением $y=f(x)\quad(a\le x\le b)$, то, принимая x за параметр, из формулы (4) как частный случай получаем

$$L=\int_a^b\sqrt{1+f'^2(x)}\,dx\,. \qquad (5)$$

В случае полярного задания кривой $\rho=\rho(\theta)\quad(\alpha\le\theta\le\beta)$ также приводим к параметрическому с помощью обычных формул перехода

$x=\rho\cdot\cos\theta=\rho(\theta)\cos\theta$, $y=\rho\cdot\sin\theta=\rho(\theta)\sin\theta$, где роль параметра играет θ.

Для этого случая $\quad x'_\theta = \rho'_\theta \cos\theta - \rho\sin\theta$,

$$y'_\theta = \rho'_\theta \sin\theta + \rho\cos\theta,$$

так что $x'^2_\theta + y'^2_\theta = \rho^2(\theta) + \rho'^2(\theta)$ и

$$L = \int_\alpha^\beta \sqrt{\rho^2(\theta) + \rho'^2(\theta)}\,d\theta. \tag{6}$$

§3. Выражение объема интегралом

Начнем с того, что прямой цилиндр высоты H, основанием которого служит квадрируемая плоская фигура (P), имеет объем, равный произведению площади основания на высоту: $V=PH$.

Возьмем многоугольники (A_n) и (B_n), соответственно содержащиеся в (P) и содержащие в себе (P), так, чтобы их площади A_n и B_n стремились к P. Если на этих многоугольниках построить прямые призмы (X_n) и (Y_n) высоты H, то их объемы $X_n=A_nH$, $Y_n=B_nH$ будут стремиться к общему пределу $V=PH$, который и будет объемом нашего цилиндра.

Рассмотрим теперь некоторое тело (V), содержащееся между плоскостями $x=a$ и $x=b$, и станем рассекать его плоскостями, перпендикулярными к оси Оx (рис.5).

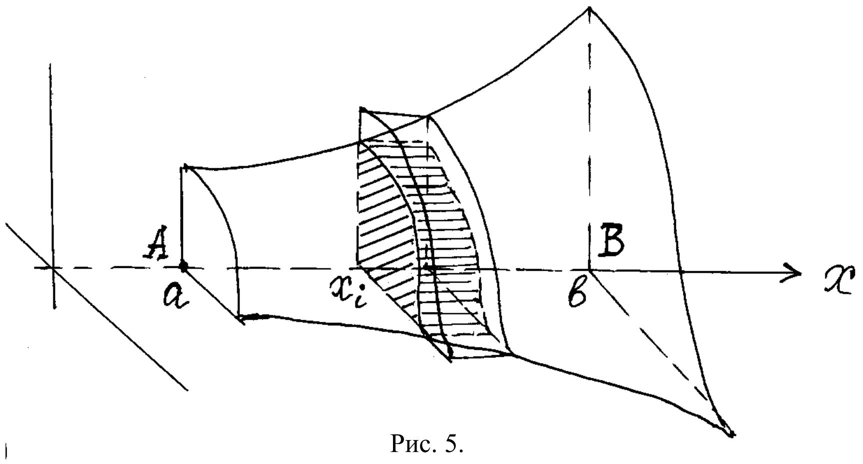

Рис. 5.

Допустим, что все эти сечения квадрируемы, и пусть площадь сечения, отвечающего абсциссе x, – обозначим ее через $P(x)$ – будет непрерывной функцией от x (для $a \le x \le b$).

Если спроектировать без искажения два подобных сечения на какую-либо плоскость, перпендикулярную оси Оx, то они могут либо содержаться одно в другом, либо частично налегать одно на другое, или лежать одно вне другого (рис. 6).

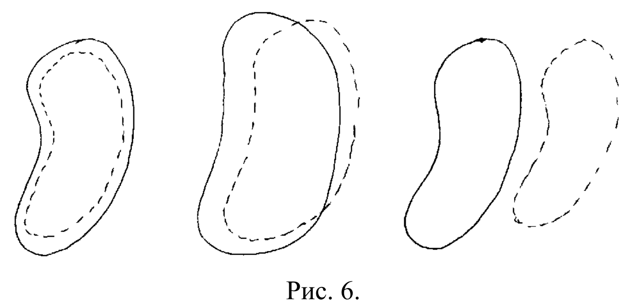

Рис. 6.

Мы остановимся на том случае, когда два различных сечения, будучи спроектированы на плоскость, перпендикулярную к оси Оx, оказываются всегда содержащимися одно в другом.

В этом предположении можно утверждать, что тело имеет объем, который выражается формулой

$$V = \int_a^b P(x)dx . \qquad (7)$$

Для доказательства разобьем отрезок $[a,b]$ на оси Оx точками $a \le x_0 < x_1 < ... < x_i < x_{i+1} < ... < x_n = b$ на части и разложим плоскостями $x = x_i$, проведенными через точки деления, всё тело на слои. Рассмотрим i-й слой, содержащийся между плоскостями $x = x_i$ и $x = x_{i+1}$ $(i = 0,1,...,n-1)$. На отрезке $[x_i, x_{i+1}]$ функция *P(x)* имеет наибольшее значение M_i и наименьшее значение m_i. Если все сечения, отвечающие различным значениям *x* в этом отрезке $[x_i, x_{i+1}]$, поместить на одну плоскость, например, $x = x_i$, то все они будут содержаться в наибольшем, имеющем площадь M_i, и содержать в себе наименьшее, с площадью m_i.

Если на наибольшем сечении с площадью M_i и наименьшем с площадью m_i построить прямые цилиндры с высотой $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$, то больший из них будет содержать в себе рассматриваемый слой нашего тела, а меньший будет содержаться в этом слое. На основании сделанного замечания объемы этих цилиндров будут соответственно равны $M_i \Delta x_i$ и $m_i \Delta x_i$.

Из выходящих цилиндров составится тело (T), а из входящих – тело (V), объемы которых равны соответственно

$$\sum_{i=0}^{n-1} M_i \Delta x_i \ \text{ и } \ \sum_{i=0}^{n-1} m_i \Delta x_i$$

При $\lambda_\theta = \max_i \{\Delta x_i\}$, стремящемуся к нулю, эти суммы имеют общий предел, равный $\int_a^b P(x)dx$, таков же будет и объем тела.

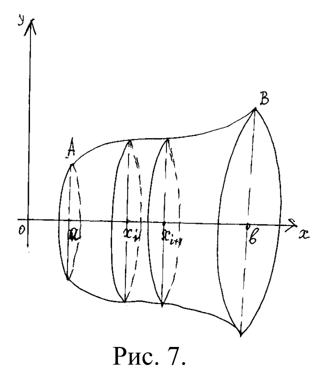

Рис. 7.

Важный частный случай, когда выполняется предположение о взаимном расположении сечений, представляют тела вращения. Если на плоскости *x*О*y* задана непрерывная кривая АВ уравнением $y = f(x)$ $(a \le x \le b)$, причем $f(x) > 0$, то, вращая трапецию *a*АВ*b* вокруг оси О*x*, получим тело вращения, которое подходит под рассматриваемый случай, так как сечения его проектируются на перпендикулярную к оси О*x* плоскость в виде концентрических окружностей.

Здесь $P(x) = \pi y^2 = \pi (f(x))^2$, так что $V = \pi \int_a^b f^2(x)dx$. (8)

Если криволинейная трапеция ограничена и снизу, и сверху кривыми, заданными уравнениями $y_1 = f_1(x)$ и $y_2 = f_2(x)$, то

$$V=\pi\int_a^b\left(y_1^2-y_2^2\right)dx=\pi\int_a^b\left((f_2(x))^2-(f_1(x))^2\right)dx, \qquad (9)$$

хотя предположение о сечениях здесь может и не выполняться.

Доказанный результат легко распространяется на все такие тела, которые получаются путем сложения или вычитания из тел, удовлетворяющих упомянутому предположению.

В общем случае можно утверждать лишь следующее: если тело (V) имеет объем, то он выражается формулой (7):

$$V=\int_a^b P(x)dx\,.$$

§4. Схема применения определенного интеграла

Прежде чем перейти к применениям определенного интеграла в других областях (механики, физики, техники и пр.), полезно уяснить себе тот путь, по которому в прикладных вопросах обычно приходят к определенному интегралу.

Предположим, что требуется определить некоторую постоянную величину Q, связанную с отрезком $[a,b]$. При этом пусть каждому частичному отрезку $[\alpha,\beta]$, содержащемуся в $[a,b]$, отвечает некоторая часть величины Q так, что разложение отрезка $[a,b]$ на частичные отрезки влечет за собой разложение на соответствующие части и величины Q.

Точнее говоря, речь идет о некоторой "функции от промежутка" $Q([\alpha,\beta])$, обладающей свойством аддитивности, т.е., если отрезок $[\alpha,\beta]$ состоит из частичных отрезков $[\alpha,\gamma],[\gamma,\beta]$, то $Q([\alpha,\beta])=Q([\alpha,\gamma])+Q([\gamma,\beta])$. Задача же состоит в вычислении ее значения, отвечающего всему отрезку $[a,b]$.

Для примера возьмем на плоскости кривую АВ, заданную уравнением $y=f(x)$ $(a\le x\le b)$ (рис.8).

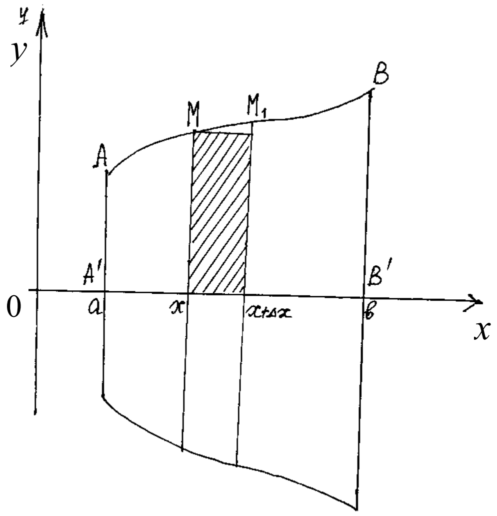

Рис. 8.

