Федеральное агентство по образованию
АМУРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
(ГОУВПО «АмГУ»)
Факультет математики и информатики

УТВЕРЖДАЮ
Зав. кафедрой МАиМ
Т.В. Труфанова
«___»________2007г.

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

Учебно – методический комплекс дисциплины

для специальностей
010101 - математика
010701 –физика

Составитель: В.П. Нейман

Благовещенск
2007

Печатается по решению
редакционно-издательского совета
факультета математики и
информатики
Амурского государственного
университета

Нейман В.П.

Теоретическая механика. Учебно – методический комплекс дисциплины для студентов очной формы обучения специальностей 010101 «Математика», 010701 «Физика» – Благовещенск: Амурский гос. ун–т, 2007. −147 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ

1. ВЫПИСКА ИЗ ГОСУДАРСТВЕННОГО ОБРАЗОВАТЕЛЬНОГО СТАНДАРТА ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ

1.1. Специальность 010101 «Математика»

ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫЙ СТАНДАРТ ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ

Специальность 010101–"Математика"

Квалификация – математик

ЕН.Ф.04 ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

Кинематика: траектория, закон движения, скорость точки, ускорение точки, теорема о сложении скоростей, угловая скорость твердого тела (поступательного и вращательного), пара вращений, теорема Эйлера о поле скоростей движущегося твердого тела, поле скоростей и ускорений тела с одной неподвижной точкой, теорема Кориолиса.

Динамика точки: законы Ньютона, уравнения движения материальной точки в декартовых и естественных осях, теоремы динамики точки, первые интегралы уравнений движения. Движение под действием центральной силы, законы Кеплера, движение по поверхности и кривой (точка со связью), реакции связей, теорема об изменении энергии для несвободной точки, относительное движение и относительное равновесие точки со связью, вес тела на Земле.

Динамика систем точек: связи и их классификация, обобщенные координаты и обобщенные силы, принцип виртуальных перемещений для неосвобождающих связей, принцип Даламбера-Лагранжа для систем с идеальными связями, силы внутренние и внешние, теоремы динамики систем, формулы Кенига, первые интегралы уравнений движения и законы сохранения.

Аналитическая механика: уравнения Лагранжа второго рода, циклические и позиционные координаты, уравнения Рауса для систем с циклическими координатами, канонические уравнения Гамильтона, принципы Гамильтона и Якоби

1.2. Специальность 010701 «Физика»

ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫЙ СТАНДАРТ ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ

Специальность 010701– "Физика"
Квалификация – физик

ОПД.Ф.О1 Теоретическая физика

Механика.

Частица и материальная точка. Принципы относительности Галилея и Эйнштейна. Нерелятивистские и релятивистские уравнения движения частицы. Взаимодействия частиц, поля. Законы сохранения. Общие свойства одномерного движения. Колебания. Движение в центральном поле. Система многих взаимодействующих частиц. Рассеяние частиц. Механика частиц со связями, уравнения Лагранжа. Принцип наименьшего действия. Движение твердого тела. Движение относительно неинерциальных систем отсчета. Колебания систем со многими степенями свободы. Нелинейные колебания. Канонический формализм, уравнения Гамильтона, канонические преобразования, теорема Лиувилля. Метод Гамильтона-Якоби, адиабатические инварианты.

2. РАБОЧИЕ ПРОГРАММЫ

2.1. Специальность 010101 «Математика»

Федеральное агентство по образованию РФ
Амурский государственный университет

УТВЕРЖДАЮ
Проректор по УНР
______________Е.С. Астапова

«__» ________________ 200__г.

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА

по дисциплине **"Теоретическая механика"**

для специальности 010101–"Математика"

Курс 4 Семестр 7, 8

Лекции 62 (32+30) час. Экзамен 8 семестр

Практические (семинарские) занятия 62 (32+30) час. Зачет 7 семестр

Лабораторные занятия (нет)

Самостоятельная работа 76 час.

Всего 200 часов

1. ЦЕЛИ И ЗАДАЧИ ДИСЦИПЛИНЫ, ЕЕ МЕСТО В УЧЕБНОМ ПРОЦЕССЕ

1.1 Цель преподавания дисциплины.
Основными целями изучения теоретической механики студентами специальности 010101 - «математика» являются: знакомство с разделами и методами теоретической механики, демонстрация основополагающей роли математики в развитии теоретической механики.

1.2 Задачи изучения дисциплины.
В процессе обучения студенты должны овладеть умениями и навыками свободно и уверенно использовать при решении задач механики знания,

полученные при изучении таких дисциплин, как «Аналитическая геометрия», «Математический анализ», «Диффуравнения», «Уравнения с частными производными», «Дифференциальная геометрия», «Тензорный анализ», «Теория функций комплексного переменного», «Общая алгебра», «Линейная алгебра», «Физика» и других, приобрести навыки исследования.

1.3 Перечень дисциплин, усвоение которых необходимо при изучении данной дисциплины.

Аналитическая геометрия, математический анализ, диффуравнения, уравнения с частными производными, дифференциальная геометрия, тензорный анализ, теория функций комплексного переменного, общая алгебра, линейная алгебра, физика и др.

2. Содержание дисциплины.

2.1.Наименование тем лекционных занятий, объём в часах.

IV курс, 7 семестр.

1. Теоретическая механика как предмет. Основные понятия и исторические сведения. 1час 2. Кинематика точки. Основные понятия. 1час
3. Способы описания движения. 2час.
4. Определение движения по его скорости. Скорость в декартовых и криволинейных координатах. 2час.
5. Определение движения точки по её ускорению. Ускорение в декартовых и криволинейных координатах. 2час.
6. Скорость и ускорение в естественных координатах. Частные случаи движений. 1час.
7. Сложное движение точки. Теорема о сложении скоростей. Теорема Кориолиса. 2час.
8. Кинематика твёрдого тела. Число степеней свободы. Уравнения движения. Поступательное движение. 2час
9. Вращательное движение твёрдого тела. Теорема Эйлера о поле скоростей точек. 2час.
10. Плоскопараллельное движение твёрдого тела. МЦС. Скорости точек. Центроиды. 2час.
11. МЦУ. Ускорение точек при плоском движении. 2час.
12. Сферическое движение твёрдого тела. Аксоиды. 2час.
13. Углы Эйлера. Кинематические уравнения Эйлера. Параметры Кэли-Клейна.

2час.

14. Сложение движений твёрдого тела. 2час.
15. Статика. Связи и их классификация. 2час.
16. Реакции связей и их направления. 2час.
17. Уравнения равновесия плоской и пространственной системы сил. 1час.
18. Аналитическая статика. Возможные перемещения. Принцип возможных перемещений.
   2час.

IV курс, 8 семестр

19. Динамика материальной точки. ИСО. Принцип относительности Галилея. Законы Ньютона. Диффуравнения материальной точки. Галилеева группа преобразований. 2час.
20. Общие теоремы динамики. Теорема о движении центра масс. Теорема об изменении количества движения. Законы сохранения. 2час.
21. Моменты инерции. Тензор инерции. Эллипсоид инерции. 2час.
22. Работа сил и моментов. Потенциальное силовое поле и его свойства.2час.
23. Кинетическая энергия. Теорема об изменении кинетической энергии. Закон сохранения механической энергии. 1час
24. Кинетический момент. Теорема об изменении кинетического момента. Закон сохранения. 1час.
25. Движение в центральном поле. Законы Кеплера. Задача двух тел. 2час.
26. Принцип Даламбера. Силы инерции. 1час
27. Общее уравнение динамики. Принцип Лагранжа-Даламбера. 1час
28. Уравнения Лагранжа 1-го рода. 1час
29. Уравнения Лагранжа 2-го рода. Уравнения Лагранжа в потенциальном поле. Циклические координаты.
   2час.
30. Физическая природа законов сохранения. 2час.
31. Малые колебания. Гармонический осциллятор. Маятник. Главные колебания и главные (нормальные) координаты.
   2час.
32. Принцип наименьшего действия. Уравнения Гамильтона. 2час.
33. Скобки Пуассона. Интегралы движения. 1час.
34. Фазовое пространство. Пространство конфигураций.
Уравнения Рауса. 1час.
35. Метод Гамильтона-Якоби. 1час.
36. Движение тел переменной массы. Уравнение Мещерского. Формула Циолковского. 2час.

37. Относительное движение в НИСО. Диффуравнения в НИСО. Силы инерции в НИСО.
   2час.

2.2.Практические занятия, их содержание и объём в часах.

IV курс, 7 семестр

1. Кинематика точки. 2час.
2. Кинематика твёрдого тела. Поступательное и вращательное движения. 2ч.
3. Определение движения по скорости и ускорению. 2час.
4. Сложное движение точки. 2час.
5. Скорости точек при плоском движении. 2час.
6. Ускорение точек при плоском движении. 2час.
7. МЦУ. Определение ускорений. 2час.
8. Центроиды. 2час.
9. Сферическое движение. 2час.
10. Аксоиды. 2час.
11. Контр. работа. 2час.
12. Равновесие плоской системы сил. 4час.
13. Равновесие пространственной системы сил. 4час.
14. Контрольная работа. 2час.

IV курс, 8 семестр

15. Принцип возможных перемещений. 2час.
16. Определение реакций опор. 2час.
17. Контрольная работа. 1час.
18. Законы Ньютона. Задачи динамики. 2час.
19. Дифференциальные уравнения материальной точки. 1час.
20. Общие теоремы динамики о движении центра масс и об изменении количества движения. Законы сохранения. 2час.
21. Моменты инерции. 1час.
22. Работа сил и моментов. 2час.
23. Теорема об изменении кинетической энергии. 2час.
24. Теорема об изменении кинетического момента. 1час.
25. Принцип Даламбера. 2час.
26. Общее уравнение динамики. 1час.
27. Уравнения Лагранжа 2-го рода. 2час.
28. Малые колебания. 2час.
29. Уравнения Гамильтона. Скобки Пуассона. 2час.
30. Динамика твёрдого тела. 1час.
31. Движение тел переменной массы. 1час.
32. Относительное движение в НИСО. 1час.
33. Контрольная работа. 2час.

2.3.Самостоятельная работа студентов (38 часов в семестр)

Расчётно-графические работы.

7 семестр

1. Расчёт скоростей, ускорений, траекторий материальной точки (К1)
2. Расчёт скорости и ускорения абсолютного движения (К10)
3. Кинематический расчёт плоского механизма (К3)
4. Определение реакций опор составной конструкции (С15)

8 семестр

5. Расчёт реакций опор методом возможных перемещений (Д15)
6. Дифф.уравнения материальной точки (Д1)
7. Общие теоремы динамики (Д6)
8. Общее уравнение динамики (Д19)
9. Малые колебания системы с одной степенью свободы (Д23)

2.4.Перечень и темы промежуточных форм контроля.

1. Контрольные работы.

   7 семестр.

   Кинематика.

   Статика.

   8 семестр.

   Принцип возможных перемещений.

   Динамика.
2. Коллоквиумы.

   7 семестр.

   Кинематика точки.

   Сложное движение точки.

   Плоское движение.

   Силы реакции.

   Условия равновесия.

   8 семестр.

   Аналитическая статика.

   Динамика материальной точки.

   Общие теоремы динамики.

   Малые колебания.

2.5.Вопросы к экзамену.

1. Траектория, закон движения, скорость, ускорение точки.
2. Углы Эйлера. Кинематические уравнения Эйлера.
3. Сложное движение точки. Теоремы о сложении скоростей и ускорений.
4. Поступательное движение. Теорема о поступательном движении.
5. Вращательное движение. Скорости и ускорения при вращательном движении.
6. Плоское движение. Методы вычисления скоростей при плоском движении.

7. Методы вычисления ускорений при плоском движении.
8. Сложение движений твёрдого тела.
9. Активные силы и силы реакции. Направление сил реакции.
10. Плоская система сил. Момент силы относительно точки. Условия равновесия.
11. Пространственная система сил. Момент сил относительно оси. Условия равновесия.
12. Основная теорема статики.
13. Классификация связей.
14. Принцип возможных перемещений.
15. Диффуравнения в ИСО. 1-ые и 2-ые интегралы. Принцип причинности. Законы Ньютона. Принцип относительности Галилея.
16. Центр масс. Теорема о движении центра масс. Закон сохранения.
17. Теорема об изменении количества движения, теорема импульсов. Закон сохранения.
18. Моменты инерции. Классификация тел по инерционным свойствам.
19. Работа сил и моментов.
20. Теорема об изменении кинетической энергии. Потенциальная энергия. Закон сохранения энергии.
21. Теорема об изменении кинетического момента. Закон сохранения.
22. Законы сохранения в центральном поле. Законы Кеплера, их связь с законами Ньютона.
23. Задача двух тел. Приведённая масса.
24. Принцип Даламбера. Даламберовы силы инерции.
25. Приведение сил инерции к простейшему виду. Частные случаи.
26. Принцип Лагранжа-Даламбера. Общее уравнение динамики.
27. Уравнение Лагранжа 1-го рода.
28. Уравнение Лагранжа 2-го рода.
29. Функция Лагранжа. Циклические и позиционные координаты. Законы сохранения.
30. Физическая природа законов сохранения.
31. Принцип наименьшего действия по Гамильтону и вывод уравнений Лагранжа.
32. Равновесие и устойчивость равновесия. Теорема Лагранжа-Дирихле.
33. Собственные колебания и их свойства.
34. Затухающие колебания и их свойства.
35. Вынужденные колебания и их свойства.
36. Главные координаты. Главные колебания.
37. Преобразование Лежандра. Уравнение Гамильтона.
38. Скобки Пуассона, их свойства. Теорема Пуассона.
39. Пространство конфигураций. Фазовое пространство. Теорема Лиувилля.
40. Метод Раусса. Уравнение Раусса.
41. Основные принципы аналитической механики.
42. Действие как функция координат. Уравнение Гамильтона-Якоби.
43. Динамические уравнения Эйлера.

44.Общая теория гироскопов.
45.Движение тел переменной массы. Уравнение Мещерского. Формула Циолковского.
46.Движение в НИСО. Проявление сил инерции на Земле.

2.6.Требования к знаниям студентов, предъявляемые на экзамене

Оценка «отлично» ставится при полном изложении теоретического материала экзаменационного билета, ответах на дополнительные вопросы со свободной ориентацией в материале лекций и других литературных источниках, при правильно выполненной практической части.

Оценка «хорошо» ставится при твердых знаниях студентом всех разделов курса (в пределах конспекта лекций) и при преимущественно правильно выполненной практической части (допускаются ошибки вычислительного характера, небольшие недочеты или неточности).

Оценку «удовлетворительно» студент получает, если дает неполные ответы на теоретические вопросы билета, показывая поверхностное знание учебного материала, владение основными понятиями и терминологией; при неверном ответе на билет или на дополнительные вопросы, при этом по крайней мере одно из практических заданий должно быть выполнено верно.

Оценка «неудовлетворительно» выставляется за незнание студентом одного из разделов курса, если студент не дает ответы на теоретические вопросы билета, показывая лишь фрагментарное знание учебного материала, незнание основных понятий и терминологии, либо если не решена ни одна задача из предлагаемых в билете.

2.7.Требования к знаниям студентов, предъявляемые на зачете

Зачет недифференцированный. Для получения зачета студентам необходимо изучить теоретический материал (кинематика, статика), выполнить и защитить 4 курсовых индивидуальных задания (РГР), пройти собеседование по вопросам теории.

3.Учебно-методические материалы по дисциплине.

3.1.Основная литература.

1. Голубев Ю.Ф. Основы теоретической механики. – М.: изд. МГУ, 2000.-720 с.
2. Поляхов Н.Н. Теоретическая механика. -М.: ВШ, 2000.-592 с.
3. Поляхов Н.Н., Зегжда, Юшков М.П. Теоретическая механика.- М.: ВШ.,2000.-592 с.
4. Сборник заданий для курсовых работ по теоретической механике. -М.: Интеграл-Пресс, 2004.-384 с.
5. Цывильский В.Л. Теоретическая механика.- М.: ВШ, 2001.-319 с.
6. Яковлев И.В. Теоретическая механика. –Новосибирск: НГУ, 1997.-196 с

3.2.Дополнительная литература.

1. Гантмахер Ф.Р. Лекции по аналитической механике. – М., 1996.
2. Кильчевский Н.А. курс теоретической механики. тт. 1,2,.– М., 1977.
3. Ландау Л.Ф., Лифшиц Е.М. Механика. – М., 1965.
4. Мещерский И.В. Сборник задач по теоретической механике. − М., 1986.
5. Яблонский А.А. Курс теоретической механики. тт. 1,2. − М., 1984.

3.3.Методические указания и материалы.

3.4.Раздаточный материал по РГР.

2.2. Специальность 010701 «Физика»

Федеральное агентство по образованию РФ
Амурский государственный университет

УТВЕРЖДАЮ
Проректор по УНР
______________Е.С. Астапова

«__» _______________ 200__г.

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА

по дисциплине **"Теоретическая механика"**

для специальности 010701–"Физика"

Курс 2 Семестр 4

Лекции 36 час. Экзамен 4 семестр

Практические (семинарские) занятия 36 час. Зачет (нет)

Лабораторные занятия (нет)

Самостоятельная работа 36 час.

Всего 108 часов

1. Цели и задачи дисциплины

1.1 Цель преподавания дисциплины.

Основная цель преподавания теоретической механики студентам специальности 010701 состоит в том, чтобы создать базу подготовки для дальнейшего изучения теоретической физики и специальных дисциплин.

1.2 Задачи изучения дисциплины.

Основными задачами изучения теоретической механики являются усвоение основных понятий, принципов и методов классической механики, овладение умениями и навыками решения и исследования классических задач.

1.3 Перечень дисциплин, усвоение которых необходимо при изучении данной дисциплины.

Математической основой курса являются такие дисциплины, как математический анализ, аналитическая геометрия, линейная алгебра, теория функций комплексного переменного, дифференциальные уравнения, интегральные уравнения, вариационное исчисление, методы математической физики.

2. СОДЕРЖАНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ

2.1. Наименование тем, их содержание, объем в часах лекционных занятий.

1 .Введение - 2 часа.

Материальная точка как математическая модель частицы в классической физике. Физические величины и их преобразования относительно группы вращений трехмерного пространства.

2.Уравнения движения частиц - 2 часа.

Законы Ньютона. Уравнения движения в нерелятивистской механике. Преобразования Галилея. Релятивистские уравнения движения. Преобразования Лоренца. Инвариантность и ковариантность уравнений движения при переходе от одной инерциальной системы отсчета к другой.

3.Взаимодействия частиц - 2 часа.

Взаимодействие с физическими полями (гравитационным, электромагнитным). Модельные представления о взаимодействиях частиц. Центральные силы. Кинетическая и потенциальная энергия. Функция Лагранжа и уравнения Лагранжа в нерелятивистской и релятивистской механике. Функция Лагранжа заряженной частицы во внешнем электромагнитном поле. Движение частиц в полях. Диссипативные силы. Общие теоремы динамики. Интегралы движения. Законы сохранения импульса, момента импульса, энергии частицы.

4.Одномерное движение - 2 часа.

Общие свойства одномерного движения. Общее решение в квадратурах. Фазовая плоскость. Периодическое движение, финитное и инфинитное движение. Закон движения частицы и период нелинейных одномерных колебаний. Приближение линейных колебаний. Метод функций Грина. Циклотронный резонанс при нерелятивистских и релятивистских скоростях частиц.

5.Движение в центральном поле - 1 час.

Общее решение уравнений движения в центральном поле.

Финитное движение под действием притяжения. Законы Кеплера. Инфинитное движение под действием силы притяжения и силы отталкивания.

6.Система двух взаимодействующих частиц - 1 час.

Общее решение задачи двух тел. Классификация орбит.

7.Рассеяние частиц - 2 часа.

Преобразование координат, импульсов и угла рассеяния от системы центра инерции к лабораторной системе. Эффективное сечение рассеяния. Рассеяние жестких сфер. Формула Резерфорда.

8. Системы многих взаимодействующих частиц - 2 часа.

Функция Лагранжа и уравнения движения системы многих взаимодействующих частиц. Законы сохранения. Движение тела с переменной массой. Теорема о вириале..

9.Механика систем со связями - 4 часа.

Уравнения Лагранжа I рода с реакциями связей. Метод неопределенных множителей Лагранжа. Принцип возможных перемещений. Принцип Даламбера. Принцип Лагранжа - Даламбера. Общее уравнение динамики. Вывод уравнений Лагранжа II рода из уравнений Даламбера.

10. Динамика твердого тела - 2 часа.

Функция Лагранжа твердого тела. Тензор инерции и его свойства. Приведение тензора инерции к главным осям .Уравнения Эйлера. Прецессия симметрического твердого тела в ньютоновском поле тяготения.

11 .Движение относительно НИСО.- 2 часа.

Функция Лагранжа системы частиц в НИСО. Уравнения движения, силы инерции. Маятник Фуко. Теорема Ларрмора.

12. Вариационные принципы - 2 часа.

Принцип Гамильтона. Уравнения Лагранжа. Законы сохранения и свойства симметрии пространства и времени. Теорема Эмми Нетер.

13.Колебания систем с многими степенями свободы - 4 часа.

Нормальные координаты и нормальные колебания. Колебания систем с многими степенями свободы при наличии диссипативных сил. Вынужденные колебания. Колебания молекул.

14. Нелинейные колебания - 2 часа.

Построение асимптотических решений для систем близких к линейным методом Крылова - Боголюбова. Адиабатические инварианты. Автоколебания. Движение под действием быстро осциллирующего возмущения. Параметрическое возбуждение колебаний.

15. Канонические методы. Метод Гамильтона - Якоби - 6 часов.

Канонические уравнения Гамильтона. Скобки Пуассона. Алгебра Ли динамических функций. Преобразования, сохраняющие алгебру Ли динамических функций. Производящие функции канонических преобразований. Теорема Лиувилля. Уравнение Гамильтона - Якоби. Теорема Якоби. Разделение переменных в уравнении Гамильтона - Якоби. Переменные "действие - угол". Адиабатические инварианты.

2.2.Практические и семинарские занятия, их содержание и объем в часах.

1.Введение - 1 ч.

Материальная точка как математическая модель частицы в классической физике. Физические величины и их преобразования относительно группы вращений трехмерного пространства.

2.У равнения движения частиц. - 4 ч.

Законы Ньютона. Уравнения движения в нерелятивистской механике. Преобразования Галилея. Релятивистские уравнения движения. Преобразования Лоренца. Инвариантность и ковариантность уравнений движения при переходе от одной инерциальной системы отсчета к другой.

3.Взаимодействия частиц.- 2 ч.

Взаимодействие с физическими полями (гравитационным, электромагнитным). Модельные представления о взаимодействиях частиц. Центральные силы. Кинетическая и потенциальная энергия. Функция Лагранжа и уравнения Лагранжа в нерелятивистской и релятивистской механике. Функция Лагранжа заряженной частицы во внешнем электромагнитном поле. Движение частиц в полях. Диссипативные силы. Общие теоремы динамики. Интегралы движения. Законы сохранения импульса, момента импульса, энергии частицы.

4.Одномерное движение - 2 ч.

Общие свойства одномерного движения. Общее решение в квадратурах. Фазовая плоскость. Периодическое движение, финитное и инфинитное движение Закон движения частицы и период нелинейных одномерных колебаний. Приближение линейных колебаний. Метод функций Грина. Циклотронный резонанс при нерелятивистских и релятивистских скоростях частиц.

5.Движение в центральном поле - 2 ч.

Общее решение уравнений движения в центральном поле.

Финитное движение под действием притяжения. Законы Кеплера. Инфинитное движение под действием силы притяжения и силы отталкивания.

6.Система двух взаимодействующих частиц - 1 ч.

Общее решение задачи двух тел. Классификация орбит.

7.Рассеяние частиц - 2 ч.

Преобразование координат, импульсов и угла рассеяния от системы центра инерции к лабораторной системе. Эффективное сечение рассеяния. Рассеяние жестких сфер. Формула Резерфорда.

8. Системы многих взаимодействующих частиц - 2 ч.

Функция Лагранжа и уравнения движения системы многих взаимодействующих частиц. Законы сохранения. Движение тела с переменной массой Теорема о вириале.

9.Механика систем со связями - 2 ч.

Уравнения Лагранжа I рода с реакциями связей. Метод неопределенных множителей Лагранжа. Принцип возможных перемещений. Принцип Даламбера. Принцип Лагранжа - Даламбера. Общее уравнение динамики. Уравнения Лагранжа II рода.

10. Динамика твердого тела - 2 ч.

Функция Лагранжа твердого тела. Тензор инерции и его свойства. Приведение тензора инерции к главным осям .Уравнения Эйлера. Прецессия симметрического твердого тела в ньютоновском поле тяготения.

11.Движение относительно НИСО.- 2 ч.

Функция Лагранжа системы частиц в НИСО. Уравнения движения, силы инерции. Маятник Фуко. Теорема Ларрмора.

12. Вариационные принципы - 2 ч.

Принцип Гамильтона. Уравнения Лагранжа. Законы сохранения и свойства симметрии пространства и времени. Теорема Эмми Нетер.

13.Колебания систем с многими степенями свободы - 4 ч.

Нормальные координаты и нормальные колебания. Колебания систем с многими степенями свободы при наличии диссипативных сил. Вынужденные колебания. Колебания молекул.

14.Нелинейные колебания - 2 часа.

Построение асимптотических решений для систем близких к линейным методом Крылова - Боголюбова. Адиабатические инварианты. Автоколебания. Движение под действием быстро осциллирующего возмущения. Параметрическое возбуждение колебаний.

15.Канонические методы. Метод Гамильтона - Якоби - 4 ч.

Канонические уравнения Гамильтона. Скобки Пуассона. Алгебра Ли динамических функций. Преобразования, сохраняющие алгебру Ли динамических функций. Производящие функции канонических преобразований. Теорема Лиувилля. Уравнение Гамильтона - Якоби. Теорема Якоби. Разделение переменных в уравнении Гамильтона - Якоби. Переменные "действие - угол". Адиабатические инварианты.

16. Контрольная работа - 2 ч.

2.3. Самостоятельная работа студентов (36 час.)

1. Знакомство с рекомендуемой литературой.
2. Подготовка к практическим занятиям.
3. Индивидуальное решение набора задач по теоретической механике.
4. Выполнение индивидуальных заданий по темам:
   исследование движения материальной точки в НИСО (К 10);
   исследование движения материальной точки в ИСО (Д1);
   исследование виртуальных перемещений механической системы при наложенных связях (Д15);
   исследование малых колебаний механической системы методом Лагранжа (Д23).

2.4. Перечень и темы промежуточных форм контроля знаний.

1. Коллоквиумы по основным темам курса.
2. Контрольная работа (13 неделя)

2.5.Требования к знаниям студентов, предъявляемые на экзамене

Оценка «отлично» ставится при полном изложении теоретического материала экзаменационного билета, ответах на дополнительные вопросы со свободной ориентацией в материале лекций и других литературных источниках, при правильно выполненной практической части.

Оценка «хорошо» ставится при твердых знаниях студентом всех разделов курса (в пределах конспекта лекций) и при преимущественно правильно выполненной практической части (допускаются ошибки вычислительного характера, небольшие недочеты или неточности).

Оценку «удовлетворительно» студент получает, если дает неполные ответы на теоретические вопросы билета, показывая поверхностное знание учебного материала, владение основными понятиями и терминологией; при неверном ответе на билет или на дополнительные вопросы, при этом по крайней мере одно из практических заданий должно быть выполнено верно.

Оценка «неудовлетворительно» выставляется за незнание студентом одного из разделов курса, если студент не дает ответы на теоретические вопросы билета, показывая лишь фрагментарное знание учебного материала, незнание основных понятий и терминологии, либо если не решена ни одна задача из предлагаемых в билете.

2.6. Вопросы к экзамену

1. Динамика материальной точки. Законы Ньютона. Диффуравнения, интегралы движения. Классический принцип причинности.
2. Уравнения движения в нерелятивистской механике. Преобразования Галилея. Принцип относительности Галилея.
3. Релятивистские уравнения механики. Преобразования Лоренца. Принцип относительности Эйнштейна.
4. Инвариантность и ковариантность уравнений движения при переходе от одной ИСО к другой.
5. Динамика системы материальных точек. Общие теоремы динамики. Законы сохранения импульса, момента импульса, энергии.
6. Общие свойства одномерного движения. Движение финитное, инфинитное, периодическое. Потенциальные ямы и потенциальные барьеры.
7. Движение в центральном поле. Законы сохранения в центральном поле. Законы Кеплера.
8. Рассеяние частиц. Эффективное сечение рассеяния. Формула Резерфорда.
9. Система 2-х взаимодействующих частиц. Общее решение задачи двух тел. Приведённая масса. Классификация орбит.
10. Теорема о вириале и её роль в физике.
11. Движение тел с переменной массой, уравнение Мещерского.
12. Классификация связей. Принцип виртуальных перемещений.
13. Механика систем со связями. Метод неопределённых множителей Лагранжа. Уравнения Лагранжа 1 -го рода.
14. Принцип Даламбера. Силы инерции Даламбера. Уравнения Даламбера.
15. Общее уравнение динамики. Принцип Лагранжа-Даламбера.
16. Обобщённые координаты, скорости. Обобщённые силы. Вывод уравнений Лагранжа 2-го рода из уравнений Даламбера.
17. Моменты инерции. Тензор инерции, его свойства. Приведение тензора инерции к главным осям.

18. Углы Эйлера. Кинематические уравнения Эйлера.
19. Динамика твёрдого тела. Динамические уравнения Эйлера.
20. Прецессия симметричного твёрдого тела в Ньютоновском поле тяготения.
21. Кинетическая энергия частиц. Потенциальная энергия. Функция Лагранжа и уравнения Лагранжа в нерелятивистской и релятивистской механике.
22. Физическая природа законов сохранения. Законы сохранения и свойства симметрии пространства и времени.
23. Принцип наименьшего действия и его роль в физике.
24. Принцип Гамильтона. Вывод уравнений Лагранжа из принципа Гамильтона.
25. Колебание систем с двумя степенями свободы. Уравнение частот, коэффициенты распределения (моды).
26. Колебания систем со многими степенями свободы. Нормальные координаты. Нормальные (главные) колебания.
27. Нелинейные колебания. Приближённые методы изучения нелинейных колебаний.
28. Преобразование Лежандра. Уравнения Гамильтона.
29. Канонические преобразования. Производящие функции.
30. Пространство конфигураций. Фазовое пространство. Теорема Лиувилля.
31. Скобки Пуассона и их связь с законами сохранения. Теорема Пуассона.
32. Циклические и позиционные координаты. Связь циклических координат с законами сохранения.
33. Свободные колебания при наличии диссипативных сил.
34. Вынужденные колебания при наличии диссипативных сил.
35. Действие как функция координат. Уравнение Гамильтона-Якоби.
36. Адиабатические инварианты.
37. Преобразование координат и импульсов от системы центра инерции к лабораторной системе.
38. Движение материальной точки в НИСО. Диффуравнения относительного движения. Силы инерции. Проявление сил инерции на Земле.

3. Учебно-методические материалы по дисциплине

3.1.Основная литература.

7. Голубев Ю.Ф. Основы теоретической механики. – М.: изд. МГУ, 2000.-720 с.
8. Поляхов Н.Н. Теоретическая механика. -М.: ВШ, 2000.-592 с.
9. Поляхов Н.Н., Зегжда, Юшков М.П. Теоретическая механика.- М.: ВШ.,2000.-592 с.
10. Сборник заданий для курсовых работ по теоретической механике. -М.: Интеграл-Пресс, 2004.-384 с.
11. Цывильский В.Л. Теоретическая механика.- М.: ВШ, 2001.-319 с.
12. Яковлев И.В. Теоретическая механика. –Новосибирск: НГУ, 1997.-196 с

3.2.Дополнительная литература.

6. Гантмахер Ф.Р. Лекции по аналитической механике. – М., 1996.
7. Кильчевский Н.А. курс теоретической механики. тт. 1,2,.– М., 1977.
8. Ландау Л.Ф., Лифшиц Е.М. Механика. – М., 1965.

9. Мещерский И.В. Сборник задач по теоретической механике. − М., 1986.
10. Ольховский В.Г. Курс теоретической механики для физиков. -М.: МГУ, 1977.
11. Яблонский А.А. Курс теоретической механики. тт. 1,2. − М., 1984.

3.3. Методические указания и материалы.

3.4. Раздаточный материал по РГР.

3. КРАТКИЙ КОНСПЕКТ ЛЕКЦИЙ

3.1. Общий тематический план лекционных занятий.

Номера тем	Наименование тем	Число часов для специальностей	
		010101	010701
Тема1	Введение	2	1
Тема2	Кинематика материальной точки: векторный и координатный способы описания движения. Закон движения. Траектория. Скорости точек. Ускорения точек.	8	1
Тема3	Кинематика твердого тела. Простейшие движения: поступательное и вращательное.	2	1
Тема4	Кинематика сложного движения материальной точки: определения, теорема о сложении скоростей, теорема Кориолиса о сложении ускорений, ускорение Кориолиса.	2	1
Тема5	Кинематика плоского движения: МЦС, определение скоростей и ускорений при плоском движении.	4	1
Тема6	Кинематика твердого тела: движение тела вокруг неподвижной точки (сферическое движение), поле скоростей и ускорений; общий случай движения твердого тела.	4	-
Тема7	Сложение движений твердого тела. Пара вращений.	2	-
Тема8	Движение материальной точки в ИСО: законы Ньютона. Дифференциальные уравнения движения в ИСО. Интегралы движения. Классический принцип причинности. Преобразования Галилея, принцип относительности Галилея. Преобразования Лоренца, принцип относительности Эйнштейна. Нерелятивистские и релятивистские уравнения движения частиц.	2	2
Тема9	Общие теоремы динамики: о движении центра масс, об изменении количества движения, об изменении кинетического момента, об изменении кинетической энергии. Законы сохранения.	8	2
Тема10	Классификация связей. Реакции связей. Принцип возможных перемещений. Принцип Даламбера. Принцип Лагранжа – Даламбера.	4	3
Тема11	Уравнения Лагранжа I и II рода. Уравнения Лагранжа в потенциальном поле. Функция Лагранжа. Физическая природа законов сохранения.	6	5
Тема12	Метод Рауса.	2	-
Тема13	Малые колебания. Колебание системы со многими степенями свободы. Главные координаты. Главные колебания. Нелинейные колебания. Колебания молекул.	3	4
Тема14	Общие свойства одномерного движения. Движение финитное и инфинитное. Потенциальные ямы и барьеры.	1	1
Тема15	Движение в центральном поле. Законы сохранения.	2	3

	Законы Кеплера. Задача двух тел. Приведенная масса. Задача Кеплера.		
Тема16	Система многих взаимодействующих частиц. Рассеяние частиц.	-	2
Тема17	Действие по Гамильтону. Принцип наименьшего действия. Теорема Эмми Нетер.	2	2
Тема18	Метод Гамильтона. Канонические уравнения Гамильтона. Функция Гамильтона. Канонические преобразования. Скобки Пуассона. Пространство конфигураций. Фазовое пространство. Теорема Лиувилля.	2	2
Тема19	Метод Гамильтона – Якоби. Дифференциальное уравнение Гамильтона – Якоби. Адиабатические инварианты.	2	2
Тема20	Движение тел переменной массы. Уравнение Мещерского. Формула Циолковского.	2	1
Тема21	Движение в НИСО. Дифференциальные уравнения относительно движения материальной точки в НИСО. Силы инерции в НИСО. Проявление сил инерции на Земле.	2	2
	Общее количество часов	62	36

3.2. Краткое содержание лекций по темам.

ТЕМА 1. Введение

Теоретическая механика как предмет

Теоретическая механика изучает равновесие и движение макро тел под действием приложенных сил со скоростями $v \ll c$.

Механика классическая и квантовая.

Классическая механика изучает движение макро тел.

Квантовая механика изучает движение микро частиц. Релятивистская и не релятивистская квантовая механика.

Небесная механика изучает движение мега тел. Релятивистская и нерелятивистская небесная механика.

Теоретическая механика является научной основой техники и базой для теоретической физики.

Основные разделы теоретической механики

Статика – раздел изучающий равновесие тел под действием приложенных сил.

Кинематика – раздел изучающий движение без учета действующих сил.

Динамика – раздел изучающий движение под действием приложенных сил.

Модели физических тел

Модель материальной точки. Известно, что тела могут двигаться поступательно и вращательно. Материальная точка – тело, имеющее массу, но не имеющее размеров. Для точки нет понятия вращательного движения. Следовательно, модель материальной точки применяется в том случае, когда тело движется поступательно. Все точки движутся одинаково и их можно принять за одну точку с суммарной массой. Модель применяется в том случае, когда вращательное движение нас не интересует, т.е. для описания поступательного движения.

Система материальных точек – совокупность материальных точек, которые, так или иначе, связаны между собой при движении.

Модель абсолютно твердого тела. Абсолютно твердое тело – такая система материальных точек, расстояние между которыми постоянное и неизменное.

Пространство классической механики.

Свойства:

1. Абсолютность (пространство не зависит от времени, материи, движения).
2. Однородность (все точки пространства равноправны, эквивалентны).
3. Изотропность (свойства пространства во всех направлениях одинаковы).

4. Евклидовость (классическое пространство подчиняется евклидовой геометрии).

ТЕМА 2. Кинематика материальной точки: векторный и координатный способы описания движения. Закон движения. Траектория. Скорости точек. Ускорения точек.

Определения

Кинематика – раздел механики изучающий механическое движение тел без учета приложенных сил.

Движение – в широком смысле это любое изменение материи.

Механическое движение – простейший вид движения, изменение положения одного тела относительно других тел.

Тело отсчета – физическое тело, относительно которого рассматривается движение других тел.

Система отсчета – система координат связанная с телом отсчета и часами.

Абсолютные величины – величины, не зависящие от выбора системы отсчета, т.е. величины одинаковые во всех системах отсчета.

Относительные величины – величины, зависящие от выбора системы отсчета.

Траектория – линия движения материальной точки в заданной системе отсчета.

Время в классической механике

Свойства:

1. Абсолютность (не зависит ни от материи, ни от пространства, ни от движения)
2. Однородность (результаты опыта не зависят от того, в какой момент времени они проводятся)
3. Об изотропности не говорят (время течет в одном направлении)

Векторный способ описания движения

а) Положение точки описывает радиус – вектор, направленный из начала координат в точку.

б) Закон движения – зависимость положения точки от времени. $\bar{r} = \bar{r}(t)$ - закон движения в векторном виде.

в) Перемещение точки - $\Delta\bar{r}$, т.е. изменение радиуса – вектора : $\Delta\bar{r} = \bar{r}_1 - \bar{r}_0$.

г) Средняя скорость точки – отношение перемещения, за какое – то время к тому промежутку времени, за которое оно произошло: $\bar{v}_{cp} = \dfrac{\Delta\bar{r}}{\Delta t}$.

д) Скоростью называется первая производная от радиуса – вектора по времени при постоянных неизменных ортах: $\bar{v} = \dfrac{d\bar{r}}{dt} = \dot{\bar{r}}$.

е) Среднее ускорение – отношения изменения скорости к тому промежутку времени, за которое оно произошло: $\bar{a}_{cp} = \dfrac{\Delta\bar{v}}{\Delta t}$.

ё) Ускорением называется вторая производная по времени от радиуса – вектора или первая производная по времени от скорости при постоянных неизменных ортах: $\bar{a} = \frac{d\bar{v}}{dt} = \dot{\bar{v}} = \frac{d^2\bar{r}}{dt^2} = \ddot{\bar{r}}$.

ж) Годограф радиуса – вектора – линия, соединяющая концы радиуса – вектора в последовательные моменты времени.

з) Годограф скорости - линия, соединяющая концы вектора скорости в последовательные моменты при условии, что все скорости перенесены параллельно себе в одну точку с общими началами.

Координатный способ описания движения.

Декартовы координаты.

а) Положение точки определяется координатами x, y, z.

б) Уравнения движения, при движении точки по траектории координаты меняются, т.е. зависят от времени: $x = x(t), y = y(t), z = z(t)$.

в) Скорость, из определения следует: $|\bar{v}| = \sqrt{\bar{v}_x^2 + \bar{v}_y^2 + \bar{v}_z^2}$.

$\bar{v} = \underbrace{v_x}_{\dot{x}}\bar{i} + \underbrace{v_y}_{\dot{y}}\bar{j} + \underbrace{v_z}_{\dot{z}}\bar{k}$.

г) Ускорение, по определению: $|\bar{a}| = \sqrt{\bar{a}_x^2 + \bar{a}_y^2 + \bar{a}_z^2}$, $\bar{a} = \underbrace{a_x}_{\ddot{x}}\bar{i} + \underbrace{a_y}_{\ddot{y}}\bar{j} + \underbrace{a_z}_{\ddot{z}}\bar{k}$ /

Естественные координаты.

Обозначается s.

а) Положение точки на траектории определяет естественная координата. Поэтому должно быть дано: траектория, масштаб на траектории, начало отсчета на траектории, положительное направление на траектории.

б) Закон движения. $s = s(t)$.

в) Скорость $v = \frac{ds}{dt} = \dot{s}$ или $\vec{v} = \frac{ds}{dt}\vec{\tau} = \dot{s}\vec{\tau}$, где $\vec{\tau}$ - орт касательной.

г) Орты естественных координат. Естественный трехгранник. При естественном описании берется три орта $\vec{\tau}, \vec{n}, \vec{b}$. $|\vec{\tau}| = |\vec{n}| = |\vec{b}| = 1$, причем $\vec{\tau} \perp \vec{n} \perp \vec{b}$. $\vec{n}$ - орт нормали, $\vec{b}$ - орт бинормали, $\vec{\tau}$ - орт касательной. Вектора $\vec{\tau}, \vec{n}, \vec{b}$ образуют правую тройку векторов, как $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$. Удобство естественных координат состоит в том, что при движении материальной точки естественный трехгранник двигается вместе с ней по траектории.

д) Ускорение в естественных координатах. $\vec{a} = \underbrace{\ddot{s}\vec{\tau}}_{a_\tau} + \underbrace{\dot{s}^2\vec{n}}_{a_n}$.

$a_\tau = \dot{v},\ a_n = \frac{v^2}{\rho},\ a_b = 0$.

е) Физический смысл $\vec{a}_\tau$ и $\vec{a}_n$. $\vec{a}_\tau$ направлено по касательной к траектории, т.е. по линии скорости, а поэтому меняет скорость по величине, по модулю. $\vec{a}_n$ направлено по нормали $\vec{n}$ к центру траектории, поэтому изменяет скорость по направлению.

ё) Частные случаи движения.

1) $a_n = 0,\ a_\tau = 0$ - равномерное прямолинейное.

2) $a_n = 0,\ a_\tau > 0$ - ускоренное прямолинейное.

3) $a_n = 0,\ a_\tau < 0$ - замедленное прямолинейное.

4) $a_n > 0,\ a_\tau = 0$ - криволинейное, с постоянной по модулю скоростью.

5) $a_n > 0,\ a_\tau > 0$ - криволинейное ускоренное.

6) $a_n > 0,\ a_\tau < 0$ - криволинейное замедленное.

Косоугольные координаты.

Косоугольными называются координаты, для которых оси расположены под произвольным углом. $|\vec{e}_1| = |\vec{e}_2| = 1,\ \vec{e}_1 \not\perp \vec{e}_2$ - орты.

В случае косоугольных координат, координаты разделяются на контравариантные и ковариантные.

Контравариантные координаты – координаты, в случае которых проекции точек и векторов определяются посредством проведения линий параллельных осям. Орты показывают направление осей координат, т.к. орты направлены в сторону увеличения координат. Путем разложения радиуса – вектора $\vec{r}$ на составляющие, параллельные осям координат получим ковариантные координаты $r^{(1)}, r^{(2)}$ радиуса – вектора $\vec{r}$. $\vec{r} = r^{(1)}\vec{e}_1 + r^{(2)}\vec{e}_2$. Контравариантные координаты произвольного вектора $\vec{a}$: $\vec{a} = a^{(1)}\vec{e}_1 + a^{(2)}\vec{e}_2$.

Ковариантные координаты радиус – вектора.

Ковариантными координатами называют координаты получаемые посредством перпендикулярного (ортогонального) проектирования точек на оси координат. Ковариантные координаты получаются посредством скалярного произведения $r_{(1)} = (\vec{r}, \vec{e}_1) = |\vec{r}|\cos(\angle\vec{r}, \vec{e}_1)$ или $r_{(1)} = \vec{r}\vec{e}_1,\ r_{(2)} = \vec{r}\vec{e}_2$.

Ковариантные координаты вектора $\vec{a}$: $a_{(1)} = \vec{a}\vec{e}_1,\ a_{(2)} = \vec{a}\vec{e}_2$.

Сравнение ко- и контравариантных координат вектора $\vec{a}$. Геометрически очевидно, что ко- и контравариантные координаты отличаются по величине для одного и того же вектора.

Квадрат радиуса – вектора и его модуль. $\vec{r}^{\,2} = \sum_{i=1}^{2} r^i r_i$ или $|\vec{r}|^2 = \sum_{i=1}^{2} r^{(i)} r_{(i)}$. Квадрат модуля $\vec{r}$ выражается через ко- и контравариантные координаты.

Квадрат модуля вектора $\vec{a}$: $\vec{a}^{\,2} = \sum_{i=1}^{2} a^i a_i$.

Скалярное произведение произвольных векторов. $\vec{a}\vec{b} = \sum_{i=1}^{2} a_i b^i = \sum_{i=1}^{2} a^i b_i$.

Ко- и контравариантные координаты в декартовой системе координат. Декартова система координат является ортогональной. В этом случае перпендикуляры к одной оси являются параллелью к другой оси. Математически это означает, что проекции векторов и точек на оси декартовых координат, полученные путем параллельного осям проектирования и полученные путем перпендикулярного к осям проектирования, будут одинаковы, т.е. $r_{(1)} \equiv r^{(1)}, r_{(2)} \equiv r^{(2)}, a_{(1)} \equiv a^{(1)}, a_{(2)} \equiv a^{(2)}$.

Символ Кронекера в ортогональной системе координат. Символом Кронекера называют единичную матрицу и обозначают $\delta_{ik}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{cases}0, i\neq k\\ 1, i=k\end{cases}$.

Символ Кронекера δ_{ik} является тензором второго ранга. Символ Кронекера помогает быстро получить ответы в тензорных расчетах и сокращать записи. Если угол между ортами прямой, то скалярное произведение одного орта на другой равен символу Кронекера: $\vec{e}_i\vec{e}_k=\delta_{ik}$.

Скалярное произведение в декартовых координатах: $\vec{a}\vec{b}=\sum_i a^i b_i$.

Ко- и контравариантные координаты в ортогональной системе равны, но отличаются в произвольной косоугольной системе.

Переход к взаимному базису.

Репером называются базисные векторы, перенесенные параллельно себе в одну точку. Репер – система координат, точка из которой исходят базисные векторы – начало координат.

Координатный базис $\vec{e}^{(1)},\vec{e}^{(2)},\vec{e}^{(3)}$ называется взаимным по отношению к базису $\vec{e}_{(1)},\vec{e}_{(2)},\vec{e}_{(3)}$.

$\vec{a}=a_1\underbrace{\vec{e}^{1}}_{\frac{[\vec{e}_2\vec{e}_3]}{V}}+a_2\underbrace{\vec{e}^{2}}_{\frac{[\vec{e}_3\vec{e}_1]}{V}}+a_3\underbrace{\vec{e}^{3}}_{\frac{[\vec{e}_1\vec{e}_2]}{V}}$. Переход от одного базиса к взаимному осуществляется через смешанное произведение.

Криволинейные координаты – такие координаты, когда хотя бы одна координатная линия является кривой. q_1,q_2,q_3 - криволинейные координаты. Они взаимосвязаны с декартовыми: $\begin{cases}q_1=q_1(x,y,z)\\ q_2=q_2(x,y,z)\\ q_3=q_3(x,y,z)\end{cases}$ и $\begin{cases}x=x(q_1,q_2,q_3)\\ y=y(q_1,q_2,q_3)\\ z=z(q_1,q_2,q_3)\end{cases}$.

Орты направлены по касательным к координатным кривым линиям в сторону увеличения соответствующей координаты.

Криволинейные координаты называются ортогональными, если орты в любой точке пространства перпендикулярны между собой, $\vec{e}_1\perp\vec{e}_2\perp\vec{e}_3$.

Координатные линии – линии, вдоль которых изменяется только одна координата, а все другие координаты неизменны.

Координатные поверхности – поверхности образованные двумя координатными линиями. Это поверхность, в которой точки отличаются двумя координатами и имеют одну общую. Через каждую точку пространства можно провести три координатных линии и три координатных поверхности. В декартовых координатах этот факт учитывать не нужно было, т.к. простой случай, но в криволинейных координатах важно именно положение координатных линий координатных поверхностей в различных точках пространства. И орты точек можно провести в любой точке пространства как касательную к координатным линиям в этой точке, направленную в сторону увеличения соответствующей координаты. Именно этот факт позволяет хорошо представить себе криволинейные координаты, их структуру в различных точках пространства. Примерами криволинейных координат являются полярные, цилиндрические, сферические и другие.

Коэффициенты Ламе. Служат для перехода от одних координат к другим. $h_i = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_i}\right)^2}$, в декартовых координатах $h_1 = h_2 = h_3 = 1$.

Орты $e_i = \frac{1}{h_i}\frac{\partial r}{\partial q_i}$.

Разложение на криволинейные оси $d\vec{r}^2 = h_1 dq_1 \vec{e}_1 + h_2 dq_2 \vec{e}_2 + h_3 dq_3 \vec{e}_3$.

Координатные элементарные дуги $ds_1 = h_1 dq_1,\ ds_2 = h_2 dq_2,\ ds_3 = h_3 dq_3$.

Элементарный объем. В декартовом случае $dV = dxdydz$. В криволинейном случае должны быть коэффициенты, учитывающие криволинейность, h_1, h_2, h_3. $dV = h_1 h_2 h_3 dq_1 dq_2 dq_3$.

Переход от декартовых координат к криволинейным.

$$\iiint f(x,y,z)dxdydz = \iiint F(q_1,q_2,q_3)|D|dq_1 dq_2 dq_3,$$

где $D = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial q_1} & \frac{\partial y}{\partial q_1} & \frac{\partial z}{\partial q_1} \\ \frac{\partial x}{\partial q_2} & \frac{\partial y}{\partial q_2} & \frac{\partial z}{\partial q_2} \\ \frac{\partial x}{\partial q_3} & \frac{\partial y}{\partial q_3} & \frac{\partial z}{\partial q_3} \end{vmatrix} \equiv \left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(q_1,q_2,q_3)}\right|$. $D = h_1 h_2 h_3$.

Полярные координаты.

Упорядоченность координат. В криволинейных координатах очень важно какую координату считать первой для короткой тензорной записи любых формул. $q_1 = r,\ q_2 = \varphi$ - полярные координаты.

Границы изменения координат $0 \le r < +\infty,\ 0 \le \varphi < 2\pi$. Для точки $r = 0$ координата φ имеет неопределенное значение.

Координатные линии. Орты. r - линия – полупрямая. $r = const$ - уравнение координатной линии φ (окружность), $\varphi = const$ - уравнение координатной r - линии. Для каждой точки пространства бесчисленной множество координатных линий и, следовательно, ортов.

Координатные поверхности – поверхности пересечения двух координатных линий r - линии и φ - линии, т.е. она одна.

