Приложения преобразования Лапласа к решению дифференциальных уравнений

Учебное пособие

Благовещенск 2007

Федеральное агентство образования

АМУРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Факультет математики и информатики

Г. П. Вохминцева,
Г. Н. Торопчина, И. Н. Шевченко

Приложения преобразования Лапласа к решению дифференциальных уравнений

Учебное пособие

Благовещенск 2007

ББК 22. 161 я73+65
В 61

Печатается по решению
редакционного – издательского совета
факультета математики и информатики
Амурского государственного
университета

Вохминцева Г. П., Торопчина Г. Н., Шевченко И. Н.

Приложения преобразования Лапласа к решению дифференциальных уравнений. **Учебное пособие. Благовещенск: Амурский гос. ун-т, 2007.**

Пособие предназначено для студентов второго курса. В нем рассматриваются теоретические сведения, решения типовых задач, задания для самостоятельной работы, контрольные задания, расчетно-графические работы.

Рецензент: С. В. Ланкин, зав. кафедрой общей физики БГПУ,
доктор физ.-мат. наук., профессор, заслуженный работник
Высшей школы Российской Федерации

Научный редактор – д-р техн. наук проф. Г. В. Литовка.

Операционное исчисление в настоящее время широко применяется в самых различных областях науки и техники. Особую роль оно играет в линейных физических системах электротехники, автоматизации, механики и других отраслях знаний.

Операторный метод ввёл О. Хевисайд в конце прошлого столетия при решении задач электротехники. Однако этот метод не был им математически обоснован и поэтому не нашёл широкого применения. Только после большого количества работ, посвящённых обоснованию операторного исчисления, метод завоевал всеобщее признание. В основу операторного исчисления было положено прямое интегральное преобразование Лапласа, с помощью которого функция времени преобразуется в функции комплексного переменного.

Современный математический аппарат операционного исчисления позволяет решать задачи, описываемые системами линейных дифференциальных уравнений (обыкновенных и с частными производными), разностными и дифференциально-разностными уравнениями, линейными дифференциальными уравнениями с переменными коэффициентами и некоторыми типами интегральных уравнений. Такая универсальность метода объясняется его эффективностью и возможно-стью получить решение наиболее простыми и экономными путями и средствами.

§ 1. ОРИГИНАЛЫ И ИЗОБРАЖЕНИЯ.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Оригиналом называется всякая функция $f(t)$ действительного переменного t, удовлетворяющая следующим условиям:

1) $f(t)$ и её производная $f'(t)$ на любом конечном интервале оси Ot имеет конечное число точек разрыва $1^{\text{-го}}$ рода;

2) $f(t) = 0$, при $t < 0$;

3) существуют такие постоянные $M > 0$ и $S_0 \geq 0$, что $|f(t)| < M \cdot e^{S_0 t}$ для всех $t > 0$, где S_0 – показатель роста функции $f(t)$.

Условие (2) вводится в связи с тем, что во многих задачах аргумент t рассматривается как время.

В дальнейшем под заданной с помощью аналитической формулы функцией $f(t)$ будем подразумевать произведение этой функции на функцию $\sigma_0(t) = \begin{cases} 0 & при\ t < 0, \\ 1 & при\ t > 0, \end{cases}$ называемую единичной функцией Хевисайда, т.е. считать $f(t) = 0$ при $t < 0$.

Так, например, мы будем писать $t^n,\ e^{\alpha t},\ \sin \beta t$ и т.д., подразумевая при этом соответственно $\sigma_0(t) \cdot t^n,\ \sigma_0(t) e^{\alpha t},\ \sigma_0(t) \sin \beta t$ и т.д..

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Изображением $F(p)$ оригинала $f(t)$ называется функция комплексного переменного $p = \sigma + \tau i$ ($\sigma,\ \tau$ -действительные переменные), определяемая интегралом Лапласа:

$$F(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t)\, dt \qquad (1)$$

Интеграл (1) равномерно сходится, если функция $f(t)$ удовлетворяет указанным выше условиям и $\operatorname{Re} p = \sigma > S_0$.

Соответствие между оригиналом $f(t)$ и его изображением $F(p)$ обозначают символически: $f(t) \div F(p)$ *или* $\alpha\{\, f(t)\,\} = F(p)$ *или* $F(p) \Leftrightarrow f(t)$.

Отметим основные свойства изображений:

1) Если $F(p)$ является изображением двух оригиналов $f_1(t)$ и $f_2(t)$, то эти оригиналы совпадают во всех точках непрерывности (теорема единственности).

2) Если $f(t) = c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t)$ *при этом* $f_1(t) \div F_1(p)$, $f_2(t) \div F_2(p)$, *то* $f(t) \div F(p) = c_1 F_1(p) + c_2 F_2(p)$ (свойство линейности).

3) Всякое изображение $F(p)$ функции $f(t)$ при $p \to \infty$, стремится к нулю ($Re\, p = \sigma \to \infty$).

ЗАМЕЧАНИЕ. Константы и многочлены от p с положительными степенями не могут быть изображениями.

Изображения некоторых функций:

1) Изображение функции Хевисайда.

Имеем $\sigma_0(t) = \begin{cases} 0, & при\ t < 0, \\ 1, & при\ t > 0. \end{cases}$

Используя формулу (1), получим

$$\sigma_0(t) \div \int_0^\infty 1 \cdot e^{-pt}\, dt = \left. \frac{e^{-pt}}{-p} \right|_0^\infty = \frac{1}{p}. \qquad (2)$$

2) Изображения показательных функций.

$$e^{-\alpha t} \div \int_0^\infty e^{-\alpha t} \cdot e^{-pt} dt = \int_0^\infty e^{-(\alpha+p)\cdot t} dt = \left. \frac{e^{-(\alpha+p)\cdot t}}{\alpha + p} \right|_0^\infty = \frac{1}{p+\alpha}; \qquad (3)$$

$$e^{\alpha t} \div \int_0^\infty e^{\alpha t} \cdot e^{-pt} dt = \int_0^\infty e^{(\alpha-p)\cdot t} dt = \left. \frac{e^{(\alpha-p)\cdot t}}{\alpha - p} \right|_0^\infty = \frac{1}{p-\alpha}; \qquad (4)$$

3) Изображение гиперболических функций.

$$ch\beta t = \frac{1}{2}\left(e^{\beta t} + e^{-\beta t}\right) \div \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p-\beta} + \frac{1}{p+\beta}\right) = \frac{p}{p^2 - \beta^2}; \qquad (5)$$

$$sh\beta t = \frac{1}{2}\left(e^{\beta t} - e^{-\beta t}\right) \div \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p-\beta} - \frac{1}{p+\beta}\right) = \frac{\beta}{p^2 - \beta^2}; \qquad (6)$$

4) Изображения тригонометрических функций.

$$\cos\beta t = \frac{1}{2}\left(e^{i\beta t} + e^{-i\beta t}\right) \div \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p - i\beta} + \frac{1}{p + i\beta}\right) = \frac{p^2}{p^2 + \beta^2}; \qquad (7)$$

$$\sin\beta t = \frac{1}{2i}\left(e^{i\beta t} - e^{-i\beta t}\right) \div \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{p - i\beta} - \frac{1}{p + i\beta}\right) = \frac{\beta}{p^2 + \beta^2}. \qquad (8)$$

Найдём изображения следующих функций:

а) $2 \div \frac{2}{p}$; *б*) $-\frac{1}{2} \div -\frac{1}{2p}$;

в) $e^{2t} \div \frac{1}{p-2}$; *г*) $\sin 3t \div \frac{3}{p^2+9}$;

д) $4\cos 5t \div 4\frac{p}{p^2+25}$; *е*) $1 + e^{-2t} + 3\cos t \div \frac{1}{p} + \frac{1}{p+2} + \frac{3p}{p^2+1}$.

§ 2. ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕМЫ ОПЕРАЦИОННОГО ИСЧЕСЛЕНИЯ.

Соотношение между оригиналами и соответствующими им изображениями на практике находятся не по определению, а с помощью основных теорем операционного исчисления. Приведём их без доказательства при условии $f(t) \div F(p)$.

1. Теорема подобия.

Для любого постоянного $a > 0$ $f(at) \div \frac{1}{a}F\left(\frac{p}{a}\right)$.

2. Дифференцирование оригинала.

Если функция $f(t)$ и её производные являются оригиналами, то

$$f(t) \div F(p),$$
$$f'(t) \div pF(p) - f(0),$$
$$f''(t) \div p^2F(p) - pf'(0) - f'(0),$$
$$. \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ .$$
$$f^{(n)}(t) \div p^nF(p) - p^{n-1}f(0) - p^{n-2}f'(0) - \ldots - f^{n-1}(0).$$

3. Дифференцирование изображений.

Дифференцирование изображения сводится к умножению на *(- t)* оригинала.

$$t\,f(t) \div \frac{d}{dp}F(p),$$

$$t^2 f(t) \div (-1)^2 \frac{d^2}{dp^2}F(p),$$

$$t^3 f(t) \div (-1)^3 \frac{d^3}{dp^3}F(p),$$

$$. \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ .$$

$$t^n f(t) \div (-1)^n \frac{d^n}{dp^n}F(p).$$

Следствие 1. Так как $\sigma_0(t) \div \dfrac{1}{p}$, то

$$t \div \frac{1}{p^2};$$
$$t^2 \div \frac{2!}{p^3};$$
$$. \quad . \quad . \quad . \quad .$$
$$t^n \div \frac{n!}{p^{n+1}}.$$

Откуда $\dfrac{1}{p^{n+1}} \div \dfrac{t^n}{n!}$.

Следствие 2. Так как $e^{\alpha t} \div \dfrac{1}{p-\alpha}$, то $t^n e^{\alpha t} \div \dfrac{n!}{(p-\alpha)^{n+1}}$.

4. Интегрирование оригинала.

Интегрирование оригинала сводится к делению изображения на аргумент *p:*

$$\int_0^t f(t)dt \div \frac{F(p)}{p}.$$

5. Интегрирование изображения

Если $\int_p^\infty F(p)dp$ сходится, то он служит изображением функции $\dfrac{f(t)}{t}$:

$$\frac{f(t)}{t} \div \int_p^\infty F(p)dp.$$

6. Теорема запаздывания.

Для любого положительного τ :

$f(t-\tau) \div e^{-p\tau}F(p)$, *где* $f(t) \div F(p)$.

7. Теорема смещения.

Умножение оригинала на $e^{\alpha t}$ соответствует запаздывание изображения на α :

$e^{\alpha t} f(t) \div F(p-\alpha)$.

8. Теорема умножения (теорема о свёртке).

Произведение двух изображений $F_1(p)$ *и* $F_2(p)$ также является изображением, причём

$$F_1(p)\cdot F_2(p)\div\int_0^t f_1(\tau)\cdot f_2(t-\tau)d\tau$$

или

$$F_1(p)\cdot F_2(p)\div\int_0^t f_2(\tau)\cdot f_1(t-\tau)d\tau\ .$$

Интегралы в правых частях называют свёрткой функции $f_1(t)$ и $f_2(t)$ и обозначают $f_1 * f_2$.

9. Интегралы Дюамеля.

Если $F_1(p)\div f_1(t)$ *и* $F_2(p)\div f_2(t)$, *то*

$$p\cdot F_1(p)\cdot F_2(p)\div f_1(t)\cdot f_2(0)+\int_0^t f_1(\tau)\cdot f_2'(t-\tau)d\tau \quad \text{или}$$

$$pF_1(p)\cdot F_2(p)\div f_2(t)\cdot f_1(0)+\int_0^t f_2(\tau)\cdot f_1'(t-\tau)d\tau\ .$$

10. Изображение периодического интеграла.