Тогда: 1) площадь Р криволинейной трапеции $AA'B'B$,

2) длина L кривой АВ,

3) объем V тела, полученного от вращения этой трапеции вокруг оси ОХ, – все три являются величинами указанного типа. Рассмотрим "элемент" ΔQ величины Q, отвечающий элементарному отрезку $[x,x+\Delta x]$. Исходя из условий задачи, стараются найти для ΔQ приближенное выражение вида $q(x)\Delta x$, линейное относительно Δx, – так,

чтобы оно разнилось от ΔQ на бесконечно малую порядка высшего, чем Δx. Другими словами, из бесконечно малого (при $\Delta x \to 0$) “элемента” ΔQ выделяют его главную часть – дифференциал.

Ясно, что относительная погрешность приближенного равенства $\Delta Q \approx q(x)\Delta x = dQ$ будет стремиться к нулю вместе с Δx, погрешность от такой замены будет бесконечно малой высшего порядка, чем Δx.

После этого можно утверждать, что искомая величина Q точно выражается интегралом

$$Q = \int_a^b q(x)dx . \qquad (9)$$

Для пояснения этого разделим отрезок $[a,b]$ точками $x_1, x_2, ..., x_{n-1}$ на элементарные отрезки $[a, x_1], [x_1, x_2], ..., [x_i, x_{i+1}], ..., [x_{n-1}, b]$.

Так как каждому отрезку $[x_i, x_{i+1}]$ отвечает элементарная часть нашей величины, приближенно равная $q(x_i)\Delta x_i$, то вся искомая величина Q приближенно выражается суммой $\sum_{i=0}^{n-1} q(x_i)\Delta x_i$.
Степень точности полученного значения будет тем выше, чем мельче частичные промежутки, так что Q, очевидно, будет пределом упомянутой суммы, т.е. действительно выразится определенным интегралом $\int_a^b q(x)dx$.

Это в полной мере относится ко всем трем рассмотренным примерам вычисления площади, длины дуги кривой, объема тела. Таким образом, все дело сводится к установлению равенства $dQ = q(x)dx$ и переходу к интегралу, что и приводит к формуле (9).

В качестве первого примера применения изложенной схемы рассмотрим в следующем параграфе вопрос о вычислении площади поверхности вращения.

§5. Площадь поверхности вращения

Пусть имеем на плоскости xOy (в верхней полуплоскости) кривую АВ, заданную параметрическими уравнениями $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ $(t_0 \le t \le T)$,

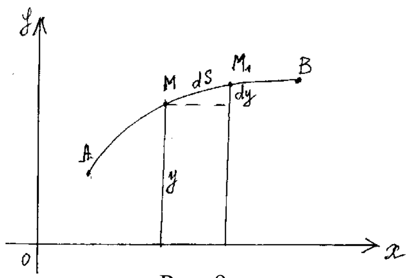

Рис. 9.

где φ и ψ – функции от параметра, непрерывные вместе со своими производными. В качестве параметра введем длину дуги S, отсчитываемую от точки А(t_0), и перейдем к представлению $x = \varphi(s)$, $y = \psi(s)$ $(0 \le s \le L)$, где L– длина всей кривой АВ.

Задача состоит в определении площади

Q поверхности, полученной от вращения кривой AB вокруг оси Ox. Если выделить элемент ds кривой, то его приближенно можно принять за прямолинейный и вычислить соответствующий ему элемент площади dQ как площадь усеченного конуса с образующей ds и радиусами основания y и $y+dy$. Тогда

$$dQ = 2\pi \frac{y + (y + dy)}{2} dS .$$

Произведение $dydS$ двух бесконечно малых надлежит отбросить. Мы придем к линейной относительно ds формуле. $dQ = 2\pi y ds$. Откуда $Q = 2\pi \int\limits_0^s y dS$, (10)

где под y понимаем функцию $\psi(s)$.

Если вернуться к общему параметрическому заданию кривой $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ $\left(t_0 \le t \le T\right)$, то, произведя в предшествующем интеграле замену переменной, преобразуем его к виду $Q = 2\pi \int\limits_{t_0}^{T} \psi(t) \sqrt{\left(\varphi'(t)\right)^2 + \left(\psi'(t)\right)^2} dt$. (10а)

В частности, если кривая задана явным уравнением $y = f(x)$ $(a \le x \le b)$, то в роли параметра оказывается x, будем иметь $Q = 2\pi \int\limits_a^b f(x) \sqrt{1 + \left(f'(x)\right)^2} dx$. (10б)

Глава II. ВЫЧИСЛЕНИЕ МЕХАНИЧЕСКИХ И ФИЗИЧЕСКИХ ВЕЛИЧИН

§1. Нахождение статических моментов и центра тяжести кривой

Как известно, статический момент материальной точки массы m относительно некоторой оси равен произведению массы m на расстояние d точки до оси. Для системы n материальных точек с массами $m_1, m_2, \ldots, m_n$, лежащих в одной плоскости с осью, соответственно на расстояниях $d_1, d_2, \ldots, d_n$ от оси L, статический момент выразится суммой

$$M_L = \sum_{i=1}^{n} m_i d_i \, .$$

При этом расстояния точек, лежащих по одну сторону от оси, берутся со знаком плюс, а по другую сторону – со знаком минус.

Если же массы не сосредоточены в отдельных точках, но расположены сплошным образом, заполняя линию или плоскую фигуру, то для выражения статического момента вместо суммы потребуется интеграл. Остановимся на определении статического момента M_x относительно оси Ox масс, расположенных вдоль некоторой плоской кривой AB (рис.9). Предположим, что линейная плотность $\rho = \rho(s) \quad (0 \le s \le S)$. Выделим некий элемент ds кривой, масса которого приближенно выражается числом $\rho(s)ds$. Приняв элемент ds кривой на расстоянии y от оси, получим его статический момент, равный

$$dM_x = y\rho(s)ds \, .$$

Принимая за независимую переменную s, отсчитываемую от точки A, получим

$$M_x = \int_0^S y\rho(s)ds \, . \qquad (11)$$

Аналогично выражается статический момент относительно оси Oy

$$M_y = \int_0^S x\rho(s)ds \, . \qquad (12)$$

Легко понять, что масса элементарной части $dm = \rho(s)ds$, а следовательно, масса кривой выражается интегралом $m = \int_0^s \rho(s)ds \, .$

(13)

Статические моменты M_x и M_y кривой позволяют установить положение ее <u>центра тяжести</u> $C(x_c, y_c)$, обладающего тем свойством, что если в нем сосредоточить всю “массу” кривой AB, то статический момент этой массы относительно любой оси равен моменту всей кривой относительно этой оси.

Следовательно, $mx_c = M_y = \int_0^S x\rho(s)ds \, ,$

$$my_c = M_x = \int_0^S y\rho(s)ds,$$

откуда $$x_c = \frac{\int_0^S x\rho(s)ds}{\int_0^S \rho(s)ds}, \quad y_c = \frac{\int_0^S y\rho(s)ds}{\int_0^S \rho(s)ds}. \qquad (14)$$

В частности, если кривая однородная, т.е. $\rho = const$,

то $$x_c = \frac{\int_0^S xds}{L}, \quad y_c = \frac{\int_0^S yds}{L}, \qquad (15)$$

где L– длина дуги АВ.

Из формулы (15) для ординаты y_c центра тяжести получаем замечательное геометрическое следствие. В самом деле, $y_c \cdot L = \int_0^S ydS$, откуда

$$2\pi y_c \cdot L = 2\pi \int_0^S ydS. \qquad (16)$$

В правой части равенства (16) имеем площадь Q поверхности, полученной от вращения кривой АВ вокруг оси Оx, в левой части $2\pi y_c$ – длина окружности, описанной центром тяжести при этом вращении. Таким образом, приходим к утверждению, называемому первой теоремой Гульдина:

площадь поверхности, полученной от вращения кривой около некоторой не пересекающей ее оси, равна длине дуги этой кривой, умноженной на длину окружности, описанной центром тяжести кривой.

§2. Нахождение статических моментов и центра тяжести плоской фигуры

Рассмотрим плоскую фигуру $AA'B'B$ (рис.10), ограниченную сверху кривой АВ, которая задана явным уравнением $y = f(x)$ $(a \le x \le b)$. Предположим, что поверхностная плотность постоянна, т.е. фигура однородна. Можно для определенности считать $\rho = 1$, тогда масса любой части фигуры измеряется ее площадью.

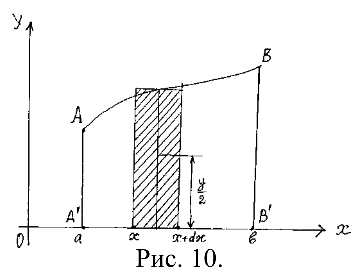

Рис. 10.

Для вычисления статических моментов M_x, M_y этой фигуры выделим как обычно элемент нашей фигуры в виде бесконечно узкой вертикальной полоски шириной dx (рис. 10). Приняв эту полоску приближенно за прямоугольник, мы видим, что масса ее будет ydx. Предположив, что масса всей полоски сосредоточена в ее центре тяжести (т.е. в центре прямоугольника), и учитывая, что до оси Оx расстояние равно $d_x = \frac{1}{2}y$, а до оси Оy – $d_y = x$, находим $dM_x = \frac{1}{2}y^2dx$, $dM_y = xydx$, а следовательно,

$$M_x = \frac{1}{2}\int_a^b y^2dx \ , \ M_y = \int_a^b xydx . \qquad (17)$$

По этим статическим моментам легко определить координаты центра тяжести фигуры $S \cdot x_c = M_y = \int_a^b xydx$; $S \cdot y_c = M_x = \frac{1}{2}\int_a^b y^2dx$,

откуда
$$x_c = \frac{\int_a^b xydx}{S} \ , \ y_c = \frac{\frac{1}{2}\int_a^b y^2dx}{S} , \qquad (18)$$

где S – площадь фигуры $AA'B'B$.

Из формулы (18) для ординаты центра тяжести получаем второе важное геометрическое следствие.

$$2\pi y_c \cdot S = \pi\int_a^b y^2dx . \qquad (19)$$

Правая часть равенства (19) выражает объем V тела, полученного от вращения плоской фигуры $AA'B'B$ вокруг оси Оx, левая часть выражает произведение площади этой фигуры S на $2\pi y_c$ – длину окружности, описанной центром тяжести фигуры.

