Федеральное агентство по образованию

АМУРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

ГОУВПО «АмГУ»

Факультет математики и информатики

УТВЕРЖДАЮ

Зав. кафедрой МАиМ

______Т.В. Труфанова

7 мая 2007г.

ГЕОМЕТРИЯ И АЛГЕБРА

Учебно – методический комплекс дисциплины для специальности 010501 – прикладная математика и информатика

Составитель: **Н.В. Кван**

Благовещенск

2007

ББК
К

*Печатается по решению
редакционно-издательского
совета
факультета математики и
информатики
Амурского государственного
университета*

Кван Н.В.

Геометрия и алгебра. Учебно – методический комплекс дисциплины для студентов АмГУ 1 курса очной формы обучения по специальности 010501 «Прикладная математика и информатика». – Благовещенск: Амурский гос. ун–т, 2007. − 349 с.

Учебно – методический комплекс дисциплины "Геометрия и алгебра" содержит рабочую программу дисциплины, краткий курс лекций, материалы для проведения практических занятий, контролирующие материалы для осуществления промежуточного и итогового контроля, справочный материал и библиографический список.

1. ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫЙ СТАНДАРТ ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ

Специальность 010501 – «Прикладная математика и информатика»

Квалификация – Математик, системный программист

ЕНФ.01.2 Геометрия и алгебра:

аналитическая геометрия; теория матриц; системы линейных алгебраических уравнений; линейные пространства и операторы; элементы общей алгебры

2. РАБОЧАЯ ПРОГРАММА

по дисциплине "**Геометрия и алгебра**"

для специальности 010501–"Прикладная математика и информатика"

Курс 1, 2 Семестр 1, 2

Лекции 144 ас. Экзамен 1, 2 еместр

Практические занятия 108 час. Зачет (нет)

Самостоятельная работа 105 час.

Всего 357 часов

Составитель Н.В. Кван, ст. преподаватель

Факультет математики и информатики

Кафедра математического анализа и моделирования

2007 г.

Рабочая программа составлена на основании Государственного образовательного стандарта высшего профессионального образования по специальности 010501–"Прикладная математика и информатика"

2.1 Цели и задачи дисциплины, ее место в учебном процессе

Программа курса «Геометрия и алгебра» составлена в соответствии с требованиями Государственного стандарта высшего профессионального образования по специальности 010501.

Цель курса - сформировать у студентов основные понятия аналитической геометрии и высшей алгебры, их основные свойства и приложения.

Преподавание курса связано с другими дисциплинами государственного образовательного стандарта: «математический анализ», «Теория функций комплексного переменного», «Дифференциальная геометрия», «Математическая логика», «Численные методы» и др.

По завершению курса студент должен:

-овладеть основными понятиями, знать и уметь доказывать их основные свойства;

-уметь решать типовые задачи.

2.2 Наименование тем, их содержание, объем в лекционных часах

(144 час.)

1 курс 1 семестр

2.2. Наименование тем, их содержание, объем в лекционных часах

1 курс 1 семестр (72 часа)

1. Векторы на плоскости - 6 часов.

Понятие вектора. Линейные операции над векторами. Векторное пространство. Линейная зависимость векторов. Координаты вектора в данном базисе. Скалярное произведение векторов.

2. Метод координат на плоскости - 6 часов.

Аффинная система координат на плоскости. Простейшие задачи. Ориентация плоскости. Преобразование аффинной системы координат. Полярная система координат. Связь полярных и декартовых координат. Геометрическое истолкование уравнений и неравенств между координатами. Применение метода координат к решению задач.

3. Прямая линия на плоскости - 8 часов.

Различные способы задания прямой и ее уравнения. Геометрический смысл знака трехчлена Ax+By+C. Взаимное расположение прямых. Метрические задачи теории прямой. Приложение теории прямой к решению задач.

4. Линии второго порядка - 8 часов.

Эллипс. Гипербола. Парабола. Уравнение линии второго порядка в полярных координатах. Общее уравнение линии второго порядка. Приведение уравнения линии второго порядка к каноническому виду.

5. Метод координат в пространстве — 8 часов.

Аффинная система координат в пространстве. Простейшие задачи. Ориентация плоскости. Преобразование аффинной системы координат. Геометрическое истолкование уравнений и неравенств между координатами. Векторное и смешанное произведения векторов. Приложение метода координат и векторной алгебры к решению задач.

6. Группы. Кольца. Поля. -8 часов.

Бинарная алгебраическая операция. Группа, кольцо, поле: аксиомы, примеры, простейшие свойства. Построение поля комплексных чисел. Действия над алгебраической и тригонометрической формами комплексного числа. Геометрическое истолкование действий над комплексными числами.

7. Подстановки и перестановки - 4 часа.

Подстановки и перестановки. Разложение подстановок в произведение циклов. Симметрическая и знакопеременная группы.

8. Матрицы и определители -8 часов.

Определители квадратной матрицы. Свойства определителей. Миноры и алгебраические дополнения. Разложение определителя по элементам строки (столбца). Правило Крамера. Матрицы, действия над матрицами, свойства действий. Обратная матрица. Формула для вычисления обратной матрицы.

9. Системы линейных уравнений - 8 часов.

Арифметическое векторное пространство. Линейные комбинации векторов. Задача, приводящая к решению систем линейных уравнений. Метод Гаусса. Линейная зависимость и независимость векторов. Базис и ранг конечной системы векторов. Равенство строчечного и столбцового рангов матрицы. Критерий совместности системы линейных уравнений.

Однородная система линейных уравнений.

10. Векторные пространства - 8 часов.

Векторное пространство, примеры пространств, простейшие свойства. Базис векторного пространства. Координаты вектора относительно базиса. Преобразование координат вектора при изменении базиса. Размерность векторного пространства. Изоморфизм векторного пространства. Подпространства. Линейная оболочка. Фундаментальная система решений однородной системы линейных уравнений. Линейное многообразие.

1 курс 2 семестр (72 часа)

1. Плоскости и прямые в пространстве - 8 часов. Различные способы задания плоскости ее уравнения. Взаимное расположение плоскостей. Метрические задачи теории плоскости. Различные способы задания прямой в пространстве и ее уравнения. Взаимное расположение прямой и плоскости. Метрические задачи теории прямой и плоскости.

2. Поверхности второго порядка - 8 часов. Цилиндрические и конические поверхности второго порядка. Поверхности вращения. Эллипсоид, гиперболоиды, параболоиды. Прямолинейные образующие поверхностей второго порядка.

3. Аффинное и евклидово n-мерное пространство – 8 часов.

Аффинное n-мерное пространство.Аффинная система координат. К-мерные плоскости. Евклидово n-мерное пространство. Расстояние между двумя точками, угол между векторами. Ортогональность. Вектор как направленный отрезок. Сложение и вычитание векторов, умножение вектора на скаляр. Аффинные и прямоугольные системы координат. Скалярное, векторное, смешанное произведения векторов.

.4. Линейные операторы - 10 часов.

Понятие линейного оператора, примеры линейных операторов. Связь между матрицами линейного преобразования в различных базисах. Кольцо линейных преобразований и кольцо матриц. Обратное преобразование. Ядро и ранг линейного оператора. Собственные векторы и собственные значения линейного оператора. Характеристический многочлен матрицы и линейного оператора. Приведение матрицы линейного оператора к диагональной форме. Собственные векторы линейного оператора с симметрической матрицей. Жорданова форма матрицы.

5. Кольцо многочленов - 8 часов.

Кольцо многочленов над областью целостности и над полем. НОД и НОК двух многочленов, алгоритм Евклида. Разложение на неприводимые множители. Выделение кратных множителей. Многочлены над полем C. уравнения 3 и 4 степени. Многочлены над полем R. Теорема Виета. Многочлены над полем Q. Простое алгебраическое расширение поля.

6. Евклидово пространство -10 часов.

Евклидово пространство. Примеры. Длина вектора. Угол между векторами. Неравенство Коши - Буняковского. Понятие метрического пространства. Ортогональность векторов. Ортонормированный базис. Ортогональное дополнение. Ортогональная проекция вектора на подпространство. Ортогональная матрица. Изоморфизм евклидовых пространств. Ортогональные преобразования евклидовых пространств. Симметрическое преобразование евклидовых пространств. Представление невырожденного линейного преобразования евклидова пространства в виде произведения ортогонального преобразования на симметрическое. Теорема о трансформировании симметрической матрицы в диагональную матрицу с помощью ортогональной. Сопряженность операторов в евклидовом пространстве. Собственные векторы самосопряженных операторов. Теоремы Фредгольма. Унитарное пространство. Линейные операторы в унитарном пространстве.

7. Билинейные формы и квадратичные формы - 8 часов.

Билинейные формы. Квадратичные формы. Преобразование матрицы квадратичной формы при линейной замене переменных. Канонический вид квадратичной формы. Метод Лагранжа приведения квадратичной формы к каноническому виду. Метод Якоби приведения квадратичной формы к каноническому виду. Ортогональное преобразование квадратичной формы к каноническому виду. Закон инерции квадратичных форм.

8. Аффинные пространства - 6 часов.

Аффинные пространства. Плоскости в конечномерном аффинном пространстве. Гиперповерхности второго порядка в аффинном пространстве.

9. Элементы теории групп - 6 часов.

Группы. Примеры групп. Подгруппы. Порядок элемента. Циклические группы. Смежные классы. Разложение группы по подгруппе. Нормальный делитель группы. Фактор - группы. Гомоморфные образы группы. Свободные абелевы группы и их подгруппы.

2.3. Практические занятия, их содержание и объем в часах

1 курс 1 семестр (54 часа)

Темы практических занятий	Кол-во часов
1. Векторы. Сложение и вычитание векторов, умножение вектора на скаляр	2 часа.
2. Линейная независимость систем векторов. Базис пространства векторов	2 часа.
3.Скалярное произведение векторов	2 часа.
4.Метод координат на плоскости	2 часа.
5.Прямая на плоскости	2 часа.
6.Контрольная работа №1	2 часа.
7.Линии второго порядка	2 часа.
8.Векторное и смешанное произведение векторов	2 часа.
9.Контрольная работа №2	2 часа.
10.Бинарная алгебраическая операция. Группа.	2 часа
11.Кольцо. Поле.	2 часа.
12. Комплексные числа	6 часов.
13. Контрольная работа №3	2 часа
14. Подстановки и перестановки. Определитель n- го порядка, определители	2 часа

2 и 3 порядков	
15. Вычисление определителей. Решение систем линейных уравнений по формулам Крамера.	2 часа
16. Матрицы. Действия над матрицами	2 часа
17. Обратная матрица. Матричный способ решения систем линейных уравнений	2 часа
18. Арифметическое n- мерное векторное пространство. Линейная зависимость и независимость векторов	2 часа
19. Базис и ранг конечной системы векторов	2 часа
20. Исследование и решение систем линейных уравнений	2 часа
21. Контрольная работа №4	2 часа
22. Векторное пространство. Базис линейного пространства. Координаты вектора относительно данного базиса. Преобразование координат вектора при изменении базиса	2 часа
23. Подпространства линейного пространства	2 часа
24. .Фундаментальная система решений системы линейных уравнений Линейное многообразие.	2 часа
25. Контрольная работа №5	2 часа

1 курс 2 семестр (54 часа)

Темы практических занятий	Кол-во часов
1.Плоскость в пространстве	4 часа.
2.Прямые в пространстве	4 часа.
3.Контрольная работа № 6	2 часа.
4.Поверхности 2-го порядка	6 часов

5. Линейные операторы. Связь между матрицами линейного оператора в различных базисах.	2 часа.
6. Ранг и ядро линейного преобразования	2 часа.
7. Собственные векторы и собственные значения линейного оператора.	2 часа.
8. Характеристический многочлен матрицы и линейного преобразования.	2 часа.
9. Контрольная работа №7	2 часа.
10. Многочлены над кольцом. Схема Горнера и её применение.	2 часа.
11. Многочлены над полем. НОД многочленов. Разложение многочленов на неприводимые множители.	2 часа.
12. Многочлены над полем C. Решение уравнений 3 и 4 степени.	2 часа
13. Многочлены над полем R. Многочлены над полем Q.	2 часа.
14. Контрольная работа № 8.	2 часа.
15. Евклидово пространство. Ортогональность векторов. Ортонормированный базис.	2часа.
16. Ортогональное дополнение. Ортогональная проекция вектора на подпространство.	2 часа.
17. Ортогональные преобразования евклидовых пространств.	2 часа.
18. Квадратичные формы. Преобразование матрицы квадратичной формы при линейной замене переменных. Канонический вид квадратичной формы. Метод Лагранжа приведения квадратичной формы к каноническому виду.	2 часа.
19. Метод Якоби приведения квадратичной формы к каноническому виду. Ортогональное преобразование квадратичной формы к каноническому виду.	2 часа.
20. Контрольная работа № 9	2часа.
21. Жорданова форма матрицы	2 часа
22. Группы. Примеры групп. Подгруппы. Порядок элемента. Циклические группы.	2 часа.
23. Смежные классы. Разложение группы по подгруппе. Нормальный делитель группы.	2 часа.

2.4 Организация самостоятельной работы студентов (105 часов)

№	Тема	Содержание самостоятельной работы	Часы	Форма контроля
1	Векторы на плоскости	Расчетная работа	4	Защита на консультации
2.	Прямые на плоскости	Индивидуальная домашняя контрольная работа	4	Защита на консультации
3.	Кривые второго порядка	Работа с литературой (конспект) Домашняя работа	4	Лекционный контроля
4.	Векторы в пространстве.	Расчетная работа	4	Защита на консультации
5.	Взаимное расположение 2 и 3 плоскостей.	Домашняя работа. Работа с литературой (конспект)	2	
6.	Прямая и плоскость	Индивидуальная домашняя контрольная работа	4	Защита на консультации
7.	Поверхности второго порядка (прямолинейные	Домашняя работа. Работа с литературой	4	Лекционный контроль

	образующие)	(конспект)		
8.	Построение поверхностей второго порядка.	Графическая домашняя работа	5	Защита на консультации
9.	Приведение поверхности 2-ого прядка к каноническому виду.	Расчетно-графическая работа.	4	Защита на консультации
	Всего часов		35	

№ не-де-ли	Тема	Самостоятельная работа	Часы	Форма контроля
1	Введение. БАО. Группа.	Индивидуальное задание №1 по теме «Б.А.О. Группа»	2	Защита работы на консульта-ции
3	Алгебраическая и тригонометрическая формы комплексного числа. Геометрическое истолкование действий над комплексными числами	Изучить тему «Геометрическое истолкование действий над комплексными числами» Индивидуальное задание №2 по теме «Комплексные числа»	1 2	Лекционный контроль Защита на консультации
4	Подстановки и перестановки	Изучить свойства группы четных подстановок	1	Лекцион-ный контроль
5	Определитель n-го	Доказать некоторые	2	Лекцион-ный

	порядка. Миноры и алгебраические дополнения. Разложения определителя по строке или столбцу.	свойства определителей. Доказать теорему Вандермонда		контроль; математи-ческий диктант на практич. занятии
6	Формулы Крамера. Теорема Лапласа.	Рассмотреть методы вычисления определителей с помощью теоремы Лапласа	2	Провероч-ная работа на практич. занятии
7	Матрицы. Действия над матрицами. Обратная матрица. Теорема о базисном миноре.	Доказать свойства действий над матрицами	2	Лекцион-ный контроль
8	Арифметическое *n*-мерное векторное пространство. Метод Гаусса. Линейная зависимость и независимость векторов.	Доказать некоторые свойства линейно-зависимых систем векторов	2	математи-ческий диктант на практич. занятии
9	Базис и ранг конечной системы векторов. Равенство строчечного и столбцового рангов.	Доказать некоторые свойства базиса	2	Лекцион-ный контроль
10	Критерий совместности систем линейных уравнений. Однородная система	Индивидуальное задание № 3 по теме «Матрицы и определители.	4	Защита работы на консульта-ции

	уравнений	Решение систем линейных уравнений»		
11	Векторные пространства. Базис. Преобразование координат базиса.	Подбор примеров векторных пространств	1	математи-ческий диктант на практич. занятии
12	Размерность векторного пространства. Изоморфизм векторных пространств.	Доказательство свойств размерности векторных пространств	1	Лекцион-ный контроль
13	Подпространства векторного пространства. Пересечение и сумма подпространств. Фундаментальная система решений с.л.о.у. Линейное многообразие.	Индивидуальное задание №4 по теме «Векторные пространства»	2	Защита работы на консульта-ции
14	Линейные операторы. Матрица л.о. Кольцо линейных преобразований.	Доказательство свойств операций линейных операторов	2	Лекционный контроль
15	Обратное преобразование. Инвариантные подпространства и индуцированные преобразования.	Подобрать примеры инвариантных подпространств	2	Лекционный контроль

16	Собственные векторы и собственные значения л.о. Характеристический многочлен.	Индивидуальное задание №4 по теме «Линейные операторы»	2	Защита работы на консультации
17	Многочлены над полем	Индивидуальное задание №5 по теме «Многочлены над полем»	3	Защита работы на консультации
18	Уравнения 3 и 4 степени	Индивидуальное задание №6 по теме «Решение уравнений 3 и 4 степени»	2	Защита работы на консультации
	Всего часов		35	

№ Не-де-ли	Тема	Часы	Часы	Форма Контроля
2	Ортогональность векторов. Ортонормированный базис. Ортогональное дополнение.	Индивидуальное задание №5 по теме "Ортогональность векторов"	4	Защита работы на консульта-ции
8	Канонический вид квадратичной формы. Метод Лагранжа приведения квадратичной формы к каноническому виду.	Изучение темы «Приведение квадратичной формы к каноническому виду треугольным преобразованием (метод Якоби)».	4	Колок-виум
9	Критерий Сильверстра.	Изучить тему "Закон	4	Колок-виум

	Определитель Грамма. Ортогональное преобразование квадратичной формы к каноническому виду.	инерции квадратичных форм" Индивидуальное задание №6 по теме «Квадратичные формы»	6	Защита работы на консульта -ции
10	Комплексное n- мерное векторное пространство. Комплексное евклидово пространство.	Изучить тему «Билинейные и квадратичные формы в комплексном пространстве»	4	Колок-виум
13	Линейное преобразование сопряженное данному. Самосопряженные преобразования. Теоремы фредгольмова типа.	Доказать 2 и 3 теоремы Фредгольма	4	Колок-виум
15	Нормальная форма линейного преобразования. Приведение произвольного преобразования к нормальной форме. Инвариантные множители. λ – матрицы.	Индивидуальное задание № 7 «Жорданова форма матрицы» Изучение теоретического материала	4 3	Защита на консульта ции Лекцион ный контроль
16	Теория групп	Индивидуальное задание №8	2	Защита на консульта ции
	Всего		35	

2.5. Вопросы к экзамену

1 курс 1 семестр

1. Векторы, операции над ними.

2. Коллинеарные векторы.

3. Компланарные векторы.

4. Линейная зависимость векторов.

5. Свойства линейной зависимости.

6. Теорема о разложении вектора по трем некомпланарным векторам.

7. Базис векторного пространства.

8. Ортонормированный базис. Длина вектора.

9. Полярные координаты.

10. Скалярное произведение векторов, его свойства.

11 . Векторное произведение векторов.

12. Смешанное произведение векторов.

13.Аффинная и прямоугольная система координат.

14.Уравнения прямой на плоскости.

15.Общее уравнение прямой на плоскости.

16.Прямая в системе координат на плоскости.

17.Взаимное расположение двух прямых на плоскости.

18.Расстояние от точки до прямой на плоскости.

19. Угол между двумя прямыми на плоскости.

20.Эллипс.

21.Гипербола.

22.Парабола.

23.Касательная к эллипсу, гиперболе, параболе.

24.Пересечение линии второго порядка с прямой.

25.Центр линии второго порядка.

26.Диаметры линий второго порядка. Сопряженные направления.

27.Главные направления, главные диаметры.

28.Классификация центральных линий второго порядка.

29.Классификация нецентральных линий второго порядка

30.Приведение линии второго порядка к каноническому виду.

31 Бинарная алгебраическая операция. Классы операций.

32. Группа. Примеры. Свойства.

33. Кольцо. Примеры. Свойства.

34. Поле. Примеры. Свойства.

35. Построение поля комплексных чисел.

36. Действия над комплексными числами в алгебраической форме.

37. Действия над комплексными числами в тригонометрической форме.

38. Геометрическая интерпретация действий над комплексными числами.

39. Подстановки и перестановки.

40.Разложение подстановок в произведение циклов.

41.Определитель n- го порядка, определители 2 и 3 порядков.

42.Свойства определителей.

43.Миноры и алгебраические дополнения. Теорема Безу.

44.Решение систем линейных уравнений по формулам Крамера.

45.Матрицы. Действия над матрицами. Свойства действий.

46.Обратная матрица. Матричный способ решения систем линейных уравнений.

47.Формула для вычисления обратной матрицы.

48.Арифметическое n- мерное векторное пространство.

49.Задача, приводящая к решению системы линейных уравнений.

50.Линейная зависимость и независимость векторов.

51.Базис и ранг конечной системы векторов.

52.Равенство строчечного и столбцового рангов матрицы.

53.Критерий совместности системы линейных уравнений.

54.Однородная система линейных уравнений.

55.Векторное пространство. Примеры. Свойства.

56.Базис линейного пространства. Координаты вектора относительно данного базиса.

57.Преобразование координат вектора при изменении базиса.

58.Размерность линейного пространства.

59.Изоморфизм линейных пространств.

60.Подпространства линейного пространства.

61.Фундаментальная система решений системы линейных уравнений.

62.Линейное многообразие. Связь решений неоднородной системы линейных уравнений с решениями соответствующей однородной.

1 курс 2 семестр

1.Способы задания плоскости в пространстве.

2.Общее уравнение плоскости.

3.Плоскость в системе координат.

4.Взаимное расположение плоскостей. Угол между плоскостями.

5.Расстояние от точки до плоскости.

6.Способы задания прямой в пространстве.

7.Взаимное расположение двух прямых в пространстве.

8.Взаимное расположение прямой и плоскости.

9.Угол между прямой и плоскостью.

10.Расстояние от точки до прямой в пространстве.

11.Расстояние между скрещивающимися прямыми.

12. У равнения перпендикуляра к прямой из данной точки.

13.Уравнения общего перпендикуляра к скрещивающимся прямым.

14.Поверхности второго порядка. Метод сечений.

15.Цилиндрические поверхности.

16.Общее уравнение цилиндра.

17.Конические поверхности.

18.Общее уравнение конуса.

19. Эллипсоид.

2 0 .Гиперболоиды.

21 .Параболоиды.

22.Прямолинейные образующие поверхностей второго порядка.

23.Классификация поверхностей второго порядка.

24.Линейные операторы. Примеры.

25.Связь между матрицами линейного оператора в различных базисах.

26.Кольцо линейных преобразований.

27.Обратное преобразование. Вырожденное и невырожденное преобразование.

28.Ранг и ядро линейного преобразования.

29.Собственные векторы и собственные значения линейного оператора.

30.Характеристический многочлен матрицы и линейного преобразования.

31.Приведение матрицы линейного оператора к диагональной форме.

32.Собственные векторы линейного оператора с симметрической матрицей.

33.Жорданова форма матрицы.

34.Многочлены над кольцом.

35.Теореме Безу. Схема Горнера и её применение.

36.Многочлены над полем.

37.НОД многочленов. Линейное представление НО Д. НОК.

38Разложение многочленов на неприводимые множители.

39. Вы деление кратных множителей многочлена.

40.Многочлены над полем С.

41.Решение уравнений 3 и 4 степени.

42 .Многочлены над полем R.

43.Многочлены над полем Q.

44.Евклидово пространство. Примеры.

45.Длина вектора. Угол между векторами. Неравенство Коши -Буняковского.

46.Понятие метрического пространства.

47.Ортогональность векторов. Ортонормированный базис.

48.Ортогональное дополнение.

49.Ортогональная проекция вектора на подпространство.

50.Ортогональная матрица.

51.Изоморфизм евклидовых пространств.

52.Ортогональные преобразования евклидовых пространств.

53.Симметрическое преобразование евклидовых пространств.

54..Представление невырожденного линейного преобразования евклидова пространства в виде произведения ортогонального преобразования на симметрическое.

55.Теорема о трансформировании симметрической матрицы в диагональную матрицу с помощью ортогональной.

56.Сопряженность операторов в евклидовом пространстве.

57.Собственные векторы самосопряженных операторов.

58.Теоремы Фредгольма.

59.Унитарное пространство.

60. Линейные операторы в унитарном пространстве.

61.Билинейные формы.

62.Квадратичные формы.

63.Преобразование матрицы квадратичной формы при линейной замене переменных. Канонический вид квадратичной формы.

64.Квадрики в аффинном пространстве. Их классификации.

65.Квадрики в евклидовом пространстве. Их классификации.

2.6 Требования к знаниям студентов, предъявляемые на экзамене

Необходимым условием допуска на экзамен является сдача всех расчетных работ. В предлагаемый билет входят два вопроса и задача. Студент должен дать развернутые ответы на вопросы и решить предложенную задачу. Развернутый ответ предполагает полное знание теории по данной части курса, свободную ориентацию в материале.

Знания студента оцениваются «отлично» при полном изложении теоретического материала экзаменационного билета, ответах на дополнительные вопросы со свободной ориентацией в материале и других литературных источниках, при правильно выполненной практической части.

Оценка «хорошо» ставится при твердых знаниях студентом всех разделов курса (в пределах конспекта лекций) и при преимущественно правильно выполненной практической части (допускаются ошибки вычислительного характера, небольшие недочеты или неточности).

Оценку «удовлетворительно» студент получает, если дает неполные ответы на теоретические вопросы билета, показывая поверхностное знание учебного материала, владение основными понятиями и терминологией; при неверном ответе на билет или на дополнительные вопросы, при этом по крайней мере практическое задание должно быть выполнено в основном верно.

Оценка «неудовлетворительно» выставляется за незнание студентом одного из разделов курса, если студент не дает ответы на теоретические вопросы билета, показывая лишь фрагментарное знание учебного материала, незнание основных понятий и терминологии, незнание способа решения задачи.

2.7 Билеты к экзамену

1 семестр

АМУРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Утверждено на заседании кафедры
«   »------------------------2006г.
Заведующий кафедрой
Утверждаю: ---------------------------

Кафедра: МА и М
Факультет: ФМИ
Курс: 1
Дисциплина:
геометрия
и алгебра

БИЛЕТ № 1

1. Векторы в пространстве
2. Угол между прямой и плоскостью. Угол между двумя прямыми в пространстве.
3. Построить поверхность: $2x^2 + y^2 = 8$

АМУРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Утверждено на заседании кафедры
«   »------------------------2006г.
Заведующий кафедрой
Утверждаю: ---------------------------

Кафедра: МА и М
Факультет: ФМИ
Курс: 1
Дисциплина:
геометрия
и алгебра

БИЛЕТ № 2

1. Гармонизм. Построение четвертой гармонической точки.
2. Поверхности второго порядка. Метод сечений.
3. Даны вершины тетраэдра: A(2,-1,1), B(5,5,4), C(3,2,-1), Д(4,1,3). Найти уравнения граней.

АМУРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Утверждено на заседании кафедры — Кафедра: МА и М

Факультет: ФМИ

« »-----------------------2006г. — Курс: 1

Заведующий кафедрой — Дисциплина:

Утверждаю: -------------------------- — геометрия и алгебра

БИЛЕТ № 3

1. Сложное отношение. Сложное отношение в декартовых координатах. Свойства сложного отношения.
2. Задание прямой точкой и направляющим вектором, задание прямой двумя точками в пространстве.
3. Построить поверхность: $x^2 + y^2 = \frac{z}{4}$

АМУРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Утверждено на заседании кафедры — Кафедра: МА и М

Факультет: ФМИ

« »-----------------------2006г. — Курс: 1

Заведующий кафедрой — Дисциплина:

Утверждаю: -------------------------- — геометрия и алгебра

БИЛЕТ № 4

1. Геометрический смысл многочлена $P(x, y, z) = Ax + By + Cz + D$.
2. Прямолинейные образующие поверхностей второго порядка.
3. Найти точку пересечения плоскости $2x + 3y + z - 1 = 0$ и прямой $\frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z}{6}$

АМУРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Утверждено на заседании кафедры — Кафедра: МА и М

Факультет: ФМИ

« »-----------------------2006г. — Курс: 1

Заведующий кафедрой — Дисциплина:

Утверждаю: -------------------------- — геометрия и алгебра

БИЛЕТ № 5

1. Векторное произведение векторов.
2. Взаимное расположение прямой и плоскости.
3. Установить, как расположена точка $A(2;-1;3)$ относительно сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ внутри, вне ее или на ее поверхности.

АМУРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Утверждено на заседании кафедры — Кафедра: МА и М

Факультет: ФМИ
«   »------------------------2006г. Курс: 1
Заведующий кафедрой Дисциплина:
Утверждаю: --------------------------- геометрия и алгебра

БИЛЕТ № 6

1. Смешанное произведение векторов.
2. Расстояние от точки до прямой в пространстве.
3. Построить $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$.

АМУРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Утверждено на заседании кафедры Кафедра: МА и М
Факультет: ФМИ
«   »------------------------2006г. Курс: 1
Заведующий кафедрой Дисциплина
Утверждаю: --------------------------- геометрия и алгебра

БИЛЕТ № 7

1. Теорема Дезарга. Частные случаи теоремы Дезарга.
2. Расстояние между скрещивающимися прямыми.
3. Доказать, что точки $A(1;2;-1), B(0;1;5), C(-1;2;1)$, $D(2;1;3)$ лежат в одной плоскости.

АМУРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Утверждено на заседании кафедры Кафедра: МА и М
Факультет: ФМИ
«   »------------------------2006г. Курс: 1
Заведующий кафедрой Дисциплина:
Утверждаю: --------------------------- геометрия и алгебра

БИЛЕТ № 8

1. Задание плоскости точкой и вектором нормали. Задание плоскости «в отрезках». Параметрические уравнения плоскости.
2. Классификация квадрик.
3. Векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ попарно образуют друг с другом углы, каждый из которых равен 60°. Зная, что $|\vec{a}| = 4, |\vec{b}| = 2, |\vec{c}| = 6$ определить модуль вектора $\vec{p} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$

АМУРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Утверждено на заседании кафедры Кафедра: МА и М
Факультет: ФМИ
«   »------------------------2006г. Курс: 1
Заведующий кафедрой Дисциплина:
Утверждаю: --------------------------- геометрия и алгебра

БИЛЕТ № 9

1. Уравнения перпендикуляра к двум скрещивающимся прямым.

2. Конические поверхности. Общее уравнение конуса
3. Даны векторы $\vec{a} = 2\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}$, $\vec{b} = \vec{i} - 3\vec{j} + 2\vec{k}$, $\vec{c} = 3\vec{i} + 2\vec{j} - 4\vec{k}$. Найти вектор $\vec{x}$ удовлетворяющий условиям: $\vec{x}\vec{a} = -5; \vec{x}\vec{b} = -11; \vec{x}\vec{c} = 20$

АМУРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Утверждено на заседании кафедры — Кафедра: МА и М

Факультет: ФМИ

« »------------------------2006г. — Курс: 1

Заведующий кафедрой — Дисциплина:

Утверждаю: --------------------------- геометрия и алгебра

БИЛЕТ № 10

1. Задание плоскости точкой и направляющим подпространством. Задание плоскости тремя точками.
2. Однородные координаты Проективные координаты и проективные преобразования. Группа проективных преобразований
3. Объем тетраэдра $V = 5$ куб.ед., три его вершины находятся в точках $A(2;1;-1)$, $B(3;0;1)$, $C(2;-1;3)$. Найти координаты четвертой вершины D, если известно, что она лежит на оси OY.

АМУРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Утверждено на заседании кафедры — Кафедра: МА и М

Факультет: ФМИ

« »------------------------2006г. — Курс: 1

Заведующий кафедрой — Дисциплина:

Утверждаю: --------------------------- геометрия и алгебра

БИЛЕТ № 11

1. Общее уравнение плоскости.
2. Эллипсоид.
3. Даны $|\vec{a}| = 3; |\vec{b}| = 26; |[\vec{a},\vec{b}]| = 72$. Вычислить $(\vec{a},\vec{b})$

АМУРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Утверждено на заседании кафедры — Кафедра: МА и М

Факультет: ФМИ

« »------------------------2006г. — Курс: 1

Заведующий кафедрой — Дисциплина:

Утверждаю: --------------------------- геометрия и алгебра

БИЛЕТ № 12

1. Условие параллельности вектора и плоскости. Расположение плоскости в системе координат.
2. Аксиомы проективной геометрии, следствия из них. Принцип двойственности.
3. Даны векторы $\vec{p} = (3;-2;1), \vec{q} = (-1;1;-2), \vec{r} = (2;1;-3)$. Найти разложение вектора $\vec{c} = (11;-6;5)$ по базису $\vec{p},\vec{q},\vec{r}$

АМУРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Утверждено на заседании кафедры — Кафедра: МА и М

Факультет: ФМИ

« »------------------------2006г. — Курс: 1

Заведующий кафедрой — Дисциплина:

Утверждаю: --------------------------- геометрия и алгебра

БИЛЕТ № 13

1. Взаимное расположение двух, трех плоскостей.
2. Цилиндрические поверхности. Общее уравнение цилиндра.
3. Составить параметрические и канонические уравнения прямой
$$l: \begin{cases} 2x + 3y - z - 4 = 0 \\ 3x - 5y + 2z + 1 = 0 \end{cases}$$

АМУРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Утверждено на заседании кафедры
«   »------------------------2006г.
Заведующий кафедрой
Утверждаю: ---------------------------

Кафедра: МА и М
Факультет: ФМИ
Курс: 1
Дисциплина:
геометрия и алгебра

БИЛЕТ № 14

1. Уравнения перпендикуляра, опущенного из данной точки на данную прямую.
2. Проективные квадрики.
3. Составить уравнение плоскости, параллельной вектору $\vec{l} = (2;1;-1)$ и отсекает на координатных осях OX и OY отрезки $a = 3, b = -2$

АМУРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Утверждено на заседании кафедры
«   »------------------------2006г.
Заведующий кафедрой
Утверждаю: ---------------------------

Кафедра: МА и М
Факультет: ФМИ
Курс: 1
Дисциплина:
геометрия и алгебра

БИЛЕТ № 15

1. Угол между двумя плоскостями. Расстояние от точки до плоскости.
2. Поверхности вращения. Сфера.
3. Даны векторы. $\vec{p} = (3;-2;1), \vec{q} = (-1;1;-2)$, $\vec{c} = (11;-6;5)$. Найти разложение вектора $\vec{r} = (2;1;-3)$ по базису $\vec{p}, \vec{q}, \vec{c}$

АМУРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Утверждено на заседании кафедры
«   »------------------------2006г.
Заведующий кафедрой
Утверждаю: ---------------------------

Кафедра: МА и М
Факультет: ФМИ
Курс: 1
Дисциплина:
геометрия и алгебра

БИЛЕТ № 16

1. Задание прямой двумя пересекающимися плоскостями.
2. Эллиптический параболоид.
3. Даны вершины тетраэдра: А(2,-1,1), В(5,5,4), С(3,2,-1), Д(4,1,3). Найти площадь основания.

АМУРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Утверждено на заседании кафедры — Кафедра: МА и М

Факультет: ФМИ

«   »-----------------------2006г. — Курс: 1

Заведующий кафедрой — Дисциплина:

Утверждаю: -------------------------- — геометрия и алгебра

БИЛЕТ № 17

1. Взаимное расположение двух прямых в пространстве.
2. Пересечение поверхности второго порядка с прямой.
3. Исследовать методом сечений и построить: $\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{4}-\frac{z^2}{25}=-1$

АМУРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Утверждено на заседании кафедры — Кафедра: МА и М

Факультет: ФМИ

«   »-----------------------2006г. — Курс: 1

Заведующий кафедрой — Дисциплина

Утверждаю: -------------------------- — геометрия и алгебра

БИЛЕТ № 18

1. Однополостный гиперболоид.
2. Полюс, поляра. Теорема Паскаля.
3. Даны вершины тетраэдра: А(2,-1,1), В(5,5,4), С(3,2,-1), Д(4,1,3). Найти углы между ребрами и основанием АВС.

АМУРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Утверждено на заседании кафедры — Кафедра: МА и М

Факультет: ФМИ

«   »-----------------------2006г. — Курс: 1

Заведующий кафедрой — Дисциплина:

Утверждаю: -------------------------- — геометрия и алгебра

БИЛЕТ № 19

1. Двуполостный гиперболоид.
2. Смешанное произведение векторов.
3. Даны вершины тетраэдра: А(2,-1,1), В(5,5,4), С(3,2,-1), Д(4,1,3). Найти уравнения высоты грани АВД.

2 семестр

АМУРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Экзаменационный билет

№1

Утвержден 12 декабря 2006 — ФМиИ, МАиМ

на заседании каф. МАиМ — лгебра и геометрия

Зав. кафедрой ________Труфанова Т.В. 1 курс, 1 семестр

1. Понятие БАО и ее свойства.

2. Задача, приводящая к решению систем линейных уравнений. Метод Гаусса.

АМУРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Экзаменационный билет

№2

Утвержден 12 декабря 2006 ФМиИ, МАиМ

на заседании каф. МАиМ агебра и геометрия

Зав. кафедрой ________Труфанова Т.В. 1 курс, 1 семестр

1. Группа: примеры, свойства. Изоморфизм и гомоморфизм групп.

2. Линейные комбинации векторов. Линейная зависимость и независимость.

АМУРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Экзаменационный билет

№3

Утвержден 12 декабря 2006 ФМиИ, МАиМ

на заседании каф. МАиМ алгебра и геометрия

Зав. кафедрой ________Труфанова Т.В. 1 курс, 1 семестр

1. Кольцо: примеры, свойства. Изоморфизм и гомоморфизм колец.

2. Базис и ранг конечной системы векторов.

АМУРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Экзаменационный билет

№4

Утвержден 12 декабря 2006 ФМиИ, МАиМ

на заседании каф. МАиМ алгебра и геометрия

Зав. кафедрой ________Труфанова Т.В. 1 курс, 1 семестр

1. Поле: примеры, свойства. Поле рациональных и действительных чисел.

2. Равенство строчечного и столбцового рангов.

АМУРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Экзаменационный билет

№5

Утвержден 12 декабря 2006 ФМиИ, МАиМ

на заседании каф. МАиМ алгебра и геометрия

Зав. кафедрой ________Труфанова Т.В. 1 курс, 1 семестр

1. Построение поля комплексных чисел.
2. Критерий совместности системы линейных уравнений.

АМУРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Экзаменационный билет

№6

Утвержден 12 декабря 2006 ФМиИ, МАиМ

на заседании каф. МАиМ алгебра и геометрия

Зав. кафедрой ________Труфанова Т.В. 1 курс, 1 семестр

1. Действия над комплексными числами в алгебраической форме.
2. Однородная система линейных уравнений.

АМУРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Экзаменационный билет

№7

Утвержден 12 декабря 2006 ФМиИ, МАиМ

на заседании каф. МАиМ алгебра и геометрия

Зав. кафедрой ________Труфанова Т.В. 1 курс, 1 семестр

1. Действия над комплексными числами в тригонометрической форме.
2. Линейное пространство: определение, основные свойства и примеры.

АМУРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Экзаменационный билет

№8

Утвержден 12 декабря 2006 ФМиИ, МАиМ

на заседании каф. МАиМ алгебра и геометрия

Зав. кафедрой ________Труфанова Т.В. 1 курс, 1 семестр

1. Геометрическое истолкование действий над комплексными числам.

2. Ранг и базис системы векторов. Координаты вектора относительно базиса.

АМУРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Экзаменационный билет

№9

Утвержден 12 декабря 2006 ФМиИ, МАиМ

на заседании каф. МАиМ алгебра и геометрия

Зав. кафедрой ________Труфанова Т.В. 1 курс, 1 семестр

1. Подстановки и перестановки, их свойства. Симметрическая группа.

2. Преобразование координат вектора при изменении базиса.

АМУРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Экзаменационный билет

№10

Утвержден 12 декабря 2006 ФМиИ, МАиМ

на заседании каф. МАиМ алгебра и геометрия

Зав. кафедрой ________Труфанова Т.В. 1 курс, 1 семестр

1. Разложение подстановок в произведение циклов. Четность подстановок. Знакопеременная группа.

2. Размерность векторного пространства. Изофорфизм линейных пространств.

АМУРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Экзаменационный билет

№11

Утвержден 12 декабря 2006 ФМиИ, МАиМ

на заседании каф. МАиМ алгебра и геометрия

Зав. кафедрой ________Труфанова Т.В. 1 курс, 1 семестр

1. Понятие определителя n-го порядка. Определитель 2 и 3 порядков. Свойства определителя.

2. Подпространство векторного пространства. Линейная оболочка

АМУРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Экзаменационный билет

№12

Утвержден 12 декабря 2006 ФМиИ, МАиМ

на заседании каф. МАиМ алгебра и геометрия

Зав. кафедрой ________Труфанова Т.В. 1 курс, 1 семестр

1. Миноры и алгебраические дополнения. Теорема Безу и теорема Вандермонда.

2. Сумма и пересечение линейных подпространств.

АМУРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Экзаменационный билет

№13

Утвержден 12 декабря 2006 ФМиИ, МАиМ

на заседании каф. МАиМ алгебра и геометрия

Зав. кафедрой ________Труфанова Т.В. 1 курс, 1 семестр

1. Формулы Крамера для решения систем линейных уравнений.

2. Прямая сумма линейных подпространств.

АМУРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Экзаменационный билет

№14

Утвержден 12 декабря 2006 ФМиИ, МАиМ

на заседании каф. МАиМ алгебра и геометрия

Зав. кафедрой ________Труфанова Т.В. 1 курс, 1 семестр

1. Теорема Лапласа. Вычисление треугольного определителя и определителя некоторых блочных матриц.

2. Линейные многообразия в линейном пространстве.

АМУРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Экзаменационный билет

№15

Утвержден 12 декабря 2006 ФМиИ, МАиМ

на заседании каф. МАиМ алгебра и геометрия

Зав. кафедрой ________Труфанова Т.В. 1 курс, 1 семестр

1. Действия над матрицами, свойства действий.

2. Фундаментальная система решений с. л. о. у.

АМУРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Экзаменационный билет

№16

Утвержден 12 декабря 2006 ФМиИ, МАиМ

на заседании каф. МАиМ алгебра и геометрия

Зав. кафедрой ________Труфанова Т.В. 1 курс, 1 семестр

1. Определитель суммы и произведения матриц.

2. Понятие линейного оператора. Матрица л.о. Примеры.

АМУРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Экзаменационный билет

№17

Утвержден 12 декабря 2006 ФМиИ, МАиМ

на заседании каф. МАиМ алгебра и геометрия

Зав. кафедрой ________Труфанова Т.В. 1 курс, 1 семестр

1. Понятие обратной матрицы. Элементарная матрица.

2. Обратное преобразование. Вырожденное и невырожденное преобразование.

АМУРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Экзаменационный билет

№18

Утвержден 12 декабря 2006 ФМиИ, МАиМ

на заседании каф. МАиМ алгебра и геометрия

Зав. кафедрой ________Труфанова Т.В. 1 курс, 1 семестр

1. Вычисление обратной матрицы методом приписывания единичной матрицы.

2. Инвариантные подпространства и индуцированные преобразования.

АМУРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Экзаменационный билет

№19

Утвержден 12 декабря 2006 ФМиИ, МАиМ

на заседании каф. МАиМ алгебра и геометрия

Зав. кафедрой ________Труфанова Т.В. 1 курс, 1 семестр

1. Ранг матрицы.

2. Ранг, образ, ядро линейного преобразования.

АМУРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Экзаменационный билет

№20

Утвержден 12 декабря 2006 ФМиИ, МАиМ

на заседании каф. МАиМ алгебра и геометрия

Зав. кафедрой ________Труфанова Т.В. 1 курс, 1 семестр

1. Формула вычисления обратной матрицы.

2. Действия над линейными операторами. Кольцо линейных преобразований.

АМУРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Экзаменационный билет

№21

Утвержден 12 декабря 2006 ФМиИ, МАиМ

на заседании каф. МАиМ алгебра и геометрия

Зав. кафедрой ________Труфанова Т.В. 1 курс, 1 семестр

1. Теорема о базисном миноре.

2. Характеристический многочлен матрицы линейного преобразования.

АМУРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Экзаменационный билет

№22

Утвержден 12 декабря 2006 ФМиИ, МАиМ

на заседании каф. МАиМ алгебра и геометрия

Зав. кафедрой ________Труфанова Т.В. 1 курс, 1 семестр

1. Арифметическое n-мерное векторное пространство.

2. Связь между матрицами л.о. в различных базисах.

АМУРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Экзаменационный билет

№23

Утвержден 12 декабря 2006 ФМиИ, МАиМ

на заседании каф. МАиМ алгебра и геометрия

Зав. кафедрой ________Труфанова Т.В. 1 курс, 1 семестр

1. Построение поля комплексных чисел.

2. Собственные значения симметрической матрицы.

АМУРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Экзаменационный билет

№24

Утвержден 12 декабря 2006 ФМиИ, МАиМ

на заседании каф. МАиМ алгебра и геометрия

Зав. кафедрой ________Труфанова Т.В. 1 курс, 1 семестр

1. Собственные векторы и собственные значения.

2. Кольцо: примеры, свойства. Изоморфизм и гомоморфизм колец.

АМУРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Экзаменационный билет

№25

Утвержден 12 декабря 2006 ФМиИ, МАиМ

на заседании каф. МАиМ алгебра и геометрия

Зав. кафедрой ________Труфанова Т.В. 1 курс, 1 семестр

1. Приведение матрицы линейного оператора к диагональной форме.
2. Действия над комплексными числами в алгебраической форме.

3.УЧЕБНО - МЕТОДИЧЕСКИЕ МАТЕРИАЛЫ ПО ДИСЦИПЛИНЕ

3.1 Основная литература

Геометрия

1. Веселов А.П., Троицкий Е.В. Лекции по аналитической геометрии. Учеб.пособие . М.: Изд-во Центра прикладных исследований при механико-математическом ф-те МГУ.2002.-160с.
2. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Аналитичекая геометрия: Учеб.: Для вузов.- 5-е изд.-М.: Наука. Физматлит,1999.-224с.
3. Бурмистрова Е.Б., Лобанов С.Г. Линейная алгебра с элементами аналитической геометрии: Учеб. пособие. –М.: ГУ ВШЭ, 1998.-184 с.
4. Беклемишев Д.В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры.- М.: Физмат-лит, 2004.-304с.
5. Гусак А.А. Аналитическая геометрия и линейная алгебра: справочное пособие по решению задач/ А.А. Гусак.-Изд-е 2-е, стереотип.-Мн.: «ТетраСистемс», 2001.-288 с.
6. Ефимов Н.В. Краткий курс аналитической геометрии: Учебн. пособие – 13-е изд., стереот.- М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002.-240с.
7. А.Л.Вернер, Б.Е.Кантор, С.А.Франгулов . Геометрия. Ч.1. Учебное пособие для физико-математических факультетов педагогических институтов.- СПб.: «Специальная Литература», 1997.- 352 с.
8. А.Л.Вернер, Б.Е.Кантор, С.А.Франгулов . Геометрия. Ч.2. Учебное пособие для физико-математических факультетов педагогических институтов.- СПб.: «Специальная Литература», 1997.- 320 с.
9. В.В. Просолов, В.М. Тихомиров Геометрия. М.: МЦНМО, 1997.-352 с.

10. Цубербиллер О.Н. Задачи и упражнения по аналитической геометрии. 32-е изд., стер.- СПб.: Издательство «Лань», 2005.- 336с.:ил.-(Учебники для вузов. Специальная литература).
11. Сборник задач по алгебре и аналитической геометрии: Учеб. Пособие / А.А.Бурдун, Е.А.Мурашко, М.М.Токачев, А.С.Феденко; Под ред. А.С.Феденко.-2-е изд.-Мн.:Універсітэцкае, 1999.-302 с.
12. А.Д.Александров, Н.Ю.Нецветаев. Геометрия: Учеб. Пособие.-М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1990.- 672 с.: ил.

3.2 Дополнительная литература

Геометрия

1. Н.В. Ефимов, Э.Р. Розендорн Линейная алгебра и многомерная геометрия.3-е изд. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004.-464с.
2. Л.С. Атанасян. Геометрия. М., Просвещение, 1973, ч.1.
3. Л.С. Атанасян , В.Т. Базылев. Геометрия. М., Просвещение, 1986, ч.1.; 1987. ч.2
4. Сборник задач по геометрии./ Под редакцией В.Т. Базылева. М., Просвещение, 1980
5. Сборник задач по геометрии./ Под редакцией Л.С. Атанасяна. М., Просвещение, 1975.
6. Л.С. Атанасян , В.А. Атанасян. Сборник задач по геометрии. М., Просвещение, 1973 ч.1.
7. Клетеник Д.В. Сборник задач по аналитической геометрии – М.: Наука, 1977.

3.3 Основная

Алгебра

1. Александров П.С. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры/ П.С Александров. – М.: Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1979.-512с.
2. Бакельман И.Я. Аналитическая геометрия и линейная алгебра: Учеб. пособие для студентов пед. ин-тов по специальности №2105 «Физика»/

И.Я. Бакельман. - М., 1976.-288с.
3. Беклемишев Д. В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. - М.,2000
4. Беклемешева Л.А., Петрович А.Ю, Чубаров И.А. Сборник задач по аналитической геометрии и линейной алгебре. – М., 2001.
5. Бутузов В. Ф., Крутицкая Н.Ч., Шишкин А.А. Линейная алгебра в вопросах и задачах: Учеб. пособие / Под ред. В. Ф. Бутузова - М.: Физматлит, 2001
6. Гельфанд И. М. Лекции по линейной алгебре. - М., 2000
7. Громов, А.П. Учебное пособие по линейной алгебре/ А.П. Громов. – М.: «Просвещение» 1971.-128с.
8. Ильин В. А., Позняк Э. Г. Линейная алгебра. - М., 1984
9. Кострикин А. И. Введение в алгебру. Ч 1. Основы алгебры,
9а. Кострикин А. И. Введение в алгебру.Ч 2. Линейная алгебра. - М.,2000
10. Курош А. Г. Курс высшей алгебры. - М.,1971
11. Мальцев А. И. Основы линейной алгебры. - М.,1970
12. Парнасский И.В., Парнасская О.Е. Многомерные пространства. Квадратичные формы и квадрики/ И.В. Парнасский. – М.: «Просвещение» 1978.-128с.
13. Шевцов Г. С. Линейная алгебра. - М.,1999
14. Икрамов Х. Д. Задачник по линейной алгебре. - М.,1975
15. Проскуряков И. В. Сборник задач по линейной алгебре. - М.,1984
16. Сборник задач по алгебре / Под ред. А. И. Кострикина. - М.,1996
17.Фаддеев Д. К., Соминский И. С. Сборник задач по высшей алгебре. - М.,1977
18. Кострикин А.И. Введение в алгебру. - М., 1994.
19. Каргаполов М.И., Мерзляков Ю.И. Основы теории групп. - М., 1977.
20. Курош А.Г. Теория групп. - М.,1967.
21. Понтрягин Л.С. Неприрывные группы. — М., 1984.
22. Проскуряков И.В. Сборник задач по линейной алгебре. - М., 1970.
23. Сборник задач по алгебре. Под ред. Кострикина А.И. - М.,1995.

3.4 Дополнительная

Алгебра

18. Беклемишев Д. В. Дополнительные главы линейной алгебры. - М.,1983

19. Беклемишева Л.А., Петрович А. Ю., Чубаров И. А. Сборник задач по аналитической геометрии и линейной алгебре. - М.: Наука,1987

20. Беллман Р. Введение в теорию матриц. - М.: Наука,1976

21. Блох Э. Л., Лошинский Л. И., Турин В. Я. Основы линейной алгебры и некоторые ее приложения. - М.: Высшая школа, 1971

22. Боревич З. И. Определители и матрицы. - М.: Наука,1970

23. Бугров Я. С., Никольский С. М. Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии. - М.: Наука,1980

24. Бурмистрова Е. Б., Лобанов С. Г. Линейная алгебра с элементами аналитической геометрии. - М.,1998

25. Воеводин В. В. Линейная алгебра. - М.: Наука,1980

26. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. - М.,1988

27. Годунов С. К. Решение систем линейных уравнений. - Новосибирск: Наука, 1980

28. Головина Л. И. Линейная алгебра и некоторые ее приложения. - М.: Наука, 1985

29. Ефимов Н. В. Квадратичные формы и матрицы. - М.: Физматлит, 1962

Ефимов Н. В., Розендорн Э. Р. Линейная алгебра и многомерная геометрия. - М., 1970

30. Икрамов Х. Д. Численное решение матричных уравнений. - М.: Наука, 1984

31. Ильин В. А., Позняк Э. Г. Линейная алгебра. - М.: Физматлит, 2001. 320 с. (Курс высшей математики и мат. физики)

32. Кадомцев С. Б. Аналитическая геометрия и линейная алгебра. - М.: Физматлит, 2001. 160 с.

33. Клиот-Дашинский М. И. Алгебра матриц и векторов. ЛГУ, 1974

34. Кострикин А. И., Манин Ю. И. Линейная алгебра и геометрия. - М.: Изд-во МГУ, 1980
35. Крутицкая Н. А., Шишкин А. А. Линейная алгебра в вопросах и задачах
36. Ланкастер П. Теория матриц. - М.: Наука, 1982
37. Ленг С. Алгебра. - М.: Наука, 1968
38. Ляпин Е. С. Курс высшей алгебры. - М.: Учпедгиз, 1955
39. Ляпин Е. С., Евсеев А. Е. Алгебра и теория чисел. - М.: Просвещение, 1978
40. Мальцев А. И. Лекции по линейной алгебре. - М.: Наука, 1971
41. Маркус А. И., Минк Х. Обзор по теории матриц и матричных неравенств. - М.: Наука, 1992
42. Окунев Л. Я. Высшая алгебра. - М.: Просвещение,1966
43. Окунев Л. Я. Сборник задач по высшей алгебре. - М.: Просвещение,1964
44. Постников М. М. Лекции по геометрии. - М.,1986
45. Прасолов В. В. Задачи и теоремы линейной алгебры. - М.,1996
46. Ромакин М. И. Элементы линейной алгебры и линейного программирования. - М.: Высшая школа, 1966
47. Сборник задач по математике для втузов. Т 1. Под редакцией Ефимова А. В. - М.: Наука, 1984
48. Скорняков Л. А. Элементы линейной алгебры: Учеб. пособие. - М., 1980
49. Солодовников А. С. Введение в линейную алгебру и линейное программирование. - М.: Просвещение, 1966
50. Солодовников А. С. Системы линейных неравенств. - М.: Наука, 1969
51. Стренг Г. Линейная алгебра и ее применение. - М.: Мир, 1980
52. Фаддеев Д. К., Фаддеева В. Н. Вычислительные методы линейной алгебры. - М.-Л.: Физматгиз, 1963
53. Халмош П. Конечномерные векторные пространства. - М.,1963
54. Хорн Р., Джонсон Ч. Матричный анализ. - М.: Мир, 1989
55. Шилов Г. Е. Математический анализ. Конечномерные линейные пространства. - М.: Наука.,1969

56. Ван дер Варден Б.Л. Алгебра - М., 1979.
57. Варпаховский Ф.Л., Солодовников А.С., Стелецкий И.В. Алгебра. - М.,1978.
58. Куликов Л.Я., Москаленко А.И., Фомин А.А. Сборник задач по алгебре и теории чисел. –
М., 1993.
59. Мишина А.П., Проскуряков И.В. Высшая алгебра. - М., 1965.
60. Нечаев В.А. Задачник - практикум по алгебре. - М., 1983.
61. Скорняков Л.А. элементы алгебры. - М., 1980.

