

Федеральное агентство по образованию  
АМУРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
ГОУВПО «АмГУ»

УТВЕРЖДАЮ

Зав. кафедрой АПП и Э

\_\_\_\_\_ А.Н. Рыбалев

« \_\_\_\_ » \_\_\_\_\_ 2007 г.

Численные методы  
УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКИЙ КОМПЛЕКС ДИСЦИПЛИНЫ  
для специальности 220301 – Автоматизация технологических процессов и  
производств (по отраслям)

Составители: В.И. Усенко, доцент кафедры автоматизации производственных процессов и электротехники АмГУ, Романова М.В., ст. преп. кафедры автоматизации производственных процессов и электротехники АмГУ.

Благовещенск

2007 г.

Печатается по решению редакционно-издательского совета энергетического факультета Амурского государственного университета.

В.И. Усенко, М.В. Романова

Учебно-методический комплекс по дисциплине «Численные методы» для специальности для специальности 220301 «Автоматизация технологических процессов и производств (по отраслям)» – Благовещенск. Амурский государственный университет, 2007.

Амурский государственный университет, 2007.

## СОДЕРЖАНИЕ

1. Рабочая программа.....	5
2. План – конспект лекций по дисциплине.....	14
3. Лабораторные работы .....	15
4. Самостоятельная работа .....	16
5. Вопросы и задачи к зачету.....	29
6. Контроль знаний.....	30



**1. Рабочая программа**  
Федеральное агентство по образованию Российской Федерации  
АМУРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
(ГОУВПО «АмГУ»)

УТВЕРЖДАЮ

Проректор по учебно-научной работе

\_\_\_\_\_ Е.С. Астапова

«\_\_\_» \_\_\_\_\_ 200\_\_ г.

**РАБОЧАЯ ПРОГРАММА**

по дисциплине

«**ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ**»

для специальности 22.03.01

«Автоматизация технологических процессов и производств»

курс	2	семестр	4
лекции –	18	ЗАЧЕТ	4 семестр
практические			
лабораторные –	36	РГР	4 семестр
самостоятельная работа	36		
ВСЕГО ЧАСОВ:	90		

Составители М.В. Романова, ст. преп. и В. И. Усенко, доц.

Факультет энергетический

Кафедра АППиЭ

2006 г.

Рабочая программа составлена на основании Государственного образовательного стандарта ВПО специальности 22.03.01 - «Автоматизация технологических процессов и производств».

Рабочая программа обсуждена на заседании кафедры АППиЭ  
« \_\_\_ » \_\_\_\_\_ 200 \_\_\_ г., протокол №

Зав. кафедрой

А. Н. Рыбалев

Рабочая программа одобрена на заседании УМС специальности 22.03.01  
«Автоматизация технологических процессов и производств»  
« \_\_\_ » \_\_\_\_\_ 200 \_\_\_ г., протокол №

Председатель УМС

А. Н. Рыбалев

СОГЛАСОВАНО

Начальник УМУ

\_\_\_\_\_ Г. Н. Торопчина  
« \_\_\_ » \_\_\_\_\_ 200 \_\_\_ г.

СОГЛАСОВАНО

Председатель УМС факультета

\_\_\_\_\_ Ю. В. Мясоедов  
« \_\_\_ » \_\_\_\_\_ 200 \_\_\_ г.

СОГЛАСОВАНО

Зав. выпускающей кафедрой

\_\_\_\_\_ А. Н. Рыбалев  
« \_\_\_ » \_\_\_\_\_ 200 \_\_\_ г.

## ЦЕЛИ И ЗАДАЧИ ИЗУЧЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ, ЕЕ МЕСТО В УЧЕБНОМ ПРОЦЕССЕ

Цель преподавания дисциплины "Численные методы" – сформировать у студентов знания основ современных численных методов и их реализации на компьютерной технике с помощью современных прикладных программных средств.

Задачи изучения дисциплины – освоение студентами современных численных методов, применение изученных методов к экономическим, электротехническим и техническим задачам; умение выбрать рациональный метод решения применительно к конкретным задачам с учетом необходимой точности.

Дисциплина "Численные методы" дает студентам знания основ современных численных методов в линейной алгебре, теории приближений, решении дифференциальных уравнений, линейной и нелинейной оптимизации. Теоретической базой дисциплины " Численные методы " являются высшая математика, физика, теоретическая и прикладная механика.

## СОДЕРЖАНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ. ЛЕКЦИОННЫЙ МАТЕРИАЛ – 18 час.

### 2.1.1. Введение – 2 часа.

Математические модели и численные методы. Место численных методов среди других математических методов. Краткая история численных методов. Основные понятия приближенного анализа.

2.1.2. Численные методы решения линейных уравнений установившегося режима и линейная оптимизация – 4 часа.

Прямые методы решения систем линейных уравнений.

Итерационные методы решения систем линейных уравнений. Линейное программирование.

### 2.1.3. Теория приближений – 4 часа.

Локальная и глобальная интерполяция. Метод наименьших квадратов.

Разложение функций в ряд Фурье.

2.1.4. Методы решения нелинейных уравнений и нелинейная оптимизация – 4 часа.

Метод Ньютона. Метод бисекции.

Градиентные методы. Метод золотого сечения.

2.1.5. Численные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений -4 часа.

Одношаговые методы. Многошаговые методы.