Отсюда получаем вторую теорему Гульдина:

объем тела вращения плоской фигуры около не пересекающей ее оси равен произведению площади этой фигуры на длину окружности, описанной центром тяжести фигуры.

$$\mathbf{V = S \cdot 2\pi y_c} .$$

§3. Механическая работа

Пусть точка М движется по прямой (этим случаем мы ограничиваемся для простоты), причем на перемещении s на нее вдоль той же прямой действует постоянная сила F. Из механики известно, что тогда работа этой силы $A=Fs$.

Если величина силы непрерывно меняется от точки к точке, то для выражения работы силы снова приходится прибегнуть к интегралу.

Пусть путь s, проходимый точкой, будет независимой переменной.

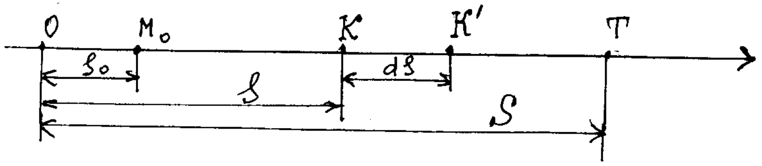

Рис. 11.

Предположим, что начальному положению точки М соответствует значение $s=s_0$, а конечному T – значение $s=S$. (рис.11). Каждому значению s в промежутке $[s_0,S]$ отвечает определенное положение движущейся точки К, а также определенное значение величины F, которую можно рассматривать как функцию от s. Взяв точку К в каком-нибудь ее положении, определяемом значением S пути, найдем теперь приближенное выражение для элемента работы, соответствующего приращению ds пути, от s до $s+ds$, при котором точка К перейдет в точку К$^{/}$ (см. рис. 11). В положении К на точку действует сила $F(s)$, поскольку изменение этой величины при переходе точки К в К$^{/}$ при малом ds также мало, этим изменением можно пренебречь.

Считая величину силы $F(s)$ приближенно постоянной, найдем для элемента работы на перемещении ds выражение $dA = F(s)ds$.

Тогда вся работа
$$A = \int_{s_0}^{S} F(s)ds . \qquad (20)$$

§4. Давление

Давление, производимое жидкостью с удельным весом γ на одну сторону погруженной в нее вертикальной пластинки, если расстояние x точек пластинки до уровня жидкости изменяется от a до b (рис.12), определяется по формуле
$$P = \int_{a}^{b} \gamma \cdot xydx , \qquad (21)$$

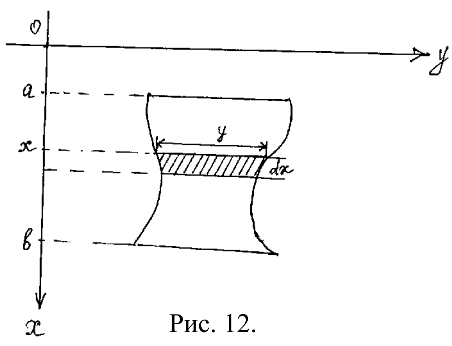

Рис. 12.

где y – длина горизонтального сечения пластинки $(y = f(x))$. Так как на элементарную пластинку шириной dx давит слой жидкости, находящийся над этой пластинкой, т.е. $dP = \gamma \cdot x \cdot ydx$, где ydx – площадь пластинки, $x{\cdot}ydx$ – объем жидкости, а $\gamma \cdot xydx$ – вес жидкости, который и оказывает давление. Следовательно, всё давление P получаем по формуле (21).

Глава III. РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

§1. Геометрические задачи

Задача 1. Вычислить площадь фигуры, лежащей в первой четверти внутри круга $x^2+y^2=3a^2$ и ограниченной параболами $x^2=2ay$ и $y^2=2ax$ ($a>0$).

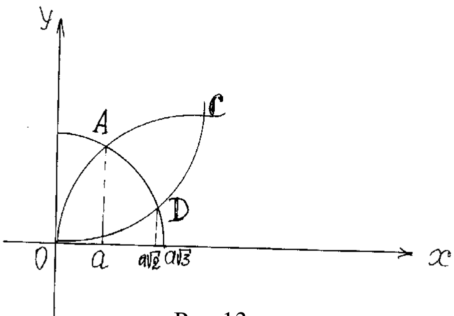

Рис.13.

Решение. Найдем абсциссу точки A пересечения параболы $y^2=2ax$ с окружностью $x^2+y^2=3a^2$.

Исключив y из системы уравнений

$$\begin{cases} x^2+y^2=3a^2, \\ y^2=2ax, \end{cases}$$

получим $x^2-2ax-3a^2=0$, откуда находим единственный положительный корень $x_A=a$. Аналогично находим абсциссу точки D пересечения окружности $x^2+y^2=3a^2$ и параболы $x^2=2ay$; $x_D=a\sqrt{2}$.

Таким образом, интересующая нас площадь равна

$$S=\int_0^{a\sqrt{2}}\left(y_2(x)-y_1(x)\right)dx,$$

где $y_1(x)=\dfrac{x^2}{2a}$, $y_2(x)=\begin{cases}\sqrt{2ax} & при \quad 0\le x\le a, \\ \sqrt{3a^2-x^2} & при \quad a<x\le a\sqrt{2}.\end{cases}$

По свойству аддитивности интеграла

$$S=\int_0^a\left(\sqrt{2ax}-\frac{x^2}{2a}\right)dx+\int_a^{a\sqrt{2}}\left(\sqrt{3a^2-x^2}-\frac{x^2}{2a}\right)dx=$$

$$=\left(\sqrt{2a}\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}-\frac{x^3}{6a}\right)\Bigg|_0^a+\left(\frac{x}{2}\sqrt{3a^2-x^2}+\frac{3a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a\sqrt{3}}-\frac{x^3}{6a}\right)\Bigg|_a^{a\sqrt{3}}=$$

$$=\frac{2\sqrt{2}}{3}a^2-\frac{a^2}{6}+\frac{3a^2}{2}\left(\arcsin\sqrt{\frac{2}{3}}-\arcsin\sqrt{\frac{1}{3}}\right)-\frac{\sqrt{2}}{3}a^2+\frac{1}{6}a^2=\left(\frac{\sqrt{2}}{3}+\frac{3}{2}\arcsin\frac{1}{3}\right)a^2.$$

Здесь мы пользовались известной формулой тригонометрии

$\arcsin\alpha-\arcsin\beta=\arcsin\left(\alpha\sqrt{1-\beta^2}-\beta\sqrt{1-\alpha^2}\right)$ $(\alpha\beta>0)$ для преобразования

$$\arcsin\sqrt{\frac{2}{3}}-\arcsin\sqrt{\frac{1}{3}}=\arcsin\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\cdot\sqrt{1-\frac{1}{3}}-\sqrt{\frac{1}{3}}\cdot\sqrt{1-\frac{2}{3}}\right)=\arcsin\frac{1}{3}.$$

Задача 2. Вычислить площадь петли кривой $y^2 = x(x-1)^2$.

Решение. Область определения неявной функции y есть полуотрезок $[0;+\infty)$. Так как в уравнение кривой y входит во второй степени, то кривая симметрична относительно оси Оx. Положительная ветвь $y_1(x)$ задается уравнением

$$y = y_1(x) = \sqrt{x} \cdot |x-1| = \begin{cases} \sqrt{x}(1-x), & 0 \le x \le 1, \\ \sqrt{x}(x-1), & x > 1. \end{cases}$$

Общие точки симметричных ветвей $y_1(x)$ и $y_2(x) = -y_1(x)$ должны лежать на оси Оx. Но $y_1(x) = \sqrt{x} \cdot |x-1| = 0$ лишь при $x_1 = 0$ и $x_2 = 1$.

Следовательно, петля кривой образована кривыми $y = \sqrt{x}(1-x)$ и $y = -\sqrt{x}(1-x)$, $0 \le x \le 1$ (рис. 14).

Поэтому площадь петли равна

$$S = 2\int_0^1 \sqrt{x}(1-x)dx = 2\int_0^1 \left(x^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{3}{2}} \right) dx = \frac{8}{15}.$$

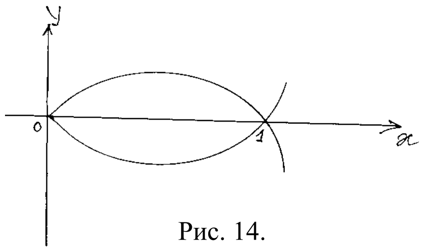

Рис. 14.

Задача 3. Вычислить площадь фигуры, ограниченной кривой $x = a\sin t$, $y = b\sin 2t$.

Решение. Для построения кривой учтем, что она симметрична относительно осей координат. Действительно, если заменить t на $\pi - t$, то переменная x не меняется, а y изменяет только свой знак; следовательно, кривая симметрична относительно оси Оx. При замене же t на $\pi + t$ переменная y не меняется, а x изменяет только знак. Это значит, что кривая симметрична относительно оси Оy.

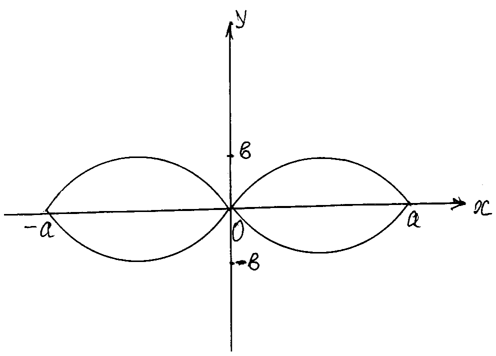

Рис. 15.

Далее, так как функции $x = a\sin t$, $y = b\sin 2t$ имеют общий период 2π, то достаточно ограничиться изменением параметра: $0 \le t \le 2\pi$.

Из уравнения кривой легко заключить, что правая петля соответствует изменению параметра от нуля до π, поэтому достаточно вычислить ее площадь и удвоить результат.

$$S = 2\int_0^{\pi} y \cdot x' dt = 2\int_0^{\pi} b\sin 2t \cdot a\cos t dt = 4ab\int_0^{\pi} \cos^2 t \sin t dt = -4ab\frac{\cos^2 t}{3}\Bigg|_0^{\pi} = \frac{8}{3}ab .$$

Задача 4. Найти площадь фигуры, лежащей вне круга $\rho = a$ и ограниченной кривой $\rho = 2a\cos 3\varphi$.