3.5 Методические материалы по дисциплине

1. Кван Н.В. «Группы. Кольца. Поля». Учебное пособие. –Изд – во АмГУ, 1999.
2. Ермак Н.В., Кван Н.В. «Векторные пространства. Методы решения задач. Ч.1.». Учебное пособие. – Изд – во АмГУ, 2000
3. Кван Н.В. Линейная алгебра. Учебное пособие (электр. вариант). – Изд – во АмГУ, 2000

4.МАТЕРИАЛЫ ДЛЯ ЧТЕНИЯ ЛЕКЦИЙ

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

Глава I. Элементы векторной алгебры.

§1. Направленный отрезок. Вектор.

План:

1. Направленный отрезок;
2. Свойства направленных отрезков;
3. Свойства векторов;
4. Операции над векторами:
   a) Сложение векторов
   b) Вычитание векторов
   c) Умножение векторов на число

Определение: Направленным отрезком называется множество точек прямой между двумя точками этой прямой, одна из точек которой называется началом, вторая – концом.

$\overline{\grave{A}\hat{A}}$ - направленный отрезок

А – начало

В – Конец

Замечание: Любой направленный отрезок имеет две характеристики: длина и направление.

$\left|\overline{\grave{A}\hat{A}}\right|$ - длина.

Определение: Два направленных отрезка, если они лежат на одной или двух параллельных прямых, называются коллинеарными.

Два направленных отрезка называются сонаправленными, если:

1) Лежат на одной или двух параллельных прямых;
2) Их концы находятся в одной полуплоскости относительно прямой, проходящей через их начало.

Два направленных отрезка называются противоположнонаправленными, если:

1) Лежат на концах одной или двух параллельных прямых;
2) Их концы находятся в разных полуплоскостях относительно прямой проходящей через их начало.

Два направленных отрезка называются равными, если:

1) Они сонаправлены;
2) Их длины равны.

Определение: Направленный отрезок, имеющий начало и конец в одной точке (нулевую длину), называется нулевым направленным отрезком.

Замечание: нулевой направленный отрезок коллинеарен любому направленному отрезку.

Пункт 3:

Определение: Свободным вектором (вектором) называется класс направленных отрезков равных между собой, то есть сонаправленных и равных по длине.

Замечание: Для обозначения векторов используют либо малые буквы, либо вектор обозначают одним из представителей класса направленных отрезков.

Замечание: Множество нулевых направленных отрезков – это нулевой вектор.

Замечание: Все основные свойства направленных отрезков (коллинеарность, сонапрвленность, противоположнонаправленность) справедливы и для вектора.

Определение: два вектора называются противоположными, если:

1) Они противоположнонаправлены;
2) Их длины равны.

Определение: Вектор, длина которого равна единице, называется единичным или ортом.

Пункт 4: Сложение вектора.

Суммой двух векторов называется вектор, который можно получить:

1) По правилу треугольника;
2) По правилу параллелограмма.

Правило треугольника:

1) Зафиксируем точку;
2) Отложим от фиксированной точки первый вектор;
3) От конца первого вектора отложим второй;
4) Соединим начало первого вектора и конец второго.

Правило параллелограмма:

1) Зафиксируем точку;
2) Откладывает от фиксированной точки оба вектора;
3) Полученную фигуру достраиваем до параллелограмма;
4) Проводим диагональ параллелограмма из общего начала векторов – это сумма.

Свойства сложения:

1) Коммутативность: $\vec{a} + \vec{a} = \vec{a} + \vec{a}$
2) Ассоциативность: $\vec{a} + (\vec{a} + \vec{n}) = (\vec{a} + \vec{a}) + \vec{n}$
3) $\vec{a} + \overline{0} = \vec{a}$
4) $\vec{a} + (-\vec{a}) = \overline{0}$

Правило многоугольника:

Для сложения нескольких векторов от фиксированной точки откладывают первый вектор, каждый следующий откладывают от конца предыдущего. Вектор суммы начинается в начале первого вектора и заканчивается в конце последнего.

Вычитание векторов.

Определение: Разностью векторов $\vec{a}$ и $\vec{a}$, называется такой вектор $\vec{o}$, что выполняется равенство: $\vec{o} + \vec{a} = \vec{a}$

Вывод: Для того, чтобы построить вектор разности вектор откладывают от одной точки, результирующий вектор направлен от конца вычитаемого к концу уменьшаемого.

Замечание: Если вектор отложить от одной точки и достроить фигуру до параллелограмма, то диагонали параллелограмма это векторы суммы и разности исходных.

Умножение вектора на число.

Определение: Произведением вектора $\vec{a}$ на действительное число $\alpha \in$ R называется вектор $\vec{\partial} = \alpha\vec{a}$, такой что:

1) Длина $|\vec{\partial}| = |\vec{a}| * |\alpha|$
2) Коллинеарны, причём: $\vec{\partial}$ и $\vec{a}$ сонаправлены, если $\alpha \succ 0$; $\vec{\partial}$ и $\vec{a}$ противоположнонаправлены, если $\alpha \prec 0$

Свойства:

1) $1 * \vec{a} = \vec{a}$
2) $-1 * \vec{a} = -\vec{a}$
3) $\alpha * \overline{0} = \overline{0}$
4) Дистрибутивность относительно суммы чисел: $(\alpha + \beta) * \vec{a} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{a}$
5) Дистрибутивность относительно суммы векторов: $(\vec{a} + \vec{a}) * \alpha = \alpha\vec{a} + \alpha\vec{a}$
6) Ассоциативность: $\alpha * (\beta * \vec{a}) = (\alpha * \beta) * \vec{a}$

§2 Линейная зависимость. Базис.

План:

1. Теорема о коллинеарных векторах;
2. Теорема о компланарных и не компланарных векторах;
3. Линейная зависимость векторов, её свойства;
4. Базис векторного пространства. Координаты вектора.

Теорема: Если векторы $\vec{a}$ и $\vec{a}$ коллинеарны, причём $\vec{a} \neq 0$, то существует и притом единственное, действительное число α такое, что $\vec{a} = \alpha * \vec{a}$

Определение: Три вектора $\vec{a}, \vec{a}, \vec{n}$ - компланарны, причём $\vec{a}$ и $\vec{a}$ неколлинеарны, то существует и притом единственная пара чисел $\alpha, \beta \in$ R:

$\vec{n} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{a}$.

Теорема (о некомпланарныхых векторах): Если $\vec{a},\vec{a},\vec{n}$ некомпланарны, то для любого вектора $\vec{\partial}$ существует и притом единственный набор чисел $\alpha,\beta,\chi \in R$: $\vec{\partial} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{a} + \chi\vec{n}$.

Определение: Пусть дана система векторов $\vec{a}_1,\vec{a}_2,\ldots,\vec{a}_n$. Вектор $\vec{a} = \lambda_1\vec{a}_1 + \lambda_2\vec{a}_2 + \ldots + \lambda_n\vec{a}_n$ называется линейной комбинацией векторов системы, где $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n$ - действительные числа.

Определение: Линейная комбинация вида $\lambda_1\vec{a}_1 + \ldots + \lambda_n\vec{a}_n = \overline{0}$ - называется нулевой линейной комбинацией.

Определение: Система векторов $\vec{a}_1,\vec{a}_2,\ldots,\vec{a}_n$ называется линейнозависимой, если в нулевой линейной комбинации векторов системы хотя бы один коэффициент отличен от нуля.

Определение: Система векторов $\vec{a}_1,\vec{a}_2,\ldots,\vec{a}_n$ называется линейно-независимой, если в нулевой линейной комбинации векторов системы все числовые коэффициенты равны нулю.

$$\lambda_1\vec{a}_1 + \lambda_2\vec{a}_2 \ldots + \lambda_n\vec{a}_n = \overline{0} \quad \lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = 0$$

Свойства линейной зависимости:

1. Система векторов $\vec{a}_1,\vec{a}_2,\ldots,\vec{a}_n$ линейно-зависима тогда и только тогда, когда один из векторов системы можно выразить через остальные в виде линейной комбинации.
2. Если часть системы векторов линейно-зависима, то и вся система векторов линейно-зависима.
3. Если вся система векторов линейно-независима, то любая её часть линейно-независима.
4. Линейно-независимая система векторов не может содержать нулевого вектора.

Определение: Базисом называется упорядоченная система векторов, удовлетворяющая свойствам: линейно-независимая система векторов; любой вектор пространства выражается через базисные в виде линейной комбинации.

Базисом плоскости может быть два неколлинеарных вектора. Базисом трёхмерного пространства является три некомпланарных вектора.

Замечание: Размерность пространства соответствует количеству векторов в базисе.

Согласно теореме о компланарности и некомпланарности векторов имеем:

1. Если $\vec{a}$ компланарен $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$, то существует α_1, α_2 такие что $\vec{a} = \alpha_1\vec{a}_1 + \alpha_2\vec{a}_2$
2. Если $\vec{a} \in$ трёхмерному пространству, в котором $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3\}$ - базис, то существует и притом единственный набор чисел $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in R$

$\vec{a} = \alpha_1\vec{a}_1 + \alpha_2\vec{a}_2 + \alpha_3\vec{a}_3$

Определение: Числовой коэффициент в разложении вектора по векторам базиса, называются координатами вектора в данном базисе.

Замечание: Базисные векторы в собственном базисе имеют координаты из нулей и единицы.

Базис $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2\}$, то $\vec{a}_1 = (1;0)$ $\vec{a}_2 = (0;1)$

Операции над векторами в координатах.

1. Вектор суммы имеет координаты каждая, из которых есть сумма соответствующих координат слагаемого.
2. Вектор разности имеет координаты каждая, из которых есть разность соответствующих координат уменьшаемого и вычитаемого.
3. При умножении вектора на число, каждая координата умножается на число.
4. Координаты коллинеарных векторов пропорциональны.

§3 Скалярное произведение векторов.

План:

1. Определение, свойства из определения;
2. Общие свойства скалярного произведения. Скалярное произведение в координатах в ортонормированном базисе;
3. Проекция вектора. Координаты вектора;
4. Физический смысл скалярного произведения векторов.

Определение: Скалярным произведением $(\vec{a},\vec{a})$ называется число равное произведению длин векторов на cos угла между ними.

$(\vec{a},\vec{a}) = |\vec{a}| * |\vec{a}| * \cos(\vec{a},\vec{a})$

Замечание: Для того, чтобы найти угол между векторами, их откладывают от одной точки и рассмотреть угол между лучами с общим началом.

Следствия из определения:

1. Знак скалярного произведения зависит от угла между векторами

   $(\vec{a},\vec{a}) \succ 0,$ если $\cos(\vec{a},\vec{a}) \succ 0$ $\Rightarrow$ векторы образуют острый угол

   $(\vec{a},\vec{a}) \prec 0,$ если $\cos(\vec{a},\vec{a}) \prec 0$ $\Rightarrow$ векторы образуют тупой угол

2. $(\vec{a},\vec{a}) \le |\vec{a}| * |\vec{a}|$

   $(\vec{a},\vec{a}) = |\vec{a}| * |\vec{a}|$, векторы сонаправлены

   $(\vec{a},\vec{a}) = -|\vec{a}| * |\vec{a}|$, векторы противоположнонаправлены

3. $(\vec{a},\vec{a}) = 0$, если

   Либо один вектор нулевой

   Либо векторы ортогональны

4. $(\vec{a},\vec{a}) = |\vec{a}| * |\vec{a}| = |\vec{a}|^2$

   $|\vec{a}| = \sqrt{(\vec{a},\vec{a})}$

5. Скалярное произведение на множестве векторов не является бинарной алгебраической операцией

Свойства скалярного произведения:

1. Коммутативность: $(\vec{a},\vec{a}) = (\vec{a},\vec{a})$
2. Ассоциативность числового множителя: $(\lambda\vec{a},\vec{a}) = \lambda(\vec{a},\vec{a})$
3. Дистрибутивность: $(\vec{a},\vec{a}+\vec{n}) = (\vec{a},\vec{a}) + (\vec{a},\vec{n})$

Доказательство этих свойств проводится по определению.

Среди бесконечного числа базисов плоскости особо выделяют ортонормированный базис.

Определение: Ортонормированным базисом плоскости называется базис $\{\bar{i},\bar{j}\}$, такой что:

Базисные векторы единичны – орты $|\bar{i}| = |\bar{j}| = 1$

Базисные векторы ортогональны

С учётом определения любой вектор в ортонормированном базисе можно расписать $\vec{a} = \grave{a}_1\bar{i} + a_2\bar{j}$

Теорема: Скалярное произведение равно сумме произведений соответствующих координат.

$$(\vec{a},\vec{a}) = \grave{a}_1\hat{a}_1 + \grave{a}_2\hat{a}_2$$

Следствия из теоремы:

1. $\vec{a} \perp \vec{a} \Leftrightarrow \quad \grave{a}_1\hat{a}_1 + \grave{a}_2\hat{a}_2 = 0$

2. $(\vec{a},\vec{a}) = \grave{a}_1^{\,2} + \grave{a}_2^{\,2} \qquad |\vec{a}| = \sqrt{\grave{a}_1^2 + \grave{a}_2^2}$

$$\cos(\vec{a},\vec{a}) = \frac{(\vec{a},\vec{a})}{|\vec{a}| * |\vec{a}|} \qquad \cos(\vec{a},\vec{a}) = \frac{\grave{a}_1\hat{a}_1 + \grave{a}_2\hat{a}_2}{\sqrt{\grave{a}_1^2 + \grave{a}_2^2} + \sqrt{\hat{a}_1^2 + \hat{a}_2^2}}$$

3.

Пусть дан ортонормированный базис $\{\bar{i},\bar{j}\}$

$\vec{a} = (\grave{a}_1, \grave{a}_2)$

$\vec{a} = \grave{a}_1\bar{i} + a_2\bar{j}$

Рассмотрим скалярное произведение вектора $\vec{a}$ с каждым из базисных векторов

$(\vec{a},\bar{i}) = (a_1\bar{i} + a_2\bar{j},\bar{i}) = a_1(\bar{i},\bar{i}) + a_2(\bar{i},\bar{j}) = a_1(\bar{i},\bar{i}) = a_1$

$(\bar{a},\bar{i}) = |\bar{a}| * |\bar{i}| * \cos(\bar{a},\bar{i})$

$a_1 = |a| * \cos(\bar{a},\bar{i})$

Аналогично :

$a_2 = |a| * \cos(\bar{a},\bar{j})$

В ортонормированном базисе каждая координата это ортогональная проекция данного вектора на соответствующий базисный вектор.

Замечание: Косинусы углов, которые образуют данный вектор с базисными, называются направляющими косинусами данного вектора, причём так как $|\grave{a}|^2 = \grave{a}_1^2 + \grave{a}_2^2 = |\grave{a}|^2 * \cos^2(\bar{a},\bar{i}) + |a|^2 * \cos^2(\bar{a},\bar{j}) \Rightarrow$

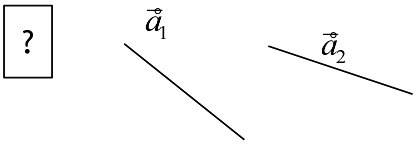
$\cos^2(\bar{a},\bar{i}) + \cos^2(\bar{a},\bar{j}) = 1$

Проекция вектора на вектор:

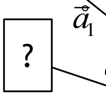
$$Ïð_{\vec{a}}\vec{a} = \frac{(\vec{a},\vec{a})}{|\vec{a}|}$$

В результате вычисления проекции вектора на вектор может быть отрицательной – это возможно, если скалярное произведение между векторами отрицательное, а значит угол – тупой.

Физический смысл скалярного произведения



Векторам, изображающим силу, скорость момента силы и так далее приписывается размерность – одночлен, составленный из какого-то набора символов. Такие одночлены перемножаются и делятся обычным способом.



§4 Система координат. Простейшие задачи. Полярные координаты

План:

I. Понятие системы координат. Координаты точки;

II. Простейшие задачи:

a. Координаты вектора;
b. Расстояние между точками;
c. Деление отрезков в заданном отношении;
d. Площадь треугольника;

III. Полярная система координат. Связь между полярными и декартовыми координатами.

Пункт 1:

Выберем на плоскости точку О рассмотрим на плоскости базис $\{\vec{a}_1,\vec{a}_2\}$

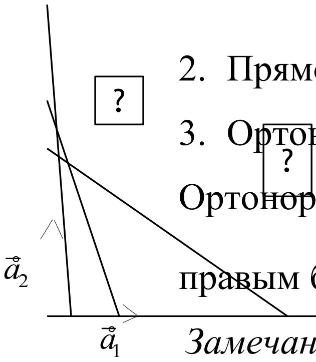
Отложим базисные векторы от фиксированной точки, полученная конструкция называется системой координат $\{\hat{I}\ ,\vec{a}_1,\vec{a}_2\}$

В системе координат выделяют:

1. Точку О – начало координат
2. Координатные оси $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$, проходящие через начало координат в направлении базисных векторов, причём длины базисных векторов – это длины мерных отрезков по этим осям.

Выделяют различные системы координат:

1. Аффинная система координат (два некомпланарных вектора)



2. Прямоугольная система координат
3. Ортонормированная система координат

Ортонормированной системой координат принято считать систему с правым базисом (движение от $\bar{i}$ к $\bar{j}$ против часовой стрелки)

Замечание: В аффинном пространстве (пространстве точек) аналогичную процедуру задания системы координат можно осуществить вводя три упорядоченные точки.

Определение: Координатами точки М в данной системе координат, называются координаты её радиус-вектора.

Таким образом между множеством точек и множеством упорядоченных пар чисел (их координат) установлено взаимнооднозначное соответствие.

Простейшие задачи.

Задача№1.

В данной системе координат $\{\hat{I}, \vec{a}_1, \vec{a}_2\}$ даны: т. $\grave{A}(\tilde{o}_1, \acute{o}_1)$, т. $\hat{A}(\tilde{o}_2, \acute{o}_2)$

Найти: Координаты вектора $\overline{\grave{A}\hat{A}}$ в данном базисе.

Решение:

По условию $\overline{\hat{I}\grave{A}} = (\tilde{o}_1, \acute{o}_1)$ $\quad \overline{\hat{I}\hat{A}} = (\tilde{o}_2, \acute{o}_2)$

По правилу разности $\overline{\grave{A}\hat{A}} = \overline{\hat{I}\hat{A}} - \overline{\hat{I}\grave{A}}$

$$\overline{\grave{A}\hat{A}} = \tilde{o}_2\vec{a}_1 + \acute{o}_2\vec{a}_2 - (\tilde{o}_1\vec{a}_1 + \acute{o}_1\vec{a}_2) = (\tilde{o}_2 - \tilde{o}_1)\vec{a}_1 + (\acute{o}_2 - \acute{o}_1)\vec{a}_2 \Rightarrow$$

$$\overline{\grave{A}\hat{A}} = (\tilde{o}_2 - \tilde{o}_1; \acute{o}_2 - \acute{o}_1)$$

Вывод: Для того, чтобы найти координаты вектора необходимо из соответствующих координат конца вектора вычесть соответствующие координаты начала вектора.

Задача№2.

В базисе $\{\hat{I}, \bar{i}, \bar{j}\}$ т. $\grave{A}(\tilde{o}_1, \acute{o}_1)$, т. $\hat{A}(\tilde{o}_2, \acute{o}_2)$

Найти: расстояние между точками $\rho\,(\grave{A},\hat{A}) - ?$

Решение: $\rho\,(\grave{A},\hat{A}) = \left|\overline{\grave{A}\hat{A}}\right|$

Из темы скалярное произведение знаем, что $|\vec{a}| = \sqrt{\grave{a}_1^2 + \grave{a}_2^2}$, так как $\overline{\grave{A}\hat{A}} = (\tilde{o}_2 - \tilde{o}_1; \acute{o}_2 - \acute{o}_1)$, то $\left|\overline{\grave{A}\hat{A}}\right| = \sqrt{(\tilde{o}_2 - \tilde{o}_1)^2 + (\acute{o}_2 - \acute{o}_1)^2}$ таким образом

$\rho\,(\grave{A},\hat{A}) = \sqrt{(\tilde{o}_2 - \tilde{o}_1)^2 + (\acute{o}_2 - \acute{o}_1)^2}$

Задача№3.

В базисе $\{\hat{I}\,, \vec{a}_1, \vec{a}_2\}$ т. $\grave{A}(\tilde{o}_1, \acute{o}_1)$, т. $\hat{A}(\tilde{o}_2, \acute{o}_2)$ $\quad \lambda \in R \quad \lambda \neq -1$

Найти: Координаты точки M делящей отрезок AB в отношении λ .

Решение:

Определение: Говорят, что точка M делит отрезок AB в отношении λ , если $\overline{\grave{A}\grave{I}} = \lambda\,\overline{\grave{I}\hat{A}} \qquad \lambda \in \grave{A}\hat{A}$

Построим в системе координат точки A, B, M

По условию $\overline{\hat{I}\grave{A}} = (\tilde{o}_1; \acute{o}_1)$

$\overline{\hat{I}\hat{A}} = (\tilde{o}_2; \acute{o}_2)$

Пусть точка $\grave{I}\ (\tilde{o}; \acute{o})$, тогда $\overline{\hat{I}\grave{I}} = (\tilde{o}; \acute{o})$

Найдём связь координат точек A, B, M.

По определению $\overline{\grave{A}\grave{I}} = \lambda\,\overline{\grave{I}\hat{A}}$

$\overline{\grave{A}\grave{I}} = \overline{\hat{I}\grave{I}} - \overline{\hat{I}\grave{A}}$

$\overline{\grave{I}\hat{A}} = \overline{\hat{I}\hat{A}} - \overline{\hat{I}\grave{I}}$

Подставим: $\overline{\hat{I}\grave{I}} - \overline{\hat{I}\grave{A}} = \lambda\,(\overline{\hat{I}\hat{A}} - \overline{\hat{I}\grave{I}})$

Выразим $\overline{\hat{I}\grave{I}}$:

$\overline{\hat{I}\grave{I}} + \lambda\,\overline{\hat{I}\grave{I}} = \overline{\hat{I}\grave{A}} + \lambda\,\overline{\hat{I}\hat{A}}$

???? ???? ? ρ ???????? ???

$$\overline{\hat{I}\hat{I}} = \frac{\overline{\hat{I}\hat{A}} + \lambda \overline{\hat{I}\hat{A}}}{1+\lambda}$$

Расписывая последнее равенство для каждой из координат точки М, получим:

$$\tilde{o} = \frac{\tilde{o}_1 + \lambda \tilde{o}_2}{1+\lambda} \qquad \acute{o} = \frac{\acute{o}_1 + \lambda \acute{o}_2}{1+\lambda}$$

Замечание: Если точка М – середина отрезка АВ, то $\lambda = 1$, а значит каждая координата есть полусумма соответствующих координат.

$$\tilde{o} = \frac{\tilde{o}_1 + \tilde{o}_2}{2} \qquad \acute{o} = \frac{\acute{o}_1 + \acute{o}_2}{2}$$

Задача№4.

Найти площадь треугольника.

т. $\grave{A}(\tilde{o}_1, \acute{o}_1)$, т. $\hat{A}(\tilde{o}_2, \acute{o}_2)$, т. $\tilde{N}(\tilde{o}_3, \acute{o}_3)$

$$\pm S = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} \tilde{o}_2 - \tilde{o}_1 & \acute{o}_2 - \acute{o}_1 \\ \tilde{o}_3 - \tilde{o}_1 & \acute{o}_3 - \acute{o}_1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}((\tilde{o}_2 - \tilde{o}_1)(\acute{o}_3 - \acute{o}_1) - (\acute{o}_2 - \acute{o}_1)(\tilde{o}_3 - \tilde{o}_1))$$

Пункт 3:

Выберем точку О – полюс, рассмотрим луч с началом в точке О, вдоль луча выберем единичный вектор $\bar{i}$, луч – полярная ось. Каждой точке плоскости поставим в соответствие две характеристики:

1. Длина её радиус-вектора
2. Угол между радиус-вектором и $\bar{i}$

Замечание: Для построения точки в полярных координатах работу удобно начинать со второй координаты.

Связь между полярной и прямоугольной системой координат.

?

Выберем прямоугольную систему координат $\{\hat{I}, \bar{i}, \bar{j}\}$. Рассмотрим полярную систему координат.

О – полюс
Ох – полярная ось

$\bar{i}$ - единичный вектор

Пусть $\grave{I}(\tilde{o}, \acute{o})$ - в прямоугольной системе координат, $\grave{I}(\rho, \varphi)$ - в полярной системе координат.

По теореме Пифагора $\Rightarrow$ $\rho = \sqrt{\tilde{o}^2 + \acute{o}^2}$

$Sin\varphi = \dfrac{y}{\rho}$, $Cos\varphi = \dfrac{x}{\rho}$, $Tg\varphi = \dfrac{y}{x}$

§5 Метод координат на плоскости.

План:

1. Суть метода;
2. Уравнения фигуры;
3. Схема составления аналитического условия для геометрической фигуры.

Введение на плоскости системы координат установило взаимнооднозначное соответствие между точками плоскости и упорядоченными парами действительных чисел.

Аналитическая геометрия одним из основных своих методов использует метод координат, его суть: по средствам координат точек геометрические объекты задаются аналитически с помощью чисел, уравнений и их систем (систем неравенств).

Достоинства метода координат: при доказательстве теорем или решений задач, использование аналитических методов (метод координат) существенно упрощает рассуждения и позволяет алгоритмизировать рассуждение.

Геометрическим методом точек (ГМТ) или фигурой на плоскости будем называть множество точек, удовлетворяющих некоторому свойству.

Пример: ГМТ, удалённых от данной точки на данное расстояние – окружность с центром в данной точке, данного радиуса.

Определение: Условием, определяющим фигуру в данной системе координат называется уравнение, неравенство или их системы такие, что координаты любой точки, принадлежащей фигуре удовлетворяют им, а координаты любой точки, не принадлежащей этой фигуре, не удовлетворяют.

Замечание: Если условие, определяющее фигуру является уравнением , его называют уравнением фигуры.

Замечание: Уравнения фигуры никогда не решают, его только исследуют.

Используя метод координат решают задачи двух типов:

1. По заданным геометрическим свойствам фигуры составляют аналитическое условие, определяющее данную фигуру;
2. По заданным условиям фигуры выясняют её геометрические свойства.

Для решения задач первого типа придерживаются схемы:

1) Выбрать удобную систему координат;
2) Выбрать произвольную точку фигуры и приписать ей произвольные (свободные) координаты;
3) Записать основное характеристическое свойство всех точек данной фигуры;
4) Основные характеристические свойства записывают через координаты;
5) Упрощение выражения четвёртого пункта;
6) При необходимости строим ГМТ.

Для решения задач второго типа следует помнить:

1) Если фигура состоит из конечного множества точек, то она называется вырожденной.
2) Если на плоскости не существует точек, чьи координаты удовлетворяли бы уравнению фигуры. Такая фигура называется мнимой.
3) Если уравнение фигуры представимо в виде произведения множителей

равных нулю, то фигура считается распавшейся.

Замечание: Линии на плоскости могут быть заданы:

a) явно: $y = f(x)$;

b) не явно: $F(x; y) = 0$;

c) параметрически.

Линии на плоскости

Пусть x и y – две произвольные переменные.

Определение: Соотношение вида F(x,y)=0 называется *уравнением*, если оно справедливо не для всяких пар чисел x и y.

Пример: $2x + 7y – 1 = 0$, $x^2 + y^2 – 25 = 0$.

Если равенство F(x,y)=0 выполняется для любых x, y, то, следовательно, F(x,y) = 0 – тождество.

Пример: $(x + y)^2 - x^2 - 2xy - y^2 = 0$

Говорят, что числа x_0 и y_0 *удовлетворяют уравнению*, если при их подстановке в это уравнение оно обращается в верное равенство.