Формулы связи с декартовыми координатами: $x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi$.

Коэффициенты Ламе: $h_1 = 1,\ h_2 = r$.

Элемент площади: $dS = rdrd\varphi$.

Симметрия. Координаты применяются в плоских случаях при наличии центра симметрии, т.е. за начало координат. Полярная ось выбирается произвольно.

Цилиндрические координаты.

Симметрия. Эти координаты применяются при наличии осевой симметрии, тогда эта ось принимается за ось цилиндрических координат.

Упорядоченность координат. $q_1 = r,\ q_2 = \varphi,\ q_3 = z$.

Границы изменения координат: $0 \le r < +\infty,\ 0 \le \varphi < 2\pi,\ -\infty < z < +\infty$. Линия оси цилиндра является линией неоднозначности, т.к. координата φ там не имеет определенного значения.

Координатные линии – линии изменения только одной координаты, при фиксированных значениях остальных координат. Три координаты, следовательно, три координатных линии. r - линия, φ - линия, z - линия, полупрямая, окружность и прямая соответственно.

Орты. $\vec{e}_r,\ \vec{e}_\varphi,\ \vec{e}_z$ - правая тройка векторов, $\vec{e}_r \perp \vec{e}_\varphi \perp \vec{e}_z$, направлены по касательным к координатным линиям в данной точке в сторону увеличения. Координатные поверхности. Их три: $r = const$, $\varphi = const$, $z = const$.

Формулы связи с декартовыми координатами: $x = r\cos\varphi, y = r\sin\varphi, z = z$.

Коэффициенты Ламе: $h_1 = 1, h_2 = r, h_3 = 1$.

Элемент объема: $dV = r dr d\varphi dz$.

Сферические координаты.

Упорядоченность координат: $q_1 = r,\ q_2 = \theta,\ q_3 = \varphi$.

Границы координатных линий: $0 \le r < +\infty,\ 0 \le \theta \le \pi,\ 0 \le \varphi < 2\pi$.

Координатные линии. Через каждую точку пространства проходит три координатных линии, а всего их бесконечное множество. r - линия, θ - линия, φ - линия, полупрямая, полуокружность и окружность соответственно.

Орты. $\vec{e}_r,\ \vec{e}_\theta,\ \vec{e}_\varphi$ - правая тройка, $\vec{e}_r \perp \vec{e}_\theta \perp \vec{e}_\varphi$.

Координатные поверхности: $r = const$, $\theta = const$, $\varphi = const$.

Формулы связи с декартовыми координатами: $x = r\sin\theta\cos\varphi,\ y = r\sin\theta\sin\varphi, z = r\cos\theta$.

Коэффициенты Ламе: $h_1 = 1, h_2 = r, h_3 = r\sin\theta$.

Элемент объема: $dV = r^2 \sin\theta dr d\theta d\varphi$

Скорость в криволинейных координатах.

$v^{(1)} = h_1\dot{q}_1,\ v^{(2)} = h_2\dot{q}_2, v^{(3)} = h_3\dot{q}_3$ - контравариантные проекции скоростей.

$\vec{v} = h_1\dot{q}_1\vec{e}_1 + h_2\dot{q}_2\vec{e}_2 + h_3\dot{q}_3\vec{e}_3$.

$\vec{v}_{(1)} = \vec{v}\vec{e}_1,\ \vec{v}_{(2)} = \vec{v}\vec{e}_2,\ \vec{v}_{(3)} = \vec{v}\vec{e}_3$ - ковариантные проекции скоростей.

$v_{(1)} = h_1\dot{q}_1 + h_2\dot{q}_2(\vec{e}_1\vec{e}_2) + h_3\dot{q}_3(\vec{e}_1\vec{e}_3)$,

$v_{(2)} = h_1\dot{q}_1(\vec{e}_2\vec{e}_1) + h_2\dot{q}_2 + h_3\dot{q}_3(\vec{e}_2\vec{e}_3)$, - ковариантные проекции скоростей.

$v_{(3)} = h_1\dot{q}_1(\vec{e}_3\vec{e}_1) + h_2\dot{q}_2(\vec{e}_3\vec{e}_2) + h_3\dot{q}_3$.

$v^2 = (h_1\dot{q}_1)^2 + (h_2\dot{q}_2)^2 + (h_3\dot{q}_3)^2 + 2h_1\dot{q}_1h_2\dot{q}_2(\vec{e}_1\vec{e}_2) + 2h_1\dot{q}_1h_3\dot{q}_3(\vec{e}_3\vec{e}_1) + 2h_2\dot{q}_2h_3\dot{q}_3(\vec{e}_2\vec{e}_3)$ - квадрат скорости в криволинейных координатах.

В полярных координатах: $\vec{v} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi$, $|\vec{v}| = \sqrt{\dot{r}^2 + (r\dot{\varphi})^2}$.

В цилиндрических координатах: $\vec{v} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi + \dot{z}\vec{e}_z$, $|\vec{v}| = \sqrt{\dot{r}^2 + (r\dot{\varphi})^2 + \dot{z}^2}$.

В сферических координатах: $\vec{v} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta + r\dot{\varphi}\sin\theta\vec{e}_\varphi$, $|\vec{v}| = \sqrt{\dot{r}^2 + (r\dot{\theta})^2 + (r\dot{\varphi}\sin\theta)^2}$.

Ускорение в криволинейных координатах.

Ковариантные проекции ускорения: $a_{(1)} = \vec{a}\vec{e}_1$, $a_{(2)} = \vec{a}\vec{e}_2$, $a_{(3)} = \vec{a}\vec{e}_3$ или $a_{(i)} = \frac{1}{h_i}\left[\frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot{q}_i}\left(\frac{v^2}{2}\right) - \frac{\partial}{\partial q_i}\left(\frac{v^2}{2}\right)\right]$.

В полярных координатах: $\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2)\vec{e}_r + (2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi})\vec{e}_\varphi$, $|\vec{a}| = \sqrt{(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2)^2 + (2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi})^2}$.

В цилиндрических координатах: $\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2)\vec{e}_r + (2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi})\vec{e}_\varphi + \ddot{z}\vec{e}_z$, $|\vec{a}| = \sqrt{(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2)^2 + (2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi})^2 + \ddot{z}^2}$.

В сферических координатах:

$$\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - \dot{\varphi}^2 r\sin\theta)\vec{e}_r + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} - \dot{\varphi}^2\cos\theta)\vec{e}_\theta + (\ddot{\varphi}r\sin\theta + 2\dot{\varphi}\dot{r}\sin\theta + 2\dot{\varphi}\dot{\theta}r\cos\theta)\vec{e}_\varphi,$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - \dot{\varphi}^2 r\sin\theta)^2 + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} - \dot{\varphi}^2\cos\theta)^2 + (\ddot{\varphi}r\sin\theta + 2\dot{\varphi}\dot{r}\sin\theta + 2\dot{\varphi}\dot{\theta}r\cos\theta)^2}.$$

ТЕМА 3. Кинематика твердого тела. Простейшие движения: поступательное и вращательное.

Поступательное движение.

Поступательным движением называется такое движение, при котором каждая прямая, соединяющая любые две точки тела двигается параллельно самой себе.

Поступательное движение может быть как прямолинейным, так и криволинейным.

Теорема о поступательном движении. При поступательном движении абсолютно твердого тела скорости всех точек равны по величине и направлению и ускорения всех точек равны по величине и направлению.

Доказательство: Пусть точки A и B - произвольные точки тела. Тогда $\vec{r}_B = \vec{r}_A + \vec{r}_{AB}$. По определению скорости $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$, дифференцируя почленно получим $\vec{v}_B = \vec{v}_A + 0$, т.к. $|\vec{r}_{AB}| = const$. Дифференцируем еще раз по t: $\vec{a}_A = \vec{a}_B$. Т.к. точки A и B взяли произвольные, то полученное выполняется для всех точек тела.

Резюме: 1) т.к. при поступательном движении скорости всех точек одинаковые и ускорения всех точек одинаковые, то и траектории всех точек одинаковые. 2) т.к. при поступательном движении у всех точек одинаковые скорости, ускорения и траектории, то все точки твердого тела двигаются одинаково, то нет необходимости изучать движение каждой точки в отдельности, достаточно изучить движение одной, следовательно, не зависимо от размеров тела мы можем считать его материальной точкой. 3) т.к. при поступательном движении берется модель материальной точки, а материальная точка описывается тремя координатами и тремя степенями свободы, то при поступательном движении твердого тела, тело имеет три степени свободы. 4) т.к. тело имеет три степени свободы при поступательном движении, то для описания можно взять любые три независимые параметра в качестве координат и будет три уравнения движения, которые описывают зависимость координат от времени $x = x(t), y = y(t), z = z(t)$.

Вращательное движение.

Вращательным движением называется такое движение, при котором остаются неподвижными все точки некоторой неподвижной прямой, называемой осью вращения, а все остальные точки двигаются по окружностям с центрами на этой прямой, плоскости этих окружностей перпендикулярны оси вращения.

Число степеней свободы – число независимых координат, однозначно определяющих положение тела в пространстве. Т.к. ось вращения закреплена, то положение вращающегося тела в конкретный момент времени будет точно определено, если будет известен угол поворота тела в данный момент, т.е. достаточно одной координаты для определения положения тела при вращении. Одна координата, следовательно, одна степень свободы.

Уравнение движения – зависимость координат от времени. Здесь одна координата, следовательно, одно уравнение движения $\varphi = \varphi(t)$.

Угловая скорость – первая производная по времени от угла поворота. Характеризует быстроту вращения. $\vec{\omega} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt} = \dot{\vec{\varphi}}$. Угол считается вектором, направленным перпендикулярно плоскости угла так, чтобы направление отсчета угла было против часовой стрелки, если смотреть с конца этого вектора. Угловая скорость направлена по оси вращения так, чтобы с конца вектора угловой скорости вращение было видно против часовой стрелки. Приложить вектор $\vec{\omega}$ можно в любой точке оси вращения. Угловая скорость – аксиальный вектор. Измеряется в (рад/с) или ($с^{-1}$).

Угловое ускорение – первая производная от угловой скорости по времени или вторая производная по времени от угла поворота. $\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \dot{\vec{\omega}} = \frac{d^2\vec{\varphi}}{dt^2} = \ddot{\vec{\varphi}}$. Измеряется в (рад/$с^2$) или ($с^{-2}$). Характеризует быстроту изменения угловой скорости. Т.к. ось закреплена, то угловая скорость не может изменяться по направлению, т.е. угловое ускорение $\vec{\varepsilon}$ может быть направлено только по угловой скорости $\vec{\omega}$. Вектор $\vec{\varepsilon}$ направлен по оси вращения и может быть приложен к любой его точке.

Линейная скорость – скорость движения точки по траектории. Это означает, что линейная скорость является характеристикой движения отдельных точек тела. $\vec{v}_\upsilon = [\vec{\omega}, \vec{r}_\upsilon]$ - эта формула характеризует поле скоростей твердого тела при вращательном движении.

Линейное ускорение – изменение линейной скорости в единицу времени, это первая производная по времени от линейной скорости. $\vec{a}_\upsilon = \frac{d\vec{v}_\upsilon}{dt}$ или

$\vec{a}_{\upsilon} = \underbrace{[\vec{\varepsilon}, \vec{r}_{\upsilon}]}_{\vec{a}_{\tau}} + \underbrace{[\vec{\omega}[\vec{\omega}, \vec{r}_{\upsilon}]]}_{\vec{a}_{n}}$ - эта формула характеризует поле ускорений в твердом теле при вращательном движении.

ТЕМА 4. Кинематика сложного движения материальной точки: определения, теорема о сложении скоростей, теорема Кориолиса о сложении ускорений, ускорение Кориолиса.

Определения.

Сложным движением точки называется такое движение, при котором точка одновременно участвует в нескольких движениях.

Математически: есть неподвижная система отсчета, относительно которой движется подвижная система подвижная система отсчета, а в подвижной системе отсчета двигается материальная точка. Результирующее движение материальной точки, т.е. движение материальной точки относительно неподвижной системы отсчета называется абсолютным.

Относительным движением называется движение материальной точки относительно подвижной системы отсчета.

Переносным движением называется движение подвижной системы отсчета относительно неподвижной системы отсчета.

Теорема о сложении скоростей.

Скорость абсолютного движения материальной точки равна векторной сумме скоростей переносного и относительного движения. $\vec{v}_{абс} = \vec{v}_{пер} + \vec{v}_{отн}$ или $\vec{v}_a = \vec{v}_e + \vec{v}_r$.

Доказательство. Пусть x, y, z - условно неподвижная система отсчета. Пусть M - кольцо двигается по движущейся проволоке. Тогда за Δt секунд точка M пройдет по проволоке $\overline{M_1M_2}$, но проволока за Δt секунд переместит кольцо на $\overline{M_2M_3}$, тогда в итоге точка займет положение M_3. Т.е. результирующее перемещение будет $\overline{M_1M_3}$. $\underbrace{\overline{M_1M_3}}_{\Delta\vec{r}_a} = \underbrace{\overline{M_1M_2}}_{\Delta\vec{r}_e} + \underbrace{\overline{M_2M_3}}_{\Delta\vec{r}_r}$, поделим на Δt, т.е. в единицу времени, $\frac{\Delta r_a}{\Delta t} = \frac{\Delta r_e}{\Delta t} + \frac{\Delta r_r}{\Delta t}$, при $\Delta t \to 0$ $\frac{dr_a}{dt} = \frac{dr_e}{dt} + \frac{dr_r}{dt}$, следовательно $\vec{v}_a = \vec{v}_e + \vec{v}_r$.

Теорема о сложении ускорений (Теорема Кориолиса).

Ускорение абсолютного движения равно векторной сумме ускорений переносного и относительного движений и ускорения Кориолиса. $\vec{a}_a = \vec{a}_e + \vec{a}_r + \vec{a}_c$.

Доказательство. ξ, η, ζ - условно неподвижная система отсчета, x, y, z - движется относительно ξ, η, ζ, точка M - движется в x, y, z. $\vec{R} = \vec{R}_0 + \underbrace{\vec{r}}_{(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k})}$ дифференцируем это равенство два раза по t.

$$\ddot{\vec{R}} = \ddot{\vec{R}}_0 + \underbrace{(\ddot{x}\vec{i} + \ddot{y}\vec{j} + \ddot{z}\vec{k})}_{\vec{a}_r} + 2\left[\vec{\omega}_e \underbrace{(\dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} + \dot{z}\vec{k})}_{\vec{v}_r}\right] + \left[\underbrace{\dot{\vec{\omega}}_e}_{\vec{\varepsilon}} \underbrace{(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k})}_{\vec{r}}\right] + \left[\vec{\omega}_e\left[\vec{\omega}_e \underbrace{(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k})}_{\vec{r}}\right]\right],$$

отсюда следует $\vec{a}_a = \vec{a}_e + \vec{a}_r + \vec{a}_c$.

Ускорение Кориолиса.

Ускорением Кориолиса называется ускорение, вычисленное по формуле: $\vec{a}_c = 2[\vec{\omega}_e \vec{v}_r]$.

Т.е. это ускорение выявляет влияние вращения системы отсчета на движение тел в этой системе.

Модуль ускорения Кориолиса: $|\vec{a}_c| = 2|\vec{\omega}_e||\vec{v}_r||\sin(\angle\vec{\omega}_e, \vec{v}_r)|$.

Ускорение Кориолиса равно нулю, если 1. $\vec{\omega}_e = 0$ (нет переносного вращения), 2. $\vec{v}_r = 0$ (относительный покой в подвижной системе), 3. $\sin(\angle\vec{\omega}_e, \vec{v}_r) = 0,\ \vec{\omega}_e \parallel \vec{v}_r$. Направление ускорения Кориолиса можно определить по правилу векторного произведения, оно перпендикулярно плоскости образованной векторами $\vec{\omega}_e$ и $\vec{v}_r$ при чем в ту сторону чтобы с конца вектора ускорения Кориолиса видеть кратчайший поворот от $\vec{\omega}_e$ к $\vec{v}_r$ против часовой стрелки.

ТЕМА 5. Кинематика плоского движения: МЦС, определение скоростей и ускорений при плоском движении.

Определение.

Плоским (плоскопараллельным) движением называется такое движение, при котором каждая точка тела двигается в одной и той же плоскости, параллельной некоторой неподвижной плоскости, т.е. каждая точка тела двигается в одной и той же плоскости и все эти плоскости параллельны между собой.

Плоским движением является вращательное движение вокруг неподвижной оси, т.к. все точки тела двигаются в параллельных плоскостях.

Разложение плоского движения на поступательное и вращательное.

Теорема. Всякое плоское движение твердого тела можно представить как совокупность двух движений: поступательного вместе с полюсом и вращательного вокруг этого полюса.

Независимость угловой скорости и углового ускорения от выбора полюса.

Независимо от того какую точку тела выбрать за полюс, во всех случаях отличие будет составлять только поступательное перемещение, т.к. поступательные перемещения производятся в направлении перемещения полюса. Но во всех случаях угловое перемещение вокруг полюса оказывается одинаковым. Т.к. угловой поворот одинаковый, то угловая скорость одна и та же, и угловое ускорение одно и то же, следовательно, за полюс можно выбрать любую точку тела.

Число степеней свободы.

При плоском движении достаточно двух линейных координат и одной угловой для описания поворота. Следовательно, плоское движение имеет три степени свободы.

Уравнения движения.

Три степени свободы, следовательно, три уравнения движения: $x_p = x_p(t)$, $y_p = y_p(t)$, $\varphi_p = \varphi_p(t)$, p - полюс, произвольная точка тела.

Скорости точек при плоском движении.

Общий случай.

Т.к. плоское движение можно представить как совокупность поступательного движения со скоростью полюса и вращательного вокруг этого полюса, то скорость любой точки складывается векторно из скорости полюса и вращательной скорости вокруг этого полюса. $\vec{v}_B = \vec{v}_A + \underbrace{\vec{v}_{AB}}_{[\vec{\omega}_{AB}\overline{AB}]}$. Хотя за полюс можно брать любую точку, но при вычислениях удобно брать точку, скорость которой известна.

Теорема о проекциях.

Проекции скоростей двух точек твердого тела при плоском движении на прямую, соединяющую эти точки, равны по величине и знаку: $v_A \cos\alpha = v_B \cos\beta$.

Чтобы вычислить скорость по теореме о проекциях надо знать скорость одной из точек и углы наклона скоростей в полюсе и в искомой точке.

Вычисление скоростей через МЦС.

Мгновенным центром скоростей (МЦС) называется точка, скорость которой в данный момент равна нулю. $\vec{v}_P = 0$.

Т.к. скорость МЦС известна, то МЦС берут за полюс при вычислении скоростей. Тогда $\vec{v}_A = \underbrace{\vec{v}_P}_{0} + \underbrace{\vec{v}_{PA}}_{[\vec{\omega}_{PA}\overline{PA}]}$. Для всех точек одного и того же звена, т.е. одного и того же твердого тела, все угловые скорости равны $\vec{\omega}_{PA} = \vec{\omega}_{PB} = \ldots$, т.к. $\vec{\omega}$ тела не зависит от выбора полюса и одинакова для всех точек тела. $\vec{v}_A = \omega\, PA,\ \vec{v}_B = \omega\, PB, \ldots$.

Чтобы вычислить скорость точек с помощью МЦС надо знать угловое ускорение и расстояние от точки до МЦС.

Вычисление угловой скорости через МЦС.

Чтобы вычислить угловую скорость через МЦС надо знать скорость какой-либо точки и расстояние от нее до МЦС. $\omega = \dfrac{v_A}{PA} = \dfrac{v_B}{PB} = \ldots$. Направить ω дугой вокруг МЦС в сторону известного направления скорости любой из точек.

Знание МЦС позволяет нарисовать скорости во всех точках колеса. Метод МЦС показывает, что плоское движение является мгновенно вращательным вокруг МЦС, т.к. скорость через МЦС находится по правилам вычисления скоростей по формулам вращательного движения линейных скоростей. Эти формулы скоростей точек через МЦС характеризуют поле скоростей твердого тела при плоском движении.

Ускорения точек при плоском движении.

При вычислении ускорений метод МЦС не применяется, он применяется только при вычислении скоростей. Поэтому за полюс не берут МЦС при вычислении ускорений. За полюс при вычислении ускорений берется точка, ускорение которой известно.

Т.к. движение плоское, то ускорение любой точки тела можно составить как векторную сумму ускорения поступательного движения и ускорений вращательного движения. $\vec{a}_B = \vec{a}_A + \underbrace{\vec{a}^n_{AB}}_{\omega^2_{AB}AB} + \underbrace{\vec{a}^\tau_{AB}}_{\varepsilon_{AB}AB}$.

Определение ускорения $\vec{a}_B$ методом проектирования.

Этот метод применяется в том случае, если точка B двигается по прямой линии. Тогда известно направление ускорения точки B и можно проектировать, чтобы найти модуль. Точка A полюс и ускорение $\vec{a}_A$ известно. При прямолинейном движении нет нормального ускорения и может быть ускорение только тангенсальным, т.е. направленным по скорости или против скорости. По определению ускорения через полюс $\vec{a}_B = \vec{a}_A + \underbrace{\vec{a}^n_{AB}}_{\omega^2_{AB}AB} + \underbrace{\vec{a}^\tau_{AB}}_{\varepsilon_{AB}AB}$, почленно проектируем это равенство на перпендикуляр к $\vec{a}^\tau_{AB}$, чтобы оно исчезло из уравнения. $-|a_B|\cos\beta = +a_A\cos\alpha + |a^n_{AB}| + 0$. «Минус» означает, что $\vec{a}_B$ направленно противоположно обозначенному на чертеже.

Определение углового ускорения ε_{AB} методом проектирования.

Чтобы знать ε_{AB} надо знать $\vec{a}^\tau_{AB}$, тогда $\varepsilon_{AB} = \frac{|\vec{a}^\tau_{AB}|}{AB}$. Из $\vec{a}_B = \vec{a}_A + \underbrace{\vec{a}^n_{AB}}_{\omega^2_{AB}AB} + \underbrace{\vec{a}^\tau_{AB}}_{\varepsilon_{AB}AB}$ определяем $\vec{a}^\tau_{AB}$, почленно спроектировав это равенство на $\vec{a}^\tau_{AB}$.

Определение ускорения $\vec{a}_C$ по известным $\vec{\omega}_{AB}$ и $\vec{\varepsilon}_{AB}$.

Если точка C находится на звене AB, то $\varepsilon_{AB} = \varepsilon_{AC}$ и $\omega_{AB} = \omega_{AC}$, т.к. AB и AC относятся к одному звену. Берем точку A за полюс, тогда $\vec{a}_C = \vec{a}_A + \underbrace{\vec{a}^n_{AC}}_{\omega^2_{AC}AC} + \underbrace{\vec{a}^\tau_{AC}}_{\varepsilon_{AC}AC}$, проектируем на оси x, y, находим a_{Cx} и a_{Cy}. Отсюда $|a_C| = \sqrt{a^2_{Cx} + a^2_{Cy}}$.

Вычисление ускорений через МЦУ.

Мгновенный центр ускорений (МЦУ) – точка, ускорение в которой в данный момент равно нулю. $a_Q = 0$.

Т.к. ускорение точки Q равно нулю, т.е. известно, то ее берут за полюс. Тогда ускорение других точек: $a_A = \underbrace{a_Q}_{0} + \underbrace{a^n_{QA}}_{\omega^2 QA} + \underbrace{a^\tau_{QA}}_{\varepsilon QA}$, $a_B = \underbrace{a_Q}_{0} + \underbrace{a^n_{QB}}_{\omega^2 QB} + \underbrace{a^\tau_{QB}}_{\varepsilon QB}, \ldots$ Отсюда получаем: $\sqrt{\omega^4 + \varepsilon^2} = \frac{|a_A|}{QA} = \frac{|a_B|}{QB} = \ldots$. Ускорения всех точек прямо пропорциональны их расстояниям до МЦУ, отношения модулей ускорений к их расстояниям до МЦУ есть величина одинаковая для всех точек и равна

$\sqrt{\omega^4+\varepsilon^2}$, ускорения различных точек направлены под одним углом μ к их расстояниям до МЦУ, $tg\mu=\dfrac{\varepsilon}{\omega^2}$.

ТЕМА 6. Кинематика твердого тела: движение тела вокруг неподвижной точки (сферическое движение), поле скоростей и ускорений; общий случай движения твердого тела.

Определение.

Движение тела называется сферическим, если одна точка тела неподвижна, а все остальные движутся вокруг нее по сферическим поверхностям.

Число степеней свободы.

Свободное твердое тело имеет шесть степеней свободы (три поступательных и три вращательных). При сферическом движении одна точка закреплена, но одна точка имеет три степени свободы, следовательно, одна точка отнимает у тела три степени свободы, т.е. остается три степени свободы. Очевидно, что закрепленная точка при сферическом движении запрещает двигаться поступательно, т.к. при поступательном движении перемещение всех точек тела одинаковы по величине и направлению, но закрепленная точка не движется, следовательно, нет поступательного движения, и остается только три независимых вращения вокруг оси.

Углы Эйлера.

Углы Эйлера – это углы φ,ψ,θ. Эти углы взяты Эйлером для движения гироскопа, годятся для любого сферического движения. Эти углы показывают ориентацию тела в любой момент времени по отношению к неподвижной точке.

Для изображения этих углов надо две системы отсчета, неподвижную и подвижную, связанную с телом. x,y,z - условно неподвижная система, x',y',z' - подвижная система отсчета (связана с телом).

Угол φ называется углом ротации (т.е. собственного вращения гироскопа), φ находится в плоскости x',y',z'. Угол ψ находится в плоскости xoy и называется углом прецессии (т.е. вращения оси гироскопа вокруг вертикали). Угол θ называется углом нутации (т.е. отклонение оси собственного вращения от вертикали), т.е. нутацию легко наблюдать при вращении юлы, угол θ не остается постоянным после начала движения, он увеличивается от 0 до 90^o, и в конце юла падает.

Уравнения движения.

При сферическом движении нет поступательности, т.е. имеются только вращательные движения, т.е. движения связаны с изменением углов Эйлера. Сферическое движение может быть описано тремя независимыми координатами, причем угловыми, т.к. нет поступательных движений. Причем роль угловых координат могут выполнять углы Эйлера φ,ψ,θ. При движении они меняются, т.е. зависят от времени: $\varphi=\varphi(t),\psi=\psi(t),\theta=\theta(t)$.

Теорема Эйлера – Даламбера.

Всякое перемещение абсолютно твердого тела при сферическом движении можно осуществить только одним поворотом вокруг оси конечного вращения, проходящей через неподвижную точку.

Угловая скорость и угловое ускорение.

Направлена по мгновенной оси вращения, которая проходит через неподвижную точку, $\vec{\omega}$.

Угловое ускорение $\vec{\varepsilon} = \dfrac{d\vec{\omega}}{dt} = \dot{\vec{\omega}}$. В отличие от вращательного движения мгновенная ось вращения не закреплена, поэтому угловая скорость может изменяться и по величине и по направлению, т.е. угловое ускорение имеет две составляющих: нормальную и тангенсальную, $\vec{\varepsilon} = \vec{\varepsilon}_\tau + \vec{\varepsilon}_n$.

Линейная скорость и ускорение точек.

Т.к. движение вокруг неподвижной точки является мгновенно вращательным вокруг оси мгновенного вращения, то линейная скорость при таком движении: $\vec{v} = [\vec{\omega}, \vec{r}]$. Для произвольной точки тела M: $|v_M| = |\omega|\rho_1$, где ρ_1 длина перпендикуляра от точки M до оси мгновенного вращения.

Линейное ускорение – первая производная по времени от линейной скорости. $|\vec{a}_M^\tau| = |\vec{\varepsilon}|\rho_1$, $|\vec{a}_M^n| = \vec{\omega}^2\rho_1$.

Аксоиды.

Бывают неподвижные и подвижные.

Неподвижным аксоидом называется геометрическое место мгновенных осей вращения в неподвижной системе отсчета.

Подвижным аксоидом называется геометрическое место мгновенных осей вращения в подвижной системе отсчета.

Мгновенной осью вращения называется прямая, все точки которой неподвижны в данный момент времени, или прямая, скорости всех точек которой равны нулю в данный момент времени.

Кинематические уравнения Эйлера.

При сферическом движении вокруг неподвижной точки координатами являются угловые координаты, т.е. три угла Эйлера φ, ψ, θ. Но угловая скорость - это первая производная по времени от угла поворота. Значит угловая скорость состоит из трех составляющих, зависит от $\dot{\varphi}, \dot{\psi}, \dot{\theta}$. $\vec{\omega} = \dot{\varphi}\vec{k}' + \dot{\psi}\vec{k} + \dot{\theta}\vec{n}$. Кинематическими уравнениями Эйлера являются проекции угловой скорости на подвижные и неподвижные оси. Найдем их.

$$\omega_{x'} = \dot{\varphi} + \dot{\psi}\sin\theta\sin\varphi + \dot{\theta}\cos\varphi, \quad \omega_{y'} = \dot{\psi}\sin\theta\cos\varphi - \dot{\theta}\sin\varphi, \quad \omega_{z'} = \dot{\psi}\cos\theta$$

$$\omega_x = \dot{\varphi}\sin\theta\sin\psi + \dot{\theta}\sin\psi, \quad \omega_y = \dot{\varphi}\sin\theta\cos\psi + \dot{\theta}\sin\psi, \quad \omega_z = \dot{\varphi}\cos\theta + \dot{\psi},$$

соответственно.

Общий случай движения твердого тела.

Теорема. Перемещение абсолютно твердого тела из одного положения в другое, в общем случае движения, можно осуществить только двумя перемещениями: поступательным вместе с полюсом и сферическим вокруг этого полюса.

Уравнения движения. Здесь необходимы координаты полюса (x_p, y_p, z_p), а при сферическом движении вокруг полюса нужны только углы Эйлера φ, ψ, θ. Значит уравнения имеют вид: $\begin{matrix} x_p = x_p(t), y_p = y_p(t), z_p = z_p(t), \\ \varphi_p = \varphi_p(t), \psi_p = \psi_p(t), \theta_p = \theta_p(t) \end{matrix}$. В общем случае движения твердое тело имеет шесть степеней свободы, т.к. шесть координат, шесть уравнений движения.

Угловая скорость $\vec{\omega} = \dot{\varphi}\vec{k}' + \dot{\psi}\vec{k} + \dot{\theta}\vec{n}$, угловое ускорение $\vec{\varepsilon} = \vec{\varepsilon}_\tau + \vec{\varepsilon}_n$.

Линейная скорость в общем случае движения: $\vec{v}_M = \vec{v}_P + \underbrace{\vec{v}_{PM}^{(c\phi)}}_{[\vec{\omega}\vec{PM}]}$. Линейное ускорение в общем случае движения: $\vec{a}_M = \vec{a}_P + \underbrace{\vec{a}_{PM}^n}_{\omega^2\rho_1} + \underbrace{\vec{a}_{PM}^\tau}_{\varepsilon\rho_2}$.

ТЕМА 7. Сложение движений твердого тела. Пара вращений.

Сложение поступательных движений.

Пусть складываются два поступательных движения со скоростями $\vec{v}_1$ и $\vec{v}_2$. Известно, что при поступательном движении скорости всех точек одинаковы по величине и направлению и ускорения равны по величине и направлению. Пусть $\vec{v}_1$ - скорость переносного движения, а $\vec{v}_2$ - скорость относительного движения. Тогда в переносном движении все точки имеют одинаковую скорость $\vec{v}_1$, в относительном все точки имеют одинаковую скорость $\vec{v}_2$, тогда каждая из точек в абсолютном движении имеет скорость $\vec{v}_a = \vec{v}_e + \vec{v}_r = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$. Т.е все точки в абсолютном движении имеют одинаковую по величине и направлению скорость, значит, результирующее движение является поступательным.

При сложении любого числа поступательных движений со скоростями $\vec{v}_1, ..., \vec{v}_n$ результирующее движение является поступательным и происходит со скоростью равной векторной сумме скоростей слагаемых движений: $\vec{v} = \vec{v}_1 + ... + \vec{v}_n$.

Сложение вращательных движений.

Сложение вращений около пересекающихся осей.

При сложении вращений, происходящих около пересекающихся осей, результирующее движение является вращательным, происходящее с угловой скоростью, равной векторной сумме угловых скоростей слагаемых движений $\vec{\omega} = \vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2$.

Сложение вращений около параллельных осей.

При сложении двух вращений около параллельных осей, результирующее движение является вращательным вокруг оси проходящей через точку O, которая делит расстояние между слагаемыми угловыми скоростями внутренним образом на отрезки, обратно пропорциональные, угловым скоростям. Результирующее движение происходит в ту же сторону, с угловой скоростью равной сумме угловых скоростей слагаемых вращений: $\omega = \omega_1 + \omega_2$.

Сложение вращений вокруг анти параллельных осей.

При сложении вращений вокруг анти параллельных осей результирующее движение является вращательным, происходящим в сторону большей угловой скорости вокруг оси проходящей через точку O, которая делит расстояние между заданными угловыми скоростями внешним образом на отрезки обратно пропорциональные угловым скоростям. Причем результирующая угловая скорость по модулю равна разности модулей угловых скоростей слагаемых движений.

Пара вращений.

Пара вращений – это два вращения с равными по модулю угловыми скоростями, но противоположными по направлению.

При сложении пары вращений с одинаковыми по величине, но противоположными по направлению, угловыми скоростями результирующее движение вращательным не является, т.к. $\vec{\omega}_{абс} = \vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2 = 0$, результирующее движение является мгновенно поступательным, скорости всех точек в данный момент одинаковы по величине и направлению. $\vec{\omega}_{абс} = \vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2 = 0$, $\vec{v}_1 = \vec{v}_2 = \dots$.

Это означает, что любое поступательное движение можно разложить на пару вращательных движений с равными по модулю, но противоположными по направлению угловыми скоростями.

Сложение вращательного движения с поступательным.

Поступательное движение перпендикулярно вращательному.

При сложении вращательного движения с перпендикулярным ему поступательным движением, результирующее движение является вращательным с той же по модулю угловой скоростью в ту же сторону, но ось вращения сдвигается на расстояние $OO_1 = \dfrac{v}{\omega^2}$.

Поступательное и вращательное движения сонаправлены.

При сложении вращательного движения с параллельным ему поступательным, результирующее движение называется кинематическим винтом, ось которого совпадает с осью вращательного движения, шаг винта $h = v\dfrac{2\pi}{\omega}$, $\tau = \dfrac{2\pi}{\omega}$ - период винтового движения.

Поступательное и вращательное движения находятся под произвольным углом.

При сложении вращательного движения с поступательным под произвольным углом α, результирующее движение является кинематическим винтом, сдвинутым в точку O_2 на расстояние $O_1O_2 = \dfrac{v\sin\alpha}{\omega}$. Период винтового движения $\tau = \dfrac{2\pi}{\omega}$, шаг винта $h = v\cos\alpha\dfrac{2\pi}{\omega}$.

ТЕМА 8. Движение материальной точки в ИСО: законы Ньютона. Дифференциальные уравнения движения в ИСО. Интегралы движения. Классический принцип причинности. Преобразования Галилея, принцип относительности Галилея. Преобразования Лоренца, принцип относительности Эйнштейна. Нерелятивистские и релятивистские уравнения движения частиц.

Законы Ньютона.

1. Существуют такие системы отсчета, в которых материальная точка, изолированная от внешних воздействий, сохраняет свое механическое состояние (скорость) неизменным до тех пор, пока на нее не подействует какая-нибудь сила и не выведет ее из этого состояния. Такие системы называются инерциальными (ИСО).
2. В ИСО произведение массы материальной точки на ускорение, сообщаемое ей какой-либо силой, равно по величине и направлению этой силе: $m\vec{a} = \vec{F}$.
3. В ИСО силы взаимодействия между двумя материальными точками равны по величине и противоположны по направлению, направлены по прямой соединяющей эти точки и приложены к различным материальным точкам: $\vec{F}_{12} = \overline{F}_{21}$.
4. Действие силы на тело не зависит от того находится тело в покое или в движении и не зависит от числа действующих сил.

Четвертый закон в настоящее время законом не считается, он считается аксиомой независимого действия сил.

ИСО и НИСО.

Первый закон Ньютона дает определение ИСО и термин «инерциальные» - термин первого закона Ньютона, закона инерции.

ИСО называются такие системы отсчета, в которых выполняются все законы Ньютона, а не только первый, а также все те системы отсчета, которые находятся в покое или двигаются равномерно относительно какой-либо ИСО.

Понятие ИСО является теоретическим, т.е. практически таких систем нет. Приближенно ИСО можно считать систему звезд, что говорит о высокой ее инерциальности.

Неинерциальными системами отсчета (НИСО) называются такие системы отсчета, в которых не выполняются законы Ньютона, т.е. это все те системы отсчета, которые двигаются с ускорением или вращаются относительно какой-либо ИСО.

Все вращающиеся, катящиеся тела являются НИСО.

Принцип относительности Галилея.

Существует много равноценных формулировок принципа относительности Галилея, приведем три из них: 1) Никакими опытами внутри ИСО нельзя определить, находится она в покое или двигается равномерно прямолинейно, т.е. состояние покоя и состояние равномерного прямолинейного движения физически не различимы; 2) Все механические явления протекают одинаково во всех ИСО при одинаковых начальных условиях; 3) Все ИСО эквивалентны, равноценны, равноправны, по отношению к механическим явлениям.

Принцип относительности Галилея был расширен Эйнштейном на все физические явления.

Принцип относительности Эйнштейна:

Все физические явления (механические, тепловые, электромагнитные, оптические и т.п.) протекают одинаково во всех ИСО при одинаковых начальных условиях.

Дифференциальные уравнения материальной точки.

В векторном виде.

Движение материальной точки характеризуется радиусом – вектором $\vec{r}(t)$. Ускорение – вторая производная от радиуса – вектора по времени, при постоянных неизменных ортах, т.е. $\vec{a} = \ddot{\vec{r}}$. По второму закону Ньютона $m\ddot{\vec{r}} = \sum \vec{F}$.

В декартовых координатах.

$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$, тогда $\vec{a} = \ddot{\vec{r}} = \ddot{x}\vec{i} + \ddot{y}\vec{j} + \ddot{z}\vec{k}$. В векторном виде $m\ddot{\vec{r}} = \sum \vec{F}$, в проекциях на оси x, y, z: $m\ddot{x} = \sum \vec{F}_{kx}, m\ddot{y} = \sum \vec{F}_{ky}, m\ddot{z} = \sum \vec{F}_{kz}$.

В естественных координатах.

$\vec{\tau}, \vec{n}, \vec{b}$ - орты естественных координат. s - естественная координата. Ускорение $\vec{a} = \underbrace{a_\tau}_{\dot{v}} \vec{\tau} + \underbrace{a_n}_{v^2/\rho} \vec{n} + \underbrace{a_b}_{0} \vec{b}$. По второму закону Ньютона $m\vec{a} = \sum \vec{F}$. В проекциях на $\vec{\tau}, \vec{n}, \vec{b}$: $m\dot{v} = \sum \vec{F}_\tau, m\dfrac{v^2}{\rho} = \sum \vec{F}_n, 0 = \sum \vec{F}_b$.

Задачи динамики.

Первая задача динамики: определение сил по заданному закону движения, т.е. дан закон движения $x = x(t), y = y(t), z = z(t)$ и масса m. Определить силу F, вызвавшую это движение. Задача решается двукратным дифференцированием по времени уравнений движения материальной точки.

Вторая задача динамики: определение закона движения по заданным силам и начальным условиям. Т.е. надо определить $x = x(t), y = y(t), z = z(t)$. Математически это означает, что вторая задача динамики обратна первой и, следовательно, решается двукратным интегрированием по времени дифференциального уравнения материальной точки. При каждом интегрировании приписываются константы интегрирования, которые находятся из начальных условий.

Начальными условиями называются значения координат и проекций скорости в начальный момент: $x|_{t=0} = x_0, y|_{t=0} = y_0, z|_{t=0} = z_0, \dot{x}|_{t=0} = v_{0x}$, $\dot{y}|_{t=0} = v_{0y}, \dot{z}|_{t=0} = v_{0z}$. Начальные условия необходимы для определения констант интегрирования.

Конечными условиями называются значения координат и проекций скорости в конечный момент движения. Конечные условия нужны для вычисления других неизвестных величин в задаче.

Интегралы движения.

Первые интегралы движения – результат однократного интегрирования дифференциальных уравнений по времени. Это такие функции, которые зависят от координат первых производных и времени и которые равны константам интегрирования: $c_i = f_i(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t)$. Но константы интегрирования определяются из начальных условий, т.е. $c_i = f_i(x_0, y_0, z_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0, t_0)$. Значит $f_i(x_0, y_0, z_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0, t_0) = f_i(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t)$. Математически это означает, что первые интегралы движения – законы сохранения, т.е. не изменяющиеся со временем величины.

Вторые интегралы движения – результат двукратного интегрирования дифференциальных уравнений материальной точки. Это функции от координат, времени и констант интегрирования $\Phi_k(x, y, z, t, c_i)$. Если из этих функций выразить координаты, то получим закон движения: $x = x(t, c_1, c_2, ...c_i)$, $y = y(t, c_1, c_2, ...c_i)$, $z = z(t, c_1, c_2, ...c_i)$. Но константы интегрирования определяются из начальных условий: $x = x(t_0, x_0, y_0, z_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0)$, $y = y(t_0, x_0, y_0, z_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0)$, $z = z(t_0, x_0, y_0, z_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0)$.

Классический принцип причинности.

Классический принцип причинности следует из второй задачи динамики.

Формулировка: По заданным начальным условиям можно однозначно определить координаты (т.е. место положения) материальной точки в любой наперед заданный момент времени.

Этот принцип годится для макротел, т.е. тел конечных размеров, двигающихся со скоростями $v << c$, поэтому называется классическим принципом.

В квантовой механике, т.е. для микрочастиц, такой принцип не выполняется. Квантовый принцип причинности читается так: По заданным начальным условиям можно однозначно определить вероятность места положения в любой наперед заданный момент времени, т.е. в квантовом мире можно говорить не о положении микрочастиц, а только о вероятности их места положения.

При движении $v \approx c$ действует принцип причинности теории относительности.

ТЕМА 9. Общие теоремы динамики: о движении центра масс, об изменении количества движения, об изменении кинетического момента, об изменении кинетической энергии. Законы сохранения.

Дифференциальные уравнения механической системы.

Пусть υ - номер произвольной материальной точки. По второму закону Ньютона для υ-той точки $m_\upsilon \ddot{\vec{r}}_\upsilon = \vec{F}_\upsilon^e + \vec{F}_\upsilon^i$. Если в системе n материальных точек, то $\upsilon = \overline{1,n}$. Значит для механической системы из n материальных точек существует n векторных дифференциальных уравнений второго порядка. Но каждое векторное уравнение имеет три скалярных проекции на оси x, y, z, следовательно, всего механическая система имеет $3n$ дифференциальных уравнений второго порядка, т.е. даже для системы трех материальных точек надо девять дифференциальных уравнений второго порядка, причем внутренние силы, входящие в уравнения, неизвестны. Поэтому вместо дифференциальных уравнений механической системы используются общие теоремы динамики.

Теорема о движении центра масс.

Центром масс механической системы называется точка, в которой приложена сила тяжести механической системы, т.е. это геометрическая точка, положение которой определяется по формуле: $\vec{r}_c = \dfrac{\sum\limits_{\upsilon} m_\upsilon \vec{r}_\upsilon}{\sum\limits_{\upsilon} m_\upsilon} = \dfrac{m_1\vec{r}_1 + ... + m_n\vec{r}_n}{m_1 + ... + m_n} = \dfrac{\sum\limits_{\upsilon} m_\upsilon \vec{r}_\upsilon}{M}$, где M - масса всей системы.

Центр масс однородных физических тел: треугольника – на пересечении медиан; параллелограмма – на пересечении диагоналей; окружности – в центре; дуги - $x_c = R\dfrac{\sin\alpha}{\alpha}$; сектора - $x_c = \dfrac{2}{3}R\dfrac{\sin\alpha}{\alpha}$.

По второму закону Ньютона для υ-той материальной точки: $m_\upsilon \ddot{\vec{r}}_\upsilon = \vec{F}^e_\upsilon + \vec{F}^i_\upsilon$, где $\vec{F}^e_\upsilon, \vec{F}^i_\upsilon$ - равнодействующие всех внешних и всех внутренних сил приложенных к υ-той точке. Суммируем по υ, т.е. по всем точкам системы: $\sum\limits_{\upsilon} m_\upsilon \ddot{\vec{r}}_\upsilon = \sum\limits_{\upsilon} \vec{F}^e_\upsilon + \sum\limits_{\upsilon} \vec{F}^i_\upsilon$, где $\sum\limits_{\upsilon} \vec{F}^i_\upsilon = 0$ по третьему закону Ньютона; $\sum\limits_{\upsilon} m_\upsilon \ddot{\vec{r}}_\upsilon = \sum\limits_{\upsilon} \vec{F}^e_\upsilon$. Используем определение центра масс $\vec{r}_c = \dfrac{\sum\limits_{\upsilon} m_\upsilon \vec{r}_\upsilon}{M}$ дифференцируем дважды по t, получаем: $M\ddot{\vec{r}}_c = \sum\limits_{\upsilon} \vec{F}^e_\upsilon$.

Формулировка: Произведение массы механической системы на ускорение ее центра масс равно векторной сумме внешних сил, действующих на систему.

Эта теорема – второй закон Ньютона для материальной точки c. Физический смысл: внутренние силы на движение центра масс не влияют, т.е изменить движение центра масс можно только с помощью внешних сил.

Закон сохранения движения центра масс. Следует из теоремы о движении центра масс: $M\ddot{\vec{r}}_c = \sum\limits_{\upsilon} \vec{F}^e_\upsilon$. 1) Если $\sum\limits_{\upsilon} \vec{F}^e_\upsilon = 0$, то $M\ddot{\vec{r}}_c = 0$, то $M\dot{\vec{r}}_c = const$, т.е $\vec{v}_c = const$. Если векторная сумма внешних сил системы равна нулю, то скорость центра масс остается постоянной по величине и направлению. 2) Если $\sum \vec{F}^e_x = 0$, то $M\,\ddot{x}_c = 0$, т.е. $\vec{v}_{cx} = const$. Если алгебраическая сумма проекций всех внешних сил на какую-либо ось равна нулю, то соответствующие проекции скорости центра масс остается постоянной.

Теорема об изменении количества движения.

Количеством движения материальной точки называется произведение ее массы на скорость $\vec{Q}_\upsilon = m_\upsilon \vec{v}_\upsilon$.

Количеством движения механической системы называется векторная сумма количества движения всех ее точек: $\vec{Q} = \sum_\upsilon m_\upsilon \vec{v}_\upsilon$.

Из определения центра масс: $\vec{Q} = M\vec{v}_c$.

Теорема об изменении количества движения.

По второму закону Ньютона, используя определение количества движения, получим: $\frac{d\vec{Q}}{dt} = \sum_\upsilon \vec{F}_\upsilon^e$.

Формулировка: Первая производная по времени от количества движения механической системы равна векторной сумме всех внешних сил действующих на систему.

Теорема импульсов.

Это интегральная форма теоремы об изменении количества движения: $\vec{Q}_2 - \vec{Q}_1 = \sum_\upsilon \vec{S}^e$.

Формулировка: Изменение количества движения механической системы за какой-либо промежуток времени равно векторной сумме импульсов всех внешних сил действующих на систему.

Импульсом силы называется произведение силы на время ее действия.

Закон сохранения количества движения. Следует из теоремы об изменении количества движения: $\frac{d\vec{Q}}{dt} = \sum_\upsilon \vec{F}_\upsilon^e$. 1) Если $\sum_\upsilon \vec{F}_\upsilon^e = 0$, то $\frac{d\vec{Q}}{dt} = 0$, то $\vec{Q} = const$. 2) Если $\sum_\upsilon \vec{F}_{\upsilon x}^e = 0$, то $\frac{d\vec{Q}_x}{dt} = 0$, то $\vec{Q}_x = const$. Формулировка: Если векторная сумма всех внешних сил системы равна нулю, то количество движения системы остается постоянным по величине и направлению. Если алгебраическая сумма проекций на какую-либо ось всех внешних сил равно нулю, то соответствующая проекция количества движения системы остается постоянной.

Теорема об изменении кинетического момента.

Моменты инерции – величины, выражающиеся через массу, поэтому имеют физический смысл массы, а именно: масса выражает меру инертности тела по отношению к поступательному движению, аналогично, момент инерции тела характеризует меру инертности тела по отношению к вращательному движению. Мера инертности – способность тела сохранять свое механическое состояние неизменным. Чем больше масса, тем труднее сдвинуть тело с места, т.е. произвести поступательный сдвиг. Чем больше момент инерции, тем труднее повернуть тело. Момент инерции системы характеризует распределение масс в теле – это геометрический смысл момента инерции. $I_z = \sum_\upsilon m_\upsilon h_\upsilon^2$ - момент инерции системы материальных точек относительно оси z. Для твердого тела: $I_z = \int h^2 dm$. Момент инерции – сумма произведений масс точек на квадрат их расстояния до оси вращения.

Момент импульса относительно начала координат определяется по аналогии с моментом силы: $\vec{M}_0(\vec{Q}_\upsilon) = \left[\vec{r}_\upsilon \vec{Q}_\upsilon\right] = \left[\vec{r}_\upsilon m_\upsilon \vec{v}_\upsilon\right]$. Геометрически момент импульса – векторное произведение радиуса – вектора на количество движения υ-той точки, значит момент количества движения – вектор, направленный перпендикулярно плоскости, в которой двигается точка, в ту сторону, чтобы с его конца можно было видеть скорость направленную против часовой стрелки по отношению к точке O.

Кинетический момент тела относительно начала координат – векторная сумма моментов количества движения всех точек системы относительно начала координат: $\vec{L}_0 = \sum\limits_\upsilon \left[\vec{r}_\upsilon m_\upsilon \vec{v}_\upsilon\right]$.

Кинетический момент относительно оси вращения – проекция на эту ось вектора кинетического момента взятого относительно любой точки оси, например, точки O. $\vec{L}_{oz} = I_z \vec{\omega}$.

Теорема об изменении кинетического момента.

По второму закону Ньютона для υ-той точки, домножим это равенство на $\vec{r}_\upsilon$ векторно слева и просуммируем по υ, получим: $\dfrac{d\vec{L}_o}{dt} = \sum\limits_\upsilon \vec{M}^e_{\upsilon o}$ - теорема об изменении кинетического момента относительно точки O, $\dfrac{d\vec{L}_z}{dt} = \sum \vec{M}^e_z$ - теорема об изменении кинетического момента относительно оси вращения.

Формулировка: Первая производная по времени от кинетического момента механической системы относительно оси вращения равна алгебраической сумме моментов всех сил системы относительно оси вращения.

Закон сохранения кинетического момента следует из теоремы об изменении кинетического момента: $\dfrac{d\vec{L}_z}{dt} = \sum \vec{M}^e_z$. Если $\sum \vec{M}^e_z = 0$, то $\dfrac{d\vec{L}_z}{dt} = 0$, то $\vec{L}_z = const$. Формулировка: Если алгебраическая сумма моментов всех внешних сил системы относительно какой-либо оси равна нулю, то кинетический момент относительно этой оси остается постоянным.

Теорема об изменении кинетической энергии.