Решение. Так как функция $\rho = 2a\cos 3\varphi$ имеет период $T = \dfrac{2}{3}\pi$, то при изменении φ от $-\pi$ до π радиус-вектор описывает три лепестка кривой. При этом допустимыми для φ являются те значения, при которых $\cos 3\varphi \geq 0$, откуда

$$-\frac{\pi}{6} + 2k\pi/3 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{6} + 2k\pi/3 \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, ...).$$

Следовательно, один из лепестков описывается при изменении φ от $-\dfrac{\pi}{6}$ до $\dfrac{\pi}{6}$.

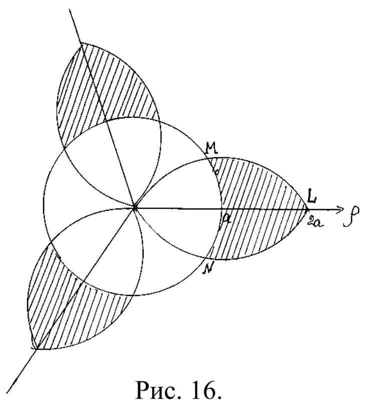

Рис. 16.

Остальные два лепестка получаются при изменении φ от $\dfrac{\pi}{2}$ до $\dfrac{5}{6}\pi$ и от $\dfrac{7}{6}\pi$ до $\dfrac{3}{2}\pi$ соответственно (рис. 16).

Ясно, что искомая площадь равна утроенной площади S_{MLNM} .

Найдем полярные координаты точек пересечения M и N. Для этого решим уравнение $2a\cos 3\varphi = a$, т.е. $\cos 3\varphi = \dfrac{1}{2}$. Между $-\dfrac{\pi}{6}$ и $\dfrac{\pi}{6}$ находятся только корни $-\dfrac{\pi}{9}$ и $\dfrac{\pi}{9}$. Таким образом,

$$3S_{MLNM} = 3(S_{OMLNO} - S_{OMNO}) = 3 \cdot \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{9}}^{\frac{\pi}{9}} 4a^2 \cos^2 3\varphi d\varphi - \frac{3}{2}\int_{-\frac{\pi}{9}}^{\frac{\pi}{9}} a^2 d\varphi = a^2\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

Задача 5. Найти длину цепной линии $y = \dfrac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)$ между точками с абсциссами *x=0* и *x=x* $(x > 0)$.

Решение. Применяем формулу для вычисления длины дуги кривой, заданной в явном виде. $L = \int\limits_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\,dx$.

Находим $f'(x) = \dfrac{a}{2}\left(\dfrac{1}{a}e^{\frac{x}{a}} - \dfrac{1}{a}e^{-\frac{x}{a}}\right) = \dfrac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}}\right)$.

$$\sqrt{1 + (f'(x))^2} = \sqrt{1 + \frac{1}{4}\left(e^{\frac{2x}{a}} - 2 + e^{-\frac{2x}{a}}\right)} = \sqrt{\frac{e^{\frac{2x}{a}} + e^{-\frac{2x}{a}} + 2}{4}} = \frac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right).$$

Тогда $L=\int\limits_0^x \frac{e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}}{2}dx=\frac{1}{2}\left(a\cdot e^{\frac{x}{a}}-a\cdot e^{-\frac{x}{a}}\right)\Bigg|_0^x=\frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}\right)$.

Задача 6. Найти длину одной арки циклоиды.

$$\begin{aligned} x&=a(t-\sin t),\\ y&=a(1-\cos t), \end{aligned} \quad 0\le t\le 2\pi \ , \quad a>0 .$$

Решение. Применим формулу для вычисления длины дуги кривой, заданной параметрическими уравнениями

$$L=\int\limits_\alpha^\beta \sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}dt .$$

Учитывая, что $\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)=\left(a(1-\cos t)\right)^2+\left(a\sin t\right)^2=$

$$=a^2\left(1-2\cos t+\cos^2 t+\sin^2 t\right)=a^2\left(2-2\cos t\right)=4a^2\sin^2\frac{t}{2} ,$$

получим $\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}=\sqrt{4a^2\sin^2\frac{t}{2}}=2a\left|\sin\frac{t}{2}\right|=2a\sin\frac{t}{2}$,

так как для $t\in[0,2\pi]$; $\frac{t}{2}\in[0,\pi]$ и $\left|\sin\frac{t}{2}\right|=\sin\frac{t}{2}$.

Следовательно, $L=\int\limits_0^{2\pi} 2a\sin\frac{t}{2}dt=-4a\cos\frac{t}{2}\Bigg|_0^{2\pi}=8a$.

Задача 7. Найти длину дуги кардиоиды, заданной уравнением $\rho=2a\left(1-\cos\theta\right)$.

Решение. Воспользуемся формулой (6)

$$L=\int\limits_\alpha^\beta \sqrt{\rho^2(\theta)+\rho'^2(\theta)}d\theta ,$$

$\rho'(\theta)=2a\sin\theta$,

$$\rho^2(\theta)+\rho'^2(\theta)=4a^2\left(1-\cos\theta\right)^2+4a^2\sin^2\theta=4a^2\left(2-2\cos\theta\right)=16a^2\sin^2\frac{\theta}{2} .$$

$$\sqrt{\rho^2(\theta)+\rho'^2(\theta)}d\theta=4a\sin\frac{\theta}{2},$$

следовательно, $L=\int\limits_0^{2\pi} 4a\sin\frac{\theta}{2}d\theta=4a\left(-2\cos\frac{\theta}{2}\right)\Bigg|_0^{2\pi}=16a$.

Задача 8. Найти объем клина, отсекаемого от прямого кругового цилиндра плоскостью, проходящей через диаметр основания под углом α к нему.

Решение.

Такое тело называется цилиндрическим отрезком. Пусть цилиндр, о котором идет речь, определяется уравнением $x^2+y^2=R^2$. Найдем площадь сечения, перпендикулярного к оси Ox. Сечение – прямоугольный треугольник. Возьмем на оси Ox

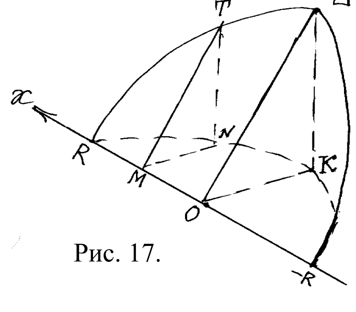

Рис. 17.

точку с абсциссой x, $|x| < R$. Площадь сечения будет функцией от x:

$S(x) = \frac{1}{2} MN \cdot NP$, где MN – ордината точки N окружности $x^2 + y^2 = R^2$, а следовательно, $MN = \sqrt{R^2 - x^2}$, $MN = NP \cdot tg\alpha = \sqrt{R^2 - x^2} \cdot tg\alpha$.

$$S(x) = \frac{1}{2}\sqrt{R^2 + x^2} \cdot \sqrt{R^2 - x^2} \cdot tg\alpha = \frac{tg\alpha}{2}\left(R^2 - x^2\right).$$

Переменная x изменяется от $-R$ до R, поэтому по формуле (7) получаем

$$V = \frac{tg\alpha}{2}\int_{-R}^{R}\left(R^2 - x^2\right)dx = \frac{tg\alpha}{2}\left(R^2 x - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-R}^{R} = \frac{2tg\alpha}{3} \cdot R^3,$$

т.е.: $V = \frac{2}{3} tg\alpha \cdot R^3$ куб.ед.

Задача 9. Найти объем и боковую поверхность параболоида, образованного вращением параболы $y^2 = 2px$ вокруг оси Оx и ограниченного плоскостью $x=H$.

Решение. Объем тела вычислим по формуле (8):

$$V = \pi\int_0^H y^2 dx = \pi\int_0^H 2pxdx = 2p\pi \cdot \frac{x^2}{2}\Bigg|_0^H = \pi p H^2 \text{ (куб.ед.)}$$

Боковая поверхность определится по формуле ($10^б$). Найдем сначала $\sqrt{1 + y'^2}$, входящий в эту формулу. Так как $y^2 = 2px$, то $y = \sqrt{2px}$,

$y' = \frac{1}{2\sqrt{2px}} \cdot 2p = \sqrt{\frac{p}{2x}}$, а $\sqrt{1 + y'^2} = \sqrt{1 + \frac{p}{2x}}$. Следовательно,

$$S = 2\pi\int_0^H \sqrt{2px} \cdot \sqrt{1 + \frac{p}{2x}} dx = 2\pi\int_0^H \sqrt{2px + p^2}\, dx =$$

$$= \frac{4\pi\sqrt{2p}}{3}\left(x + \frac{p}{2}\right)^{\frac{3}{2}}\Bigg|_0^H = \frac{4\pi\sqrt{2p}}{3}\left(\left(H + \frac{p}{2}\right)^{\frac{3}{2}} - \left(\frac{p}{2}\right)^{\frac{3}{2}}\right) \text{ (кв.ед.)}.$$

Задача 10. Найти объем и поверхность тела, образованного вращением вокруг оси Оx одной арки циклоиды $x = a\left(t - \sin t\right)$, $y = a(1 - \cos t)$ $(0 \le t \le 2\pi)$.

Решение. $V = \pi\int_0^{2\pi} y^2 dx = \pi\int_0^{2\pi} a^2(1 - \cos t)^2 \cdot a(1 - \cos t)dt =$

$$= \pi \cdot a^3 \int_0^{2\pi}\left(1 - 3\cos t + 3\cos^2 t - \cos^3 t\right)dt = 5\pi^2 a^3 \text{ (куб.ед.)}$$

$$S = 2\pi\int_0^{2\pi} y\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}dt = 2\pi\int_0^{2\pi} a^2(1 - \cos t)\sqrt{(1 - \cos t)^2 + \sin^2 t}dt =$$

$$= 2\pi \cdot a^2 \int_0^{2\pi} 2\sin^2\frac{t}{2} \cdot \sqrt{2 - 2\cos t}\,dt = 8\pi \cdot a^2 \int_0^{2\pi} \sin^3\frac{t}{2}\,dt =$$

$$= 8\pi \cdot a^2 \int_0^{2\pi} \left(1 - \cos^2\frac{t}{2}\right) 2d\left(-\cos\frac{t}{2}\right) = -16\pi \cdot a^2 \left(\cos\frac{t}{2} - \frac{\cos^3\frac{t}{2}}{3} \right)\Bigg|_0^{2\pi} =$$

$$= -16\pi \cdot a^2 \left(-\frac{2}{3} - \frac{2}{3}\right) = \frac{64}{3}\pi \cdot a^2 \text{ (кв.ед.)} .$$

§2. Физические задачи

Задача 1. Вычислить работу, необходимую для выкачивания воды из котла, имеющего форму полушара радиуса *R*.