Важнейшим понятием аналитической геометрии является понятие уравнения линии.

Определение: Уравнением данной линии называется уравнение F(x,y)=0, которому удовлетворяют координаты всех точек, лежащих на этой линии, и не удовлетворяют координаты никакой из точек, не лежащих на этой линии.

Линия, определяемая уравнением y = f(x), называется графиком функции f(x). Переменные x и y – называются текущими координатами, т. к. являются координатами переменной точки.

Несколько примеров определения линий.

1) x – y = 0 => x = y. Это уравнение определяет прямую:

2) $x^2 - y^2 = 0 \Rightarrow (x-y)(x+y) = 0 \Rightarrow$ точки должны удовлетворять либо уравнению $x - y = 0$, либо уравнению $x + y = 0$, что соответствует на плоскости паре пересекающихся прямых, являющихся биссектрисами координатных углов:

3) $x^2 + y^2 = 0$. Этому уравнению удовлетворяет только одна точка O(0,0).

4) $\rho = a\cos\theta$. Это уравнение задает окружность, имеющую радиус-вектор ρ, наклоненный под углом θ к оси Ox.

Предметом изучения аналитической геометрии являются *алгебраические линии* – это такие линии, которые в декартовой прямоугольной системе координат определяются уравнением вида: $A_1 x^{k_1} y^{l_1} + A_2 x^{k_2} y^{l_2} + \ldots = 0$.

Примеры: $Ax+By+C=0$,

$Ax^2+By^2+Cxy+Dx+Ey+F=0$

Уравнение $Ax+By+C=0$ – общее уравнение первой степени.

Примеры неалгебраических линий: $y - \sin x = 0$,

$$A^{x} + B^{y} + C = 0.$$

<u>Определение</u>: Линия, определяемая в декартовой системе координат алгебраическим уравнением n-ой степени, называется *линией n-ого порядка*.

<u>Теорема:</u> Если в декартовой системе координат линия определяется уравнением n-ой степени, то в другой декартовой системе координат она также определяется уравнением n-ой степени, т. е. порядок линии не зависит от выбора системы координат.

Линии первого порядка. Прямые на плоскости.

Пусть задана декартова система координат и некоторая прямая; α – угол наклона прямой к оси Ox.

<u>Определение</u>: Тангенс угла α наклона прямой к оси Ox называется угловым коэффициентом этой прямой: $k = \operatorname{tg}\alpha$.

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = k \qquad (1)$$

Формула (1) – определение углового коэффициента по известным двум точкам прямой.

Пусть прямая, неперпендикулярная оси Ox, имеет угловой коэффициент k и отсекает на оси Oy отрезок OB= b.

010009000003780000002001c0000000000400000003010800050000000b
0200000000050000000c02aa09290b040000002e0118001c000000fb02100007000

1). Пусть M(x,y) – точка с переменными координатами (переменная точка). Рассмотрим точку B(0, b). По формуле (1) угловой коэффициент равен

$$k = \frac{y - b}{x} \qquad (2)$$

Преобразуем формулу (2) к виду

$y - b = kx$ или

$$y = kx + b \qquad (3)$$

Если точка *M* не принадлежит данной прямой, то уравнение (3) не выполнится, следовательно, (3) - это уравнение прямой (по определению).

Уравнение (3) определяет прямую, имеющую угловой коэффициент *k*, и отсекающую на оси Oy отрезок *b*, и называется *уравнением прямой с угловым коэффициентом.*

2). Пусть известна одна точка $M_1(x_1,y_1)$ и угловой коэффициент *k*:

По формуле (1), если *M* (*x, y*) – переменная точка,

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = k \qquad (4)$$

или

$$y - y_1 = k(x - x_1) \qquad (5)$$

Уравнение (5) – это уравнение прямой с угловым коэффициентом k, проходящей через точку $M_1\left(x_1, y_1\right)$.

3) Пусть известны точки M_1 (x_1, y_1) и $M_2(x_2, y_2)$, принадлежащие прямой. Найти уравнение этой прямой.

По формуле (1) – $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = k$. Отсюда, с учетом (5), получим

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\left(x - x_1\right)$$

или, поделив обе части равенства на $\left(y_2 - y_1\right)$,

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}. \tag{6}$$

Уравнение (6) – это уравнение прямой, проходящей через две заданные точки.

Угол между прямыми

Пусть существуют две прямые, неперпендикулярные оси Ох; k_1 и k_2 – угловые коэффициенты этих прямых. Пусть φ – угол между заданными прямыми.

α_1 – угол наклона первой прямой к оси Ох;
α_2 – угол наклона второй прямой к оси Ох.

$$\varphi = \alpha_2 - \alpha_1.$$

$$\operatorname{tg}\varphi = \operatorname{tg}\left(\alpha_2 - \alpha_1\right) = \frac{\operatorname{tg}\alpha_2 - \operatorname{tg}\alpha_1}{1 + \operatorname{tg}\alpha_1 \operatorname{tg}\alpha_2},$$

т. к. $\operatorname{tg}\alpha_1 = k_1$ и $\operatorname{tg}\alpha_2 = k_2$ =>

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2} \qquad (6)$$

При $\alpha = \frac{\pi}{2}$ (прямая перпендикулярна оси Ох) формула (6) теряет смысл.

1. Условие параллельности двух прямых. Обозначим две прямые l_1 и l_2.

   $l_1 \,||\, l_2 \Leftrightarrow \quad k_1 = k_2$.

2. Условие перпендикулярности двух прямых:

   $l_1 \perp l_2 \left(\varphi = \frac{\pi}{2}\right) \Leftrightarrow \quad k_2 = -\frac{1}{k_1}$.

Общее уравнение прямой

Теорема. В декартовой системе координат каждая прямая определяется уравнением первой степени и обратно, каждое уравнение первой степени определяет прямую.

Доказательство. Пусть существует прямая l. Если l не перпендикулярна оси Ох, то она определяется уравнением первой степени $y = kx + b$. Если прямая l перпендикулярна оси Ох, то для всех точек, принадлежащих прямой, выполняется равенство $x = a$, что также является уравнением первой степени.

Обратно. Пусть дано уравнение

$$Ax + By + C = 0. \qquad (7)$$

а). Если $B \neq 0$, то можно записать $\frac{A}{B}x + y + \frac{C}{B} = 0$ или $y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}$.

Обозначим $-\frac{A}{B} \equiv k$ и $-\frac{C}{B} \equiv b$. Тогда $y = kx + b$ – уравнение прямой.

б). Если $B = 0$, то $A \neq 0$. $Ax + C = 0$ => $x = -\frac{C}{A}$.

Пусть $-\frac{C}{A} \equiv a$ => $x = a$ – уравнение прямой, параллельной оси Oy.

Уравнение $Ax + By + C = 0$ называется *общим уравнением прямой*, поскольку определяет все виды прямых без исключения.

Неполное уравнение первой степени

Рассмотрим три случая, когда уравнение является неполным.

1. $C = 0$ => $Ax + By = 0$ – прямая проходит через начало координат.
2. $B = 0$ $(A \neq 0)$ => $Ax + C = 0$ – прямая параллельна оси Oy.
3. $A = 0$ $(B \neq 0)$ => $By + C = 0$ – прямая параллельна оси Ox.

Уравнение прямой “в отрезках”

Пусть дано уравнение $Ax + By + C = 0$, где $A \neq 0$, $B \neq 0$, $C \neq 0$.

Преобразуем его к виду $Ax + By = -C$ и разделим на $(-C)$:

$$-\frac{A}{C}x - \frac{B}{C}y = 1 \quad \text{или} \quad \frac{x}{-\frac{C}{A}} + \frac{y}{-\frac{C}{B}} = 1.$$

Обозначим $a \equiv -\frac{C}{A}$, $b \equiv -\frac{C}{B}$.

$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ – *уравнение прямой в отрезках*. (8)

Числа a и b в уравнении (8) имеют геометрический смысл. Это величины отрезков, отсекаемых прямой на координатных осях.

Убедимся в этом. Найдем координаты точки пересечения прямой с осью Ox:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

y=0 $x = a,\ y = 0.$

Аналогично находится длина отрезка, отсекаемого прямой на оси Oy.

Совместное исследование уравнений двух прямых

$$\left.\begin{array}{l} A_1x + B_1y + C_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2 = 0 \end{array}\right\}$$

Каждое уравнение определяет прямую на плоскости. Совместное решение этих уравнений определяет общую точку этих прямых.

1). Пусть $\frac{A_1}{A_2} \neq \frac{B_1}{B_2}$. Определитель системы $\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \neq 0$, система имеет единственное решение.

Это значит, что прямые пересекаются в одной точке. Координаты точки пересечения находятся по формулам Крамера.

2). Пусть $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}$. Тогда возможны два случая:

а) $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2}$ => общих точек нет, прямые параллельны;

б) $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$ => уравнения равносильны, т.е. определяют одну и ту же прямую.

Два уравнения определяют одну прямую, если их коэффициенты пропорциональны.

Нормаль к прямой

Пусть прямая *L* задана общим уравнением:

$$Ax + By + C = 0. \qquad (9)$$

Пусть т. $M_0(x_0, y_0) \in L$. =>

$$Ax_0 + By_0 + C = 0. \quad (10)$$

Вычтем (10) из (9):

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0 \quad (11)$$

Выражение (11) можно рассматривать как скалярное произведение двух векторов: $\bar{n}\{A, B\}$ и $\overline{M_0M}\{x - x_0, y - y_0\}$. Так как $\bar{n} \cdot \overline{M_0M} = 0$, то $\bar{n} \perp \overline{M_0M}$, и вектор $\bar{n}$ является нормалью к прямой L.

Угол между двумя прямыми

Пусть прямые L_1 и L_2 заданы общими уравнениями:

$$A_1x + B_1y + C_1 = 0 \text{ и } A_2x + B_2y + C_2 = 0.$$

Нормали к прямым: $\bar{n}_1 = \{A_1, B_1\}$ и $\bar{n}_2 = \{A_2, B_2\}$.

Угол между прямыми можно определить как угол между нормалями к этим прямым:

$$\cos\varphi = \frac{\bar{n}_1 \cdot \bar{n}_2}{|\bar{n}_1||\bar{n}_2|} = \frac{A_1A_2 + B_1B_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2}}$$

Тогда условие параллельности прямых – это условие коллинеарности нормалей:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}.$$

Условие перпендикулярности прямых – это перпендикулярность нормалей:

$$\bar{n}_1 \cdot \bar{n}_2 = 0 \Rightarrow A_1A_2 + B_1B_2 = 0.$$

Каноническое уравнение прямой

Определение. Любой вектор, отличный от нулевого, параллельный заданной прямой, называется *направляющим вектором* этой прямой.

Пусть на прямой L задана точка $M_1(x_1, y_1)$, а вектор $\bar{q} = \{l, m\}$ – направляющий вектор прямой L. Точка $M(x, y)$ принадлежит прямой, если вектор $\overline{M_1M} = \{x - x_1, y - y_1\}$ параллелен вектору $\bar{q}$:

$$\frac{x - x_1}{l} = \frac{y - y_1}{m}. \qquad (12)$$

Уравнение (12) называется *каноническим уравнением прямой* на плоскости.

Угол между прямыми, заданными каноническими уравнениями, определяется как угол между направляющими векторами этих прямых:

$$\cos\varphi = \frac{l_1 l_2 + m_1 m_2}{\sqrt{l_1^2 + m_1^2}\sqrt{l_2^2 + m_2^2}}.$$

Условием параллельности прямых будет условие коллинеарности их направляющих векторов:

$$L_1 \parallel L_2 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{l_1}{l_2} = \frac{m_1}{m_2}.$$

Условие перпендикулярности прямых равносильно условию равенства нулю скалярного произведения их направляющих векторов:

$$L_1 \perp L_2 \quad \Leftrightarrow \quad l_1 l_2 + m_1 m_2 = 0.$$

Параметрические уравнения прямой

Пусть $\left.\begin{aligned} x &= \varphi(t) \\ y &= \psi(t) \end{aligned}\right\}$.

Если величины x и y рассматривать как координаты точки М при каждом значении t, то такие уравнения называются параметрическими уравнениями траектории точки M. Аргумент t – переменный параметр.

В каноническом уравнении прямой (12) примем одну из величин (правую или левую часть равенства) за параметр t. Получим два уравнения

$$\begin{matrix} x - x_1 = lt \\ y - y_1 = mt \end{matrix} \quad \text{или} \quad \begin{matrix} x = x_1 + lt \\ y = y_1 + mt \end{matrix} \quad . \qquad (13)$$

Уравнения (13) – это параметрические уравнения прямой на плоскости. Если принять, что параметр t – время, то параметрические уравнения приобретают физический смысл. Они определяют закон движения точки по прямой L.

Нормальное (нормированное) уравнение прямой

Пусть существует прямая L. Проведем вектор $\bar{n}$, перпендикулярный L, через начало координат. P – точка пересечения прямой и нормали.

На нормали введем положительное направление от О к P.

Пусть α - полярный угол нормали,

ϑ – полярный угол вектора $\overline{OM}$. Обозначим $|OP| = p$. Выберем на прямой L точку $M(x,y)$. Проекция вектора $\overline{OM}$ на нормаль определяется как

$$\text{пр}_\text{n}\overline{OM} = p \qquad (14)$$

Найдем выражение $\text{пр}_\text{n}\overline{OM}$ через координаты точки M. Пусть (ρ, ϑ) – полярные координаты точки М.

$$\text{пр}_\text{n}\overline{OM} = \rho\cos\varphi = \rho\cos(\alpha - \vartheta) = \rho(\cos\alpha\cos\vartheta + \sin\alpha\sin\vartheta) = \rho\cos\vartheta\cos\alpha + \rho\sin\vartheta\sin\alpha$$

$=$

$$= x\cos\alpha + y\sin\alpha \, .$$

$$\text{пр}_\text{n}\overline{OM} = x\cos\alpha + y\sin\alpha \qquad (15)$$

Из (1) и (2) => $p = x\cos\alpha + y\sin\alpha$ или

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0 \qquad (16)$$

Уравнение (16) – это *нормальное уравнение* прямой.

Расстояние от точки до прямой

Пусть M^* – любая точка плоскости, d – её расстояние от данной прямой.

Определение. Отклонением точки M^* от данной прямой называется число $(+d)$, если M^* лежит по ту сторону от прямой, куда указывает положительное направление нормали, и $(-d)$ – в обратном случае.

$$\delta = \pm d$$

Теорема. Пусть точка M* (x*, y*)произвольная точка плоскости, L – прямая, заданная уравнением $x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0$. Отклонение точки M* от этой прямой задается формулой

$$\delta = x^*\cos\alpha + y^*\sin\alpha - p. \qquad (17)$$

Доказательство. Проекция точки M^* на нормаль – точка Q. Отклонение точки M^* от прямой

$$\delta = PQ = OQ - OP.$$

Но $OQ = \text{пр}_n\overline{OM}$, а $OP = p$ $\Rightarrow$ $\delta = \text{пр}_n\overline{OM}^* - p$

$\text{пр}_n\overline{OM} = x^*\cos\alpha + y^*\sin\alpha$ $\Rightarrow$ $\delta = x^*\cos\alpha + y^*\sin\alpha - p$.

Таким образом, отклонение точки M* от прямой легко вычисляется, если прямая задана нормальным уравнением. Достаточно лишь подставить в нормальное уравнение прямой координаты точки.

Пусть прямая задана общим уравнением: $Ax + By + C = 0$, а

$x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0$ – её нормальное уравнение .

Поскольку два уравнения определяют одну прямую, их коэффициенты должны быть пропорциональны. Уравнение

$$\mu Ax + \mu By + \mu C = 0 \qquad (18)$$

совпадает с нормальным уравнением. Тогда

$$\mu A = \cos\alpha, \quad \mu B = \sin\alpha, \quad \mu C = -p;$$

$$\mu^2(A^2 + B^2) = \cos^2\alpha + \sin^2\alpha .$$

Отсюда можно найти μ :

$$\mu = \frac{\pm 1}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$ – нормирующий множитель уравнения прямой.

Определим знак нормирующего множителя:

$$\mu C = -p < 0.$$

Следовательно, знак μ противоположен знаку C в уравнении. (Если $C = 0$ – знак μ произвольный).

Уравнение пучка прямых

Определение. Совокупность всех прямых, проходящих через некоторую точку $S(x_0, y_0)$, называется пучком прямых с центром S.

Теорема. Пусть $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ – уравнения двух прямых, пересекающихся в точке S ,

α и β – числа не равные нулю одновременно. Тогда

$$\alpha(A_1x + B_1y + C_1) + \beta(A_2x + B_2y + C_2) = 0 \qquad (*)$$

– это уравнение прямой, проходящей через точку S.

Доказательство.

Докажем, что соотношение (*) является уравнением 1-ой степени.

Запишем его в виде

$$(\alpha A_1 + \beta A_2)x + (\alpha B_1 + \beta B_2)y + (\alpha C_1 + \beta C_2) = 0$$

и покажем, что $(\alpha A_1 + \beta A_2)$ и $(\alpha B_1 + \beta B_2)$ не обращаются в ноль одновременно.

Докажем от противного: пусть $\left.\begin{array}{l}\alpha A_1 + \beta A_2 = 0\\ \alpha B_1 + \beta B_2 = 0\end{array}\right\}$. Тогда

$\frac{A_1}{A_2} = -\frac{\beta}{\alpha}$ и $\frac{B_1}{B_2} = -\frac{\beta}{\alpha}$.

Следовательно, $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}$. Но этого не может быть, т. к. по условию прямые пересекаются. Наше предположение оказалось неверно, $(\alpha A_1 + \beta A_2)$ и $(\alpha B_1 + \beta B_2)$ не равны нулю одновременно, т. е. равенство (*) – уравнение с двумя переменными (x,y). Это уравнение 1-ой степени, которое определяет прямую.

Остается доказать, что эта прямая проходит через точку S. Пусть x_0, y_0 – координаты точки S. Они удовлетворяют каждому из двух уравнений прямых, следовательно, для любых значений α и β выполняется равенство

$$\alpha(A_1x_0 + B_1y_0 + C_1) + \beta(A_2x_0 + B_2y_0 + C_2) = 0. \qquad (**)$$

Значит, все прямые, определяемые уравнением (*) при различных значениях α и β, проходят через точку S. Теорема доказана.

Пусть требуется найти прямую пучка (*), проходящую через заданную точку $M^*(x^*, y^*)$. Должно выполняться равенство

$$\alpha\,(A_1x^*+B_1y^*+C_1) + \beta\,(A_2x^*+B_2y^*+C_2) = 0.$$

Для любого значения $\alpha \neq 0$ можно принять $\frac{\beta}{\alpha} = \lambda$. Тогда из уравнения $A_1x^*+B_1y^*+C_1+ \lambda\,(A_2x^*+B_2y^*+C_2) = 0$ можно найти λ, а уравнение

$A_1x+B_1y+C_1+\lambda\,(A_2x+B_2y+C_2)=0$ определяет искомую прямую.

Примеры задач на тему «прямая на плоскости»

Задача 1. Расстояние от точки до прямой.

Пусть прямая L задана уравнением $3x-4y=10=0$. Точка $M^*(4,\ 3)$ – произвольная точка плоскости. Найти отклонение и расстояние точки M^* от прямой L.

Решение. Приведем уравнение прямой к нормальному виду. Найдем нормирующий множитель:

$$\mu=\frac{-1}{\sqrt{3^2+4^2}}=-\frac{1}{5}.$$

Умножив уравнение прямой на нормирующий множитель, получим нормальное уравнение прямой:

$$-\frac{3}{5}x+\frac{4}{5}y-2=0.$$

Подставив в нормальное уравнение прямой координаты точки M^*, получим отклонение точки от прямой:

$\delta=-\frac{3}{5}\cdot 4+\frac{4}{5}\cdot 3-2=-2$. Расстояние $d=2$.

Задача 2. Проекция точки на прямую.

Найти проекцию точки $P(4,\ 9)$ на прямую, проходящую через точки $A(3,\ 1)$ и $B(5,\ 2)$.

Решение.

1). Построим прямую L_1, проходящую через две заданные точки:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}\quad\Rightarrow\quad\frac{x-3}{5-3}=\frac{y-1}{2-1}\quad\Rightarrow\quad y=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}.$$

2). Через точку $P(4,\ 9)$ проведем прямую L_2, перпендикулярную прямой

L_1.

Используем уравнение $y - y_1 = k(x - x_1)$. Угловой коэффициент k найдем из условия перпендикулярности прямых:

$$k = -\frac{1}{k_1} = -\frac{1}{1/2} = -2.$$

Уравнение прямой L_2: $y - 9 = -2(x - 4) \Rightarrow y = -2x + 17$.

3). Найдем точку пересечения прямых L_1 и L_2. Для этого решим систему уравнений, задающих эти прямые.

$$\begin{cases} y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} \\ y = -2x + 17 \end{cases} \Rightarrow x = 7,\ y = 3.$$

Проекцией точки P на прямую L_1 является точка P_1 (7, 3).

Задача 3. Дана прямая $L: 3x - 5y + 15 = 0$. Составить уравнение прямой L «в отрезках».

Решение. Уравнение прямой преобразуем к виду

$3x - 5y = -15$ и разделим на (-15):

$$\frac{3x}{-15} - \frac{5y}{-15} = 1 \Rightarrow \frac{x}{-5} + \frac{y}{3} = 1.$$

Точки пересечения данной прямой с координатными осями (-5, 0) и (0, 3).

Поверхности в пространстве

Пусть x, y, z – переменные.

Выражение $F(x, y, z) = 0$ называется уравнением, если оно выполняется не для любых значений x, y, z.

Уравнению поверхности удовлетворяют только точки поверхности и никакие другие точки пространства.

Определение. *Поверхность* – это геометрическое место точек, координаты которых удовлетворяют данному уравнению $F(x, y, z) = 0$.

Пример: уравнение $(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 + (z - \gamma)^2 = r^2$ задает сферу с центром в точке (α, β, γ), радиусом r.

Алгебраические поверхности определяются в декартовой системе координат алгебраическими уравнениями вида:

$$Ax + By + Cz + D = 0$$
$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Dxy + 2Fyz + 2Gx + 2Hy + 2Kz + L = 0$$

Уравнение $Ax + By + Cz + D = 0$ – общее уравнение первой степени.

Плоскость

Теорема. В декартовой системе координат каждая плоскость определяется уравнением первой степени. И обратно: в декартовой системе координат каждое уравнение первой степени определяет плоскость.

Доказательство. Пусть существует произвольная плоскость π. Пусть точка $M_0(x_0, y_0, z_0) \in \pi$. Пусть задан вектор $\vec{n} : \{\bar{n} \neq 0, \quad \bar{n} \perp \alpha, \quad \bar{n} = \{A, B, C\}\}$. Пусть $M(x, y, z)$ – произвольная точка пространства с переменными координатами. Условие принадлежности точки M плоскости π – это перпендикулярность векторов $\overline{M_0M}$ и $\vec{n}$:

$$M \in \pi \Leftrightarrow \overline{M_0M} \perp \bar{n}.$$

Выразим условие принадлежности т. M к плоскости π через координаты векторов $\overline{M_0M} = \{x - x_0, y - y_0, z - z\}$ и $\bar{n} = \{A, B, C\}$.

Условие перпендикулярности векторов:

$$\overline{M_0M} \cdot \bar{n} = 0 \Rightarrow A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0 \qquad (*)$$

– это и есть уравнение плоскости π, поскольку ему удовлетворяют только точки плоскости. Преобразуем его:

$$Ax + By + Cz + \underbrace{(-Ax_0 - By_0 - Cz_0)}_{D} = 0 \text{ или}$$

$$Ax + By + Cz + D = 0. \qquad (1)$$

Уравнение (1) – это *общее уравнение плоскости*. Таким образом, плоскость π действительно определяется уравнением первой степени.

Докажем второе утверждение. Пусть дано произвольное уравнение первой степени (1): $Ax + By + Cz + D = 0$.

Пусть x_0, y_0, z_0 - решение данного уравнения .

Тогда равенство $Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0$ – тождество. (2)

Вычтем тождество (2) из уравнения (1), получим

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0. \qquad (3)$$

Это уравнение плоскости, проходящей через заданную точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и имеющей нормаль $\vec{n} = \{A, B, C\}$ (см. уравнение (*)).

Уравнение (1) равносильно уравнению (3), т. к. они получаются друг из друга путем почленного вычитания тождества. Следовательно, уравнение (1) является уравнением той же плоскости. Теорема доказана.

Рассмотрим два общих уравнения плоскостей. Пусть они определяют одну и ту же плоскость $\Rightarrow \begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D = 0 \end{cases}$ (4)

Тогда нормали $\bar{n}_1 = \{A_1, B_1, C_1\}$ и $\bar{n}_2 = \{A_2, B_2, C_2\}$ коллинеарны, а, следовательно, коэффициенты уравнений пропорциональны: $A_2 = \lambda A_1, \quad B_2 = \lambda B_1, \quad C_2 = \lambda C_1$.

Умножим первое уравнение системы на λ и вычтем его из второго уравнения. Получим: $D_2 - \lambda D_1 = 0 \Rightarrow D_2 = \lambda D_1$.

Вывод. Если два уравнения определяют одну и ту же плоскость, то их коэффициенты пропорциональны.

Неполные уравнения плоскости

Неполные уравнения получаются, когда какие-либо коэффициенты уравнения равны нулю.

1. D=0, $Ax + By + Cz = 0$ – плоскость проходит через начало координат.
2. A=0, $By + Cz + D = 0, \quad \bar{n} = \{O, B, C\} \perp Ox$, плоскость параллельна оси Ox.
3. B=0, плоскость параллельна оси Oy.
4. C=0, плоскость параллельна оси Oz.
5. A=0, B=0 $\Rightarrow$ плоскость параллельна плоскости Oxy.
6. A=0, C=0 $\Rightarrow$ плоскость параллельна плоскости Oxz.
7. B=0, C=0 $\Rightarrow$ плоскость параллельна плоскости Oyz.
8. A=B=D=0 Это плоскость Oxy.
9. A=C=D=0 Плоскость Oxz.
10. B=C=D=0 Плоскость Oyz.

Уравнение плоскости в «отрезках»

Пусть дано общее уравнение плоскости. Преобразуем это уравнение, разделив его на (-D):

$$Ax + By + Cz + D = 0,$$
$$Ax + By + Cz = -D,$$
$$\frac{Ax}{-D} + \frac{By}{-D} + \frac{Cz}{-D} = 1,$$

$$\frac{x}{-\frac{D}{A}}+\frac{y}{-\frac{D}{B}}+\frac{z}{-\frac{D}{C}}=1,$$

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1. \qquad (5)$$

Уравнение (5) – это *уравнение плоскости «в отрезках»*. Коэффициенты *a, b, c* определяют отрезки, отсекаемые плоскостью на координатных осях.

Угол между плоскостями

Пусть заданы две плоскости π_1 и π_2, имеющие нормали соответственно $\bar{n}_1=\{A_1,B_1,C_1\}$, $\bar{n}_2=\{A_2,B_2,C_2\}$. Угол между плоскостями определяется как угол между нормалями к этим плоскостям.

$$\bar{n}_1\cdot\bar{n}_2=|\bar{n}_1||\bar{n}_2|\cos\varphi \quad\Rightarrow\quad \cos\varphi=\frac{A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}. \qquad (6)$$

Условие параллельности двух плоскостей – это условие коллинеарности нормалей:

$$\pi_1\parallel\pi_2 \Rightarrow \quad \bar{n}_1\parallel\bar{n}_2 \quad\Rightarrow\quad \frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}.$$

Условие перпендикулярности плоскостей – это перпендикулярность нормалей:

$$\pi_1\perp\pi_2 \quad\Rightarrow\quad A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0.$$

Уравнение плоскости, проходящей через три точки, не принадлежащие одной прямой

Даны три точки, не лежащие на одной прямой: $M_1(x_1,y_1,z_1)$, $M_2(x_2,y_2,z\ )$, $M_3(x_3,y_3,z_3)$. Пусть $M(x,y,z)$ – произвольная точка пространства.