Кинетическая энергия – произведение массы материальной точки на половину квадрата скорости: $T_\upsilon = \dfrac{m_\upsilon v_\upsilon^2}{2}$.

Кинетической энергией системы материальных точек называется сумма кинетических энергий всех ее точек: $T = \sum\limits_\upsilon \dfrac{m_\upsilon v_\upsilon^2}{2}$.

Элементарная работа силы – скалярное произведение силы на бесконечно малое перемещение ее точки приложения:

$đA = \vec{F}d\vec{r} = \left|\vec{F}\right|\left|d\vec{r}\right|\cos(\angle\vec{F}, d\vec{r})$. Положительна, если угол острый или вектора сонаправлены. Отрицательна, если угол тупой или противонаправлены. Равна нулю, если угол между векторами прямой или нет перемещения.

$đA = \vec{F}d\vec{r} = \vec{F}_x dx + \vec{F}_y dy + \vec{F}_z dz$. Элементарная работа не является полным дифференциалом в общем случае.

Элементарная работа момента. Вычисляется по формуле $đA = \pm Md\varphi$. «Плюс», если момент помогает повороту, «минус», если момент мешает повороту, «ноль», если либо момент равен нулю, либо нет поворота.

Работа сил.

Силы тяжести: $A(mg) = \pm mg\Delta h_c$. «Плюс», если конечное положение точки приложения (центра масс) ниже начального, «минус», если конечное положение центра масс выше начального, «ноль», если начальное и конечное положения центра масс одинаковы. Работа силы тяжести не зависит от траектории движения, от пути перемещения, а зависит только от координат начального и конечного положений.

Силы упругости: $A(\vec{F}_{упр}) = \frac{c}{2}(\lambda_1^2 - \lambda_2^2)$. «Плюс», если $|\lambda_1| > |\lambda_2|$, «минус», если $|\lambda_1| < |\lambda_2|$, «ноль», если $|\lambda_1| = |\lambda_2|$. Работа силы упругости не зависит от траектории, а зависит только от начального и конечного положений точки приложения силы, т.е сила упругости является потенциальной.

Теорема об изменении кинетической энергии.

По второму закону Ньютона для υ-той точки, умножаем равенство скалярно на $\vec{r}_\upsilon$ и суммируем по всем υ: $dT = \sum_\upsilon đA_\upsilon^e + \sum_\upsilon đA_\upsilon^i$ или $T_2 - T_1 = \sum A^e + \sum A^i$.

Формулировка: Изменение кинетической энергии механической системы на каком-либо перемещении равно алгебраической сумме работ всех внешних внутренних сил системы на этом перемещении.

Это единственная из общих теорем динамики, в которую входят внутренние силы, и то не всегда, это зависит от того, какая система изменяемая или неизменяемая.

Изменяемыми механическими системами называются такие системы, в которых расстояние между материальными точками придвижении изменяется.

Неизменяемыми механическими системами называются такие системы, в которых расстояние между материальными точками придвижении не изменяется.

Неизменяемые системы – системы связанные нерастяжимыми нитями, стержнями, т.е. без упругих соединений.

Работа силы трения.

Работой силы трения скольжения называется сила препятствующая движению одного тела по поверхности другого. Сила трения прямо пропорциональна силе нормального давления на поверхность. $F_{тр} = fN$. Работа силы трения $\cancel{d}A(\vec{F}_{тр}) = -fNdr$.

Потенциальное силовое поле и его свойства.

Потенциальным силовым полем называется область пространства, в каждой точке которой задана функция $U(x,y,z)$, полный дифференциал которой равен элементарной работе $dU = \vec{F}d\vec{r}$.

Свойства:

1. Элементарная работа в потенциальном поле является полным дифференциалом $\vec{F}d\vec{r} = dU$.
2. Работа на конечном промежутке перемещения не зависит от пути, от траектории, а зависит только от координат начальной и конечной точек: $A = \int dA = \int\limits_{U_1}^{U_2} dU = U_2 - U_1 = U(x_2, y_2, z_2) - U(x_1, y_1, z_1)$.
3. Работа по замкнутому контуру в потенциальном поле равна нулю $\oint dA = \oint dU = 0$.
4. Сила в потенциальном поле является градиентом потенциальной функции $\vec{F} = \nabla U = gradU$.
5. Потенциальное поле является безвихревых.

Потенциальной энергией называется тот запас работы, который нужен при переходе заданного уровня на уровень условно принятый за нулевой. $\Pi = -U(x,y,z)$. Потенциальная энергия равна потенциальной функции с обратным знаком.

Закон сохранения механической энергии.

По теореме об изменении кинетической энергии $dT = \underbrace{\cancel{d}A_{\upsilon}^{e}}_{-\Pi^e} + \underbrace{\cancel{d}A_{\upsilon}^{i}}_{-\Pi^i}$.

Интегрируем и получаем: $T + \Pi = const$.

Формулировка: В потенциальном поле полная механическая энергия остается постоянной.

Если внешние силы потенциальны, то полная механическая энергия сохраняется постоянной.

Полной механической энергией называется сумма кинетической и потенциальной энергии.

Силы, для которых выполняется закон сохранения, называются консервативными. Это потенциальные силы (силы тяжести, упругости, кулоновские силы). Неконсервативными называются силы, для которых не выполняется закон сохранения полной механической энергии (силы трения, вязкости, сопротивления).

ТЕМА 10. Классификация связей. Реакции связей. Принцип возможных перемещений. Принцип Даламбера. Принцип Лагранжа – Даламбера.

Связью в широком смысле называются ограничения, налагаемые на положение системы, на скорости и ускорения, которые не следуют из уравнения движения.

Аналитические связи – связи, которые выражены уравнениями, т.е. соотношениями между положениями точек, их скоростями и ускорениями.

Классификация связей.

Удерживающими связями называются связи, которые ограничивают движение в некотором направлении обратном к этому $f(x,y,z)=0$.

Неудерживающими связями называют связи, ограничивающие движение в некотором направлении, но разрешающие движение в направлении обратном этому $f(x,y,z)\le 0$.

Геометрическими связями называются связи, налагающие ограничения только на положение точек системы, и не налагающие ограничения на скорости $f(x_i,y_i,z_i)\le 0$.

Кинематическими называются связи, в уравнение которых входят координаты, их производные по времени $f(x_i,y_i,z_i,\dot{x}_i,\dot{y}_i,\dot{z}_i)\le 0$.

Стационарными связями называются такие связи, в уравнение которых не входит явно время (постоянные связи).

Нестационарными связями называются связи, в уравнение которых входит явно время $f(x_i,y_i,z_i,t)\le 0$, $f(x_i,y_i,z_i,\dot{x}_i,\dot{y}_i,\dot{z}_i,t)\le 0$. Если опоры в покое, то связи стационарные, иначе, нестационарные.

Голономные связи – такие кинематические связи, которые после интегрирования становятся геометрическими, т.е. для которых можно подобрать интегрирующий множитель.

Неголономными называются связи, для которых нельзя подобрать интегрирующий множитель.

Идеальными называются такие связи, для которых выполняется постулат идеальных связей.

Неидеальными называются такие связи, для которых не выполняется постулат идеальных связей.

Реакции связей.

Свободное тело – тело, которое может неограниченно двигаться в пространстве, т.е. движение не ограниченно связями.

Несвободное тело – тело, движение которого в пространстве ограничено наложенными на него связями.

Принцип освобождаемости от связей. Всякое несвободное тело можно считать свободным, если мысленно отбросить связи и заменить их действие силами реакции.

Силами реакции называются силы, заменяющие действие связи.

Активными называются силы, способные изменить кинематическое состояние тела (скорость, ускорение) $\vec{F}^a$.

Силы реакции к активным силам не относятся, т.к. они не способны изменить кинематическое состояние тела.

Направление сил реакции.

1. Сила реакции имеет направление, противоположное тому направлению, в котором движение из-за связи невозможно.
2. Если связь разрешает поступательное смещение в некотором направлении, то по этой линии сила реакции не ставится. Если связь запрещает поступательное смещение в некотором направлении, то по этой линии ставится сила реакции.
3. Если связь разрешает повороты, то момент реакции не ставится. Если связь запрещает повороты, то ставится момент реакции.
4. Если при расчете получается значение силы реакции со знаком «плюс», то это значит, что сила реакции направлена так, как обозначено на чертеже. Если «минус», то сила реакции направлена в обратную сторону тому, как обозначено на чертеже. Аналогично момент реакции.

Частные случаи направления сил реакции.

1. Гибкая нить. Все $\vec{N}_i$ вдоль нитей.
2. Абсолютно гладкая поверхность. Все $\vec{N}_i$ направлены перпендикулярно линии возможного скольжения.
3. Шаровой шарнир. Разрешает различные повороты, запрещает все поступательные сдвиги. Сила реакции имеет три составляющих N_{Ax}, N_{Ay}, N_{Az}.
4. Цилиндрический шарнир. Разрешает повороты вокруг оси цилиндра, запрещает поступательные сдвиги перпендикулярно оси цилиндра. Сила реакции имеет две составляющие N_{Ax}, N_{Ay}.
5. Опорные стержни. Разрешены повороты вокруг шарниров, запрещено движение вдоль стержней. Все $\vec{N}_i$ направлены вдоль стержней.
6. Шарнирно подвижные опоры. Разрешают повороты вокруг шарнира и скольжение по опоре. Все $\vec{N}_i$ перпендикулярны линии возможного скольжения.
7. Шарнирно неподвижные опоры. Позволяют повороты вокруг шарниров, запрещают поступательные сдвиги. Плоский случай. Две составляющих X_A, Y_A. Пространственный случай. Три составляющих X_A, Y_A, Z_A.
8. Скользящая заделка. Позволяет движение по канавке, запрещает движение поперек ее, запрещает повороты. Сила реакции $\vec{N}_i$ перпендикулярна канавке, момент M.
9. Двойная скользящая заделка. Канава скользит в направлении другой канавы, запрещены повороты. Момент M.
10. Жесткая (глухая) заделка. Все движения запрещены. Плоский случай. Две составляющих силы реакции X_A, Y_A, момент M. Пространственный случай. Три составляющих силы реакции X_A, Y_A, Z_A, момент M.
11. Подпятники и подшипники. Разрешены повороты, запрещены поступательные сдвиги. Плоский случай. Пространственный случай.

Действительные и возможные перемещения.

Действительными называются перемещения, происходящие под действием приложенных сил в пространстве и во времени.

Возможным называется любое бесконечно малое воображаемое перемещение, допускаемое в данный момент связями, опорами.

Виртуальная работа силы и момента силы.

Виртуальная работа – это работа на возможном перемещении.

Виртуальная работа силы – скалярное произведение этой силы на возможное перемещение ее точки приложения $\delta A(\vec{F}) = \vec{F}\delta\vec{r} = |\vec{F}||\delta\vec{r}|\cos(\angle\vec{F},\delta\vec{r})$. «Плюс», если сила направлена в сторону перемещения или под острым углом. «Минус», если сила направлена против перемещения или под тупым углом. «Ноль», если сила перпендикулярна перемещению или нет перемещения.

Виртуальная работа момента $\delta A = \pm M\delta\varphi$. «Плюс», если перемещение и момент одинаково направлены. «Минус», если перемещение и момент направлены в разные стороны. «Ноль», если момент равен нулю или нет виртуального поворота.

Постулат идеальных связей.

Связи называются идеальными, если алгебраическая сумма виртуальных работ всех сил реакции системы на любом возможном перемещении равна нулю. $\sum\limits_{\upsilon}\vec{N}_{\upsilon}\delta\vec{r}_{\upsilon} = 0$.

Принцип возможных перемещений (Принцип Лагранжа).

Для равновесия механической системы, на которую наложены идеальные, голономные, удерживающие, стационарные связи, необходимо и достаточно, чтобы алгебраическая сумма виртуальных работ всех активных сил системы на любом возможном перемещении была равна нулю $\sum\delta A(F^{akm}) = 0$

Доказательство. Необходимость: при равновесии выполняется необходимое условие равенства нулю суммы сил и суммы моментов, то для υ-той точки системы $\vec{F}_{\upsilon}^{akm} + \vec{N}_{\upsilon} = 0$, умножим скалярно на $\delta\vec{r}_{\upsilon}$ и просуммируем по всем точкам системы, используя что система с идеальными связями, получим искомое. Достаточность (от противного): дано $\sum\delta A(F^{akm}) = 0$, но система не в равновесии, следовательно, она движется с ускорением, если есть ускорение, то есть и сила и при начальных ненулевых условиях она направленная в сторону движения, т.е. виртуальная работа не равна нулю, противоречие. Получаем искомое.

Сила инерции.

Сила инерции – произведение массы тела на ускорение с обратным знаком $\vec{F}_{\upsilon}^{ин} = -m_{\upsilon}\vec{a}_{\upsilon}$. «Минус» означает, что сила направлена против ускорения, это фиктивная сила.

Принцип Даламбера для механической системы.

По втором закону Ньютона для υ-той точки $m_\upsilon \vec{a}_\upsilon = \vec{F}^e_\upsilon + \vec{F}^i_\upsilon$. $\vec{F}^e_\upsilon + \vec{F}^i_\upsilon + \underbrace{(-m_\upsilon \vec{a}_\upsilon)}_{\vec{F}^{ин}_\upsilon} = 0$. Умножим векторно слева на $\vec{r}_\upsilon$ $[\vec{r}_\upsilon \vec{F}^e_\upsilon] + [\vec{r}_\upsilon \vec{F}^i_\upsilon] + [\vec{r}_\upsilon \vec{F}^{ин}_\upsilon] = 0$.

Суммируем векторно по υ эти равенства: $\sum\limits_\upsilon \vec{F}^e_\upsilon + \sum\limits_\upsilon \vec{F}^i_\upsilon + \sum\limits_\upsilon \vec{F}^{ин}_\upsilon = 0$, $\sum\limits_\upsilon [\vec{r}_\upsilon \vec{F}^e_\upsilon] + \sum\limits_\upsilon [\vec{r}_\upsilon \vec{F}^i_\upsilon] + \sum\limits_\upsilon [\vec{r}_\upsilon \vec{F}^{ин}_\upsilon] = 0$. Получаем $\begin{cases} \sum \vec{F}^e_\upsilon + \sum \vec{F}^{ин}_\upsilon = 0 \\ \sum \vec{M}^e_\upsilon + \sum \vec{M}^{ин}_\upsilon = 0 \end{cases}$.

Формулировка: Если механическая система не находится в равновесии, т.е. двигается с ускорением, то добавляя к действующим на нее внешним силам и внешним моментам не действующие на нее фиктивные силы инерции и их моменты, получим формально уравновешенную систему сил, для которой выполняются условия равновесия.

Принцип Лагранжа – Даламбера.

Если механическая система двигается с ускорением, т.е. не находится в равновесии, то добавляя к действующим на нее активным силам и их моментам не действующие фиктивные силы и их моменты, получим формально уравновешенную систему сил, для которой можно применить принцип возможных перемещений $\sum \delta A^{акт} + \sum \delta A^{ин} = 0$.

Общее уравнение динамики $\sum\limits_\upsilon (\vec{F}^{акт}_\upsilon - m_\upsilon \ddot{\vec{r}}_\upsilon)\delta \vec{r}_\upsilon = 0$.

ТЕМА 11. Уравнения Лагранжа I и II рода. Уравнения Лагранжа в потенциальном поле. Функция Лагранжа. Физическая природа законов сохранения.

Уравнения Лагранжа I рода.

Дана механическая система n материальных точек, $\upsilon = \overline{1,n}$, на которую наложено k связей, $i = \overline{1,k}$, которые определены уравнениями $f_i(x_1,...,x_n,y_1,...,y_n,z_1,...,z_n) = 0$. Эти связи налагают ограничения на возможные перемещения: $\begin{cases} \sum\limits_\upsilon \frac{\partial f_1}{\partial x_\upsilon}\delta x_\upsilon + \sum\limits_\upsilon \frac{\partial f_1}{\partial y_\upsilon}\delta y_\upsilon + \sum\limits_\upsilon \frac{\partial f_1}{\partial z_\upsilon}\delta z_\upsilon = 0 \\ \text{...} \\ \sum\limits_\upsilon \frac{\partial f_k}{\partial x_\upsilon}\delta x_\upsilon + \sum\limits_\upsilon \frac{\partial f_k}{\partial y_\upsilon}\delta y_\upsilon + \sum\limits_\upsilon \frac{\partial f_k}{\partial z_\upsilon}\delta z_\upsilon = 0 \end{cases}$. Умножаем каждое уравнение на λ_i и почленно складывая, добавим к этому общее уравнение динамики $\sum\limits_\upsilon (\vec{F}^{акт}_\upsilon - m_\upsilon \ddot{\vec{r}}_\upsilon)\delta \vec{r}_\upsilon = 0$, которое можно записать, учитывая скалярность произведения, $\sum\limits_\upsilon (\vec{F}_{\upsilon x} - m_\upsilon \ddot{x}_\upsilon)\delta x_\upsilon + \sum\limits_\upsilon (\vec{F}_{\upsilon y} - m_\upsilon \ddot{y}_\upsilon)\delta y_\upsilon + \sum\limits_\upsilon (\vec{F}_{\upsilon z} - m_\upsilon \ddot{z}_\upsilon)\delta z_\upsilon = 0$.

После почленного сложения получим:

$$\sum_\upsilon (\vec{F}_{\upsilon x} - m_\upsilon \ddot{x}_\upsilon + \sum_i \lambda_i \frac{\partial f_i}{\partial x_\upsilon})\delta x_\upsilon + \sum_\upsilon (\vec{F}_{\upsilon y} - m_\upsilon \ddot{y}_\upsilon + \sum_i \lambda_i \frac{\partial f_i}{\partial y_\upsilon})\delta y_\upsilon + \sum_\upsilon (\vec{F}_{\upsilon z} - m_\upsilon \ddot{z}_\upsilon + \sum_i \lambda_i \frac{\partial f_i}{\partial z_\upsilon})\delta z_\upsilon = 0$$

Используя основную теорему вариационного исчисления, получим Уравнения Лагранжа I рода: $m_\upsilon \ddot{x}_\upsilon = F_{\upsilon x}^{акт} + \sum_i \lambda_i \frac{\partial f_i}{\partial x_\upsilon}$, $m_\upsilon \ddot{y}_\upsilon = F_{\upsilon y}^{акт} + \sum_i \lambda_i \frac{\partial f_i}{\partial y_\upsilon}$, $m_\upsilon \ddot{z}_\upsilon = F_{\upsilon z}^{акт} + \sum_i \lambda_i \frac{\partial f_i}{\partial z_\upsilon}$.

Уравнения Лагранжа I рода – дифференциальные уравнения второго порядка. Этих уравнений $3n$ штук и чем больше точек в системе, тем больше уравнений. Неизвестными здесь являются координаты точек и коэффициенты λ_i. Чтобы найти все неизвестные надо добавить к $3n$ уравнениям Лагранжа I рода k уравнений связи. Чем больше связей наложено на систему, тем больше будет уравнений в системе. Уравнение Лагранжа I рода используется в случае, когда мало частиц в системе и наложенных связей. Позволяют вычислить силы реакций, которые всегда неизвестны. Это второй закон Ньютона для системы из n точек с k наложенными связями. Носят в основном исторический смысл и значение.

Уравнение Лагранжа II рода.

Обобщенными координатами называются любые независимые параметры однозначно определяющие положение механической системы в пространстве, $q_1,...,q_s$, где s - число степеней свободы.

Обобщенными скоростями называются первые производные по времени от обобщенных координат: $\dot{q}_1,...,\dot{q}_s$.

Обобщенными ускорениями называются вторые производные по времени от обобщенных координат: $\ddot{q}_1,...,\ddot{q}_s$.

Обобщенными возможными перемещениями называются первые вариации от обобщенных координат: $\delta q_1,...,\delta q_s$.

Обобщенными силами называются коэффициенты при обобщенных возможных перемещениях в формуле виртуальной работы $\sum \delta A = \sum_\alpha Q_\alpha \delta q_\alpha$. Вычисляются по формуле $Q_\alpha = \sum_\upsilon \vec{F}_\upsilon \frac{\partial \vec{r}_\upsilon}{\partial q_\alpha}$ или $Q_\alpha = \frac{\sum \delta A\big|_{\delta q_\alpha > 0}}{\delta q_\alpha}$. Обобщенные силы в потенциальном поле: $Q_\alpha = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_\alpha}$.

Принцип обобщенных возможных перемещений.

Для равновесия механической системы необходимо и достаточно, чтобы одновременно все обобщенные силы были равны нулю $Q_1 = ... = Q_s = 0$.

Уравнение Лагранжа II рода выводится из общего уравнения динамики $\sum_\upsilon (\vec{F}_\upsilon^{акт} - m_\upsilon \ddot{\vec{r}}_\upsilon)\delta \vec{r}_\upsilon = 0$. $\sum_\alpha \left\{ \sum_\upsilon \vec{F}_\upsilon \frac{\partial \vec{r}_\upsilon}{\partial q_\alpha} - \sum_\upsilon m_\upsilon \left(\frac{d}{dt} \dot{\vec{r}}_\upsilon \right) \frac{\partial \vec{r}_\upsilon}{\partial q_\alpha} \right\} \delta q_\alpha = 0$.

$$\sum_\alpha \left\{ Q_\alpha - \left[\sum_\upsilon m_\upsilon \frac{d}{dt}\left(\dot{\vec{r}}_\upsilon \frac{\partial \vec{r}_\upsilon}{\partial q_\alpha} \right) - \sum_\upsilon m_\upsilon \dot{\vec{r}}_\upsilon \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \vec{r}_\upsilon}{\partial q_\alpha} \right) \right] \right\} \delta q_\alpha = 0,$$

$$\sum_\alpha \left\{ Q_\alpha - \left[\sum_\upsilon m_\upsilon \frac{d}{dt}\left(\dot{\vec{r}}_\upsilon \frac{\partial \dot{\vec{r}}_\upsilon}{\partial \dot{q}_\alpha} \right) - \sum_\upsilon m_\upsilon \dot{\vec{r}}_\upsilon \frac{\partial \dot{\vec{r}}_\upsilon}{\partial q_\alpha} \right] \right\} \delta q_\alpha = 0,$$

$\sum_\alpha \left\{ Q_\alpha - \left[\frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot{q}_\alpha}\left(\sum_\upsilon \frac{m_\upsilon \vec{v}_\upsilon^2}{2} \right) - \frac{\partial}{\partial q_\alpha}\left(\sum_\upsilon \frac{m_\upsilon \vec{v}_\upsilon^2}{2} \right) \right] \right\} \delta q_\alpha = 0$, используем основную теорему вариационного исчисления, получаем $\frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot{q}_\alpha}T - \frac{\partial}{\partial q_\alpha}T = Q_\alpha$ - уравнение Лагранжа II рода.

Это дифференциальное уравнение второго порядка в обобщенных координатах. Их ровно s, число уравнений Лагранжа II рода равно числу степеней свободы, следовательно, чем больше связей наложено на систему, тем меньше уравнений. Носят интегральный характер, т.к. в уравнения входят только характеристики всей системы и не входят характеристики отдельных точек. В них явно не входят силы реакции. Это второй закон Ньютона в обобщенных координатах.

Уравнение Лагранжа в потенциальном поле.

Для вывода используется значение обобщенных сил в потенциальном поле: $\frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot{q}_\alpha}T - \frac{\partial}{\partial q_\alpha}T = Q_\alpha$, $Q_\alpha = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_\alpha}$, где $\Pi = \Pi(q_\alpha)$, $\frac{\partial \Pi}{\partial \dot{q}_\alpha} = 0$. Имеем $\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha} - \frac{\partial T}{\partial q_\alpha} + \frac{\partial \Pi}{\partial q_\alpha} = 0$ или $\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha} - \frac{\partial}{\partial q_\alpha}(T - \Pi) = 0$ или $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} - \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} = 0$, где L - функция Лагранжа.

Функция Лагранжа.

Функция Лагранжа – разность между кинетической и потенциальной энергиями $L = T - \Pi$. Это функция обобщенных координат, обобщенных скоростей и времени $L = L(q_\alpha, \dot{q}_\alpha, t)$. Функция Лагранжа удовлетворяет уравнению Лагранжа $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} - \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} = 0$. Функцию Лагранжа можно умножать на константу, т.к. справа ноль (переход к другим единицам измерения). К функции Лагранжа можно прибавлять константу, т.к. она входит в уравнение только в производных (другой выбор начала отсчета потенциальной энергии). Обладает свойством аддитивности $L = \sum_\upsilon L_\upsilon$. К функции Лагранжа можно добавлять производную по времени от произвольной функции координат.

Физическая природа законов сохранения.

Закон сохранения энергии.

Физической природой закона сохранения энергии является однородность времени, значит $\frac{dL}{dt} = 0$.

$\sum_\alpha \left(\dot{q}_\alpha \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} \right) - L = const$, $\sum_\alpha (\dot{q}_\alpha P_\alpha) = 2T$, следовательно, $T + \Pi = const$.

Закон сохранения импульса.

Физической природой закона сохранения импульса является однородность пространства, следовательно, функция Лагранжа не должна зависеть от параллельного переноса всей системы в любую другую точку пространства, $\delta L = 0$. $\vec{\varepsilon}$ - вектор параллельного переноса. $\vec{\varepsilon}\frac{d}{dt}\sum_{\upsilon}\frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}_{\upsilon}} = 0$, при любом $\vec{\varepsilon}$ это рано нулю. Тогда $\sum_{\upsilon}\vec{P}_{\upsilon} = const$.

Закон сохранения момента импульса.

Физической природой закона сохранения момента импульса является изотропность пространства, т.е. функция Лагранжа не должна зависеть от поворотов, $\delta L = 0$. $\delta\vec{r}_{\upsilon} = [\delta\varphi\, \vec{r}_{\upsilon}]$. $\frac{d}{dt}\sum_{\upsilon}\frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}_{\upsilon}}\delta\vec{r}_{\upsilon} = 0$, получаем $\sum_{\upsilon}[\vec{r}_{\upsilon}\vec{P}_{\upsilon}] = \overrightarrow{const}$.

Циклические координаты и их связь с законами сохранения.

Обобщенная координата $q_ц$ называется циклической, если она явно не входит в функцию Лагранжа, т.е. $\frac{\partial L}{\partial q_ц} = 0$, тогда из уравнений Лагранжа $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_ц} = const$ или $P_ц = const$.

ТЕМА 12. Метод Рауса.

Метод Рауса.

Обобщенная координата q_k называется циклической, если она не входит явно в выражение функции H Гамильтона. Очевидно, в этом случае и функция L Лагранжа также не зависит от координаты q_k.

Каждой циклической координате соответствует первый интеграл $\dot{p}_k = 0, p_k = C_k$ дифференциальных уравнений движения. Покажем, что наличие r циклических координат позволяет привести вопрос об определении движения системы с голономными связями к интегрированию системы $N - r$ дифференциальных уравнений второго порядка, где N - число степеней свободы системы. Эта система дифференциальных уравнений называется уравнениями Рауса. Если число циклических координат $r = N$, то интегрирование уравнений динамики сводится к квадратурам.

Для получения уравнений Рауса обобщим составление канонических уравнений. Введем систему обобщенных импульсов: $p_\alpha = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}$ $\alpha = \overline{1,r},\ r < N$.

Через эти импульсы и обобщенные скорости $\dot{q}_\alpha$, $\alpha = \overline{r+1,N}$ можно выразить обобщенные скорости $\dot{q}_k$, $k = \overline{1,r}$. Рассмотрим функцию Рауса $R = L - \sum_{\alpha=1}^{r}\dot{q}_\alpha p_\alpha$.

Исключая из функции Рауса обобщенные скорости $\dot{q}_1,...,\dot{q}_r$, получим $R = R(t, q_1,...,q_N, p_1,...,p_r, \dot{q}_{r+1},...,\dot{q}_N)$. Найдем дифференциал функции R, рассматривая $t, q_\alpha, \dot{q}_k, p_k$ как независимые переменные. Получим:

$$dR = \frac{\partial L}{\partial t}dt + \sum_{\alpha=1}^{N}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}d\dot{q}_\alpha + \frac{\partial L}{\partial q_\alpha}dq_\alpha\right) - \sum_{\alpha=1}^{r}\left(\dot{q}_\alpha dp_\alpha + p_\alpha d\dot{q}_\alpha\right) =$$

$$=\frac{\partial L}{\partial t}dt+\sum_{\alpha=1}^{N}\frac{\partial L}{\partial q_\alpha}dq_\alpha-\sum_{\alpha=1}^{r}\dot q_\alpha dp_\alpha+\sum_{\alpha=r+1}^{N}p_\alpha d\dot q_\alpha .$$

Откуда следует: $dR=\frac{\partial R}{\partial t}dt+\sum_{\alpha=1}^{N}\frac{\partial R}{\partial q_\alpha}dq_\alpha-\sum_{\alpha=1}^{r}\frac{\partial R}{\partial p_\alpha}dp_\alpha+\sum_{\alpha=r+1}^{N}\frac{\partial R}{\partial \dot q_\alpha}d\dot q_\alpha .$

Получаем:

$$\frac{\partial R}{\partial t}=\frac{\partial L}{\partial t},\ \frac{\partial R}{\partial q_\alpha}=\frac{\partial L}{\partial q_\alpha},\ \alpha=\overline{1,N},\ \dot q_\alpha=-\frac{\partial R}{\partial q_\alpha},\ \alpha=\overline{1,r},\ p_\alpha=\frac{\partial R}{\partial \dot q_\alpha}=\frac{\partial L}{\partial \dot q_\alpha},\ \alpha=\overline{r+1,N}.$$

Применим дифференциальные уравнения Лагранжа второго рода $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q_\alpha}-\frac{\partial L}{\partial q_\alpha}=Q_\alpha\ \ \alpha=\overline{1,N}$.

Здесь рассматривается общий случай наличия сил, не образующих консервативное силовое поле. Тогда получим: $\dot q_\alpha=-\frac{\partial R}{\partial q_\alpha},\ p_\alpha=\frac{\partial R}{\partial q_\alpha}+Q_\alpha,\ \alpha=\overline{1,r}$,

$\frac{d}{dt}\frac{\partial R}{\partial \dot q_\alpha}-\frac{\partial R}{\partial q_\alpha}=Q_\alpha\ \ \alpha=\overline{r+1,N}$ - Уравнения Рауса.

Предположим теперь, что $Q_\alpha=0,\ \alpha=\overline{1,r}$ и координаты $q_1,...,q_r$ - циклические, L и R от них не зависят. Тогда $p_\alpha=a_\alpha,\ \alpha=\overline{1,r}$.

Далее интегрируем уравнения $\frac{d}{dt}\frac{\partial R}{\partial \dot q_\alpha}-\frac{\partial R}{\partial q_\alpha}=Q_\alpha$. Эти уравнения теперь образуют отдельную систему, из которой можно найти нециклические координаты $q_{r+1},...,q_N$.

После определения нециклических координат возвращаемся к системе уравнений $\dot q_\alpha=-\frac{\partial R}{\partial q_\alpha},\ p_\alpha=\frac{\partial R}{\partial q_\alpha}+Q_\alpha,\ \alpha=\overline{1,r}$. Из этой системы квадратурами находим циклические координаты $q_1,...,q_r$ как функции времени: $q_\alpha=-\int\frac{\partial R}{\partial a_\alpha}dt+C_\alpha,\ \alpha=\overline{1,r}$, где C_α - постоянные интегрирования.

Если $r=N$, то, эти равенства дают общее решение системы уравнений динамики. Это решение можно найти и не обращаясь к уравнениям Рауса. Следовательно, общий случай сводится к интегрированию $N-r$ дифференциальных уравнений второго порядка, по внешнему виду напоминающих дифференциальные уравнения Лагранжа второго рода. Как видно из предыдущего, метод Рауса позволяет исключить циклические скорости из уравнений Лагранжа второго рода.

Конечно, это исключение можно было бы произвести иными способами, например, непосредственно пользуясь каноническими уравнениями.

«Игнорирование» циклических координат и «скрытые движения».

Рассмотрим подробнее метод исключения циклических координат по способу Рауса.

Циклические интегралы $p_\alpha=a_\alpha,\ \alpha=\overline{1,r}$ позволяют найти циклические обобщенные скорости как линейные неоднородные функции нециклических скоростей. Коэффициенты этих линейных функций в общем случае зависят от нециклических обобщенных координат.

Следовательно, даже тогда, когда функция L Лагранжа является квадратичной формой обобщенных скоростей, функция Рауса после исключения циклических обобщенных скоростей будет иметь в своем составе как члены второго измерения относительно нециклических обобщенных скоростей, и члены первого и нулевого измерений.

Действительно, вычислим функцию R по формуле $R = L - \sum_{\alpha=1}^{r} \dot{q}_\alpha p_\alpha$; эта функция на основании соотношений $p_\alpha = a_\alpha$, $\alpha = \overline{1,r}$ после исключения циклических импульсов и обобщенных скоростей может быть представлена в виде $R = L(t, q_{r+1},...,q_N, \dot{q}_{r+1},...,\dot{q}_N, a_1,...,a_r) - \sum_{\alpha=1}^{r} a_\alpha \dot{q}_\alpha (t, q_{r+1},...,q_N, \dot{q}_{r+1},...,\dot{q}_N, a_1,...,a_r)$, следовательно, $R = R_0 + R_1 + R_2$.

В этой формуле R_0 - члены нулевого измерения относительно обобщенных скоростей, т. е. члены, независимые от обобщенных скоростей, R_1 и R_2 - соответственно линейная и квадратичная формы обобщенных скоростей.

Потенциальная энергия Π входит в состав R_0.

Исключение циклических скоростей называется игнорированием циклических координат, так как в результате этой операции в составе функции Рауса остаются лишь нециклические координаты и скорости.

Уравнения $\dot{q}_\alpha = -\dfrac{\partial R}{\partial q_\alpha}$, $p_\alpha = \dfrac{\partial R}{\partial q_\alpha} + Q_\alpha$, $\alpha = \overline{1,r}$ внешне напоминают уравнения Лагранжа второго рода, причем роль функции L принадлежит в этих уравнениях функции R.

Так как циклические координаты и скорости не входят в состав функции R, говорят, что они соответствуют «скрытым движениям». В действительности же существование циклических координат отражается на уравнениях $\dot{q}_\alpha = -\dfrac{\partial R}{\partial q_\alpha}$, $p_\alpha = \dfrac{\partial R}{\partial q_\alpha} + Q_\alpha$, $\alpha = \overline{1,r}$.

Рассмотрим, например, материальную систему, положения и скорости которой определяются координатами $q_{r+1},...,q_N$. Эта система имеет $N-r$ степеней свободы. Предположим, что связи, наложенные на систему, стационарны. Тогда функция L будет содержать обобщенные скорости лишь в форме членов второго измерения относительно скоростей. Уравнения Лагранжа второго рода для этой материальной системы будут иметь известный вид: $\dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} - \dfrac{\partial L}{\partial q_\alpha} = Q_\alpha$, $\alpha = \overline{r+1,N}$ или $\dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L_2}{\partial \dot{q}_\alpha} - \dfrac{\partial L_2}{\partial q_\alpha} = Q_\alpha - \dfrac{\partial \Pi}{\partial q_\alpha}$, $\alpha = \overline{r+1,N}$, где L_2 - члены второго измерения относительно обобщенных скоростей. Потенциальную энергию Π можно отождествить с L_0, т.е. с членами нулевого измерения в составе L.

Вместе с этой системой материальных точек рассмотрим другую с N степенями свободы и предположим, что координаты $q_1,...,q_r$ - циклические, а координаты $q_{r+1},...,q_N$ - нециклические. Предположим, что на вторую систему, как и на первую, наложены лишь стационарные связи. Пусть обобщенные силы $Q_{r+1},...,Q_N$ в первой и второй материальных системах совпадают. На основании равенства $R = R_0 + R_1 + R_2$ найдем

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial R_2}{\partial \dot{q}_\alpha} - \frac{\partial R_2}{\partial q_\alpha} = Q_\alpha - \left(\frac{d}{dt}\frac{\partial R_1}{\partial \dot{q}_\alpha} - \frac{\partial R_1}{\partial q_\alpha}\right) - \left(\frac{d}{dt}\frac{\partial R_0}{\partial \dot{q}_\alpha} - \frac{\partial R_0}{\partial q_\alpha}\right).$$

Левые части уравнений движения системы по своему виду не отличаются от левых частей уравнений $\frac{d}{dt}\frac{\partial L_2}{\partial \dot{q}_\alpha} - \frac{\partial L_2}{\partial q_\alpha} = Q_\alpha - \frac{\partial \Pi}{\partial q_\alpha}$. Правые части уравнений движения этих двух систем различны. Выражения $P_\alpha = -\frac{d}{dt}\frac{\partial R_1}{\partial \dot{q}_\alpha} + \frac{\partial R_1}{\partial q_\alpha}$, $S_\alpha = -\frac{d}{dt}\frac{\partial R_0}{\partial \dot{q}_\alpha} + \frac{\partial R_0}{\partial q_\alpha}$, $\alpha = \overline{r+1, N}$ можно рассматривать как дополнительные обобщенные силы, зависящие от наличия циклических координат.

Как было сказано выше, $R_1 = \sum_{l=r+1}^{N} A_l \dot{q}_l$.

Следовательно, $P_\alpha = \sum_{l=r+1}^{N} \frac{\partial A_l}{\partial q_\alpha}\dot{q}_l - \frac{dA_\alpha}{dt} = \sum_{l=r+1}^{N}\left(\frac{\partial A_l}{\partial q_\alpha} - \frac{\partial A_\alpha}{\partial q_l}\right)\dot{q}_l - \frac{dA_\alpha}{dt}$.

Введем обозначение: $\beta_{l\alpha} = -\beta_{\alpha l} = \frac{\partial A_l}{\partial q_\alpha} - \frac{\partial A_\alpha}{\partial q_l}$. Тогда $p_\alpha = -\frac{\partial A_\alpha}{\partial t} + \sum_{l=r+1}^{N} \beta_{l\alpha}\dot{q}_l$.

Выражения $\beta_{l\alpha}\dot{q}_l$ встречались в теории малых колебаний , где они назывались гироскопическими членами.

Рассмотрим силы S_α. Т.к. функция R_0 не зависит от обобщенных скоростей, силы S_α определяются следующими равенствами: $S_\alpha = \frac{\partial R_0}{\partial q_\alpha}$, $\alpha = \overline{r+1, N}$.

Следовательно, силы S_α как бы порождаются потенциальным полем с силовой функцией, равной R_0.

Силы P_α и S_α возникают вследствие существования «скрытых движении», определяемых циклическими координатами. Это было основанием для возникновения мысли о том, что силовые поля вообще можно объяснить существованием «скрытых движений».

ТЕМА 13. Общие свойства одномерного движения. Движение финитное и инфинитное. Потенциальные ямы и барьеры.

Малые колебания.

Колебаниями называются любые периодические процессы.

Малыми колебаниями называются колебания вблизи устойчивого положения равновесия, т.е. колебания при бесконечно малых углах отклонения.

Гармоническими колебаниями называются колебания, происходящие по закону синуса или косинуса.

Свободными колебаниями называются колебания, когда механическая система, будучи выведенной из состояния равновесия, далее предоставлена самой себе, т.е. это колебания без притока энергии из вне.

Затухающими называются колебания с уменьшающейся амплитудой.

Незатухающими называются колебания с увеличивающейся амплитудой.

Собственными колебаниями называются колебания, происходящие под действием только потенциальных сил системы.

Потенциальными силами называются силы, вычисляющиеся через потенциальную энергию по формуле $Q_\alpha = -\dfrac{\partial \Pi}{\partial q_\alpha} = -grad\Pi$.

Вынужденными называются колебания, происходящие под действием внешних, периодических сил, они являются незатухающими благодаря вынуждающей силе.

Параметрическими называются колебания, происходящие за счет изменения параметров системы.

Автоколебаниями называются колебания системы без периодической возмущающей силы, т.е. это колебания системы, которые при непериодическом поступлении энергии генерируют периодический процесс.

Амплитудой колебаний называется максимальное отклонение системы от равновесия.

Периодом называется время одного полного колебания.

Частотой называется величина обратная периоду или число колебаний в секунду.

Круговой частотой называется число колебаний за 2π секунд, $k = 2\pi / \tau$.

Фазой называется $\varphi = kt + \alpha$ угловое отклонение системы от равновесия в данный момент, выраженное в угловой мере.

Начальная фаза α - отклонение от равновесия в начальный момент времени.

Равновесие называется устойчивым, если после бесконечно малого отклонения от положения равновесия система самопроизвольно возвращается в состояние равновесия.

Равновесие называется неустойчивым, если после бесконечно малого отклонения от положения равновесия система продолжает удаляться от положения равновесия.

Равновесие называется безразличным, если после бесконечно малого отклонения от положения равновесия система остается в отклоненном положении.

Равновесие называется седлообразным, если вид равновесия зависит от направления отклонения.

Равновесие называют устойчивым по Ляпунову, если $\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta_1, \delta_2 > 0$ такие, что, если в начальный момент $q_0 < \delta_1\ \dot{q}_0 < \delta_2$, то в дальнейшем $q < \varepsilon$ для любой обобщенной координаты.

Теорема Лагранжа – Дирихле. Для устойчивости равновесия консервативной механической системы достаточно, чтобы потенциальная энергия имела изолированный минимум.

Кинетическая энергия системы $T = \frac{1}{2}\sum_{i,k=1}^{s} m_{ik}\dot{q}_i\dot{q}_k$.

Потенциальная энергия системы $\Pi = \frac{1}{2}\sum_{i,k=1}^{s} c_{ik}q_i q_k$.

Главные координаты и главные колебания.

Главными координатами называются такие обобщенные координаты, через которые потенциальная энергия выражается только с квадратами обобщенных координат, а кинетическая энергия выражается только с квадратами обобщенных скоростей: $T = \frac{1}{2}(m_{11}\dot{\eta}_1^2 + ... + m_{ss}\dot{\eta}_s^2)$, $\Pi = \frac{1}{2}(c_{11}\eta_1^2 + ... + c_{ss}\eta_s^2)$.

Дифференциальные уравнения Лагранжа в главных координатах:
$$\begin{cases} \ddot{\eta}_1 + \dfrac{c_{11}}{m_{11}}\eta_1 = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \ddot{\eta}_s + \dfrac{c_{ss}}{m_{ss}}\eta_s = 0 \end{cases}, \text{ где } \frac{c_{ii}}{m_{ii}} = k_i^2 .$$

Преимущество главных координат перед произвольными обобщенными координатами: 1. Уравнения Лагранжа в главных координатах каждое содержит только одну обобщенную координату. 2. Уравнения Лагранжа не зависят друг от друга. 3. Дифференциальные уравнения в главных координатах имеют одинаковый структурный вид. 4. Решения дифференциальных уравнений в главных координатах содержат параметры соответствующие отдельной обобщенной координате. 5. Все главные колебания имеют одинаковый математический вид. 6. Достаточно решить только одно дифференциальное уравнение.

Переход к главным координатам от произвольных обобщенных координат осуществляется по формулам: $q_1 = \eta_1 + \eta_2$, $q_2 = \mu_1\eta_1 + \mu_2\eta_2$, где μ_1, μ_2 - коэффициенты распределения. $\eta_1 = \frac{q_2 - q_1\mu_2}{\mu_1 - \mu_2}, \eta_2 = \frac{q_2 - q_1\mu_1}{\mu_2 - \mu_1}$.

Примеры главных колебаний.

1. Связанные маятники.
2. Связанные маятники.
3. Пружинные маятники.
4. Струна.
5. Изгиб вала.

Колебания молекул.

Если в системе частицы взаимодействуют друг с другом, но не находятся во внешнем поле, то не все степени свободы системы имеют колебательный характер. Такими системами являются молекулы.

Молекула как целое может иметь поступательное и вращательное движения, и атомы внутри нее могут иметь колебания около их положения равновесия. У всей молекулы как целого есть три поступательных степени свободы и три вращательных степени свободы. В молекуле $\boldsymbol{n}$ атомов, т.е. у всей молекулы $\mathbf{3}\boldsymbol{n}$ степеней свободы, из них $(\mathbf{3}\boldsymbol{n}-\mathbf{6})$ степеней свободы – это колебательные степени свободы.

Но если молекула линейная, то нет вращения молекулы вокруг самой этой прямой молекулы, значит, колебательных степеней свободы будет не $(\mathbf{3}\boldsymbol{n}-\mathbf{6})$, а $(\mathbf{3}\boldsymbol{n}-\mathbf{5})$.

Конкретнее, в случае линейной молекулы можно различать продольные колебания вдоль линии молекулы и колебания, выводящие атомы с этой прямой. Для $\boldsymbol{n}$ частиц колебанию по одной прямой соответствует $\boldsymbol{n}$ степеней свободы, но одна из них поступательная, значит, колебательных будет $(\boldsymbol{n}-\mathbf{1})$. Однако, для всей линейной молекулы $(\mathbf{3}\boldsymbol{n}-\mathbf{5})$ колебательных степеней свободы, значит, получим $(\mathbf{2}\boldsymbol{n}-\mathbf{4})$ степеней свободы за счет колебаний, выводящих атомы с прямой линии. Эти колебания могут быть в двух взаимно перпендикулярных направлениях, и эти пары колебаний могут иметь одинаковые частоты из-за симметрии, и тогда будет $(\mathbf{2}\boldsymbol{n}-\mathbf{4})$ колебания выводящие атомы с прямой, но с $(\boldsymbol{n}-\mathbf{2})$ частотами.

Если $\boldsymbol{n}$ атомов молекулы находятся в одной плоскости, тогда это соответствует $\mathbf{2}\boldsymbol{n}$ степеням свободы, но при плоском движении есть две поступательные и одна вращательная степени свободы, значит, колебательных степеней свободы будет $(\mathbf{2}\boldsymbol{n}-\mathbf{3})$, т.е. $(\mathbf{2}\boldsymbol{n}-\mathbf{3})$ нормальных колебаний оставляют атомы молекулы в плоскости, остальные $(\mathbf{3}\boldsymbol{n}-\mathbf{6})-(\mathbf{2}\boldsymbol{n}-\mathbf{3})=(\boldsymbol{n}-\mathbf{3})$ нормальных колебаний выводят атомы молекулы из этой плоскости.

Общий метод, основанный на использовании теории групп, учитывает внутреннюю симметрию молекул, т.е. симметрию расположения атомов в молекуле. Этот метод дает классификацию нормальных колебаний молекул.

Нелинейные колебания.

Рассмотрим систему с одной степенью свободы, на которую наложены голономные стационарные связи и действуют заданные стационарные силы; при этом предположим, что у системы имеется положение устойчивого равновесия. Разложение кинетической, потенциальной и диссипативной функций в окрёстности этого положения вплоть до членов второго порядка малости включительно приводит к линейному уравнению. Однако во многих практически важных задачах возникает необходимость исследования колебаний с достаточно большими амплитудами и скоростями. В таких случаях линейное приближение оказывается недостаточным и приходится учитывать последующие члены разложений, приводящие к нелинейным уравнениям. Если при этом отклонения от положения равновесия и скорости точек не слишком велики, то соответствующие уравнения будут описывать малые нелинейные колебания.

Изучим особенности таких колебаний на примере математического маятника, помещенного в среду с «линейным» сопротивлением. Его кинетическая и потенциальная энергия, а также диссипативная функция соответственно равны $T = \frac{ml^2}{2}\dot{\varphi}^2,\ \Pi = mgl(1-\cos\varphi),\ D = \frac{kl^2}{2}\dot{\varphi}^2$.

Разлагая потенциальную энергию в положении устойчивого равновесия $\varphi_{eq} = 0$ с точностью до членов четвертого порядка малости включительно, получим $\Pi = mgl\left(\frac{\varphi^2}{2!} - \frac{\varphi^4}{4!}\right)$, и уравнение Лагранжа примет вид: $\ddot{\varphi} + 2\mu\dot{\varphi} + \omega_0^2\varphi = \frac{\omega_0^2}{3!}\varphi^3$, где $\omega_0^2 = g/l,\ 2\mu = k/m$. Если в этом уравнении пренебречь нелинейным членом, пропорциональным φ^3, то придем к линейному уравнению, решением которого в случае $\omega_0 > \mu$ является функция $\varphi = a_0 e^{-\mu t}\cos(\omega t + \psi_0)$, где $\omega^2 = \omega_0^2 - \mu^2$. Если же не пренебрегать нелинейным членом, то, учитывая его малость по сравнению с линейным членом, пропорциональным φ, можно предположить, что решение, описывающее нелинейное колебание, по форме близко к решению линейного уравнения, т.е. $\varphi \approx a\cos\psi$, где a и ψ — неизвестные амплитуды и фаза нелинейного колебания.

Величина обобщенной силы, связанной с отклонением маятника от вертикали и пропорциональной $-\varphi + \varphi_3/6$, меньше величины той же силы в линейном приближении, причем различие в этих значениях тем больше, чем больше отклонение маятника от вертикали. Следовательно, первая производная фазы ψ по времени или частота $\dot{\psi}$ нелинейных колебаний маятника будет меньше собственной частоты ω_0 его линейных колебаний и будет зависеть от амплитуды колебаний. В связи с этим можно допустить, что для собственных нелинейных колебаний, вообще говоря, имеет место зависимость: $\dot{\psi} = \omega(a)$, где $\omega(a)$ - неизвестная функция, вид которой определяется видом обобщенной силы.

Предположение об. изменении амплитуды нелинейного колебания, по существу, также связано с допущением $\varphi \approx a\cos\psi$, о «близости» нелинейного и линейного колебаний в течение одного периода. Действительно, в линейном приближении амплитуда математического маятника изменяется по закону $a = a_0 e^{-\mu t}$ и удовлетворяет уравнению $\dot{a} = -\mu a$. Поэтому будем считать, что и в общем случае производная от амплитуды нелинейных колебаний является функцией амплитуды, т. е. $\dot{a} = f(a)$.

Характерным для нелинейных колебаний является наличие «обертонов», т.е. частот, кратных основной частоте. В частности, это можно видеть на примере математического маятника, уравнение которого содержит нелинейный член, приводящий к появлению высшей гармоники: $\varphi^3 \approx a^3 \cos^3 \psi = \frac{a^3}{4}(3\cos\psi + \cos 3\psi)$.

Наконец, в силу нелинейности уравнения движения его общее решение не сводится к сумме частных решений, и, следовательно, принцип суперпозиции не имеет места. Таковы особенности нелинейных малых колебаний или, как говорят, слабо-нелинейных колебаний.

Рассмотрим уравнение слабо-нелинейных собственных одномерных колебаний вида: $\ddot{\xi} + \omega_0^2 \xi = \varepsilon Q(\xi, \dot{\xi})$, где ε - параметр, указывающий на малость функции εQ по сравнению с линейным членом (порядок малости членов в этом и последующих уравнениях определяется так, чтобы при $\varepsilon \to 0$ имел место случай линейных гармонических колебаний). Одним из методов решения этого уравнения является метод Крылова – Боголюбова.