Решение. Так как сила, которую надо прикладывать к каждой частице при ее поднятии, равна весу частицы, то работа по поднятию одной частицы равна произведению массы частицы на глубину ее погружения. Рассмотрим слой воды шириной *dx*, находящийся на глубине *x* от поверхности воды.

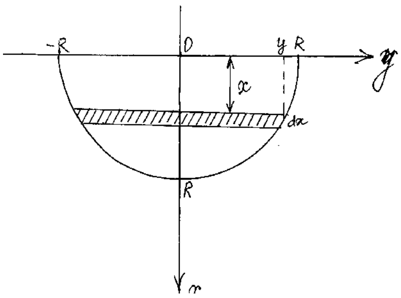

Рис. 18.

Элементарная работа по поднятию этого слоя выразится $dA = \gamma \cdot \pi \cdot y^2 dx \cdot x$, где $\gamma = 1$ – плотность воды: $y^2 = R^2 - x^2$;
$\pi \cdot y^2 dx$ – объем элементарного слоя: $\gamma \cdot \pi \cdot y^2 dx$ – масса слоя.
Так как *x* меняется от 0 до *R*, то вся работа

$$A = \int_0^R \pi(R^2 - x^2)x\,dx = \pi\left(\frac{R^2x^2}{2} - \frac{x^4}{4}\right)\Bigg|_0^R = \pi\left(\frac{R^4}{2} - \frac{R^4}{4}\right) = \frac{\pi R^4}{4} \text{ (ед.раб.).}$$

Задача 2. Какую работу надо затратить, чтобы остановить железный шар радиусом *R*, вращающийся с угловой скоростью ω вокруг своего диаметра?

Решение. Работа в данном случае равна кинетической энергии шара $\left(\frac{mV^2}{2}\right)$. Для подсчета энергии разобьём шар на концентрические полые цилиндры толщиной *dx* и радиуса *x*. Скорость точек такого цилиндра равна ωx. Дифференциал объема $dV = 4\pi \cdot x\sqrt{R^2 - x^2}\,dx$, дифференциал массы $dm = \gamma dV$, где γ – плотность железа; дифференциал кинетической энергии $dK = 2\pi\gamma\omega^2 x^3\sqrt{R^2 - x^2}\,dx$. Отсюда

$$K = 2\pi\gamma\omega^2 \int_0^R x^3\sqrt{R^2 - x^2}\,dx = \frac{4\pi\gamma R^3}{3} \cdot \frac{\omega^2 R^2}{5} = m \cdot \frac{\omega^2 R^2}{5}.$$

Задача 3. Электрический заряд E, сосредоточенный в начале координат, отталкивает заряд е из точки $(a,0)$ в точку $(b,0)$. Определить работу A силы отталкивания F.

Решение. Дифференциал работы силы на перемещении dx равен

$dA = Fdx = \frac{eE}{x^2}dx$.

Отсюда $A = eE\int_a^b \frac{dx}{x^2} = eE\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)$. При $b \to \infty$ работа A стремится к величине

eE/a .

Задача 4. Найти величину давления воды на вертикальную плотину, имеющую форму трапеции с верхним основанием, равным 70*м*, нижним основанием – 50*м* и высотой в 20*м*.

Решение. Дифференциал площади dS заштрихованной (рис.19) области, приближенно равен $MN \cdot dx$. Учитывая подобие треугольников OML и OAE, находим $\frac{ML}{20} = \frac{20-x}{20}$, отсюда ML$=20-x$, MN$=20-x+50=70-x$. Таким образом, $dS = (70-x)dx$, а дифференциал силы давления воды равен $dP = xdS = x(70-x)dx$, где x изменяется от 0 до 20. Следовательно, $P = \int_0^{20} x(70-x)dx = 11333\frac{1}{3}$.

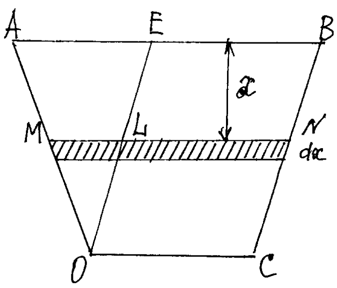

Рис. 19.

Задача 5. Найти декартовы координаты центра тяжести дуги кардиоиды $\rho = a(1+\cos\varphi)$, от $\varphi = 0$ до $\varphi = \pi$.

Решение. Запишем уравнение кардиоиды в параметрической форме:

$x = \rho\cos\varphi = a(1+\cos\varphi)\cos\varphi$,

$y = \rho\sin\varphi = a(1+\cos\varphi)\sin\varphi$, $\qquad (0 \le \varphi \le \pi)$.

Т.к. длина кардиоиды равна $8a$, а $dL = \sqrt{x_\varphi'^2 + y_\varphi'^2}\,d\varphi = 2a\cos\frac{\varphi}{2}d\varphi$, то

$$y_c = \frac{1}{4a}\int_L ydL = \frac{1}{4a}\int_0^\pi a\sin\varphi(1+\cos\varphi)2a\cos\frac{\varphi}{2}d\varphi =$$

$$= 2a\int_0^\pi \cos^4\frac{\varphi}{2}\cdot\sin\frac{\varphi}{2}d\varphi = -\frac{4a}{5}\cos^5\frac{\varphi}{2}\Bigg|_0^\pi = \frac{4}{5}a .$$

$$x_c = \frac{1}{4a}\int_L xdL = \frac{1}{4a}\int_0^\pi a\cos\varphi(1+\cos\varphi)2a\cos\frac{\varphi}{2}d\varphi = a\int_0^\pi \cos\varphi\cos^3\frac{\varphi}{2}d\varphi =$$

$$=a\int_0^{\pi}\left(2\cos^5\frac{\varphi}{2}-\cos^3\frac{\varphi}{2}\right)d\varphi=\left|\frac{\varphi}{2}=t\right|=2a\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(2\cos^5 t-\cos^3 t\right)dt=$$

$$=2a\int_0^{\pi}\left(2\cos^4 t-\cos^2 t\right)\cos t dt=2a\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(2\left(1-\sin^2 t\right)^2-1+\sin^2 t\right)d(\sin t)=$$

$$=2a\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(2-4\sin^2 t+2\sin^4 t-1+\sin^2 t\right)d(\sin t)=$$

$$=2a\left(\sin t-\frac{3\sin^3 t}{3}+\frac{2}{5}\sin^5 t\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}=2a\left(1-1+\frac{2}{5}\right)=\frac{4}{5}a\,.$$

Задача 6. Найти координаты центра тяжести фигуры, ограниченной прямой $y=\frac{2}{\pi}x$ и синусоидой $y=\sin x$ при $x\geq 0$.

Решение.

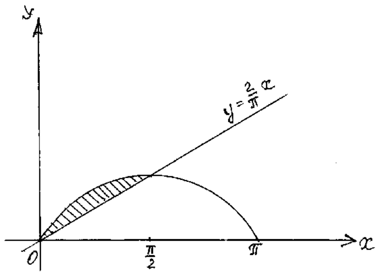

Рис.20.

Прямая $y=\frac{2}{\pi}x$ и синусоида $y=\sin x$ пересекаются в точках (0;0), $\left(\frac{\pi}{2};1\right)$.

Площадь фигуры, ограниченной этими линиями, равна

$$S=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\sin x-\frac{2}{\pi}x\right)dx=\frac{4-\pi}{4}\,.$$

Отсюда

$$x_c=\frac{\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\left(\sin x-\frac{2}{\pi}x\right)dx}{(4-\pi)/4}=\frac{4}{4-\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\left(\sin x-\frac{2}{\pi}x^2\right)dx=\frac{4}{4-\pi}-\frac{\pi^2}{3(4-\pi)}=\frac{12-\pi^2}{12-3\pi}\,.$$

$$y_c=\frac{4}{4-\pi}\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\sin^2 x-\frac{4}{\pi^2}x^2\right)dx=\frac{2}{4-\pi}\left(\frac{1}{2}x-\frac{\sin 2x}{4}-\frac{4x^3}{3\pi^2}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{6(4-\pi)}\,.$$

Задача 7. Найти площадь поверхности и объемы колец (торов), образованных вращением круга $(x-a)^2+(y-b)^2\leq r^2$ вокруг осей Оx и Оy $(a\geq r, b\geq r)$.

Решение. Если вращать круг вокруг оси Оx, то центр тяжести круга находится от оси вращения на расстоянии b, а поэтому площадь поверхности найдем по первой теореме Гульдина:

$$S_x = 2\pi r \cdot 2\pi b = 4\pi^2 br,$$

объем – по второй теореме Гульдина:

$$V_x = \pi r^2 2\pi b = 2\pi^2 br^2.$$

Если вращение производить вокруг оси Оy, то расстояние центра тяжести круга до оси Оy будет равно a. Тогда

$$S_y = 2\pi r \cdot 2\pi a = 4\pi^2 ar, \quad V_y = \pi r^2 2\pi a = 2\pi^2 ar^2.$$

Задача 8. Пользуясь теоремой Гульдина, найти объем тела, полученного при вращении прямоугольника вокруг оси, проходящей через его вершину перпендикулярно диагонали, если длина прямоугольника равна 8, а ширина 6.

Решение. Так как центр тяжести прямоугольника лежит на пересечении диагоналей, то его расстояние до оси равно половине диагонали, т.е. при ширине прямоугольника, равной 6, и длине, равной 8, половина диагонали равна 5.

Тогда объем тела $V = 2\pi \cdot 5 \cdot 6 \cdot 8 = 480\pi$.

Задача 9. Найти массу стержня длины 100см, если линейная плотность стержня меняется по закону $\sigma = \left(20x + 0{,}15x^2\right)$ *г/см*, где x – расстояние от одного из концов стержня.