Точка M принадлежит плоскости ($M_1M_2M_3$) тогда и только тогда, когда векторы $\overline{M_1M}, \overline{M_1M_2}, \overline{M_1M_3}$ компланарны.

Условие компланарности трех векторов – это равенство нулю их смешанного произведения:

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0 \qquad (7)$$

Уравнение (7) – это уравнение плоскости, проходящей через три заданные точки

Нормальное уравнение плоскости. Расстояние от точки до плоскости.

010009000003780000002001c000000000004000000030108000500000000b
0200000000050000000c02aa09290b040000002e0118001c000000fb02100007000
0000000bc02000000cc010202225379737465 6d0009290b0000c5060000c8531100
7083823950c6fd050c020000040000002d0100000400000002010100 1c000000fb0
29cff0000000000000900100000 0cc0740001254696d6573204e657720526f6d616e0
000000000000000000000000000000000040000002d0101000500000009020000 00
0020d000000320a5a00000001000400000000000220bab0920672d00040000002d01
000003000000000 0

Пусть существует плоскость π. Проведем нормаль $\overline{n} \perp \pi$ через начало координат O. Пусть заданы α, β, γ – углы, образованные нормалью $\overline{n}$ с осями координат. $|\overline{n}| = 1$. Пусть p – длина отрезка нормали $|OP|$ до пересечения с плоскостью. Считая известными направляющие косинусы нормали $\overline{n}$, выведем уравнение плоскости π.

Пусть $M(x, y, z)$ – произвольная точка плоскости. Вектор единичной нормали имеет координаты $\overline{n} = \{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}$. Найдем проекцию вектора $\overline{OM} = \{x, y, z\}$ на нормаль.

$$np_n\overline{OM} = x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma .$$

Поскольку точка M принадлежит плоскости, то

$$np_n\overline{OM} = p .$$

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\chi - p = 0 \qquad (8)$$

Это и есть уравнение заданной плоскости, называющееся *нормальным*.

Расстояние от точки до плоскости

Пусть дана плоскость π, $M^*(x^*, y^*, z^*)$ – точка пространства, d – её расстояние от плоскости.

Определение. *Отклонением* точки M^* от плоскости называется число $(+d)$, если M^* лежит по ту сторону от плоскости, куда указывает положительное направление нормали $\bar{n}$, и число $(-d)$, если точка расположена по другую сторону плоскости:

$$\delta = \pm d .$$

Теорема. Пусть плоскость π с единичной нормалью $\vec{n}$ задана нормальным уравнением:

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0 .$$

Пусть $M^*(x^*, y^*, z^*)$ – точка пространства Отклонение т. M^* от плоскости задаётся выражением

$$\delta = x^*\cos\alpha + y^*\cos\beta + z^*\cos\chi - p . \qquad (9)$$

Доказательство. Проекцию т. M^* на нормаль обозначим Q. Отклонение точки M^* от плоскости равно

$$\delta = PQ = OQ - OP .$$

$$OQ = np_n\overline{OM^*}, \quad OP = p \quad \Rightarrow \quad \delta = np_n\overline{OM^*} - p ;$$

$$np_n\overline{OM^*} = x^*\cos\alpha + y^*\cos\beta + z^*\cos\gamma ;$$

$$\delta = x^{*}\cos\alpha + y^{*}\cos\beta + z^{*}\cos\chi - p \qquad (9)$$

Правило. Чтобы найти *отклонение* т. M^* от плоскости, нужно в нормальное уравнение плоскости подставить координаты т. M^*. Расстояние от точки до плоскости равно $|\delta|$.

Приведение общего уравнения плоскости к нормальному виду

Пусть одна и та же плоскость задана двумя уравнениями:

$Ax + By + Cz + D = 0$ - общее уравнение,

$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0$ - нормальное уравнение.

Поскольку оба уравнения задают одну плоскость, их коэффициенты пропорциональны:

$$\mu A = \cos\alpha, \quad \mu B = \cos\beta, \quad \mu C = \cos\gamma, \quad \mu D = -p.$$

Первые три равенства возведем в квадрат и сложим:

$$\mu^2\left(A^2 + B^2 + C\right) = \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\chi = 1.$$

Отсюда найдем μ – нормирующий множитель:

$$\mu = \frac{\pm 1}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}. \qquad (10)$$

Умножив общее уравнение плоскости на нормирующий множитель, получим нормальное уравнение плоскости:

$$\mu Ax + \mu By + \mu Cz + \mu D = 0.$$

Примеры задач на тему «Плоскость».

Пример 1. Составить уравнение плоскости π, проходящей через заданную точку M_1(2,1,-1) и параллельной плоскости $\pi_1: x - 2y + 3z - 1 = 0$.

Решение. Нормаль к плоскости π_1: $\overline{n}_1 = \{1,-2,3\}$. Поскольку плоскости параллельны, то нормаль $\vec{n}_1$ является и нормалью к искомой плоскости π. Используя уравнение плоскости, проходящей через заданную точку (3), получим для плоскости π уравнение:

$$1(x-2)-2(y-1)+3(z+1)=0,$$
$$x-2y+3z+3=0.$$

<u>Ответ:</u> $x-2y+3z+3=0.$

<u>Пример 2.</u> Основанием перпендикуляра, опущенного из начала координат на плоскость π, является точка $M_0(2,-1,-1)$. Найти уравнение плоскости π.

<u>Решение</u>. Вектор $\overline{OM_0}$ является нормалью к плоскости π. Точка M_0 принадлежит плоскости. Можно воспользоваться уравнением плоскости, проходящей через заданную точку (3):

$$\overline{OM_0}=\overline{n}=\{2,-1,-1\},\quad M_0(2,-1,-1)\in\pi\Rightarrow$$
$$2(x-2)-1(y+1)-(z+1)=0,$$
$$2x-y-z+(-4-1-1)=0,$$
$$2x-y-z-6=0.$$

<u>Ответ:</u> $2x-y-z-6=0.$

<u>Пример 3.</u> Построить плоскость π, проходящую через точки $M_0(x_0,y_0,z_0)$ и $M_1(x_1,y_1,z_1)$ и перпендикулярную плоскости π_1: $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$.

$$\overline{M_0M_1}\in\pi\Rightarrow\overline{M_0M_1}\perp\overline{n},$$
$$M(x,y,z)\in\pi\Leftrightarrow\overline{M_0M}\perp\overline{n},$$
$$\pi\perp\pi_1\Rightarrow\overline{n}_1\perp\overline{n},$$

Следовательно, чтобы некоторая точка M $(x,\ y,\ z)$ принадлежала плоскости π, необходимо, чтобы три вектора $\overline{n}_1,\overline{M_0M},\overline{M_0M_1}$ были компланарны:

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ x_1-x_0 & y_1-y_0 & z_1-z_0 \\ A_1 & B_1 & C_1 \end{vmatrix}=0.$$

Осталось раскрыть определитель и привести полученное выражение к виду общего уравнения (1).

Пример 4. Плоскость π задана общим уравнением:

$$3x-4y+12z+14=0.$$

Найти отклонение точки $M^*(4;3;1)$ от заданной плоскости.

Решение. Приведем уравнение плоскости к нормальному виду.

$$\mu=\frac{-1}{\sqrt{3^2+4^2+12^2}}=-\frac{1}{13},$$

$$-\frac{1}{13}(3x-4y+12z+14)=0.$$

Подставим в полученное нормальное уравнение координаты точки M^*.

$$-\frac{1}{13}(3\cdot 4^*-4\cdot 3^*+12\cdot 1^*+14)=-2.$$

Ответ: $\delta=-2,\quad d=2$.

Пример 5. Пересекает ли плоскость $\pi: Ax+By+Cz+D=0$ отрезок $AB: A(x_1;y_1;z_1)$, $B(x_2;y_2;z_2)$.

Решение. Чтобы отрезок AB пересекал плоскость, отклонения δ_A и δ_B от плоскости π должны иметь разные знаки:

$$sign\,\delta_A=-sign\,\delta_B.$$

Пример 6. Пересечение трех плоскостей в одной точке.

$$\left.\begin{array}{l} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \\ A_3x+B_3y+C_3z+D_3=0 \end{array}\right\} <=> \begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Система имеет единственное решение, следовательно, три плоскости имеют одну общую точку.

Пример 7. Нахождение биссектрис двугранного угла, образованного двумя заданными плоскостями.

$$\pi_1: x\cos\alpha_1+y\cos\beta_1+z\cos\gamma_1-p_1=0,$$
$$\pi_2: x\cos\alpha_2+y\cos\beta_2+z\cos\gamma_2-p_2=0.$$

Пусть δ_1 и δ_2 - отклонение некоторой точки $M(x;y;z)$ от первой и второй плоскостей.

На одной из биссектральных плоскостей (отвечающей тому углу, в котором лежит начало координат) эти отклонения равны по модулю и знаку, а на другой – равны по модулю и противоположны по знаку.

1) $(x\cos\alpha_1+y\cos\beta_1+z\cos\gamma_1-p_1)=(x\cos\alpha_2+y\cos\beta_2+z\cos\gamma_2-p_2)$

- это уравнение первой биссектральной плоскости.

2) $(x\cos\alpha_1+y\cos\beta_1+z\cos\gamma_1-p_1)=-(x\cos\alpha_2+y\cos\beta_2+z\cos\gamma_2-p_2)$

- это уравнение второй биссектральной плоскости.

Пример 8. Определение местоположения двух данных точек A и B относительно двугранных углов, образованных данными плоскостями.

Пусть $\pi_1 \cap \pi_2$. Определить: в одном, в смежных или в вертикальных углах находятся точки A и B.

1) Находим $\delta_A^{(1)}$ и $\delta_A^{(2)}$, $\delta_B^{(1)}$ и $\delta_B^{(2)}$ - это отклонения точек A и B от плоскостей π_1 и π_2.

а). Если A и B лежат по одну сторону от π_1 и от π_2, то они лежат в одном двугранном углу.

б). Если A и B лежат по одну сторону от π_1 и по разные от π_2, то они лежат в смежных углах.

в). Если A и B лежат по разные стороны от π_1 и π_2, то они лежат в вертикальных углах.

Линии в пространстве. Прямая в пространстве

В аналитической геометрии каждая линия рассматривается как пересечение двух поверхностей и соответственно определяется заданием двух уравнений.

Пусть $F_1(x, y, z)=0$ и $F_2(x, y, z)=0$ – уравнения двух поверхностей.

Система уравнений $\begin{cases} F_1(x,y,z)=0 \\ F_2(x,y,z)=0 \end{cases}$ определяет линию, являющуюся их пересечением.

Следовательно, прямую L можно задать системой двух уравнений плоскостей:

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0. \end{cases} \qquad (1)$$

Это возможно только в том случае, когда плоскости не совпадают и не параллельны, т.е. когда нормали $\bar{n}_1=\{A_1,B_1,C_1\}$ и $\bar{n}_2=\{A_2,B_2,C_2\}$ не коллинеарны.

Система (1) – это *общее уравнение прямой* в пространстве.

Через каждую прямую проходит бесконечное множество плоскостей (пучок плоскостей).

Определение. Совокупность всех плоскостей, проходящих через одну и ту же прямую L, называется *пучком плоскостей* с центром в L.

Умножим уравнения системы (1) соответственно на коэффициенты α и

β , одновременно не равные нулю.

$\alpha\left(A_1x+B_1y+C_1z+D_1\right)+\beta\left(A_2x+B_2y+C_2z+D_2\right)=0$ – уравнение плоскости, проходящей через прямую L.

(Докажите самостоятельно аналогично доказательству для пучка прямых)

Определение. Совокупность всех плоскостей, проходящих через данную точку $M_0(x_0y_0z_0)$, называется *связкой плоскостей* с центром в точке M_0.

Канонические уравнения прямой в пространстве

Пусть $\bar{q}=\{l,m,n\}$ – направляющий вектор прямой L, а $M_0(x_0y_0z_0)$ – точка, принадлежащая прямой. Пусть $M(x,y,z)$ – точка с переменными координатами.

Чтобы точка $M(x,y,z)$ принадлежала прямой L, вектор $\overline{M_0M}=\{x-x_0,y-y_0,z-z_0\}$ должен быть коллинеарным вектору $\bar{q}$:

$$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}. \qquad (2)$$

Уравнения (2) – это *канонические уравнения прямой* в пространстве. Пусть прямая L задана общим уравнением:

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0. \end{cases}$$

Найти канонические уравнения прямой L.

1). Найдем точку $M_0(x_0,y_0,z_0)\in L$. Для этого нужно задать одну из координат, а две другие определить из решения системы (1).

2). Найдем направляющий вектор прямой $\bar{q}=\{l,m,n\}$.

$$L\perp\overline{n_1} \text{ и } L\perp\overline{n_2} \Rightarrow \bar{q}\perp\overline{n_1} \text{ и } \bar{q}\perp\overline{n_2} \Rightarrow \bar{q}=\overline{n_1}\times\overline{n_2}.$$

$\bar{n}_1 = \{A_1, B_1, C_1\}$, $\bar{n}_2 = \{A_2, B_2, C_2\}$ $\Rightarrow$ по определению векторного произведения

$$\bar{q} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix} = \left\{ \begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ A_2 & C_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \right\}.$$

Зная координаты точки, принадлежащей прямой, и координаты ее направляющего вектора, можно составить канонические уравнения прямой в виде (2).

Параметрические уравнения прямой

Получаются из канонических уравнений прямой. Пусть

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n} = t.$$

Тогда можно записать три уравнения:

$$\left. \begin{aligned} x &= x_0 + lt \\ y &= y_0 + mt \\ z &= z_0 + nt \end{aligned} \right\} \qquad (3)$$

Система (3) – это параметрические уравнения прямой *L*, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и имеющей направляющий вектор $\bar{q} = \{l, m, n\}$. Параметрические уравнения прямой имеют физический смысл: они описывают движение точки вдоль заданной прямой из начального положения $M_0(x_0, y_0, z_0)$, где l, m, n – проекции вектора скорости точки на координатные оси.

Уравнения прямой, проходящей через две заданные точки

Пусть заданы две точки, лежащие на прямой: $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$. В качестве направляющего вектора прямой можно взять вектор $\overline{M_1M_2}$:

$\overline{q} = \{x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1\}$.

Подставляем в канонические уравнения (2) координаты одной из точек, например M_1, и координаты направляющего вектора:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}. \qquad (4)$$

Получили уравнения прямой, проходящей через две заданные точки.

Угол между двумя прямыми в пространстве

Определение угла между двумя прямыми сводится к определению угла между их направляющими векторами:

$$\cos\varphi = \frac{\overline{q}_1 \cdot \overline{q}_2}{|\overline{q}_1|\,|\overline{q}_2|} = \frac{l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2}{\sqrt{l_1^2 + m_1^2 + n_1^2}\sqrt{l_2^2 + m_2^2 + n_2^2}} \qquad (5)$$

Составьте самостоятельно условие параллельности и перпендикулярности прямых в пространстве.

Угол между прямой и плоскостью

Пусть заданы плоскость π : $Ax + By + Cz + D = 0$

и прямая L: $\dfrac{x - x_0}{l} = \dfrac{y - y_0}{m} = \dfrac{z - z_0}{n}$.

Пусть φ - угол между нормалью к плоскости $\overline{n}_1 = \{A, B, C\}$ и направляющим вектором прямой $\overline{q} = \{l, m, n\}$. Тогда угол ψ между плоскостью π и прямой L - дополнительный к этому углу: $\psi = 180^\circ - \varphi$. Тогда

$$\cos\varphi = \frac{\overline{n} \cdot \overline{q}}{|\overline{n}|\,|\overline{q}|} = \sin\psi = \frac{Al + Bm + Cn}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\sqrt{l^2 + m^2 + n^2}}. \qquad (6)$$

1). Условие параллельности прямой и плоскости: $\overline{q} \perp \overline{n} \Rightarrow \quad Al + Bm + Cn$

=0

2). Условие перпендикулярности прямой и плоскости: $\bar{q} \parallel \bar{n} \Rightarrow$

$$\frac{A}{l} = \frac{B}{m} = \frac{C}{n} = 0$$

3). Условие принадлежности прямой плоскости. Пусть $M_0(x_0, y_0, z_0)$ – любая точка прямой. Чтобы прямая лежала в плоскости должны выполняться два условия:

а) направляющий вектор прямой должен быть перпендикулярен нормали к плоскости:

$$Al + Bm + Cn = 0,$$

б) произвольная точка прямой должна лежать в плоскости:

$$M_0 \in \pi \Rightarrow Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0.$$

Условие принадлежности двух прямых одной плоскости

Две прямые в пространстве могут пересекаться, быть параллельными или скрещиваться. Пусть прямые заданы каноническими уравнениями:

$$L_1: \frac{x - x_1}{l_1} = \frac{y - y_1}{m_1} = \frac{z - z_1}{n_1}; \qquad L_2: \frac{x - x_2}{l_2} = \frac{y - y_2}{m_2} = \frac{z - z_2}{n_2}.$$

Для принадлежности прямых L_1 и L_2 одной плоскости π необходимо и достаточно, чтобы три вектора $\overline{M_1M_2}$, $\overline{q_1}$ и $\overline{q_2}$ были компланарны:

$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix} = 0. \qquad (7)$$

Очевидно, что в этом случае прямые или параллельны, или пересекаются.

Для того чтобы прямые пересекались, нужно, чтобы выполнялось условие (7), а направляющие векторы прямых не были параллельны, то есть нарушалось хотя бы одно из равенств: $\frac{l_1}{l_2}=\frac{m_1}{m_2}=\frac{n_1}{n_2}$.

Некоторые задачи на построение прямых и плоскостей

Задача 1. Найти уравнение плоскости π, проходящей через точку $M_0(x_0,y_0,z_0)$ и перпендикулярной заданной прямой L_1: $\frac{x-x_1}{l_1}=\frac{y-y_1}{m_1}=\frac{z-z_1}{n_1}$.

Кратко: π -? : $M_0\in\pi$, $\pi\perp L_1$.

Решение.

Т.к. $\pi\perp L_1$, то нормалью к плоскости можно считать направляющий вектор прямой: $\overline{n}=\overline{q}=\{l_1,m_1,n_1\}$. Воспользуемся уравнением плоскости, проходящей через заданную точку.

π : $l_1(x-x_0)+m_1(y-y_0)+n_1(z-z_0)=0$.

Задача 2. Найти уравнение плоскости π, проходящей через заданную прямую L_1: $\frac{x-x_1}{l_1}=\frac{y-y_1}{m_1}=\frac{z-z_1}{n_1}$ и точку $M_0(x_0,y_0,z_0)\notin L_1$.

Кратко. π -? : $L_1\in\pi$, $M_0\in\pi$.

По условию задачи нам известны две точки, лежащие в плоскости: $M_0(x_0,y_0,z_0)$, $M_1(x_1,y_1,z_1)$, и вектор $\bar{q}_1=\{l_1,m_1,n_1\}$, параллельный плоскости. Произвольная точка $M(x,y,z)$ будет принадлежать плоскости, если векторы $\bar{q},\overline{M_0M_1},\overline{M_0M}$ будут компланарны:

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ x_1-x_0 & y_1-y_0 & z_1-z_0 \\ l_1 & m_1 & n_1 \end{vmatrix} = 0.$$

Это и есть уравнение искомой плоскости. Раскрыв определитель, можно получить общее уравнение плоскости.

Задача 3. Построить плоскость π, проходящую через две заданные параллельные прямые $L_1: \dfrac{x-x_1}{l_1} = \dfrac{y-y_1}{m_1} = \dfrac{z-z_1}{n_1}$ и $L_2: \dfrac{x-x_2}{l_2} = \dfrac{y-y_2}{m_2} = \dfrac{z-z_2}{n_2}$.

π -?: $L_1 \in \pi$, $L_2 \in \pi$, $L_1 \parallel L_2$.

Эта задача может решаться аналогично предыдущей. Известны две точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$, лежащие в плоскости, и вектор ($\bar{q}_1 = \{l_1, m_1, n_1\}$ или $\bar{q}_2$), параллельный плоскости. Произвольная точка $M(x, y, z)$ будет принадлежать плоскости, если выполняется условие компланарности трех векторов:

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_1-x_2 & y_1-y_2 & z_1-z_2 \\ l_1 & m_1 & n_1 \end{vmatrix} = 0$$

– это уравнение искомой плоскости.

Аналогично решается задача построения плоскости π, проходящей через две пересекающиеся прямые.

Задача 4. Найти уравнение прямой L, проходящей через заданную точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и перпендикулярной плоскости π : $Ax + By + Cz + D = 0$

Решение. Так как прямая L перпендикулярна плоскости π, то ее направляющий вектор параллелен нормали к плоскости. Следовательно, нормаль к плоскости $\bar{n} = \{A, B, C\}$ может служить направляющим вектором прямой L. Запишем каноническое уравнение прямой:

$$\frac{x-x_0}{A} = \frac{y-y_0}{B} = \frac{z-z_0}{C}.$$

Задача 5. Построить прямую L, перпендикулярную двум скрещивающимся прямым.

$$L_1: \frac{x-x_1}{l_1}=\frac{y-y_1}{m_1}=\frac{z-z_1}{n_1} \quad \text{и} \quad L_2: \frac{x-x_2}{l_2}=\frac{y-y_2}{m_2}=\frac{z-z_2}{n_2},$$

и проходящую через заданную точку $M_0(x_0,y_0,z_0)$.

Решение. Так как прямая L перпендикулярна к прямым L_1 и L_2, то ее направляющий вектор $\overline{q}=\{l,m,n\}$ можно найти как векторное произведение направляющих векторов этих прямых:

$$\overline{q}=\overline{q}_1\times\overline{q}_2=\left\{\begin{vmatrix} m_1 & n_1 \\ m_2 & n_2 \end{vmatrix}; -\begin{vmatrix} l_1 & n_1 \\ l_2 & n_2 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} l_1 & m_1 \\ l_2 & m_2 \end{vmatrix}\right\}.$$

Тогда можно составить каноническое уравнение искомой прямой:

$$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}.$$

Задача 6. Найти точку пересечения прямой $L: \frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}$ и плоскости $\pi: Ax+By+Cz+D=0$.

Решение. Чтобы найти точку пересечения прямой и плоскости, нужно решить совместно уравнения прямой L и плоскости π:

$$\begin{cases} \frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n} \\ Ax+By+Cz+D=0. \end{cases}$$

Для этого приведем уравнение прямой к параметрическому виду:

$$\begin{cases} x=x_0+lt \\ y=y_0+mt \\ z=z_0+nt \end{cases} \qquad (*)$$

и подставим выражения x,y,z в уравнение плоскости.

Решим полученное уравнение с одной неизвестной t, а найденное значение подставим в (*). Полученные значения x, y, z будут координатами искомой точки пересечения.

Задача 7. Через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ провести прямую, перпендикулярную заданной прямой L_1: $\frac{x-x_1}{l_1}=\frac{y-y_1}{m_1}=\frac{z-z_1}{n_1}$.

Решение.

1). Сначала через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ проведем плоскость π, перпендикулярную прямой L_1:

$\pi: l_1(x-x_0)+m_1(y-y_0)+n_1(z-z_0)=0$.

2). Найдем точку пересечения прямой L_1 и плоскости π: $M_2(x_2, y_2, z_2)=\pi \cap L_1$. Для этого решим систему уравнений прямой и плоскости:

$$\begin{cases} \frac{x-x_1}{l_1}=\frac{y-y_1}{m_1}=\frac{z-z_1}{n_1} \\ l_1(x-x_0)+m_1(y-y_0)+n_1(z-z_0)=0. \end{cases}$$

3). Через две точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$ проведем прямую L:

$$\frac{x-x_0}{x_2-x_0}=\frac{y-y_0}{y_2-y_0}=\frac{z-z_0}{z_2-z_0}.$$

Задача 8. Найти проекцию точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ на плоскость π: $Ax+By+Cz+D=0$.

Решение.

а) Найдем прямую L, проходящую через точку M_0 и перпендикулярную плоскости π:

$$L: \frac{x-x_0}{A}=\frac{y-y_0}{B}=\frac{z-z_0}{C}.$$

б) Найдем точку пересечения прямой L и плоскости π : $M_1 = L \cap \pi$ (см. задачу 6).

Точка M_1 – это искомая проекция.

Задача 9. Найти проекцию точки M_0 на прямую L_1: $\dfrac{x - x_1}{l_1} = \dfrac{y - y_1}{m_1} = \dfrac{z - z_1}{n_1}$.

Решение.

а) Проводим плоскость π : $M_0 \in \pi$, $\pi \perp L_1$.

π : $l_1(x - x_0) + m_1(y - y_0) + n_1(z - z_0) = 0$.

б) $M_2 = L_1 \cap \pi$ – это искомая проекция.

Задача 10. Найти проекцию прямой L: $\dfrac{x - x_0}{l} = \dfrac{y - y_0}{m} = \dfrac{z - z_0}{n}$ на плоскость π : $Ax + By + Cz + D = 0$.

а) Через прямую проводим плоскость $\pi_1 \perp \pi$: $L \in \pi_1$. Используем условие компланарности трех векторов: $\overline{q} = \{l, m, n\}, \overline{n} = \{A, B, C\}, \overline{M_0M} = \{x - x_0, y - y_0, z - z_0\}$.

После преобразований получим общее уравнение плоскости $\pi_1 : A_1x + B\ y + C_1z + D_1 = 0$.

б) Искомая прямая L_1 задается пересечением двух плоскостей : π и π_1:

$$\begin{cases} Ax + By + Cz + D = 0 \\ A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \end{cases}$$

Осталось привести уравнение к каноничному виду.

Задача 11. Найти расстояние от точки M_0 до прямой L_1.

а) Найти точку M_1 – проекцию точки M_0 на прямую L_1.

б) Длина вектора $\overline{M_0M_1}$ – это искомое расстояние.

<u>Задача 12.</u> Найти расстояние между двумя скрещивающимися прямыми L_1 и L_2.

а) Через прямую L_1 проводим плоскость π_1 : $\pi_1 \parallel L_2$.

б) Находим расстояние от любой точки $M_2 \in L_2$ до π_1.

Примеры решения задач

<u>Задача 1</u>. Даны координаты вершин треугольника $A(2;2)$, $B(-2;-8)$, $C(-6;-2)$. Требуется составить уравнение высоты BD и определить острый угол между этой высотой и стороной BC.

<u>Решение</u>. Найдём уравнение стороны AC по формуле $\dfrac{y-y_1}{y_2-y_1}=\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1}$;

$\dfrac{y-2}{-2-2}=\dfrac{x-2}{-6-2}$ или $y=\dfrac{1}{2}x+1$, где угловой коэффициент $k_{AC}=\dfrac{1}{2}$.

Уравнение высоты BD: $y-y_0=k\cdot(x-x_0)$, где $k=-\dfrac{1}{k_{AC}}$ и x_0, y_0- координаты точки B. Здесь $k_{BD}=-2$.

$y+8=-2(x+2)$ или <u>$2x+y+12=0.$</u>

Запишем уравнение стороны BC и найдём k_{BC}: $\dfrac{y+8}{-2+8}=\dfrac{x+2}{-6+2}$ или

$3x+2y+22=0$, $\quad k_{BC}=-\dfrac{3}{2}$.

Тогда, поскольку угол $DBC=\alpha$ должен быть острым,

$tg\alpha=\dfrac{k_{BC}-k_{BD}}{1+k_{BC}k_{BD}}=\dfrac{-1.5+2}{1+(-1.5)(-2)}=\dfrac{1}{8}$ и $\alpha=arctg\dfrac{1}{8}$.

<u>Задача 2</u>. Найти проекцию т. $M(-3;3;3)$ на прямую $\begin{cases} x+2y+1=0 \\ 3x+4y-2z+7=0. \end{cases}$

Решение. Через т. M проводим плоскость, перпендикулярную данной прямой. Точка пересечения этой плоскости с данной прямой и будет искомой точкой N.