Если $f(t)$ – периодическая с периодом T функция является оригиналом,

то $$f(t)\div F(p)=\frac{1}{1-e^{-Tp}}\int_0^T e^{-pt}\cdot f(t)\,dt\ .$$

С помощью перечисленных выше теорем можно записать таблицу изображений основных функций.

Таблица изображений основных функций. Таблица 1

№	Оригинал	Изображение
1	$1=\sigma_0(t)$	$\dfrac{1}{p}$
2	$\sin\beta t$	$\dfrac{\beta}{p^2+\beta^2}$
3	$\cos\beta t$	$\dfrac{p}{p^2+\beta^2}$
4	$e^{-\alpha t}$	$\dfrac{1}{p+\alpha}$
5	$ch\,\beta t$	$\dfrac{p}{p^2-\beta^2}$
6	$sh\,\beta t$	$\dfrac{\beta}{p^2-\beta^2}$
7	$e^{-\alpha t}\sin\beta t$	$\dfrac{\beta}{(p+\alpha)^2+\beta^2}$
8	$e^{-\alpha t}\cos\beta t$	$\dfrac{p+\alpha}{(p+\alpha)^2+\beta^2}$
9	$e^{-\alpha t}ch\,\beta t$	$\dfrac{p+\alpha}{(p+\alpha)^2-\beta^2}$
10	$e^{-\alpha t}sh\,\beta t$	$\dfrac{\beta}{(p+\alpha)^2-\beta^2}$
11	$\sin(t-\alpha)\quad(\alpha>0)$	$e^{-\alpha p}\cdot\dfrac{1}{p^2+1}$
12	$\cos(t-\alpha)\quad(\alpha>0)$	$e^{-\alpha p}\cdot\dfrac{p}{p^2+1}$
13	t^n	$\dfrac{n!}{p^{n+1}}$
14	$t^n\cdot f(t)$	$(-1)^n\cdot\dfrac{d^n}{dp^n}F(p)$
15	$t\cdot e^{-\alpha t}$	$\dfrac{1}{(p+\alpha)^2}$
16	$t^n\cdot e^{-\alpha t}$	$\dfrac{n!}{(p+\alpha)^{n+1}}$
17	$t\cdot\sin\beta t$	$\dfrac{2\beta p}{(p^2+\beta^2)^2}$
18	$t\cdot\cos\beta t$	$\dfrac{p^2-\beta^2}{(p^2+\beta^2)^2}$

Примеры: Найти изображения заданных оригиналов.

1) $f(t) = 4 - 5e^{3t}$.

Решение:

Используя свойство линейности и соотношения (1), (4) таблицы 1, находим

$$F(p) = \frac{4}{p} - \frac{5}{p-3} = \frac{-p-12}{p(p-3)};$$

2) $f(t) = \cos^2 3t$.

Решение: Известно, что $\cos^2 3t = \frac{1+\cos 6t}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 6t$. Используя соотношения (1), (3) таблицы 1, находим $F(p) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{p} + \frac{1}{2}\cdot\frac{p}{(p^2+36)} = \frac{p^2+18}{p(p^2+36)}$.

3) $f(t) = \frac{\sin t}{t}$.

Решение:

Используя теорему (5) и соотношение (2) таблицы 1, находим

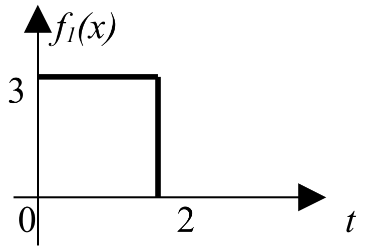
$$\frac{\sin t}{t} \div \int_p^\infty \frac{1}{p^2+1}dp = arctg\, p\Big|_p^\infty = \frac{\pi}{2} + arctg\, p;$$

4) $\int_0^t (t-\tau)^2 \cos 2\tau \, d\tau$.

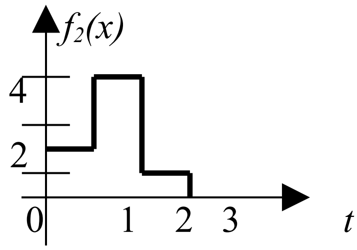
Решение:

Заметим, что данный интеграл является свёрткой функции $f_1(t) = t^2$ *и* $f_2(t) = \cos 2t$. Используя теорему умножения (8) и соотношения (3), (13), получим $F(p) = \frac{2!}{p^3}\cdot\frac{p}{p^2+4} = \frac{2}{p^2(p^2+4)}$;

5) Найти изображения функции, заданных графиками *(1)* и *(2)*.



(рис.1)



(рис.2)

Решение:

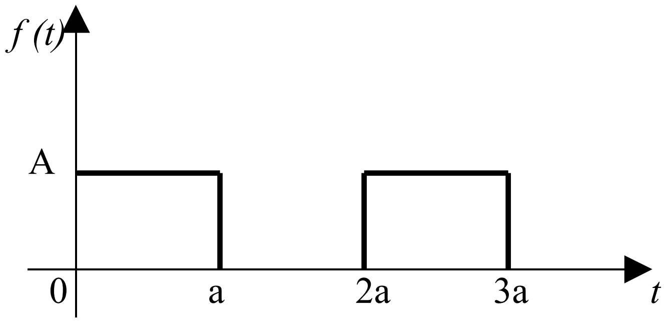
Функция $f_1(x)$ (рис.1) есть импульс величины 3, «включаемый» в момент $t=0$ и «погашаемой» в момент $t=2$, следовательно, $f_1(t) = 3 - 3\cdot\sigma_0(t-2)$. Применяя соотношение (1) таблицы 1 и теорему запаздывания (6), находим

$F_1(p) = \frac{3}{p} - \frac{3}{p}e^{-2p} = \frac{3}{p}\left(1 - e^{-2p}\right)$. Аналогично находим $f_2(t)$ (рис.2) :

$f_2(t) = 2 + 2\sigma_0(t-1) - 3\sigma_0(t-2) - 1\cdot\sigma_0(t-3)$, тогда

$$F_2(p) = \frac{2}{p} + \frac{2}{p}\cdot e^{p} - \frac{3}{p}\cdot e^{-2p} - \frac{1}{p}\cdot e^{-3p}.$$

6) Найти изображение периодического прямоугольного импульса с периодом $2a$, изображённого на рис.3.



(рис.3)

Решение:

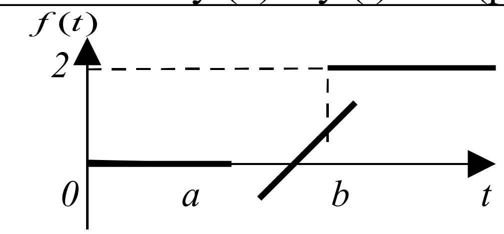
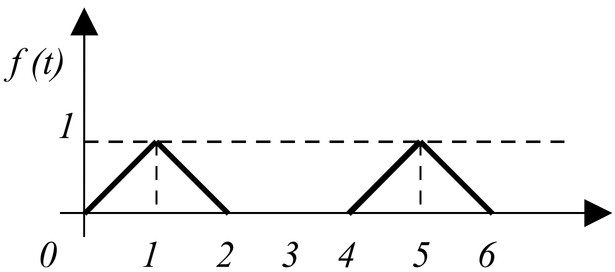
Используя изображение периодического оригинала, находим

$$f(t) = \frac{1}{1-e^{-2ap}}\cdot\int_0^a A\cdot e^{-pt}dt = -\frac{1}{1-e^{-2ap}}\cdot\frac{A}{p}\cdot e^{-p}\Big|_0^a = \frac{A}{p}\cdot\frac{1-e^{-pa}}{1-e^{-2pa}} = \frac{A}{p}\cdot\frac{1}{1+e^{-pa}}.$$

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

Найти изображения функции		
№	Оригинал $f(t)$	Ответ

1	$5\sin 4t + 3\cos 2t$	$\dfrac{23p^2+128}{(p^2+16)(p^2+4)}$
2	$t^3 - 5t^2 + 2t + 6$	$\dfrac{6-10p+2p^2+6p^3}{p^4}$
3	$e^{-t} + 3e^{-2t} + t^2$	$\dfrac{1}{p+1} + \dfrac{3}{p+2} + \dfrac{2}{p^3}$
4	$\sin^2 t$	$\dfrac{2}{p(p^2+4)}$
5	$t^2 e^{-t}$	$\dfrac{2}{(p+1)^3}$
6	$t^3 e^{2t}$	$\dfrac{6}{(p-2)^4}$
7	$te^{-t}\sin t$	$\dfrac{2(p+1)}{(p^2+2p+2)^2}$
8	$t\,ch\,bt$	$\dfrac{p^2+b^2}{(p^2-b^2)^2}$
9	$te^{-t} sh\,t$	$\dfrac{2(p+1)}{p^2(p+2)^2}$
10	$e^{-2t}(\sin t + 3\cos t)$	$\dfrac{3p+7}{p^2+4p+5}$
11	$e^t \cos^2 t$	$\dfrac{p(p^2+2p+3)}{(p-1)(p^2-2p+5)}$
12	$\cos^3 t$	$\dfrac{p(p^2+7)}{(p^2+1)(p^2+9)}$
13	$\dfrac{t^2}{2} sh\,t$	$\dfrac{3p^2+1}{(p^2-1)^3}$
14	$te^{-2t}\sin 3t$	$\dfrac{6p+12}{((p+2)^2+9)^2}$
15	$t^{2t}\sin 2t$	$\dfrac{2p^2-16}{(p^2+4)^3}$
16	$\int_0^t (t-\tau)^2 \cos 2\tau \, d\tau$	$\dfrac{2}{p^2(p^2+4)}$
17	$\int_0^t \tau\, \ell^{t-\tau} \sin(t-\tau)\, d\tau$	$\dfrac{1}{p^2(p^2+2p+1)}$
18	$\int_0^t \dfrac{1-\ell^{-\tau}}{\tau}\, d\tau$	$\dfrac{1}{p}\ln\left(1+\dfrac{1}{p}\right)$
19	$(t-2)^3$	$\dfrac{6\ell^{-2p}}{p^4}$
20	L^{t-1}	$\dfrac{\ell^{-p}}{p-1}$
21	$y''(t) - y''(t) - y(t)$, если $y(0) = y'(0) = 0$ и y	$(p^2-p-1)\, I(p)$

	(t)← I(p)	
22	$y'(t)+y(t)+\int_0^t y(\tau)d\tau$, если y (0) = 1 и y (t)÷ Y(p)	$\frac{p^2+p+1}{p} \quad Y(p)-1$
23	y (t) - 2y$'$(t), если y (0) и y (t) ÷ Y(p)	(1 - 2p) Y(p)
24		$\frac{e^{-ap}-e^{-bp}}{p^2}$
25		$\frac{(1-e^{-p})^2}{p^2(1-e^{-4p})}$

ТЕОРИТИЧЕСКИЕ ВОПРОСЫ

1. Дайте определения оригинала.
2. Запишите преобразование Лапласа.
3. Дайте определения изображения данной функции.
4. Запишите единичную функцию Хевисайда. Укажите её назначение.
5. Сформулируйте свойства изображений.
6. Запишите изображения функций:

   $\sigma_0(t)$, $e^{\alpha t}$, $e^{-\alpha t}$, $sh\beta t$, $ch\beta t$, $\sin\beta t, \cos\beta t$.
7. Сформулируйте теорему подобия.
8. Сформулируйте теорему о дифференцировании оригинала.
9. Сформулируйте теорему о дифференцировании изображений.
10. Сформулируйте теорему об интегрировании оригинала.
11. Сформулируйте теорему об интегрировании изображения.
12. Сформулируйте теорему смещения.
13. Сформулируйте теорему умножения.