Решение. Масса элементарной части стержня равна $dm = \sigma\ dx$. Тогда масса всего стержня

$$m = \int_0^{100} \delta dx = \int_0^{100} \left(20x + 0{,}15x^2\right) dx = \left(10x^2 + 0{,}05x^3\right)\Big|_0^{100} = 100000 + 0{,}05 \cdot 1000000 = 150\ (кг).$$

Задача 10. Цилиндрический резервуар с высотой $6\,м$ и диаметром основания $4\,м$ наполнен водой. За какое время вода вытечет из него через круглое отверстие радиуса $\frac{1}{12}\,м$, сделанное в дне резервуара?

Решение. Скорость истечения жидкости по закону Бернулли выражается формулой $V = \sigma\sqrt{2gx}$, причем для воды $\sigma \approx 0{,}6$.

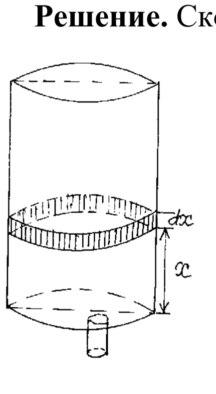

Рис. 21.

Пусть через t *сек* после истечения воды уровень оставшейся воды в резервуаре был равен x *м*, а за время dt *сек* понизился на dx *м*. Вычислим объем воды, вытекающей за этот бесконечно малый промежуток времени dt, двумя способами.

Во-первых, этот объем dW равен объему

цилиндрического слоя высотой dx и радиусом основания r ($r=2м$). Таким образом, $dW = \pi \cdot r^2 dx$.

Во-вторых, этот объем равен объему цилиндра, основанием которого служит отверстие в дне резервуара $\rho = \frac{1}{12} м$, а высота равна Vdt, где V – скорость истечения воды, т.е.

$$dW = \pi\rho^2 Vdt = 0,6\pi\rho^2 \sqrt{2gx}dt.$$

Приравнивая полученные выражения, получим

$$0,6\pi\rho^2 \sqrt{2gx}dt = \pi r^2 dx.$$

Отсюда $dt = \frac{r^2}{0,6\rho^2\sqrt{2gx}}dx$, где $x \in [0;6]$.

Интегрируя это равенство, получим время истечения воды

$$t = \int_0^6 \frac{r^2}{0,6\rho^2\sqrt{2g}} \cdot \frac{dx}{\sqrt{x}} = \frac{r^2}{0,6\rho^2\sqrt{2g}} \cdot 2\sqrt{x}\Big|_0^6 = \frac{10}{\sqrt{3g}} \cdot \frac{r^2}{\rho^2}.$$

Используя данные задачи: $r=2\,м$, $\rho = \frac{1}{12} м$, $n = 9,8 \, м/сек.^2$, получаем $t \approx 1062 сек. = 17,7 мин$.

§3. Задачи начал анализа

Задача 1. С какой силой вода давит на вертикальный прямоугольный шлюз с основанием $18\,м$ и высотой $6\,м$?

Решение. Сила, с которой вода давит на каждую точку, находящуюся на высоте x от поверхности воды прямоугольного вертикального шлюза, равна весу столба воды, находящегося над этим уровнем.

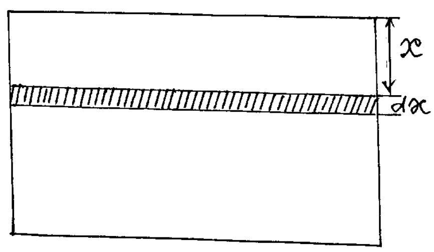

Рис. 22.

Выделим элементарную площадь шириной dx у шлюза на высоте x от поверхности.

Величина давления жидкости на горизонтальную площадку зависит от глубины ее погружения x, т.е. от расстояния площадки до поверхности жидкости : $P = \delta \cdot Sx$, где δ – удельный вес жидкости; S – площадь заштрихованной полоски (рис. 22). Сила давления воды будет некоторой функцией $P(x)$. Найдем дифференциал dP этой функции. Допустим ввиду малости dx, что все точки заштрихованной полоски находятся на глубине x. Тогда приближенная величина давления воды на эту полоску будет равна весу столба воды, имеющего основанием эту полоску, а высоту, равную глубине x. Следовательно, $dp = 18\delta \cdot xdx = 18xdx$ (удельный вес воды $\delta = 1\,{}^{г}\!/_{см^3}$).

Согласно условию задачи глубина x изменяется на отрезке [0;6], поэтому искомое давление на весь шлюз найдем, интегрируя dp в пределах от 0 до 6, т.е.

$$P = \int_0^6 18xdx = 9x^2 \Big|_0^6 = 108\,(т) = 108000 \cdot 9{,}81\,(н) = 1059480\,(н) \approx 1{,}06\,(мн)$$

($н$ (ньютон) – единица силы (веса), $1н \approx 0{,}102кг$; $1кг \approx 9{,}81н$).

Задача 2. Вычислить, с какой силой вода давит на вертикальную плотину, имеющую форму трапеции, верхнее основание которой равно $70\,м$, нижнее $50\,м$, а высота $20\,м$.

Решение. Допуская, что заштрихованная полоска шириной dx расположена на глубине x в горизонтальной плоскости и что она является прямоугольником со сторонами dx и y, найдем приближенно силу давления воды на эту полоску.

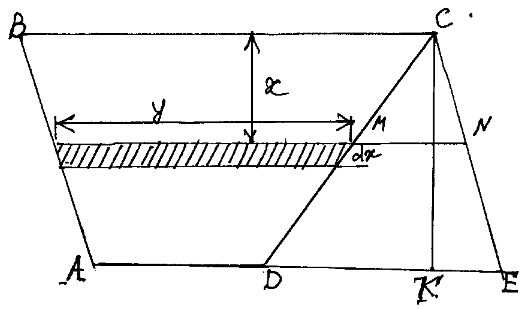

Рис. 23.

$dP = xydx$, где $x \in [0;20]$.

Тогда $P = \int_0^{20} xydx$.

Для вычисления интеграла выразим переменную y через x. Проведем $CE \| AB$, из подобия треугольников DCE и MCN имеем:

$$\frac{DE}{MN} = \frac{h}{x},\ \text{где } DE=70-50=20;\ MN=70-y,\ h=20.$$

Следовательно,

$$\frac{20}{70-y} = \frac{20}{x},\ \text{откуда } 70-y=x,\ \text{т.е. } y=70-x.$$

Дифференциал силы $dP = xdS = x(70-x)dx$.

$$P = \int_0^{20} x(70-x)dx = \int_0^{20} (70x - x^2)dx = \left(35x^2 - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^{20} =$$

$$= 14000 - \frac{8000}{3} = \frac{50000}{3}\,(т) = 490{,}5\,(мн).$$

Задача 3. Вычислить работу, которую необходимо затратить, чтобы выкачать воду из резервуара, имеющего форму конуса, обращенного вершиной вниз. Высота конуса h, радиус основания R.

Решение. Работа A, затрачиваемая на поднятие некоторого тела, зависит от высоты x его подъема и веса тела P. $A=Px$. Допустим, что работа, затраченная на выкачивание слоя воды толщиной x, есть некоторая функция $A(x)$, найдем дифференциал этой функции. При увеличении x на величину dx объем слоя воды увеличится на $\Delta V \approx \pi \cdot r^2 dx$, а его вес $\Delta p = \pi\delta \cdot r^2 dx$. Следовательно, затраченная работа увеличится на $\Delta A \approx \pi\delta \cdot r^2 x dx = dA$, где $x \in [0, h]$. Искомая работа $A = \int_0^h \pi\delta \cdot r^2 x dx$.

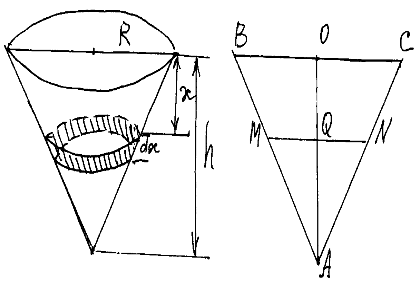

Рис. 24.

Найдем r из подобия треугольников AOC и AQN

$$\frac{R}{r} = \frac{h}{h-x}\ ;\ r = \frac{R(h-x)}{h}\ .$$

Тогда $A = \pi\delta \int_0^h \frac{R^2(h-x)^2}{h^2} x dx = \pi\delta \frac{R^2}{h^2} \int_0^h \left(h^2 x - 2hx^2 + x^3\right) dx =$

$$= \pi\delta \frac{R^2}{h^2}\left(h^2 \frac{x^2}{2} - \frac{2}{3}hx^3 + \frac{x^4}{4}\right)\Bigg|_0^h = \pi\delta \frac{R^2}{h^2}\left(\frac{h^4}{2} - \frac{2}{3}h^4 + \frac{1}{4}h^4\right) = \frac{\pi R^2}{12} h^2 \text{ (ед.раб.)}.$$

Задача 4. Вычислить работу, которую необходимо затратить, чтобы поднять тело массы m с поверхности Земли на высоту h (радиус Земли R=6400*км*). С помощью полученного результата определить вторую космическую скорость (скорость, при которой вертикально поднимающееся тело может подняться на любую высоту).

Решение. На ракету, имеющую массу m, по закону всемирного тяготения действует сила $F = G\frac{mM}{x^2}$, где G – гравитационная постоянная; M – масса Земли; m – масса ракеты; $x \in [R, R+h]$, $\frac{CM}{R^2} = g_0 \approx 9{,}8 \,{}^{м}\!/\!{}_{c^2}$ – ускорение свободного падения.

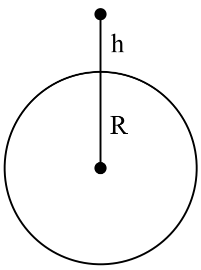

Рис. 25.

Полагая, что работа, совершаемая двигателем ракеты при подъеме ее на высоту x, есть некоторая функция $A(x)$, и допуская, что при дальнейшем подъеме на бесконечно малую высоту dx сила F остается неизменной, найдем приближенную величину приращения работы

$$\Delta A(x) \approx F(x)dx = G\frac{mM}{x^2}dx = dA\ .$$

Работа $A=\int\limits_{R}^{R+h}F(x)dx=GmM\int\limits_{R}^{R+h}\frac{dx}{x^2}=-\frac{GmM}{x}\Bigg|_{R}^{R+h}=GmM\left(\frac{1}{R}-\frac{1}{R+h}\right)=\frac{GmMh}{R(R+h)}$.