Автономные системы на плоскости. Фазовые портреты нелинейных систем

## 2.2. ЛАБОРАТОРНЫЕ РАБОТЫ – 36 часов

2.2.1. Простейшие вычисления и операции в Mathcad. Матрицы, определители и их свойства - 2 часа.

2.2.2. Решение систем линейных алгебраических уравнений - 2 часа.

2.2.3. Решение задач линейного программирования графическим методом - 2 часа.

2.2.4. Решение задач линейного программирования симплекс-методом - 2 часа.

2.2.5. Локальная линейная интерполяция -2 часа.

2.2.6. Локальная интерполяция сплайнами – 2 часа.

2.2.7. Глобальная интерполяция – 2 часа.

2.2.8. Построение аналитических выражений с помощью метода наименьших квадратов –2 часа.

2.2.9. Аппроксимация функций произвольного вида методом наименьших квадратов – 2 часа.

2.2.10. Исследование функций и построение графиков - 2 часа.

2.2.11. Определение корней нелинейных уравнений – 2 часа.

2.2.12. Решение задач нелинейной оптимизации – 2 часа.



- 2.2.13. Вычисление производных и интегралов – 2 часа.
- 2.2.14. Разложение функций в ряд Тейлора и ряд Фурье – 2 часа.
- 2.2.15. Решение дифференциальных уравнений первого порядка – 2 часа.
- 2.2.16. Линейные дифференциальные уравнения – 2 часа.
- 2.2.17. Автономные системы на плоскости. Фазовые портреты – 2 часа.
- 2.2.18. Решение жестких дифференциальных уравнений – 2 часа.

## ПЕРЕЧЕНЬ И ТЕМЫ ПРОМЕЖУТОЧНЫХ ФОРМ КОНТРОЛЯ ЗНАНИЙ

Промежуточный контроль знаний студентов по дисциплине предусматривает две контрольные точки в 4 семестре, оценки по которым выставляются на основе информации о выполнении лабораторных работ, РГР, а также на основе тестирования теоретических знаний, полученных за прошедший период обучения. Предусмотрено тестирование по темам:

1. Аппроксимация функций – 4 семестр, 1-я контрольная точка;
2. Разложение функций в ряд Фурье – 4 семестр, 2-я контрольная точка.

## ЗАЧЕТ

Для допуска к зачету достаточными основаниями являются выполнение и защита РГР и всех лабораторных работ. Студент, не защитивший несколько лабораторных работ и (или) РГР, допускается к зачету, но перед получением билета он должен ответить на вопросы, относящиеся к незащищенным лабораторным работам и РГР. Для подготовки ответа студенту отводится 80 мин.

Билет содержит 5 задач, которые студент должен выполнить с помощью ППП Mathcad. Сдавшим зачет считается студент, решивший все 5 задач.

### Темы заданий

1. Решение систем линейных уравнений методом Гаусса.
2. Решение систем линейных уравнений методом прогонки.
3. Решение систем линейных уравнений методом Гаусса-Зейделя.
4. Решение систем линейных уравнений методом вращения.
5. Решение задач линейного программирования графическим методом.
6. Решение задач линейного программирования симплекс-методом.
7. Разложить в ряд Тейлора заданную функцию.
8. Разложить в ряд Фурье заданную функцию.
9. Подбор эмпирической зависимости и оценка коэффициентов с помощью метода наименьших квадратов для заданной таблично функции.
10. Определение корня нелинейного уравнения методом бисекции.
11. Определение корня нелинейного уравнения методом хорд.
12. Определение корня нелинейного уравнения методом Ньютона.
13. Определение корня нелинейного уравнения методом простой итерации.
14. Решение системы нелинейных уравнений.
15. Нахождение экстремума функции методом золотого сечения.
16. Нахождение экстремума функции методом координатного спуска.

17. Нахождение экстремума функции методом градиентного спуска.
18. Нахождение экстремума функции методом штрафных функций.
19. Исследование функций и построение графиков.
20. Численное дифференцирование.
21. Численное интегрирование.
22. Решение задачи Коши для диф.ур-я первого порядка.
23. Решение задачи Коши для диф.ур-й высших порядков.
24. Решение дифференциального уравнения методом Рунге-Кутты.
25. Общее решение однородных линейных уравнений с постоянными коэффициентами.
26. Решение неоднородных линейных уравнений с постоянными коэффициентами. Метод подбора.
27. Жесткие системы. Решение методом матричной экспоненты.
28. Автономные системы на плоскости. Фазовые кривые. Точки покоя.
29. Автономные системы на плоскости. Устойчивые решения.
30. Автономные системы на плоскости. Предельные циклы. Фазовые портреты нелинейных систем.
31. Динамические системы в экономических задачах. Уравнения Вольтера-Лотка.
32. Динамические системы в экономических задачах. Модель Холдинга-Тэннера.

## УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКИЕ МАТЕРИАЛЫ ПО ДИСЦИПЛИНЕ

### 1. ПЕРЕЧЕНЬ ОБЯЗАТЕЛЬНОЙ (ОСНОВНОЙ) ЛИТЕРАТУРЫ

1. Д. Каханер, К. Моулер, С. Нэш. Численные методы и программное обеспечение. – М.: Мир, 2001.
2. Дж. Денис мл., Р. Шнабель. Численные методы безусловной оптимизации и решения нелинейных уравнений. – М.: Мир, 1998.
3. Д.Ши. Численные методы в задачах теплообмена – М.:Мир, 1998.
4. Ю.П. Боглаев. Вычислительная математика и программирование. – М.: Высшая школа, 1990.
5. А. И. Плис, Н.А. Сливиня. Mathcad: математический практикум.– М.: Финансы и статистика, 2002.
6. Высшая математика для экономистов, под ред. Н.Ш Крамера. – М.: Банки и биржи, 1999.