14.Запишите интеграл Дюамеля и его изображения.

15.Запишите изображения периодического оригинала.

§ 3. НАХОЖДЕНИЕ ОРИГИНАЛА ПО ЕГО ИЗОБРАЖЕНИЮ.

Практическое применение операторного метода требует решения обратной задачи – по известному изображению найти соответствующий ему оригинал. Оригинал определяется как результат решения интегрального уравнения Лапласа:

$$\int_{0}^{\infty} f(t)e^{-pt}dt = F(p),$$

где *F(p)* - известная функция p, а функция *f(t)* – неизвестная, подлежащая определению.

Решение этого интегрального уравнения в общем виде может быть найдено с помощью методов теории функций комплексного переменного и переход от изображения к оригиналу выполняется помощью интеграла Римана-Мелина, являющимся формулой обращения интеграла Лапласа:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\tau - e\tau}^{\sigma + i\tau} F(p)\cdot e^{pt}dt$$

Вычисления по этой формуле требуют применение методов теории вычетов, причем во многих случаях эти вычисления оказываются сложными. Поэтому большое значение имеют теоремы разложения, дающие возможность представить изображения в виде суммы более простых слагаемых и тем самым упростить задачу перехода от изображения к оригиналу.

Первая теорема разложения. Если функция $F(p)$ имеет вид

$$F(p) = \frac{C_0}{p} + \frac{C_1}{p^2} + \frac{C_2}{p^3} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{C_n}{p^{n+1}} \quad ,$$

то оригинал определяется соотношением

$$f(t) = C_0 + \frac{C_1}{1!} t + \frac{C_2}{2!} t^2 + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{C_n}{n!} t^n \quad .$$

Вторая теорема разложения.

1. Пусть $F(p) = \frac{P(p)}{Q(p)}$ - правильная рациональная несократимая дробь, знаменатель $Q(p)$ который имеет лишь простые корни $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ - тогда

$$F(p) = \frac{P(p)}{Q(p)} = \frac{A_1}{p-\alpha_1} + \frac{A_2}{p-\alpha_2} + \ldots + \frac{A_n}{p-\alpha_n} \to \sum_{k=1}^{n} A_k e^{\alpha_k t}, \text{ где } A_k = \frac{P(\alpha_k)}{Q'(\alpha_k)} \quad \text{или}$$

$$A_k = \frac{P(p)\cdot(P-\alpha_k)}{Q(p)}\Big|_{p=\alpha k}$$

2. Пусть $F(p) = \frac{P(p)}{Q(p)}$ - правильная несократимая дробь, знаменатель $Q(p)$ которой имеет корни $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ кратности $K_1, K_2, \ldots$ соответственно. Тогда

$$F(p) = \frac{P(p)}{Q(p)} = \frac{A_1}{(p-\alpha_1)^{k_1}} + \frac{A_2}{(p-\alpha_1)^{(k_1-1)}} + \ldots + \frac{A_{k1}}{p-\alpha_1} + \ldots,$$

где $A_1 = \frac{(p-\alpha_1)^{k_1}\cdot P(p)}{Q(p)}\Big|_{p=\alpha_1}$

$$A_2 = \frac{1}{1!}\left[\frac{(p-\alpha_1)^{k_1} P(p)}{Q(p)}\right]' \quad p=\alpha_1 ,$$

$$A_3 = \frac{1}{2!}\left[\frac{(p-\alpha_1)^{k_1} P(p)}{Q(p)}\right]'' \quad p=\alpha_1 ,$$

…………………………

$$A_{k1} = \frac{1}{(k_1-1)!}\left[\frac{(p-\alpha_1)^{k1} P(p)}{Q(p)}\right]^{(k_1-1)}_{p=\alpha_1} \quad \ldots \text{ и}$$

$$F(p) \to A_1 e^{\alpha_1 t} + A_2 t\, e^{\alpha_1 t} + \frac{A_3 t^2}{2!}\cdot e^{\alpha_1 t} + \ldots + \frac{A_{k_1} t^{k_1-1}}{(k_1-1)!} e^{\alpha_1 t} + \ldots$$

При отыскании оригинала по известному изображению, кроме теорем разложения, используют таблицу 1 и основные теоремы операционного исчисления.

<u>Примеры :</u> Найти оригиналы, соответствующие изображениям.

1. $F(p) = \dfrac{3p-1}{p^2-4p+7}$.

Решение :

Используя соотношение (7) таблицы 1, получаем

$$F(p) = \frac{3p-1}{p^2-4p+7} = \frac{3(p-2)+5}{(p-2)^2+3} = 3\frac{p-2}{(p-2)^2+3} + \frac{5}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{(p-2)^2+3}$$

$$f(t) = 3e^{2t}\cos t\sqrt{3} + \frac{5}{\sqrt{3}}e^{2t}\cdot\sin(t\sqrt{3})$$

2. $F(p) = \dfrac{p+4}{p^2+6p+5}$

Решение :

Используя соотношение (8) таблицы 1, получаем

$$F(p) = \frac{p+4}{p^2+6p+5} = \frac{p+4}{(p+3)^2-4} = \frac{p+3}{(p+3)^2-4} + \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{(p+3)^2-4}$$

$$f(t) = e^{-3t}\cdot ch2t + \frac{1}{2}e^{-3t}\cdot sh2t$$

3. $F(p) = \dfrac{1}{p^2} - \dfrac{3}{p^2}e^{-2p}$.

Решение:

Используя теорему запаздывания и соотношение (2) таблицы 1, находим

$$F(p) = \frac{1}{p^2} - 3\frac{1}{p^2}e^{-2p} \rightarrow t - 3(t-2)\cdot\sigma_0(t-2)$$

4. $F(p) = \dfrac{p}{(p^2+1)^2}$.

Решение:

Имеем $\dfrac{p}{(p^2+1)^2} = \dfrac{p}{p^2+1}\cdot\dfrac{1}{p^2+1}; \dfrac{p}{p^2+1} = F_1(p) \rightarrow \cos t$ и $\dfrac{1}{p^2+1} = F_2(p) \rightarrow \sin t$

Используя теорему о свертке; находим

$$F_1(p)\cdot F_2(p)\to \int_0^t \cos\tau \cdot \sin(t-\tau)d\tau = \frac{1}{2}\int_0^t (\sin(t-\tau-\tau)+\sin t)d\tau = \frac{1}{2}t\cdot \sin t;$$

$$f(t)=\frac{1}{2}t\sin t.$$

5. $F(p)=\dfrac{p^2}{(p^2+1)^2}$

Решение:

Имеем $\dfrac{p^2}{(p^2+1)^2}=\dfrac{p}{p^2+1}\cdot\dfrac{p}{p^2+1};$

$\dfrac{p}{p^2+1}=F_1(p)\to \cos t$ и $\dfrac{p}{p^2+1}=F_2(p)\to \cos t$.

Используя теорему о свертке, находим

$$\frac{p^2}{(p^2+1)^2}\to \int_0^t \cos\tau\cdot\cos(t-\tau)d\tau = \int_0^t \frac{1}{2}[\cos t+\cos(2\tau-t)]d\tau =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^t \cos t d\tau + \frac{1}{2}\int_0^t \cos(2\tau-t)d\tau = \frac{1}{2}\cos t\cdot\tau\Big|_0^t + \frac{1}{4}\sin(2\tau-t)\Big|_0^t$$

$$= \frac{1}{2}t\cos t+\frac{1}{4}\sin t-\frac{1}{4}\sin(-t) = \frac{1}{2}t\cdot\cos t+\frac{1}{2}\sin t.$$

Итак, $\dfrac{p^2}{(p^2+1)^2}\to \dfrac{1}{2}t\cdot\cos t+\dfrac{1}{2}\sin t$.

6. Решим предыдущий пример другим способом. Имеем

$$F(p)=\frac{p^2}{\left(p^2+1\right)^2}=p\cdot\frac{p}{p^2+1}\cdot\frac{1}{p^2+1},$$

$$\frac{p}{p^2+1}\div\cos t=f_1(t)\div F_1(p);$$

$$\frac{1}{p^2+1}\div\sin t=f_2(t)\div F_2(p).$$

Используя интеграл Дюамеля (9), находим

$$p\cdot\frac{1}{p^2+1}\cdot\frac{1}{p^2+1}\to \int_0^t \cos\tau\cdot\cos(t-\tau)d\tau = \int_0^t \frac{1}{2}[\cos t+\cos(2\tau-t)]d\tau =$$

$$\frac{1}{2}\int_0^t \cos t d\tau + \frac{1}{2}\int_0^t \cos(2\tau-1)d\tau = \frac{1}{2}\cos t\cdot\tau\Big|_0^t + \frac{1}{4}\sin(2\tau-t)\Big|_0^t =$$

$$= \frac{1}{2}t\cos t+\frac{1}{4}\sin t-\frac{1}{4}\sin(-t) = \frac{1}{2}t\cos t+\frac{1}{2}\sin t$$

7. $F(p)=\dfrac{1}{p(p-1)(p-2)(p-3)}$

Решение:

Так как знаменатель $Q(p)=p(p-1)(p-2)(p-3)$

имеет корни $\alpha_1=0, \alpha_2=1, \alpha_3=2, \alpha_4=3$, то применяя вторую теорему разложения (часть 1), получим

$$\frac{1}{p(p-1)(p-2)(p-3)}=\frac{A_1}{p}+\frac{A_2}{p-1}+\frac{A_3}{p-2}+\frac{A_4}{p-3}, \text{ где}$$

$$A_1=\frac{1\cdot p}{p(p-1)(p-2)(p-3)}\Big|_{p=0}=\frac{1}{6},$$

$$A_1=\frac{1\cdot p}{p(p-1)(p-2)(p-3)}\Big|_{p=1}=\frac{1}{2},$$

$$A_1=\frac{1\cdot p}{p(p-1)(p-2)(p-3)}\Big|_{p=2}=-\frac{1}{2},$$

$$A_1=\frac{1\cdot p}{p(p-1)(p-2)(p-3)}\Big|_{p=3}=\frac{1}{6},$$

Следовательно,

$$F(p)=\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{p}+\frac{1}{2(p-1)}-\frac{1}{2(p-2)}+\frac{1}{6(p-3)}\div\frac{1}{6}+\frac{1}{2}e^{t}-\frac{1}{2}e^{2t}+\frac{1}{6}e^{3t}=f(t)$$

8. $F(p)=\dfrac{p-1}{(p+1)(p^2+4)}$

Решение:

Так как знаменатель $Q(p)=(p+1)(p^2+4)$ имеет простые корни $\alpha_1=-1, \alpha_2=-2j, \alpha_3=2j$ и $Q'(p)=3p^2+2p+4$, то применяя вторую теорему разложения (часть 1), получим

$$F(p)=\frac{p-1}{(p+1)(p^2+4)}=\frac{A_1}{p+1}+\frac{A_2}{p+2j}+\frac{A_3}{p-2j}, \text{ где}$$

$$A_1\Big|_{p=-1}=\frac{(p-1)(p+1)}{(p+1)(p^2+4)}\Big|_{p=-1}=-\frac{2}{5}, \quad A_1=-\frac{2}{5};$$

$$A_2=\frac{p-1}{3p^2+2p+4}\Big|_{p=-2i}==\frac{-1-2i}{3(-2i)^2+2(-2i)+4}=\frac{-1-2i}{-12+4-4i}=\frac{1+2i}{8+4i}=\frac{1}{5}+\frac{3}{20}i,$$

$$A_2=\frac{1}{5}+\frac{3}{20}i;$$

$$A_3\Big|_{p=-2i} = \frac{p-1}{3p^2+2p+4}\Big|_{p=2i} = \frac{-1+2i}{-12+4i+4} = \frac{-1+2i}{-8+4i} = \frac{1}{5} - \frac{3}{20}i$$