Учитывая $\varphi \approx a\cos\psi$, решение уравнения $\ddot{\xi} + \omega_0^2 \xi = \varepsilon Q(\xi, \dot{\xi})$ будем искать в виде ряда $\xi = a\cos\psi + \varepsilon\xi_1(a,\psi) + \varepsilon^2\xi_2(a,\psi) + \ldots$, где $\varepsilon\xi_1$, $\varepsilon^2\xi_2$ - неизвестные функции амплитуды a и периодические функции фазы ψ. В свою очередь, амплитуда a и фаза ψ являются неизвестными функциями времени, подчиненными «своим» дифференциальным уравнениям $\dot{a} = \varepsilon f_1(a) + \varepsilon^2 f_2(a) + \ldots$, $\dot{\psi} = \omega_0 + \varepsilon\omega_1(a) + \varepsilon^2\omega_2(a) + \ldots$.Правые части этих уравнений могут быть найдены, поскольку ряд $\xi = a\cos\psi + \varepsilon\xi_1(a,\psi) + \varepsilon^2\xi_2(a,\psi) + \ldots$, в котором a и ψ как функции времен определяются дифференциальными уравнениями, должен удовлетворять исходному уравнению $\ddot{\xi} + \omega_0^2 \xi = \varepsilon Q(\xi, \dot{\xi})$. Неизвестные функции $\varepsilon\xi_1, \varepsilon^2\xi_2, \ldots, \varepsilon f_1, \varepsilon^2 f_2, \ldots, \varepsilon\omega_1, \varepsilon^2\omega_2, \ldots$ определяются с некоторым произволом, который можно исключить, если потребовать, чтобы a явилась полной амплитудой основной гармоники. Тогда функции $\varepsilon\xi_1, \varepsilon^2\xi_2, \ldots$ не будут содержать членов, пропорциональных $\cos\psi$ и $\sin\psi$, и будут удовлетворять условиям: $\int_0^{2\pi} \varepsilon^n \xi_n(a,\psi)\cos\psi d\psi = 0,\ \int_0^{2\pi} \varepsilon^n \xi_n(a,\psi)\sin\psi d\psi = 0,\ n = 1,2,\ldots$.

Общая схема решения исходного уравнения заключается в отыскании функций $\varepsilon\xi_1, \varepsilon f_1, \varepsilon\omega_1$ и т. д. по заданной функции εQ; при этом амплитуда и фаза как функции времени будут определяться по найденным функциям $\varepsilon f_1, \varepsilon\omega_1$ и т.д. с помощью уравнений $\dot{a} = \varepsilon f_1(a) + \varepsilon^2 f_2(a) + \ldots$, $\dot{\psi} = \omega_0 + \varepsilon\omega_1(a) + \varepsilon^2\omega_2(a) + \ldots$.

Найдем решение исходного уравнения в первом приближении. Прежде чем подставить ряд $\xi = a\cos\psi + \varepsilon\xi_1(a,\psi) + \varepsilon^2\xi_2(a,\psi) + \ldots$ в уравнение $\ddot{\xi} + \omega_0^2 \xi = \varepsilon Q(\xi, \dot{\xi})$, получим величины $\dot{\xi}$ и $\ddot{\xi}$ как функции a и ψ с точностью до ε включительно. Дифференцируя первые два члена ряда по времени, найдем $\dot{\xi} = \dot{a}\cos\psi - a\sin\psi\dot{\psi} + \varepsilon\left(\frac{\partial\xi_1}{\partial a}\dot{a} + \frac{\partial\xi_1}{\partial\psi}\dot{\psi}\right)$. Учитывая, что a и ψ подчинены уравнениям $\dot a = \varepsilon f_1(a) + \varepsilon^2 f_2(a) + \dots$, $\dot\psi = \omega_0 + \varepsilon\omega_1(a) + \varepsilon^2\omega_2(a) + \dots$, дифференцируем по времени, получим $\ddot\xi = -\omega_0^2 a\cos\psi + \varepsilon\left(-2\omega_0 a\omega_1\cos\psi - 2\omega_0 f_1\sin\psi + \omega_0^2\dfrac{\partial^2\xi_1}{\partial\psi^2}\right)$

Теперь можно определить левую часть исходного уравнения как функцию a и ψ.

Для отыскания с точностью до ε правой части $\ddot\xi + \omega_0^2\xi = \varepsilon Q(\xi,\dot\xi)$ как функции a и ψ нужно разложить $\varepsilon Q(\xi,\dot\xi)$ в «точке» $a\cos\psi$, $-\omega_0 a\sin\psi$: $\varepsilon Q(\xi,\dot\xi) = \varepsilon Q(a\cos\psi, -\omega_0 a\sin\psi)$. Получим:

$$\omega_0^2\left(\varepsilon\xi_1 + \frac{\partial^2\varepsilon\xi_1}{\partial\psi^2}\right) = 2\omega_0 a\varepsilon\omega_1\cos\psi + 2\omega_0\varepsilon f_1\sin\psi + \varepsilon Q_0(a,\psi),$$

где $\varepsilon Q_0(a,\psi) = \varepsilon Q(a\cos\psi, -\omega_0 a\sin\psi)$.

Это дает возможность определить неизвестные функции $\varepsilon\xi_1, \varepsilon f_1, \varepsilon\omega_1$ по заданной функции εQ_0. Действительно, представим заданную функцию εQ_0 и неизвестную функцию $\varepsilon\xi_1$ (по предположению, она является периодической функцией ψ) в виде рядов Фурье: $\varepsilon Q_0(a,\psi) = \sum_{n=0}^{\infty}\{\varepsilon\beta_n(a)\cos n\psi + \varepsilon\alpha_n(a)\sin\psi\}$, где $\varepsilon\beta_n(a),\ \varepsilon\alpha_n(a)$ - известные коэффициенты Фурье, и $\varepsilon\xi_1(a,\psi) = \sum_{n=0}^{\infty}\{\varepsilon v_n(a)\cos n\psi + \varepsilon\gamma_n(a)\sin\psi\}$, где $\varepsilon v_n(a),\ \varepsilon\gamma_n(a),\ n = 0,2,3,...$ - коэффициенты Фурье, подлежащие определению, а коэффициенты εv_1, $\varepsilon\gamma_1$ равны $\varepsilon v_1 = \varepsilon\gamma_1 = 0$.

Приравнивая коэффициенты при одинаковых гармониках, находим $\varepsilon f_1, \varepsilon\omega_1$ и коэффициенты εv_n, $\varepsilon\gamma_n$: $\varepsilon f_1 = -\dfrac{\varepsilon\alpha_1}{2\omega_0}, \varepsilon\omega_1 = -\dfrac{\varepsilon\beta_1}{2\omega_0 a}$;

$$\varepsilon v_0 = \frac{\varepsilon\beta_0}{\omega_0^2}, \varepsilon v_n = \frac{\varepsilon\beta_n}{(1-n^2)\omega_0^2}, \varepsilon\gamma_n = \frac{\varepsilon\alpha_n}{(1-n^2)\omega_0^2},\ n = 2,3,\dots.$$

Получим дифференциальные уравнения для амплитуды и фазы: $\dot a = -\dfrac{\varepsilon\alpha_1(a)}{2\omega_0}, \dot\psi = \omega_0 - \dfrac{\varepsilon\beta_1(a)}{2\omega_0 a}$.

Таким образом, в первом приближении производная амплитуды по времени и частота определяются коэффициентами Фурье заданной функции $\varepsilon Q_0(a,\psi)$, т. е. коэффициентами Фурье правой (вообще говоря, нелинейной) части исходного уравнения, взятой с точностью до ε; производная амплитуды определяется коэффициентом Фурье при $\sin\psi$, а производная фазы определяется коэффициентом Фурье при $\cos\psi$.

Получаем определение функции:

$$\varepsilon\xi_1 = \frac{\varepsilon\beta_0(a)}{\omega_0^2} + \frac{1}{\omega_0^2}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{1-n^2}\{\varepsilon\beta_n(a)\cos n\psi + \varepsilon\alpha_n(a)\sin\psi\}.$$

Получим амплитуду a и фазу ψ как функции времени и начальных значений a_0, ψ_0. Найдем решение исходного уравнения: $\xi = a(t)\cos\psi(t) + \varepsilon\xi_1(a(t), \psi(t))$.

Проводя аналогичные вычисления с точностью до ε^2, можно получить решение во втором приближении.

На достаточно большом интервале времени первому приближению для функций $\dot{a}$ и ψ соответствует нулевое приближение, для ξ, а второму приближению для $\dot{a}$ и $\dot{\psi}$ соответствует первое приближение для ξ и т. д. Действительно, возьмем за меру большого временного интервала время $\sim 1/\varepsilon$. Для таких интервалов конечные приращения амплитуды Δa и фазы $\Delta(\psi - \omega_0 t)$ можно записать в виде: $\Delta a \sim \varepsilon \bar{f}_1 t \sim \bar{f}_1$, $\Delta(\psi - \omega_0 t) \sim \varepsilon\overline{\omega}_1 t \sim \overline{\omega}_1$, где $\bar{f}_1$ и $\overline{\omega}_1$ - средние значения f_1 и ω_1 на рассматриваемом интервале времени. Таким образом, погрешностям порядка ε в значениях производных $\dot{a}$ и $\dot{\psi}$ соответствуют погрешности нулевого порядка в значениях самих амплитуды и фазы. Поэтому для достаточно больших интервалов времени в качестве первого и второго приближений нужно брать приближения:

$\xi = a\cos\psi,\ \dot{a} = \varepsilon f_1(a),\ \dot{\psi} = \omega_0 + \varepsilon\omega_1(a)$;

$\xi = a\cos\psi + \varepsilon\xi_1(a,\psi),\ \dot{a} = \varepsilon f_1(a) + \varepsilon^2 f_2(a),\ \dot{\psi} = \omega_0 + \varepsilon\omega_1(a) + \varepsilon^2\omega_2(a)$.

Итак, физическими особенностями нелинейных колебаний являются:

1. в спектре собственных частот наряду с основным тоном появляются обертоны, т.е. колебания с частотами, кратными основной частоте собственных колебаний;
2. основная частота колебаний перестает быть независимой от амплитуды, т.е нарушается изохронность собственных колебаний;
3. не выполняется принцип суперпозиции, т.е. общее решение нельзя представить в виде линейной комбинации частных решений;
4. возникают из-за нелинейности комбинационные колебания со сложными частотами.

Нелинейные колебания играют важную роль в радиотехнике, акустике, теории молекулярных спектров, рассеянии света.

ТЕМА 14. Общие свойства одномерного движения. Движение финитное и инфинитное. Потенциальные ямы и барьеры.

Одномерное движение – движение в случае одной степени свободы, т.е. движение, описываемое одной обобщенной координатой.

Пусть потенциальная энергия системы имеет вид.

E - полная энергия, т.е. $E = T + \Pi$. Тогда все пространство делится на четыре области:

I	$-\infty < q < q_1$	$E < \Pi$	$T = E - \Pi < 0$	v - мнимое	Движения нет	
II	$q_1 < q < q_2$	$E > \Pi$	$T = E - \Pi > 0$	v - действительное	Движение	финитное

					есть	
III	$q_2 < q < q_3$	$E < П$	$T = E - П < 0$	v - мнимое	Движения нет	
IV	$q_3 < q < +\infty$	$E > П$	$T = E - П > 0$	v - действительное	Движение есть	инфинитное

Рассмотрим области, где движение есть.

Область II. При $q = q_1$ $E = \Pi$, т.е. $T = 0$, $v = 0$, остановка, но сила $Q = -\dfrac{\partial \Pi}{\partial q} \neq 0$ направлена в сторону убывания Π, из-за силы. Значит, есть ускорение $a \neq 0$, значит, в следующий момент $v \neq 0$, т.е. v направлено в сторону силы, и точка едет внутрь области II с ускорением a. При $q = q_{\min}$ будет $Q = -\dfrac{\partial \Pi}{\partial q_{\min}} = 0$, экстремум, т.е. $v \neq 0$, скорость максимальна. Но $a = 0$ и точка едет по инерции, тогда при $q > q_{\min}$ $Q = -\dfrac{\partial \Pi}{\partial q} \neq 0$ и направлена в сторону убывания Π, значит, движение будет замедляться, и при $q = q_2$ $E = \Pi$, $T = 0$, $v = 0$ - точка остановки, но $Q \neq 0$, направлено во внутрь области в сторону убывания Π, т.е. точка после остановки едет назад во внутрь области II. Точка в области II имеет колебательные движения между точками q_1, q_2. Поэтому область II называется потенциальной ямой, из которой точка не может выбраться. Области I и III, где Π выше, называются потенциальными барьерами. В области II движение называется финитным. Аналогично, в области IV точка будет двигаться от q_3 до $+\infty$ ускоренно, т.к. $Q = -\dfrac{\partial \Pi}{\partial q} \neq 0$, т.е. движение будет неограниченным с одной стороны. Такое движение называют инфинитным.

ТЕМА 15. Движение в центральном поле. Законы сохранения. Законы Кеплера. Задача двух тел. Приведенная масса. Задача Кеплера.

Движение в центральном поле.

Центральным полем называется область пространства, в каждой точке которой действует сила, линия действия которой проходит через одну и ту же точку, называемую центром поля.

Это такое поле, в котором потенциальная энергия зависит только от расстояния до некоторой точки поля, называемой центром поля, т.е. $\Pi = \Pi(r)$.

Секторная скорость.

$|d\vec{\sigma}|$ - площадь треугольника. $|d\vec{\sigma}| = \dfrac{1}{2}|\vec{r}|dh$, $dh = |d\vec{r}|\sin(\angle d\vec{r}, \vec{r})$, т.е $|d\vec{\sigma}| = \dfrac{1}{2}[\vec{r}\ d\vec{r}]$ - вектор бесконечно малой площади. Введем время, получим секторную скорость: $\dfrac{d\vec{\sigma}}{dt} = \dfrac{1}{2}[\vec{r}\ \vec{v}]$. Секторная скорость связана с обычной скоростью через векторное произведение. Физический смысл векторной скорости: секторная скорость – скорость заметания площади радиусом – вектором материальной точки движущейся в центральном поле.

Законы сохранения.

Закон сохранения кинетического момента в центральном поле.

По теореме о кинетическом моменте $\frac{d\vec{L}_o}{dt} = \sum \vec{M}_o^e$, где точка O - центр поля. По определению центрального поля внешние силы проходят через центр поля, значит момент каждой силы относительно центра поля равен нулю: $\frac{d\vec{L}_o}{dt} = 0$, следовательно, $\vec{L}_o = \overrightarrow{const}$ или $[\vec{r}m\vec{v}] = \overrightarrow{const}$.

Закон сохранения секторной скорости в центральном поле.

По закону сохранения кинетического момента в центральном поле $\vec{L}_o = \overrightarrow{const}$ или $[\vec{r}m\vec{v}] = \overrightarrow{const}$ или $m[\vec{r}\ \vec{v}] = \overrightarrow{const}$. Разделим на m и умножим на $\frac{1}{2}$, получим $\frac{1}{2}[\vec{r}\ \vec{v}] = \overrightarrow{const}$ или $\frac{d\vec{\sigma}}{dt} = \overrightarrow{const}$. Секторная скорость в центральном поле остается постоянной по величине и направлению.

Направление секторной скорости определяется по правилу векторного произведения, т.е. $\frac{d\vec{\sigma}}{dt}$ - вектор перпендикулярный каждому из перемножаемых векторов, т.е. перпендикулярен плоскости движения частицы в центральном поле, причем, направлен в ту сторону, откуда движение вокруг центра поля видится против часовой стрелки. Обозначается в центре поля. Измеряется в (м^2/с).

Из закона сохранения секторной скорости, следует, что частица в центральном поле двигается в одной плоскости, т.к. секторная скорость не меняется по направлению, т.е. движение частицы в центральном поле является плоским движением.

Законы Кеплера.

Законы Кеплера сформулированы на базе обобщения экспериментальных данных.

1. Все планеты солнечной системы двигаются по эллипсам, в одном из фокусов которых находится Солнце.
2. Планеты солнечной системы за равные промежутки времени заметают равные площади. Из этого закона следует, что вблизи Солнца планета проходит с большей скоростью, чем в дальней части орбиты. Т.е. скорость меняется при изменении расстояния.
3. При движении планет солнечной системы отношение квадратов их периодов к кубам расстояния от них до Солнца остается постоянным $\frac{\tau^2}{r^3} = const$.

Каждый из законов Кеплера выполняется для всех планет солнечной системы.

Вывод третьего закона Кеплера из закона всемирного тяготения и законов Ньютона.

По второму закону Ньютона $m\vec{a} = \vec{F}$. В центральном поле сила проходит через центр поля и является центростремительной, т.е. сила направлена к центру поля, т.е. по нормали $\vec{n}$ к траектории. Спроецируем уравнение второго закона Ньютона на нормаль $\vec{n}$: $\frac{m}{r}v^2 = \gamma\frac{mM}{r^2}$, $v = \omega r = \frac{2\pi r}{\tau}$. Получаем $\frac{\tau^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{\gamma M}$.

Этот вывод показывает, что масса планеты не входит в формулу, следовательно, константа зависит только от массы Солнца, т.е. одинакова для всех планет солнечно системы.

Задача двух тел.

Это задача о взаимодействии двух материальных точек между собой, т.е. без учета любых других взаимодействий.

Используем второй закон Ньютона для каждой из материальных точек: $\begin{cases} m_1\ddot{\vec{r}}_1 = \vec{F}_{12} \\ m_2\ddot{\vec{r}}_2 = \vec{F}_{21} \end{cases}$. Из третьего закона Ньютона $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$, следовательно: $\begin{cases} m_1\ddot{\vec{r}}_1 = \vec{F}_{12} \\ m_2\ddot{\vec{r}}_2 = -\vec{F}_{12} \end{cases}$.

Перейдем к системе центра масс: $\vec{r}_c = \frac{m_1 r_1 + m_2 r_2}{m_1 + m_2}$. Но в системе, где начало в центре масс, $\vec{r}_c = 0$, то $m_1 r_1 + m_2 r_2 = 0$. Введем вместо двух векторов $\vec{r}_1, \vec{r}_2$ один $\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$, т.е. $\vec{r}_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2}\vec{r}$, $\vec{r}_2 = -\frac{m_1}{m_1 + m_2}\vec{r}$. Подставим во второй закон Ньютона:

$\begin{cases} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}\ddot{\vec{r}} = \vec{F}_{12} \\ -\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}\ddot{\vec{r}} = -\vec{F}_{12} \end{cases}$. Это означает, что в системе центра инерции, движение двух, взаимодействующих между собой, материальных точек описывается только одним уравнением: $\mu\ddot{\vec{r}} = \vec{F}$, где $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ - приведенная масса. Задача двух тел сводится к движению одной материальной точки массы μ в центральном поле с центром в центре инерции.

Приведенная масса.

Приведенной массой называется масса, вычисленная по формуле $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$.

Возможны случаи:

1. $m_1 >> m_2$, тогда $\mu \approx m_2$. Т.е. в тех случаях, когда одна из частиц много меньше другой, приведенная масса равна этой малой массе. Это наблюдается в солнечной системе, т.к. масса каждой планеты много меньше массы Солнца, следовательно, при движении планеты вокруг Солнца, можно приведенную массу считать равной массе планеты.

2. $m_1 = m_2 = m$, тогда $\mu = \frac{m}{2}$. Т .е при равенстве масс частиц приведенная масса равна половине массы частицы.

Задача Кеплера.

Важнейшим случаем центральных полей являются поля, в которых потенциальная энергия обратно пропорциональна r и соответственно силы – обратно пропорциональны r^2. Сюда относятся ньютоновские поля тяготения и кулоновские электростатические поля; первые, как известно, имеют характер притяжения, а вторые могут быть как полями притяжения, так и отталкивания.

Рассмотрим сначала поле притяжения, в котором $\Pi = -\dfrac{\alpha}{r}$ с положительной постоянной α. График «эффективной» потенциальной энергии $\Pi_{эфф} = -\dfrac{\alpha}{r} + \dfrac{M^2}{2mr^2}$ имеет вид:

При $r \to 0$ она обращается в $+\infty$, а при $r \to \infty$ стремится к нулю со стороны отрицательных значений; при $r = \dfrac{M^2}{\alpha m}$ она имеет минимум, равный $\left(\Pi_{эфф}\right)_{\min} = -\dfrac{\alpha^2 m}{2M^2}$. Из этого графика сразу очевидно, что при $E \geq 0$ движение частицы будет инфинитным, а при $E < 0$ - финитным.

Форма траектории получается с помощью общей формулы $\varphi = \int \dfrac{\frac{M}{r^2}dr}{\sqrt{2m\left[E - \Pi(r)\right] - \frac{M^2}{r^2}}} + const$. Подставляя в нее $\Pi = -\dfrac{\alpha}{r}$ и производя интегрирование, получим: $\varphi = \arccos\dfrac{\frac{M}{r} - \frac{m\alpha}{M}}{\sqrt{2mE + \frac{m^2\alpha^2}{M^2}}} + const$. Выбирая начало отсчета угла φ так, чтобы $const = 0$, и вводя обозначения $p = \dfrac{M^2}{m\alpha}$, $e = \sqrt{1 + \dfrac{2EM^2}{m\alpha^2}}$, перепишем формулу траектории в виде: $\dfrac{p}{r} = 1 + e\cos\varphi$. Это уравнение конического сечения с фокусом в начале координат; p и e - так называемы фокальный параметр и эксцентриситет орбиты. Сделанный нами выбор начала отсчета φ заключается как видно из $\dfrac{p}{r} = 1 + e\cos\varphi$, в том, что точка с $\varphi = 0$ является ближайшей к центру.

В эквивалентной задаче двух тел, взаимодействующих по закону $\Pi = -\dfrac{\alpha}{r}$, орбита каждой из частиц тоже представляет собой коническое сечение с фокусом в их общем центре инерции.

Из введенных обозначений видно, что при $E < 0$ эксцентриситет $e < 1$, т.е. орбита является эллипсом и движение финитно. Где большая и малая полуоси эллипса $a = \dfrac{p}{1 - e^2} = \dfrac{\alpha}{2|E|}$, $b = \dfrac{p}{\sqrt{1 - e^2}} = \dfrac{M}{\sqrt{2m|E|}}$.Наименьшее допустимое значение энергии совпадает с $\left(\Pi_{эфф}\right)_{\min} = -\dfrac{\alpha^2 m}{2M^2}$, при этом $e = 0$, т.е. эллипс обращается в окружность. Отметим, что большая полуось эллипса зависит только от энергии (но не от момента) частицы. Наименьшее и наибольшее расстояния до центра поля (фокуса эллипса) равны: $r_{\min} = \dfrac{p}{1+e} = a(1-e)$, $r_{\max} = \dfrac{p}{1-e} = a(1+e)$. Эти выражения можно было бы получить и непосредственно как корни уравнения $\Pi_{эфф}(r) = E$.

Время обращения по эллиптической орбите, т.е. период движения T, удобно определить с помощью закона сохранения момента в форме «интеграла площадей» $M = 2m\dot{f}$. Интегрируя, получим: $2mf = TM$, где f - площадь орбиты. Для эллипса $f = \pi ab$, тогда: $T = 2\pi a^{3/2}\sqrt{\dfrac{m}{\alpha}} = \pi\alpha\sqrt{\dfrac{m}{2|E|^2}}$.
Отметим, что период зависит только от энергии частицы. При этом квадрат периода пропорционален кубу линейных размеров орбиты (третий закон Кеплера).

При $E \geq 0$ движение инфинитно. Если $E > 0$, то эксцентриситет $e > 1$, т.е. траектория является гиперболой, огибающей центр поля (фокус). Ближайшее расстояние до центра: $r_{\min} = \dfrac{p}{e+1} = a(e-1)$, где $a = \dfrac{p}{e^2-1} = \dfrac{\alpha}{2E}$ - полуось гиперболы.

В случае же $E = 0$ эксцентриситет $e = 1$, т.е. частица движется по параболе, с минимальным расстоянием $r_{\min} = \dfrac{p}{2}$. Этот случай осуществляется, если частица начинает свое движение из состояния покоя на бесконечности.

Обратимся к движению в поле отталкивания, в котором $\Pi = \dfrac{\alpha}{r}$ ($\alpha > 0$). В этом случае эффективная потенциальная энергия $\Pi_{эфф} = \dfrac{\alpha}{r} + \dfrac{M^2}{2mr^2}$ монотонно убывает от $+\infty$ до нуля при изменении r от нуля до ∞. Энергия частицы может быть только положительной и движение всегда инфинитно. Все вычисления для этого случая в точности аналогичны производимым ранее. Траектория является гиперболой (или параболой при $E = 0$): $\dfrac{p}{r} = -1 + e\cos\varphi$. Она проходит мимо центра поля. Минимальное расстояние до центра $r_{\min} = \dfrac{p}{e-1} = a(e+1)$.

ТЕМА 16. Система многих взаимодействующих частиц. Рассеяние частиц.

Упругие столкновения частиц.

Уже сами по себе законы сохранения импульса и энергии позволяют сделать во многих случаях ряд важных заключений о свойствах различных механических процессов. При этом особенно существенно то обстоятельство, что эти свойства совершенно не зависят от конкретного рода взаимодействия между участвующими в процессе частицами.

Рассмотрим упругое столкновение двух частиц, т. е. столкновение, при котором внутренние состояния частиц не меняются. В силу этого свойства при применении к упругому столкновению закона сохранения энергии можно не учитывать внутренней энергии частиц.

Будем называть лабораторной, систему отсчета, в которой одна из частиц (пусть это будет частица m_2) до столкновения покоилась, а другая m_1 двигалась со скоростью v. Проще всего, однако, столкновение выглядит в другой системе отсчета, в которой покоится центр инерции обеих частиц (система центра инерции); значения величин в этой системе будем отличать индексом 0. Скорости частиц в системе центра инерции связаны со скоростью v в лабораторной системе соотношениями $v_{10} = \frac{m_2}{m_1 + m_2} v$, $v_{20} = \frac{m_1}{m_1 + m_2} v$.

В силу закона сохранения импульса импульсы обеих частиц остаются после столкновения равными по величине и противоположными по направлению, а в силу закона сохранения энергии остаются неизменными и их абсолютные величины. Таким образом, результат столкновения сводится в системе центра инерции к повороту скоростей обеих частиц, остающихся взаимно противоположными и неизменными по величине. Если обозначить посредством n_0 единичный вектор в направлении скорости частицы m_1 после столкновения, то скорости обеих частиц после столкновения (отличаем их штрихом) будут: $v'_{10} = \frac{m_2}{m_1 + m_2} v n_0$, $v'_{20} = \frac{m_1}{m_1 + m_2} v n_0$.

Чтобы возвратиться к лабораторной системе отсчета, надо добавить к этим выражениям скорость V центра инерции. Таким образом, для скоростей частиц в лабораторной системе после столкновения получаем:

$$v'_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} v n_0 + \frac{m_1}{m_1 + m_2} V, \quad v'_1 = \frac{m_1}{m_1 + m_2} v n_0 + \frac{m_2}{m_1 + m_2} V$$

Этим исчерпываются сведения, которые можно получить о столкновении, исходя из одних только законов сохранения. Направление же вектора n_0 зависит от закона взаимодействия частиц и их взаимного расположения при столкновении.

Рассеяние частиц.

Полное определение результата столкновения двух частиц (определение угла χ) требует решения уравнений движения с учетом конкретного закона взаимодействия частиц.

В соответствии с общим правилом будем рассматривать сначала эквивалентную задачу об отклонении одной частицы с массой m в поле $\Pi(r)$ неподвижного силового центра (расположенного в центре инерции частиц).

Траектория частицы в центральном поле симметрична по отношению к прямой, проведенной в ближайшую к центру точку орбиты. Поэтому обе асимптоты орбиты пересекают указанную прямую под одинаковыми углами. Если обозначить эти углы посредством φ_0, то угол χ отклонения частицы при ее пролетании мимо центра есть, как видно из рисунка, $\chi = |\pi - 2\varphi_0|$. Угол же φ_0 определяется интегралом $\varphi_0 = \int\limits_{r_{\min}}^{\infty} \frac{\frac{M}{r^2}dr}{\sqrt{2m[E - \Pi(r)] - \frac{M^2}{r^2}}}$, взятым между ближайшим к центру и бесконечно удаленным положениям частицы. $r_{\min}$ является корнем выражения, стоящего под знаком радикала.

При инфинитном движении, с которым мы имеем здесь дело, удобно ввести вместо постоянных E и M другие - скорость v_∞ частицы на бесконечности и так называемое прицельное расстояние ρ. Последнее представляет собой длину перпендикуляра, опущенного из центра на направление v_∞, т.е. расстояние, на котором частица прошла бы мимо центра, если бы силовое поле отсутствовало. Энергия и момент выражаются через эти величины согласно $E = \frac{mv_\infty^2}{2}$, $M = m\rho v_\infty$, а φ_0 принимает вид $\varphi_0 = \int\limits_{r_{\min}}^{\infty} \frac{\rho \frac{dr}{r^2}}{\sqrt{1 - \frac{\rho^2}{r^2} - \frac{2\Pi}{mv_\infty^2}}}$ и определяет вид χ от ρ.

В физических применениях приходится обычно иметь дело не с индивидуальным отклонением частицы, а, как говорят, с рассеянием целого пучка одинаковых частиц, падающих на рассеивающий центр с одинаковой скоростью v_∞. Различные частицы в пучке обладают различными прицельными расстояниями и соответственно рассеиваются под различными углами χ. Обозначим посредством dN число частиц, рассеиваемых в единицу времени на углы, лежащие в интервале между χ и $\chi + d\chi$. Само по себе это число неудобно для характеристики процесса рассеяния, так как оно зависит от плотности падающего пучка (пропорционально ей). Поэтому введем отношение $d\sigma = \frac{dN}{n}$, где n - число частиц, проходящих в единицу времени через единицу площади поперечного сечения пучка (мы предполагаем, естественно, что пучок однороден по всему своему сечению). Это отношение имеет размерность площади и называется эффективным сечением (или просто сечением) рассеяния. Оно всецело определяется видом рассеивающего поля и является важнейшей характеристикой процесса рассеяния.

Будем считать, что связь между χ и ρ - взаимно однозначна; это так, если угол рассеяния является монотонно убывающей функцией прицельного расстояния. В таком случае рассеиваются в заданный интервал углов между χ и $\chi + d\chi$ лишь те частицы, которые летят с прицельным расстоянием в определенном интервале между $\rho(\chi)$ и $\rho(\chi) + d\rho(\chi)$. Число таких частиц равно произведению n на площадь кольца между окружностями с радиусами ρ и $\rho + d\rho$, т. е. $dN = 2\pi\rho d\rho \cdot n$. Поэтому эффективное сечение $d\sigma = 2\pi\rho d\rho$.

Чтобы найти зависимость эффективного сечения от угла рассеяния, достаточно переписать это выражение в виде $d\sigma = 2\pi\rho(\chi)\left|\frac{d\rho(\chi)}{d\chi}\right|d\chi$. Мы пишем здесь абсолютное значение производной $d\rho/d\chi$ имея в виду, что она может быть отрицательной (как это обычно бывает). Часто относят $d\sigma$ не к элементу плоского угла $d\chi$, а к элементу телесного угла do, Телесный угол между конусами с углами раствора χ и $\chi + d\chi$ есть $do = 2\pi \sin\chi d\chi$. Поэтому имеем: $d\sigma = \frac{\rho(\chi)}{\sin\chi}\left|\frac{d\rho}{d\chi}\right|do$.

Возвращаясь к фактической задаче о рассеянии пучка частиц не на неподвижном силовом центре, а на других первоначально покоившихся частицах, мы можем сказать, что формула $d\sigma = 2\pi\rho(\chi)\left|\frac{d\rho(\chi)}{d\chi}\right|d\chi$ определяет эффективное сечение в зависимости от угла рассеяния в системе центра инерции. Для нахождения же эффективного сечения в зависимости от угла рассеяния θ в лабораторной системе надо выразить в этой формуле χ через θ. При этом получаются выражения как для сечения рассеяния падающего пучка частиц (χ выражено через θ_1), так и для частиц, первоначально покоившихся (χ выражено через θ_2).

Формула Резерфорда.

Одно из важнейших применений полученных выше формул - рассеяние заряженных частиц в кулоновском поле.

Положив в $\varphi_0 = \int\limits_{r_{\min}}^{\infty} \frac{\rho \frac{dr}{r^2}}{\sqrt{1 - \frac{\rho^2}{r^2} - \frac{2\Pi}{mv_\infty^2}}}$ $\Pi = \frac{\alpha}{r}$ и производя элементарное интегрирование, получим: $\varphi_0 = \arccos \frac{\frac{\alpha}{mv_\infty^2\rho}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\alpha}{mv_\infty^2\rho}\right)^2}}$, откуда $\rho^2 = \frac{\alpha^2}{m^2 v_\infty^4} tg^2\varphi_0$ или, вводя $\varphi_0 = (\pi - \chi)/2$: $\rho^2 = \frac{\alpha^2}{m^2 v_\infty^4} ctg^2 \frac{\chi}{2}$.

Следовательно, получим: $d\sigma = \pi\left(\frac{\alpha}{mv_\infty^2}\right)^2 \frac{\cos\frac{\chi}{2}}{\sin^2\frac{\chi}{2}} d\chi$ или $d\sigma = \left(\frac{\alpha}{2mv_\infty^2}\right)^2 \frac{do}{\sin^4\frac{\chi}{2}}$ - формула Резерфорда. Отметим, что эффективное сечение не зависит от знака α, так что полученный результат относится в равной степени к кулоновскому полю отталкивания и притяжения.

Формула Резерфорда дает эффективное сечение в системе отсчета, в которой покоится центр инерции сталкивающихся частиц. Для частиц, первоначально покоившихся, подставляя $\chi = \pi - \theta_2 / 2$ в $d\sigma = \pi\left(\frac{\alpha}{mv_\infty^2}\right)^2 \frac{\cos\frac{\chi}{2}}{\sin^2\frac{\chi}{2}} d\chi$, получим: $d\sigma_2 = 2\pi\left(\frac{\alpha}{mv_\infty^2}\right)^2 \frac{\sin\theta_2}{\cos^3\theta_2} d\theta_2 = \left(\frac{\alpha}{mv_\infty^2}\right)^2 \frac{do_2}{\cos^3\theta_2}$. Для падающих же частиц преобразование приводит в общем случае к весьма громоздкой формуле. Отметим лишь два частных случая.

Если масса m_2 рассеивающей частицы велика по сравнению с массой m_1 рассеиваемой частицы, то $\chi \approx \theta_1$, а $m \approx m_1$, так что $d\sigma_1 = \left(\frac{\alpha}{4E_1}\right)^2 \frac{do_1}{\cos^4\frac{\theta_1}{2}}$, где $E_1 = m_1 v_\infty^2 / 2$ - энергия падающей частицы.

Если массы обеих частиц одинаковы ($m_1 = m_2,\ m = m_1/2$), то получаем: $d\sigma_1 = 2\pi\left(\frac{\alpha}{E_1}\right)^2 \frac{\cos\theta_1}{\sin^3\theta_1} d\theta_1 = \left(\frac{\alpha}{E_1}\right)^2 \frac{\cos\theta_1}{\cos^4\theta_1} do_1$.

Если не только массы обеих частиц равны, но эти частицы вообще тождественны, то не имеет смысла различать после рассеяния первоначально двигавшиеся от первоначально покоившихся частиц. Общее эффективное сечение для всех частиц мы получим, складывая $d\sigma_1$ и $d\sigma_1$ и заменяя θ_1 и θ_2 общим значением θ: $d\sigma = \left(\frac{\alpha}{E_1}\right)^2 \left(\frac{1}{\sin^4\theta} + \frac{1}{\cos^4\theta}\right) \cos\theta do$.

Вернемся к $d\sigma = \pi\left(\frac{\alpha}{mv_\infty^2}\right)^2 \frac{\cos\frac{\chi}{2}}{\sin^2\frac{\chi}{2}} d\chi$ и определим с ее помощью распределение рассеянных частиц по теряемой ими в результате столкновения энергии. При произвольном соотношении между массами рассеиваемой (m_1) и рассеивающей (m_2) частиц, приобретаемая последней скорость выражается через угол рассеяния в системе центра инерции посредством $v_2' = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_\infty \sin\frac{\chi}{2}$. Соответственно, приобретаемая этой частицей, а тем самым и теряемая частицей m_1 энергия равна $\varepsilon = \frac{m_2 v_2'^2}{2} = \frac{2m^2}{m_2} v_\infty^2 \sin^2 \frac{\chi}{2}$.

Выразив отсюда $\sin\frac{\chi}{2}$ через ε и подставив в $d\sigma = \pi\left(\frac{\alpha}{mv_\infty^2}\right)^2 \frac{\cos\frac{\chi}{2}}{\sin^2\frac{\chi}{2}} d\chi$,

получаем: $d\sigma = 2\pi \frac{\alpha^2}{m_2 v_\infty^2} \frac{d\varepsilon}{\varepsilon^2}$.

Эта формула отвечает на поставленный вопрос, определяя эффективное сечение как функцию от потери энергии ε; последняя пробегает при этом значения от нуля до $\varepsilon_{\max} = 2m^2 v_\infty^2 / m_2$.

ТЕМА 17. Действие по Гамильтону. Принцип наименьшего действия. Теорема Эмми Нетер.

Действие по Гамильтону.

Действием называется интеграл от функции Лагранжа по времени: $S = \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t) dt$. Измеряется в (Дж*с).

Принцип минимального действия.

Перемещение механической системы из одного состояния в другое, осуществляется по той траектории, которая соответствует минимальному действию, т.е. $\delta S = 0$.

Доказательство: $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} - \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} = 0$. В точках $\delta q_\alpha\big|_{t=t_1} = 0$ и $\delta q_\alpha\big|_{t=t_2} = 0$, т.к. в эти моменты положение системы строго фиксировано и координаты имеют определенное значение и не варьируются. Из определения действия $S = \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t) dt$, варьируем: $\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \delta L dt$.

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \sum_\alpha \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}\right) dt = \int_{t_1}^{t_2} d\left(\sum_\alpha \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} \delta q_\alpha\right) = \sum_\alpha \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} \delta q_\alpha \Big|_{t_1}^{t_2} = \sum_\alpha \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}\Big|_{t_2} (\delta q_\alpha)\Big|_{t_2} - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}\Big|_{t_1} (\delta q_\alpha)\Big|_{t_1}\right] = 0 .$$

Т.е. $\delta S = 0$ - принцип минимального действия.

Теорема Эмми Нетер.

Существуют такие преобразования, которые оставляют инвариантным действие и ковариантными дифференциальные уравнения, соответствующие этому действию. Это следующие преобразования: 1. инверсия времени, 2. инверсия координат, 3. параллельный перенос – трансляция (перенос начала координат), 4. поворот осей координат, 5. точечные преобразования.

Все эти преобразования вытекают из свойств пространства и времени. Классическое пространство – время, благодаря своим свойствам, допускает массу преобразований, при которых действие остается инвариантом, т.е. не меняется. Поэтому описание движения с помощью действия исключительно удобно в математическом отношении.

Дифференциальные уравнения называются инвариантными относительно каких-либо преобразований, если после проведения преобразования дифференциальное уравнение в новых переменных имеет точно такой же вид, как в прежних переменных. Если при преобразовании инвариантным остается только закон, по которому составляется дифференциальное уравнение, то дифференциальное уравнение называется ковариантным относительно этого преобразования. Т.е. ковариантность дифференциального уравнения соответствует инвариантности правила составления этого дифференциального уравнения.

ТЕМА 18. Метод Гамильтона. Канонические уравнения Гамильтона. Функция Гамильтона. Канонические преобразования. Скобки Пуассона. Пространство конфигураций. Фазовое пространство. Теорема Лиувилля.

Метод Гамильтона.

Метод Гамильтона – метод описания движения в независимых переменных p_α, q_α, т.е. через обобщенные импульсы и обобщенные координаты. Механическое состояние системы, при этом описывает функция Гамильтона $H(p_\alpha, q_\alpha, t) = T + \Pi$, т.е. функция Гамильтона – полная механическая энергия системы. Функция Гамильтона – функция, удовлетворяющая уравнениям Гамильтона: $\frac{\partial H}{\partial q_\alpha} = -\dot{p}_\alpha, \frac{\partial H}{\partial p_\alpha} = \dot{q}_\alpha$. Метод Гамильтона удобнее метода Лагранжа, т.к. уравнения первого порядка. На этом методе стоит квантовая механика и классическую механику логичнее рассматривать через метод Гамильтона.

Канонические уравнения Гамильтона.

Выводятся из уравнений Лагранжа. $L = L(q_\alpha, \dot{q}_\alpha)$, полный дифференциал: $dL = \sum_\alpha \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} dq_\alpha + \sum_\alpha \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} d\dot{q}_\alpha$. Имеем: $dL = \sum_\alpha \frac{d}{dt} p_\alpha dq_\alpha + \sum_\alpha p_\alpha d\dot{q}_\alpha$, или $dL = \sum_\alpha \dot{p}_\alpha dq_\alpha + \sum_\alpha \left(d\left(p_\alpha \dot{q}_\alpha\right) - \dot{q}_\alpha dp_\alpha \right)$. По определению полного дифференциала функции Гамильтона: $dH = \sum_\alpha \frac{\partial H}{\partial q_\alpha} dq_\alpha + \sum_\alpha \frac{\partial H}{\partial p_\alpha} dp_\alpha$. Тогда получаем $\sum_\alpha \dot{q}_\alpha dp_\alpha - \sum_\alpha \dot{p}_\alpha dq_\alpha = \sum_\alpha d\left(p_\alpha \dot{q}_\alpha\right) - dL$ или $\sum_\alpha \dot{q}_\alpha dp_\alpha - \sum_\alpha \dot{p}_\alpha dq_\alpha = d\left(\sum_\alpha \left(p_\alpha \dot{q}_\alpha\right) - L \right)$, откуда получаем $\frac{\partial H}{\partial q_\alpha} = -\dot{p}_\alpha, \frac{\partial H}{\partial p_\alpha} = \dot{q}_\alpha$.

Уравнения Гамильтона – уравнения первого порядка. Они симметричны, т.е. справа и лева стоят первые производные, поэтому их называют каноническими уравнениями. Уравнений Гамильтона в два раза больше, чем степеней свободы, $2s$. В уравнения Гамильтона входит функция

$H(p_\alpha, q_\alpha, t) = T + \Pi$, т.е. полная механическая энергия, что более физично и удобнее, чем функция Лагранжа.

Функция Гамильтона.

Это функция, вычисленная по формуле $H = \sum_\alpha (p_\alpha \dot{q}_\alpha) - L$. Функция Гамильтона – полная механическая энергия $H(p_\alpha, q_\alpha, t) = T + \Pi$. Функция Гамильтона удовлетворяет уравнениям Гамильтона $\frac{\partial H}{\partial q_\alpha} = -\dot{p}_\alpha, \frac{\partial H}{\partial p_\alpha} = \dot{q}_\alpha$. Это функция переменных p_α, q_α, t. Уравнения Гамильтона не изменятся, если заменить $H(p_\alpha, q_\alpha, t)$ на $H(p_\alpha, q_\alpha, t) + const$.

Закон сохранения энергии.

Продифференцировав функцию Гамильтона $H(p_\alpha, q_\alpha, t)$ по времени, получим $\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t}$. Т.е., если $\frac{\partial H}{\partial t} = 0$, то $\frac{dH}{dt} = 0$, то $H(p_\alpha, q_\alpha, t) = const = T + \Pi$. Если $\frac{\partial H}{\partial t} = 0$, т.е. время явно не входит в функцию Гамильтона, то полная механическая энергия остается постоянной.

Интегралы движения и скобки Пуассона.

Интегралами движения называются величины, остающиеся постоянными при движении, т.е. это законы сохранения физических величин.

$f = f(p_\alpha, q_\alpha, t)$ - физическая величина, тогда ее производная по t: $\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_\alpha \frac{\partial f}{\partial p_\alpha}\frac{dp_\alpha}{dt} + \sum_\alpha \frac{\partial f}{\partial q_\alpha}\frac{dq_\alpha}{dt}$ или из уравнений Гамильтона: $\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_\alpha \left(\frac{\partial H}{\partial p_\alpha}\frac{\partial f}{\partial q_\alpha} - \frac{\partial H}{\partial q_\alpha}\frac{\partial f}{\partial p_\alpha} \right)$, где $\frac{\partial H}{\partial p_\alpha}\frac{\partial f}{\partial q_\alpha} - \frac{\partial H}{\partial q_\alpha}\frac{\partial f}{\partial p_\alpha} = \{H, f\}$ - скобки Пуассона. Тогда $\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_\alpha \{H, f\}$. Отсюда следует, что $\frac{df}{dt} = 0$, т.е. $f = const$, если одновременно $\frac{\partial f}{\partial t} = 0$ и $\sum_\alpha \{H, f\} = 0$.

Величина f является интегралом движения тогда и только тогда, когда одновременно она явно не зависит от времени и все скобки Пуассона равны нулю.

Свойства скобок Пуассона:

1. $\{f, c\} = 0$;
2. $\{f_1, f_2\} = -\{f_2, f_1\}$;
3. $\{cf_1, f_2\} = c\{f_1, f_2\}$;
4. $\{f_1 + c, f_2\} = \{f_1, f_2\}$;
5. $\{f_1, f_2 + f_3\} = \{f_1, f_2\} + \{f_1, f_3\}$;
6. $\{f_1 f_3, f_2\} = f_1\{f_3, f_2\} + f_3\{f_1, f_2\}$;
7. $\frac{\partial}{\partial t}\{f_1, f_2\} = \left\{\frac{\partial f_1}{\partial t}, f_2\right\} + \left\{f_1, \frac{\partial f_2}{\partial t}\right\}$;

8. $\{f, p_\alpha\} = -\dfrac{\partial f}{\partial q_\alpha}$;

9. $\{f, q_\alpha\} = \dfrac{\partial f}{\partial p_\alpha}$;

10. $\{p_\alpha, q_\alpha\} = 1$;

11. $\{p_i, q_k\}_{i\neq k} = 0$;

12. $\{p_i, q_k\} = \delta_{ik} = \begin{cases} 0, i \neq k \\ 1, i = k \end{cases}$;

13. Тождество Якоби: $\{f_1,\{f_2,f_3\}\} + \{f_2,\{f_3,f_1\}\} + \{f_3,\{f_1,f_2\}\} = 0$;

14. Теорема Пуассона: Если f_1 и f_2 - интегралы движения, то Скобка Пуассона $\{f_1, f_2\}$ - тоже интеграл движения.

Доказательство: Из условия следует: $\begin{cases} \dfrac{\partial f_1}{\partial t} = 0 \\ \{H, f_1\} = 0 \end{cases}$ и $\begin{cases} \dfrac{\partial f_2}{\partial t} = 0 \\ \{H, f_2\} = 0 \end{cases}$, тогда $\dfrac{\partial}{\partial t}(f_1 + f_2) = 0$. Очевидно, что выполняется $\dfrac{\partial}{\partial t}\{f_1, f_2\} = 0$. Используя тождество Якоби получим, что $\{H,\{f_1, f_2\}\} = 0$. Следовательно, $\{f_1, f_2\}$ - тоже интеграл движения.

Пространство конфигураций.

Пространство конфигураций – пространство, по осям которого откладываются обобщенные координаты.

Т.к. число обобщенных координат s, значит, пространство конфигураций является s-мерным.

Это криволинейное пространство Римана, но в бесконечно малых областях его можно считать прямолинейным, т.е. при описании малых колебаний, которые происходят в бесконечно малых областях, это пространство ведет себя как евклидово. Если рассмотреть нестационарные случаи, т.е. случаи, меняющиеся со временем, то пространство конфигураций имеет добавочную ось – ось времени. Т.е. в нестационарном случае пространство конфигураций является $s+1$-мерным.

Фазовое пространство.

Фазовое пространство – это $2s$-мерное пространство, по осям которого откладываются обобщенные импульсы и обобщенные координаты. В нестационарном случае добавляется ось времени и пространство является $2s+1$-мерным. Очевидно, что в методе Гамильтона, в котором независимыми переменными являются p_α, q_α, t, пространственной базой является фазовое пространство. Метод Гамильтона геометрически рассматривается в фазовом пространстве.

Теорема Лиувилля.

Это теорема о сохранении фазового объема при движении механической системы. Очевидно, точка в фазовом пространстве характеризуется набором всех обобщенных импульсов и всех обобщенных координат, значит, точка в фазовом пространстве характеризует состояние механической системы в данный момент. Тогда линия в фазовом пространстве характеризует изменение механического состояния, т.к. у различных точек фазовой линии различное механическое состояние. Замкнутая линия в фазовом пространстве показывает, что механические состояния повторяются при изменении, т.е. это периодические процессы. Элементарный фазовый объем $d\Gamma = dp_1...dp_s dq_1...dq_s$. Тогда объем: $V = \int d\Gamma$, если перейти к фазовым переменным P_α, Q_α, имеем $\int d\Gamma = \int \left| \frac{\partial(p_\alpha, q_\alpha)}{\partial(P_\alpha, Q_\alpha)} \right| dP_1...dP_s dQ_1...dQ_s$, где $\left| \frac{\partial(p_\alpha, q_\alpha)}{\partial(P_\alpha, Q_\alpha)} \right| = 1$.

Лиувилль показал, что якобиан преобразования одних канонических переменных в другие равен единице, что свидетельствует о сохранении фазового объема при движении.

ТЕМА 19. Метод Гамильтона – Якоби. Дифференциальное уравнение Гамильтона – Якоби. Адиабатические инварианты.

Действие как функция координат.

$\delta q_\alpha \big|_{t=t_1} = 0$ и $\delta q_\alpha \big|_{t=t_2} \neq 0$.

Тогда $\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \delta L dt \neq 0$. Выразим это $L = L(q_\alpha, \dot{q}_\alpha)$, значит,

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \delta L dt = \int_{t_1}^{t_2} dt \left(\sum_\alpha \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} \delta q_\alpha + \sum_\alpha \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} \delta \dot{q}_\alpha \right), \text{ тогда}$$

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} \sum_\alpha \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} \delta q_\alpha \right) dt = \sum_\alpha \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} \delta q_\alpha \right) \Big|_{t_1}^{t_2} = \sum_\alpha p_\alpha \delta q_\alpha \Big|_{t_1}^{t_2} = \sum_\alpha p_\alpha \big|_t \delta q_\alpha \big|_t - \sum_\alpha p_\alpha \big|_{t_1} \delta q_\alpha \big|_{t_1}.$$

Следовательно, $\delta S = \sum_\alpha p_\alpha \delta q_\alpha$ или $p_\alpha = \frac{\delta S}{\delta q_\alpha}$. Т.е. S является не только функцией от времени, но и от координат.

Уравнение Гамильтона – Якоби.

По определению действия $\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \delta L dt$ или $L = \frac{dS}{dt}$. С другой стороны $\delta S = \sum_\alpha p_\alpha \delta q_\alpha$, т.е. $p_\alpha = \frac{\delta S}{\delta q_\alpha}$. Используем то, что $S = S(q_\alpha, t)$, тогда имеем: $\frac{dS}{dt} = \frac{\partial S}{\partial t} + \sum_\alpha \frac{\partial S}{\partial q_\alpha} \dot{q}_\alpha$, следовательно, $0 = \frac{\partial S}{\partial t} + H$ - Уравнение Гамильтона – Якоби. Но $H = H(p_\alpha, q_\alpha) = H\left(\frac{\partial S}{\partial q_\alpha}, q_\alpha \right)$.

Общий и полный интеграл.

Общим интегралом дифференциального уравнения в частных производных называется такое решение, которое содержит произвольные функции интегрирования.

Количество произвольных функций интегрирования в общем случае равно порядку дифференциального уравнения в частных производных. Но уравнение Гамильтона – Якоби – это уравнение первого порядка, следовательно, решение будет состоять из одной функции интегрирования.