### 2. ПЕРЕЧЕНЬ ДОПОЛНИТЕЛЬНОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. А.С. Солодовников, В.А. Бабайцев, А.В Браилов. Математика в экономике– М.: Финансы и статистика, 1998.
2. М.Мину. Математическое программирование. Теория и алгоритмы. – М.: Наука, 1992.
3. Исследование операций в экономике, под ред. Н. Ш. Крамера. – М.: Банки и биржи, 2002.

**УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКАЯ (ТЕХНОЛОГИЧЕСКАЯ) КАРТА ДИСЦИПЛИНЫ  
«ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ»**

Номер недели	Номер темы	Вопросы, изучаемые на лекции	Занятия (номера)		Используемые наглядные и методические пособия	Самостоятельная работа студентов		Формы контроля
			практич. (семин.)	лаборат.		содержание	час.	
1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1.	Введение Математические модели и численные методы. Место численных методов среди других математических методов. Краткая история численных методов. Основные понятия приближенного анализа.		№1		Подготовка к выполнению лабораторной работы, выполнение задания	2	Тестирование по карточкам и компьютерной программе, зачет
2				№2		Подготовка к выполнению лабораторной работы, выполнение задания	2	Зачет
3	2.	Прямые методы решения систем линейных уравнений.		№3		Подготовка к выполнению лабораторной работы, выполнение задания	2	Зачет
4				№4		Подготовка к выполнению лабораторной работы, выполнение задания	2	Прием лабораторных работ с оценкой по четырех бальной системе, зачет
5	3.	Итерационные методы решения систем линейных уравнений. Линейное программирование.		№5		Подготовка к выполнению лабораторной работы, выполнение задания	2	Зачет

1	2	3	4	5	6	7	8	9
6				№6		Подготовка к выполнению лабораторной работы, выполнение задания	2	Зачет
7	4.	Локальная интерполяция.		№7		Подготовка к выполнению лабораторной работы, выполнение задания	2	Тестирование по карточкам и компьютерной программе, зачет
8				№8		Подготовка к выполнению лабораторной работы, выполнение задания	2	Зачет
9	5.	Глобальная интерполяция. Метод наименьших квадратов.		№9		Подготовка к выполнению лабораторной работы, выполнение задания	2	Зачет
10				№10		Подготовка к выполнению лабораторной работы, выполнение задания	2	Прием лабораторных работ с оценкой по четырех бальной системе, зачет
11	6.	Разложение элементарных функций в ряд Тейлора.		№11		Подготовка к выполнению лабораторной работы, выполнение задания	2	Зачет
12				№12		Подготовка к выполнению лабораторной работы, выполнение задания	2	Зачет

1	2	3	4	5	6	7	8	9
13	7.	Разложение функций в ряд Фурье		№13		Подготовка к выполнению лабораторной работы, выполнение задания	2	Тестирование по карточкам и компьютерной программе, зачет
14				№14		Подготовка к выполнению лабораторной работы, выполнение задания	2	Зачет
15	8.	Линейные дифференциальные уравнения.		№15		Подготовка к выполнению лабораторной работы, выполнение задания	2	Зачет
16				№16		Подготовка к выполнению лабораторной работы, выполнение задания	2	Прием лабораторных работ с оценкой по четырех бальной системе, зачет
17	9.	Автономные системы на плоскости		№17		Подготовка к выполнению лабораторной работы, выполнение задания	2	Зачет
18				№18		Подготовка к выполнению лабораторной работы, выполнение задания	2	Тестирование по карточкам и компьютерной программе, зачет

## 2. План – конспект лекций по дисциплине.

### ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ

#### Лекция 1

##### *Введение.*

- 1) *Математические модели и численные методы. Место численных методов среди других математических методов.*
- 2) *Краткая история численных методов. Основные понятия приближенного анализа.*

#### Лекция 2

##### *Задачи линейной алгебры и линейной оптимизации.*

- 1) *Прямые методы решения систем линейных уравнений. Вводные замечания.*
- 2) *Метод Гаусса. Определитель и обратная матрица.*
- 3) *Метод прогонки и некоторые другие методы.*

#### Лекция 3

##### *Задачи линейной алгебры и линейной оптимизации.*

- 1) *Итерационные методы решения систем линейных уравнений. Уточнение решения.*
- 2) *Метод Гаусса – Зейделя.*
- 3) *Задачи на собственные значения.*
- 4) *Линейное программирование.*

#### Лекция 4

##### *Аппроксимация функций.*

- 1) *Локальная интерполяция.*
- 2) *Использование рядов.*

#### Лекция 5

##### *Аппроксимация функций.*

- 1) *Глобальная интерполяция. Аппроксимация данных кубическими сплайнами.*
- 2) *Метод наименьших квадратов.*

#### Лекция 6

##### *Задачи математического анализа.*

- 1) *Разложение элементарных функций в ряд Тейлора.*
- 2) *Применение рядов Тейлора для линеаризации нелинейных элементов.*