Следовательно,

$$F(p) = -\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{p+1} + \left(\frac{1}{5}+\frac{3}{20}i\right)\cdot\frac{1}{p+2i} + \left(\frac{1}{5}-\frac{3}{20}i\right)\frac{1}{p-2i} =$$

$$= -\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{p+1} + \frac{2}{5}\cdot\frac{p}{(p^2+4)} + \frac{3}{10}\cdot\frac{1}{p^2+4} \div -\frac{2}{5}e^{-t} + \frac{2}{5}\cos 2t + \frac{3}{20}\sin 2t\ .$$

9. $F(p) = \dfrac{p^2+1}{p^2(p-1)}$

решение. Так как $Q(p)=p^2(p-1)$ имеет кратный корень $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ и простой корень $\alpha_3 = 1$, то применяя вторую теорему разложения, получим

$$F(p) = \frac{p^2+1}{p^2(p-1)} = \frac{A_1}{p^2} + \frac{A_2}{p} + \frac{A_3}{p-1},$$

$$A_1\Big|_{p=0} = \frac{p^2+1}{p^2(p-1)}\Big|_{p=0} = -1\ ,\ A_2\Big|_{p=0}\left[\frac{(p^2+1)p^2}{p^2(p-1)}\right]'\Big|_{p=0} = \frac{2p(p-1)-p^2+1}{(p-1)^2}\Big|_{p=0} = \frac{-1}{1} = -1,$$

$$A_3\Big|_{p=1} = \frac{(p^2+1)(p-1)}{p^2(p-1)}\Big|_{p=1} = 2.$$

Следовательно,

$$F(p) = \frac{-1}{p^2} - \frac{1}{p} + \frac{2}{p-1} \to -t-1+2e^t = f(t)$$

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

Найти оригинал по заданному изображению		
№	Изображение	Ответ
1	$\frac{1}{p^2+4}$	$\frac{1}{2}\sin 2t$
2	$\frac{1}{p^2-9}$	$\frac{1}{3}\sin 3t$

3	$\dfrac{3}{(p-1)^3}$	$\dfrac{3}{2}t^2\ell^t$
4	$\dfrac{1}{p^2+4p+5}$	$\ell^{-2t}\sin t$
5	$\dfrac{p}{p^2+4p+5}$	$\ell^{-2p}\cos - 2\ell^{-2p}\sin t$
6	$\dfrac{1}{p^2+4p+3}$	$\dfrac{1}{2}(\ell^{-t}-\ell^{-3t})$
7	$\dfrac{p}{p^2-2p+5}$	$\ell^t(\cos 2t+\dfrac{1}{2}\sin 2t)$
8	$\dfrac{1}{7-p+p^2}$	$\dfrac{2\sqrt{3}}{9}\ell^{\frac{t}{2}}\sin\dfrac{3\sqrt{3}}{2}t$
9	$\dfrac{\ell^{-2p}}{p^2}$	$\sigma(t-2)(t-2)$
10	$\dfrac{\ell^{-2p}}{(p+1)^3}$	$\dfrac{1}{2}\sigma(t-2)\ell^{-(t-2)}(t-2)$
11	$\dfrac{1}{p-2}+\dfrac{\ell^{-p}}{p}+\dfrac{3\ell^{-4p}}{p^2+9}$	$\ell^{2t}+\sigma(t-1)+\sigma(t-4)\sin 3(t-4)$
12	$\dfrac{p}{p^2+4}-\dfrac{2p\ell^{-p}}{p^2-4}$	$\cos 2t-2\sigma(t-1)ch2(t-1)$
13	$\dfrac{p}{(p^2+4)^2}$	$\dfrac{1}{4}t\sin 2t$
14	$\dfrac{p^2-1}{(p^2+1)^2}$	$t\cos t$
15	$\dfrac{1}{(p^2+1)^2}$	$\dfrac{1}{2}(\sin t-t\cos t)$
16	$\dfrac{p+1}{p(p+1)(p+2)(p-3)}$	$-\dfrac{1}{6}+\ell^t-\dfrac{3}{2}\ell^{2t}+\dfrac{2}{3}\ell^{3t}$
17	$\dfrac{p+2}{(p+1)(p-2)(p^2+4)}$	$\dfrac{1}{6}\ell^{2t}-\dfrac{1}{15}\ell^{-t}-\dfrac{1}{10}\cos 2t-\dfrac{1}{5}\sin 2t$
18	$\dfrac{p+3}{p(p^2-4p+3)}$	$1-2\ell^t+\ell^{3t}$
19	$\dfrac{p^2+2p+2}{(p-2)^2(p+3)}$	$\dfrac{4}{5}\ell^{2t}+2t\ell^{2t}+\dfrac{1}{5}\ell^{-3t}$
20	$\dfrac{p}{(p-1)^3(p+2)^2}$	$\dfrac{3t^2+2t-2}{54}\ell^t+\dfrac{2t+1}{27}\ell^{-2t}$

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ВОПРОСЫ:

1. Сформулируйте и запишите первую теорему разложения.
2. Сформулируйте и запишите вторую теорему разложения в случае простых корней знаменателя. Запишите формулу для определения коэффициентов этого разложения. Приведите примеры.

3. Сформулируйте и запишите вторую теорему разложения в случае кратных корней знаменателя. Запишите формулу для определения коэффициентов этого разложения. Приведите примеры.

§4. ПРИМЕНЕНИЕ ОПЕРАЦИОННОГО ИСЧИСЛЕНИЯ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ.

Рассмотрим линейное дифференциальное уравнения

$$x^{(n)}(t) + a_1 x^{(n-1)}(t) + \ldots + a_{n-1}x(t) + a_n x(t) = f(t) \quad , \qquad (9)$$

где $a_1, a_2, \ldots, a_n$ - действительные числа. Будем предполагать, что искомая функция $x(t)$ и все ее рассматриваемые производные, а также функция *f(t)* являются оригиналами. Требуется найти решение дифференциального уравнения (9), удовлетворяющее начальным условиям:

$$x(0) = x_0, x'(0) = x_0', \ldots, x^{(n-1)}(0) = x^{(n-1)}{}_0,$$

где $x_0, x'_0, \ldots x^{(n-1)}$ - заданные числа.

Пусть $x(t) \div x(p)$ и $f(t) \div F(p)$. Используя теорему дифференцирования оригиналов (2) и начальные условия, имеем

$$x'(t) \div px(p) - x_0,$$
$$x''(t) \div p^2 x(p) - px_0 - x_0',$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$x^{(n-1)}(t) \div p^{n-1}x(p) - p^{n-2}x_0 - \ldots - x_0{}^{(n-2)},$$
$$x^{(n)}(t) \div p^n x(p) - p^{n-1}x_0 - \ldots - x_0{}^{(n-1)}.$$

Используя свойство линейности (2), перейдем в уравнении (9) к изображениям:

$$p^n x(p) - p^{n-1}x_0 - ... - x_0^{(n-1)} + a_1(p^{n-1}x(p) - p^{n-3}x_0 - ... - x_0^{n-2}) + a_{n-1}(px(p) - x_0) + a_n x(p) = F(p)$$

. Полученное уравнения называется уравнением в изображениях, соответствующим уравнению (9).

Перепишем последнее уравнение в виде

$$Q_n(p)\cdot x(p) = F(p) + R_{n-1}(p),$$

где $Q_n(p)$ и $R_{n-1}(p)$ - многочлены аргумента р соответственно степеней *n* и *n-1*, причем

$$Q_n(p) = p^n + a_1 p^{n-1} + ... + a_{n-1}p + a_n$$

Из последнего уравнения находим

$$x(p) = \frac{F(p) + R_{n-1}(p)}{Q_n(p)} \qquad (10)$$

Получено, так называемое, операторное решение дифференциального уравнения (9). Оригинал *x (t)*, соответствующий изображению (10), является искомым решением уравнения (9).

Операторный метод решения дифференциальных уравнений сводится к четырем последовательным этапам.

1. От искомой функции *f (t)*, с помощью преобразования Лапласа переходят к изображению *F (p).*
2. Дифференциальные уравнения для оригиналов, согласно правилам преобразования функций, их производных и интегралов преобразуются в операторные алгебраические уравнения для изображений.
3. Полученные операторные уравнения решают относительно *F(p).*
4. От найденного изображения *F(p)* с помощью обратного преобразования переходят к оригиналу *f(t),* который является искомым решением.

Совершено аналогично решаются интегральные уравнения, системы дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами, системы интегральных уравнений и другие задачи.

<u>Примеры:</u> Найти частные решения дифференциальных уравнений.

1. $x'(t) - 2x(t) = 0$, если $x(0)=1$

Решение:

Пусть x(t), $x^{/}$(t) - оригиналы и

$$x(t) \leftarrow x(p),$$
$$x^{/}(t) \leftarrow px(p) - 1$$

Запишем уравнение в изображениях

p x (p) - 1 - 2 x (p)=0

Решая полученное уравнение, имеем

$$x(p) = \frac{1}{p-2}$$

Найдем оригинал, соответствующий изображению $x(p)$:

$$\frac{1}{p-2} \to e^{2t}$$

Итак, искомое решение уравнения $x(t) = e^{2t}$.

2. $x'''(t) + 4x'(t) = 1$, удовлетворяющее условиям

$x(0) = x'(0) = x''(0) = 0$

Решение: Пусть $x(t), x'(t), x'''(t)$ - оригинал и

$$x(t) \leftarrow x(p),$$
$$x'(t) \leftarrow px(p),$$
$$x''(t) \leftarrow p^2 x(p),$$
$$x'''(t) \leftarrow p^3 x(p).$$

Переходим к уравнению в изображениях

$p^3 x(p) + 4px(p) = \frac{1}{p}$, откуда

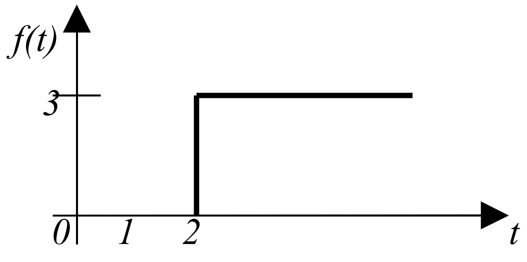
$$x(p) = \frac{1}{p(p^3 + 4p)} = \frac{1}{p^2(p^2+4)} = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{p^2} - \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{p^2+4} \div \frac{t}{4} - \frac{1}{8}\sin 2t\ .$$

Итак, искомое решение $x(t) = \frac{t}{4} - \frac{1}{8}\sin 2t$

3. $x^{//} + 4x^{/} + 5x = 3\sigma\,(t-2)$, при начальных условиях $x(0) = -1, x^{/}(0) = 1$

Решение:

Построим график функции $f(t) = 3\sigma\,(t-2)$



(рис.4)

Пусть $x(t) \div x(p)$, $x^{/}(t) \div px(p) - x(0) = px(p) - (-1),$

$$x''(t) \div p^2x(p) - px(0) + x'(0) = p^2x(p) - p(-1) - 1.$$

Найдем изображение правой части дифференциального уравнения

$f(t) = 3\sigma_0(t-2)$. Так как $\sigma_0(t) \div \frac{1}{p}$, то по теореме запаздывания найдем

$\sigma_0(t-2) \div \frac{1}{p}e^{-2p}$ и $f(t) \div 3\frac{e^{-2p}}{p}$.