Для решения физических задач более важное значение имеет не общий интеграл, а полный интеграл.

Полным интегралом дифференциального уравнения называется такое решение, которое содержит столько произвольных констант интегрирования, сколько независимых переменных в данном дифференциальном уравнении.

Уравнение Гамильтона – Якоби $0 = \frac{\partial S}{\partial t} + H$ имеет искомую функцию $S(q_\alpha, t)$, т.е. количество независимых переменных $s+1$, следовательно, $s+1$ константа интегрирования, а именно: константы соответствующие переменным q_α обозначим c_α, но кроме этих констант будет еще одна аддитивная константа C, т.к. подстановка в уравнение Гамильтона – Якоби $S \to S + C$ не нарушит уравнения $\frac{\partial (S+C)}{\partial t} = \frac{\partial S}{\partial t}$, следовательно, S известно с точностью до C. Полный интеграл имеет вид: $S = S(t, q_1, ..., q_s, c_1, ..., c_s) + C$ или $S = S(t, q_\alpha, c_\alpha) + C$.

Преимущество метода Гамильтона – Якоби.

1. Это метод инвариантный, т.к. действие является инвариантом.
2. Это уравнения первого порядка, как и уравнения Гамильтона, но оно только одно.
3. Уравнение решается методом разделения переменных.
4. Из уравнения следует, что $-\frac{\partial S}{\partial t} = H$, т.е. функцию Гамильтона можно найти простым дифференцированием, не решая уравнений Гамильтона.
5. Главное уравнение квантовой механики, уравнение Шредингера, переходит в уравнение Гамильтона – Якоби при $h \to 0$. Т.е. уравнение Гамильтона – Якоби показывает, что классическая физика является предельным случаем квантовой механики.

Адиабатические инварианты.

Рассмотрим механическую систему совершающую одномерное финитное движение и характеризующуюся некоторым параметром λ, определяющим свойства сомой системы или внешнего поля, в котором она находится.

Предположим, что параметр λ под влиянием каких-либо внешних причин медленно (адиабатически) меняется со временем; под «медленным» имеется в виду такое изменение, при котором λ мало меняется за время периода τ движения системы: $\tau \frac{d\lambda}{dt} << \lambda$.

Такая система не является замкнутой и ее энергия E не сохраняется. Но в силу медленности изменения λ можно утверждать, что скорость $\dot{E}$ изменения энергии пропорциональна скорости $\dot{\lambda}$ изменения параметра λ. Это значит, что энергия системы ведет себя при изменении λ как некоторая функция λ. Другими словами, существует такая комбинация из E и λ, которая остается при движении системы неизменной; эту величину называют адиабатическим инвариантом.

Пусть $H(p,q;\lambda)$ - гамильтонова функция системы, зависящая от параметра λ. Согласно формуле $\frac{dH}{dt}=\frac{\partial H}{\partial t}$ полная производная энергии системы по времени $\frac{dE}{dt}=\frac{\partial H}{\partial t}=\frac{\partial H}{\partial \lambda}\frac{d\lambda}{dt}$. Усредним это равенство по периоду движения; учитывая медленность изменения λ (а с ним и $\dot{\lambda}$), можно вынести $\dot{\lambda}$ за знак усреднения: $\overline{\frac{dE}{dt}}=\frac{d\lambda}{dt}\overline{\frac{\partial H}{\partial \lambda}}$, а в усредняемой функции $\partial H/\partial \lambda$ рассматривать как изменяются величины лишь p и q, но не λ. Другими словами, усреднение происходит по такому движению системы, какое имело бы место при заданном постоянном значении λ.

Запишем усреднение в явном виде: $\overline{\frac{dE}{dt}}=\frac{d\lambda}{dt}\frac{1}{\tau}\int_0^\tau\frac{\partial H}{\partial \lambda}dt$. Согласно уравнению Гамильтона $\dot{q}=\frac{\partial H}{\partial p}$ имеем: $dt=\frac{dq}{\frac{\partial H}{\partial p}}$. С помощью этого равенства заменяем интегрирование по времени на интегрирование по координате, причем и период τ записываем в виде: $\tau=\int_0^\tau dt=\oint\frac{dq}{\frac{\partial H}{\partial p}}$; знаком $\oint$ здесь обозначается интегрирование по полному изменению координаты («вперед» и «назад») за время периода. Таким образом $\overline{\frac{dE}{dt}}=\frac{d\lambda}{dt}\frac{\oint\frac{\partial H/\partial \lambda}{\partial H/\partial p}dq}{\oint\frac{dq}{\partial H/\partial p}}$.

Как было уже указано, интегрирования в этой формуле должны производиться по траектории движения при данном постоянном значении λ. Вдоль такой траектории функция Гамильтона сохраняет постоянной значение E, а импульс является определенной функцией переменной координаты q и двух постоянных независимых параметров E и λ. Понимая импульс именно как такую функцию $p(q;E,\lambda)$ и дифференцируя равенство $H(p,q;\lambda)=E$ по параметру λ, получим: $\frac{\partial H}{\partial \lambda}+\frac{\partial H}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial \lambda}=0$ или $\frac{\partial H/\partial \lambda}{\partial H/\partial p}=-\frac{\partial p}{\partial \lambda}$.

Тогда получим: $\overline{\frac{dE}{dt}}=-\frac{d\lambda}{dt}\frac{\oint\frac{\partial p}{\partial \lambda}dq}{\oint\frac{\partial p}{\partial E}dq}$ или $\oint\left(\frac{\partial p}{\partial E}\overline{\frac{dE}{dt}}+\frac{\partial p}{\partial \lambda}\frac{d\lambda}{dt}\right)dq=0$. Или окончательно: $\overline{\frac{dI}{dt}}=0$, где $I=\frac{1}{2\pi}\oint pdq$, интеграл взятый по траектории движения заданных E и λ. Этот результат показывает, что величина I

остается в рассматриваемом приближении постоянной при изменении параметра λ, т.е. является адиабатическим инвариантом.

Интегралу $I = \frac{1}{2\pi}\oint pdq$ может быть приписан наглядный геометрический смысл, если ввести понятие о фазовой траектории системы – кривой, изображающей зависимость p от q. Для системы, совершающей периодическое движение, фазовая траектория – замкнутая кривая. Интеграл $I = \frac{1}{2\pi}\oint pdq$, взятый вдоль этой кривой, представляет собой заключенную внутри нее площадь.

В качестве примера определим адиабатический инвариант для одномерного осциллятора. Его функция Гамильтона $H = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2 q^2}{2}$, где ω - собственная частота осциллятора. Уравнение фазовой траектории дается законом сохранения энергии $H(p,q) = E$. Это есть эллипс с полуосями $\sqrt{2mE}$ и $\sqrt{\frac{2E}{m\omega^2}}$ и его площадь (деленная на 2π): $I = \frac{E}{\omega}$. Адиабатическая инвариантность этой величины означает, что при медленном изменении параметров осциллятора его энергия меняется пропорционально частоте.

ТЕМА 20. Движение тел переменной массы. Уравнение Мещерского. Формула Циолковского.

Движение тел переменной массы.

Переменная масса описывается в механике через постоянную массу, т.к. считается, что при движении, в случае изменения массы, происходит слипание частиц постоянной массы или отсоединение их.

Уравнение Мещерского.

Количество движения: $\vec{Q}_1 = (\Delta m)\vec{u} + m\vec{v}$, $\vec{Q}_2 = (m + \Delta m)(\vec{v} + \Delta\vec{v})$, тогда $\Delta\vec{Q} = \vec{Q}_2 - \vec{Q}_1 = (m + \Delta m)(\vec{v} + \Delta\vec{v}) - (\Delta m)\vec{u} - m\vec{v}$, за Δt секунд. $\Delta\vec{Q} = \Delta m\vec{v} + m\Delta\vec{v} - (\Delta m)\vec{u}$. При $\Delta t \to 0$ $\frac{\Delta\vec{Q}}{\Delta t} = \frac{\Delta m}{\Delta t}\vec{v} + m\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} - \frac{\Delta m\vec{u}}{\Delta t}$, будет производная $\frac{d\vec{Q}}{dt} = \frac{dm}{dt}\vec{v} + m\frac{d\vec{v}}{dt} - \frac{dm}{dt}\vec{u}$. Или $m\frac{d\vec{v}}{dt} = \sum F^e + \frac{dm}{dt}(\vec{v} - \vec{u})$ - уравнение Мещерского, где $F_{реактивная} = \frac{dm}{dt}(\vec{v} - \vec{u})$, $\frac{dm}{dt}$ - секундный расход топлива, $(\vec{v} - \vec{u})$ - относительная скорость истечения частиц из сопла.

Уравнение Мещерского – второй закон Ньютона для тел с переменной массой.

Формула Циолковского.

Формула Циолковского вытекает из уравнения Мещерского: $m\frac{d\vec{v}}{dt} = \sum F^e + \frac{dm}{dt}(\vec{v} - \vec{u})$, при $\sum F^e = 0$, $(\vec{v} - \vec{u}) = -\vec{u}$. Формула Циолковского выводится при трех условиях: 1 нет внешних сил $\sum F^e = 0$; 2 $\vec{v}_{отн} = -\vec{u}$; 3 полное сгорание топлива, т.е. $M_{корпуса} + M_{топлива} \to M_{корпуса}$.

Тогда имеем: $m\dfrac{d\vec{v}}{dt} = \dfrac{dm}{dt}(-\vec{u})$ или $m\,d\vec{v} = -dm\,\vec{u}$, или $d\vec{v} = -\dfrac{dm}{m}\vec{u}$. Интегрируем от v_0 до v: $\int\limits_{v_0}^{v} d\vec{v} = -\int\limits_{M_k+m}^{M_k} \dfrac{dm}{m}\vec{u}$, получаем: $v - v_0 = -u\ln m\,|_{M_k+m}^{M_k}$ или $v - v_0 = u\ln m\,|_{M_k}^{M_k+m}$, или $v = v_0 + u\ln\left(\dfrac{M_k+m}{M_k}\right)$, или $v = v_0 + u\ln\left(1+\dfrac{m}{M_k}\right)$ - формула Циолковского, где $\dfrac{m}{M_k}$ - число Циолковского.

Эта формула сыграла выдающуюся роль, это главная формула в космонавтике, т.к. она показала, что существуют три пути увеличения скорости для вывода ракеты на орбиту: 1 увеличение v_0; 2 увеличение $\vec{u}$; 3 увеличение $\dfrac{m}{M_k}$. Первые два условия являются наиболее подходящими для практического использования, а значение третьего, т.к. под знаком логарифма, меньше.

ТЕМА 21. Движение в НИСО. Дифференциальные уравнения относительно движения материальной точки в НИСО. Силы инерции в НИСО. Проявление сил инерции на Земле.

Дифференциальные уравнения относительно движения точки в НИСО.

Система ξ, η, ζ - в покое (ИСО). Система x, y, z - движется с ускорением и вращается (НИСО).

По второму закону Ньютона в ИСО: $m\vec{a}_{абс} = \sum \vec{F}$, где по теореме Кориолиса $\vec{a}_{абс} = \vec{a}_{отн} + \vec{a}_{пер} + \vec{a}_{кор}$, следовательно, $m\vec{a}_{отн} = \sum \vec{F} + (-m\vec{a}_{пер}) + (-m\vec{a}_{кор})$, где $(-m\vec{a}_{пер}) = \vec{F}^{ин}_{пер}$, $(-m\vec{a}_{кор}) = \vec{F}^{ин}_{кор}$.

Или $m\underbrace{\vec{a}_{отн}}_{\ddot{\vec{r}}} = \sum \vec{F} + \vec{F}^{ин}_{пер} + \vec{F}^{ин}_{кор}$ - дифференциальные уравнения относительно движения точки в НИСО.

Несмотря на то, что в НИСО законы Ньютона не выполняются, второй закон Ньютона использовать можно, если добавить к действующим силам, силы инерции Кориолиса и переносную.

Силы инерции в НИСО.

Переносная сила.

$\vec{F}^{ин}_{пер} = -m\vec{a}_{пер}$, где $\vec{a}_{пер} = \ddot{\vec{R}}_o + [\vec{\omega}_e[\vec{\omega}_e\vec{r}]] + [\vec{\varepsilon}_e\vec{r}]$. «Минус» означает, что переносная сила инерции направлена против переносного ускорения.

Центробежная сила.

Это часть переносной силы инерции, вычисленная по формуле: $\vec{F}_{цб}^{ин} = -m\vec{a}_{пер}^{n} = -m[\vec{\omega}_e[\vec{\omega}_e\vec{r}]]$. Центробежная сила инерции направлена против нормальной части переносного ускорения. $\left|\vec{F}_{цб}^{ин}\right| = m\vec{\omega}_e^2\rho$.

Сила Кориолиса.

$\vec{F}_{кор}^{ин} = -m\vec{a}_{кор}$, где $\vec{a}_{кор} = 2\left[\vec{\omega}_{пер}^{e}\vec{v}_{пер}^{r}\right]$. Направлена против ускорения Кориолиса.

Проявление сил инерции на Земле.

Земля – это НИСО, т.к. она вращается, следовательно, есть силы инерции. Но вращение очень медленное $\omega_e = \dfrac{2\pi}{\tau} = 0{,}000073$ с$^{-1}$ – бесконечно малая высокого порядка. Поэтому $\left|\vec{F}_{цб}^{ин}\right| = m\vec{\omega}_e^2\rho = 0{,}000073^2 m\rho$ - бесконечно малая высочайшего порядка.

Проявление $\vec{F}_{цб}^{ин}$ на Земле при относительном покое, т.е при $\vec{v}_r = 0$, следовательно, $\vec{F}_{кор}^{ин} = -2m\left[\vec{\omega}^e\vec{v}^r\right] = 0$. При относительном покое – равновесие, значит $m\vec{g} + \vec{N} = 0$. При равновесии $\vec{F}_{тяг} + \vec{F}_{цб} + \vec{N} = 0$. $\vec{F}_{цб}$ на Земле входит в силу тяжести и отдельного учета не требует. Ее влияние состоит в том, что она изменяет направление силы тяжести, т.е. сила тяжести из-за $\vec{F}_{цб}$ не направлена к центру Земли. Т.е. отвес не направлен к центру Земли. $\vec{F}_{цб}$ - изменяет вертикаль, т.е. реальная вертикаль не совпадает с геометрической, направленной в центр.

Проявление $\vec{F}_{кор}$ на Земле. $\vec{F}_{кор}^{ин} = -2m\left[\vec{\omega}^e\vec{v}^r\right]$ - бесконечно малая, поэтому ее влияние можно заметить только при длительном воздействии.

1. При движении по поверхности Земли $\vec{F}_{кор}$ отклоняет тело вправо от движения в северном полушарии и влево в южном.
2. Закон Бэра. Реки в северном полушарии подмывают правые берега, а в южном – левые, следовательно, в северном полушарии правые берега крутые, а в южном – левые. Закон действует тогда, когда оба берега реки имеют одинаковую почвенную структуру.
3. Закон Бейес – Балло. В северном полушарии ветры отклоняются вправо от движения, а в южном – влево.
4. Циклоны и антициклоны. Циклоном называется область низкого атмосферного давления. Антициклоном называется область высокого атмосферного давления. В северном полушарии ветры двигаются против часовой стрелки вокруг области низкого атмосферного давления и по часовой стрелке вокруг области высокого атмосферного давления. Этот закон позволяет определить направление и силу ветра в любой точке земного шара. Силы Кориолиса приводят к тому, что области высокого и низкого атмосферного давления долго сохраняются и даже двигаются как целое.
5. Маятник Фуко. Экспериментально показывает, что плоскость качания маятника поворачивается вправо в северном полушарии.

Плоскость качания маятника в ИСО сохраняется, т.е. плоскость качания маятника относительно звезд сохраняется, а Земля под маятником поворачивается и кажется, что поворачивается маятник, но в обратную сторону.

4. САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА СТУДЕНТОВ

Основными задачами самостоятельной работы студентов являются:

- формирование интереса к познавательной деятельности и навыков самостоятельной работы в профессиональной сфере;

- развитие творческого мышления, способности принимать самостоятельное решение, находить выход из кризисной ситуации;

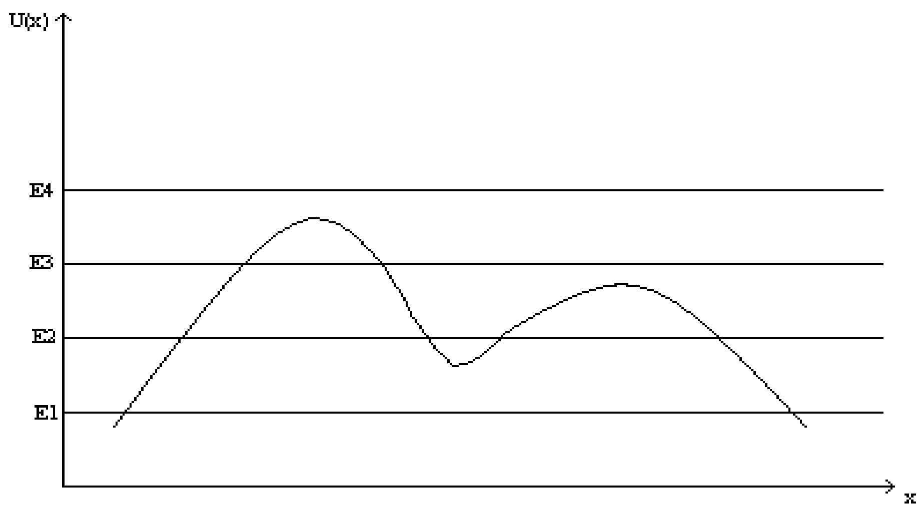
- применение теории к практике.

Самостоятельная работа студента состоит в подготовке к лекциям, практическим занятиям, коллоквиумам, контрольным точкам и экзаменам.

Согласно учебному плану предлагаются для самостоятельной работы некоторые, не рассматриваемые на занятиях частные вопросы, задачи, примеры, индивидуальные задания.

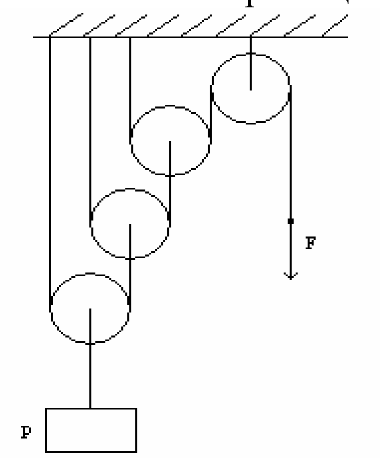
4.1. Задачи для самостоятельного решения.

1. Найти закон движения тела, падающего без начальной скорости. Сопротивление воздуха считать пропорциональным скорости.
2. Точка подвеса математического маятника массы m и длины l движется по горизонтальной прямой по закону $x = \frac{at^2}{2}$. Найти закон движения маятника в системе отсчета, движущейся совместно с точкой подвеса.
3. Провести качественный анализ движения частицы в потенциальном поле $U(x)$ при различных уровнях энергии E.

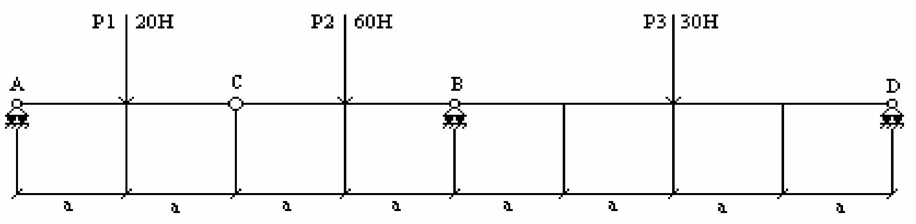


4. Стержень массы m и длины l скользит по сторонам прямого угла без трения. Найти функцию Лагранжа и закон движения.

5. Стержень массы m и длины l может двигаться в вертикальной плоскости в поле тяжести. Один конец стержня скользит по горизонтальной прямой. Найти функцию Лагранжа и закон движения.
6. Частица движется в центральном поле. Доказать, что ее траектория является плоской.
7. Найти функцию Лагранжа для математического маятника и записать уравнение Лагранжа II рода. Определить период малых колебаний.
8. Плоский маятник с массой m_2 и длиной l, точка подвеса которого с массой m_1 может двигаться по горизонтальной прямой, находится в поле тяжести. Найти функцию Лагранжа системы.
9. Найти выигрыш в силе, получаемый с помощью полиспаста, состоящего из неподвижного блока и n подвижных блоков. Использовать принцип возможных перемещений.



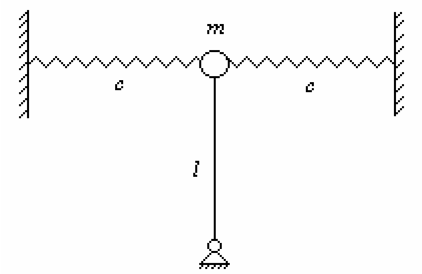
10. Методом возможных перемещений найти реакции опор составной системы:



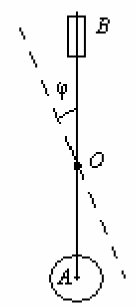
11. Определить функцию Лагранжа для сферического маятника (точка массы m движется в однородном поле тяжести g по сфере радиуса a).
12. Составить функцию Гамильтона для свободной материальной точки в потенциальном поле $\Pi(x, y, z)$.
13. Составить функцию Гамильтона и канонические уравнения Гамильтона для пространственного осциллятора.
14. Составить функцию Лагранжа для пространственного осциллятора.
15. Составить функцию Лагранжа и функцию Гамильтона для свободной частицы массы m в потенциальном поле с осевой симметрией.
16. Составить функцию Лагранжа и функцию Гамильтона для свободной частицы массы m в центрально – симметричном потенциальном поле.

17. Определить функцию Гамильтона для частицы массы m в релятивистском случае, если функция Лагранжа $L = -m_0 c^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$.

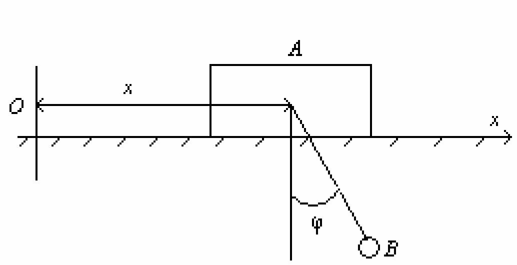
18. Определить кинетическую и потенциальную энергии, функцию Лагранжа, уравнение Лагранжа II рода и период малых колебаний астатического маятника, применяемого в сейсмографах для записи колебаний почвы. Маятник состоит из жесткого стержня длины l, несущего на конце массу m, зажатую между двумя горизонтальными пружинами жесткости c. Массой стержня пренебречь и считать пружины в положении равновесия ненапряженными.



19. Определить период малых колебаний метронома, состоящего из маятника A массы m_1 и добавочного подвижного груза B массы m_2. Момент инерции всей системы измеряется путем смещения подвижного груза B. Расстояние от центра масс маятника A до оси вращения равно s_0, расстояние $OB = s$, момент инерции маятника I_0.



20. Исследовать систему с 2 степенями свободы – эллиптический маятник, состоящий из тела A массы m_1, скользящего без трения, и шарика массы m_2, висящего на конце стержня AB длины l. Массой стержня пренебречь. Составить уравнения Лагранжа эллиптического маятника и определить период малых колебаний.



21. Составить функцию Гамильтона и канонические уравнения Гамильтона для математического маятника массы m и длины l, положение которого определяется углом φ отклонения от вертикали.

22. Составить уравнение Гамильтона – Якоби для свободной частицы массы m, движущейся в вертикальной плоскости xy под действием силы тяжести.
23. Составить дифференциальное уравнение в частных производных Гамильтона – Якоби для физического маятника массы m с моментом инерции I и расстоянием l от оси вращения до центра масс маятника.
24. Составить уравнение Гамильтона – Якоби для математического маятника с массой m и длины l, положение которого определяется углом φ отклонения от вертикали.
25. Определить общее уравнение в квадратурах для материальной точки, движущейся под действием силы, каждая проекция которой зависит только от соответствующей проекции радиус – вектора.
26. Составить функцию Гамильтона для материальной точки, движущейся по цилиндрической поверхности в однородном поле тяжести, параллельном оси цилиндра.

4.2. Курсовые задания.

Курсовое задание К1. Тема: «Кинематика материальной точки»

По заданным уравнениям движения точки M установить вид ее траектории и для момента $t = t_1$ (с) найти положение точки на траектории, ее скорость, полное, касательное и нормальное ускорения, а также радиус кривизны траектории.

Номер варианта	Уравнения движения		t_1, с
	$x = x(t)$, см	$y = y(t)$, см	
1	$-2t^2+3$	$-5t$	0,5
2	$4\cos^2(\pi t/3)+2$	$4\sin^2(\pi t/3)$	1
3	$-\cos(\pi t^2/3)+3$	$\sin(\pi t^2/3)-1$	1
4	$4t+4$	$-4/(t+1)$	2
5	$2\sin(\pi t/3)$	$-3\cos(\pi t/3)+4$	1
6	$3t^2+2$	$-4t$	0,5
7	$3t^2-t+1$	$5t^2-5t/3-2$	1
8	$7\sin(\pi t^2/6)+3$	$2-7\cos(\pi t^2/6)$	1
9	$-3/(t+2)$	$3t+6$	2
10	$-4\cos(\pi t/3)$	$-2\sin(\pi t/3)-3$	1
11	$-4t^2+1$	$-3t$	0,5
12	$5\sin^2(\pi t/6)$	$-5\cos^2(\pi t/6)-3$	1
13	$5\cos(\pi t^2/3)$	$-5\sin(\pi t^2/3)$	1
14	$-2t-2$	$2/(t+1)$	2
15	$4\cos(\pi t/3)$	$-3\sin(\pi t/3)$	1
16	$3t$	$4t^2+1$	0,5
17	$7\sin^2(\pi t/6)-5$	$-7\cos^2(\pi t/6)$	1
18	$1+3\cos(\pi t^2/3)$	$3\sin(\pi t^2/3)+3$	1

19	$-5t^2-4$	$3t$	1
20	$2-3t-6t^2$	$3-3t/2-3t^2$	0
21	$6\sin\left(\pi\, t^2/6\right)-2$	$6\cos\left(\pi\, t^2/6\right)+3$	1
22	$7t^2-3$	$5t$	0,25
23	$3-3t^2+t$	$4-5t^2+5t/3$	1
24	$-4\cos\left(\pi\, t/3\right)-1$	$-4\sin\left(\pi\, t/3\right)$	1
25	$-6t$	$-2t^2-4$	1
26	$8\cos^2\left(\pi\, t/6\right)+2$	$-8\sin^2\left(\pi\, t/6\right)-7$	1
27	$-3-9\sin\left(\pi\, t^2/6\right)$	$-9\cos\left(\pi\, t^2/6\right)+5$	1
28	$4t^2+1$	$-3t$	1
29	$5t^2+5t/3-3$	$3t^2+t+3$	1
30	$2\cos\left(\pi\, t^2/3\right)-2$	$-2\sin\left(\pi\, t^2/3\right)+3$	1

Курсовое задание К3. Тема: «Плоско параллельное движение механизма»

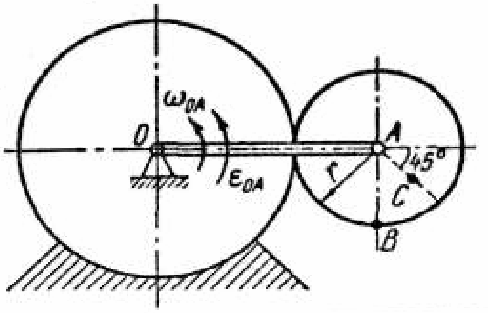
Найти для заданного положения механизма скорости и ускорения точек B и C, а также угловую скорость и угловое ускорение звена, которому эти точки принадлежат.

ω_{OA} и ε_{OA} - угловая скорость и угловое ускорение кривошипа OA при заданном положении механизма; ω_I - угловая скорость колеса I (постоянная); v_A и a_A - скорость и ускорение точки A. Качение колес происходит без скольжения.

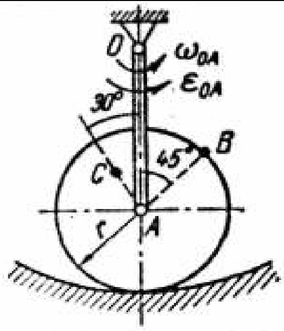
№ варианта	Размеры, см				ω_{OA}, сек$^{-1}$	ω_I, сек$^{-1}$	ε_{OA}, сек$^{-2}$	v_A, см/сек	a_A, см/сек^2
	OA	r	AB	AC					
1	40	15	-	8	2	-	2	-	-
2	30	15	-	8	3	-	2	-	-
3	-	50	-	-	-	-	-	50	100
4	35	-	-	45	4	-	8	-	-
5	25	-	-	20	1	-	1	-	-
6	40	15	-	6	1	1	0	-	-
7	35	-	75	60	5	-	10	-	-
8	-	-	20	10	-	-	-	40	20
9	-	-	45	30	-	-	-	20	10
10	25	-	80	20	1	-	2	-	-
11	-	-	30	15	-	-	-	10	0
12	-	-	30	20	-	-	-	20	20
13	25	-	55	40	2	-	4	-	-
14	45	15	-	8	3	12	0	-	-
15	40	15	-	8	1	-	1	-	-
16	55	20	-	-	2	-	5	-	-
17	-	30	-	10	-	-	-	80	50
18	10	-	10	5	2	-	6	-	-
19	20	15	-	10	1	2,5	0	-	-
20	-	-	20	6	-	-	-	10	15
21	30	-	60	15	3	-	8	-	-
22	35	-	60	40	4	-	10	-	-
23	-	-	60	20	-	-	-	5	10
24	25	-	35	15	2	-	3	-	-
25	20	-	70	20	1	-	2	-	-

26	20	15	-	10	2	1,2	0	-	-
27	-	15	-	5	-	-	-	60	30
28	20	-	50	25	1	-	1	-	-
29	12	-	35	15	4	-	6	-	-
30	40	-	-	20	5	-	10	-	-

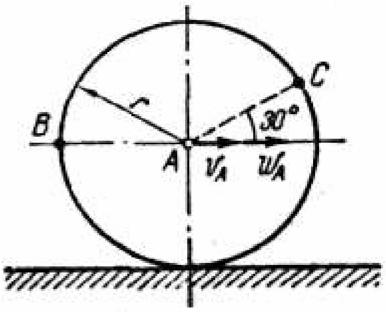
1



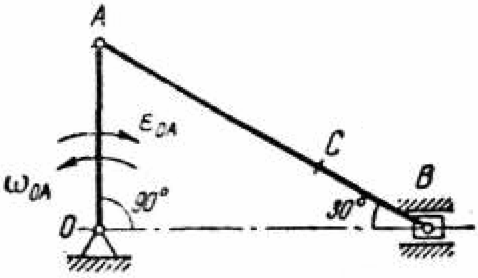
2



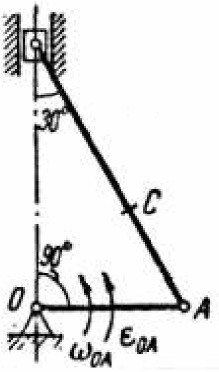
3



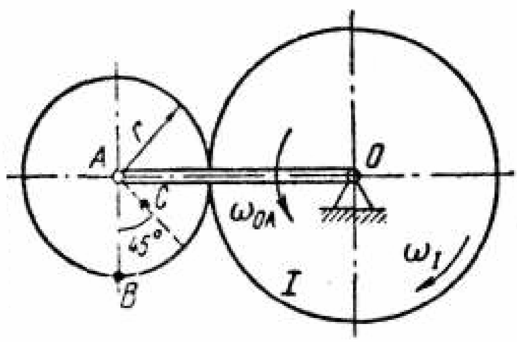
4



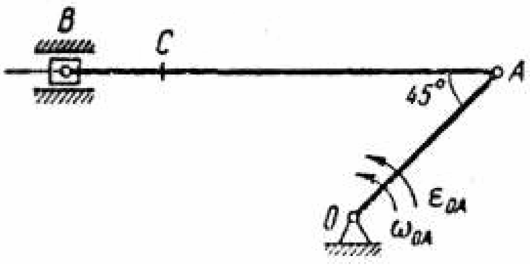
5



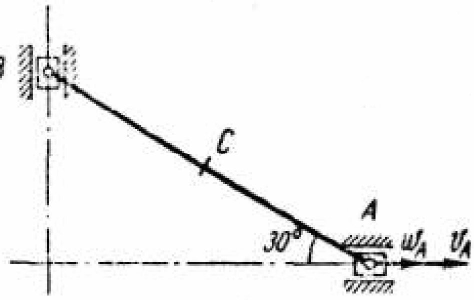
6



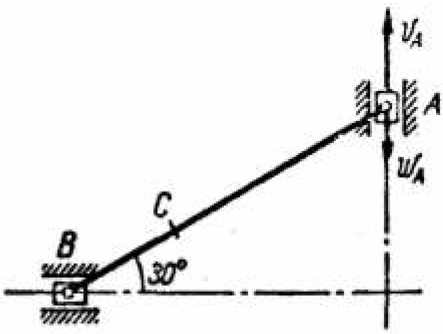
7



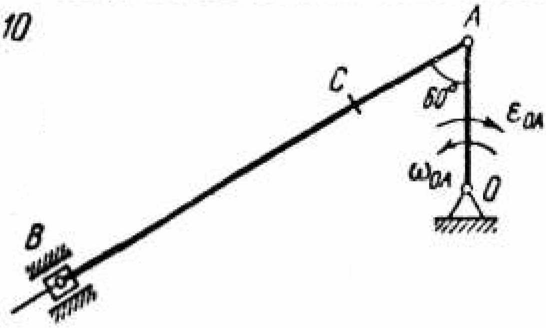
8



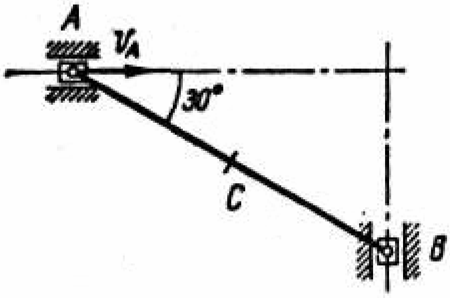
9



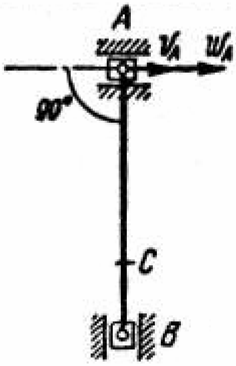
10



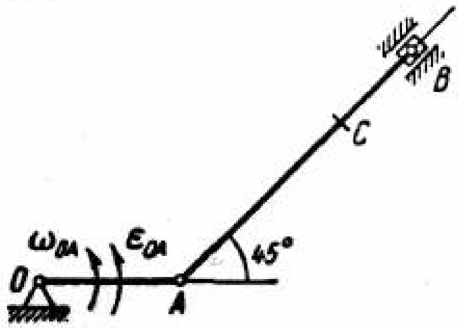
11



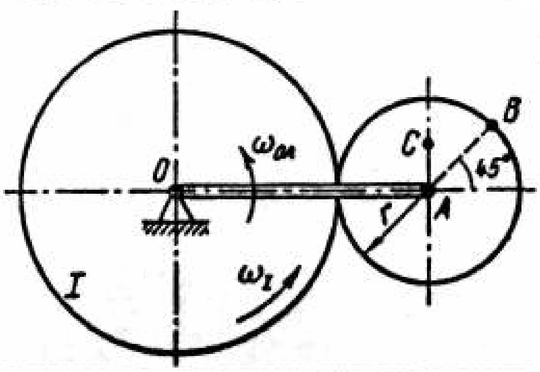
12



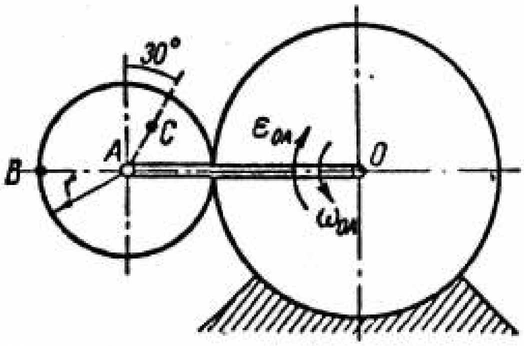
13



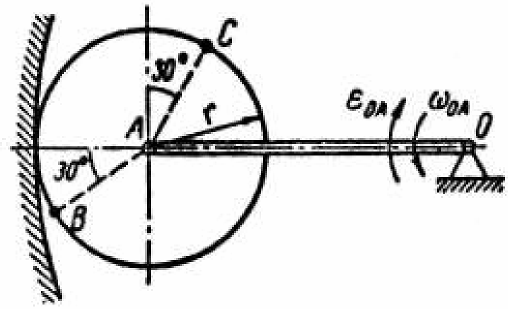
14



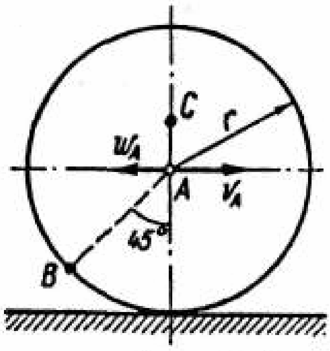
15



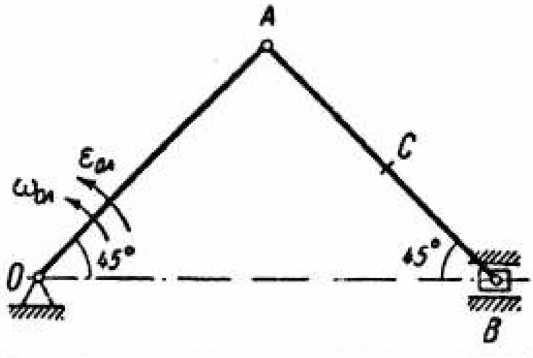
16



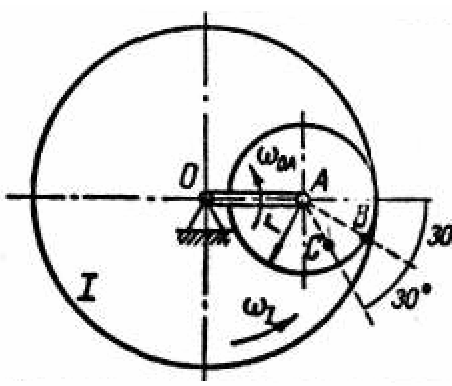
17



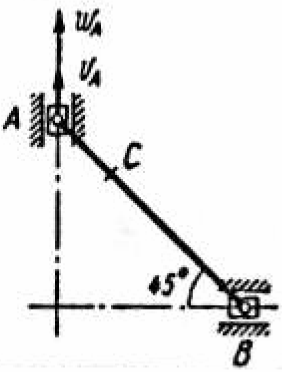
18



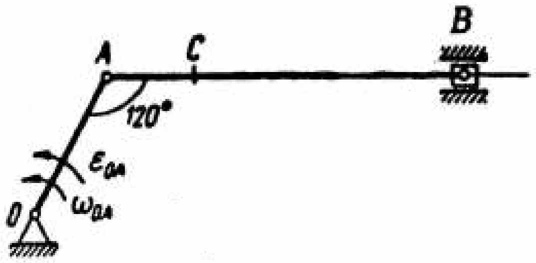
19



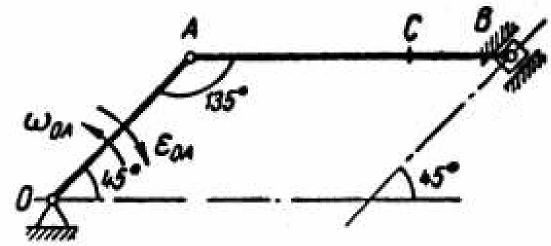
20



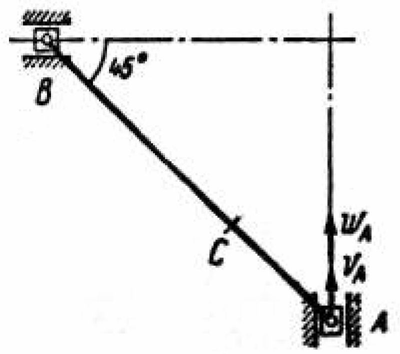
21



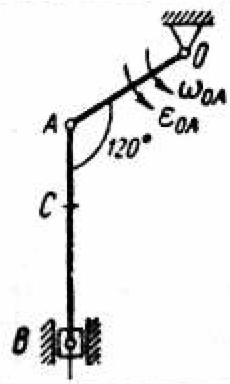
22



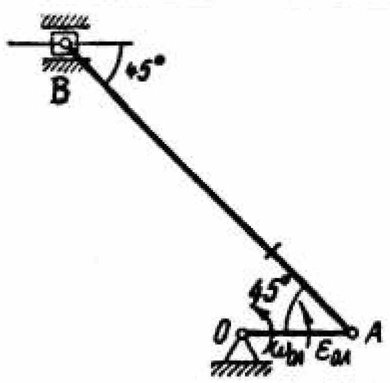
23



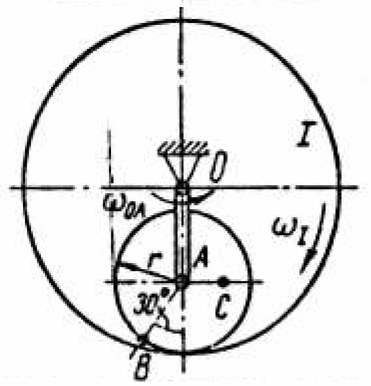
24



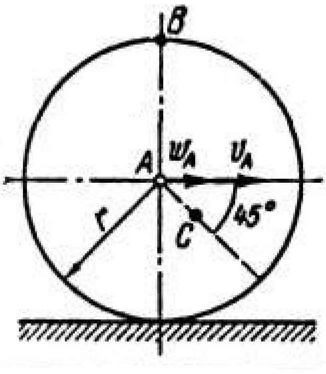
25



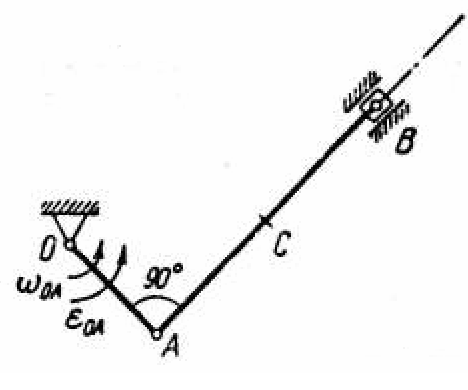
26

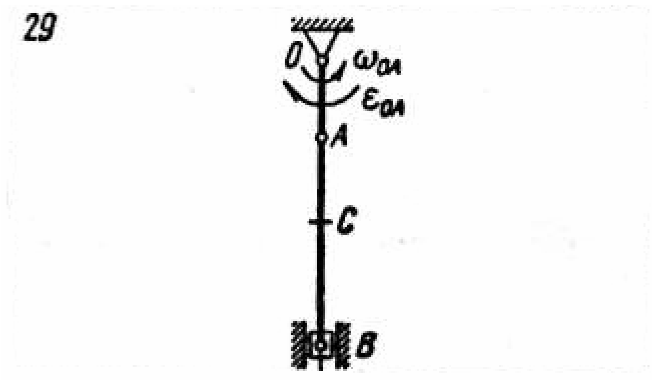


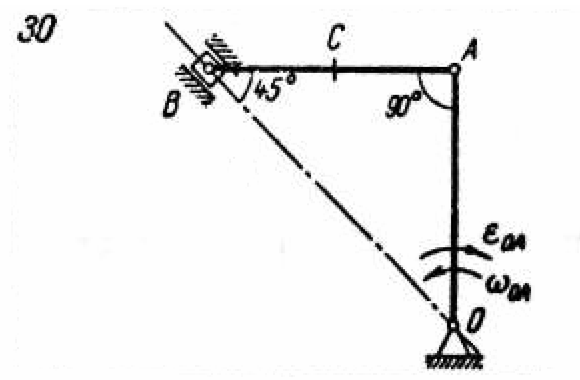
27



28







Курсовое задание К10. Тема: «Сложное движение материальной точки»

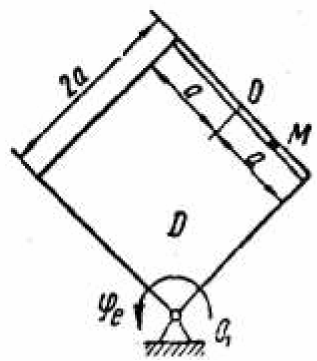
Точка M движется относительно тела D. По заданным уравнениям относительного движения точки M и движения тела D определить для момента времени $t = t_1$ абсолютную скорость и абсолютное ускорение точки M.

В вариантах 5, 6, 10, 12, 13, 20-22, 24, 27, 28 OM - дуга окружности; для каждого варианта положение точки M на схеме соответствует положительному значению s_r; на схемах 5, 10, 12, 21, 24, 27 OM - дуга соответствующая меньшему центральному углу.