### *Лекция 7*

*Задачи математического анализа.*

- 1) Разложение функций в ряд Фурье.*
- 2) Символьное преобразование Лапласа и Фурье в MathCad.*

### *Лекция 8*

*Обыкновенные дифференциальные уравнения.*

- 1) Линейные дифференциальные уравнения. Одношаговые методы.*
- 2) Многошаговые методы.*

### *Лекция 9*

*Обыкновенные дифференциальные уравнения.*

- 1) Автономные системы на плоскости.*
- 2) Построение предельных циклов.*

## **3. Лабораторные работы – 36 часов.**

1. Простейшие вычисления и операции в Mathcad. Матрицы, определители и их свойства - 2 часа.
2. Решение систем линейных алгебраических уравнений - 2 часа.
3. Решение задач линейного программирования графическим методом - 2 часа.
4. Решение задач линейного программирования симплекс-методом - 2 часа.
5. Локальная линейная интерполяция - 2 часа.
6. Локальная интерполяция сплайнами – 2 часа.
7. Глобальная интерполяция – 2 часа.
8. Построение аналитических выражений с помощью метода наименьших квадратов – 2 часа.
9. Аппроксимация функций произвольного вида методом наименьших квадратов – 2 часа.
10. Исследование функций и построение графиков - 2 часа.
11. Определение корней нелинейных уравнений – 2 часа.
12. Решение задач нелинейной оптимизации – 2 часа.
13. Вычисление производных и интегралов – 2 часа.
14. Разложение функций в ряд Тейлора и ряд Фурье – 2 часа.
15. Решение дифференциальных уравнений первого порядка – 2 часа.
16. Линейные дифференциальные уравнения – 2 часа.
17. Автономные системы на плоскости. Фазовые портреты – 2 часа.
18. Решение жестких дифференциальных уравнений – 2 часа.

Пособия по выполнению лабораторных работ:

1. В.И. Мажукин, О.Н. Королева. Математическое моделирование в экономике: Часть I. Численные методы и вычислительные алгоритмы, Часть II. Лабораторный практикум по численным методам и вычисли-

тельными алгоритмам. Часть III. Экономические приложения: учебное пособие. – М.: Флинта: МПСИ, 2005. – 232 с.: ил.

2. Масловская А.Г., Чепак Л. В. Численные методы. Моделирование на базе Matlab. Практикум. – Благовещенск: Амурский гос. ун-т, 2006.
3. Кетков Ю. Л. И др. MATLAB 6.x: программирование численных методов. – СПб.: БХВ-Петербург, 2004. – 672 с.: ил.
4. Б.С.Малышев, П.Б.Казакова, М.В.Романова. Лекции по математической экономике.

#### 4. Самостоятельная работа

1. Выполнение РГР: 1). Подбор эмпирических зависимостей и восстановление функции, заданных таблично, с помощью интерполяционных полиномов (8 часов). 2). Индивидуальное задание (10 часов).
2. Подготовка к лабораторным работам, составление отчетов по ним (18 часов).

Задачи для самостоятельной работы.

##### 1. Задание на РГР.

- 1.1 Найдите методом наименьших квадратов значения коэффициентов линейной зависимости  $y = ax + b$  по заданным эмпирическим данным.
- 1.2 Используя встроенные функции MathCad подобрать эмпирическую зависимость.
- 1.3 Восстановить значение  $y$  в точке  $x = N + 0.55$ , где  $N$  — номер варианта, с помощью кубического полинома:
  - 1.3.1. Тейлора.
  - 1.3.2. Локальной сплайн-функции.
  - 1.3.3. Глобальной сплайн-функции.
  - 1.3.4. Чебышева.
  - 1.3.5. Ньютона ( первая формула ).
  - 1.3.6. Ньютона ( вторая формула ).
  - 1.3.7. Гаусса.
  - 1.3.8. Бесселя.
  - 1.3.9. Стирлинга.
  - 1.3.10. Эйткина.



Данные:

1.

X	1	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8	1.9	2
Y	0.686	0.742	0.767	0.646	0.807	0.774	0.97	0.932	0.936	0.978	1.048

2.

X	2	2.1	2.2	2.3	2.4	2.5	2.6	2.7	2.8	2.9	3
Y	2.312	2.251	2.418	2.752	2.459	2.1,	3.022	3.079	2.42	2.669	3.241

3.

X	3	3.1	3.2	3.3	3.4	3.5	3.6	3.7	3.8	3.9	4
Y	4.615	4.591	5.13	5.481	5.492	5.553	5.471	5.727	5.798	6.11	6.605

4.

X	4	4.1	4.2	4.3	4.4	4.5	4.6	4.7	4.8	4.9	5
Y	8.472	8.805	9.096	8.993	9312	9.465	9.771	9.61	9.722	11.419	10.285

5.

X	5	5.1	5.2	5.3	5.4	5.5	5.6	5.7	5.8	5.9	6
Y	12.36	13.63	13.304	13.148	13.482	14.24	14.516	14.882	15.246	15.369	15.158

6.

X	6	6.1	6.2	6.3	6.4	6.5	6.6	6.7	6.8	6.9	7
Y	17.63	19.747	19.78	18.80	19.88	21.11	20.20	19.48	20.15	20.50	21.29

7.

X	7	7.1	7.2	7.3	7.4	7.5	7.6	7.7	7.8	7.9	8
Y	25.24	25.13	25.66	26.62	26.75	27.23	26.49	26.87	27.22	28.06	27.78

8.