Перейдем к уравнению в изображениях

$p^2x(p) + p - 1 + 4[px(p) + 1] + 5x(p) = 3\frac{e^{-2p}}{p}$, или

$$(p^2 + 4p + 5)x(p) = 3 \cdot \frac{e^{-2p}}{p} - p - 3$$

Откуда, $x(p) = 3 \cdot \frac{1}{p(p^2+4p+5)} \cdot e^{-2p} = \frac{p+3}{p^2+4p+5}$

По найденному изображению запишем оригинал

$$x(p) = \frac{3}{5}\{1 - e^{-2(t-2)}[\cos(t-2) + 2\sin(t-2)]\} \cdot \sigma(t-2) - e^{-2t}(\cos t + \sin t)\sigma_0(t)$$

4. Найти общее решение дифференциального уравнения

$$x''(t) + 2x'(t) + 10x(t) = 2 \cdot e^{-t}\cos 3t$$

Решение:

Для получения общего решения уравнения введем произвольные начальные условия $x(0) = C_1, x'(0) = C_2$, тогда уравнение в изображениях примет вид

$$p^2x(p) - C_1p - C_2 + 2px(p) - 2C_1 + 10x(p) = 2 \cdot \frac{p+1}{(p+1)^2 + 9},$$

Откуда

$$x(p) = C_1\frac{p+1}{(p+1)^3 + 9} + (C_1 + C_2)\frac{1}{(p+1)^2 + 9} + 2\frac{p+1}{[(p+1)^2 + 9]^2}.$$

По найденному изображению восстановим оригинал

$$C_1e^{-t}\cos 3t + \frac{1}{3}(C_1 + C_2)e^{-t}\sin 3t + 2e^{-t} \cdot \frac{1}{6} \cdot t\sin 3t.$$

Итак, искомое решение $x(t) = e^{-t}\left[C_1\cos 3t + \frac{1}{3}(t + C_2')\sin 3t\right]$,

где $C_2' = C_1 + C_2$ − новая произвольная постоянная.

5.Решить интегральное уравнение.

$$y = \int_6^1 y dt + 1$$

Решение:

Примем $y(t)$ - за оригинал $y(t) \div Y(p)$, $\int_6^1 y(t)dt \div \frac{Y(p)}{p}$, $\quad 1 \div \frac{1}{p}$

Перейдем к уравнению в изображениях $Y(p) = \frac{Y(p)}{p} + \frac{1}{p}$.

Решая последнее уравнение, получим $Y(p) = \frac{1}{p-1}$.

Поэтому $y(t) = e^t$.

6. Найти частное решение системы дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} x' + y = e^t, \\ x + y' = e^{-t}. \end{cases}$$

при начальных условиях $x(0) = x, y(0) = y$.

Решение:

Пусть $x(t) \div x(p), y(t) \div Y(p),\ тогда\ x'(t) \div px(p) - x_0, y(t) \div pY(p) - y_0$,

Получим систему уравнений в изображениях

$$\begin{cases} px(p) - x_0 + Y(p) = \dfrac{1}{p-1}, \\ pY(p) - y_0 + x(p) = \dfrac{1}{p+1}. \end{cases}$$

Решая ее, найдем

$$x(p) = \frac{p}{p^2-1}x_0 - \frac{1}{p^2-1}y_0 + \frac{p^2+1}{(p^2-1)^2},$$
$$Y(p) = \frac{p}{p^2-1}y_0 + \frac{1-x_0}{p^2-1} - \frac{2p}{(p^2-1)^2}$$

Следовательно,

$$x(t) = x_0 cht - y_0 sht + tcht,$$
$$y(t) = y_0 cht + (1-x_0)sht - t \cdot sht$$

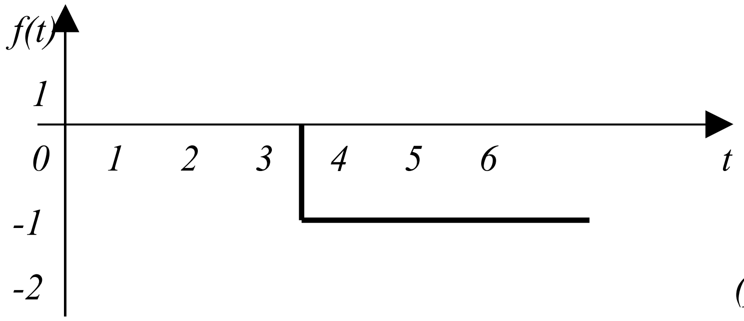
7. Найти частное решение системы дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} 2x' + y' - 6x - 5y = 0, \\ x' + y' + x = f(t). \end{cases} \quad , \text{ где } \quad f(t) = \begin{cases} 0 \text{ при } t < 3{,}5, \\ -2 \text{ при } t \geq 3{,}5. \end{cases}$$

удовлетворяющее начальным условиям $x(0) = 1, y(0) = -1$.

Решение:

Построим график функций *f(t)*



(рис.5)

Функцию $f(t)$ запишем аналитически $f(t) = -2\sigma_0(t - 3{,}5)$.

Обозначим изображения искомых функций $x(t) \div (p), y(t) \div Y(p)$. По теореме Дифференцирования оригинала найдем:

$$x'(t) \div px(p) - x(0) = px(p - 1),$$
$$y'(t) \div pY(p) - y(0) = pY(p) - (-1) = pY(p) + 1$$

Функция $f(t)$ имеет изображение:

$$f(t) = -2\sigma_0(t - 3{,}5) \div -2\frac{1}{p} \cdot e^{-3{,}5p}$$

После перехода к изображениям исходная система примет вид:

$$\begin{cases} 2[px(p) - 1] + pY(p) + 1 - 6x(p) - 5Y(p) = 0, \\ px(p) - 1 + pY(p) + 1 + x(p) = -\frac{2}{p} \cdot e^{3,5}, \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} 2(p - 3)x(p) + (p - 5)Y(p) = 1, \\ (p + 1)x(p) + pY(p) = -\frac{2}{p} e^{3,5p} \end{cases}$$

Решая систему алгебраических уравнений относительно *x(p), Y(p),* получим

$$x(p) = \frac{p}{p^2 - 2p + 5} + 2\frac{p - 5}{p\left(p^2 - 2p + 5\right)}\ell^{-3,5p}$$

$$Y(p) = -\frac{p + 1}{p^2 - 2p + 5} - 4\frac{p - 3}{p\left(p^2 - 2p + 5\right)}\ell^{-3,5p}$$

По найденным изображениям восстановим оригиналы

$$x(t) = \ell^t(\cos 2t + \frac{1}{2}\sin 2t)\sigma_0(t) + 2\left[-1 + \ell^{t-3,5}\cos 2(t - 3,5)\right]\sigma_0(t - 3,5),$$

$$y(t) = \ell^t(\cos 2t + \sin 2t)\sigma_0(t) - \frac{4}{5}\left\{-3 + \ell^{t-3,5}\left[3\cos 2(t - 3,5) + \sin 2(t - 3,5)\right]\right\}\sigma_0(t - 3,5).$$

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

Решить дифференциальное уравнение			
№	Уравнение	Начальные условия	Ответ
1	$x''(t) + x(t) = t^3 + 6t$	$x(0) = x'(0) = 0$	$x(t) = t^3$
2	$x''(t) - 4x(t) = 4e^t$	$x(0) = x'(0) = 0$	$x = te^{2t} - \frac{1}{2}sh2t$
3	$x''(t) + 4x(t) = 2\cos 2t$	$x(0) = 0,\ x'(0) = 4$	$x(t) = 2\sin 2t + \frac{1}{2}t\sin 2t$
4	$x''(t) - 5x'(t) + 6x(t) = 7e^{-5t}$	$x(0) = 1,\ x'(0) = -1$	$x(t) = \frac{1}{8}e^{-5t} - \frac{17}{8}e^{3t} + 3e^{2t}$
5	$x''(t) - 4x'(t) + 5x(t) = 0$	$x(0) = 0,\ x'(0) = 1$	$x(t) = l^{2t}\sin t$
6	$x''(t) + 9x(t) = \cos 3t$		$x(t) = c_1\cos 3t + c_2\sin 3t + \frac{t}{6}\sin 3t$

Решить интегральное уравнение		
№	Уравнение	Ответ
1	[illegible]	$y(t) = 1$
2	$\int_0^1 y(\tau)\cos(t - \tau)d\tau = 1 - \cos t$	$y(t) = t$

Решить систему уравнений			
№	Система уравнений	Начальные условия	Ответ

1	$\begin{cases} y'(t)+7y(t)-z(t)=0, \\ z'(t)+2y(t)+5z(t)=0. \end{cases}$	$y(0)=1,$ $z(0)=0.$	$y(t)=e^{-6t}\cos t,$ $z(t)=e^{-6t}\cos t-e^{-6t}\sin t$
2	$\begin{cases} x(t)+x'(t)=y(t)+e^{t}, \\ y(t)+y'(t)=x(t)+e^{t} \end{cases}$	$x(0)=1$ $y(0)=1$	$x(t)=e^{t}$ $y(t)=e^{t}$

3	$\begin{cases} y(t)=-x(t)-3y(t), \\ x'(t)=-x(t)+y(t). \end{cases}$	$x(0)=1$ $y(0)=1$	$x(t)=e^{-2t}+2te^{-2t}$ $y(t)=e^{-2t}-2te^{-2t}$
4	$\begin{cases} y'(t)=3z(t)-y(t) \\ z'(t)=y(t)+z(t)+e^{t} \end{cases}$	$y(0)=0,$ $z(0)=0.$	$y(t)=e^{t}+\frac{3}{4}e^{2t}+\frac{1}{4}e^{-2t},$ $z(t)=-\frac{2}{3}e^{t}+\frac{3}{4}e^{2t}-\frac{1}{12}e^{-2t}$

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ВОПРОСЫ

1. Изложите операторный метод решения дифференциальных уравнений. Приведите примеры.

2. Изложите операторный метод решения системы дифференциальных уравнений. Приведите примеры.

3. Укажите алгоритм решения задач операторным методом.