В то же время работа равна изменению кинетической энергии ракеты

$$A=|\Delta W|=|W_2-W_1|=\frac{mV^2}{2}.$$

Чтобы рассчитать вторую космическую скорость, которую надо сообщить ракете у поверхности Земли для преодоления земного притяжения, нужно положить $h=+\infty$.

Тогда $A=\lim\limits_{h\to\infty}\frac{GmMh}{R(R+h)}=\frac{GmM}{R}$, а следовательно, $\frac{GmM}{R}=\frac{mV^2}{2}$.

Так как $\frac{GM}{R^2}=g_0$, то $V=\sqrt{2g_0R}=\sqrt{2\cdot 9{,}8\cdot 6{,}4\cdot 10^6}\,(м/с)\approx 11{,}2\cdot 10^3\,(м/с)$.

Ответ. Вторая космическая скорость $V\approx 11{,}2\cdot 10^3$ (*м/с*).

Задача 5. Вычислить работу, которую надо затратить, чтобы растянуть пружину, находящуюся в положении равновесия, на 10 *см*. Известно, что при растяжении пружины на 1 *см* сила натяжения равна 5 *н*.

Решение. Упругая сила, с которой действует пружина на тело, подчиняется закону Гука, согласно которому $F=kx$, где k – коэффициент пропорциональности, а x – удлинение пружины. Из условия находим k.

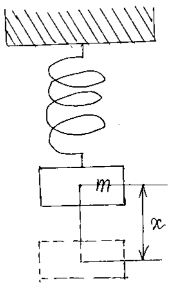

Рис. 26.

Так как при растяжении на 1*см*=0,01*м* сила натяжения равна 5*н*, то 5*н*=$k\cdot$0,01*м*. Следовательно, $k=500\frac{н}{м}$, F(x)=500x, $x\in[0;0{,}1]$.

Работа вычисляется по формуле:

$A=\int\limits_{a}^{b}F(x)dx$, т.е. $A=\int\limits_{0}^{0,1}500x\,dx=250x^2\Bigg|_{0}^{0,1}=250\cdot 0{,}01=2{,}5(нм)=2{,}5(дж)$.

Задача 6. Вычислить работу, которую надо затратить, чтобы выкачать воду из резервуара, имеющего форму усеченного конуса высотой H, если радиус нижнего основания r, а верхнего R, $R>r$.

Решение. Будем считать, что элементарный слой воды, находящийся на глубине x, имеет форму прямого кругового цилиндра высотой dx с радиусом основания $p = r + y$. Из подобия ΔABC и ΔDBE имеем

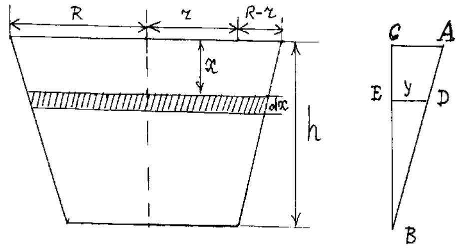

Рис. 27.

$$\frac{R-r}{H} = \frac{y}{H-x} \quad ; \quad y = \frac{(R-r)(H-x)}{H}.$$

Следовательно,

$$p = r + \frac{(R-r)(H-x)}{H} = R + \frac{R-r}{H}x.$$

Тогда объем элементарного слоя будет равен

$$dV = \pi\left(R + \frac{R-r}{H}x\right)^2 dx = \pi\left(R^2 + \frac{2R}{H}(R-r)x + \left(\frac{R-r}{H}\right)^2 x^2\right)dx.$$

Элементарная работа, совершаемая для поднятия этого слоя на высоту x, равна

$dA = \rho g x \pi \left(R + \frac{(R-r)}{H}x\right)^2 dx$, где ρ=1 – плотность воды; g – гравитационная постоянная. Следовательно,

$$A = \int_0^H \rho g \pi x\left(R + \frac{R-r}{H}x\right)^2 dx = \rho g \pi \int_0^H \left(R^2 x + \frac{2(R-r)}{H}x^2 + \left(\frac{R-r}{H}\right)^2 x^3\right)dx =$$

$$= \rho g \pi \left(\frac{R^2 x^2}{2} + \frac{2(R-r)}{H}\cdot\frac{x^3}{3} + \left(\frac{R-r}{H}\right)^2 \frac{x^4}{4}\right)\Bigg|_0^H =$$

$$= \rho g \pi \left(\frac{R^2 H^2}{2} + \frac{2(R-r)}{H}\cdot\frac{H^3}{3} + \frac{(R-r)^2}{H^2}\cdot\frac{H^4}{4}\right) = \rho g \pi H^2 \left(\frac{R^2}{2} + \frac{2}{3}(R-r) + \frac{1}{4}(R-r)^2\right) =$$

$$= \rho g \pi H^2 \left(\frac{3}{4}R^2 + \frac{2}{3}R - \frac{2}{3}r - \frac{Rr}{2} + \frac{r^2}{2}\right) \text{ (ед.раб.).}$$

Задача 7. Вычислить работу, которую необходимо затратить, чтобы выкачать воду из вертикально стоящей цистерны, радиус основания которой равен *R*, а высота *H*.

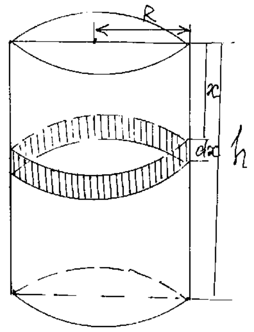

Рис. 28.

Решение. Объем элементарного слоя воды $dV = \pi R^2 dx$, элементарная работа, совершаемая для поднятия этого слоя воды на высоту x, равна $dA = \rho g x \pi R^2 dx$, $x \in [0; H]$. Следовательно,

$$A = \int_0^H \rho g \pi R^2 x dx = \rho g \pi R^2 \frac{x^2}{2}\Bigg|_0^H = \frac{\rho g \pi R^2 H^2}{2} \text{ (дж.).}$$

Задача 8. Вычислить кинетическую энергию однородного диска массы m и радиуса r, вращающегося с угловой скоростью ω вокруг оси, проходящей через его центр перпендикулярно к его плоскости.

Решение. Полная кинетическая энергия $E_{кин.} = \frac{mV^2}{2} + \frac{J\omega^2}{2}$. Для вращательного движения V=0 , следовательно, $E_{кин} = \frac{J\omega^2}{2}$, где J – момент инерции. Выделим элементарное кольцо ширины dx, его элементарный момент инерции $dJ = d(mr^2) = \nu \cdot 2\pi \cdot xdx \cdot x^2 = 2\pi \cdot x^3 dx$. Тогда элементарная кинетическая энергия $dE_к = \frac{\omega^2}{2} \cdot 2\pi\nu \cdot x^3 dx$, а следовательно,

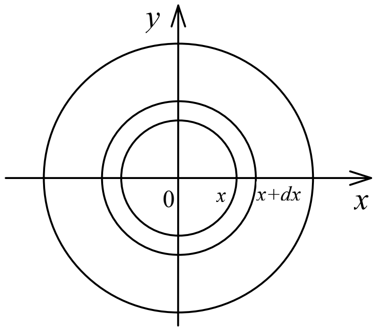

Рис. 29.

$$E_к = \int_0^R \frac{\omega^2}{2} \cdot 2\pi\nu \cdot x^3 dx = \pi\nu\omega^2 \cdot \frac{x^4}{4}\Bigg|_0^R = \pi\nu\frac{\omega^2}{4}R^4 = \nu\pi R^2 \cdot \frac{\omega^2}{2} \cdot \frac{R^2}{2} =$$

$= \frac{mR^2}{2} \cdot \frac{\omega^2}{2} = J \cdot \frac{\omega^2}{2}$; где $m = \nu\pi R^2$, $\frac{mR^2}{2} = J$ – момент инерции диска.

Ответ. $E_{кин} = J \cdot \frac{\omega^2}{2}$.

Задача 9. Найти силу давления воды на вертикальную треугольную пластинку с основанием a и высотой h, погруженную в жидкость.

Решение. Рассмотрим горизонтальную полоску, находящуюся на глубине x и имеющую ширину dx. Приближенно можно считать эту полоску прямоугольником, площадь которого $dS = MN \cdot dx$. Из подобия треугольников ABC и MBN имеем $\frac{x}{h} = \frac{MN}{a}$, откуда $MN = \frac{ax}{h}$ и $dS = \frac{ax}{h}dx$. Сила давления воды на эту полоску приближенно равна

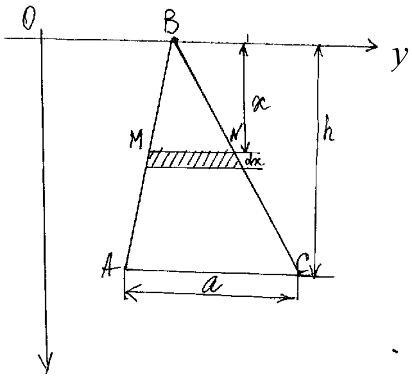

Рис. 30.

$dP = xdS = \frac{ax}{h}dx$, $x \in [0, h]$.

Тогда сила давления на всю пластинку ABC равна $P = \int_0^h \frac{a}{h}x^2 dx = \frac{ax^3}{3h}\Bigg|_0^h = \frac{ah^2}{3}$.

Ответ. $P = \frac{ah^2}{3}$.

Примечание . Задачи настоящего параграфа взяты из школьного учебника: Виленкин Н.Я. и др. Алгебра и математический анализ для 10 класса. М.: Просвещение. 1995.

§4. Расчетные задания

Задание 1. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями, заданными: а) в явном виде; б) параметрически; в) в полярных координатах.