Направляющий вектор прямой

$$\vec{q} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & -2 \end{vmatrix} = -4\vec{i} + 2\vec{j} - 2\vec{k}.$$

Запишем уравнение плоскости, проходящей через точку M перпендикулярно заданной прямой:

$-4(x + 3) + 2(y - 3) - 2(z - 3) = 0$ или $2x - y + z + 6 = 0$. Теперь нужно найти точку пересечения этой плоскости и данной прямой. Для этого решим систему уравнений прямой и плоскости. Решаем методом Крамера.

$$\begin{cases} x + 2y = -1 \\ 3x + y - 2z = -7 \\ 2x - y + z = -6 \end{cases}$$

$$\Delta = 12; \quad \Delta_x = 36; \quad \Delta_y = -12; \quad \Delta_z = -12. \qquad x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = -3; \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = 1; \quad z = \frac{\Delta_z}{\Delta} = 1.$$

Искомая точка $N(-3;1;1)$.

Задача 3. Найти точку M пересечения прямой $\frac{x-7}{3} = \frac{y-3}{1} = \frac{z+1}{-2}$ и плоскости $2x + y + 7z - 3 = 0$.

Решение. Чтобы найти координаты точки пересечения, нужно решить систему уравнений прямой и плоскости. Это удобно сделать так. Запишем уравнение прямой в параметрической форме:

$$\begin{cases} x = 3t + 7 \\ y = t + 3 \\ z = -2t - 1. \end{cases}$$

Подставим выражение x, y, z через параметр t в уравнение плоскости:

$2(3t + 7) + (t + 3) - 7(2t + 1) – 3 = 0.$

Откуда получаем $t = 1$, поэтому точка пересечения имеет координаты

$x = 3 + 7 = 10, \quad y = 1 + 3 = 4, \quad z = -2 - 1 = -3$, т.е. $M(10,4,3)$.

ЭЛЕМЕНТЫ ОБЩЕЙ АЛГЕБРЫ

1. БИНАРНАЯ АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ ОПЕРАЦИЯ

Упорядоченный набор из n элементов $a_1,...,a_n$ некоторого множества A называется *кортежем* длины n и обозначается $\langle a_1,...,a_n \rangle$, а множество всех таких кортежей называют n-й декартовой степенью множества A и обозначается A^n.

Бинарной алгебраической операцией на непустом множестве A называется отображение $A \times A \to A$, сопоставляющее каждому кортежу $\langle a,b \rangle$ из A^2 определенный элемент c из множества A, т.е. бинарная алгебраическая операция на множестве A – это некоторое правило, по которому любой паре элементов a, b из A (взятых в определенном порядке) ставится однозначно определенный элемент c из A ($c = a * b$).

Под n - местной операцией на множестве A понимают отображение, ставящее каждому кортежу $\langle a_1,...,a_n \rangle$ из A^n определенный элемент из A.

Примеры.

1.Сложение, умножение и операция возведения в степень на множестве $\boldsymbol{Z}^+$ целых положительных чисел – бинарные алгебраические операции.

2.Умножение вещественных квадратных матриц заданного порядка – бинарная алгебраическая операция.

3.Бинарной алгебраической операцией на множестве векторов трехмерного вещественного векторного пространства $\overrightarrow{E^3}$ может служить операция векторного произведения $\left[\vec{a},\vec{b}\right], \vec{a},\vec{b} \in \overrightarrow{E^3}$.

4.Сложение и умножение функций действительного переменного - примеры бинарных алгебраических операций.

5.Не являются бинарными алгебраическими операциями умножение на множестве отрицательных целых чисел, сложение нечетных целых чисел, деление действительных чисел.

Пусть на конечном множестве $A = \{a_1, \dots, a_n\}$ бинарная операция $*$ задана таблицей, состоящей из *n* строк и *n* столбцов, в которой на пересечении *i*-й строки и *j*-го столбца стоит элемент $a_i * a_j$ множества *A*. Эта таблица называется *таблицей умножения* или *таблицей Кэли*.

Построим, таблицу Кэли для операции нахождения наибольшего общего делителя (НОД) на множестве $A = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$.

НОД	1	2	3	4	6	12
1	1	1	1	1	1	1
2	1	2	1	2	2	2
3	1	1	3	1	3	3
4	1	2	1	4	2	4
6	1	2	3	2	6	6
12	1	2	3	4	6	12

Из этой таблицы видно, что операция нахождения наибольшего общего делителя на множестве *A* является бинарной алгебраической, т.к. все результаты этой операции - числа того же множества *A*.

Задача. Выяснить, являются ли бинарными алгебраическими операции +, -, $\times$, $\div$ на указанном множестве: а) $A = \{x : x \in N_-\}$; б) $A = \{-1,0,1\}$.

Решение. а) Для операции + имеем: $\forall x_1, x_2 \in N_-\ x_1 + x_2 \in N_-$; следовательно, операция сложения + является бинарной алгебраической на множестве *A*.

Операция вычитания $-$ не является бинарной алгебраической на множестве A, так как найдутся числа x_1 и x_2, для которых $x_1 - x_2 \notin N_-$. Например, при $x_1 < x_2$ разность $x_1 - x_2$ будет числом положительным, а значит, не будет принадлежать множеству N_-.

Операции умножения $\times$ и деления $\div$ на множестве чисел противоположных натуральным N_- также не являются бинарными алгебраическими, поскольку и произведение и частное двух любых отрицательных чисел является числами положительными.

б) Для данного множества $A=\{-1,0,1\}$ составим таблицы Кэли по каждой из операций:

+	-1	0	1
-1	-2	-1	0
0	-1	0	1
1	0	1	2

-	-1	0	1
-1	0	1	2
0	-1	0	1
1	-2	-1	0

×	-1	0	1
-1	1	0	-1
0	0	0	0
1	-1	0	1

÷	-1	0	1
-1	1	0	-1
0	-	-	-
1	-1	0	1

Видим, что полученные таблицы по операциям сложения и вычитания содержат элементы, не входящие в данное множество A. Следовательно, операции сложения и вычитания не являются бинарными алгебраическими на множестве A.

Таблица, составленная для операции умножения, содержит только элементы, входящие во множество A. Следовательно, результаты операции $\times$ не выходят за рамки данного множества, а значит, умножение − бинарная алгебраическая операция на множестве A. Для операции деления не выполнимо деление на ноль, поэтому нет смысла говорить о ней как о бинарной алгебраической операции.

Свойства бинарных алгебраических операций

Бинарная алгебраическая операция на множестве A называется *коммутативной*, если для любых двух элементов a_1 и a_2 из A выполняется условие; $a_1 * a_2 = a_2 * a_1$.

Например, бинарные алгебраические операции сложения и умножения на множестве целых чисел $\boldsymbol{Z}$ коммутативны, а операция вычитания нет.

Операция на множестве A называется *ассоциативной,* если для любых трех элементов a_1 , a_2 , a_3 из A выполняется условие:

$$(a_1 * a_2) * a_3 = a_1 * (a_2 * a_3).$$

Например, операции сложения и умножения на множестве действительных чисел $\boldsymbol{R}$ ассоциативны, а операция на множестве $\boldsymbol{Z}$, задаваемая формулой $m * n = m^n$, не является ассоциативной.

Если на множестве определена бинарная алгебраическая операция, обладающая свойством ассоциативности, то такое множество с этой операцией называется *полугруппой*.

Пусть на множестве A задана бинарная алгебраическая: операция $*$. Если найдется такой элемент $e \in A$, что для любого элемента $a \in A$ выполняются равенства $e * a = a$ и $a * e = a$, то элемент e называется *нейтральным* относительно данной операции.

Например, число 1 является нейтральным элементом множества действительных чисел $\boldsymbol{R}$ относительно операции умножения, а нулевая матрица второго порядка − нейтральным элементом множества всех матриц второго порядка относительно операции сложения матриц.

Пусть множество A содержит нейтральный элемент e относительно некоторой бинарной операции $*$. Элемент a' называется *обратным* для элемента a , если выполняются равенства; $a * a' = e$ и $a' * a = e$.

Например, обратным для любого отличного от нуля числа $a \in R$ будет число $a^{-1} = \frac{1}{a}$ в случае обычной операции умножения на множестве действительных чисел ***R***. Число 0 не имеет обратного элемента, так как $0 * a = 0$ для любого числа $a \in R$. На множестве квадратных матриц второго порядка с операцией матричного умножения для каждой невырожденной матрицы А существует единственный обратный элемент − матрица A^{-1}.

С понятием обратного элемента тесно связано понятие обратимой операции. Операция на множестве *A* называется *обратимой*, если для любых элементов *a*, *b* из *A* каждое из уравнений $a * x = b$ и $x * a = b$ имеет единственное решение.

Например, операция сложения на множестве ***R*** всех действительных чисел (а также на множестве ***Q*** всех рациональных чисел или на множестве ***Z*** всех целых чисел) обратима, а на множестве целых неотрицательных чисел $\boldsymbol{Z}^{+}$ необратима (если выполняется условие *a*>0, то уравнение *a* +*x*=0 не имеет целого неотрицательного решения).

Следующая теорема устанавливает связь между существованием обратных элементов и обратимостью операции.

Теорема. Ассоциативная операция на множестве *A* обратима тогда и только тогда, когда в *A* существует нейтральный элемент и для любого элемента из *A* существует обратный ему элемент.

Задача. Доказать, что на множестве $\boldsymbol{R}^{+}$ операция $a * b = \sqrt{ab}$ (операция нахождения среднего геометрического) коммутативна, но не ассоциативна.

Решение. Пусть *a*, *b*, *c* - любые действительные положительные числа. В силу коммутативности умножения на $\boldsymbol{R}^{+}$ получим: $a * b = \sqrt{ab} = \sqrt{ba} = b * a$, т.е. бинарная операция нахождения среднего геометрического на $\boldsymbol{R}^{+}$ коммутативна. Далее, $(a * b) * c = \sqrt{\sqrt{abc}} = \sqrt[4]{ab}\sqrt{c}$ и $a * (b * c) = \sqrt{a\sqrt{bc}} = \sqrt[4]{a}\sqrt{bc}$.

Из полученных результатов следует, что при $a \neq c$ равенство $(a * b) * c = a * (b * c)$ не является справедливым. Следовательно, заданная операция $*$ не ассоциативна на множестве $\boldsymbol{R}^+$.

Задача. Доказать, что на некотором непустом множестве M бинарная операция, заданная формулой $a*b=b$, не коммутативна, но ассоциативна.

Решение. Пусть a, b, c - любые элементы множества M. Тогда $a*b=b$, а $b*a=a$. Следовательно, при условии $a\neq b$ равенство $a*b=b*a$ не является справедливым, т.е. операция $*$ на множестве M не коммутативна.

Далее, $(a*b)*c=b*c=c$ и $a*(b*c)=a*c=c$, поэтому равенство $(a*b)*c=a*(b*c)$ справедливо, т.е. операция $*$ на множестве M является ассоциативной.

Задача. Доказать, что на множестве K, содержащем не менее двух элементов, на котором задана бинарная операция $a*b=b$, не существует нейтрального элемента.

Решение. Допустим, что во множестве K существует нейтральный элемент e и пусть a − любой элемент из множества K. По определению нейтрального элемента $a*e=a$ и из условия задачи следует, что справедливо равенство $a=e$. Это означает, что множество K состоит из одного элемента. Полученный результат противоречит условию, а потому допущение ошибочно.

ГРУППА

Группы. Простейшие свойства групп

Непустое множество элементов G называется *группой*, если на множестве G задана бинарная алгебраическая операция $*$, так что выполнены условия:

1) для любых элементов a, b, c из G выполняется соотношение $(a*b)*c=a*(b*c)$ – ассоциативность;

2)в G имеется единица, общая для всех элементов группы, т.е. такой элемент *e*, что $a*e=e*a=a$ для каждого элемента *a* из *G*;

3)для всякого элемента *a* из *G* существует обратный элемент, т.е. такой элемент a' что $a'*a=a*a'=e$.

Обратный элемент элемента *a* в группе G обозначают символом a', a^{-1} или $\frac{1}{a}$

Если для любых элементов *a*, *b* из G $a*b=b*a$, то группа называется *коммутативной* или *абелевой*,

В коммутативных (абелевых) группах бинарная операция $*$ часто обозначается символом + и называется сложением элементов из *G*. В этом случае нейтральный элемент обозначается символом 0 или 0 («ноль»), а обратный элемент a' к элементу *a* называется *противоположным* к элементу *a* и обозначается символом -a. Эта система обозначений для абелевых групп называется *аддитивной.*

Предыдущая система обозначений называется *мультипликативной*; часто умножение обозначается «точкой» $\cdot$ или «крестиком» $\times$ или вообще символ операции умножения опускается.

Группа называется бесконечной или конечной, в зависимости от того, является ли множество *G* бесконечным или конечным; число элементов $|G|$ конечной группы *G* называется её *порядком*.

Примеры.

1.Множество всех положительных действительных чисел ***R***+ образует группу относительно операции умножения. В самом деле, умножение ассоциативно, число 1 является нейтральным элементом, т. к. $1\times a=a\times 1=a$ для любого $a\in R^{+}$ и для каждого числа *a*>0 существует обратное число, равное $\frac{1}{a}$, так как $a\times\frac{1}{a}=\frac{1}{a}\times a=1$. Эта группа ***R***+ называется *мультипликативной* группой положительных действительных чисел.

2.Множество всех действительных чисел ***R*** с операцией сложения является группой, так как сложение ассоциативно, число 0 является нейтральным элементом, ибо $a+0=0+a=a$ для любого $a\in R^{+}$, и для всякого числа *a* обратным элементом служит противоположное ему число – *a*, так как $a+(-a)=(-a)+a=0$. Эта группа называется аддитивной группой действительных чисел.

3. Пусть *p* - простое число. Рациональное число вида $\frac{m}{p^n}$ где $m,n\in Z$, называется *p*-адичной дробью. Множество $\boldsymbol{Q_p}$ - всех *p*-адичных дробей относительно умножения чисел - абелева группа.

4. Арифметическое *n*-мерное векторное пространство R^n является группой относительно сложения векторов.

5. Множество целых чисел ***Z*** с операцией умножения группой не является, так как для любого элемента в ***Z*** не существует обратного элемента.

Теорема. Нейтральный элемент *e* и обратный элемент a' элемента *a* в группе *G* единственны.

Доказательство. Пусть e_1, e_2 - единицы группы *G*. Тогда $e_1*e_2=e_1$ и $e_1*e_2=e_2$, откуда $e_1=e_2=e$ - единственный нейтральный элемент.

Аналогично доказывается единственность обратного элемента в группе.

Теорема. Уравнения $a*x=c$ и $y*b=d$ в группе *G* имеют единственное решение $x=a^{-1}*c$ и $y=d*b^{-1}$.

Доказательство. Элемент вида $x=a^{-1}*c$ - решение рассматриваемого уравнения, так как $a*(a^{-1}*c)=(a*a^{-1})*c=e*c=c$.

Покажем единственность решения. Пусть *d* - другое решение данного уравнения, тогда $a*d=c$. Умножим последнее равенство слева на a^{-1}.

Получаем $a^{-1}*(a*d)=a^{-1}*c$. Но в силу ассоциативности имеем $(a^{-1}*a)*d=e*d=d=a^{-1}*c$. Таким образом $x=d$, и единственность решения

x доказана.

Рассмотрим решение примеров.

1. Доказать, что множество $\boldsymbol{Z}$ образует группу относительно операции $\bullet$ заданной формулой:

$$a \bullet b = \begin{cases} a + b, \text{если } a - \text{четное число}, b - \text{любое целое число}, \\ a - b, \text{если } a - \text{нечетное число}, b - \text{любое целое число}. \end{cases}$$

<u>Решение.</u> 1. Рассматриваемая на Z операция сводится к сложению и вычитанию целых чисел, а т.к. сложение и вычитание элементов из Z дают в результате элементы из Z, то на множестве Z рассматриваемая, операция $\bullet$ является бинарной операцией.

2. Рассмотрим возможные случаи:

а) Если a,b - четные числа, а c - любое число из Z, то $a \bullet (b \bullet c) = a + (b + c)$, $(a \bullet b) \bullet c = (a + b) + c = a + (b + c)$, т.е. $a \bullet (b \bullet c) = (a \bullet b) \bullet c$.

б) Если a - четное число, b - нечетное, а c - любое число из Z, то $a \bullet (b \bullet c) = a + (b - c)$, $(a \bullet b) \bullet c = (a + b) - c = a + (b - c)$, т. е. $a \bullet (b \bullet c) = (a \bullet b) \bullet c$.

в) Если a - нечетное число, b - четное число, а c - любое число из Z, то $a - b$ нечетно и потому $a \bullet (b \bullet c) = a - (b + c) = (a - b) - c$, $(a \bullet b) \bullet c = (a - b) - c$, т.е. $a \bullet (b \bullet c) = (a \bullet b) \bullet c$.

г) Если a, b - нечетные числа, а c - любое число из Z, то $a - b$ четно и потому $a \bullet (b \bullet c) = a - (b - c) = (a - b) + c$, $(a \bullet b) \bullet c = (a - b) + c$, т.е. $a \bullet (b \bullet c) = (a \bullet b) \bullet c$.

Итак, во всех возможных случаях заданная на множестве Z бинарная операция является ассоциативной.

3. Так как 0 - четное число, то $0 \bullet a = a$. Кроме того, если число a четно, то $a \bullet 0 = a + 0 = a$; если же a нечетно, то $a \bullet 0 = a - 0 = a$. Итак, $0 \bullet a = a \bullet 0 = a$, т. е. 0 является в Z нейтральным элементом относительно заданной операции.

4 .Для любого элемента $a \in Z$ в Z существует обратный элемент: для

четного a обратным будет противоположное число $-a$, т.к. $a\bullet(-a)=a+(-a)=0$; для нечетного a обратным будет само число a, т.к. $a\bullet a=a-a=0$.

Итак, Z является группой относительно заданной операции. Однако эта группа не является абелевой, поскольку $4\bullet 5=4+5=9$, $5\bullet 4=5-4=1$, т.е. $4\bullet 5\neq 5\bullet 4$.

2. Множество всех подстановок n-ой степени относительно алгебраической операции произведения подстановок является группой.

Единицей этой группы служит тождественная подстановка $\begin{pmatrix}1\,2\,...\,n\\ 1\,2\,...\,n\end{pmatrix}$;

элементом, обратным к подстановке $\begin{pmatrix}1 & 2\,...\,n\\ i_1 & i_2\,...\,i_n\end{pmatrix}$, является подстановка

$\begin{pmatrix}i_1 & i_2\,...\,i_n\\ 1 & 2\,...\,n\end{pmatrix}$. Эта группа называется *симметрической группой n-ой степени* и обозначается через S_n, причем она – конечная группа порядка n!. При $n\geq 3$ группа S_n некоммутативна. Группа всех четных подстановок n-ой степени называется знакопеременной группой n-ой степени и обозначается A_n.

3. Пусть G – совокупность всех преобразований множества R, задаваемых формулой $f(x)=x+a$, где $a\in R$. Доказать, что G есть группа относительно операции умножения преобразований.

Решение. Проверим, что умножение преобразований есть бинарная операция на множестве G.

По определению операции умножения преобразований φ, h имеем:

$$h(x)=\varphi(f(x)).$$

Обозначим преобразование $x\to x+a$ множества R через f_a. Тогда

$$(f_a f_b)(x)=f_a(f_b(x))=f_a(x+b)=x+b+a=f_{a+b}(x),$$ т. е.

$$f_a f_b=f_{a+b}$$

Этим доказано, что $f_a f_b \in G$.

2. Операция умножения преобразований ассоциативна.

3. Тождественное преобразование, играющее роль нейтрального элемента для операции умножения преобразований, принадлежит *G*. Таким является преобразование *f*, где $f_0(x) = x$ для любого *x* из *R*.

4. Преобразование, обратное любому преобразованию *f* из *G*, которое играет роль обратного элемента для f_a, снова принадлежит *G*. Таким является преобразование $f_{-a}(x) = x - a$.

Итак, *G* – группа.

ИЗОМОРФИЗМ И ГОМОМОРФИЗМ ГРУПП

Две группы *G* и *H* называется изоморфными, если между их элементами можно установить взаимно однозначное соответствие *f*: $G \to H$, при котором для любых элементов $a, b \in G$ и соответствующих им элементов $a' = f(a), b' = f(b) \in H$ выполняется равенство: $f(ab) = f(a)f(b)$, т.е. элементу $c=ab$ соответствует элемент $c' = a'b'$, $c' = f(c)$. Само отображение *f* называется изоморфизмом группы *G* на группу *H*.

Изоморфное отображение группы на себя называется автоморфизмом этой группы.

Примеры.

1. Аддитивная группа ***Z*** всех целых чисел изоморфна аддитивной группе 2***Z*** всех четных чисел (для установления изоморфизма между ними можно каждому числу $z \in Z$ поставить в соответствие число $2z \in 2Z$).

2.Мультипликативная группа всех положительных действительных чисел ***R*** изоморфна аддитивной группе всех действительных чисел ***R*** (изоморфизм: $a \to \lg a$).

3.Отображение аддитивной группы всех целых чисел ***Z***, , при котором каждому целому числу *a* ставится в соответствие число *–a*, является автоморфизмом.

Заметим, что изоморфное соответствие между группами можно установить многими способами. Изоморфные группы могут отличаться друг от друга только природой своих элементов и названиями операций, определенными в группах. Но все групповые свойства изоморфных между собой групп одинаковы. Например, если группа абелева, то и все изоморфные ей группы абелевы.

Теорема Кэли. Любая конечная группа G порядка n изоморфна некоторой подгруппе G' группы подстановок степени n.

Доказательство. Занумеруем все элементы данной группы G: g_1, g_2, …, g_n, $g_i \neq g_j, i \neq j$. Пусть a - произвольный элемент этой группы. Составим последовательность произведений g_1a, g_2a, …, g_na. Все эти произведения различны, поэтому данная последовательность представляет собой последовательность всех элементов группы. Значит, ее можно записать в виде $g_{i_1}, g_{i_2}, ..., g_{i_n}$, где $i_1, i_2, ..., i_n$ – некоторая перестановка из чисел 1, 2, …, n.

Поставим в соответствие элементу a подстановку $\begin{pmatrix} 1 & 2 \ldots n \\ i_1 & i_2 \ldots i_n \end{pmatrix}$. Таким образом, каждому элементу a группы G будет соответствовать определенная подстановка степени n. Эта подстановка переводит число k в число i_k, если произведение g_ka равно элементу g_{i_k} с номером i_k.

Разным элементам группы G будут соответствовать разные подстановки. Действительно, если $a \neq b$, то $g_1a \neq g_1b$. Поэтому подстановки, соответствующие элементам a и b переводят число 1 в разные числа, т.е. эти подстановки различны.

Обозначим множество из n подстановок, соответствующих элементам g_1, g_2, …, g_n группы G через G'. Таким образом, установлено взаимно однозначное отображение группы G на G', сохраняющее операцию.

Действительно, пусть элементам a и b соответствуют подстановки $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ i_1 & i_2 & \ldots & i_n \end{pmatrix}$

и $\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \ldots & i_n \\ g_1 & g_2 & \ldots & g_n \end{pmatrix}$. Покажем, что для любого l $(1 \leq l \leq n)$ выполняется условие: $g_l(ab)=gj_l$. Это условие легко проверяется: из подстановок, соответствующих элементам a, b, имеем равенство $g_la=gi_l$, $gi_lb=gj_l$, откуда

$g_l(ab)=(gla)b=gi_lb=gj_l$.

Итак, установлен изоморфизм группы G и множества G' с обычной операцией умножения подстановок. По свойству изоморфного отображения получаем, что G' есть группа относительно операции умножения подстановок степени n. Теорема доказана.

Если каждому элементу группы G соответствует однозначно определенный элемент группы H, причем если элементам $a,b \in G$ соответствуют элементы $a',b' \in H$, то элементу $ab=c$ соответствует элемент $c'=a'b'$, то такое соответствие называется гомоморфизмом. Иначе, гомоморфизм группы G в группу H – это отображение $f: G \to H$, обладающие свойством $f(ab)=f(a)f(b)$ для любых элементов $a,b \in G$. Если при этом $H=f(G)$, то говорят о гомоморфном отображении f группы G на группу H; такой гомоморфизм называется эпиморфизмом группы G на группу H.

При гомоморфизме единица группы G отображается в единицу группы H, а взаимно обратные элементы из G отображаются во взаимно обратные элементы из H.

Примеры.

1.Если каждому четному числу поставить в соответствие число 1, а каждому нечетному – число -1, то получается гомоморфное отображение аддитивной группы целых чисел в мультипликативную группу всех отличных от нуля рациональных чисел. Это же отображение будет эпиморфизмом аддитивной группы всех целых чисел на мультипликативную группу, состоящую из чисел -1,1.

2.Если каждой невырожденной квадратной матрице n-го порядка с действительными элементами поставить в соответствие определитель этой матрицы, то получится гомоморфное отображение группы (по умножению) всех действительных невырожденных квадратных матриц n-го порядка на мультипликативную группу всех отличных от нуля действительных чисел.

Пример. Покажем, что все группы третьего порядка изоморфны между собой. Привести конкретные примеры групп третьего порядка.

Решение. Пусть G - множество из трех различных элементов e, a, b. Очевидно, что число изоморфных групп третьего порядка равно числу различных (не изоморфных) таблиц умножения, которые можно задать для элементов e, a, b. Заготовим входные строку и столбец таблицы:

	e	a	b
e			
a			
b			

В группе должен быть единичный элемент. Пусть таковым будет e. Тогда первая строка и первый столбец должны будут совпадать со входными строкой и столбцом:

	e	a	b
e	e	a	b
a	a		
b	b		

Осталось заполнить 4 клетки. Учитывая, что в каждой строке и каждом столбце каждый элемент должен встретиться лишь одни раз, то оставшиеся 4 клетки заполняются однозначно:

	e	a	b
e	e	a	b
a	a	b	e

$$b \qquad b \qquad e \qquad a$$

Это и значит, что существует лишь одна группа из трех элементов, т.е. все группы третьего порядка изоморфны.

Конкретными примерами групп третьего порядка могут служить:

а) группа четных подстановок 3-й степени A_3, т.е. множество подстановок $e = \begin{pmatrix} 1\,2\,3 \\ 1\,2\,3 \end{pmatrix}$, $a = \begin{pmatrix} 1\,2\,3 \\ 2\,3\,1 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 1\,2\,3 \\ 3\,1\,2 \end{pmatrix}$ относительно умножения подстановок;

б) множество, состоящее из трех комплексных чисел $e = 1$, $a = -1 + i\frac{\sqrt{3}}{2}$, $b = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ относительно умножения чисел.

ПОДГРУППА

§5. Подгруппы

Пусть множество G является группой относительно операции $*$. Подмножество H группы G, являющееся группой относительно той же операции $*$, называется *подгруппой* группы G (обозначение H<G).

Из определения следует, что всякая группа является своей подгруппой и что, множество, состоящее только из единицы группы, так же будет ее подгруппой, Эти подгруппы называются *тривиальными*. Могут существовать и нетривиальные подгруппы, которые называются *собственными подгруппами*.

Например, множество положительных рациональных чисел Q является подгруппой мультипликативной группы положительных действительных чисел R^+, а множество целых чисел Z есть подгруппа аддитивной группы действительных чисел R.

Теорема. Непустое подмножество H группы G является подгруппой этой группы тогда и только тогда, когда H удовлетворяет двум условиям:

1. Для любых двух элементов $h_1 \in H$, $h_2 \in H$ элемент $h = h_1 * h_2 \in H$;

2. Для любого элемента $h \in H$ обратный элемент $h^{-1} \in H$.

Условия 1, 2 можно заменить одним условием: для любых двух элементов $h_1 \in H$, $h_2 \in H$ элемент $h_1 * h_2^{-1} \in H$.