§ 5 ИНДИВИДУАЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ НАЙТИ ИЗОБРАЖЕНИЕ ФУНКЦИЙ

1	$2+4t^2+5t^3$ $4\sin 2t-3\cos\frac{t}{3}$ $e^{-t}\cos 3t+\frac{1}{2}e^{3t}\sin t$	$t^2e^{-3}+5t^3e^t$ $e^{2t}ch2t-e^t sht$ $e^{2t}+4e^{-3t}$
2	$3+7t^3+2t^4$ $e^{3t}-3e^{-2t}$ $15\sin 4t-3\cos\frac{t}{5}$	$e^{2t}\cos\frac{t}{2}+3e^{-t}\sin 2t$ $t^2e^{-5t}+\frac{1}{2}t^3e^{4t}$ $e^{3t}ch2t-e^{-t}sh3t$
3	$5+3t^2-4t^3$ $2e^{-4t}-e^{\frac{1}{2}t}$ $11\cos 2t+7\sin\sqrt{3}$	$e^{3t}\sin 5t-4e^t\cos\frac{1}{3}$ $t^2e^{-\frac{t}{4}}-\frac{1}{3}t^3e^{-7t}$ $e^{-2t}sh\frac{t}{3}-2e^{4t}ch5t$
4	$\frac{1}{2}+2t-5t^4$ $5e^{4t}+e^{-2t}$ $3\sin\frac{t}{3}-2\cos 5t$	$2\cos^2 6t-e^{-3t}\sin 4t$ $t^3e^{3t}-\frac{1}{5}t^2e^{-6t}$ $e^{4t}sh\frac{t}{5}-\frac{1}{2}e^{-3t}ch7t$
5	$2-3t^2+4t^3$ $4e^{-7t}+\frac{1}{2}e^{2t}$ $10\sin\frac{t}{5}-3\cos t\sqrt{2}$	$e^t\cos^2 4t+3\sin\frac{t}{2}$ $t^3e^{-\frac{t}{3}}-t^2e^{2t}$ $e^{-5t}ch3t-\frac{1}{3}e^{2t}sh6t$
6	$\frac{t}{2}-4t^2+5t^4$ $4e^{-7t}-e^{t\sqrt{2}}$ $2\sin\frac{t}{5}+\frac{1}{3}\cos t\sqrt{6}$	$e^{-t}\sin\frac{t}{4}-5e^{-2t}\cos 3t$ $t^2e^{-8t}+\frac{1}{3}t^3e^{3t}$ $e^{6t}sh3t-\frac{1}{4}e^{-2t}ch5t$
7	$3t-6t^2+7t^3$ $3e^{7t}+5e^{-4t}$ $4\sin 2t-\cos t\sqrt{2}$	$e^{-3t}\sin^2 4t+15e^{2t}\cos 7t$ $t^3e^{-2t}-\frac{1}{9}t^2e^{4t}$ $e^{2t}sh6t-3e^{-4t}ch2t$
8	$2t^3-5t^2+1$ $8t^{\frac{t}{3}}-4e^{-2t}$ $7\sin t\sqrt{8}-2\cos\frac{t}{3}$	$e^{-\frac{t}{4}}\sin 3t+8e^{-5t}\cos 2t$ $t^2e^{5t}+\frac{1}{7}t^3e^{-3t}$ $e^{-12t}sh5t+3e^t ch2t$
9	$5-\frac{1}{2}t+3t^4$ $6e^{-3t}-2e^{\frac{t}{3}}$ $2\sin 3t-5\cos\frac{t}{2}$	$e^{-t}\cos 4t-3\sin^2 6t$ $t^3e^{-5t}+3t^2e^{4t}$ $e^{3t}sh4t-\frac{3}{5}e^{-2t}ch3t$

10	$2-t^2+3t^3$ $11e^{-t\sqrt{3}}-2e^{4t}$ $3\sin 2t-\frac{1}{5}\cos t\sqrt{3}$	$e^{-5t}\sin\frac{t}{3}-3e^{2t}\cos 8t$ $t^2e^{-4t}+\frac{1}{4}t^3e^{6t}$ $e^{-6t}sh2t-3e^{3t}ch5t$
11	$2t+4t^2+7t^3$ $3e^{-2t}-5e^{4t}$ $6\sin 3t-2\cos\frac{t}{2}$	$e^{t}\sin^3 t-2e^{-2t}\cos 4t$ $3t^2e^{-4t}+5t^2e^{-t}$ $e^{-8t}sh2t-e^{3t}ch5t$
12	$5-7t^2+t^3$ $2e^{3t}-\frac{1}{2}e^{-5t}$ $12\sin t\sqrt{2}-6\cos 8t$	$2e^{-6t}\sin 4t-3e^{t}\cos t$ $t^4e^{3t}+2t^3e^{-t}$ $e^{2t}sh5t-3e^{-2t}ch4t$
13	$6t-3t^2+5t^3$ $e^{-t}+3e^{4t}$ $2\sin 5t-\frac{1}{5}\cos\frac{t}{4}$	$e^{-2t}\cos 3t-5e^{t}\sin\frac{t}{4}$ $t^3\wp^{-2t}+3t^2e^{3t}$ $e^{-7t}sh3t-2e^{-3t}ch4t$
14	$-\frac{1}{2}t+2t^2-7t^3$ $5e^{2t}-2e^{-6t}$ $3\sin t\sqrt{3}-5\cos 2t$	$e^{-t}\sin\frac{t}{2}+3e^{2t}\cos 4t$ $t^2e^{-5t}+t^3e^{3t}$ $e^{-3t}sh2t-2e^{4t}ch3t$
15	$2-4t+3t^3$ $3e^{t\sqrt{3}}-2e^{5t}$ $12\sin 3t-2\cos 4t$	$\frac{1}{2}e^{3t}\cos\frac{t}{3}-e^{-t}\sin^2 t$ $t^3e^{-2t}-\frac{1}{2}t^2e^{-4t}$ $e^{-2t}sh5t-e^{3t}ch2t$
16	$5-3t^3-\frac{1}{2}t^4$ $^{2t}-4l^{-8t}$ $18\sin\frac{t}{2}+\cos 5t$	$e^{-5t}\cos\frac{t}{3}+4e^{t}\sin 7t$ $t^2e^{-6t}+\frac{1}{5}t^4e^{2t}$ $e^{4t}sh4t-e^{-t}ch\frac{t}{5}$
17	$2-5t^2+4t^3$ $4e^{-2t}+e^{-4t}$ $12\sin 5t-4\cos\frac{t}{3}$	$4e^{2t}\sin 6t-5e^{-t}\cos w\frac{t}{4}$ $t^2e^{-\frac{t}{4}}-\frac{1}{4}t^3e^{7t}$ $e^{-3t}sh\frac{t}{2}+2e^{\frac{t}{2}}ch5t$
18	$5+4t^3-6t^4$ $2e^{-6t}+e^{\frac{t}{3}}$ $4\cos 5t-7\sin\sqrt{2}t$	$2e^{3t}\sin\frac{t}{6}-e^{-2t}\cos 4t$ $t^3e^{-t}-2t^4e^{2t}$ $e^{-\frac{t}{2}}sh3t-5e^{3t}ch4t$
19	$\frac{1}{3}+4t-6t^5$ $5e^{6t}-6e^{-\frac{t}{2}}$ $3\cos\frac{t}{4}-2\cos 3t$	$2e^{4t}\cos\frac{t}{2}-e^{-2t}\sin 2t$ $t^3e^{4t}-\frac{1}{4}t^2e^{-5t}$ $e^{-4t}sh\frac{t}{6}-\frac{1}{4}e^{2t}ch5t$

20	$5-8t^3-4t^4$ $4e^{-8t}+\frac{1}{2}e^{\frac{t}{2}}$ $6\sin\frac{t}{6}+4\cos\sqrt{5}t$	$e^{-3t}\cos 5t-3\sin\frac{t}{2}$ $t^3e^{-\frac{t}{4}}-t^2e^{6t}$ $e^{-\frac{t}{4}}sh8t-\frac{1}{3}e^{t}ch\frac{t}{2}$
21	$\frac{t}{3}-3t^2+6t^4$ $4l^{-8t}-l^{\sqrt{3}t}$ $2\sin\frac{t}{7}+\frac{1}{2}\cos 2t$	$l^{-t}\sin\frac{t}{2}-3l^{2t}\cos 3t$ $t^2l^{6t}-\frac{1}{2}t^3l^{-t}$ $l^{2t}sh2t-\frac{1}{6}l^{-\frac{t}{2}}ch7t$
22	$3t^2+6t^3-t^4$ $3e^{-8t}-6e^{\frac{t}{4}}$ $5\sin 6t+\cos\frac{t}{7}$	$e^{-5t}\sin\frac{t}{5}-3e^{2t}\cos 9t$ $t^3e^{-4t}-\frac{1}{3}t^2e^{3t}$ $e^{3t}sh2t-5e^{-4t}ch5t$
23	$2t^3+4t^2-t$ $10e^{-4t}-4e^{\frac{t}{5}}$ $10\sin\sqrt{8}t-3\cos\frac{t}{4}$	$e^{-\frac{t}{4}}\sin 6t-2e^{-3t}\cos 2t$ $t^2e^{4t}-\frac{1}{3}t^3e^{-5t}$ $e^{-9t}sh5t+3e^{\frac{t}{2}}ch3t$
24	$5-\frac{5}{2}t+4t^5$ $5e^{-3t}-2e^{\frac{t}{5}}$ $8\sin 4t-5\cos\frac{t}{6}$	$e^{-\frac{t}{3}}\cos 4t-5\sin 8t$ $t^3e^{-2t}+4t^2e^{4t}$ $e^{-4t}sh4t-\frac{3}{5}e^{7t}ch6t$
25	$2-t^3-4t^5$ $11e^{-\frac{t}{6}}-2e^{5t}$ $4\sin 2t-\frac{1}{5}\cos\frac{t}{2}$	$e^{-6t}\sin\frac{t}{5}-3e^{3t}\cos 7t$ $t^4e^{-4t}-\frac{1}{5}t^2e^{\frac{t}{2}}$ $e^{\frac{t}{2}}sh5t-3e^{4t}ch4t$

Найти оригиналы функции		
1	$\frac{3}{p+4}-\frac{2}{p-\frac{1}{2}}$ $\frac{4}{(p+1)^2}+\frac{5}{(p-2)^3}$ $\frac{2p-\frac{1}{2}}{p^2-4}+\frac{5+p}{p^2+16}$	$\frac{p+4}{p^2+2p+5}+\frac{4}{p^2-4p+13}$ $\frac{p^2+2}{(p^2+4)(p^2+9)}$ $\frac{1}{p^2(p+1)(p+2)}$
2	$\frac{3}{p-4}-\frac{1}{2\left(p+\frac{1}{3}\right)}$ $\frac{2}{(p-3)^2}-\frac{3}{p^2}$ $\frac{4+p}{p^2-9}+\frac{7p}{p^2+25}$	$\frac{p+2}{p^2+4p+8}+\frac{3}{p^2+6p+25}$ $\frac{3}{p^2(p^2+9)}$ $\frac{12}{p^3(p-1)(p+2)}$
3	$\frac{7}{p-5}-\frac{2}{p+6}$ $\frac{3}{(p+2)^4}-\frac{4}{3(p-5)^3}$ $\frac{5-p}{p^2+9}-\frac{6p-3}{p^2-36}$	$\frac{2p-5}{p^2+8p}-\frac{5}{p^2-4p+20}$ $\frac{6p}{(p^2+4)(p^2+25)}$ $\frac{4}{p^2(p+2)(p+3)}$
4	$\frac{2}{p-1}-\frac{3}{p+\frac{2}{5}}$ $\frac{4}{(p-4)^5}+\frac{4}{(p+6)^3}$ $\frac{p+1}{p^2+4}+\frac{5+p}{p^2-3}$	$\frac{5}{p^2-10p+9}+\frac{3p+2}{p^2+2p-3}$ $\frac{8}{p^3(p^4+4)}$ $\frac{11}{p^2(p+3)(p+5)}$
5	$\frac{2}{3(p+7)}-\frac{8}{p-3}$ $\frac{1}{(p-5)^4}+\frac{3}{(p-1)^3}$ $\frac{6p+2}{p^2+16}-\frac{3-p}{p^2-25}$	$\frac{4p-3}{p^2+6p-7}-\frac{6}{p^2-4p-5}$ $\frac{p^2-4}{(p^2+9)(p^2+16)}$ $\frac{12}{p^2(p+2)(p+4)}$
6	$\frac{7}{p-3}-\frac{1}{4(p+2)}$ $\frac{3}{p^2}-\frac{2}{(p-1)^3}$ $\frac{5p}{p^2-2}+\frac{6}{p^2+16}$	$\frac{3p-1}{p^2-8p-20}+\frac{4}{p^2+4p+20}$ $\frac{p+5}{(p^2+25)(p^2-4)}$ $\frac{10}{p^2(p-3)(p+4)}$