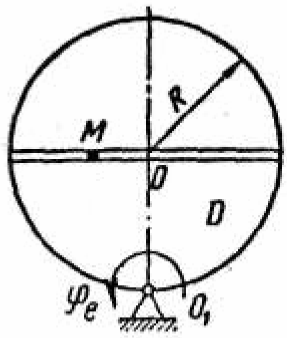
№ варианта	Уравнение вращения тела D $\varphi_e = f_1(t)$, рад	Уравнение относительного движения точки M $OM = s_r = f_2(t)$, см	t_1, сек	R, см	a, см	α, град
1	$2t^3 - t^2$	$18\sin\frac{\pi t}{4}$	2/3	-	25	-
2	$0.4t^2 + t$	$20\sin\pi t$	5/3	20	-	-
3	$2t + 0.5t^2$	$6t^3$	2	-	30	-
4	$0.6t^2$	$10\sin\frac{\pi t}{6}$	1	-	-	60
5	$3t - 0.5t^3$	$40\pi\cos\frac{\pi t}{6}$	2	30	-	-
6	$0.75t + 1.5t^2$	$150\pi t^2$	1/6	25	-	-
7	$0.5t^2$	$20\cos 2\pi t$	3/8	-	40	60
8	$t^3 - 5t$	$6(t + 0.5t^2)$	2	-	-	30
9	$4t + 1.6t^2$	$10 + 10\sin 2\pi t$	1/8	-	-	-
10	$1.2t - t^2$	$20\pi\cos\frac{\pi t}{4}$	4/3	20	20	-
11	$2t^2 - 0.5t$	$25\sin\frac{\pi t}{3}$	4	-	25	-
12	$5t - 4t^2$	$\frac{15}{8}\pi t^3$	2	30	30	-
13	$8t^2 - 3t$	$120\pi t^2$	1/3	40	-	-
14	$4t - 2t^2$	$3 + 14\sin\pi t$	2/3	-	-	30
15	$0.2t^3 + t$	$5\sqrt{2}(t^2 + t)$	2	-	60	45
16	$t - 0.5t^2$	$202\sin\pi t$	1/3	-	20	-
17	$0.5t^2$	$8t^3 + 2t$	1	-	$4\sqrt{5}$	-

18	$8t-t^2$	$10t+t^3$	2	-	-	60
19	$t+3t^2$	$6t+4t^3$	2	40	-	-
20	$6t+t^3$	$30\pi\cos\frac{\pi t}{6}$	3	60	-	-
21	$2t-4t^2$	$25\pi(t+t^2)$	1/2	25	-	-
22	$4t-0.2t^2$	$10\pi\sin\frac{\pi t}{4}$	2/3	30	-	-
23	$2t-0.25t^2$	$3t^2+4t$	2	-	-	30
24	$2t-0.3t^2$	$75\pi(0.1t+0.3t^2)$	1	30	-	-
25	$10t-0.1t^2$	$15\sin\frac{\pi t}{3}$	5	-	-	-
26	$-2\pi t^2$	$8\cos\frac{\pi t}{2}$	3/2	-	-	45
27	$t-0.5t^3$	$10\sqrt{2}\pi\cos 2\pi t$	1/8	30	-	-
28	$2t^3-5t$	$2.5\pi t^2$	2	40	-	-
29	$0.6t^3$	$6\sqrt{6}\sin\frac{\pi t}{16}$	4	36	-	30
30	$2t^2-3t$	$\frac{5\sqrt{3}}{3}t^3$	2	20	-	30

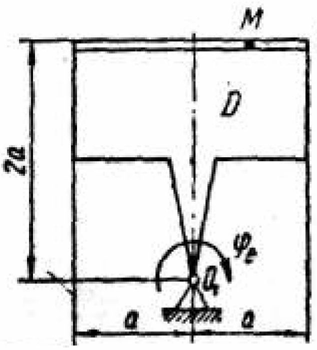
1



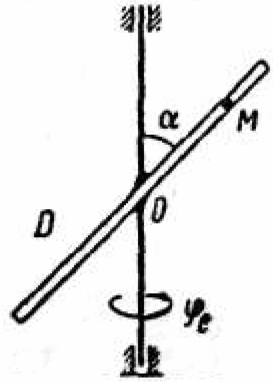
2



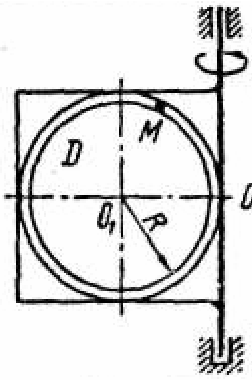
3



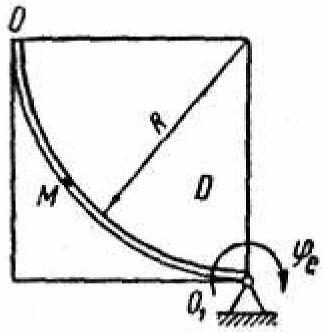
4



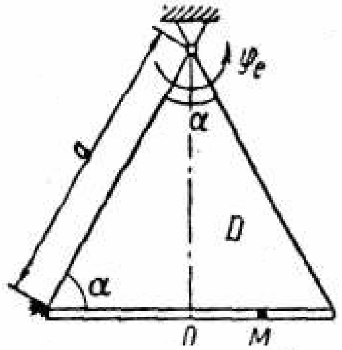
5



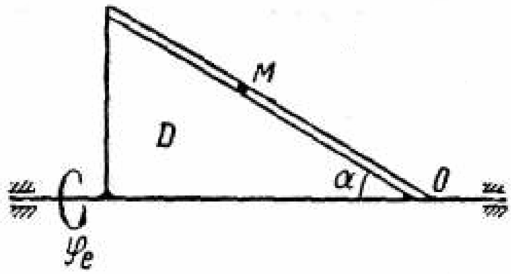
6



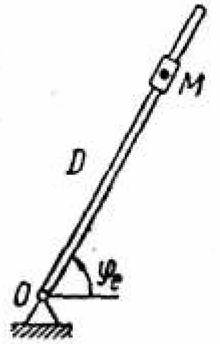
7



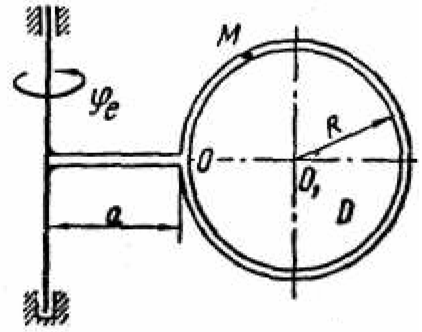
8



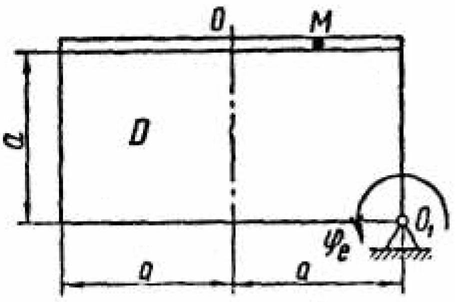
9



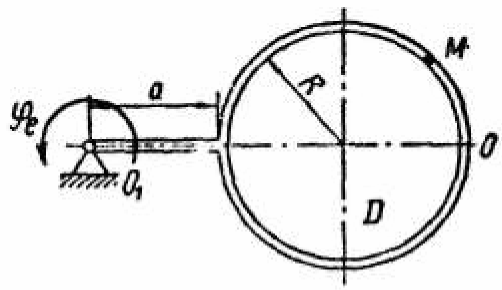
10



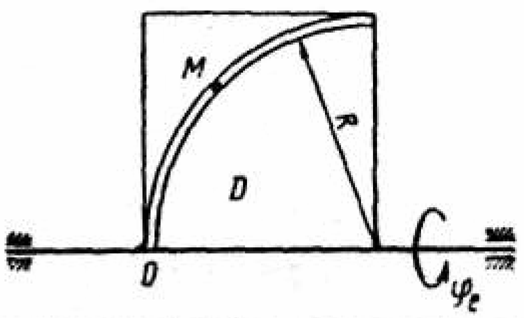
11



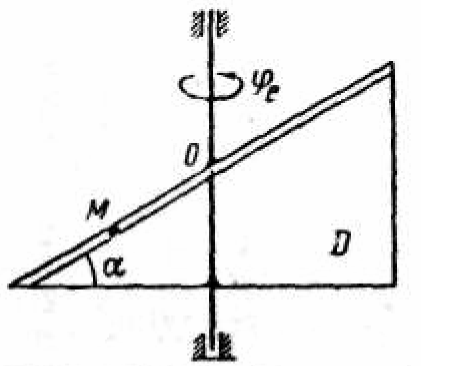
12



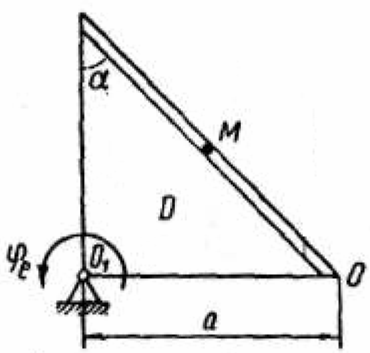
13



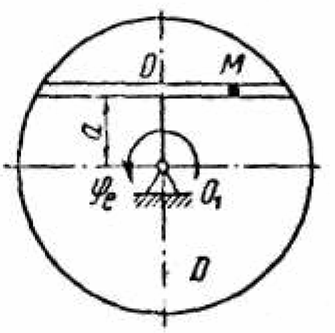
14



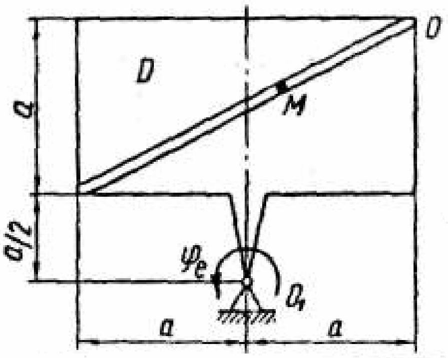
15



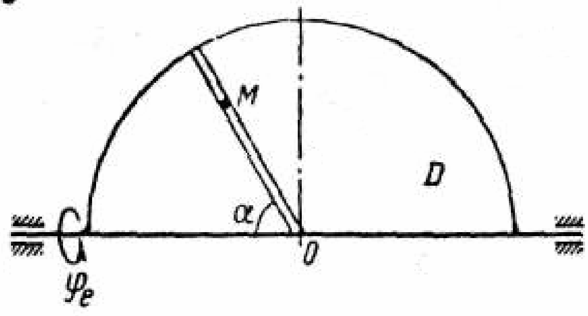
16



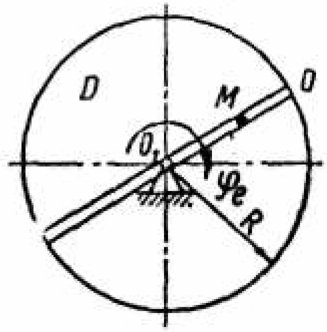
17



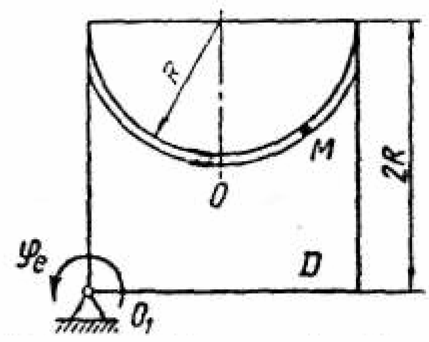
18



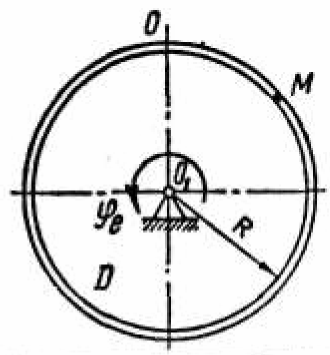
19



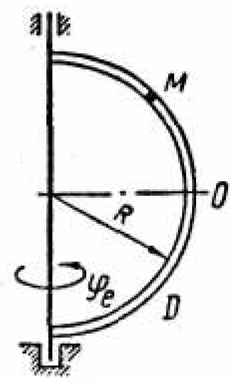
20



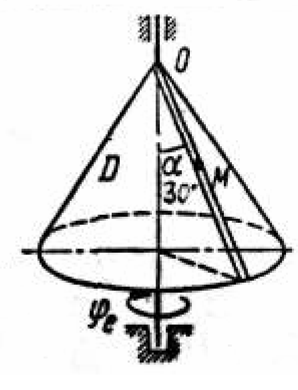
21



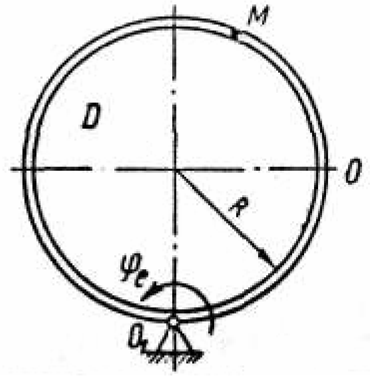
22



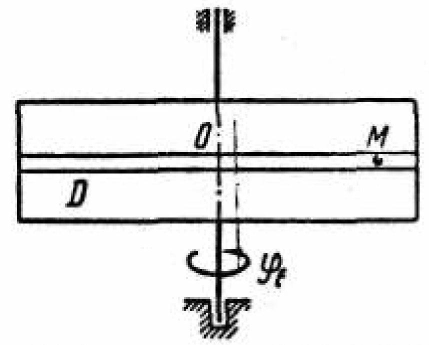
23



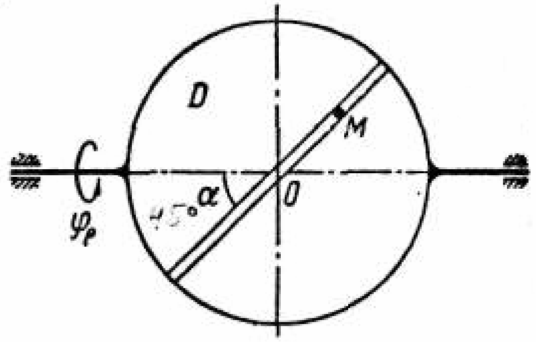
24



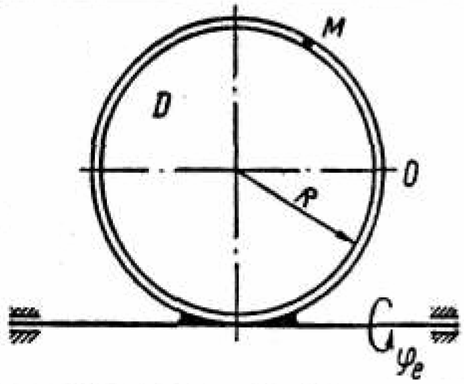
25



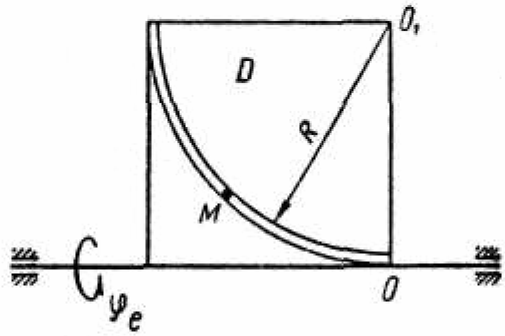
26



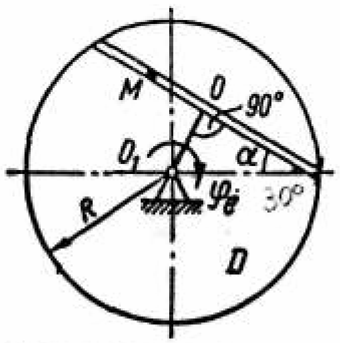
27



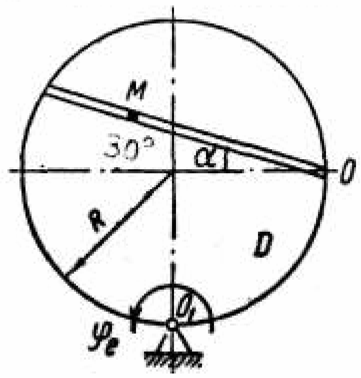
28



29



30



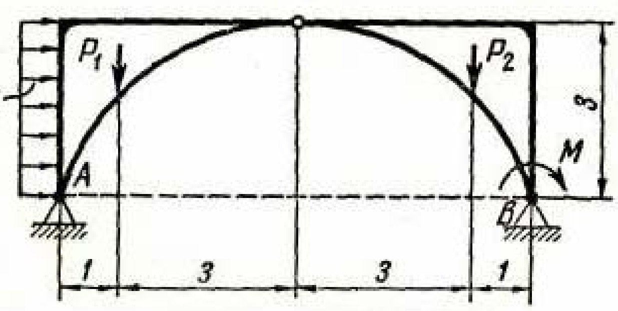
Курсовое задание Д15. Тема: «Определение реакций опор составной механической системы»

Определить реакции опор составной конструкции двумя способами: применяя принцип возможных перемещений и методом шарнирного расчленения.

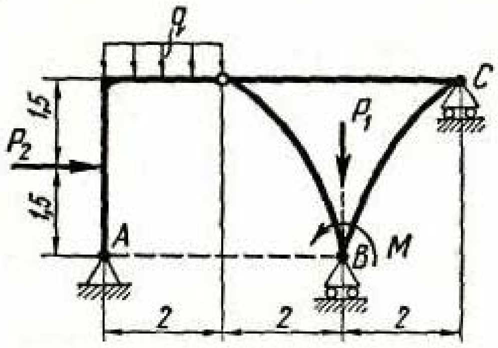
№ варианта	Нагрузка			
	P_1, кН	P_2, кН	q, кН/м	M, кНм
1	15	14	3	10
2	13	12	2	6
3	11	10	1	5
4	9	8	3	14
5	7	6	2	12
6	8	5	1	4
7	7	4	2	10
8	6	6	1	7
9	5	8	3	8

10	4	10	2	6
11	12	11	1	12
12	10	6	2	10
13	9	5	1	6
14	7	10	2	13
15	6	8	1	5
16	3	10	2	10
17	1	8	1	8
18	3	6	3	6
19	5	4	2	7
20	7	2	1	5
21	10	9	2	4
22	8	7	1	7
23	6	5	2	8
24	4	3	1	3
25	2	1	2	2
26	7	1	2	7
27	6	2	1	5
28	5	3	2	10
29	4	4	1	5
30	3	5	2	10

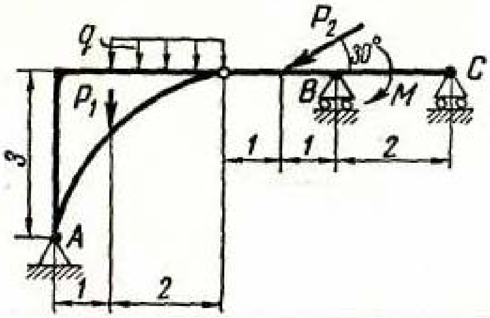
1



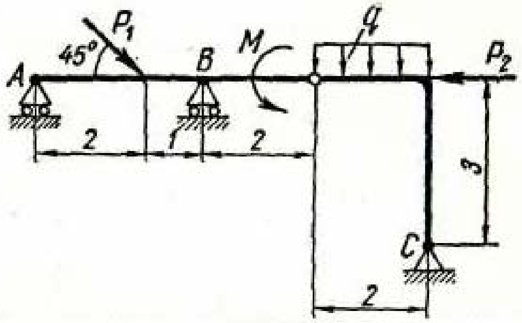
2



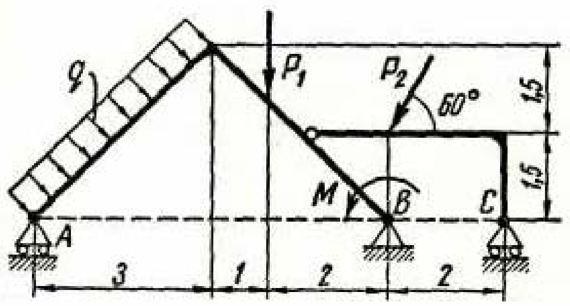
3



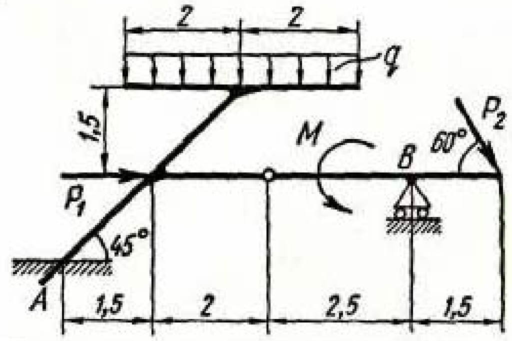
4



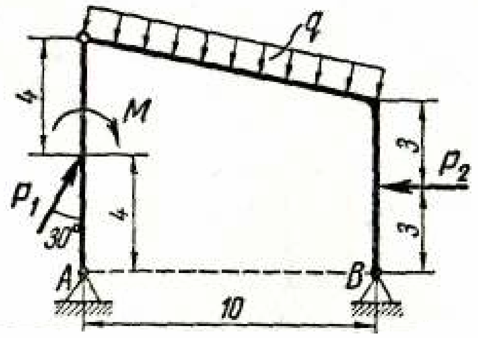
5



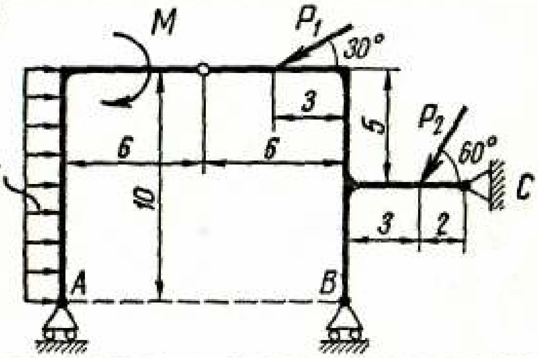
6



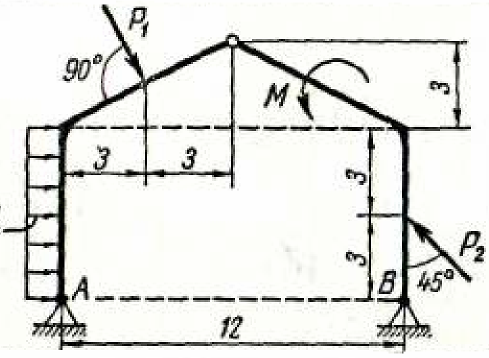
7



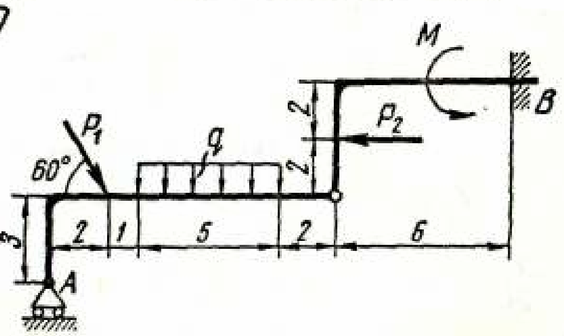
8



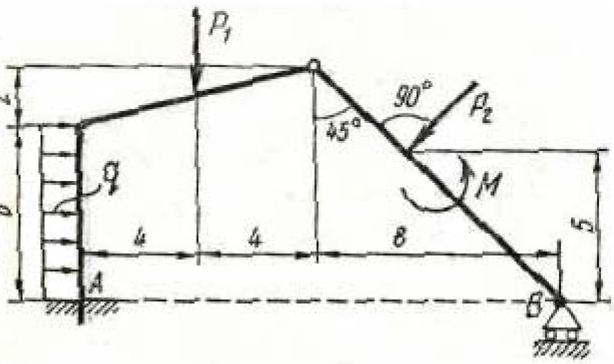
9



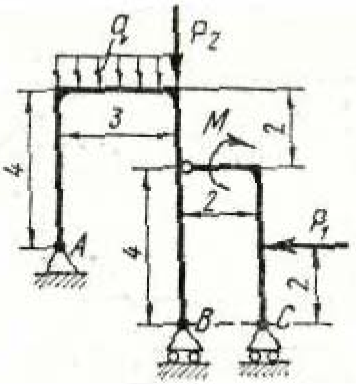
10



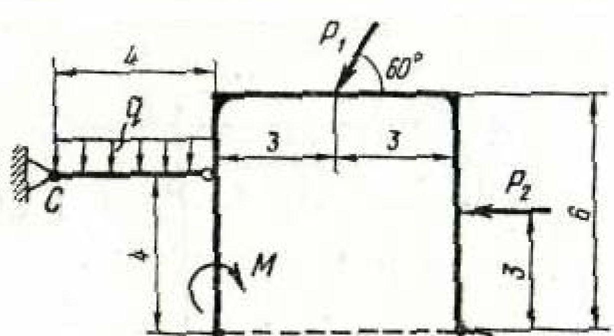
11



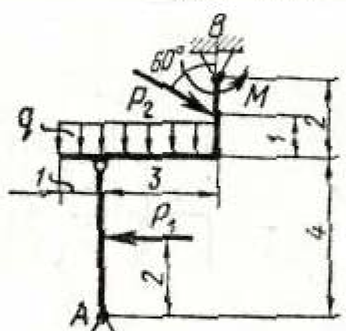
12



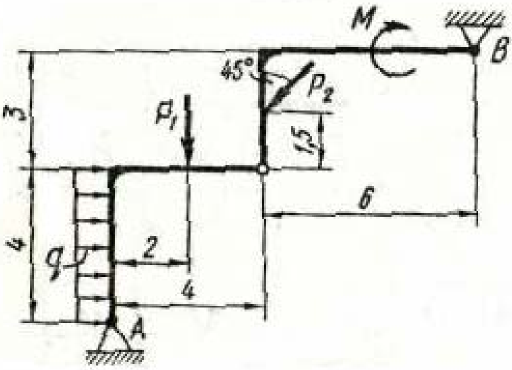
13



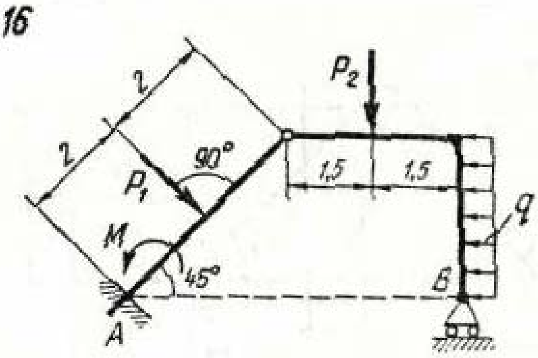
14



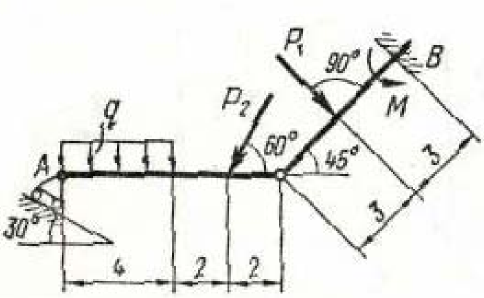
15



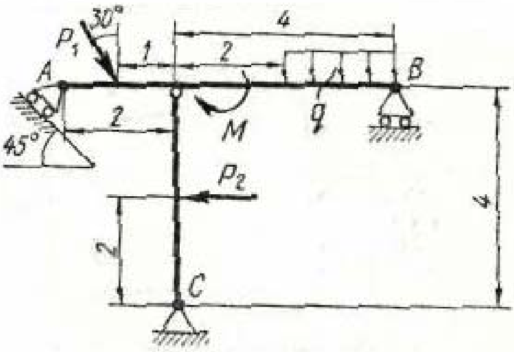
16



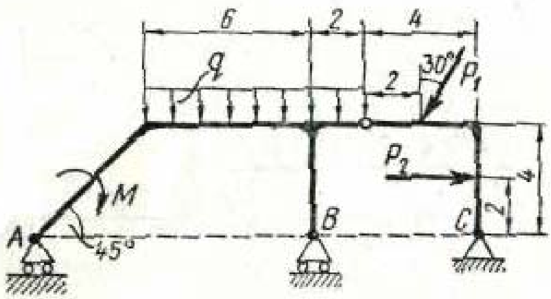
17



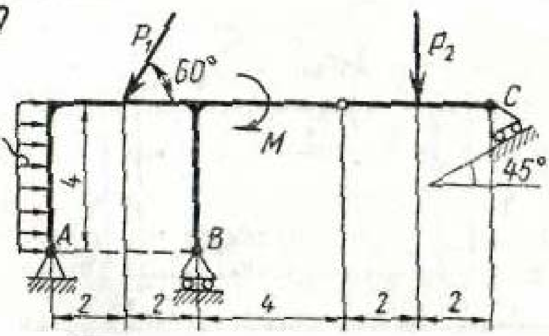
18



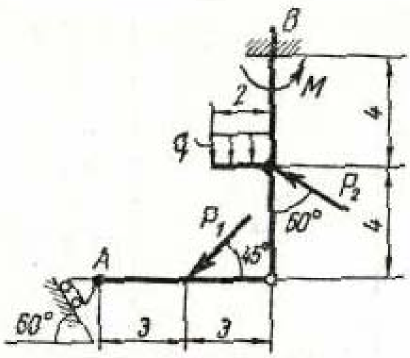
19



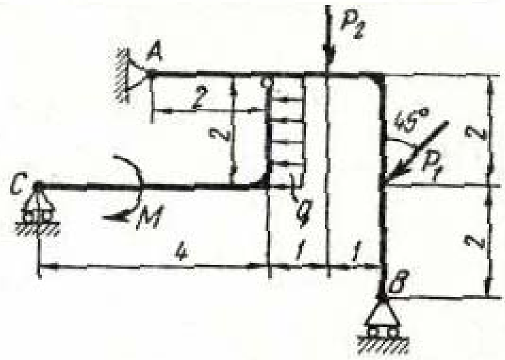
20



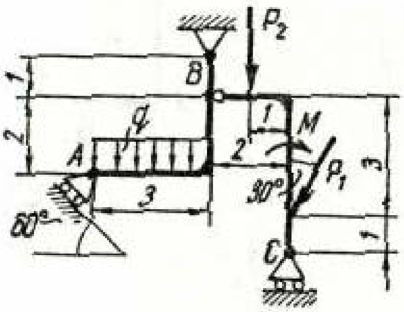
21



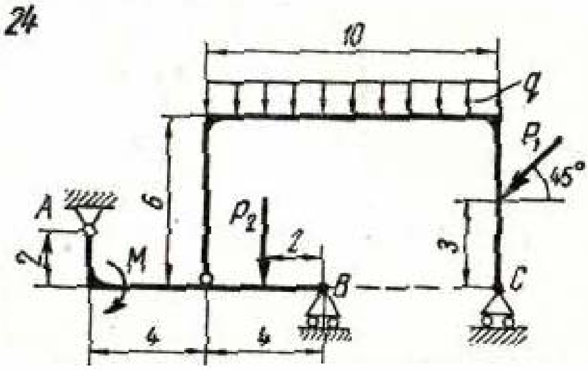
22

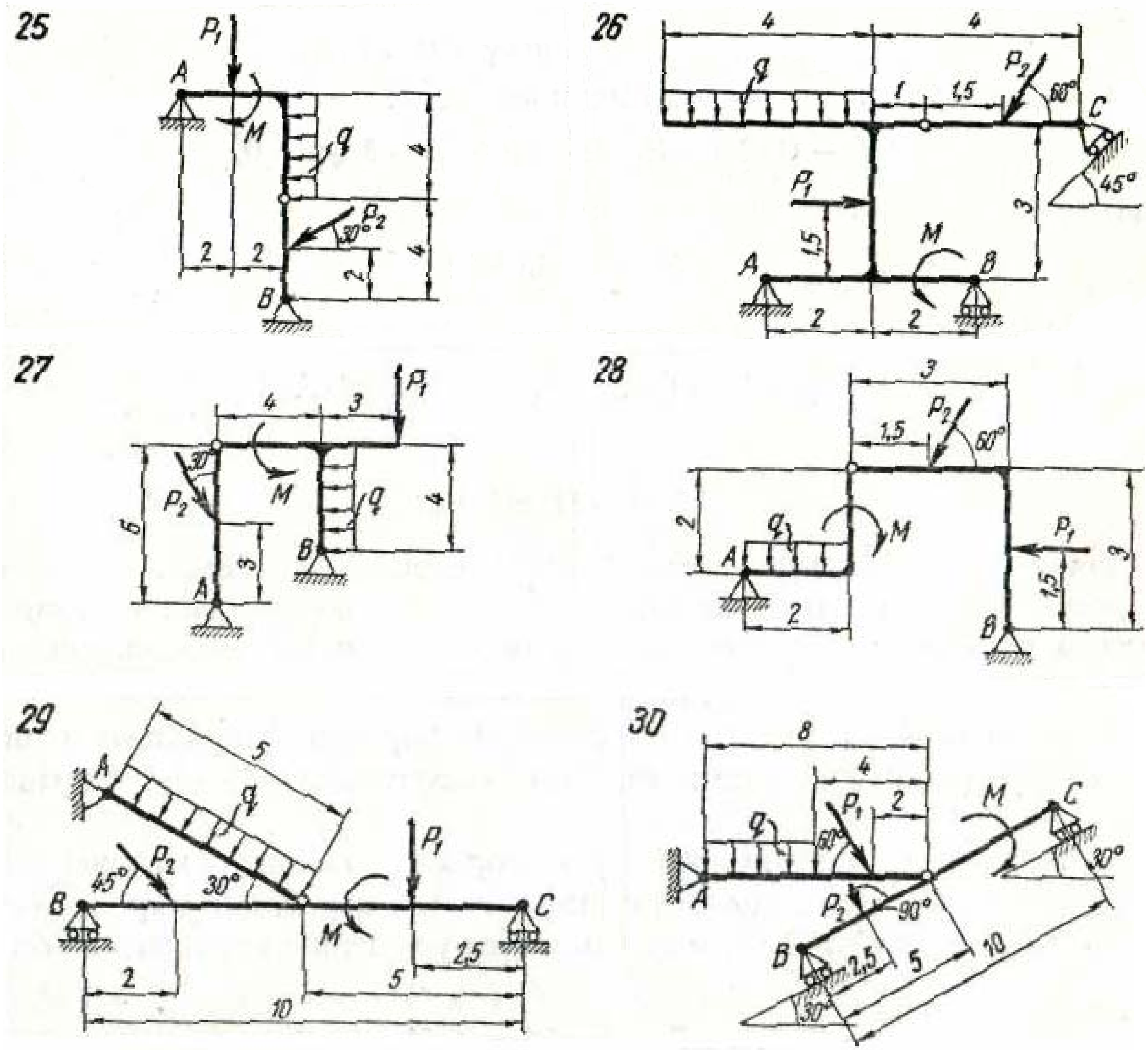


23



24





Курсовое задание Д1. Тема: «Интегрирование дифференциальных уравнений движения материальной точки, находящейся под действием постоянных сил в ИСО»

Варианты 1-5 (схема 1). Тело движется из точки A по участку AB (длиной l) наклонной плоскости, составляющей угол α с горизонтом, в течении τ с. Его начальная скорость v_A. Коэффициент трения скольжения тела по плоскости равен f.

В точке B тело покидает плоскость со скоростью v_B и попадает со скоростью v_C в точку C плоскости BD, наклоненной под углом β к горизонту, находясь в воздухе T с.

При решении задачи тело принять за материальную точку; сопротивление воздуха не учитывать.

<u>Вариант 1.</u> Дано: $\alpha = 30^o$; $v_A = 0$; $f = 0.2$; $l = 10$ м; $\beta = 60^o$. Определить τ и h.

Вариант 2. Дано: $\alpha = 15^o$; $v_A = 2$ м/с; $f = 0.2$; $h = 4$ м; $\beta = 45^o$. Определить l и уравнение траектории точки на участке BC.

Вариант 3. Дано: $\alpha = 30^o$; $v_A = 2.5$ м/с; $f \neq 0$; $l = 8$ м; $d = 10$ м; $\beta = 60^o$. Определить v_B и τ.

Вариант 4. Дано: $v_A = 0$; $\tau = 2$ с; $l = 9.8$ м; $\beta = 60^o$; $f = 0$. Определить α и T.

Вариант 5. Дано: $\alpha = 30^o$; $v_A = 0$; $l = 9.8$ м; $\tau = 3$ с; $\beta = 45^o$. Определить f и v_c.

Варианты 6-10 (схема 2). Лыжник подходит к точке A участка трамплина AB (длиной l) наклонного под углом α к горизонту, со скоростью v_A. Коэффициент трения скольжения лыж на участке AB равен f. Лыжник от A до B движется τ с; в точке B со скоростью v_B он покидает трамплин. Через T с лыжник приземляется со скоростью v_C в точке C горы, составляющей угол β с горизонтом.

При решении задачи принять лыжника за материальную точку и не учитывать сопротивление воздуха.

Вариант 6. Дано: $\alpha = 20^o$; $f = 0.1$; $\tau = 0.2$ с; $h = 40$ м; $\beta = 30^o$. Определить l и v_c.

Вариант 7. Дано: $\alpha = 15^o$; $f = 0.1$; $v_A = 16$ м/с; $l = 5$ м; $\beta = 45^o$. Определить v_B и T.

Вариант 8. Дано: $v_A = 21$ м/с; $f = 0$; $\tau = 0.3$ с; $v_B = 20$ м/с; $\beta = 60^o$. Определить α и d.

Вариант 9. Дано: $\alpha = 15^o$; $\tau = 0.3$ с; $f = 0.1$; $h = 30\sqrt{2}$ м; $\beta = 45^o$. Определить v_A и v_B.

Вариант 10. Дано: $\alpha = 15^o$; $f = 0$; $v_A = 12$ м/с; $d = 50$ м; $\beta = 60^o$. Определить τ и уравнение траектории лыжника на участке BC.

Варианты 11-15 (схема 3). Имея в точке A скорость v_A, мотоцикл поднимается τ с по участку AB длиной l, составляющему с горизонтом угол α. При постоянной на всем участке AB движущей силе P мотоцикл в точке B приобретает скорость v_B и перелетает через ров шириной d, находясь в воздухе T с и приземляясь в точке C со скоростью v_C. Масса мотоцикла с мотоциклистом равна m.

При решении задачи считать мотоцикл с мотоциклистом материальной точкой и не учитывать силы сопротивления движению.

Вариант 11. Дано: $\alpha = 30^o$; $P \neq 0$; $l = 40$ м; $v_A = 0$; $v_B = 4.5$ м/с; $d = 3$ м. Определить τ и h.

Вариант 12. Дано: $\alpha = 30^o$; $P = 0$; $l = 40$ м; $v_B = 4.5$ м/с; $h = 1.5$ м. Определить v_A и d.

Вариант 13. Дано: $\alpha = 30^o$; $m = 400$ кг; $v_A = 0$; $\tau = 20$ с; $d = 3$ м; $h = 1.5$ м. Определить P и l.

Вариант 14. Дано: $\alpha = 30^o$; $m = 400$ кг; $P = 2.2$ кН; $v_A = 0$; $l = 40$ м; $d = 5$ м. Определить v_B и v_C.

Вариант 15. Дано: $\alpha = 30^o$; $v_A = 0$; $P = 2$ кН; $l = 50$ м; $h = 2$ м; $d = 4$ м. Определить T и m.

Варианты 16-20 (схема 4). Камень скользит в течении τ с по участку AB откоса, составляющей угол α с горизонтом и имеющему длину l. Его начальная скорость v_A. Коэффициент трения скольжения камня по откосу равен f. Имея в точке B скорость v_B, камень через T с ударяется в точке C о вертикальную защитную стену.

При решении задачи принять камень за материальную точку; сопротивление воздуха не учитывать.

Вариант 16. Дано: $\alpha = 30^o$; $v_A = 1$ м/с; $l = 3$ м; $f = 0.2$; $h = 2.5$ м. Определить h и T.

Вариант 17. Дано: $\alpha = 45^o$; $l = 6$ м; $v_B = 2v_A$; $\tau = 1$ с; $h = 6$ м. Определить d и f.

Вариант 18. Дано: $\alpha = 30^o$; $l = 2$ м; $v_A = 0$; $f = 0.1$; $d = 3$ м. Определить h и τ.

Вариант 19. Дано: $\alpha = 15^o$; $l = 3$ м; $v_B = 3$ м/с; $f \neq 0$; $\tau = 1.5$ с; $d = 2$ м. Определить v_A и h.

Вариант 20. Дано: $\alpha = 45^o$; $v_A = 0$; $f = 0.3$; $d = 2$ м; $h = 4$ м. Определить l и τ.

Варианты 21-25 (схема 5). Тело движется из точки A по участку AB (длиной l) наклонной плоскости, составляющей угол α с горизонтом. Его начальная скорость v_A. Коэффициент трения скольжения равен f. Через τ с тело в точке B со скоростью v_B покидает наклонную плоскость и попадает на горизонтальную плоскость в точку C со скоростью v_C; при этом оно находится в воздухе T с.

При решении задачи тело принять за материальную точку и не учитывать сопротивление воздуха.

Вариант 21. Дано: $\alpha = 30^o$; $f = 0.1$; $v_A = 1$ м/с; $\tau = 1.5$ с; $h = 10$ м. Определить v_B и d.

Вариант 22. Дано: $v_A = 0$; $\alpha = 45^o$; $l = 10$ м; $\tau = 2$ с. Определить f и уравнение траектории на участке BC.

Вариант 23. Дано: $f = 0$; $v_A = 0$; $l = 9.81$ м; $\tau = 2$ с; $h = 20$ м. Определить α и T.

Вариант 24. Дано: $v_A = 0$; $\alpha = 30^o$; $f = 0.2$; $l = 10$ м; $d = 12$ м. Определить h и τ.

Вариант 25. Дано: $v_A = 0$; $\alpha = 30^o$; $f = 0.2$; $l = 6$ м; $h = 4.5$ м. Определить τ и v_C.

Варианты 26-30 (схема 6). Имея в точке A скорость v_A, тело движется по горизонтальному участку AB длиной l в течение τ с. Коэффициент трения скольжения тела по плоскости равен f. Со скоростью v_B тело в точке B покидает плоскость и попадает в точку C со скоростью v_C, находясь в воздухе T с. При решении задачи тело принять за материальную точку и не учитывать сопротивление воздуха.

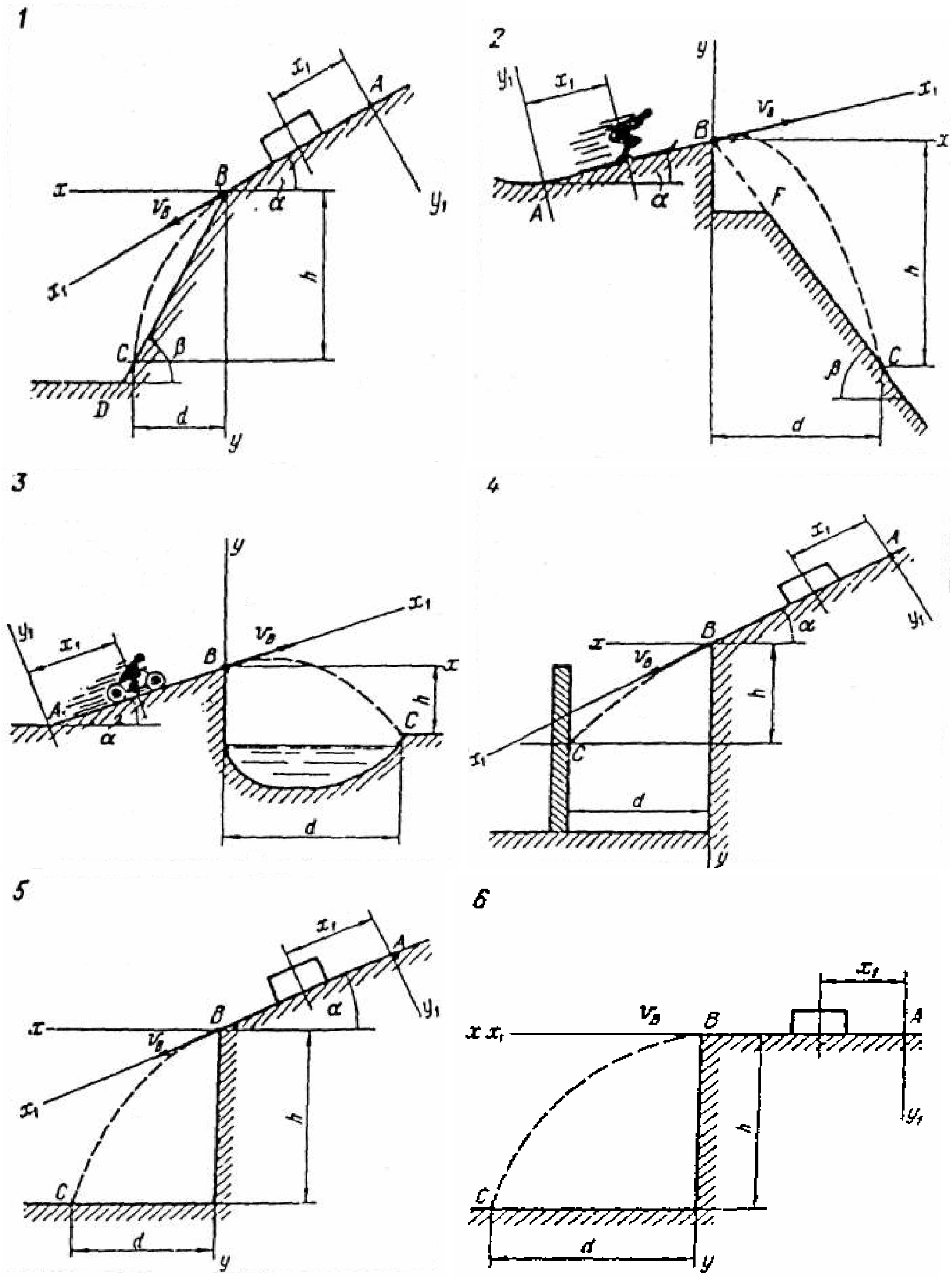
<u>Вариант 26.</u> Дано: $v_A = 7$ м/с; $f = 0.2$; $l = 8$ м; $h = 20$ м. Определить d и v_C.

<u>Вариант 27.</u> Дано: $v_A = 4$ м/с; $f = 0.1$; $\tau = 2$ с; $d = 2$ м. Определить v_B и h.

<u>Вариант 28.</u> Дано: $v_B = 3$ м/с; $f = 0.3$; $l = 3$ м; $h = 5$ м. Определить v_A и T.

<u>Вариант 29.</u> Дано: $v_A = 3$ м/с; $v_B = 1$ м/с; $l = 2.5$ м; $h = 20$ м. Определить f и d.

<u>Вариант 30.</u> Дано: $f = 0.25$; $l = 4$ м; $d = 3$ м; $h = 5$ м. Определить v_A и τ.



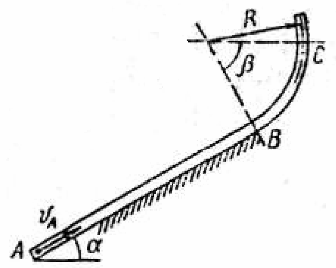
Курсовое задание Д6. Тема: «Общие теоремы динамики»

Шарик, принимаемый за материальную точку, движется из положения A внутри трубки, ось которой расположена в вертикальной плоскости. Найти скорость шарика в положениях B и C и давление шарика на стенку трубки в положении C. Трением на криволинейных участках траектории пренебречь. В вариантах 3, 6, 7, 10, 13, 15, 17, 19, 25, 28, 29 шарик пройдя путь h_0, отделяется от пружины.

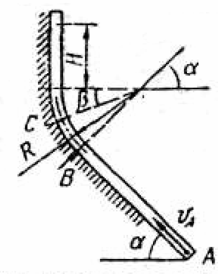
№ варианта	m, кг	v_A, м/с	τ, с	R, м	f	α, град	β, град	h_0, см	c, Н/см	Величины которые требуется найти дополнительно
1	0,5	20	2,0	2,0	0,20	30	45	-	-	-
2	0,6	16	0,2	4,0	0,10	45	20	-	-	H
3	0,4	0	2,0	0,2	0,15	30	-	10	1	v_D
4	0,2	5	0,5	1,0	0,10	45	-	-	-	v_D
5	0,1	8	1,5	2,0	0,20	30	-	-	-	-
6	0,3	2	2,0	4,0	0,10	30	20	30	2	v_D
7	0,4	5	1,0	1,0	0,10	30	-	50	5	v_D
8	0,2	1	0,5	1,5	0,15	30	60	0	4	h
9	0,5	2	1,5	4,0	0,25	20	60	-	-	v_D
10	0,4	4	0,1	0,5	0,10	30	60	0,2	0,2	v_D
11	0,2	6	1,0	1,0	0,30	45	-	-	3	v_D, h
12	0,4	5	0,4	2,0	0,20	30	60	-	-	v_D
13	0,3	0	0,1	1,0	0,10	30	60	50	10	v_D
14	0,6	0	2,0	3,0	0,20	60	30	-	-	s
15	0,1	1	0,1	1,0	0,15	60	20	50	0,2	v_D
16	0,4	2	0,2	2,0	0,40	30	-	-	-	v_D
17	0,2	0	0,1	1,0	0,20	30	-	40	1,0	v_D
18	0,3	3	0,4	1,5	0,10	45	-	-	-	-
19	0,1	4	0,1	0,4	0,30	30	60	10	0,5	v_D
20	0,2	10	1,0	0,5	0,10	60	-	0	1,2	h
21	0,7	3	0,3	0,3	0,20	45	-	-	-	-
22	0,4	1	0,2	0,2	0,40	45	-	0	1,1	v_D, h
23	0,6	2	0,4	0,2	0,20	45	-	-	-	-
24	0,5	0	0,5	0,6	0,30	60	30	-	-	H
25	0,1	0	0,2	0,5	0,25	-	30	30	0,4	v_D
26	0,2	2	0,1	0,2	0,20	30	-	-	-	v_D
27	0,8	3	0,2	0,4	0,15	45	-	-	-	v_D
28	0,3	4	0,1	0,6	0,35	30	15	60	0,1	v_D
29	0,5	0	0,2	0,5	0,20	45	30	50	0,8	v_D
30	0,8	5	0,3	0,6	0,15	30	-	-	-	t_{DE}

В задании приняты следующие обозначения: m - масса шарика; v_A - начальная скорость шарика; τ - время движения шарика на участке AB (в вариантах 1, 2, 5, 8, 14, 20, 21, 23, 24, 27, 30) или на участке BD (в вариантах 3, 4, 6, 7, 9-13, 15-17, 19, 22, 25, 26, 28, 29); f - коэффициент трения; c - жесткость пружины.

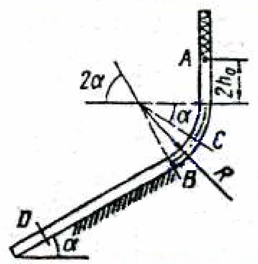
1



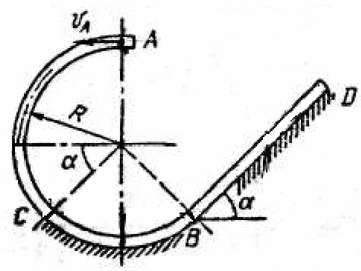
2



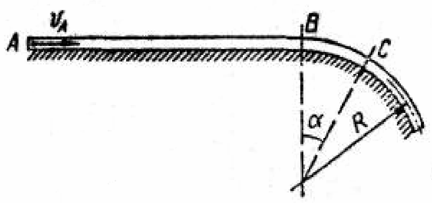
3



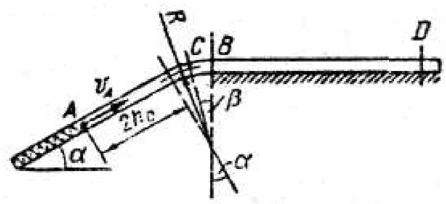
4



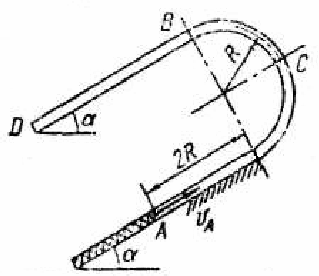
5



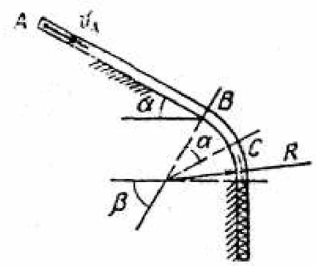
6



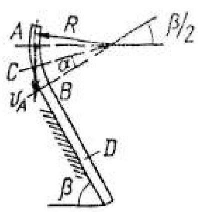
7



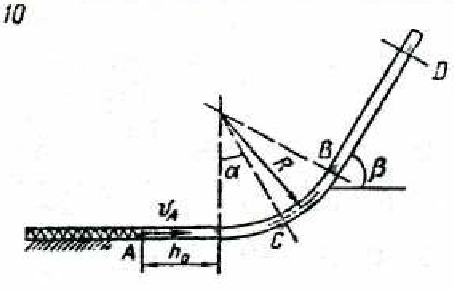
8



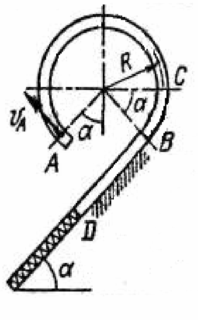
9



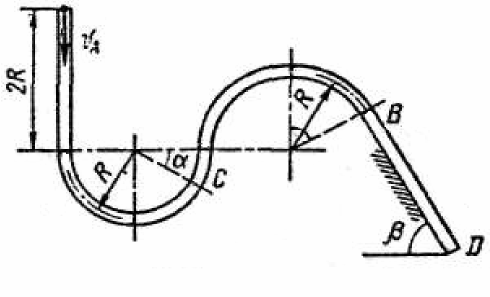
10



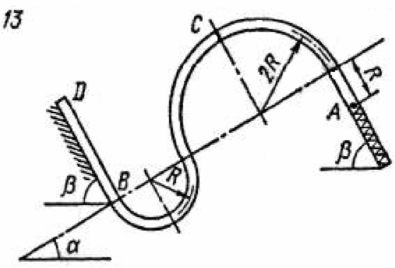
11



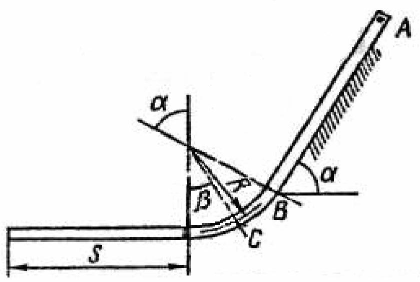
12



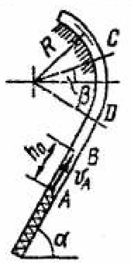
13



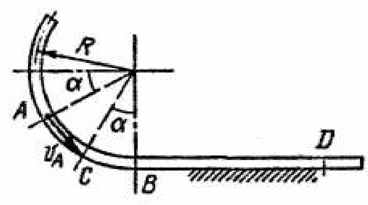
14



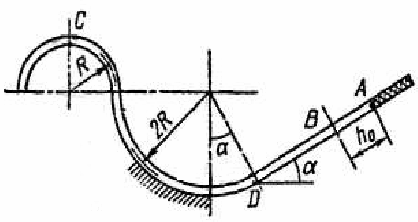
15



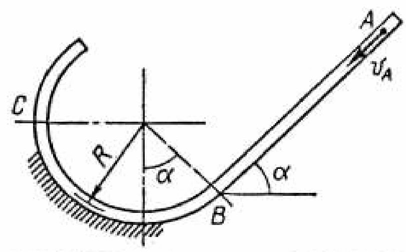
16



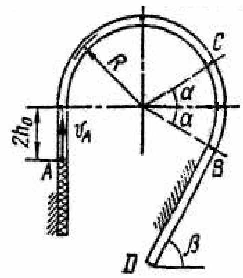
17



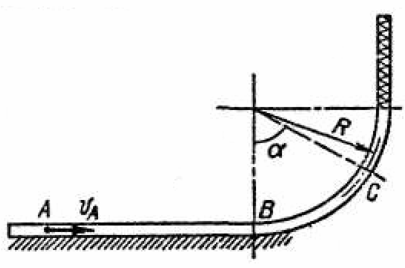
18



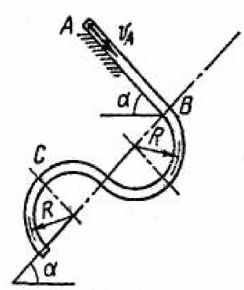
19



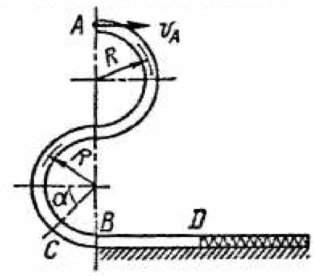
20



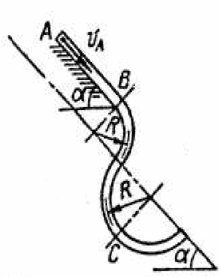
21



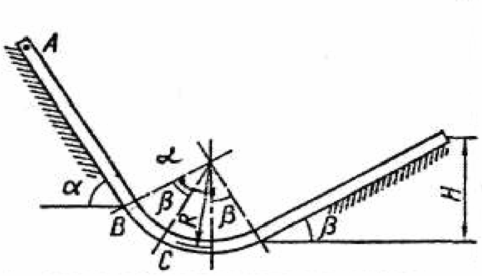
22

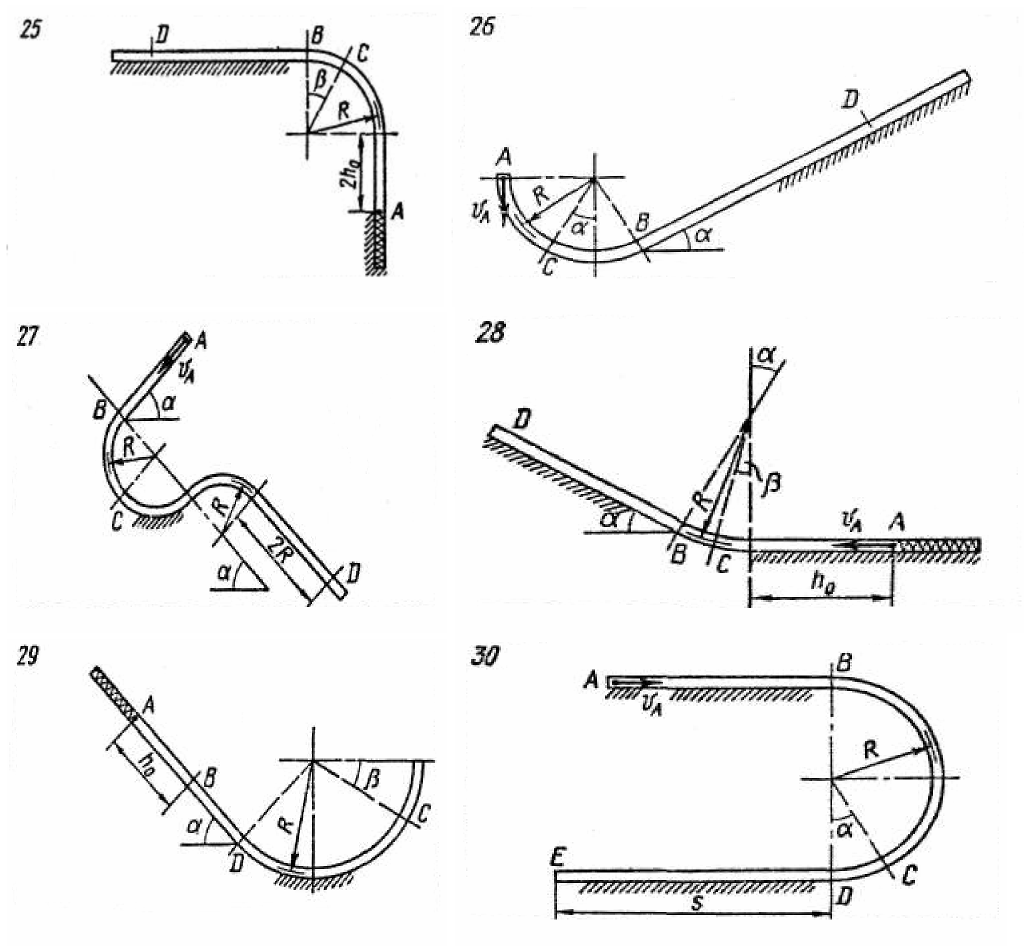


23



24





Курсовое задание Д19. Тема: «Принцип Лагранжа – Даламбера, общее уравнение динамики»

Для заданной механической системы определить ускорения грузов и натяжения нитей, к которым прикреплены грузы. Массами нитей пренебречь. Трение качения и силы сопротивления в подшипниках не учитывать. Система движется из состояния покоя.