Рассмотрим решение примеров.

1. В группе S_3 всех подстановок третьей степени выделим подмножество H из подстановок

$e = \begin{pmatrix} 1\,2\,3 \\ 1\,2\,3 \end{pmatrix}$, $\qquad a_1 = \begin{pmatrix} 1\,2\,3 \\ 2\,1\,3 \end{pmatrix}$

Легко проверяется, что $ee=e$, $ea_1=a_1e=a_1$, $a_1a_1=e$. Таким образом, попарные произведения элементов из H снова принадлежат H, т.е. условие 1 выполнено, С другой стороны, равенства $ee=e$ и $a_1a_1=e$ показывают, что каждый из элементов e, a_1 является обратным самому себе. Значит, выполнено и условие 2. Следовательно, подмножество H является подгруппой группы S_3.

2. Доказать, что множество M матриц вида $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$, где $a \in R$ и $a \neq 0$, есть подгруппа мультипликативной группы G всех невырожденных матриц 2-го порядка.

<u>Решение.</u> 1) Пусть $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$ - любая матрица из M, тогда $|A| = a^2 \neq 0$, а потому A является невырожденной матрицей. Итак, $M \subset G$.

2) Пусть $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$ - любые матрицы из M, $a \neq 0$, $b \neq 0$, тогда $ab \neq 0$, $AB = \begin{pmatrix} ab & 0 \\ 0 & ab \end{pmatrix}$, т.е. $ab \in M$.

3) Пусть $A=\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$. Тогда $A^{-1}=\frac{1}{a^2}\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{1}{a} & 0 \\ 0 & \frac{1}{a} \end{pmatrix}$, при этом $\frac{1}{a}\neq 0$, а потому $A^{-1}\in M$.

Из 1),2),3) следует, что M есть подгруппа группы G.

Теорема Кэли. Всякая конечная группа порядка n изоморфна некоторой подгруппе симметрической группы S_3 всех подстановок *n*-ой степени.

ЦИКЛИЧЕСКИЕ ГРУППЫ

§6. Циклические группы

Если в группе G взять какой-нибудь элемент g и все степени этого элемента (или все его кратные, если операция в группе – сложение), то получится подгруппа группы G. Эта подгруппа называется *циклической подгруппой, порожденной элементом* g, и обозначается {g}. Если подгруппа {g} совпадает со всей группой *G*, то сама группа G называется *циклической*. Элемент *g* группы G называется элементом конечного порядка, если для элемента *g* существует такое натуральное число *k*, что $g^k=e$ (*e* – единица группы *G*). Наименьшее натуральное число n со свойством $g^n=e$ в этом случае называется *порядком элемента g*. Элемент g называется *элементом бесконечного порядка* (*или свободным элементом*), если для любого натурального числа *k* $g^k\neq e$ не выполнено; в этом случае все степени элемента *g* различны между собой.

Циклическая подгруппа {*g*} бесконечна (свободна), если элемент *g* группы *G* имеет бесконечный порядок (свободен). Если *g* – элемент порядка *n*, то подгруппа {*g*} также имеет порядок n; она состоит из различных между собой элементов $e, g, g^2, \ldots, g^{n-1}$.

Примеры.

1. Аддитивная группа всех целых чисел есть бесконечная циклическая группа, которая состоит из всех кратных числа 1 или числа -1.

2. Все значения корня n-ой степени из 1 образуют относительно операции умножения циклическую группу порядка n порожденную любым из первообразных корней n-ой степени из 1.

Теорема. Все бесконечные циклические группы изоморфны между собой. Изоморфны между собой также все конечные циклические группы одного и того же порядка n.

Всякая подгруппа циклической группы сама является циклической группой.

Рассмотрим решение примера.

Доказать, что в циклической группе порядка n с образующей g элемент g^k тогда и только тогда является образующей, когда k взаимно просто с n.

Решение. Допустим, что числа k и n не являются взаимно простыми. Тогда у них имеется общий делитель $d>1$, т.е. $k=k_1d$, $n=n_1d$. В этом случае $\left(g^k\right)^{n_1} = g^{kn_1} = g^{k_1dn_1} = \left(g^n\right)^{k_1} = e$. Следовательно, среди степеней элемента g^k найдется неболее n различных. Но $n_1<n$, поэтому различные степени элемента g^k не исчерпывают всей группы, состоящей из n различных элементов g^0, g^1, …, g^{n-1}. Таким образом, элемент g^k не является образующей группы {g}.

Пусть теперь числа n и k взаимно просты. Тогда элементы $(g^k)^0$, $(g^k)^1$, …, $(g^k)^{n-1}$ попарно различны. Действительно, допустив, что $g^{kp}=g^{kq}$, где $p<q<n$, получим: $g^{k(q-p)}=e$. Ясно, что k(q-p) делится на n, а раз k взаимно просто с n, то q-p делится на n. Но это невозможно, поскольку $0<q-p<n$. Следовательно, имеется n попарно различных степеней элемента g^k, т.е. различные степени элемента g^k исчерпывают всю группу {g}. Значит g^k служит образующей этой группы.

СМЕЖНЫЕ КЛАССЫ

§7. Смежные классы. Разложение группы по подгруппе

Если H - подгруппа, а g - произвольный элемент группы G, то через gH обозначается множество всех элементов группы G вида gh, где $h \in H$. Это множество называется *левым смежным классом группы* G *по подгруппе* H. Аналогично *правым смежным классом* Hg *группы* G *по подгруппе* H называется множество всех элементов вида hg, где $h \in H$. Если групповая операция сложение, то левые и правые смежные классы соответственно будут иметь вид g+H и H+g. В случае коммутативной группы G левый и правый классы любого элемента g по любой подгруппе H совпадают.

Примеры.

1. В группе всех подстановок третьей степени S_3 возьмем подгруппу H, состоящую из подстановок $e = \begin{pmatrix} 1\,2\,3 \\ 1\,2\,3 \end{pmatrix} = (1)$ и $h = \begin{pmatrix} 1\,2\,3 \\ 1\,3\,2 \end{pmatrix} = (23)$, и возьмем элемент $g = \begin{pmatrix} 1\,2\,3 \\ 2\,3\,1 \end{pmatrix} = (123)$. Тогда левый смежный класс gH будет состоять из подстановок $ge = g = (123)$ и $gh = (123)\cdot(23) = (13)$, а правый смежный класс Hg - из подстановок $eg = g = (123)$ и $hg = (12)$.

2. Пусть G - аддитивная группа целых чисел, а H - ее подгруппа, состоящая из чисел , кратных 4, т.е. $G = \{...,-2,-1,0,1,2,...\}$, $H = \{...,-8,-4,0,4,8,...\}$.

Группа G коммутативна, поэтому правый и левый смежные классы любого элемента по подгруппе H совпадают. Для элемента 0, 1, 2, 3 получаются следующие смежные классы:

$$H + 0 = \{...,-8,-4,0,4,8,...\}$$

$$H + 1 = \{...,-7,-3,1,5,9,...\}$$

$$H + 2 = \{...,-6,-2,2,6,10,...\}$$

$$H + 3 = \{...,-5,-1,3,3,11,...\}$$

Поскольку любое целое число содержится в одном из этих классов H+0, H+1, H+2, H+3, то класс каждого элемента $g \in G$ совпадает с одним из классов.

Каждый левый смежный класс определяется любым входящим в него элементом, т.е. если $g_1 \in gH$, $g_1H = gH$. Два любых ее левых смежных класса группы G по подгруппе H или совпадают или не имеют ни одного общего элемента. Все левые смежные классы по подгруппе H подгруппами группы G не являются, кроме самой подгруппы H ($H = eh$, где e - единица группы G).

Эти же утверждения верны для правых смежных классов.

Число всех различных левых смежных классов группы G по подгруппе H всегда равно числу всех различных правых смежных классов группы G по этой же подгруппе. Это число называется *индексом* подгруппы H группы G.

Индекс часто обозначают символом [G:H]. В случае бесконечного множества смежных классов индексом называется мощность этого множества.

Если в произвольной группе G выбрана подгруппа H, то все элементы группы G можно разбить на попарно непересекающиеся классы элементов группы G, которыми служат смежные классы группы G по

подгруппе H. Такое разбиение называется *левосторонним разложением группы по подгруппе* H. Если вместо левых смежных классов взять правые смежные классы по подгруппе H, то получится *правостороннее разложение группы* G *по подгруппе* H.

Рассмотрим решение примера.

Найти левые и правые разложения симметрической группы

$$S_3 = \{e = (1), a_1 = \begin{pmatrix} 1\,2\,3 \\ 1\,3\,2 \end{pmatrix} = (23), a_2 = \begin{pmatrix} 1\,2\,3 \\ 2\,1\,3 \end{pmatrix} = (12), a_3 = \begin{pmatrix} 1\,2\,3 \\ 2\,3\,1 \end{pmatrix} = (123),$$

$$a_4 = \begin{pmatrix} 1\,2\,3 \\ 3\,1\,2 \end{pmatrix} = (132), a_5 = \begin{pmatrix} 1\,2\,3 \\ 3\,2\,1 \end{pmatrix} = (13)\}$$

по ее подгруппе H=$\{e, a_1\}$.

Решение 1) Найдем левое разложение группы S_3. В качестве первого смежного класса возьмем саму подгруппу H=eH=$\{e, a_1\}$. Рассмотрим любой элемент из S_3, не вошедший в первый класс, например a_2, и умножим на него слева элементы подгруппы H: $a_2e=a_2$, $a_2a_1=(12)*(23)=(132)a_4$. Получим второй смежный класс $a_2H=\{a_2, a_4\}$. Далее возьмем элемент a_5 непринадлежащий предыдущим двум классам. Получим третий класс $a_5H=\{a_3, a_5\}$. В построенные классы вошли все элементы S_3; т.е. $H \cup a_2H \cup a_5H = \{e,a_1\} \cup \{a_2,a_4\} \cup \{a_2,a_5\} = S_3$. Эти классы попарно не пересекаются. Следовательно, классы H, a_2H, a_5H составляет левое разложение группы S_3 по ее подгруппе H.

2) Найдем правое разложение группы S_3 по подгруппе H. Первый правый класс - сама подгруппа $H=\{e, a_1\}$, второй правый класс – $Ha_2=\{a_2, a_3\}$, третий - $Ha_5=\{a_4, a_5\}$. Так как эта классы не пересекаются и $H \cup Ha_2 \cup Ha_5 = S_3$, то классы: H, Ha_2, Ha_5, составляют правое разложение группы S_3 по ее подгруппе H. Так как $a_5H \neq Ha_5$, то левое и правое разложение группы S_3 по подгруппе H не совпадают.

Теорема Лагранжа. Порядок конечной группы делится на порядок любой подгруппы.

Доказательство. Пусть конечная группа имеет подгруппу H порядка m, состоящую из элементов h_1, h_2, ..., h_n. Для любого $g \in G$, правый класс Hg состоит из элементов h_1g, h_2g, ..., h_mg, которые все попарно различны (из $h_ig=h_jg$ следовало бы $h_i = h_j$). Таким образом, всякий правый класс содержит ровно m элементов. Пусть имеется всего $k \leq n$ различных правых классов. Обозначив их через Hg_1, Hg_2,…, Hg_k получаем: $G = Hg_1 \cup Hg_2 \cup ... \cup Hg_k$ т.е. группа G, состоящая из n элементов, разбивается на k непересекающихся классов по m элементам в каждом. Отсюда n=mk, значит n делится на m.

Теорема Коши. Порядок любого элемента конечной группы является делителем порядка этой группы.

Обратно, если порядок конечной группы G делится на простое число p, то G обладает элементами порядка p.

НОРМАЛЬНЫЕ ДЕЛИТЕЛИ

§8. Нормальный делитель группы. Фактор-группы

Если при левостороннем и при правостороннем разложении группы G по некоторой ее подгруппе H классы, на которые распадаются элементы группы G, получаются одинаковыми, то подгруппа H называется *нормальным делителем* группы G (*нормальной* или *инвариантной подгруппой*),

Примеры.

1. Пусть G - группа всех невырожденных квадратных матриц n-ого порядка с действительными элементами, H - ее подгруппа, состоящая из всех матриц, определитель которых равен 1. И является нормальным делителем группы G.

2. Подгруппа H={*e*, (13)} группы S_3 не является нормальным делителем этой группы.

Теорема. Подгруппа H тогда и только тогда является нормальным делителем группы G, когда для любого элемента g группы G gH=Hg.

Это равенство означает, что для всякого элемента h из H можно найти такие элементы h', h'', что $gh = h'g$, $hg = gh''$.

Пример.

Если группа G абелева, то всякая ее подгруппа H является нормальным делителем (достаточно взять $h' = h'' = h$). Существуют и некоммутативные группы с таким свойством. Например, группа кватернионов.

Элементы g_1 и g_2 группы G называются *сопряженными* в этой группе, если в G существует такой элемент g, что $g_2 = g^{-1}g_1g$ (говорят также, что элемент g_2 получен из g_1 *трансформированием* элементом g).

Если A - подгруппа, g - фиксированный элемент некоторой группы G, то совокупность всех элементов вида $g^{-1}ag$, где *a* пробегает всю подгруппу A, есть снова подгруппа группы G. Эта подгруппа называется подгруппой, *сопряженной* с A в группе G.

Пример.

Подгруппа $H_1 = \{e, (23)\}$ группы S_3 сопряжена с подгруппой $H = \{e, (13)\} : H_1 = (12)^{-1} H (12)$.

Подгруппа H группы G тогда и только тогда является нормальным делителем этой группы, когда вместе с каждым элементом h она содержит и все элементы, сопряженные с h в группе G.

В любой группе единичная подгруппа и сама группа являются нормальными делителями. Если других нормальных делителей в группе нет, она называется *простой* группой. Примером простой группы служит знакопеременная группа n-ой степени при n>5. Существуют и бесконечные простые группы.

Если в группе G все подгруппы являются нормальными делителями, причем группа G не абелева, то она называется *гамильтоновой* группой.

Если в множестве всех смежных классов группы G по нормальному делителю H ввести операцию по правилу $(g_1H)(g_2H) = (g_1g_2)H$ (при аддитивной записи $(g_1 + H) + (g_2 + H) = (g_1 + g_2) + H$), то это будет алгебраическая операция, относительно которой множество всех смежных классов группы G по нормальному делителю H само является группой. Эта группа называется *фактор-группой группы G по нормальному делителю H* и обозначается G/H. Единицей фактор-группы G/H является смежный класс H. Элементом, обратным элементу фактор-группы gH, является смежный класс $g^{-1}H$. Порядок фактор-группы G/H равен индексу H в G.

Примеры.

1. Фактор-группа аддитивной группы; всех целых чисел Z по подгруппе всех чисел, делящихся на 3, состоит из трех элементов - классов 0+Z, 1+Z, 2+Z. Это – циклическая группа 3-го порядка, порожденная элементом 1+Z.

2.В мультипликативной группе Q^* всех отличных от нуля рациональных чисел числа 1, -1 образуют нормальный делитель H. Смежные классы по этому нормальному делителю являются парами чисел c, $-c$, где c – некоторое положительное рациональное число. Произведением смежных классов c_1, $-c_1$ и c_2, $-c_2$ является смежный класс группы Q^* по нормальному делителю H, состоящий из чисел c_1c_2 , $-c_1c_2$ (c_1Hc_2H=(c_1c_2)H). Фактор-группа Q^* / H изоморфна мультипликативной группе всех положительных рациональных чисел.

3.Если в мультипликативной группе G всех невырожденных квадратных матриц n-го порядка с действительными элементами взять множество H, состоящее из всех матриц, определитель которых равен 1, то H будет нормальным делителем. Смежные классы по H будут состоять из всех матриц с одинаковым определителем. Если каждому смежному классу поставить в соответствие действительное число, равное определителю матриц, входящих в этот смежный класс, то получится изоморфизм между фактор-группой G/H и мультипликативной группой всех отличных от нуля действительных чисел R^+.

Рассмотрим решение примеров.

1. Построить фактор-группу аддитивной группы Z по ее подгруппе $H = \{x / x = 5k, k \in Z\}$. Найти сумму смежных классов 3+H, 4+H и элемент фактор-группы Z/H, противоположный элементу 2+H.

<u>Решение.</u> Аддитивная группа Z коммутативна, а потому любая ее подгруппа, в том числе и данная циклическая подгруппа H, является нормальным делителем группы Z. Следовательно, левые и правые классы

группы Z по подгруппе H совпадут и из них составится одна фактор-группа. Разбиваем группу Z с помощью ее подгруппы H на попарно непересекающиеся классы: $0+H=\{x/x=5k,k\in Z\}$, $1+H=\{x/x=1+5k,k\in Z\}$, $2+H=\{x/x=2+5k,k\in Z\}$, $3+H=\{x/x=3+5k,k\in Z\}$, $4+H=\{x/x=4+5k,k\in Z\}$. Построенные смежные классы полностью исчерпывают элементы данной группы Z, т.е. $(0+H)\cup(1+H)\cup(2+H)\cup(3+H)\cup(4+H)=Z$. Полученные классы, очевидно, попарно не пересекаются. Следовательно, они составляют разложение группы Z по нормальному делителю H. Итак, множество $Z/H=\{0+H,1+H,2+H,3+H,4+H\}$ будет аддитивной фактор-группой со сложением элементов (классов): $(3+H)+(4+H)=(3+4)+H=7+H=\{x:x=7+5k=2+(5+5k)=2+5t,t\in Z\}=2+H$; $(3+H)+(0+H)=(3+0)+H=3+H$; Аналогично, $(0+H)+(3+H)=(3+H)$, поэтому элемент 0+H в группе Z/H играет роль нуля.

Поскольку $(2+H)+(3+H)=(2+3)+H=5+H=\{x:x=5+5k=5(1+k)=5s,s\in Z\}=0+H$, то элемент 3+H является противоположным элементу 2+H.

2. Охарактеризовать все нормальные делители в группе Z_p вычетов по mod p и фактор-группы по ним.

<u>Решение.</u> Т. к. аддитивная группа $Z_p=\{0,1,2,...,n-1\}$ является циклической, а циклические группы коммутативны, то все ее подгруппы являются нормальными делителями. Но любая подгруппа группы Z_p имеет вид $\{0,d,2d,...,(n-d)\}$, где d - любой натуральный делитель числа n, n=*d*k или $n-d=dk-d=(k-1)d$. Таким образом, нормальный делитель будет состоять из k элементов и иметь следующий вид: $H=\{0,d,2d,...,(k-1)d\}$. Фактор-группа группы Z_p по нормальному делителю H будет состоять из d смежных классов:

$$H+0=H=\{0=0d,1d,2d,...,(k-1)d\}=\{x:x=ds\},$$

$$H+1=\{1,d+1,2d+1,...,(k-1)d+1\}=\{x:x=ds+1\},$$

$H+2=\{2, d+2, 2d+2, \dots, (k-1)d+2\}=\{x : x=ds+2\}$,

$H+d-1=\{x : x=ds+d-1\}$, где s пробегает все целые числа от 0 до k-1. Следовательно, **Z_p/H={H, H+1, H+2,..., H+d-1}**.

ТЕОРЕМА О ГОМОМОРФИЗМЕ ГРУПП

§9. Гомоморфные образы группы

Пусть $f: G \to G'$ – гомоморфизм группы G в группу G'. Рассмотрим множество $Kerf=\{g \in G : f(g)=e'\}$, где e' – единица группы G'. Нетрудно показать, что Kerf является нормальным делителем группы G. Он называется *ядром гомоморфизма f*.

Теорема о гомоморфизме. Если $f: G \to G'$ – гомоморфизм группы G в группу G', то группа G' изоморфна фактор-группе G/H, где H=Kerf.

<u>Доказательств</u>о. Пусть *f* – гомоморфное отображение G на G'. По каждому элементу $g' \in G'$ составим класс $f^{-1}(g')=f(g)Kerf$ тех элементов нз G, которые отображением переводятся в g'. Множество всевозможных таких классов образует разбиение группы G, которые обозначим G/H, где H=Kerf. Зададим отображение F группы G' на множество G/H классов, полагая, что для каждого элемента $g' \in G'$ класс $F(g')=f^{-1}(g')$. Отображение F взаимно однозначно, поскольку разным элементам группы G' отвечают разные классы прообразов.

Покажем теперь, что для любых элементов g'_1, g'_2 группы G' выполняется равенство $F(g'_1)F(g'_2)=F(g'_1 g'_2)$. Тогда это равенство определяет умножение классов, превращающее это множество классов G/H в группу.

Следовательно, умножение классов есть операция на данном множестве классов и отображение F изоморфно. Убедимся, что каждый элемент произведения классов $F(g'_1)$ и $F(g'_2)$ принадлежит классу $F(g'_1 g'_2)$ и обратно.

Пусть $g \in F(g'_1)F(g'_2)$. Тогда $g = g_1 g_2$, причем $g_1 \in F(g'_1)$, $g_2 = F(g'_2)$ и поэтому $f(g) = g'_1$ и $f(g) = g'_2$. Отсюда получаем: $f(g) = f(g_1 g_2) = f(g_1)f(g_2) = g'_1 g'_2$. Значит, $g \in F(g'_1 g'_2)$. Обратно, пусть $g \in F(g'_1 g'_2)$. Возьмем произвольный элемент $g_2 \in \Phi(g'_2)$ и представим элемент g в виде произведения элементов $g = \overline{g} g_2^{-1}$, $\overline{g} = g g_2^{-1}$. Имеем одновременно: $f(g)g'_1 g'_2$ и $f(g) = f(\overline{g})f(g_2) = f(\overline{g})g'_2$. Отсюда следует, что $f(\overline{g}) = g'_1$, т.е. $\overline{g} \in F(g'_1)$. Значит, $g \in F(g'_1)F(g'_2)$.

Таким образом, группа G' изоморфна фактор-группе G/H группы G. Теорема доказана.

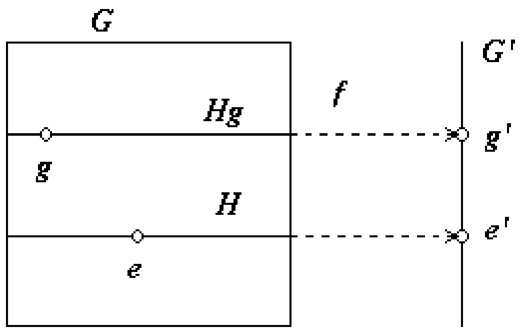


Рисунок иллюстрирует соответствие между G' и G/H. Отображение G на G' представлено как проектирование. Различные классы группы G по подгруппе H изображаются горизонтальными отрезками; все элементы каждого такого класса отображаются в один элемент из G'. Сопоставляя каждому элементу $g' \in G'$ соответствующий горизонтальный отрезок, получаем изоморфное отображение группы G' на группу G.

Пусть G – группа и H - ее нормальный делитель. Отображение $\pi : G \to G/H$, $\pi(g) = \overline{g} = gH$ является гомоморфизмом группы G на фактор-группу G/H который называется *естественным гомоморфизмом* группы G на факторгруппу G/H.

Если $f : G \to G'$ – гомоморфизм группы G на группу G' и]H=Kerf – ядро этого гомоморфизма, то согласно теореме о гомоморфизме группа G' изоморфна фактор-группе G/H. Поэтому, если группу G' отождествить с фактор-группой G/H, то отображение *f* можно рассматривать как проекцию G на G'.

Рассмотрим решение примеров.

1. Доказать, что мультипликативную группу M невырожденных матриц порядка n ($n \geq 1$) можно гомоморфно отобразить на группу $R^* = R \setminus \{0\}$ действительных чисел, отличных от нуля.

<u>Решение.</u> Отобразим группу M в группу R^* по правилу *f*, которое каждой матрице A из M ставит в соответствие ее определитель $|A|$ – элемент из R^*, т.е. $f(A) = |A|$. Т.к. при этом отображении для любого заданного элемента из R^* полный прообраз есть непустое множество, то *f* является отображением M на R^*. Это отображение сохраняет операцию. Действительно, если *A*, *B* - любые элементы из группы M, то и $AB \in M$, и по теореме об определителе произведения матриц получим: $f(AB) = |AB| = |A| \circ |B| = f(A)f(B)$.

Итак, *f* есть отображение группы M на группу R^*, сохраняющее операцию, т.е. *f* - гомоморфное отображение.

2. Построить фактор-группу мультипликативной группы $Q^* = Q \setminus \{0\}$ рациональных чисел, отличных от нуля, по ее нормальному делителю H={1, -1} и гомоморфно отобразить группу Q^* на фактор-группу Q^* / H.

Решение. Пусть *x* - любое положительное рациональное число. Тогда $xH = \{x,-x\}$, $(-x)H = \{x,-x\}$, значит, смежные классы *xH* и (-*x*)*H* совпадают. Отсюда следует, что при разложении группы Q^* по нормальному делителю H смежные классы можно порождать лишь при помощи положительных рациональных чисел. Итак, $Q^* / H = \{\{x,-x\} : x \in Q^+\}$, Q^+ - положительные рациональные числа.

Отобразим Q^* в Q^*/H по правилу $f: f(x) = xH = \{x, -x\}$.

Т.к. любой смежный класс не пуст, то при отображении f полный прообраз любого элемента из Q^*/H также не пуст, а потому f является отображением группы Q^* на группу Q^*/H, сохраняющим операцию: если x и y - любые элементы из группы Q^*, то $f(xy) = (xy)H = xHyH = f(x)f(y)$.

Следовательно, f - гомоморфное отображение группы Q^* на группу Q^*/H.

МНОГОЧЛЕНЫ ОТ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

§1. Понятие многочлена.

п. 1. Алгебраическое определение кольца многочленов.

Пусть K – произвольное кольцо.

Определение. Многочленом от x с коэффициентами из K называется формальное выражение вида:

$a_0+a_1\cdot x+a_2\cdot x^2+\ldots+a_n\cdot x^n$,

(1)

где n – любое неотрицательное целое число, a_k – элементы кольца K, $\kappa = \overline{0,n}$.

Замечание. Выражение (1) рассматривается как единый символ, никаких операций сложения или умножения над отдельными его частями не подразумевается.

Элемент $a_k \in K$ называется коэффициентом многочлена (1) при x^κ. Для $\kappa>n$ условимся считать, что коэффициент при x^κ равен нулю.

Обозначение многочленов: $f(x)$, $g(x)$, $f_1(x), f_2(x)$ и т. п.

Определение. Многочлены $f_1(x)$ и $f_2(x)$ равны, если для любого $\kappa=0,1,\ldots,n$ коэффициент многочлена $f_1(x)$ при x^κ равен коэффициенту многочлена $f_2(x)$ при x^κ. Равенство записывают обычным образом: $f_1(x)=f_2(x)$.

Рассмотрим два многочлена:

$$f(x)=a_0+a_1\cdot x+a_2\cdot x^2+\ldots+a_n\cdot x^n$$

(2)

и

$$g(x)=b_0+b_1\cdot x+b_2\cdot x^2+\ldots+b_m\cdot x^m,$$

(3)

где a_i и $b_j \in K$, $i=\overline{0,n}$, $j=\overline{0,m}$.

Определение. Суммой двух многочленов $f(x)$ и $g(x)$ называется многочлен вида:

$$f(x)+g(x)=(a_0+b_0)+(a_1+b_1)\cdot x+(a_2+b_2)\cdot x^2+\ldots+(a_p+b_p)\cdot x^p,$$

(4)

где $p=max\{n,m\}$.

Определение. Произведением многочленов (2) и (3) называется многочлен вида:

$$f(x)\cdot g(x)=c_0+c_1\cdot x+c_2\cdot x^2+\ldots+c_{n+m}\cdot x^{n+m},$$

(5)

где $c_k\cdot x^k=a_0\cdot b_k\cdot x^k+a_1\cdot x\cdot b_{k-1}\cdot x^{k-1}+a_1\cdot x^2\cdot b_{k-2}\cdot x^{k-2}+\ldots+a_k\cdot x^k\cdot b_0=$

$=(a_0\cdot b_k+a_1\cdot b_{k-1}+a_2\cdot b_{k-2}+\ldots+a_k\cdot b_0)\cdot x^k$,

(6)

Свойства операций сложения и умножения многочленов.