7	$\frac{5}{p+2}-\frac{2}{p-3}$ $\frac{12}{(p+5)^2}-\frac{3}{(p-6)^3}$ $\frac{7}{p^2-64}+\frac{4p}{p^2+16}$	$\frac{5}{p^2+12p+20}-\frac{2p+3}{p^2+2p+2}$ $\frac{p^2+10}{(p^2+4)(p^2+9)}$ $\frac{7}{p^3(p-2)(p+5)}$
8	$\frac{2}{p-1}-\frac{3}{p+\frac{1}{4}}$ $\frac{6}{(p+2)^3}-\frac{2}{p^2}$ $\frac{2p}{p^2+9}+\frac{7}{p^2+25}$	$\frac{7p+1}{p^2+8p-9}+\frac{3}{p^2-4p-12}$ $\frac{p^2-6}{(p^2+16)(p^2+25)}$ $\frac{2}{p^2(p+2)(p-6)}$
9	$\frac{2}{p-5}-\frac{1}{3\left(p-\frac{2}{3}\right)}$ $\frac{1}{(p-4)^4}+\frac{8}{(p+3)^2}$ $\frac{5}{p^2+25}-\frac{3p}{p^2-8}$	$\frac{4p+3}{p^2+10p-11}+\frac{2}{p^2-6p+10}$ $\frac{p^2-10}{(p^2+9)(p^2-16)}$ $\frac{5}{p^2(p+3)(p+6)}$
10	$\frac{4}{p-6}-\frac{2}{p+\frac{1}{3}}$ $\frac{3}{(p+7)^5}-\frac{1}{4(p-3)^3}$ $\frac{2p}{p^2+16}+\frac{6}{p^2-36}$	$\frac{p-1}{p^2+4p+5}-\frac{8}{p^2-12p+27}$ $\frac{3}{p^3(p^2+4)}$ $\frac{7}{p^2(p+4)(p-5)}$
11	$\frac{5}{p+6}-\frac{4}{3\left(p+\frac{1}{4}\right)}$ $\frac{6}{(p-1)^3}+\frac{5}{(p+2)^4}$ $\frac{5p}{p^2-5}+\frac{6}{p^2+25}$	$\frac{p+5}{p^2+4p-3}+\frac{2}{p^2+2p+5}$ $\frac{p+1}{(p^2+1)p^2}$ $\frac{4}{p(p+1)(p-2)}$
12	$\frac{8}{p-7}-\frac{1}{5(p+6)}$ $\frac{2}{(p-5)^2}+\frac{2}{4(p-2)^3}$ $\frac{6}{p^2-2}+\frac{5p}{p^2+49}$	$\frac{p+3}{p^2+6p+8}+\frac{5}{p^2+2p+10}$ $\frac{2p}{(p+1)(p^2+1)}$ $\frac{3}{(p-1)(p-4)(p+2)}$
13	$\frac{7}{p-8}+\frac{5p}{p^2+2}$ $\frac{6}{(p+2)^3}-\frac{2}{(p-3)^4}$ $\frac{5}{p^2+7}-\frac{4p}{p^2-81}$	$\frac{3p-4}{p^2+4p}-\frac{3}{p^2+4p+13}$ $\frac{p}{(p+1)(p^2+4)}$ $\frac{5}{(p-1)(p+2)(p+5)}$

14	$\frac{2}{p-2}+\frac{3}{p+\frac{1}{2}}$ $\frac{3}{(p-4)^4}-\frac{4}{(p+6)^3}$ $\frac{3p}{p^2-2}+\frac{5}{p^2+100}$	$\frac{3p+1}{p^2+2p-3}+\frac{4}{p^2+10p+29}$ $\frac{1}{(p^2+1)(p^2-1)}$ $\frac{4}{p^2(p-1)(p+2)}$
15	$\frac{5}{4(p+9)}-\frac{8}{p-\frac{1}{2}}$ $\frac{5}{(p-5)^5}-\frac{3}{(p-1)^3}$ $\frac{6p}{p^2-49}-\frac{3}{p^2+5}$	$\frac{p+4}{p^2-4p}+\frac{2}{p^2-10p+25}$ $\frac{4}{p^2(p^2+9)}$ $\frac{p}{(p-1)^2(p+2)(p+1)}$
16	$\frac{6}{p-10}-\frac{1}{2(p+4)}$ $\frac{3}{p^4}-\frac{2}{(p-1)^5}$ $\frac{5p+5}{p^2-3}+\frac{6-p}{p^2+64}$	$\frac{p-1}{p^2-2p+26}+\frac{10}{p^2-10p}$ $\frac{p+1}{p^2(p^2+1)}$ $\frac{p^2+p}{(p-1)(p-3)(p+4)}$
17	$\frac{5}{p-5}+\frac{3}{p+\frac{7}{2}}$ $\frac{12}{(p+4)^3}-\frac{5}{(p-6)^5}$ $\frac{2p-2}{p^2+36}-\frac{9+p}{p^2-9}$	$\frac{p+6}{p^2-2p-8}+\frac{3}{p^2+6p+6}$ $\frac{p}{(p-1)^2(p^2+1)}$ $\frac{p+1}{p(p-1)(p+4)}$
18	$\frac{2}{p-\frac{1}{2}}+\frac{4}{p+5}$ $\frac{3}{p^5}+\frac{5}{(p+2)^4}$ $\frac{2p-2}{p^2+36}$	$\frac{2p-10}{p^2-2p-24}+\frac{4}{p^2+6p+18}$ $\frac{p+2}{p^2(p^2+4)}$ $\frac{p-3}{(p-1)(p-2)(p+4)}$
19	$\frac{2}{p-6}+\frac{1}{2\left(p-\frac{1}{4}\right)}$ $\frac{1}{(p-2)^5}+\frac{1}{(p+3)^2}$ $\frac{7+p}{p^2+4}+\frac{3p-1}{p^2-5}$	$\frac{4p-8}{p^2+6p+5}-\frac{9}{p^2-8p+12}$ $\frac{p-4}{p^2(p^2+1)}$ $\frac{p}{(p-1)^2(p+2)}$
20	$\frac{4}{p-5}+\frac{2}{p+\frac{1}{5}}$ $\frac{3}{(p+3)^2}-\frac{1}{3(p+5)^6}$ $\frac{2p-1}{p^2+6}+\frac{p+1}{p^2-4}$	$\frac{p-1}{p^2-10p+21}+\frac{6}{p^2+6p+13}$ $\frac{4}{p^2(p^2+1)}$ $\frac{p}{(p+1)^2(p-3)(p+4)}$

21	$\frac{8}{p-3}-\frac{1}{4(p+1)}$ $\frac{5}{p^6}-\frac{4}{(p-2)^3}$ $\frac{5-p}{p^2-5}+\frac{2p-3}{p^2+25}$	$\frac{3p+3}{p^2+2p}+\frac{4}{p^2+8p+20}$ $\frac{p+3}{(p^2-1)(p^2+9)}$ $\frac{5}{p^2(p-3)(p+4)}$
22	$\frac{5}{p-\frac{1}{2}}+\frac{3}{p+2}$ $\frac{2}{(p-3)^4}-\frac{4}{p^5}$ $\frac{2p+5}{p^2+5}-\frac{p-1}{p^2-4}$	$\frac{p-5}{p^2-2p+2}+\frac{4}{p^2+6p}$ $\frac{p-1}{p^2(p^2+25)}$ $\frac{4}{p(p-2)(p+5)}$
23	$\frac{7}{p+\frac{1}{3}}-\frac{4}{p-8}$ $\frac{5}{p^6}+\frac{4}{(p-1)^3}$ $\frac{2p-6}{p^2+81}+\frac{p+1}{p^2-3}$	$\frac{3p-1}{p^2-4p+5}-\frac{5}{p^2-8p-9}$ $\frac{p^2-1}{(p^2+1)p^2}$ $\frac{3}{p(p-1)(p+5)}$
24	$\frac{5}{p-1}+\frac{1}{3\left(p+\frac{1}{2}\right)}$ $\frac{1}{(p-1)^4}-\frac{5}{(p+2)^5}$ $\frac{2+4p}{p^2+1}-\frac{3p+3}{p^2-5}$	$\frac{p+3}{p^2+4p+8}-\frac{7}{p^2-8p}$ $\frac{p-3}{p(p-2)(p-1)}$ $\frac{p+5}{p^2(p^2+4)}$
25	$\frac{5}{p-2}+\frac{3}{p-\frac{1}{6}}$ $\frac{2}{(p-7)^4}+\frac{5}{p^4}$ $\frac{5p+2}{p^2+2}+\frac{p-2}{p^2-9}$	$\frac{p+4}{p^2+10p}+\frac{6}{p^2-8p+41}$ $\frac{p+3}{p^2(p^2+25)}$ $\frac{p}{(p-2)(p+4)(p+6)}$

НАЙТИ ЧАСТНОЕ РЕШЕНИЕ ОДНОРОДНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ.

	Уравнение	Начальные условия
1	$y''-4y'=0$	$y(0)=1$, $y'(0)=2$
2	$y'''+y'=0$	$y(0)=0$, $y'(0)=-1$, $y''(0)=2$
3	$y''+2y'+y=0$	$y(0)=1$, $y'(0)=0$
4	$y''-6y'+5y=0$	$y(0)=-1$, $y'(0)=2$
5	$y''-5y'=0$	$y(0)=1$, $y'(0)=-1$

6	$y'' + 25y = 0$	$y(0) = 3,\ y'(0) = 4$
7	$y'' + 2y' - 8y = 0$	$y(0) = 0,\ y'(0) = 1$
8	$y'' + 6y' + 5y = 0$	$y(0) = 2,\ y'(0) = 0$
9	$y'' - 2y' + 10y = 0$	$y(0) = 2,\ y'(0) = -1$
10	$y'' - 4y' + 3y = 0$	$y(0) = 3,\ y'(0) = 1$
11	$y'' - 8y' - 20y = 0$	$y(0) = 2,\ y'(0) = -1$
12	$y'' - 5y' + 4y = 0$	$y(0) = -3,\ y'(0) = 2$
13	$y'' - 9y = 0$	$y(0) = 1,\ y'(0) = 1$
14	$y'' - 4y' + 4y = 0$	$y(0) = 0,\ y'(0) = 1$
15	$4y'' + 4y' + y = 0$	$y(0) = 0,\ y'(0) = 1$
16	$y'' + y' - 2y = 0$	$y(0) = 1,\ y'(0) = 1$
17	$y'' - 5y' = 0$	$y(0) = 1,\ y'(0) = 1$
18	$y'' - 9y = 0$	$y(0) = 0,\ y'(0) = 1$
19	$y'' - y' - 12 = 0$	$y(0) = 0,\ y'(0) = 1$
20	$y'' + 6y' + 13y = 0$	$y(0) = 1,\ y'(0) = 0$
21	$y'' - y' - 2y = 0$	$y(0) = 1,\ y'(0) = 0$
22	$y'' + 4y' + 3y = 0$	$y(0) = 1,\ y'(0) = 0$
23	$y'' - 3y' + 2y = 0$	$y(0) = 1,\ y'(0) = 0$
24	$y'' + 3y' - 4y = 0$	$y(0) = 0,\ y'(0) = 1$
25	$y'' + 2y = 0$	$y(0) = 1,\ y'(0) = 1$

НАЙТИ ЧАСТНОЕ РЕШЕНИЕ НЕОДНОРОДНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ.