X	8	8.1	8.2	8.3	8.4	8.5	8.6	8.7	8.8	8.9	9
Y	30.528	34.221	34.233	34.114	33.595	34.058	34.498	35.822	35.678	37.442	35.698

9.

X	9	9.1	9.2	9.3	9.4	9.5	9.6	9.7	9.8	9.9	10
Y	41.74	42.24	43.88	42.16	43.69	45.04	42461	45.72	44.05	45.86	44.95

10.

X	10	10.1	10.2	10.3	10.4	10.5	10.6	10.7	10.8	10.9	11
Y	49.75	51.92	50.08	52.37	53.41	54.96	52.77	54.11	55.47	55.68	56.19

11.

X	11	11.1	11.2	11.3	11.4	11.5	11.6	11.7	11.8	11.9	12
Y	62.17	63.05	63.72	64.23	64.08	63.58	65.412	65.284	65.0	68.87	65.74

12.

X	12	12.1	12.2	12.3	12.4	12.5	12.6	12.7	12.8	12.9	13
Y	71.16	74.26	72.65	74.50	76.64	75.51	75.70	76.35	79.31	77.37	77.69

13.

X	13	13.1	13.2	13.3	13.4	13.5	13.6	13.7	13.8	13.9	14
Y	86.61	85.49	87.80	88.61	89.07	89.24	89.63	90.76	91.32	91.42	91.71

14.

X	14	14.1	14.2	14.3	14.4	14.5	14.6	14.7	14.8	14.9
Y	99.811	100.31	99.492	102.61	103.2	104.36	104.73	105.16	104.65	105.58

15.

X	15	15.1	15.2	15.3	15.4	15.5	15.6	15.7	15.8	15.9	16
Y	115.1	115.2	115.1	116.0	117.2	119.0	121.4	119.3	120.8	121.5	123.3

16.

X	16	16.1	16.2	16.3	16.4	16.5	16.6	16.7	16.8	16.9	17
Y	131.96	126.7	132.26	131.2	132.0	133.7	133.2	135.7	134.6	139.8	133.23

17.

X	17	17.1	17.2	17.3	17.4	17.5	17.6	17.7	17.8	17.9
Y	147.67	150.75	149.74	150.74	147.94	147.77	152.08	154.65	154.98	152.55

18.

X	18	18.1	18.2	18.3	18.4	18.5	18.6	18.7	18.8	18.9	19
Y	164.6	163.2	164.4	165.5	166.7	167.4	169.6	169.4	170.5	174.2	173.1

19.

X	19	19.1	19.2	19.3	19.4	19.5	19.6	19.7	19.8	19.9	20
Y	186.3	180.3	184.4	186.0	189.2	188.3	184.8	186.4	194.5	192.3	191.89

20.

X	20	20.1	20.2	20.3	20.4	20.5	20.6	20.7	20.8	20.9
Y	200.30	200.96	200.73	202.89	208.23	208.89	209.51	206.87	209.17	214.21

2. Индивидуальные задания для группы специализации «Автоматизация технико-экономических процессов»

**Задание 1.** Исследуйте заданную таблицей межотраслевого баланса модель экономической системы ( в таблице А и I – сельское хозяйство, В и II – промышленность, С и III – транспорт, IV – сектор конечного спроса (домашнее хозяйства), V – общий выпуск). Найдите объем выпуска каждой отрасли по заданному конечному спросу. Найдите зависимость выпуска каждой отрасли от конечного спроса. Укажите, как должен измениться выпуск каждого сектора при увеличении спроса на транспортные услуги на  $k\%$ , где  $k = N$  для вариантов  $N = 1-10$ ,  $k = (N/2) - 5$  для вариантов  $N = 11-20$ .

1.  $Y = (100 \ 100 \ 110)^T$ .

	I	II	III	IV	V
A	10	16	50	20	96
B	3	15	40	23	81
C	2	26	30	32	90

2.  $Y = (200 \ 150 \ 110)^T$ .

	I	II	III	IV	V
A	20	22	100	30	172
B	6	20	80	26	132
C	5	32	60	35	132

3.  $Y = (300 \ 150 \ 190)^T$ .

	I	II	III	IV	V
A	30	28	150	40	248
B	10	25	120	30	185
C	7	38	90	37	172

4.  $Y = (400 \ 250 \ 250)^T$ .

	I	II	III	IV	V
A	40	34	200	50	324
B	13	30	160	33	236
C	10	44	120	40	214

$$5. Y = (410 \ 300 \ 300)^T .$$

	I	II	III	IV	V
A	50	40	250	60	400
B	16	35	200	36	287
C	12	50	150	42	254

$$6. Y = (500 \ 400 \ 350)^T .$$

	I	II	III	IV	V
A	60	46	300	70	476
B	20	40	240	40	340
C	15	56	180	45	296

$$7. Y = (600 \ 450 \ 400)^T .$$

	I	II	III	IV	V
A	70	52	350	80	552
B	23	45	280	43	391
C	17	62	210	47	336

$$8. Y = (650 \ 450 \ 400)^T .$$

	I	II	III	IV	V
A	80	58	400	90	628
B	26	50	320	46	442
C	20	68	240	50	378

$$9. Y = (710 \ 500 \ 420)^T .$$

	I	II	III	IV	V
A	90	64	450	100	704
B	30	55	360	50	495
C	22	74	270	52	418

$$10. Y = (800 \ 600 \ 500)^T .$$

	I	II	III	IV	V
A	100	70	500	110	780
B	33	60	400	53	546
C	25	80	300	55	460

$$11. Y = (500 \ 400 \ 300)^T .$$

	I	II	III	IV	V
A	60	46	300	70	476
B	20	40	240	40	340
C	15	56	180	45	296

$$12. Y = (600 \ 400 \ 350)^T .$$

	I	II	III	IV	V
A	70	52	350	80	552
B	23	45	280	43	391
C	17	62	210	47	336

13.  $Y = (660\ 400\ 350)^T$ .