№ п/п	а)	б)	в)
1.1.	$y = x^2+1, x+y=3.$	$\begin{cases} x = a\cos^3 t, \\ y = a\sin^3 t, \end{cases} 0 \le t \le 2\pi .$	$\rho^2 = a^2 \cos 4\varphi .$
1.2.	$y^2 = 2x+1,$ $x-y-1=0.$	$\begin{cases} x = a(t-\sin t), \\ y = a(1-\cos t), \end{cases} 0 \le t \le 2\pi ,$ $y=0.$	$\rho = \dfrac{a}{\cos\left(\varphi - \dfrac{\pi}{3}\right)}, \; x=0, \; y=0.$
1.3.	$y = 2-x^2, y^2 = x^3.$	$\begin{cases} x = \dfrac{t}{3}(6-t), \\ y = \dfrac{t^2}{8}(6-t). \end{cases}$	$\rho = 2\sqrt{3}a\cos\varphi ,$ $\rho = 2a\sin\varphi .$
1.4.	$y = x, y = x+\sin^2 x ,$ $0 \le x \le \pi .$	$\begin{cases} x = a\cos t(1+\cos t), \\ y = a\sin t(1+\cos t), \end{cases}$ $0 \le t \le 2\pi .$	$\rho = 2-\cos\varphi ,$ $\rho = \cos\varphi .$
1.5.	$y = x^2, x=-1,$ $x=2, y=0.$	$\begin{cases} x = t^2, \\ y = \dfrac{t-t^2}{3}. \end{cases}$	$\rho = a\cos\varphi ,$ $\rho = a\cos\varphi + a\sin\varphi .$
1.6.	$y=-x, y = 2x-x^2.$	$\begin{cases} x = a\cos t, \\ y = a\sin^3 t. \end{cases}$	$\rho = 2a(\cos\theta + 2).$
1.7.	$y = \sin x, y=0,$ $0 \le x \le \pi .$	$\begin{cases} x = a\cos t, \\ y = b\sin t. \end{cases}$	$\rho = a\sin 2\varphi .$
1.8.	$y = 4x-x^2, y=0.$	$\begin{cases} x = at - b\sin t, & 0 \le t \le 2\pi, \\ y = a - b\cos t, & y=0. \end{cases}$	$\rho = a\sin 3\varphi .$
1.9.	$y = e^x, y = e^{-x}, x=1.$	$\begin{cases} x = 12\cos t + 5\sin t, \\ y = 5\cos t - 12\sin t, \end{cases}$ $0 \le t \le 2\pi .$	$\rho = a\cos\varphi ,$ $\rho = a\sin\varphi .$
1.10.	$y = \ln x, y = \ln^2 x .$	$\begin{cases} x = a(\cos t + t\sin t), \\ y = a(\sin t - t\cos t), \end{cases}$ $0 \le t \le 2\pi .$	$\rho = 4\sin^2\varphi .$
1.11.	$y^2 = 2px, x^2 = 2py .$	$\begin{cases} x = a(2\cos t - \cos 2t), \\ y = a(2\sin t - \sin 2t). \end{cases}$	$\rho^2 = 2\cos 2\theta .$
1.12	$x^2+y^2+6x-2y+8=0 ,$ $y = x^2+6x+10 .$	$\begin{cases} x = 8\sqrt{2}\cos^3 t, \\ y = \sqrt{2}\sin^3 t, \end{cases} x \ge 4 .$	$\rho = \sin^2\dfrac{\theta}{2}, \; 0 \le \theta \le \dfrac{\pi}{2} .$

1.13	$x=4; y=3x^2-6x, y=0$, $0\le x\le 4$.	$\begin{cases} x=\sqrt{2}\cos t, \\ y=4\sqrt{2}\sin t, \end{cases}$ $y\ge 4$.	$\rho = a\sin 3\theta$.
1.14	$y=2x^2+3x-9, y=0$.	$\begin{cases} x=4\sqrt{2}\cos^3 t, \\ y=\sqrt{2}\sin^3 t, \end{cases}$ $x\ge 2$.	$\rho=2\cos\theta,\ \ \rho\ge 1$.
1.15	$y=x^2+6x+5, y=0$.	$\begin{cases} x=4(t-\sin t), \\ y=4(1-\cos t), \end{cases}$ $0\le x\le 8\pi$, $y\ge 6$.	$\rho=a\varphi$, $\rho=a\cos\varphi$.
1.16	$y=x^3-6x^2+11x-6$, $y=0$.	$\begin{cases} x=6\cos t, \\ y=4\sin t, \end{cases}$ $y\ge 2\sqrt{3}$.	$\rho=a(1-\cos\varphi)$, $0\le\varphi\le\pi$.
1.17	$y=(x+2)^2, y=4-x$.	$\begin{cases} x=4(t-\sin t), \\ y=4(1-\cos t), \end{cases}$ $y\ge 6$, $0\le x\le 2\pi$.	$\rho=a\sin\varphi$, $\rho=2a\sin\varphi$.
1.18	$xy=a^2, x=1, x=5, y=0.$	$\begin{cases} x=32\cos^3 t, \\ y=3\sin^3 t, \end{cases}$ $x\ge 12\sqrt{3}$.	$\rho=a\cos\varphi$, $\rho=2a\cos\varphi$.
1.19	$xy=3, x+y=4.$	$\begin{cases} x=6\cos t, \\ y=2\sin t, \end{cases}$ $y\ge\sqrt{3}$.	$\rho=a$, $\rho=a\sin\varphi$.
1.20	$y=\dfrac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}\right)$, $x=a, y=0.$	$\begin{cases} x=2+2\cos t, \\ y=2+2\sin t. \end{cases}$	$\rho=a$, $\rho=a\cos\varphi$.
1.21	$y=\dfrac{8}{4+x^2}, y=\dfrac{x^2}{4}.$	$\begin{cases} x=2(t-\sin t), \\ y=2(1-\cos t), \end{cases}$ $y\ge 2$, $0\le x\le 4\pi$.	$\rho=\dfrac{1}{2}+\cos\varphi$.
1.22	$y=x+1, y=\cos x, y=0.$	$\begin{cases} x=2\sqrt{2}\cos^3 t, \\ y=\sqrt{2}\sin^3 t, \end{cases}$ $x\ge 1$.	$\rho=\cos\varphi-\sin\varphi$.
1.23	$y^2=x^3-x^2$, $x=2$.	$\begin{cases} x=16\cos^3 t, \\ y=\sin^3 t, \end{cases}$ $x\ge 6\sqrt{3}$.	$\rho=3\sin\varphi$, $\rho=5\sin\varphi$.
1.24	$y=4x^2, y=\dfrac{x^2}{9}, y=2$.	$\begin{cases} x=3(t-\sin t), \\ y=3(1-\cos t), \end{cases}$ $y\ge 3$, $0\le t\le 6\pi$.	$\rho=\sqrt{2}\cos\left(\varphi-\dfrac{\pi}{2}\right)$.
1.25	$y=(x-4)^2, y=16-x^2$, $y=0$.	$\begin{cases} x=4\cos t+5\sin t, \\ y=5\cos t-4\sin t, \end{cases}$ $0\le t\le 6\pi$.	$\rho=\sin\varphi$, $\rho=\sqrt{2}\cos\left(\varphi-\dfrac{\pi}{4}\right)$, $0\le\varphi\le\dfrac{3}{4}\pi$.

Задача 2. Найти длину дуги кривой, заданной уравнением:

а) в явном виде; б) параметрически; в) в полярных координатах.

№ п/п	а)	б)	в)
2.1	$y=\frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}\right)$, $0\le x\le 1$.	$\begin{cases}x=4(t-\sin t),\\ y=4(1-\cos t),\end{cases}$ $0\le t\le 2\pi$.	$\rho=2(1-\cos\varphi)$.
2.2	$y=ax^2$, $0\le x\le 1$.	$\begin{cases}x=2R\cos\frac{t}{3}+R\cos\frac{2t}{3},\\ y=2\sin\frac{t}{3}-\sin\frac{2t}{3},\end{cases}$ $0\le t\le 2\pi$.	$\rho=a\varphi$, $0\le\varphi\le\pi$.
2.3	$y=\ln x$, $1\le x\le\sqrt{3}$.	$\begin{cases}x=2\cos t-\cos 2t,\\ y=2\sin t-\sin 2t,\end{cases}$ $0\le t\le 2\pi$.	$\rho=\frac{a}{\varphi}$, $\varphi_0\le\varphi\le 2\pi$.
2.4	$y=e^x$, $0\le x\le 1$.	$\begin{cases}x=4\cos^3 t,\\ y=4\sin^3 t.\end{cases}$	$\rho=2a\frac{\sin^2\varphi}{\cos\varphi}$, $\varphi_1\le\varphi\le\varphi_2$.
2.5	$y=\frac{x^2}{2p}$, $0\le x\le\sqrt{2p}$.	$\begin{cases}x=\sqrt{2}\sin t,\\ y=\cos t.\end{cases}$	$\rho=p(1+\cos\theta)$, $0\le\theta\le 2\pi$.
2.6	$y^2=x^3$, $0\le x\le 4$.	$\begin{cases}x=a\cos t(1-\cos t),\\ y=a\sin t(1-\cos t).\end{cases}$	$\rho=e^{a\theta}$, $0\le\theta\le\pi$.
2.7	$y^2=px$, $0\le x\le 1$.	$\begin{cases}x=e^t\sin t,\\ y=e^t\cos t,\end{cases}$ $0\le t\le 2\pi$.	$\rho=a\sin^3\frac{\varphi}{3}$.
2.8	$y=\ln\frac{e^x+1}{e^x-1}$, $a\le x\le b$.	$\begin{cases}x=t^2,\\ y=t-\frac{1}{3}t^3,\end{cases}$ $0\le t\le\sqrt{3}$.	$\rho=\frac{a}{\cos\left(\varphi-\frac{\pi}{3}\right)}$, $0\le\varphi\le\frac{\pi}{2}$.
2.9	$y=\ln\sin x$, $\frac{\pi}{2}\le x\le\frac{\pi}{3}$.	$\begin{cases}x=\frac{c^2}{a}\cos^3 t,\\ y=\frac{c^2}{b}\sin^3 t.\end{cases}$	$\rho=\frac{a}{\cos^2\frac{\varphi}{2}}$, $0\le\varphi\le\varphi_0$.
2.10	$y=\sqrt{e^{2x}-1}-arctg\sqrt{e^{2x}-1}$, $0\le x\le 1$.	$\begin{cases}x=(t^2-2)\sin t-2t\cos t,\\ y=(2-t^2)\cos t+2t\sin t,\end{cases}$ $0\le t\le\pi$.	$\rho=a\cos^4\frac{\pi}{4}$.
2.11	$y=\ln\left(cth\frac{x}{a}\right)$, $a\le x\le b$.	$\begin{cases}x=e^t(\cos t+\sin t),\\ y=e^t(\cos t-\sin t),\end{cases}$ $0\le t\le\pi$.	$\rho=\frac{1}{1+\cos\varphi}$, $-\frac{\pi}{2}\le\varphi\le\frac{\pi}{2}$.