	Уравнение	Начальные условия
1	$y'' + 9y' = e^{-3t}$	$y(0) = 0,\ y'(0) = 0$
2	$y'' + 3y' = e^{2t}$	$y(0) = 0,\ y'(0) = 0$
3	$y'' + y' = te^{t}$	$y(0) = 0,\ y'(0) = 0$
4	$y'' - 3y' = 3t$	$y(0) = 0,\ y'(0) = 1$
5	$y' - 9y = t - 2$	$y(0) = 0,\ y'(0) = 0$
6	$y'' + 2y' + y = 3$	$y(0) = 1,\ y'(0) = 0$
7	$y'' + y' = 2t$	$y(0) = 4,\ y'(0) = -2$
8	$y'' - 4y' = t - 1$	$y(0) = 0,\ y'(0) = 0$
9	$y'' - 3y' - 4y = 2$	$y(0) = 1,\ y'(0) = 0$
10	$y'' - 3y' + 2y = 2e^{3t}$	$y(0) = 1,\ y'(0) = 3$
11	$y'' + 4y' = \sin t$	$y(0) = 1,\ y'(0) = 2$
12	$y'' - 2y' + y = 4$	$y(0) = 1,\ y'(0) = 0$
13	$y'' - 2y' + y = 4$	$y(0) = 1,\ y'(0) = 2$
14	$y'' - 2y' - 3y = e^{3t}$	$y(0) = 0,\ y'(0) = 0$
15	$y'' - y' - 6y = 2$	$y(0) = 0,\ y'(0) = 0$
16	$y'' - y' = e^{-3t}$	$y(0) = 0,\ y'(0) = 0$
17	$y'' - 2y' = 3$	$y(0) = 1,\ y'(0) = 0$
18	$y'' - 2y' + y = 2$	$y(0) = 0,\ y'(0) = 1$

19	$y'' + y = e^{-3t}$	y (0) = 0 , y' (0) = 1
20	$y'' + 3y' = 3t$	y (0) = 1 , y' (0) = 1
21	$y'' - y' = \cos 2t$	y (0) = 0 , y' (0) = 0
22	$y'' - y' = 4e^{t}$	y (0) = 1 , y' (0) = 0
23	$y'' - y = \sin t$	y (0) = 0 , y' (0) = 0
24	$y'' - y' = \cos t$	y (0) = 0 , y' (0) = 0
25	$y'' - 2y' = e^{2t}$	y (0) = 0 , y' (0) = 0

РЕШИТЬ СИСТЕМУ НЕОДНОРОДНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ.

	Система уравнений	Начальные условия
1	$\begin{cases} 2x' + x - 4y = y', \\ x' + x + y' = \sin t. \end{cases}$	x (0) = 1 , y (0) = 0
2	$\begin{cases} y' - y + z = t, \\ z' + 4y + 2z = 4t + 1. \end{cases}$	y (0) = 0 , z (0) = 0
3	$\begin{cases} y' + z' - z = e^{t}, \\ 2y' + z' + 2z' = 1. \end{cases}$	z (0) = 0 , y (0) = 0
4	$\begin{cases} x' + y' - y = 1, \\ y' + 2y + 2x' = e^{t}. \end{cases}$	x (0) = 0 , y (0) = 1
5	$\begin{cases} y' = 3z - e, \\ z' = y + z + e^{t}. \end{cases}$	z (0) = 0 , y (0) = 0
6	$\begin{cases} x' + 3x + 2y = 0, \\ x' - x + y' - y = e^{2t}. \end{cases}$	x (0) = 1 , y (0) = 0
7	$\begin{cases} x' - x + y + 1 = 0, \\ y' - y + x + 1 = 0. \end{cases}$	x (0) = 1 , y (0) = 0

8	$\begin{cases} y' + y - 2x = 0, \\ x' + y - 2x = e^t. \end{cases}$	x (0) = 0 , y (0) = 0
9	$\begin{cases} x' = y, \\ y' = x + 2sht. \end{cases}$	x (0) = 0, y (0) = 0
10	$\begin{cases} x' + 3x + 8y = 0, \\ y' + x + y = e^t. \end{cases}$	x (0) = 1 , y (0) = 0
11	$\begin{cases} x' + x - y = e^t, \\ y' - x + y = e^t. \end{cases}$	x (0) = 0 , y (0) = 0
12	$\begin{cases} 3x' - x + 2y = 0, \\ x' - x - 4y' = 1. \end{cases}$	x (0) = 0 , y (0) = 2
13	$\begin{cases} x' = x - 2y + 1, \\ y' = x + 3y. \end{cases}$	x (0) = 1 , y (0) = 0
14	$\begin{cases} x' + 3x + y + t = 0, \\ x' - x + y = 0. \end{cases}$	x (0) = 1 , y (0) = 1
15	$\begin{cases} x' = e^t - y - 5x, \\ y' = x - 3y. \end{cases}$	x (0) = 1 , y (0) = 0
16	$\begin{cases} x' = -x + 5y, \\ y' = x + 3y - t. \end{cases}$	x (0) = 0 , y (0) = 1
17	$\begin{cases} x' = 3x + y + e^t, \\ y' = 8x + y. \end{cases}$	x (0) = 0 , y (0) = 0

18	$\begin{cases} x' = t - 5x - 4y, \\ y' = -2x - 3y. \end{cases}$	x (0) = 1 , y (0) = 0
19	$\begin{cases} x' + 2y = 3t, \\ y' - 2x = 4. \end{cases}$	x (0) = 2 , y (0) = 3
20	$\begin{cases} x' + x = y + e^t, \\ y' + y = x + e^t. \end{cases}$	x (0) = 1 , y (0) = 1
21	$\begin{cases} x' = x + 2y, \\ y' = 2x + y + 1. \end{cases}$	x (0) = 0 , y (0) = 5
22	$\begin{cases} x' = x + y + t, \\ y' = 3x - y. \end{cases}$	x (0) = 0 , y (0) = 1
23	$\begin{cases} x' = 3 - 2y, \\ y' = 2x - 2t. \end{cases}$	x (0) = 0 , y (0) = 0
24	$\begin{cases} x' + 2x + 4y + t = 0, \\ y' + x - y = 0. \end{cases}$	x (0) = 1 , y (0) = 1
25	$\begin{cases} x' = 4x + 6y, \\ y' = 4x + 2y + t. \end{cases}$	x (0) = 1 , y (0) = 0

РЕШИТЬ СИСТЕМУ ОДНОРОДНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ.

	Система уравнений	Начальные условия

1	$\begin{cases} x' = x - y, \\ y' = x + y. \end{cases}$	x (0) = 1 , y (0) = 0
2	$\begin{cases} x' + 4x - y = 0, \\ y' + 2x + y = 0. \end{cases}$	x (0) = 2 , y (0) = 3
3	$\begin{cases} x' + 2x + 2y = 0, \\ y' + 2x - y = 0. \end{cases}$	x (0) = 1 , y (0) = 1
4	$\begin{cases} x' - y + 7x = 0, \\ y' + 2x + 5y = 0. \end{cases}$	x (0) = 0 , y (0) = 1
5	$\begin{cases} x' - 2x + 2y = 0, \\ 3x' + 2y' - 4x = 0. \end{cases}$	x (0) = 0 , y (0) = 1
6	$\begin{cases} x' + y' = 0, \\ x' - 2y' + x = 0. \end{cases}$	x (0) = 1 , y (0) = -1
7	$\begin{cases} x' - x + y = 0, \\ 3y' + 4y - 2x = 0. \end{cases}$	x (0) = 1 , y (0) = 2
8	$\begin{cases} x' - 2x + 6y = 0, \\ y' + 3y + x = 0. \end{cases}$	x (0) = 2 , y (0) = -1
9	$\begin{cases} x' - x - 6y' = 0, \\ x + y' + 4y = 0. \end{cases}$	x (0) = -2 , y (0) = 1
10	$\begin{cases} x' + 3x + y = 0, \\ y' + y + x = 0. \end{cases}$	x (0) = 1 , y (0) = 1

11	$\begin{cases} x' - 4x + y = 0, \\ y' - 2y - x = 0. \end{cases}$	x (0) = 1 , y (0) = 2
12	$\begin{cases} x' - 2x + y' = 0, \\ y' + 3y + 2x = 0. \end{cases}$	x (0) = 2 , y (0) = -3
13	$\begin{cases} x' = x + 2y, \\ y' = 2x + y. \end{cases}$	x (0) = 1 , y (0) = 0
14	$\begin{cases} x' = x - 5y, \\ y' = x - 3y. \end{cases}$	x (0) = 1 , y (0) = 0
15	$\begin{cases} x' + 5x + 2y = 0, \\ y' + 7y - x = 0. \end{cases}$	x (0) = 1 , y (0) = 1
16	$\begin{cases} x' + 4x - y = 0, \\ y' + y + 2x = 0. \end{cases}$	x (0) = 2 , y (0) = 0
17	$\begin{cases} x' = x + y, \\ y' = 3x - y. \end{cases}$	x (0) = 0 , y (0) = 0
18	$\begin{cases} x' = 3x + 4y, \\ y' = 4x - 3y. \end{cases}$	x (0) = 0 , y (0) = 1
19	$\begin{cases} x' + y = 0, \\ y' - 2x - 2y = 0. \end{cases}$	x (0) = 0 , y (0) = 1
20	$\begin{cases} x' + y = 0, \\ y' + x = 0. \end{cases}$	x (0) = 2 , y (0) = 0

21	$\begin{cases} x' + x - 2y = 0, \\ y' + 4y + x = 0. \end{cases}$	x (0) = 1 , y (0) = 1
22	$\begin{cases} x' = x + 2y, \\ y' = 2x + y. \end{cases}$	x (0) = 1 , y (0) = 0
23	$\begin{cases} x' = x - 2y, \\ y' = x + 3y. \end{cases}$	x (0) = 0 , y (0) = 1
24	$\begin{cases} x' = 2x - 9y, \\ y' = x + 8y. \end{cases}$	x (0) = 1 , y (0) = 0
25	$\begin{cases} x' = 3x - 8y, \\ y' = -x - 3y. \end{cases}$	x (0) = 1 , y (0) = 0

ЛИТЕРАТУРА:

1. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления. - М.: Наука, 1964-1975, т.2.
2. Краснов М.Л. Функции комплексного переменного. Операционное исчисление. Теория устойчивости. - М.: Наука, 1971.
3. Бугров Я.С., Никольский С.М. Высшая математика. Дифференциальные уравнения. Кратные интегралы. Ряды. Функции комплексного переменного. - М.: Наука, 1981, 1985.
4. Данко П.Е., Попов А.Г. Высшая математика в упражнениях и задачах. - М.: Высшая школа, 1980, ч. П.
5. Жевержеев В.Ф., Кальницкий Н.А., Сапогов И.А. Специальный курс высшей математики для Втузов. - М.: Высшая школа, 1970.
6. Сборник задач по математике для Втузов. Под редакцией А.В. Ефимова, Б.П. Демидовича. - М.: Наука, 1986, т. 2.

СОДЕРЖАНИЕ