	I	II	III	IV	V
A	80	58	400	90	628
B	26	50	320	46	442
C	20	68	240	50	378

14.  $Y = (730\ 600\ 460)^T$ .

	I	II	III	IV	V
A	90	64	450	100	704
B	30	55	360	50	495
C	22	74	270	52	418

15.  $(800\ 600\ 500)^T$ .

	I	II	III	IV	V
A	100	70	500	110	780
B	33	60	400	53	546
C	25	80	300	55	460

16.  $Y = (720\ 600\ 460)^T$ .

	I	II	III	IV	V
A	90	64	450	100	704
B	36	65	440	56	597
C	27	86	330	57	500

17.  $Y = (1000\ 700\ 600)^T$ .

	I	II	III	IV	V
A	120	82	600	130	932
B	40	70	48	60	650
C	30	92	360	60	542

18.  $Y = (1100\ 750\ 620)^T$ .

	I	II	III	IV	V
A	130	88	650	140	1008
B	43	75	520	63	701
C	32	98	390	62	582

19.  $Y = (1200\ 800\ 700)^T$ .

	I	II	III	IV	V
A	140	94	700	150	1084
B	46	80	560	66	752
C	35	104	420	65	624

20.  $Y = (1250\ 850\ 700)^T$ .

	I	II	III	IV	V
A	150	100	750	160	1160
B	50	85	600	70	805
C	37	110	450	67	664

**Задание 2.** Найдите цену на единицу продукции каждого производственного сектора модели экономики из задания 2.11 для указанного в условии вектора платежей. Укажите, как увеличиваются цены на транспортные услуги при увеличении на единицу платежей в секторе сельского хозяйства.

N	Платежи			N	Платежи		
1	0,5	0,6	0,3	11	0,3	0,4	0,1
2	0,4	0,2	0,1	12	0,5	0,4	0,1
3	0,4	0,3	0,2	13	0,2	0,4	0,2
4	0,4	0,4	0,5	14	0,3	0,3	0,4
5	0,3	0,4	0,5	15	0,4	0,4	0,6
6	0,3	0,5	0,6	16	0,4	0,4	0,5
7	0,3	0,6	0,7	17	0,4	0,4	0,4
8	0,4	0,6	0,7	18	0,5	0,5	0,5
9	0,5	0,4	0,2	19	0,5	0,6	0,6
10	0,2	0,2	0,3	20	0,5	0,6	0,7

**Задание 3.** Исследуйте заданную структуру матрицей модель экономической системы (А – сельское хозяйство, В – промышленность, С – транспорт, I – конечный спрос, II – экспорт - импорт, III – конечный продукт). Найдите объем выпуска каждой отрасли по заданному конечному спросу при наличии экспорта и импорта. Найдите матрицу нового баланса. Проверьте правильность вычислений.

1.

	I	II	III
A	20	10	20+10
B	23	30	23+30
C	32	-5	32-5

2.

	I	II	III
A	30	10	$30+10$
B	26	30	$23+30$
C	35	-5	$35-5$

3.

	I	II	III
A	40	20	$40+20$
B	30	-10	$30-10$
C	37	6	$37+6$

4.

	I	II	III
A	50	-10	$50-10$
B	33	6	$33+6$
C	40	-5	$40-5$

5.

	I	II	III
A	40	20	$40+20$
B	30	-10	$30-10$
C	37	6	$37+6$

6.

	I	II	III
A	50	-10	50-10
B	33	6	33+6
C	40	-5	40-5

7.

	I	II	III
A	60	-20	60-20
B	36	5	36+5
C	42	7	42+7

8.

	I	II	III
A	70	-40	70-40
B	40	10	40+10
C	45	5	45+5

9.

	I	II	III
A	80	-50	80-50
B	43	4	43+4
C	47	-10	47-10

10.

	I	II	III
A	90	-30	90-30
B	46	-6	46-6
C	0	-20	50-20



11.

	I	II	III
A	90	-30	90-30
B	46	-6	46-6
C	0	-20	50-20

12.

	I	II	III
A	100	-50	100-50
B	50	10	50+10
C	52	-3	47-10

13.

	I	II	III
A	110	-40	110-40
B	53	-6	53-6
C	55	-15	55-15

14.

	I	II	III
A	70	-20	90-30
B	40	10	40+10
C	45	-5	45-5

15.

	I	II	III
A	80	-30	80-30
B	43	3	43+3
C	47	3	47+3

16.

	I	II	III
A	90	-30	90-30
B	46	-6	46-6
C	50	10	50+10

17.

	I	II	III
A	100	10	100+10
B	50	10	50+10
C	52	-4	52-4

18.