Варианты механических систем показаны на рисунке, а необходимые для решения данные приведены в таблице.

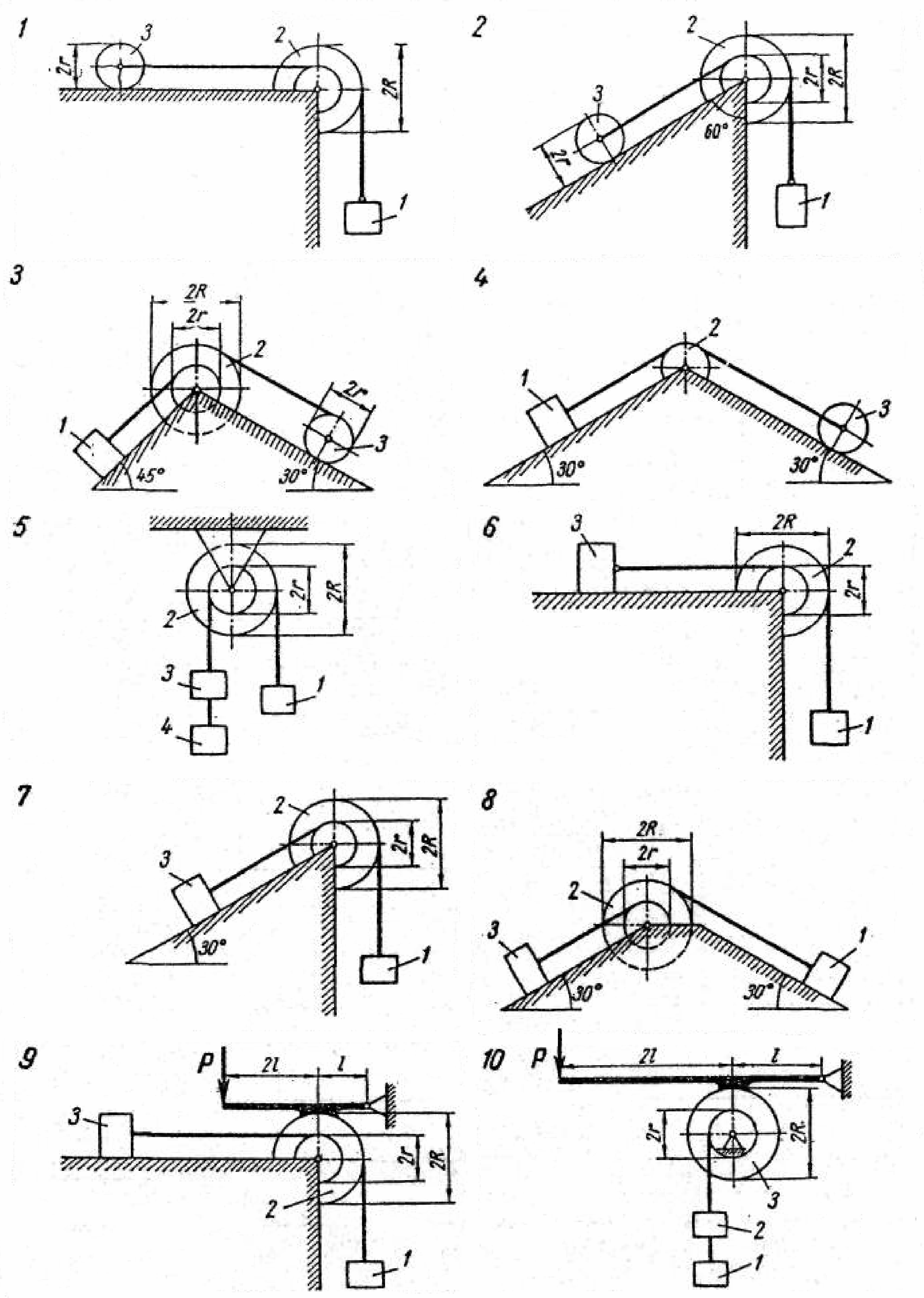
Блоки и катки, для которых радиусы инерции в таблице не указаны, считать сплошными однородными цилиндрами.

Радиусы инерции даны относительно центральных осей, перпендикулярных плоскости чертежа.

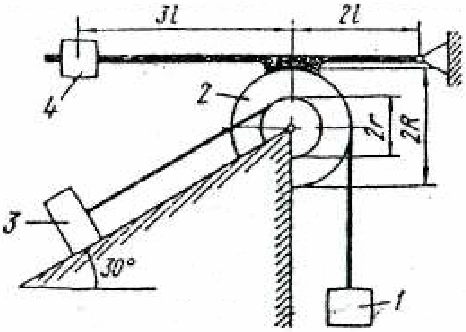
Коэффициент трения принимать одинаковым как при скольжении по плоскости, так и при торможении колодкой (варианты 9-12).

№ варианта	Силы тяжести				R/r	Радиусы инерции		P	Коэффициент трения скольжения f	Дополнительные данные
	G_1	G_2	G_3	G_4		i_{2x}	i_{3x}			
1	G	G	$3G$	-	2	$r\sqrt{2}$	-	-	-	

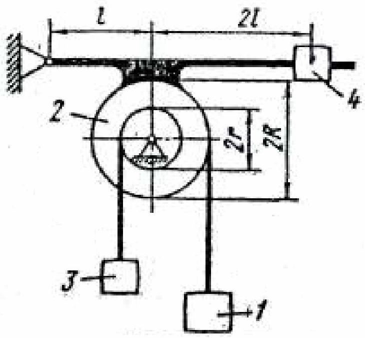
2	G	G	G	-	2	$r\sqrt{2}$	-	-	-	
3	$3G$	G	G	-	2	$r\sqrt{2}$	-	-	0,1	
4	G	G	$2G$	-	-	-	-	-	0,2	$r_2 = r_3$
5	$2G$	G	G	G	3	$2r$	-	-	-	
6	$2G$	G	$2G$	-	3	$2r$	-	-	0,2	
7	$2G$	G	$2G$	-	3	$2r$	-	-	0,2	
8	$2G$	G	$2G$	-	3	$2r$	-	-	0,2	
9	$2G$	G	$2G$	-	3	$2r$	-	$0{,}2G$	0,2	
10	$2G$	$2G$	G	-	4	-	$2r$	$G/3$	0,4	
11	$2G$	G	$2G$	$0{,}2G$	3	$2r$	-	-	0,2	
12	$2G$	G	$2G$	$0{,}2G$	3	$2r$	-	-	0,2	
13	$4G$	$2G$	G	$4G$	-	$r_2\sqrt{2}$	$2r_3$	-	-	$r_2 = 2r_3$ $R_2 = R_3$
14	-	$2G$	G	$4G$	-	$r_2\sqrt{2}$	$2r_3$	$8G$	-	$r_2 = 2r_3$ $R_3 = 1.5R_2$
15	$4G$	G	$2G$	$4G$	-	$r_2\sqrt{2}$	$2r_3$	-	-	$r_2 = 2r_3$ $R_3 = 1.5R_2$
16	-	G	$2G$	$4G$	-	$r_2\sqrt{2}$	$2r_3$	$4G$	-	$r_2 = 2r_3$ $R_3 = 1.5R_2$
17	$2G$	G	G	-	2	$r\sqrt{2}$	-	-	0,1	
18	$3G$	$0{,}2G$	$0{,}1G$	$0{,}5G$	2	-	-	-	0,4	
19	$4G$	$0{,}3G$	$0{,}2G$	$3G$	3	$2r$	$1{,}2r$	-	0,1	$r_3 = 1.2r$ $R_3 = 1.2r_3$
20	$4G$	$0{,}2G$	$0{,}1G$	$3G$	2	$1{,}6r$	$r\sqrt{2}$	-	0,2	$r_2 = 1.5r$ $R_2 = 1.2r_2$
21	$5G$	$0{,}1G$	$0{,}2G$	-	3	-	$r\sqrt{2}$	G	-	
22	G	$0{,}2G$	$0{,}3G$	-	2	-	$r\sqrt{2}$	G	-	
23	G	$0{,}2G$	$0{,}1G$	-	1,5	$1{,}2r$	-	$2G$	-	$R_3 = 1.2r$
24	$2G$	G	G	$8G$	-	-	-	-	-	Массы четырех колес одинаковы
25	$6G$	$2G$	$2G$	G	-	-	-	-	-	$r_3 = r_4$
26	$6G$	G	$2G$	-	-	-	-	-	-	$r_3 = r_2$
27	G	G	G	$4G$	2	$r\sqrt{2}$	$r\sqrt{2}$	-	-	
28	$3G$	G	G	-	2	$r\sqrt{2}$	-	-	0,1	
29	$6G$	$3G$	G	G	2	-	$r\sqrt{2}$	-	-	$i_{4x} = i_{3x}$
30	$8G$	G	G	$2G$	-	-	-	-	0,1	


1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
2r
2R
60°
45°
30°
P
2l
l

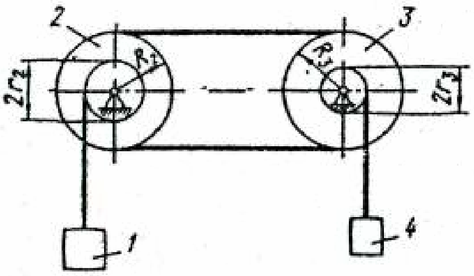
11



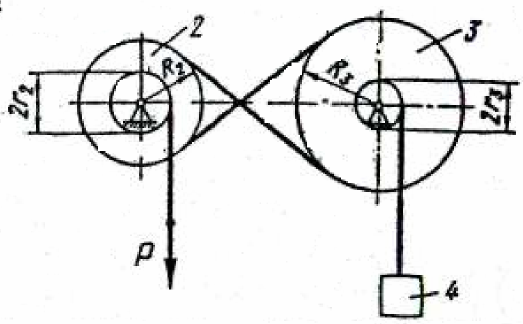
12



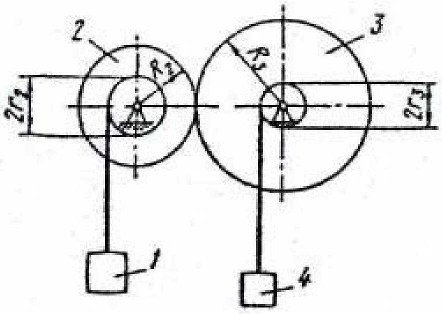
13



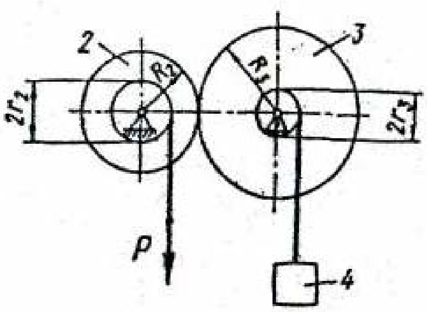
14



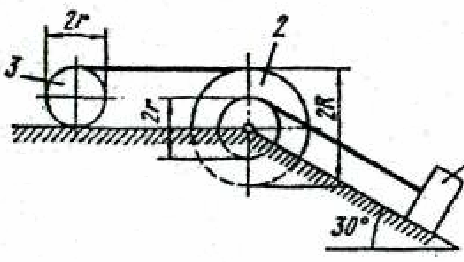
15



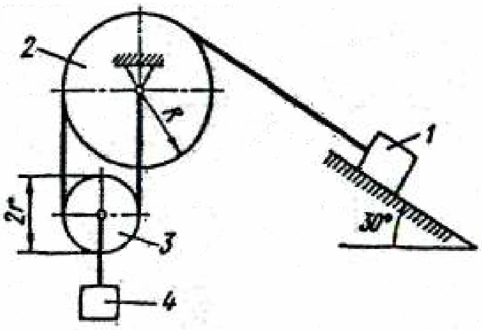
16



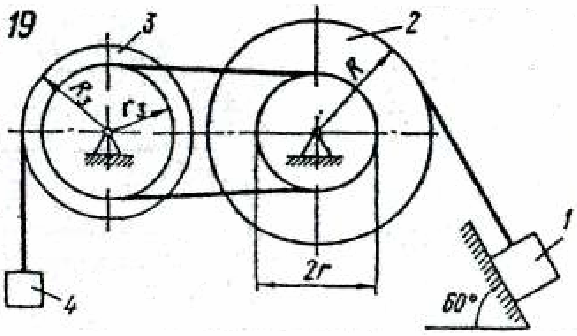
17



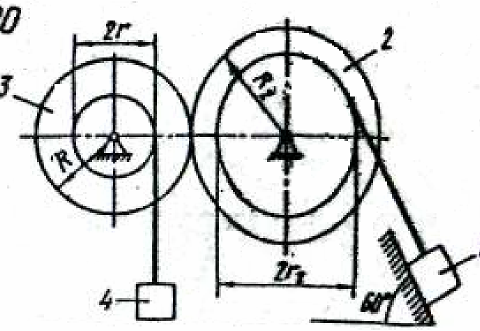
18

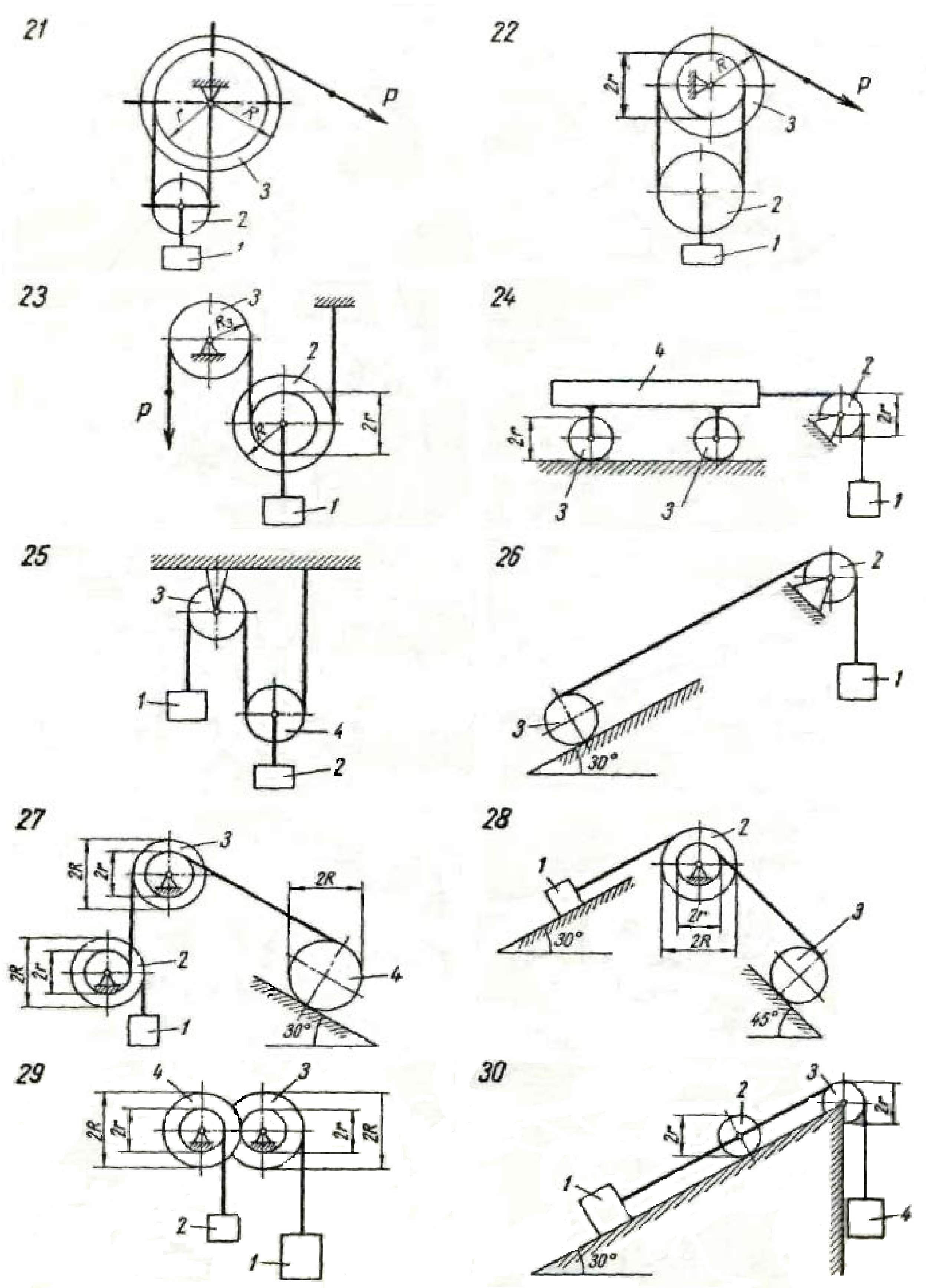


19



20





Курсовое задание Д23. Тема: «Малые колебания механической системы с одной степенью свободы»

Определить частоту и период малых свободных колебаний механической системы с одной степенью свободы, пренебрегая силами сопротивления и массами нитей.

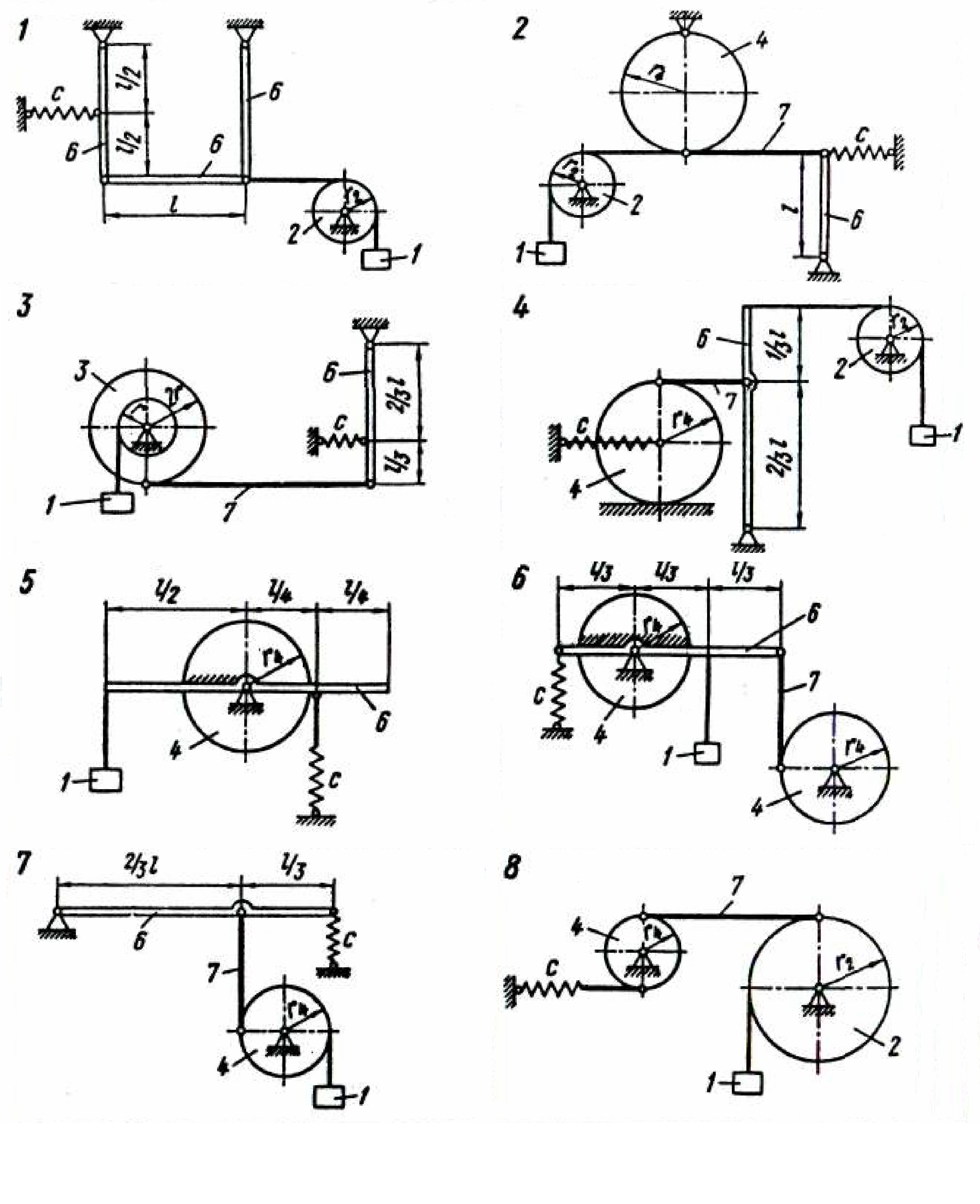
Найти уравнение движения груза 1 $y = y(t)$, приняв за начало отсчета положение покоя груза 1 (при статической деформации пружин). Найти также амплитуду колебаний груза 1.

№ варианта	l	i_x	i'_x	r_4	m_1	m_2	m_3, m_4, m_5	m_6	c	Начальные условия $(t=0)$	
	м				кг				Н/см	y_0, см	$\dot{y}_0$, см/с
1	0,5	-	-	-	1	2	-	3	40	0,1	5,0
2	0,5	-	-	0,2	1	2	2	3	40	0	6,0
3	0,5	$3/2r$	-	-	1	-	4	3	20	0,2	7,0
4	0,6	-	-	-	1	2	3	2	36	0,2	0
5	0,6	-	-	0,15	1	-	3	3	16	0	8,0
6	0,6	-	-	0,15	1	-	1	1	40	0,3	7,0
7	-	-	-	-	1	-	2	2	40	0,4	0
8	-	-	-	-	1	3	2	-	40	0	6,0
9	0,6	-	-	-	1	2	-	3	38	0,5	5,0
10	0,6	-	-	-	1	2	-	3	32	0	6,0
11	-	-	-	-	1	2	-	3	30	0,4	7,0
12	0,5	-	-	-	1	2	-	3	20	0,2	0
13	0,3	-	-	-	1	1	1	2	32	0	8,0
14	0,4	-	-	0,1	1	-	2	3	20	0	7,0
15	0,4	$r\sqrt{3}$	-	-	1	-	2	2	20	0,1	0
16	-	-	-	-	1	2	3	-	32	0,3	6,0
17	-	-	-	-	1	2	-	2	20	0	5,0
18	-	-	-	-	1	2	1	-	40	0	6,0
19	0,2	-	-	-	1	1	-	1	32	0,1	0
20	0,5	-	-	-	1	2	-	3	20	0,4	7,0
21	-	$2r$	-	-	1	-	2	3	32	0	8,0
22	-	-	$r\sqrt{2}$	-	1	2	4	-	40	0,1	7,0
23	0,4	-	-	0,2	1	2	2	3	40	0,3	0
24	-	-	$r\sqrt{3}$	-	1	-	3	2	40	0	6,0
25	0,3	-	-	0,1	1	2	2	1	40	0,2	5,0
26	-	$r\sqrt{2}$	-	-	1	-	2	-	40	0,3	0
27	-	-	$3/2r$	-	1	2	3	-	40	0	6,0
28	-	-	$r\sqrt{3}$	-	1	2	3	-	40	0,2	0
29	-	-	$4r/3$	-	1	2	3	-	40	0	7,0
30	-	-	$r\sqrt{2}$	-	1	2	3	-	40	0,3	7,0

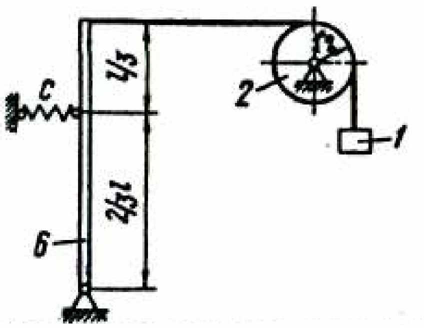
В задании приняты следующие обозначения: 1 – груз массой m_1; 2 – блок массой m_2 и радиусом r_2 (сплошной однородный диск); 3 – блок массой m_3 и радиусом инерции i_x; 4 – сплошной однородный диск массой m_4 и радиусом r_4; 5 – диск массой m_5 и радиусом инерции i'_x; 6 – тонкий однородный стержень массой m_6 и длиной l; 7 – стержень, масса которого не учитывается; c – коэффициент жесткости пружины; y_0 – начальное отклонение груза 1 по вертикали от положения покоя, соответствующего статической деформации пружины; $\dot{y}_0$ – проекция начальной скорости $\vec{v}_0$ груза 1 на вертикальную ось.

На рисунках системы тел показаны в положении покоя (при статической деформации пружин).

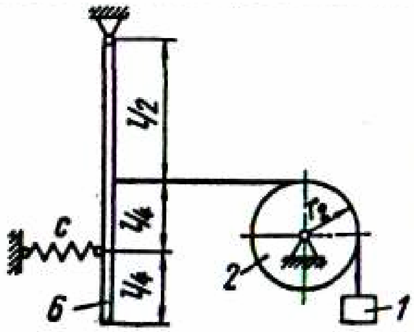
В вариантах 5, 6, 14, 23 стержень 6 жестко соединен с диском 4.



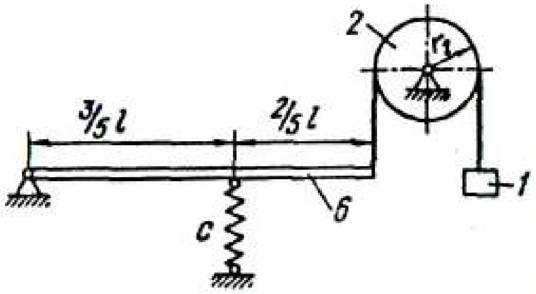
9



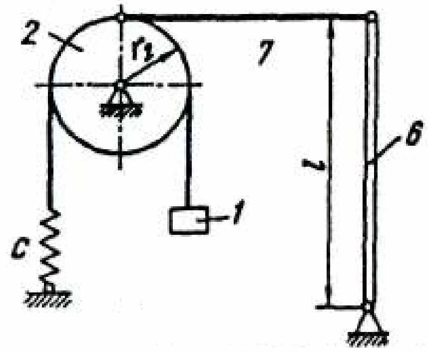
10



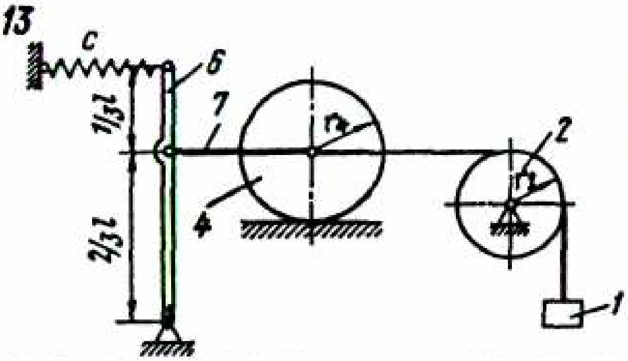
11



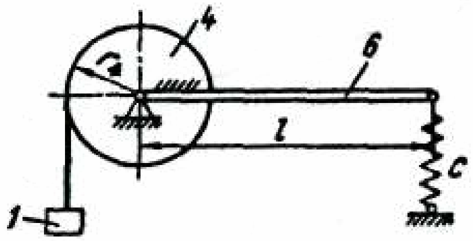
12



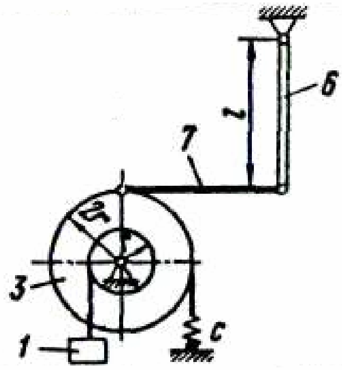
13



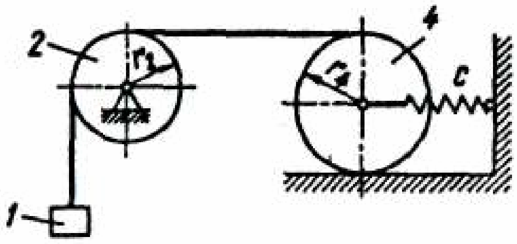
14



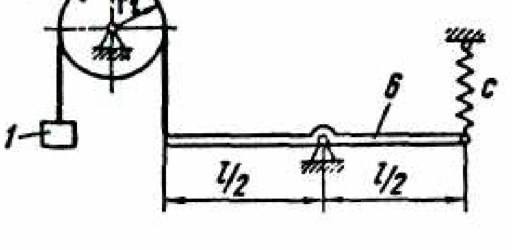
15



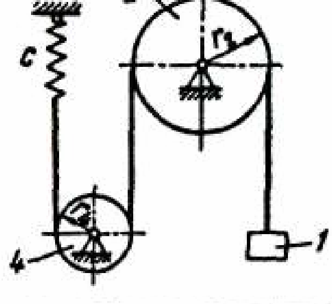
16



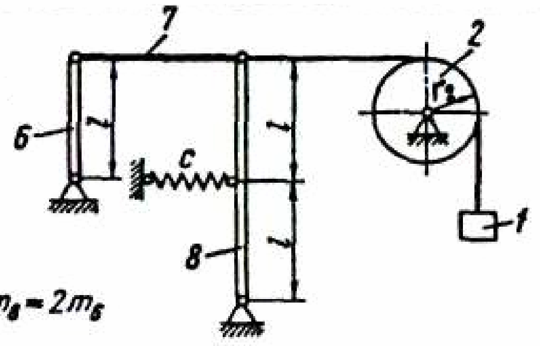
17



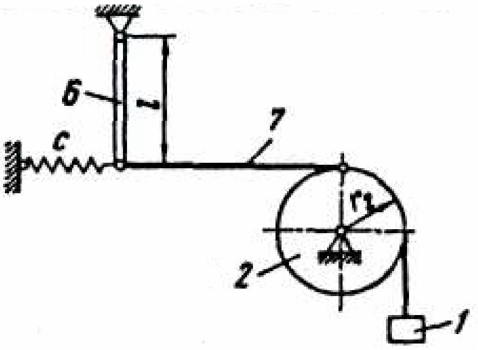
18



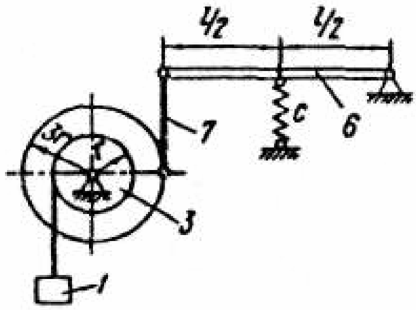
19



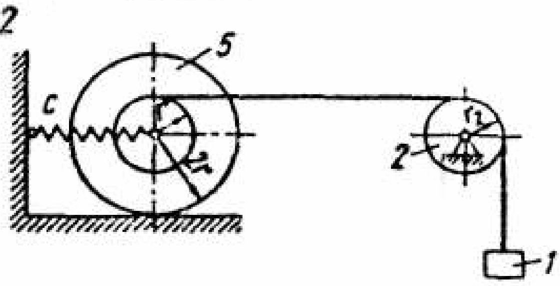
20



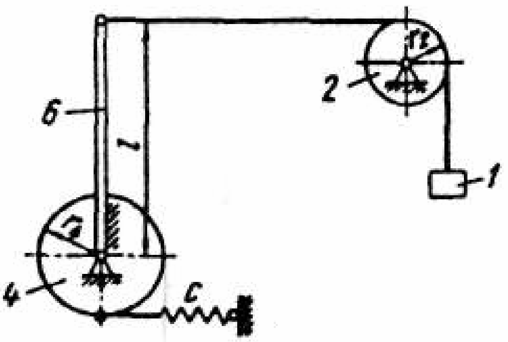
21



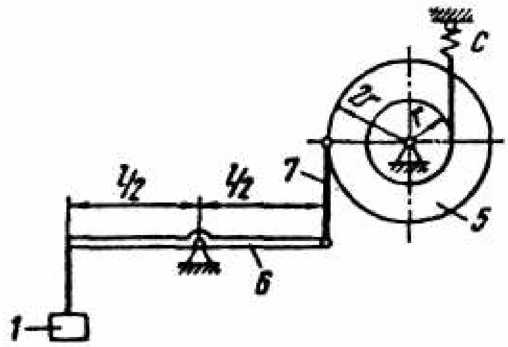
22



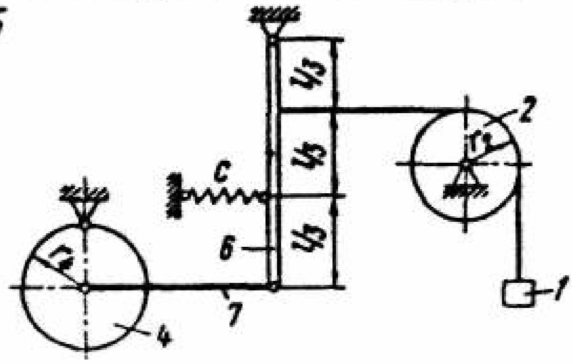
23



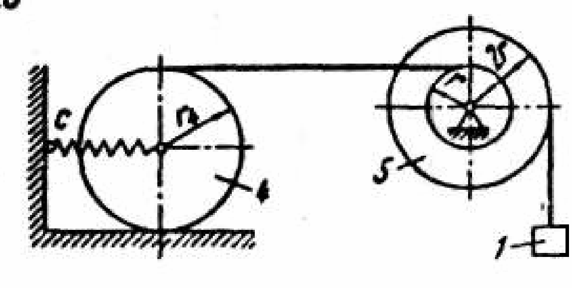
24



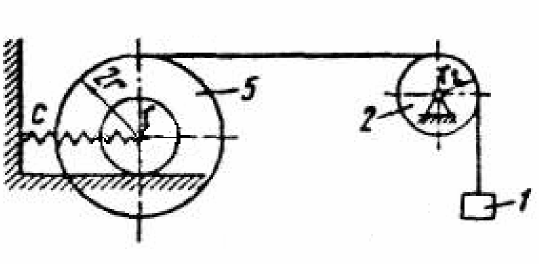
25



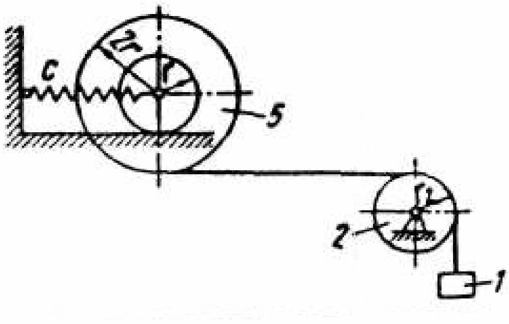
26



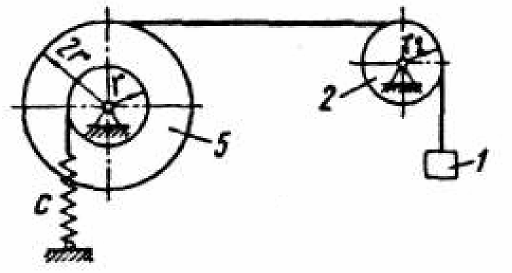
27



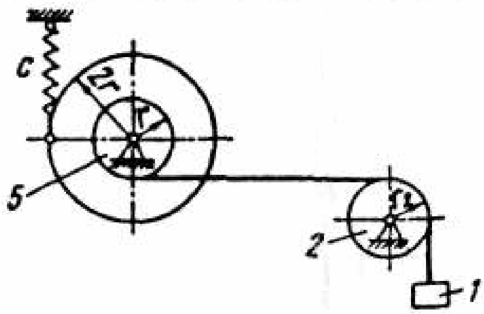
28



29



30



5. МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К ВЫПОЛНЕНИЮ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАДАНИЙ.

5.1. Пример выполнения курсового задания К3.

Условие $OA = 20$ (см); $\omega_{OA} = 10$ (с$^{-1}$); $AB = 100$ (см); $AC = 50$ (см); $\varepsilon_{OA} = 10$ (с$^{-2}$).
Определить: v_B ,v_C ,ω_{AB} ,ε_{AB} ,a_B ,a_C

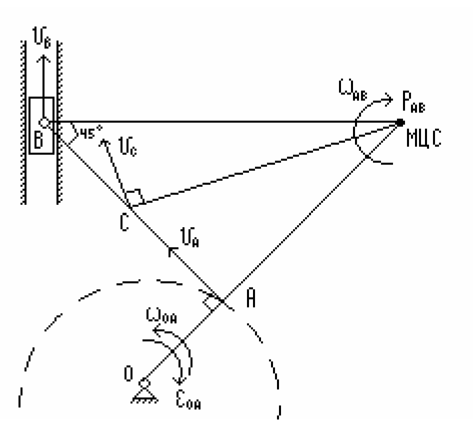


Рис.1

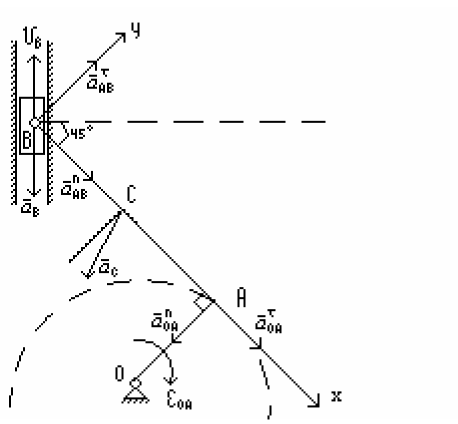


Рис.2

1. Скорости (Рис.1)
1) Звено OA (вращается со скоростью ω_{OA})
$v_A = \underbrace{\omega_{OA}}_{10}\underbrace{OA}_{20} = 200$ (см/с), $v_A = 200$ (см/с)
2) Звено AB. Точка B движется с ползуном вверх, т.е. v_B - вверх.
По теореме о проекциях на AB $v_B \cos\beta = v_A \cos\alpha$, $\alpha = 0$ (v_A проецируем на AB), $\beta = 45^o$ (v_B проецируем на AB)
$v_B \underbrace{\cos 45^o}_{\sqrt{2}/2} = v_A \underbrace{\cos 0}_{1}$, $v_B = \dfrac{2v_A}{\sqrt{2}} = v_A\sqrt{2} = 200\sqrt{2}$ (см/с)
3) Определяем угловую скорость ω_{AB}
$\omega_{AB} = \dfrac{v_A}{PA} = \dfrac{200}{100} = 2$ (с$^{-1}$)
4) Определение v_C.
$v_C \perp PC$ в сторону ω_{AB}
$v_C = \omega_{AB} \underbrace{PC}_{\sqrt{PA^2+AC^2}} = 2\sqrt{100^2 + 50^2} = 100\sqrt{5}$ (см/с).
2. Ускорения (Рис.2).
1) Звено OA (вращается со скоростью ω_{OA} и с ускорением ε_{OA}). Точка O - полюс.
$\overline{a}_A = \underbrace{\overline{a}_O}_{0} + \underbrace{\overline{a}_{OA}^n}_{\omega_{OA}^2 OA} + \underbrace{\overline{a}_{OA}^\tau}_{\varepsilon_{OA} OA}$
$\overline{a}_{OA}^n$ направлено к полюсу O. $\overline{a}_{OA}^\tau$ перпендикулярно OA в сторону действия ε_{OA}.
$a_{OA}^n = \omega_{OA}^2 OA = 10^2 * 20 = 2000$ (см/с^2)

$a^{\tau}_{OA} = \varepsilon_{OA} OA = 10*20 = 200$ (см/с^2)

2) Звено AB. Точка A - полюс.

$\vec{a}_B = \underbrace{\vec{a}_A}_{\vec{a}^{\tau}_{OA}+\vec{a}^{n}_{OA}} + \underbrace{\vec{a}^{n}_{AB}}_{\omega^2_{AB}AB} + \underbrace{\vec{a}^{\tau}_{AB}}_{\varepsilon_{AB}AB}$ (*)

$\vec{a}^{n}_{AB}$ направлено к полюсу A по звену AB.

$\vec{a}^{\tau}_{AB} \perp AB$.

Проецируем почленно на перпендикуляр к $\vec{a}^{\tau}_{AB}$, т.е. на x.

$a_B \cos 45^o = 0 + a^{\tau}_{OA} + a^{n}_{AB} + 0$, $a_B = \dfrac{600*2}{\sqrt{2}} = 600\sqrt{2}$ (см/с^2).

«+» означает, что $\vec{a}_B$ направлено так, как указано на чертеже.

3) Звено AB. Определяем $\varepsilon_{AB} = \dfrac{a^{\tau}_{AB}}{AB}$, т.е. определяем a^{τ}_{AB}. Проецируем почленно (*) на ось y.

$-a_B \sin 45^o = -a^{n}_{OA} + 0 + 0 + a^{\tau}_{AB}$

$a^{\tau}_{AB} = 1400$ (см/с^2), $\varepsilon_{AB} = \dfrac{1400}{100} = 14$ (с$^{-2}$)

4) Звено AB. Определяем $\vec{a}_C$. Точка A - полюс.

$\vec{a}_C = \vec{a}^{n}_{OA} + \vec{a}^{\tau}_{OA} + \underbrace{\vec{a}^{n}_{AC}}_{\omega^2_{AB}AC} + \underbrace{\vec{a}^{\tau}_{AC}}_{\varepsilon_{AB}AC}$.

Проецируем почленно на оси x, y.

$a_{Cx} = 0 + a^{\tau}_{OA} + a^{n}_{AC} + 0 = 200 + 200 = 400$

$a_{Cy} = -a^{n}_{OA} + 0 + 0 + a^{\tau}_{AC} = -2000 + 700 = -1300$

$a_C = \sqrt{a^2_{Cx} + a^2_{Cy}} = \sqrt{400^2 + 1300^2} = 100\sqrt{185}$ (см/с^2).

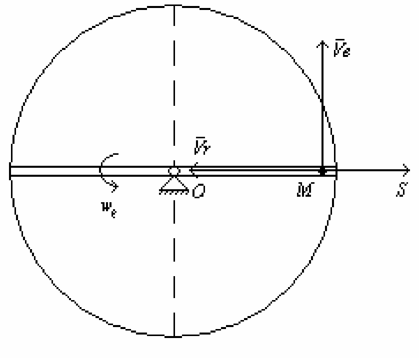
Таблица ответов

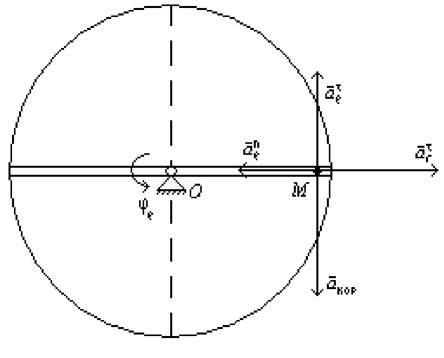
v_B, см/с	v_C, см/с	ω_{AB}, с$^{-1}$	ε_{AB}, с$^{-2}$	a_B, см/с^2	a_C, см/с^2
$200\sqrt{2}$	$100\sqrt{5}$	2	14	$600\sqrt{2}$	$100\sqrt{185}$

5.2. Пример выполнения курсового задания К10.

Условие: $\varphi_e = \dfrac{2}{3}t^3$ (рад); $OM = S_r = 4t^2 - 10t + 8$ (см); $t_1 = 1$ (с).

Определить $\vec{v}_{абс}$, $\vec{a}_{абс}$



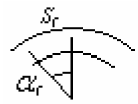


1. Определение положения точки M в момент времени t_1.

$S_r = 4t_1^2 - 10t_1 + 8 = 4*1 - 10*1 + 8 = 2$ (см)

«+» значит, что точка M_1 находится с положительной стороны от точки O.

2. Относительное движение (движение по желобу по закону $S_r = 4t^2 - 10t + 8$ (см))

Если желоб кривой, то $\alpha_r = \dfrac{S_r}{R}$  R - дано.

$S(t) = 4t^2 - 10t + 8$, $\dot{S} = 8t - 10$, $\ddot{S} = 8$

$v_r = 8t_1 - 10 = 8*1 - 10 = -2$ (см/с)

«-» значит, что v_r направлено по оси S_r в отрицательную сторону (против оси S_r).

$a_r^\tau = S_r = +8$ (см/с^2)

«+» значит, что a_r^τ направлено по оси S_r

$a_r^n = \dfrac{v_r^2}{\rho_r}$, $a_r^n = \dfrac{2^2}{\infty} = 0$

ρ_r определяется из чертежа, это радиус кривизны траектории относительного движения, т.е. желоба.

$\rho_r = \infty$, т.к. желоб – прямая.

3. Переносное движение (вращение по закону $\varphi_e = \dfrac{2}{3}t^3$ (рад) вокруг оси).

$\varphi_e = \dfrac{2}{3}t^3$

$\dot{\varphi}_e = 2t^2$, $\omega_e = \dot{\varphi}_e = 2t_1^2$, $\omega_e = +2$ (рад/с)

«+» значит, что ω_e направлено как φ_e.

$\ddot{\varphi}_e = \varepsilon_e = 4t$, $\varepsilon_e = 4t_1$, $\varepsilon_e = +4$ (рад/с^2)

«+» значит, что ε_e направлено как φ_e.

ρ_e - радиус кривизны траектории переносного движения, т.е. траектории вращения.

В данном случае, $\rho_e = OM$, $\rho_e = 2$ (см). ρ_e определяется из чертежа.

$|v_e| = |\omega_e|\rho_e$, $|v_e| = 1 = 2*2 = 4$ (см/с)

$|a_e^\tau| = |\varepsilon_e|\rho_e$, $|a_e^\tau| = 4*2 = 8$ (см/с^2)

$|a_e^n| = \omega_e^2\rho_e$, $|a_e^n| = 2^2*2 = 8$ (см/с^2)

v_e направлено по касательной к переносной окружности в точке M_1 в сторону ω_e, т.е. $v_e \perp \rho_e$ в сторону влияния ω_e.

a_e^τ направлено по касательной к переносной окружности в точке M_1 в сторону ε_e, т.е. перпендикулярно ρ_e в сторону ε_e.

a_e^n направлено по ρ_e от точки M_1 к оси вращения.

4. Абсолютное движение (результирующее движение точки M_1 относительно неподвижных опор).

По теореме о сложении скоростей

$v_{абс} = v_{пер} + v_{отн}$

$v_{ax} = v_{ex} + v_{rx}$

$v_{ay} = v_{ey} + v_{ry}$

$v_{абс} = \sqrt{v_{ax}^2 + v_{ay}^2}$

Из чертежа видно, что $v_r \perp v_e$, следовательно, по теореме Пифагора

$v_{абс} = \sqrt{v_e^2 + v_r^2}$, $v_{абс} = \sqrt{4^2 + (-2)^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$.

$\left|\bar{a}_{кор}\right| = 2|\omega_e||v_r|\sin(\angle(\omega_e, v_r))$, следовательно, $\left|\bar{a}_{кор}\right| = 2*2*|-2|\sin 90^o = 8$ (см/с^2), направлено в плоскости чертежа вниз.

По теореме Кориолиса о сложении ускорений

$$\bar{a}_{абс} = \underbrace{\bar{a}_e}_{\bar{a}_e^n + \bar{a}_e^\tau} + \underbrace{\bar{a}_r}_{\bar{a}_r^\tau} + \bar{a}_{кор}$$

В проекциях: $\bar{a}_{ax} = \bar{a}_{ex}^n + \bar{a}_{ex}^\tau + \bar{a}_{rx}^\tau + \bar{a}_{корx} = -\left|a_e^n\right| + 0 + \left|a_r^\tau\right| + 0$

$$\bar{a}_{ay} = \bar{a}_{ey}^n + \bar{a}_{ey}^\tau + \bar{a}_{ry}^\tau + \bar{a}_{корy} = 0 + \left|a_e^\tau\right| + 0 - \left|a_{кор}\right|$$

$\bar{a}_{ax} = -8 + 8 = 0$

$\bar{a}_{ay} = +8 - 8 = 0$

$a_{абс} = \sqrt{a_{ax}^2 + a_{ay}^2}$

$\boldsymbol{a}_{\text{àáñ}} = \mathbf{0}$

Таблица ответов

S_r,	α_r,	ρ_r,	v_r,	a_r^τ,	a_r^n,	ρ_e,	ω_e,	ε_e,	v_e,	a_e^τ,	a_e^n,	$v_{абс}$,	$a_{кор}$,	$a_{абс}$,
см	град	см	см/с	см/с^2	см/с^2	см	с$^{-1}$	с$^{-2}$	см/с	см/с^2	см/с^2	см/с	см/с^2	см/с^2
+2	-	∞	-2	+8	0	2	+2	+4	4	8	8	$2\sqrt{3}$	8	0

5.3. Пример выполнения курсового задания Д15.