	I	II	III
A	11	30	11+30
B	53	-13	53-13
C	55	-5	55-5

19.

	I	II	III
A	100	-50	50-50
B	56	-6	56-6
C	57	3	57+3

20.

	I	II	III
A	130	-30	130-30
B	60	-30	60-30
C	60	10	60+10

21.

	I	II	III
A	150	-50	150-50
B	66	-6	66-6
C	65	5	65+5

20.

	I	II	III
A	160	-10	160-10
B	70	30	70+30
C	67	-7	67-7

21.

	I	II	III
A	140	10	140+10
B	63	-3	63-3
C	62	8	62+8

**Задание 4.** Найдите национальные доходы торгующих стран в сбалансированной системе международной торговли с заданной структурной матрицей торговли.

$$1. A = \begin{pmatrix} 0,091 & 0,059 & 0,182 & 0,333 \\ 0,409 & 0,441 & 0,318 & 0,333 \\ 0,169 & 0,4 & 0,273 & 0,167 \\ 0,333 & 0,367 & 0,227 & 0,167 \end{pmatrix}$$

$$2. A = \begin{pmatrix} 0,086 & 0,056 & 0,167 & 0,333 \\ 0,417 & 0,444 & 0,333 & 0,333 \\ 0,154 & 0,333 & 0,25 & 0,167 \\ 0,346 & 0,375 & 0,25 & 0,167 \end{pmatrix}$$

$$3. A = \begin{pmatrix} 0.077 & 0.053 & 0.154 & 0.333 \\ 0.423 & 0.447 & 0.346 & 0.333 \\ 0.143 & 0.286 & 0.231 & 0.167 \\ 0.357 & 0.382 & 0.269 & 0.167 \end{pmatrix}$$

$$4. A = \begin{pmatrix} 0.071 & 0.05 & 0.143 & 0.333 \\ 0.429 & 0.45 & 0.357 & 0.333 \\ 0.133 & 0.25 & 0.214 & 0.167 \\ 0.367 & 0.389 & 0.286 & 0.167 \end{pmatrix}$$

$$5. A = \begin{pmatrix} 0.067 & 0.048 & 0.133 & 0.333 \\ 0.433 & 0.452 & 0.367 & 0.333 \\ 0.125 & 0.222 & 0.2 & 0.167 \\ 0.375 & 0.395 & 0.3 & 0.167 \end{pmatrix}$$

$$6. A = \begin{pmatrix} 0.063 & 0.045 & 0.125 & 0.333 \\ 0.438 & 0.455 & 0.375 & 0.333 \\ 0.118 & 0.2 & 0.188 & 0.167 \\ 0.382 & 0.4 & 0.313 & 0.167 \end{pmatrix}$$

$$7. A = \begin{pmatrix} 0.059 & 0.043 & 0.118 & 0.333 \\ 0.441 & 0.457 & 0.382 & 0.333 \\ 0.111 & 0.182 & 0.176 & 0.167 \\ 0.389 & 0.405 & 0.324 & 0.167 \end{pmatrix}$$

$$8. A = \begin{pmatrix} 0.056 & 0.042 & 0.111 & 0.333 \\ 0.444 & 0.458 & 0.389 & 0.333 \\ 0.105 & 0.167 & 0.167 & 0.167 \\ 0.395 & 0.409 & 0.333 & 0.167 \end{pmatrix}$$

$$9. A = \begin{pmatrix} 0.053 & 0.04 & 0.105 & 0.333 \\ 0.447 & 0.46 & 0.395 & 0.333 \\ 0.1 & 0.154 & 0.158 & 0.167 \\ 0.4 & 0.413 & 0.342 & 0.167 \end{pmatrix}$$

$$10. A = \begin{pmatrix} 0.05 & 0.038 & 0.1 & 0.333 \\ 0.45 & 0.462 & 0.4 & 0.333 \\ 0.095 & 0.143 & 0.15 & 0.167 \\ 0.405 & 0.417 & 0.35 & 0.167 \end{pmatrix}$$

$$11. A = \begin{pmatrix} 0.048 & 0.037 & 0.095 & 0.167 \\ 0.202 & 0.213 & 0.405 & 0.333 \\ 0.091 & 0.133 & 0.143 & 0.167 \\ 0.659 & 0.67 & 0.357 & 0.333 \end{pmatrix}$$

$$12. A = \begin{pmatrix} 0.045 & 0.036 & 0.091 & 0.167 \\ 0.205 & 0.214 & 0.409 & 0.333 \\ 0.087 & 0.125 & 0.136 & 0.167 \\ 0.663 & 0.673 & 0.364 & 0.333 \end{pmatrix}$$

$$13. A = \begin{pmatrix} 0.043 & 0.034 & 0.087 & 0.167 \\ 0.207 & 0.216 & 0.413 & 0.333 \\ 0.083 & 0.118 & 0.13 & 0.167 \\ 0.667 & 0.676 & 0.37 & 0.333 \end{pmatrix}$$

$$14. A = \begin{pmatrix} 0.042 & 0.033 & 0.083 & 0.167 \\ 0.208 & 0.217 & 0.417 & 0.333 \\ 0.08 & 0.111 & 0.125 & 0.167 \\ 0.67 & 0.676 & 0.375 & 0.333 \end{pmatrix}$$

$$15. A = \begin{pmatrix} 0.04 & 0.032 & 0.08 & 0.167 \\ 0.21 & 0.218 & 0.42 & 0.333 \\ 0.077 & 0.105 & 0.12 & 0.167 \\ 0.673 & 0.681 & 0.38 & 0.333 \end{pmatrix}$$

$$16. A = \begin{pmatrix} 0.038 & 0.031 & 0.077 & 0.167 \\ 0.212 & 0.219 & 0.423 & 0.333 \\ 0.074 & 0.1 & 0.115 & 0.167 \\ 0.676 & 0.683 & 0.385 & 0.333 \end{pmatrix}$$

$$17. A = \begin{pmatrix} 0.037 & 0.03 & 0.074 & 0.167 \\ 0.213 & 0.22 & 0.426 & 0.333 \\ 0.071 & 0.095 & 0.111 & 0.167 \\ 0.679 & 0.685 & 0.389 & 0.333 \end{pmatrix}$$

$$18. A = \begin{pmatrix} 0.036 & 0.029 & 0.071 & 0.167 \\ 0.214 & 0.221 & 0.429 & 0.333 \\ 0.069 & 0.091 & 0.107 & 0.167 \\ 0.681 & 0.688 & 0.393 & 0.333 \end{pmatrix}$$

$$19. A = \begin{pmatrix} 0.034 & 0.029 & 0.069 & 0.167 \\ 0.216 & 0.221 & 0.431 & 0.333 \\ 0.067 & 0.087 & 0.103 & 0.167 \\ 0.683 & 0.689 & 0.397 & 0.333 \end{pmatrix} \quad 20. A = \begin{pmatrix} 0.033 & 0.028 & 0.067 & 0.167 \\ 0.217 & 0.222 & 0.433 & 0.333 \\ 0.065 & 0.083 & 0.1 & 0.167 \\ 0.685 & 0.691 & 0.4 & 0.333 \end{pmatrix}$$

Пример расчета РГР находится в файле MathCad “Пример выполнения РГР”.

Индивидуальные задания для групп «Э» и «А» находятся в файлах с соответствующими названиями. Методические рекомендации и примеры расчета для группы Э находятся в файле «Методические указания для Э», а для группы А – и в методическом пособии Б.С.Малышев, П.Б.Казакова, М.В.Романова. «Лекции по математической экономике».

Задачи для самостоятельной работы находятся в файле с таким же названием.

## 5. Вопросы и задачи к зачету

Для допуска к зачету достаточными основаниями являются выполнение и защита РГР и всех лабораторных работ. Студент, не защитивший несколько лабораторных работ и (или) РГР, допускается к зачету, но перед получением билета он должен ответить на вопросы, относящиеся к незащищенным лабораторным работам и РГР. Для подготовки ответа студенту отводится 80 мин.

Билет содержит 5 задач, которые студент должен выполнить с помощью ППП Mathcad. Сдавшим зачет считается студент, решивший все 5 задач.

### Темы заданий

1. Решение систем линейных уравнений методом Гаусса.
2. Решение систем линейных уравнений методом прогонки.
3. Решение систем линейных уравнений методом Гаусса-Зейделя.
4. Решение систем линейных уравнений методом вращения.
5. Решение задач линейного программирования графическим методом.
6. Решение задач линейного программирования симплекс-методом.
7. Разложить в ряд Тейлора заданную функцию.
8. Разложить в ряд Фурье заданную функцию.
9. Подбор эмпирической зависимости и оценка коэффициентов с помощью метода наименьших квадратов для заданной таблично функции.
10. Определение корня нелинейного уравнения методом бисекции.
11. Определение корня нелинейного уравнения методом хорд.
12. Определение корня нелинейного уравнения методом Ньютона.

13. Определение корня нелинейного уравнения методом простой итерации.
14. Решение системы нелинейных уравнений.
15. Нахождение экстремума функции методом золотого сечения.
16. Нахождение экстремума функции методом координатного спуска.
17. Нахождение экстремума функции методом градиентного спуска.
18. Нахождение экстремума функции методом штрафных функций.
19. Исследование функций и построение графиков.
20. Численное дифференцирование.
21. Численное интегрирование.
22. Решение задачи Коши для диф.ур-я первого порядка.
23. Решение задачи Коши для диф.ур-й высших порядков.
24. Решение дифференциального уравнения методом Рунге-Кутты.
25. Общее решение однородных линейных уравнений с постоянными коэффициентами.
26. Решение неоднородных линейных уравнений с постоянными коэффициентами. Метод подбора.
27. Жесткие системы. Решение методом матричной экспоненты.
28. Автономные системы на плоскости. Фазовые кривые. Точки покоя.
29. Автономные системы на плоскости. Устойчивые решения.
30. Автономные системы на плоскости. Предельные циклы. Фазовые портреты нелинейных систем.
31. Динамические системы в экономических задачах. Уравнения Вольтера-Лотка.

Задачи к зачету находятся в файле “Зачетное задание”.

## **6. Контроль знаний**

Промежуточный контроль знаний студентов по дисциплине предусматривает две контрольные точки в 4 семестре, оценки по которым выставляются на основе информации о выполнении лабораторных работ, РГР, а также на основе тестирования теоретических знаний, полученных за прошедший период обучения. Предусмотрено тестирование по темам:

1. Аппроксимация функций – 4 семестр, 1-я контрольная точка;
2. Разложение функций в ряд Фурье – 4 семестр, 2-я контрольная точка.