Метод шарнирного расчленения.

Система расчленяется в шарнире на две части.

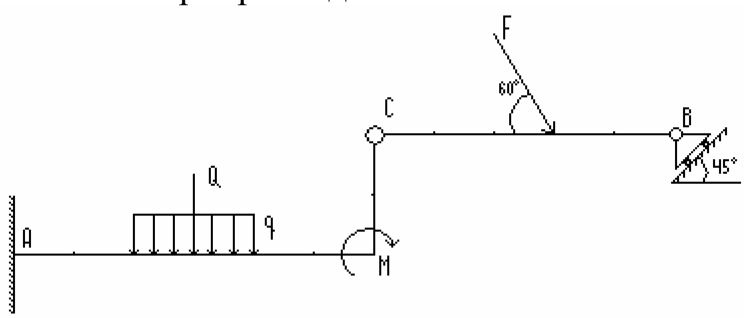


Рис.1.

Определить реакции опор.

1. Схема 1.

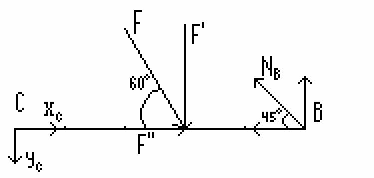


Схема 1.

1) $\sum M_B(F)=0$

$\underbrace{M_B(N_B)}_{0,\ \cap_{em}}+\underbrace{M_B(F')}_{+\underbrace{F'}_{F\cos 30^o}*BF'}+\underbrace{M_B(F'')}_{0,\ \cap_{em}}+\underbrace{M_B(X_C)}_{0,\ \cap_{em}}+\underbrace{M_B(Y_C)}_{+Y_C*CB}=0$, нашли Y_C.

2) $\sum F_{ky}=0$

$-Y_C-\underbrace{F'}_{F\cos 30}+N_B\cos 45=0$, нашли N_B.

3) $\sum F_{kx}=0$

$+X_C+F\cos 60-N_B\cos 45=0$, нашли X_C.

2. Схема 2.

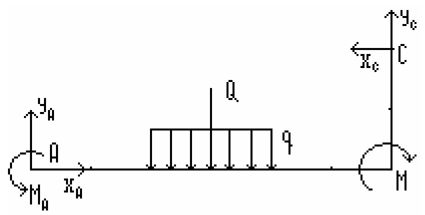


Схема 2.

1) $\sum F_{kx}=0$

$+X_A-X_C=0$, нашли X_A.

2) $\sum F_{ky}=0$

$+Y_A-\underbrace{Q}_{q*l}+Y_C=0$, нашли Y_A.

3) $\sum M_A(F)=0$

$+M_A+\underbrace{M_A(X_A)}_{0,\ \cap}+\underbrace{M_A(Y_A)}_{0,\ \cap}+\underbrace{M_A(Q)}_{-Q*AQ}-M+\underbrace{M_A(X_C)}_{+X_C*X_CA}+\underbrace{M_A(Y_C)}_{+Y_C*Y_CA}=0$, нашли M_A.

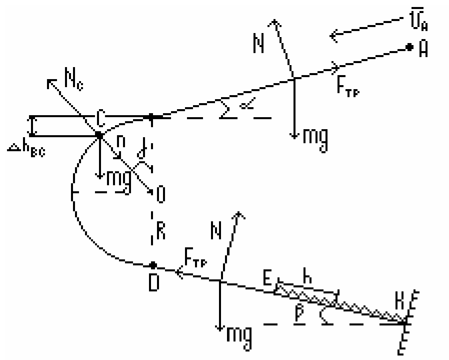
Подставлять найденные прежде силы с их полученными знаками.

5.4. Пример выполнения курсового задания Д6.

Дано v_A, f, m, τ_{AB} или τ_{BD}, c, α, β, R.

Определить скорость в точке B, скорость в точке C, реакцию в точке C, т.е. v_B, v_C, N_C.

Дополнительно определить v_D, S, H, h, t_{DE}.



1) Участок AB. По теореме импульсов: $Q_2 - Q_1 = \sum\limits_k F_k \tau$

$m\vec{v}_B - m\vec{v}_A = (m\vec{g} + \vec{F}_{mp} + \vec{N})\tau$

В проекции на v: $mv_B - mv_A = (mg\sin\alpha - \underbrace{F_{mp}}_{f\,\underbrace{N}_{mg\cos\alpha}})\tau$, нашли v_B.

2) Участок BC. По теореме об изменении кинетической энергии: $T_C - T_B = \sum A$

или $\dfrac{mv_C^2}{2} - \dfrac{mv_B^2}{2} = \underbrace{A(mg)}_{+mg\underbrace{\Delta h}_{R-R\cos\gamma}} + \underbrace{A(N)}_{0,\ \perp v}$, нашли v_C.

3) Точка C. По второму закону Ньютона $m\vec{a}_C = \sum \vec{F}$ или $m\vec{a}_C = m\vec{g} + \vec{N}_C$.

Проецируем на $\vec{n}$: $m\underbrace{a_{Cn}}_{v_C^2/\rho} = mg\cos\gamma - N_C$, $\rho = R$. Нашли N_C.

4) Участок BD. По теореме об изменении кинетической энергии:

$\dfrac{mv_D^2}{2} - \dfrac{mv_B^2}{2} = \underbrace{A(mg)}_{+mg\underbrace{\Delta h}_{2R}} + \underbrace{A(N)}_{0,\ \perp v}$, нашли v_D.

5) Участок DE. По теореме об изменении кинетической энергии:

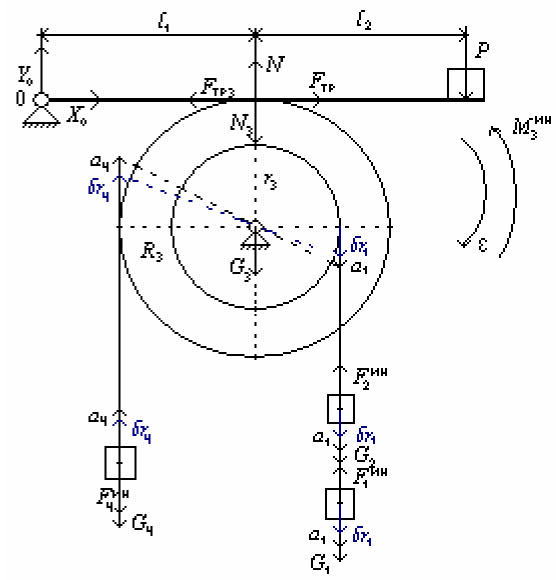
$\dfrac{mv_E^2}{2} - \dfrac{mv_D^2}{2} = \underbrace{A(mg)}_{+mg\underbrace{\Delta h}_{R\sin\beta}} + \underbrace{A(N)}_{0,\ \perp v} + \underbrace{A(F_{mp})}_{-\underbrace{F_{mp}}_{fmg\cos\beta}\underbrace{DE}_{R}}$, нашли v_E.

6) Участок EK. По теореме об изменении кинетической энергии:

$\underbrace{\dfrac{mv_K^2}{2}}_{0, т.к. v_K=0} - \dfrac{mv_E^2}{2} = \underbrace{A(mg)}_{+mg\underbrace{\Delta h}_{h\sin\beta}} + \underbrace{A(N)}_{0,\ \perp v} + \underbrace{A(F_{mp})}_{-hfmg\cos\beta} + \underbrace{A(F_{ynp})}_{\frac{c}{2}(\underbrace{\lambda_1^2}_{0} - \underbrace{\lambda_2^2}_{h^2})}$, нашли h.

5.5. Пример выполнения курсового задания Д19.

Дан вес всех тел $G_k = m_k g$, радиусы тел R_k, r_k, радиусы инерции i_{kx}. Определить ускорения грузов и силы натяжения тех нитей, к которым прикреплены грузы.



1) Равновесие колодки под действием сил: X_0, Y_0, P, N, F_{mp}.

$\sum\limits_i M_{oi} = 0$ (для колодки). $\underbrace{M_o(X_o)}_{0,\cap} + \underbrace{M_o(Y_o)}_{0,\cap} + \underbrace{M_o(F_{mp})}_{0,\cap} + \underbrace{M_o(N)}_{+Nl_1} + \underbrace{M_o(P)}_{-P(l_1+l_2)} = 0$, нашли N.

$F_{mp} = fN$, $|F_{mp}| = |F_{mp3}| = fN$, $|N_3| = N$.

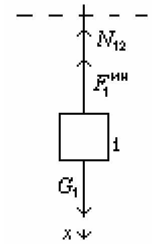
2) По принципу Лагранжа – Даламбера для всей системы колодка неподвижна, значит все ее силы не двигаются, следовательно, работа всех этих сил равна нулю.

$\sum \delta A + \sum \delta A^{ин} = 0$.

$$\underbrace{\delta A(G_1)}_{+G_1\delta r_1} + \underbrace{\delta A(G_2)}_{+G_2\delta r_1} + \underbrace{\delta A(G_3)}_{0} + \underbrace{\delta A(G_4)}_{-G_4 \underbrace{\delta r_4}_{\frac{\delta r_1 R_3}{r_3}}} + \underbrace{\delta A(F_1^{ин})}_{-\underbrace{|F_1^{ин}|}_{\frac{G_1}{g}a_1}\delta r_1} + \underbrace{\delta A(F_2^{ин})}_{-\underbrace{|F_2^{ин}|}_{\frac{G_2}{g}a_1}\delta r_1} + \underbrace{\delta A(N)}_{0,\perp} + \underbrace{\delta A(F_{mp3})}_{-F_{mp3}\underbrace{\delta r_4}_{\frac{\delta r_1 R_3}{r_3}}} + \underbrace{\delta A(F_4^{ин})}_{-\underbrace{|F_4^{ин}|}_{\frac{G_4}{g}\underbrace{a_4}_{\frac{a_1 R_3}{r_3}}}\underbrace{\delta r_4}_{\frac{\delta r_1 R_3}{r_3}}} + \underbrace{\delta A(M_3^{ин})}_{-\underbrace{|M_3^{ин}|}_{\underbrace{I_3}_{m_3 i_{3x}^2}\underbrace{\varepsilon_3}_{\frac{a_1}{r_3}}}\underbrace{\delta\varphi_3}_{\frac{\delta r_1}{r_3}}} = 0$$

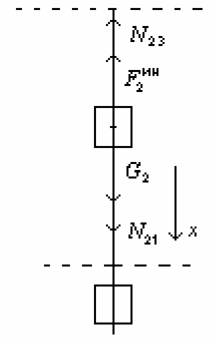
Сократим на δr_1 и найдем a_1.

3) По принципу Даламбера для тела 1.



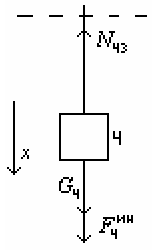
$\sum F_{kx} = 0$, $G_1 - \underbrace{|F_1^{ин}|}_{\frac{G_1}{g}a_1} - N_{12} = 0$, нашли N_{12}.

4) По принципу Даламбера для тела 2.



$\sum F_{kx} = 0$, $G_2 - \underbrace{\left|F_2^{ин}\right|}_{\frac{G_2}{g}a_1} + \underbrace{\left|N_{21}\right|}_{\left|N_{12}\right|} - N_{23} = 0$, нашли N_{23}

5) По принципу Даламбера для тела 4.



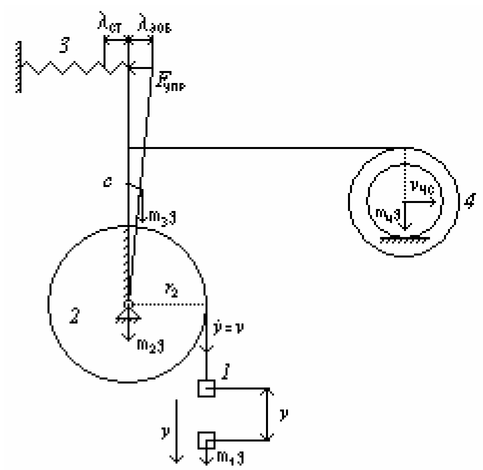
$\sum F_{kx} = 0$, $G_4 - \underbrace{\left|F_4^{ин}\right|}_{\frac{G_4}{g}\underbrace{a_4}_{\frac{a_1 R_3}{r_3}}} - N_{43} = 0$, нашли N_{43}.

5.6. Пример выполнения курсового задания Д23.

Найти закон колебаний системы с одной степенью свободы в виде $y = A\sin(kt+\alpha)$, α - в радианах, y, A - в сантиметрах, k - в с$^{-1}$.

На рисунке изображено положение равновесия.

Для тела 1 ось y вниз.



1) выбор обобщенных координат. Одна степень свободы, следовательно, одна обобщенная координата y. Начало координат оси y в положении статического покоя груза 1, ось $\boldsymbol{y}$ направлена вниз.

2) Определяем кинетическую энергию системы как сумму кинетических энергий каждого из входящих в нее тел.

$$T = \sum T_i = T_1 + T_2 + T_3 + T_4$$

$$T_1 = \frac{1}{2} m_1 \underbrace{v_1^2}_{\dot{y}^2},\ T_2 = \frac{1}{2} \underbrace{I_2}_{\frac{m_2 r_2^2}{2}} \underbrace{\omega_2^2}_{\left(\frac{\dot{y}}{r_2}\right)^2},\ T_3 = \frac{1}{2} \underbrace{I_3}_{\frac{m_2 l^2}{3}} \underbrace{\omega_2^2}_{\left(\frac{\dot{y}}{r_2}\right)^2},\ T_4 = \frac{1}{2} m_4 \underbrace{v_{4c}^2}_{\left(\frac{\dot{y}}{r_2}\frac{2}{3}\frac{l r_4}{(R_4 + r_4)}\right)^2} + \frac{1}{2} \underbrace{I_{4c}}_{m_4 i_{4x}^2} \underbrace{\omega_4^2}_{\left(\frac{v_{4c}}{r_4}\right)^2}.$$

$$T = B\dot{y}^2.$$

3) Определяем потенциальную энергию системы, как работу по переходу из отклоненного состояния в состояние равновесия.

$$\Pi = \Pi(m_1 g) + \Pi(m_2 g) + \Pi(m_3 g) + \Pi(m_4 g) + \Pi(F_{упр}).$$

$$\Pi(m_1 g) = A(m_1 g) = -m_1 g \Delta h_1 = -m_1 g y.$$

$$\Pi(m_2 g) = A(m_2 g) = m_2 g \underbrace{\Delta h_{2c}}_{0} = 0.$$

$$\Pi(m_3 g) = A(m_3 g) = -m_3 g \Delta h_{3c} = -m_3 g \left(\frac{l}{2} - \frac{l}{2} \underbrace{\cos\varphi}_{1 - \frac{\varphi^2}{2}} \right) = -\frac{m_3 g l \varphi^2}{4},\ \varphi = \varphi_3 = \frac{y}{r_2}.$$

$$\Pi(m_4 g) = A(m_4 g) = m_4 g \underbrace{\Delta h_{4c}}_{0} = 0.$$

$$\Pi(F_{упр}) = A(F_{упр}) = \frac{c}{2}\Big(\underbrace{\lambda_1^2}_{\lambda_{ст} + \lambda_{доб}} - \underbrace{\lambda_2^2}_{\lambda_{ст}} \Big) = \frac{c}{2}\Big(\underbrace{\lambda_{доб}^2}_{\left(\frac{yl}{r_2}\right)^2} + 2\lambda_{ст} \underbrace{\lambda_{доб}}_{\frac{yl}{r_2}} \Big).$$

$$\Pi = \sum \Pi_i = Dy^2 + Ey.$$

По теореме Дирихле (необходимое условие экстремума) $\frac{\partial \Pi}{\partial y}\Big|_{y=0} = 0$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial y} = 2Dy + E \Rightarrow E = 0 \Rightarrow \Pi = Dy^2.$$

4) Функция Лагранжа $L = T - \Pi = B\dot{y}^2 - Dy^2$.

5) Уравнение Лагранжа $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} - \frac{\partial L}{\partial y} = 0$, $2B\ddot{y} + 2Dy = 0$.

$$\ddot{y} + \underbrace{\frac{D}{B}}_{k} y = 0.$$

Ответ $y(t) = A\sin(kt + \alpha)$, где $A = \sqrt{y_0^2 + \left(\frac{\dot{y}_0}{k}\right)^2}$,

$$\alpha = arctg \frac{k y_0}{\dot{y}_0},$$

$$\tau = \frac{2\pi}{k}.$$

6. МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ОРГАНИЗАЦИИ МЕЖСЕССИОННОГО КОНТРОЛЯ ЗНАНИЙ

Целью текущего контроля самостоятельной работы студентов является стремление упорядочить работу студентов в течение семестра, сделать ее более регулярной, организованной, ритмичной, чтобы разгрузить предэкзаменационный период, нормализовать получение зачетов, улучшить в конечном итоге качество знаний и экзаменационные показатели успеваемости.

В связи с этим подход к оценке на контрольных точках и на экзаменах должен в принципе отличаться: на экзаменах необходимо учитывать только объем и уровень знаний студентов, а на контрольных точках должны оценивать в первую очередь не качество знаний и способности студента, а объем и тщательность выполненной им работы, ее регулярность и даже посещаемость учебных занятий. Именно такой подход позволит организовать работу студентов в течение семестра должным образом.

7. ФОНД ТЕСТОВЫХ И КОНТРОЛЬНЫХ ЗАДАНИЙ ДЛЯ ОЦЕНКИ КАЧЕСТВА ЗНАНИЙ ПО ДИСЦИПЛИНЕ

Тестовые задания по проверке остаточных знаний по дисциплине
«ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА»
ВАРИАНТ 1

1. Равновесие тел изучает	1) динамика 2) статика	3) кинематика 4) кинетика
2. Родоначальником классической механики является	1) Лагранж 2) Гамильтон	3) Ньютон 4) Галилей
3. Автором аналитической механики является	1) Гамильтон 2) Якоби	3) Лагранж 4) Эйлер
4. МЦС лежит на пересечении	1) скоростей 2) перпендикуляров к скоростям	3) ускорений 4) перпендикуляров к ускорениям
5. МЦС требуется знать для вычисления	1) траектории 2) ускорений	3) скоростей 4) сил реакций
6. Качение катка по прямой без скольжения является движением	1) поступательным 2) вращательным	3) плоским 4) сферическим
7. Момент инерции однородного сплошного цилиндра массы m радиуса R относительно его оси симметрии равен	1) $\frac{mR}{2}$ 2) mR^2	3) $\frac{mR^2}{3}$ 4) $\frac{mR^2}{2}$
8. Кинетическая энергия математического маятника массы m длины l в обобщенных координатах равна	1) $\frac{ml^2\dot{\varphi}^2}{2}$ 2) $ml\varphi^2$	3) $\frac{1}{4}ml^2\dot{\varphi}^2$ 4) $\frac{1}{3}ml\dot{\varphi}^2$
9. Потенциальная энергия математического маятника при малых колебаниях в обобщенных координатах равна	1) $\frac{1}{3}mgl\varphi^2$ 2) $ml^2\dot{\varphi}^2$	3) $mgl^2\varphi^2$ 4) $\frac{1}{2}mgl\varphi^2$
10. Уравнения Лагранжа в потенциальном поле имеют вид	1) $\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}-\frac{\partial T}{\partial q_k}=0$ 2) $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}-\frac{\partial L}{\partial q_k}=0$	3) $\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial q_k}-\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}=Q_k$ 4) $\frac{\partial H}{\partial \dot{q}_k}=-\dot{p}_k$
11. Функция Гамильтона имеет смысл	1) $T-\Pi$ 2) $T+\Pi$	3) $\frac{1}{2}(T-\Pi)$ 4) $2T-\Pi$
12. Уравнение Гамильтона – Якоби имеет общий вид	1) $\frac{\partial H}{\partial q_k}=-\dot{p}_k$ 2) $\frac{\partial L}{\partial t}+H=0$	3) $\frac{\partial S}{\partial t}+H=0$ 4) $\frac{\partial S}{\partial t}-H=0$
13. Функция Лагранжа материальной точки, движущейся по поверхности цилиндра в поле тяжести, параллельном оси цилиндра, равна	1) $\frac{m}{2}\left(r^2\dot{\varphi}^2+\dot{z}^2\right)+mgz$ 2) $\frac{m}{2}\left(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2\right)-mgz$	3) $\frac{1}{2}m\dot{z}^2-mgz$ 4) $\frac{m}{2}\left(r^2\dot{\varphi}^2+\dot{z}^2\right)-mgz$
14. Функция Гамильтона для свободной материальной	1) $\frac{m}{2}\left(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2\right)+\Pi(x,y,z)$	3) $\frac{1}{2m}\left(P_x^{\,2}+P_y^{\,2}+P_z^{\,2}\right)+\Pi(x,y,z)$

точки в потенциальном поле $\Pi(x,y,z)$ равна	2) $\frac{1}{2m}\left(P_x^2+P_y^2+P_z^2\right)-\Pi(x,y,z)$ 4) $\frac{1}{2}\left(P_x^2+P_y^2+P_z^2\right)+\Pi(x,y,z)$
15. Уравнение Гамильтона – Якоби для физического маятника с заданным моментом инерции имеет вид	1) $\frac{1}{2}I\dot{\varphi}^2+\frac{\partial S}{\partial t}=0$ 3) $\frac{\partial S}{\partial t}+\frac{1}{2I}\left(\frac{\partial S}{\partial\varphi}\right)^2+\frac{mga}{2}\varphi^2=0$ 2) $\frac{\partial S}{\partial t}+\frac{\partial S}{\partial\varphi}=0$ 4) $\frac{\partial S}{\partial t}+\frac{1}{2}mga\varphi^2=0$
16. Функция Лагранжа для пространственного осциллятора имеет вид	1) $\frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2\right)-\frac{1}{2}\left(k_1x^2+k_2y^2+k_3z^2\right)$ 2) $\frac{m}{2}\left(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2\right)+\frac{k}{2}\left(x^2+y^2+z^2\right)$ 3) $\frac{1}{2m}\left(P_x^2+P_y^2+P_z^2\right)-\frac{kr^2}{2}$ 4) $\frac{m\dot{r}^2}{2}+\frac{kr^2}{2}$
17. Потенциальная энергия сферического маятника радиуса R в однородном поле тяжести равна	1) mgR 3) $-mgR$ 2) $mgR(1-\cos\theta)$ 4) $-mgR\theta$
18. Закон движения тела, падающего без начальной скорости при сопротивлении, пропорциональном скорости, имеет вид	1) $e^{-\frac{k}{m}t}+mgt$ 3) $\left(\frac{m}{k}\right)^2g\left(e^{-\frac{k}{m}t}-1\right)+\frac{mg}{k}t$ 2) $\left(\frac{m}{k}\right)^2g+\frac{mg}{k}t\left(e^{-\frac{k}{m}t}-1\right)$ 4) $e^{-mt}+mgt$
19. Закон движения математического маятника, точка подвеса которого движется в НИСО по закону $x=\frac{at^2}{2}$	1) $A\sin(kt+\alpha)-\frac{a}{g}t$ 3) $A\cos kt-at$ 2) $A\sin(kt+\alpha)+\frac{a}{g}$ 4) $A\sin\left(\sqrt{\frac{g}{l}}t+\alpha\right)-\frac{a}{g}$
20. Период малых колебаний астатического маятника массы m с пружинами жесткости c равен	1) $\frac{2\pi}{\frac{c}{m}+\frac{g}{l}}$ 3) $\frac{2\pi}{\sqrt{2\frac{c}{m}+\frac{g}{l}}}$ 2) $\frac{2\pi}{\sqrt{2\frac{c}{m}-\frac{g}{l}}}$ 4) $2\pi\sqrt{\frac{c}{m}}$

Тестовые задания по проверке остаточных знаний по дисциплине
«ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА»
ВАРИАНТ 2

1. Равновесие тел изучает	1) статика 2) динамика	3) кинематика 4) кинетика
2. Родоначальником классической механики является	1) Лагранж 2) Ньютон	3) Гамильтон 4) Галилей
3. Автором аналитической механики является	1) Гамильтон 2) Якоби	3) Эйлер 4) Лагранж
4. МЦС лежит на пересечении	1) скоростей 2) ускорений	3) перпендикуляров к скоростям 4) перпендикуляров к ускорениям
5. МЦС требуется знать для вычисления	1) скоростей 2) ускорений	3) траектории 4) сил реакций
6. Качение катка по прямой без скольжения является движением	1) поступательным 2) плоским	3) вращательным 4) сферическим
7. Момент инерции однородного сплошного цилиндра массы m радиуса R относительно его оси симметрии равен	1) $\frac{mR^2}{2}$ 2) mR^2	3) $\frac{mR^2}{3}$ 4) $\frac{mR}{2}$
8. Кинетическая энергия математического маятника массы m длины l в обобщенных координатах равна	1) $ml\varphi^2$ 2) $\frac{ml^2\dot{\varphi}^2}{2}$	3) $\frac{1}{4}ml^2\dot{\varphi}^2$ 4) $\frac{1}{3}ml\dot{\varphi}^2$
9. Потенциальная энергия математического маятника при малых колебаниях в обобщенных координатах равна	1) $\frac{1}{3}mgl\varphi^2$ 2) $ml^2\dot{\varphi}^2$	3) $\frac{1}{2}mgl\varphi^2$ 4) $mgl^2\varphi^2$
10. Уравнения Лагранжа в потенциальном поле имеют вид	1) $\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}-\frac{\partial T}{\partial q_k}=0$ 2) $\frac{\partial H}{\partial \dot{q}_k}=-\dot{p}_k$	3) $\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial q_k}-\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}=Q_k$ 4) $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}-\frac{\partial L}{\partial q_k}=0$
11. Функция Гамильтона имеет смысл	1) $T+П$ 2) $T-П$	3) $\frac{1}{2}(T-П)$ 4) $2T-П$
12. Уравнение Гамильтона – Якоби имеет общий вид	1) $\frac{\partial H}{\partial q_k}=-\dot{p}_k$ 2) $\frac{\partial L}{\partial t}+H=0$	3) $\frac{\partial S}{\partial t}-H=0$ 4) $\frac{\partial S}{\partial t}+H=0$
13. Функция Лагранжа материальной точки, движущейся по поверхности цилиндра в поле тяжести, параллельном оси цилиндра, равна	1) $\frac{m}{2}\left(r^2\dot{\varphi}^2+\dot{z}^2\right)+mgz$ 2) $\frac{m}{2}\left(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2\right)-mgz$	3) $\frac{m}{2}\left(r^2\dot{\varphi}^2+\dot{z}^2\right)-mgz$ 4) $\frac{1}{2}m\dot{z}^2-mgz$
14. Функция Гамильтона для свободной материальной точки в потенциальном поле $П(x,y,z)$ равна	1) $\frac{1}{2m}\left(P_x^{\,2}+P_y^{\,2}+P_z^{\,2}\right)+П(x,y,z)$ 2) $\frac{1}{2m}\left(P_x^{\,2}+P_y^{\,2}+P_z^{\,2}\right)-П(x,y,z)$	3) $\frac{m}{2}\left(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2\right)+П(x,y,z)$ 4) $\frac{1}{2}\left(P_x^{\,2}+P_y^{\,2}+P_z^{\,2}\right)+П(x,y,z)$

15. Уравнение Гамильтона – Якоби для физического маятника с заданным моментом инерции имеет вид	1) $\frac{1}{2}I\dot{\varphi}^2+\frac{\partial S}{\partial t}=0$ 2) $\frac{\partial S}{\partial t}+\frac{\partial S}{\partial \varphi}=0$	3) $\frac{\partial S}{\partial t}+\frac{1}{2}mga\varphi^2=0$ 4) $\frac{\partial S}{\partial t}+\frac{1}{2I}\left(\frac{\partial S}{\partial \varphi}\right)^2+\frac{mga}{2}\varphi^2=0$
16. Функция Лагранжа для пространственного осциллятора имеет вид	1) $\frac{1}{2m}\left(P_x^{\,2}+P_y^{\,2}+P_z^{\,2}\right)-\frac{kr^2}{2}$ 3) $\frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2\right)-$ $-\frac{1}{2}\left(k_1x^2+k_2y^2+k_3z^2\right)$	2) $\frac{m}{2}\left(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2\right)+$ $+\frac{k}{2}\left(x^2+y^2+z^2\right)$ 4) $\frac{m\dot{r}^2}{2}+\frac{kr^2}{2}$
17. Потенциальная энергия сферического маятника радиуса R в однородном поле тяжести равна	1) $mgR(1-\cos\theta)$ 2) mgR	3) $-mgR$ 4) $-mgR\theta$
18. Закон движения тела, падающего без начальной скорости при сопротивлении, пропорциональном скорости, имеет вид	1) $e^{-\frac{k}{m}t}+mgt$ 2) $\left(\frac{m}{k}\right)^2g+\frac{mg}{k}t\left(e^{-\frac{k}{m}t}-1\right)$	3) $e^{-mt}+mgt$ 4) $\left(\frac{m}{k}\right)^2g\left(e^{-\frac{k}{m}t}-1\right)+\frac{mg}{k}t$
19. Закон движения математического маятника, точка подвеса которого движется в НИСО по закону $x=\frac{at^2}{2}$	1) $A\sin(kt+\alpha)-\frac{a}{g}t$ 2) $A\sin(kt+\alpha)+\frac{a}{g}$	3) $A\sin\left(\sqrt{\frac{g}{l}}t+\alpha\right)-\frac{a}{g}$ 4) $A\cos kt-at$
20. Период малых колебаний астатического маятника массы m с пружинами жесткости c равен	1) $\frac{2\pi}{\sqrt{2\frac{c}{m}-\frac{g}{l}}}$ 2) $\frac{2\pi}{\frac{c}{m}+\frac{g}{l}}$	3) $\frac{2\pi}{\sqrt{2\frac{c}{m}+\frac{g}{l}}}$ 4) $2\pi\sqrt{\frac{c}{m}}$

Тестовые задания по проверке остаточных знаний по дисциплине
«ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА»
ВАРИАНТ 3

1. Равновесие тел изучает	1) динамика 2) кинематика	3) статика 4) кинетика
2. Родоначальником классической механики является	1) Лагранж 2) Гамильтон	3) Галилей 4) Ньютон
3. Автором аналитической механики является	1) Гамильтон 2) Лагранж	3) Якоби 4) Эйлер
4. МЦС лежит на пересечении	1) перпендикуляров к скоростям 2) скоростей	3) ускорений 4) перпендикуляров к ускорениям
5. МЦС требуется знать для вычисления	1) траектории 2) ускорений	3) сил реакций 4) скоростей
6. Качение катка по прямой без скольжения является движением	1) поступательным 2) вращательным	3) сферическим 4) плоским
7. Момент инерции однородного сплошного цилиндра массы m радиуса R относительно его оси симметрии равен	1) $\frac{mR}{2}$ 2) $\frac{mR^2}{2}$	3) $\frac{mR^2}{3}$ 4) mR^2
8. Кинетическая энергия математического маятника массы m длины l в обобщенных координатах равна	1) $\frac{1}{4}ml^2\dot{\varphi}^2$ 2) $ml\varphi^2$	3) $\frac{ml^2\dot{\varphi}^2}{2}$ 4) $\frac{1}{3}ml\dot{\varphi}^2$
9. Потенциальная энергия математического маятника при малых колебаниях в обобщенных координатах равна	1) $\frac{1}{3}mgl\varphi^2$ 2) $\frac{1}{2}mgl\varphi^2$	3) $mgl^2\varphi^2$ 4) $ml^2\dot{\varphi}^2$
10. Уравнения Лагранжа в потенциальном поле имеют вид	1) $\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial T}{\partial q_k} = 0$ 2) $\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial q_k} - \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} = Q_k$	3) $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0$ 4) $\frac{\partial H}{\partial \dot{q}_k} = -\dot{p}_k$
11. Функция Гамильтона имеет смысл	1) $T - П$ 2) $2T - П$	3) $\frac{1}{2}\left(T - П\right)$ 4) $T + П$
12. Уравнение Гамильтона – Якоби имеет общий вид	1) $\frac{\partial H}{\partial q_k} = -\dot{p}_k$ 2) $\frac{\partial S}{\partial t} + H = 0$	3) $\frac{\partial L}{\partial t} + H = 0$ 4) $\frac{\partial S}{\partial t} - H = 0$
13. Функция Лагранжа материальной точки, движущейся по поверхности цилиндра в поле тяжести, параллельном оси цилиндра, равна	1) $\frac{m}{2}\left(r^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2\right) - mgz$ 2) $\frac{m}{2}\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2\right) - mgz$	3) $\frac{1}{2}m\dot{z}^2 - mgz$ 4) $\frac{m}{2}\left(r^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2\right) + mgz$
14. Функция Гамильтона для свободной материальной точки в потенциальном поле $П(x, y, z)$ равна	1) $\frac{m}{2}\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2\right) + П(x, y, z)$ 2) $\frac{1}{2m}\left(P_x^{\,2} + P_y^{\,2} + P_z^{\,2}\right) + П(x, y, z)$	3) $\frac{1}{2m}\left(P_x^{\,2} + P_y^{\,2} + P_z^{\,2}\right) - П(x, y, z)$ 4) $\frac{1}{2}\left(P_x^{\,2} + P_y^{\,2} + P_z^{\,2}\right) + П(x, y, z)$

15. Уравнение Гамильтона – Якоби для физического маятника с заданным моментом инерции имеет вид	1) $\frac{\partial S}{\partial t}+\frac{1}{2I}\left(\frac{\partial S}{\partial \varphi}\right)^2+\frac{mga}{2}\varphi^2=0$ 2) $\frac{\partial S}{\partial t}+\frac{\partial S}{\partial \varphi}=0$	3) $\frac{1}{2}I\dot{\varphi}^2+\frac{\partial S}{\partial t}=0$ 4) $\frac{\partial S}{\partial t}+\frac{1}{2}mga\varphi^2=0$
16. Функция Лагранжа для пространственного осциллятора имеет вид	1) $\frac{1}{2m}\left(P_x^2+P_y^2+P_z^2\right)-\frac{kr^2}{2}$ 3) $\frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2\right)-\frac{1}{2}\left(k_1x^2+k_2y^2+k_3z^2\right)$	2) $\frac{m}{2}\left(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2\right)+\frac{k}{2}\left(x^2+y^2+z^2\right)$ 4) $\frac{m\dot{r}^2}{2}+\frac{kr^2}{2}$
17. Потенциальная энергия сферического маятника радиуса R в однородном поле тяжести равна	1) mgR 2) $-mgR\theta$	3) $-mgR$ 4) $mgR(1-\cos\theta)$
18. Закон движения тела, падающего без начальной скорости при сопротивлении, пропорциональном скорости, имеет вид	1) $\left(\frac{m}{k}\right)^2 g\left(e^{-\frac{k}{m}t}-1\right)+\frac{mg}{k}t$ 2) $\left(\frac{m}{k}\right)^2 g+\frac{mg}{k}t\left(e^{-\frac{k}{m}t}-1\right)$	3) $e^{-\frac{k}{m}t}+mgt$ 4) $e^{-mt}+mgt$
19. Закон движения математического маятника, точка подвеса которого движется в НИСО по закону $x=\frac{at^2}{2}$	1) $A\sin(kt+\alpha)-\frac{a}{g}t$ 2) $A\sin\left(\sqrt{\frac{g}{l}}t+\alpha\right)-\frac{a}{g}$	3) $A\cos kt-at$ 4) $A\sin(kt+\alpha)+\frac{a}{g}$
20. Период малых колебаний астатического маятника массы m с пружинами жесткости c равен	1) $\frac{2\pi}{\frac{c}{m}+\frac{g}{l}}$ 2) $\frac{2\pi}{\sqrt{2\frac{c}{m}+\frac{g}{l}}}$	3) $\frac{2\pi}{\sqrt{2\frac{c}{m}-\frac{g}{l}}}$ 4) $2\pi\sqrt{\frac{c}{m}}$

Тестовые задания по проверке остаточных знаний по дисциплине
«ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА»
ВАРИАНТ 4

1. Равновесие тел изучает	1) динамика 2) кинетика	3) кинематика 4) статика
2. Родоначальником классической механики является	1) Ньютон 2) Гамильтон	3) Лагранж 4) Галилей
3. Автором аналитической механики является	1) Лагранж 2) Якоби	3) Гамильтон 4) Эйлер
4. МЦС лежит на пересечении	1) скоростей 2) перпендикуляров к ускорениям	3) ускорений 4) перпендикуляров к скоростям
5. МЦС требуется знать для вычисления	1) траектории 2) скоростей	3) ускорений 4) сил реакций
6. Качение катка по прямой без скольжения является движением	1) плоским 2) вращательным	3) поступательным 4) сферическим
7. Момент инерции однородного сплошного цилиндра массы m радиуса R относительно его оси симметрии равен	1) $\frac{mR}{2}$ 2) mR^2	3) $\frac{mR^2}{2}$ 4) $\frac{mR^2}{3}$
8. Кинетическая энергия математического маятника массы m длины l в обобщенных координатах равна	1) $\frac{1}{3}ml\dot{\varphi}^2$ 2) $ml\varphi^2$	3) $\frac{1}{4}ml^2\dot{\varphi}^2$ 4) $\frac{ml^2\dot{\varphi}^2}{2}$
9. Потенциальная энергия математического маятника при малых колебаниях в обобщенных координатах равна	1) $\frac{1}{2}mgl\varphi^2$ 2) $ml^2\dot{\varphi}^2$	3) $mgl^2\varphi^2$ 4) $\frac{1}{3}mgl\varphi^2$
10. Уравнения Лагранжа в потенциальном поле имеют вид	1) $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0$ 2) $\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial T}{\partial q_k} = 0$	3) $\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial q_k} - \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} = Q_k$ 4) $\frac{\partial H}{\partial \dot{q}_k} = -\dot{p}_k$
11. Функция Гамильтона имеет смысл	1) $T - \Pi$ 2) $\frac{1}{2}(T - \Pi)$	3) $T + \Pi$ 4) $2T - \Pi$
12. Уравнение Гамильтона – Якоби имеет общий вид	1) $\frac{\partial S}{\partial t} + H = 0$ 2) $\frac{\partial L}{\partial t} + H = 0$	3) $\frac{\partial H}{\partial q_k} = -\dot{p}_k$ 4) $\frac{\partial S}{\partial t} - H = 0$
13. Функция Лагранжа материальной точки, движущейся по поверхности цилиндра в поле тяжести, параллельном оси цилиндра, равна	1) $\frac{m}{2}\left(r^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2\right) + mgz$ 2) $\frac{m}{2}\left(r^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2\right) - mgz$	3) $\frac{1}{2}m\dot{z}^2 - mgz$ 4) $\frac{m}{2}\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2\right) - mgz$
14. Функция Гамильтона для свободной материальной точки в потенциальном поле $\Pi(x,y,z)$ равна	1) $\frac{m}{2}\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2\right) + \Pi(x,y,z)$ 2) $\frac{1}{2m}\left(P_x^2 + P_y^2 + P_z^2\right) - \Pi(x,y,z)$	3) $\frac{1}{2}\left(P_x^2 + P_y^2 + P_z^2\right) + \Pi(x,y,z)$ 4) $\frac{1}{2m}\left(P_x^2 + P_y^2 + P_z^2\right) + \Pi(x,y,z)$

15. Уравнение Гамильтона – Якоби для физического маятника с заданным моментом инерции имеет вид	1) $\frac{1}{2}I\dot{\varphi}^2+\frac{\partial S}{\partial t}=0$ 2) $\frac{\partial S}{\partial t}+\frac{1}{2I}\left(\frac{\partial S}{\partial \varphi}\right)^2+\frac{mga}{2}\varphi^2=0$	3) $\frac{\partial S}{\partial t}+\frac{\partial S}{\partial \varphi}=0$ 4) $\frac{\partial S}{\partial t}+\frac{1}{2}mga\varphi^2=0$
16. Функция Лагранжа для пространственного осциллятора имеет вид	1) $\frac{m\dot{r}^2}{2}+\frac{kr^2}{2}$ 3) $\frac{1}{2m}\left(P_x^{\ 2}+P_y^{\ 2}+P_z^{\ 2}\right)-\frac{kr^2}{2}$	2) $\frac{m}{2}\left(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2\right)+$ $+\frac{k}{2}\left(x^2+y^2+z^2\right)$ 4) $\frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2\right)-$ $-\frac{1}{2}\left(k_1x^2+k_2y^2+k_3z^2\right)$
17. Потенциальная энергия сферического маятника радиуса R в однородном поле тяжести равна	1) mgR 2) $-mgR$	3) $mgR(1-\cos\theta)$ 4) $-mgR\theta$
18. Закон движения тела, падающего без начальной скорости при сопротивлении, пропорциональном скорости, имеет вид	1) $e^{-\frac{k}{m}t}+mgt$ 2) $\left(\frac{m}{k}\right)^2 g\left(e^{-\frac{k}{m}t}-1\right)+\frac{mg}{k}t$	3) $\left(\frac{m}{k}\right)^2 g+\frac{mg}{k}t\left(e^{-\frac{k}{m}t}-1\right)$ 4) $e^{-mt}+mgt$
19. Закон движения математического маятника, точка подвеса которого движется в НИСО по закону $x=\frac{at^2}{2}$	1) $A\sin\left(\sqrt{\frac{g}{l}}t+\alpha\right)-\frac{a}{g}$ 2) $A\sin(kt+\alpha)+\frac{a}{g}$	3) $A\cos kt-at$ 4) $A\sin(kt+\alpha)-\frac{a}{g}t$
20. Период малых колебаний астатического маятника массы m с пружинами жесткости c равен	1) $\frac{2\pi}{\frac{c}{m}+\frac{g}{l}}$ 2) $2\pi\sqrt{\frac{c}{m}}$	3) $\frac{2\pi}{\sqrt{2\frac{c}{m}+\frac{g}{l}}}$ 4) $\frac{2\pi}{\sqrt{2\frac{c}{m}-\frac{g}{l}}}$

Контрольные задачи.

АМУРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Утверждено на заседании кафедры
«___»____________200__г.
Заведующий кафедрой
Утверждаю:________________

Кафедра: МАиМ
Факультет: МиИ
Курс: IV
Дисциплина ТМ

ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЙ БИЛЕТ №_______

1. Найти закон движения тонкого однородного стержня массы m и длины l, который двигается в вертикальной плоскости в поле тяжести так, что один его конец скользит по горизонтали.

2. Составить функцию Гамильтона для материальной точки, движущейся по цилиндрической поверхности в однородном поле тяжести, параллельном оси цилиндра.

3. Найти функцию Гамильтона для частицы массы m в центральном поле $\Pi(r)$.

4. Составить уравнение Гамильтона – Якоби для математического маятника.

АМУРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Утверждено на заседании кафедры
«___»____________200__г.
Заведующий кафедрой
Утверждаю:________________

Кафедра: МАиМ
Факультет: МиИ
Курс: IV
Дисциплина ТМ

ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЙ БИЛЕТ №_______

1. Найти общее уравнение в квадратурах для материальной точки, движущейся под действием силы, каждая проекция которой зависит только от соответствующей проекции радиус – вектора.

2. Составить функцию Лагранжа для сферического маятника массы m, движущегося по сфере радиуса a в однородном поле тяжести.

3. Определить функцию Гамильтона для частицы массы m в поле $\Pi(x, y, z)$.

4. Составить уравнение Гамильтон - Якоби для пространственного осциллятора.

АМУРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

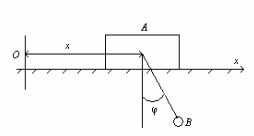
Утверждено на заседании кафедры
«___»____________200__г.
Заведующий кафедрой
Утверждаю:________________

Кафедра: МАиМ
Факультет: МиИ
Курс: IV
Дисциплина ТМ

ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЙ БИЛЕТ №_______

1. Найти закон движения тела, падающего без начальной скорости при сопротивлении, пропорциональным скорости.

2. Составить функцию Лагранжа для эллиптического маятника, если $m_A = m_1$,



$m_B = m_2$, $AB = l$.

3. Составить функцию Гамильтона для пространственного осциллятора.

4. Составить уравнение Гамильтона - Якоби для частицы массы m в центральном поле $\Pi(r)$.

АМУРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Утверждено на заседании кафедры
«___»____________200__г.
Заведующий кафедрой
Утверждаю:________________

Кафедра: МАиМ
Факультет: МиИ
Курс: IV
Дисциплина ТМ

ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЙ БИЛЕТ №_______

1. Найти закон движения математического маятника массы m и длины l в НИСО, которая движется по закону $x = \frac{at^2}{2}$.

2. Составить функцию Лагранжа для частицы массы m ,движущейся в вертикальной плоскости xy под действием силы тяжести.

3. Составить функцию Гамильтона для частицы массы m в осесимметричном поле $\Pi(r, z)$.

4. Составить уравнение Гамильтон - Якоби для физического маятника.

8. ПРИМЕРЫ СОСТАВЛЕНИЯ ЭКЗАМЕНАЦИОННЫХ БИЛЕТОВ

АМУРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Утверждено на заседании кафедры	Кафедра МАиМ
«____»_____________200__г.	Факультет МиИ
Заведующий кафедрой	Курс II
Утверждаю:__________________	Дисциплина ТМ

ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЙ БИЛЕТ № 8

1. Вывод уравнений Лагранжа II рода из принципа минимального действия.

2. Уравнение Мещерского. Его вывод и физический смысл.

3. Задачи

АМУРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Утверждено на заседании кафедры	Кафедра МАиМ
«____»_____________200__г.	Факультет МиИ
Заведующий кафедрой	Курс II
Утверждаю:__________________	Дисциплина ТМ

ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЙ БИЛЕТ № 14

1. Принцип Даламбера. Силы инерции. Частные случаи приведения сил инерции.

2. Физическая природа законов сохранения.

3. Задачи.

АМУРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Утверждено на заседании кафедры	Кафедра МАиМ
«____»_____________200__г.	Факультет МиИ
Заведующий кафедрой	Курс II
Утверждаю:__________________	Дисциплина ТМ

ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЙ БИЛЕТ № 13

1. Работа сил и моментов.

2. Малые колебания системы со многими степенями свободы. Главные (нормальные) координаты и главные колебания. Уравнения Лагранжа в главных координатах. Примеры главных колебаний.

3. Задачи.

АМУРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Утверждено на заседании кафедры
«____»_____________200__г.
Заведующий кафедрой
Утверждаю:__________________

Кафедра МАиМ
Факультет МиИ
Курс IV
Дисциплина ТМ

ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЙ БИЛЕТ № 27

1. Принцип наименьшего действия по Гамильтону.

2. Главные координаты. Главные колебания.

3. Задачи.

АМУРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Утверждено на заседании кафедры
«____»_____________200__г.
Заведующий кафедрой
Утверждаю:__________________

Кафедра МАиМ
Факультет МиИ
Курс II
Дисциплина ТМ

ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЙ БИЛЕТ № 17

1. Уравнение Гамильтона. Канонические преобразования.

2. Дифференциальные уравнения движения материальной точки в ИСО. Классический принцип причинности.

3. Задачи.

АМУРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Утверждено на заседании кафедры
«____»_____________200__г.
Заведующий кафедрой
Утверждаю:__________________

Кафедра МАиМ
Факультет МиИ
Курс II
Дисциплина ТМ

ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЙ БИЛЕТ № 3

1. Вывод уравнения Гамильтона – Якоби. Его роль в науке.

2. Потенциальная энергия. Равновесие по Ляпунову. Теорема Лагранжа – Дирихле.

3. Задачи.

АМУРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Утверждено на заседании кафедры
«____»_____________200__г.
Заведующий кафедрой
Утверждаю:__________________

Кафедра МАиМ
Факультет МиИ
Курс IV
Дисциплина ТМ

ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЙ БИЛЕТ № 14

1. Принцип Лагранжа – Даламбера. Общее уравнение динамики.

2. Метод Гамильтона – Якоби.

3. Задачи.

АМУРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Утверждено на заседании кафедры
«____»_____________200__г.
Заведующий кафедрой
Утверждаю:__________________

Кафедра МАиМ
Факультет МиИ
Курс II
Дисциплина ТМ

ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЙ БИЛЕТ № 2

1. Дифференциальные уравнения относительного движения в НИСО. Силы инерции в НИСО. Их проявление на Земле.

2. Вывод уравнений Лагранжа II рода из общего уравнения динамики.

3. Задачи.

АМУРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Утверждено на заседании кафедры
«____»_____________200__г.
Заведующий кафедрой
Утверждаю:__________________

Кафедра МАиМ
Факультет МиИ
Курс II
Дисциплина ТМ

ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЙ БИЛЕТ № 5

1. Действие по Гамильтону. Принцип минимального действия. Его роль в физике.

2. Задача Кеплера. Постановка задачи и ее решение. Уравнения орбит.

3. Задачи.

АМУРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Утверждено на заседании кафедры
«____»_____________200__г.
Заведующий кафедрой
Утверждаю:__________________

Кафедра МАиМ
Факультет МиИ
Курс II
Дисциплина ТМ

ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЙ БИЛЕТ № 6

1. Физическая природа законов сохранения.

2. Тензор инерции. Главные оси инерции. Эллипсоид инерции.

3. Задачи.

АМУРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Утверждено на заседании кафедры
«____»_____________200__г.
Заведующий кафедрой
Утверждаю:__________________

Кафедра МАиМ
Факультет МиИ
Курс II
Дисциплина ТМ

ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЙ БИЛЕТ № 16

1. Дифференциальные уравнения твердого тела при различных движениях.

2. Действие по Гамильтону. Принцип наименьшего действия, его роль в физике. Теорема Эмми Нетер.

3. Задачи.

АМУРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Утверждено на заседании кафедры
«____»_____________200__г.
Заведующий кафедрой
Утверждаю:__________________

Кафедра МАиМ
Факультет МиИ
Курс II
Дисциплина ТМ

ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЙ БИЛЕТ № 11

1. Обобщенные силы. Их определение. Обобщенные силы в потенциальном поле. Вывод уравнений Лагранжа II рода в потенциальном поле.

2. Главный вектор и главный момент сил инерции. Частные случаи приведения сил инерции к простейшему виду.

3. Задачи.

АМУРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Утверждено на заседании кафедры
«____»_____________200__г.
Заведующий кафедрой
Утверждаю:__________________

Кафедра МАиМ
Факультет МиИ
Курс II
Дисциплина ТМ

ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЙ БИЛЕТ № 12

1. Главные координаты. Уравнения Лагранжа в главных координатах. Главные колебания. Примеры главных колебаний.

2. Действие как функция координат и времени. Теорема Эмми Нетер.

3. Задачи.

АМУРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Утверждено на заседании кафедры	Кафедра МАиМ
«____»____________200__г.	Факультет МиИ
Заведующий кафедрой	Курс IV
Утверждаю:_________________	Дисциплина ТМ

ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЙ БИЛЕТ № 10

1. Центральное поле. Законы сохранения в центральном поле. Законы Кеплера и их связь с законами Ньютона.

2. Действие как функция координат. Уравнение Гамильтона – Якоби (вывод). Его роль в физике.

3. Задачи.

9. КАРТА КАДРОВОЙ ОБЕСПЕЧЕННОСТИ ДИСЦИПЛИНЫ

Лекционные и практические занятия по дисциплине «Теоретическая механика» для студентов специальностей 010101 «Математика» и 010701 «Физика» проводит доцент кафедры МАиМ Нейман В.П.