1. *Коммутативность сложения*.

Пусть многочлены $f(x)$ и $g(x)$ заданы формулами (2) и (3). Тогда, согласно определению, многочлен $f(x)+g(x)$ по формуле (4) равен многочлену

$$g(x)+f(x)=(b_0+a_0)+(b_1+a_1)\cdot x+(b_2+a_2)\cdot x^2+\ldots+(b_p+a_p)\cdot x^p, \qquad p=max\{n,m\}.$$

Так как в кольце K сложение коммутативно, то $a_k+b_k=b_k+a_k$, $(k=0,\ldots,p)$ и, значит, $f(x)+g(x)=g(x)+f(x)$.

2. *Ассоциативность сложения*.

Доказательство аналогично 1, исходя из ассоциативности сложения в кольце K.

3. Существование нулевого элемента.

Определение. Нулевым элементом, обозначаемым θ, называется многочлен, все коэффициенты которого равны нулю, т.е.:

$\theta(x)=0+0\cdot x+0\cdot x^2+\ldots+0\cdot x^n$

Свойство: Для любого $f(x)$ существует $\theta(x)$ такой, что: $f(x)+\theta(x)=\theta(x)+f(x)=f(x)$.

4. Существование противоположного элемента.

Определение: Противоположным многочленом называется многочлен, все коэффициенты которого противоположны соответствующим коэффициентам многочлена $f(x)$. Обозначение: $-f(x)$.

Ясно, что для любого $f(x)$ существует $-f(x)$ такой, что: $f(x)+(-f(x))=\theta(x)$.

5. Дистрибутивность умножения относительно сложения.

Пусть даны три многочлена:

$f(x)$ вида (2), $g(x)$ вида (3) и многочлен $h(x)=c_0+c_1\cdot x+c_2\cdot x^2+\ldots+c_l\cdot x^l$, где $c_k\in K$, $k=\overline{0,l}$.

Докажем, что

$(f(x)+g(x))\cdot h(x)=f(x)\cdot h(x)+g(x)\cdot h(x).$

(7)

Многочлен $f(x)+g(x)$ задается формулой (4). Согласно определению умножения многочленов, имеем:

$(f(x)+g(x))\cdot h(x)=d_0+d_1\cdot x+d_2\cdot x^2+\ldots+d_{p+l}\cdot x^{p+l}$, где

$d_k=(a_0+b_0)\cdot c_k+(a_1+b_1)\cdot c_{k-1}+(a_2+b_2)\cdot c_{k-2}+\ldots+(a_k+b_k)\cdot c_0$

Воспользовавшись дистрибутивностью в K, мы можем представить d_k в виде суммы: $d_k'+d_k''$, где

$d_k'=a_0\cdot c_k+a_1\cdot c_{k-1}+a_2\cdot c_{k-2}+\ldots+a_k\cdot c_0$

$d_k''=b_0\cdot c_k+b_1\cdot c_{k-1}+b_2\cdot c_{k-2}+\ldots+b_k\cdot c_0$

Ясно, что d_k' - коэффициент при x^k многочлена $f(x)\cdot h(x)$, а d_k'' - коэффициент при x^k многочлена $g(x)\cdot h(x)$, отсюда следует равенство (7).

Аналогично доказывается, что $h(x)\cdot(f(x)+g(x))=h(x)\cdot f(x)+h(x)\cdot g(x)$.

Свойства 1-5 означают, что многочлены с коэффициентами из кольца *K* сами образуют кольцо относительно определенных операций сложения и умножения. Это кольцо называется кольцом многочленов над *K* и обозначается через *K*[*x*].

В *K*[*x*] определима операция вычитания, обратная операции сложения (как и во всяком кольце).

Кольцо *K*, элементами которого являются многочлены, не содержащие *x*, т.е. выражение (1), в котором $n=0$ – это подкольцо кольца *K*[*x*].

Многочлен вида $a\cdot x^k$ называется одночленом.

Определение. Степенью ненулевого многочлена $f(x)=a_0+a_1\cdot x+a_2\cdot x^2+...+a_n\cdot x^n$ называется наибольшее из таких чисел *k*, что $a_k\neq 0$. Обозначение: $deg(f(x))=n$.

Замечание: $deg(\theta(x))=\infty$.

Всякий многочлен степени $n\geq 0$ может быть записан в виде (1), где $a_n\neq 0$. При этом $a_n\cdot x^n$ называется его старшим членом, а a_n – старшим коэффициентом многочлена.

Определение. Многочлен, старший коэффициент которого равен единице (если в кольце *K* есть единица), называется нормированным (или приведенным).

Из определения суммы и произведения следует, что

$deg(f(x)+g(x))\leq max\{deg(f(x),deg(g(x))\}$,

(8)

$deg(f(x)\cdot g(x))\leq deg(f(x))+deg(g(x))$.

(9)

п. 2. *Кольцо многочленов над областью целостности.*

Пусть K – область целостности, т.е. коммутативное, ассоциативное кольцо с единицей и без делителей нуля. Установим некоторые дополнительные свойства умножения многочленов, которые выполняются при условии, что K – область целостности.

6. *Коммутативность умножения:* $f(x)\cdot g(x)=g(x)\cdot f(x)$

Доказательство. Докажем сначала коммутативность умножения одночленов.

Для любых одночленов $a\cdot x^n$ и $b\cdot x^m$,где a и $b \in K$, выполняются равенства $a\cdot x^n\cdot b\cdot x^m=a\cdot b\cdot x^{n+m}$ и $b\cdot x^m\cdot a\cdot x^n=b\cdot a\cdot x^{n+m}$. Так как в кольце K умножение коммутативно, то $a\cdot b=b\cdot a$ и, значит $a\cdot x^n\cdot b\cdot x^m= b\cdot x^m\cdot a\cdot x^n$.

Пусть теперь $f(x)$ и $g(x)$ – произвольные многочлены.

Многочлен $f(x)\cdot g(x)$ по определению равен сумме всевозможных произведений вида $u\cdot v$, где u – член многочлена $f(x)$, v – член многочлена $g(x)$. Аналогично многочлен $g(x)\cdot f(x)$ равен сумме всевозможных произведений вида $v\cdot u$. А так как умножение одночленов $u\cdot v=v\cdot u$ – коммутативно, то отсюда следует, что для любого $v\in g(x)$, $u\in f(x)$: $f(x)\cdot g(x)= g(x)\cdot f(x)$.

7. *Ассоциативность умножения:* $(f(x)\cdot g(x))\cdot h(x)=f(x)\cdot(g(x)\cdot h(x))$.

Доказательство аналогично доказательству свойства 6.

Достаточно показать, что $(u\cdot v)\cdot w=u\cdot(v\cdot w)$, где u – член многочлена $f(x)$, v – член многочлена $g(x)$, c – член многочлена $h(x)$.

Для любых одночленов $u= a\cdot x^n$, $v= b\cdot x^m$, $w= c\cdot x^p$ имеем:

$(a\cdot x^n\cdot b\cdot x^m)\cdot c\cdot x^p= a\cdot b\cdot x^{n+m}\cdot c\cdot x^p=(a\cdot b)\cdot c\cdot x^{n+m+p}$,

$a\cdot x^n\cdot (b\cdot x^m\cdot c\cdot x^p)=a\cdot x^n\cdot b\cdot c\cdot x^{m+p}=a\cdot (b\cdot c)\cdot x^{n+m+p}$.

Следовательно, так как в кольце K умножение ассоциативно: $(a\cdot b)\cdot c=a\cdot (b\cdot c)$, то $(u\cdot v)\cdot w=u\cdot (v\cdot w)$.

8. *Существование единицы.*

Единицей в $K[x]$ является единица кольца K.

В самом деле, из определения умножения многочленов ясно, что $1\cdot f(x)=f(x)$, для любого $f(x)\in K[x]$. В частности, $1\cdot x^k= x^k$.

9. *Отсутствие делителей нуля.*

Пусть даны $f(x)\neq\theta\ (x)$, $g(x)\neq\theta\ (x)$. Докажем, что $f(x)\cdot g(x)\neq\theta\ (x)$.

Поскольку $f(x)\cdot g(x)=a_0\cdot b_0+(a_0\cdot b_1+a_1\cdot b_0)\cdot x+\ldots+(a_{n-1}\cdot b_m+a_n\cdot b_{m-1})\cdot x^{n+m-1}+a_n\cdot b_m\cdot x^{n+m}$, то коэффициент многочлена $f(x)\cdot g(x)$ при x^{n+m} равен $a_n\cdot b_m$. Так как в кольце K нет делителей нуля, то $a_n\cdot b_m\neq 0$, отсюда следует, что $f(x)\cdot g(x)\neq\theta\ (x)$.

Отсюда следует, также, что $deg(f(x)\cdot g(x))=deg(f(x))+deg(g(x))$ – (10)

уточнение неравенства (9) для случая, когда в K нет делителей нуля.

Таким образом, свойства 6 – 9 означают, что кольцо $K[x]$ является областью целостности.

п. 3. Деление с остатком на двучлен x-x_0. Теорема Безу.

В кольце многочленов деление в обычном смысле слова, как правило, невозможно (например в кольце $K[x]$ многочлен x^2 нельзя разделить на $x+1$, т.е. не существует такого многочлена $g(x)$, что $x^2=g(x)\cdot(x+1)$), однако во многих случаях выполнимо так называемое «деление с остатком».

Существует частный случай, когда делитель является двучленом вида x-x_0.

Теорема 1. Пусть $f(x)$ – многочлен с коэффициентами из кольца K. Для любого $x_0\in K$ многочлен $f(x)$ можно представить в виде: $f(x)=g(x)\cdot(x-x_0)+c$, (11)

где $g(x)\in K[x]$, $c\in K$, при этом $c=f(x_0)$.

Доказательство:

Если $f(x)=a\in K$, то можно взять $g(x)=0$, $c=a$.

Пусть теперь $deg\,f(x)=n>0$.

Расположим многочлен f(x) по убывающим степеням x:

$$f(x)=a_0\cdot x^n+a_1\cdot x^{n-1}+a_2\cdot x^{n-2}+\ldots+a_{n-1}\cdot x+a_n$$

Ясно, что если представление $f(x)$ в виде (11) возможно, то $deg\,g(x)=n-1$. Запишем $g(x)$ с неопределёнными коэффициентами:

$$g(x)=b_0x^{n-1}+b_1x^{n-2}+\ldots+b_{n-2}x+b_{n-1}\ .$$

Подставляя выражения для *f(x)* и *g(x)* в (11), получаем:

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}x + a_n = (b_0x^{n-1} + b_1x^{n-2} + \ldots + b_{n-2}x + b_{n-1})(x - x_0) + c$$

или

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}x + a_n = =$$

$$b_0x^n + (b_1 - b_0x_0)x^{n-1} + (b_2 - b_1x_0)x^{n-2} + \ldots + (b_{n-1} - b_{n-2}x_0)x + (c - b_{n-1}x_0).$$

Откуда в силу определения равенства двух многочленов, получаем:

$$\begin{aligned} &b_0 = a_0, \\ &b_1 = a_1 + x_0b_0, \\ &b_2 = a_2 + x_0b_1, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &b_{n-1} = a_{n-1} + x_0b_{n-2}, \\ &c = a_n + x_0b_{n-1} \end{aligned}$$

(12)

Эти формулы позволяют последовательно находить $b_0, b_1, \ldots, b_{n-1}$ *, c*.

Проведённое рассуждение доказывает, что многочлен *g(x)* и элемент *c*, удовлетворяют соотношению (11).

Для доказательства того, что $c = f(x_0)$, вычислим по (11) значение *f(x)* в точке x_0: $f(x_0) = g(x_0)(x_0 - x_0) + c$. Откуда $f(x_0) = c$.

Определение: Элемент x_0 кольца K называется корнем многочлена $f(x) \in K[x]$, если $f(x_0)=0$.

Следствие (*Теорема Безу):*

Многочлен *f(x)* делится на x-x_0 в кольце $K[x]$ $\Leftrightarrow$ x_0 -его единственный корень.

Доказательство:

В силу доказанного, ясно, что $f(x) \vdots (x-x_0) \Leftrightarrow$, когда в (11) $c=0$, но т.к. $c=f(x_0)$, то условие $c=0$ равносильно тому, что x_0 -корень многочлена *f(x).*

Нахождение многочлена *g(x)* и элемента *c*, удовлетворяющих (11), называется делением с остатком многочлена *f(x)* на двучлен $(x\text{-}x_0)$. При этом *g(x)* называется неполным частным , а *c* – остатком.

Формулы (12) дают практический способ деления с остатком *f(x)* на $(x\text{-}x_0)$. Но вычисления (12) удобно располагать по *схеме Горнера:*

–

	a_0	a_1	a_2	…….	a_{n-1}	a_n
x_0	b_0	b_1	b_2	…….	b_{n-1}	c

Пример 1:

В кольце K[x] разделить с остатком $x^4\text{-}3x^2+x+5$ на $(x\text{-}2)$.

Решение:

$x_0=2.$

Расположим коэффициенты делимого многочлена по строке, а коэффициенты неполного частного и остатка найдём по формулам (12).

	1	0	-3	1	5
2	1	1·2+0=2	2·2-3=1	2·1+1=3	3·2+5=11= c

Ответ: $g(x)=x^3+2x^2+x+3$ *и* $c=11=f(2)$.

Пример2:

Вычислить значение многочлена $f(x)= i\cdot x^3+(1\text{-}2i)\cdot x^2\text{-}2\cdot(1\text{-}i)\cdot x+2$ в точке $x_0=1+i$.

Решение:

	i	1-2i	-2+2i	2
1+i	i	-i	-1+i	0=f(1+i)

Ответ: $f(1+i)=0$.

п.4. Алгебраическое и функциональное равенство многочленов.

Теорема Безу позволяет указать верхнюю границу числа корней многочлена.

Теорем2:

Число корней ненулевого многочлена не превосходит его степени.

Доказательство.

Докажем с помощью индукции по степеням многочлена.

Многочлен нулевой степени вообще не имеет корней. Докажем утверждение теоремы для многочлена $deg=n-1$ и $\forall$ $f(x)$, $deg\, f(x)=n$.

От противного.

Пусть $x_1,x_2,\ldots,x_m$ – корни $f(x)$, причем $m>n$. По Теореме Безу $f(x) \vdots (x-x_1)$, т.е. $f(x)= (x-x_1)\cdot g(x)$, где $deg\, g(x)=n-1$. Элементы $x_1,x_2,\ldots,x_m \in$ K являются корнями многочлена $g(x)$.

В силу доказанного при $i=2,\ldots,m$ имеем:

$f(x_i)= (x_i-x_1)\cdot g(x_i)=0$.

Так как $x_i-x_1 \neq 0$, а кольцо K не имеет делителей нуля, то $g(x_i)=0$.

Таким образом, многочлен $g(x)$ имеет не менее чем $m-1$ корней, что противоречит предположению индукции, поскольку $deg\, g(x)=n-1<m-1$.

Следствие: Многочлен степени не выше n однозначно определяется своими значениями в $n+1$ точках. Иначе говоря, существует не более одного многочлена степени не выше, принимающего в данных точках $x_1,x_2,\ldots,x_{n+1}$ данные значения $y_1,y_2,\ldots,y_{n+1}$.

Теорема 3:

Если K – бесконечно, то равенство функций определяемых двумя многочленами из $K[x]$, влечёт за собой равенство самих многочленов.

Доказательство.

Пусть $f(x), g(x) \in K[x]$ определяют одинаковые функции , т.е. $f(x)=g(x)$ $\forall$ $x\in$ K. Обозначим через n наивысшую из степеней многочленов $f(x), g(x)$.

Так как K - бесконечно, то в нём найдутся $n+1$ различных элементов $x_1, x_2, ..., x_{n+1}$. Согласно предположению, $f(x)$ и $g(x)$ принимают одинаковые значения в каждой из точек $x_1, x_2, ..., x_{n+1}$. Отсюда и из следствия т.2 можно сделать вывод, что $f(x)=g(x)$.

Замечание.

Для конечного кольца K утверждение т.3 в общем случае неверно. Но при некотором дополнительном предположении утверждение т.3 оказывается возможным.

Например,

Теорема 4.

Если многочлены $f(x), g(x) \in Z_p[x]$, имеющие степень не выше чем $p-1$, эквивалентны (т.е. они определяют одну и ту же функцию над Z_p, $f(x) \sim g(x)$), то они равны.

§2. Корни многочлена.

Разработка методов решения алгебраических уравнений $f(x)=0$ породила развитие многих разделов алгебры, в том числе и алгебры многочленов, и теории групп.

Рассмотрим только многочлены над полем, т.е. $f(x) \in P[x]$.

О точном числе корней многочлена и, в частности, о существовании хотя бы одного корня однозначно говорить нельзя.

Пусть $f(x) \in P[x]$, и x_0 - его корень, т.е. $f(x_0)=0$. Согласно теореме Безу $f(x) \vdots (x-x_0)$.

Определение. Кратностью корня $x_0 \in f(x)$ называется наибольшее целое число r такое, что $f(x) \vdots (x-x_0)^r$. Если $r=1$, то x_0 - простой корень $f(x)$.

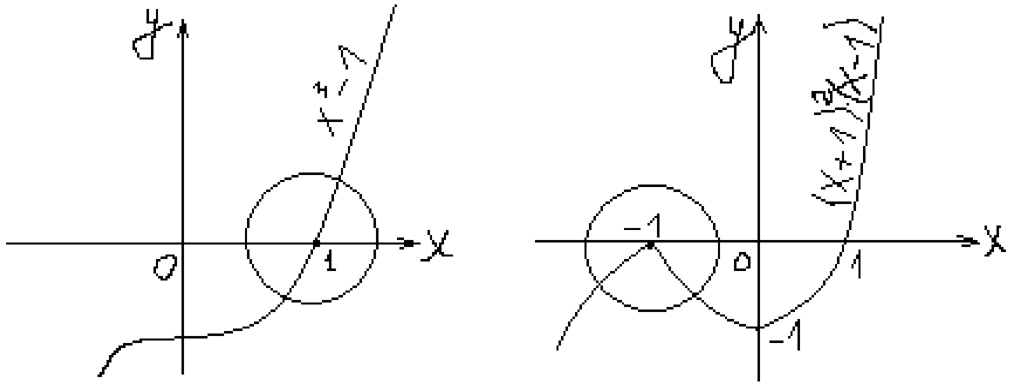
Утверждение. Элемент $x_0 \in P$ - корень кратности r многочлена $f(x) \in P[x]$ <=>, когда $f(x)= (x-x_0)^r \cdot g(x)$, где $g(x) \in P[x]$, причем $g(x_0) \neq 0$.

Например, $f(x)=(x-2)^2 \cdot (x^5-10x+1) \in R[x]$ имеет число 2 корнем кратности 2, поскольку $g(x)$ в точке $2 \neq \theta(x)$.

Для любого $f(x) \in R[x]$ понятие простого и кратного корня имеют геометрический смысл.

Если $x_0 \in f(x)$ - простой корень, то график $f(x)$ пересекает ось абсцисс.

Если x_0 - кратный корень $f(x)$, то график $f(x)$ при $x=x_0$ касается оси абсцисс, причем порядок касания равен $(r1)$.



Теорема1.

Сумма кратностей всех корней ненулевого многочлена $f(x)$ не превосходит его степени, причем равенство имеет место <=>, когда $f(x)$ разлагается на линейные множители.

Доказательство основано на следующих двух леммах:

Лемма1.

Всякий ненулевой многочлен $f(x) \in P(x)$ может быть представлен в виде:

$$f(x)= (x-x_1)^{r1}\cdot(x-x_2)^{r2}\cdot\ldots\cdot(x-x_s)^{rs}\cdot g(x), \quad (1)$$

где $x_1,\ldots, x_s$- различные элементы поля P, $g(x)$ - многочлен, не имеющий корней.

Лемма2.

Если многочлен $f(x)$ представлен в виде (1), то $x_1, x_2, \ldots, x_s$ - это все его корни, причем кратность корня x_i равна r_i.

Например: $f(x)=(x+1)^3\cdot(x-2)\cdot(5\cdot x^4+1) \in R[x]$ имеет (-1) - трехкратный корень, 2- простой.

Доказательство Теоремы1.

Представим многочлен $f(x)$ в виде (1). Тогда

$degf(x)=r_1+r_2+\ldots+r_s+deg\ g(x)\geq r_1+r_2+\ldots+r_s$

(2),

а по Лемме2 $r_1+r_2+\ldots+r_s$ и есть сумма кратностей всех корней многочлена f(x). Тем самым доказано первое утверждение Теоремы.

Если в (2) имеет место равенство, то $deg\ g(x)=0$, т.е. $g(x)=a\neq\theta\ \epsilon\ P$ и

$f(x)=a\ (x-x_1)^{r1}(x-x_2)^{r2}\ldots(x-x_s)^s$

(3),

т.е. получаем разложение многочлена $f(x)$ на линейные множители.

Формулы Виетта.

Пусть $f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n$, причем $a_0\neq 0$, и пусть $x_{1,}x_{2,}\ldots x_n$ - корни многочлена, каждый из которых повторен столько раз, какова его кратность.

Тогда коэффициент a_r $(r=1,2,\ldots n)$ равен произведению $(-1)^ra_0$ на сумму всевозможных произведений по r элементов из $x_{1,}x_{2,}\ldots x_n$, т.е.

$a_1=-a_0(x_1+x_2+\ldots+x_n)$,

$a_2=a_0(x_1x_2+x_1x_3+\ldots+x_{n-1}x_n)$,

(4)

……………………………

$a_n=(-1)^na_0x_1x_2\ldots x_{n.}$

- формулы Виета.

Выражение для a_r содержит C_n^r слагаемых.

Алгебраические сравнения по простому модулю.

Пусть р- простое число.

Определение: Алгебраическим сравнением по модулю р называется сравнение вида $a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n\equiv 0\ (mod\ p)$,

(5)

где a_0, $a_{1,}\ldots$, a_{n-1}, a_n - целые числа, x- неизвестное, допустимые значения которого также целые числа.

Следствия:

1) если a_i, $i=0,\dots n$ из (5) заменить любыми целыми числами, сравнимыми с ними по модулю р, то полученное сравнение будет эквивалентно формуле (5).

2) если x_0 - решение сравнения (5), то и любое целое число сравнимое с x_0 по модулю p, будет решением этого сравнение.

Определение: Классом решений сравнения (5) называется совокупность его решений, составляющих один класс вычетов по модулю p.

Такой класс соответствует одному решению уравнения:

$$\overline{a}_0 x^n + \overline{a}_1 x^{n-1} + \dots + \overline{a}_{n-1} x + \overline{a}_n = \overline{0}$$

(6)

где $\overline{a}$ - класс вычетов по модулю p, содержащий a.

Замечание: deg уравнения (6) равна *deg* сравнения (5).

Теорема2.

Число классов решений нетривиального алгебраического сравнения по простому модулю не превосходит его степени.

Отсюда можно любое алгебраическое сравнение по модулю p можно заменить эквивалентным ему сравнением степени не выше $p-1$. Например, сравнение $x^7-x^5+x^4-x^3-x-1\equiv 0 \pmod 3$ эквивалентно сравнению $x^2+x+1\equiv 0 \pmod 3$.

Построение поля комплексных чисел

Известно, что уравнение $x^2+1=0$ не имеет корней в поле действительных чисел ***R***. Расширим поле ***R*** до такого поля, в котором это уравнение разрешимо.

Рассмотрим множество упорядоченных пар действительных чисел

$$\boldsymbol{C} = \{(a,b) / a,b \in R\}.$$

Будем считать две пары (a,b) и (c,d) равными, если $a=c$ и $b=d$.

Введем на множестве ***C*** операции сложения + и умножения $\cdot$ так, чтобы они были бинарными алгебраическими операциями

$$(a,b)+(c,d)=(a+c,b+d)\in \boldsymbol{C},$$

$$(a,b)\cdot(c,d)=(ac-bd,ad+bc)\in \boldsymbol{C}.$$

Покажем обратимость сложения и умножения. Для этого необходимо рассмотреть уравнения

$$(a,b)+(x,y)=(c,d)\text{,}\ (a+x,b+y)=(c,d)$$

и показать, что они имеют решения во множестве ***C***.

Из уравнения $(a,b)+(x,y)=(c,d)$ следует, что $a+x=c$ и $b+y=d$, а данные уравнения в поле ***R*** имеют единственные решения $x=c-a\in \boldsymbol{R}$ и $y=d-b\in \boldsymbol{R}$. Значит, $(x,y)=(c-a,d-b)\in \boldsymbol{C}$.

Из уравнения $(a,b)\cdot(x,y)=(c,d)$ следует, что $(ax-by,ay+bx)=(c,d)$, а значит, $ax-by=c$ и $ay+bx=d$. Решая систему

$$\begin{cases} ax-by=c \\ bx+ay=d \end{cases}$$

по формулам Крамера, получим

$$x=\frac{\begin{vmatrix} c & -b \\ d & a \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & -b \\ b & a \end{vmatrix}}=\frac{ac+bd}{a^2+b^2}\in R \quad \text{и} \quad y=\frac{\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & -b \\ b & a \end{vmatrix}}=\frac{ad-cb}{a^2+b^2}\in R \quad \text{при } a,b\neq 0,$$

$$(x,y)=\left(\frac{ac+bd}{a^2+b^2};\frac{ad-cb}{a^2+b^2}\right)\in C.$$

Убедившись в обратимости операций + и ·, можно сделать вывод о замкнутости множества ***C*** относительно основных арифметических операций. Следовательно, множество ***C*** является числовым полем. Элементы этого поля можно изобразить в виде точек декартовой плоскости с координатами (*a,b*).

Рассмотрим подмножество $\bar{R}=\{(a,0)/a\in R\}$ с заданными операциями + и ·:

$$(a,0)+(b,0)=(a+b,0),$$

$$(a,0)-(b,0)=(a-b,0),$$

$$(a,0)\cdot(b,0)=(ab,0),$$

$$\frac{(a,0)}{(b,0)}=(\frac{a}{b},0).$$

Данное подмножество само является числовым полем.

Построим отображение φ: $\bar{R}\to R$ по правилу $\varphi(a,0)=a$. Оно является взаимно – однозначным (если $(a,0)=(b,0),$ то $\varphi(a,0)=\varphi(b,0)$) и сохраняющим операции + и ·

$$(\varphi(a,0)+(b,0)=\varphi(a+b,0)=a+b=\varphi(a,0)+\varphi(b,0) \text{ и}$$

$$\varphi((a,0)(b,0))=\varphi(ab,0)=a\cdot b=\varphi(a,0)\cdot\varphi(b,0)).$$

Следовательно, данное отображение φ является изоморфным и можно отождествить множества R и $\bar{R}$, т.е. $(a,0)=a$. Тогда любую пару (a,b) из множества $\boldsymbol{C}$ представим в виде суммы пар

$$(a,b)=(a,0)+(0,b)=(a,0)+(b,0)(0,1)=a+bi,$$

где пара (0,1)=i не является элементом множества $\bar{R}$, значит, его нельзя отождествить ни с одним из действительных чисел. Это число нового качества, для которого верно равенство

$$(0,1)\cdot(0,1)=i\cdot i=(0\cdot0-1\cdot1,0\cdot1+1\cdot0)=(-1,0)=-1.$$

Назовем число i мнимой единицей, а числа вида $a+bi$ – алгебраической формой комплексного числа.

Таким образом, рассмотренное множество $\boldsymbol{C}=\{(a,b)/a,b\in R\}==\{a+bi/a,b\in R\}$ – множество комплексных чисел содержит число i, являющееся корнем квадратного уравнения $x^2+1=0$.

Действия над комплексными числами в алгебраической форме

Пусть $a+bi$ - алгебраическая форма комплексного числа, где a – действительная часть $a=\operatorname{Re}z$, а bi – мнимая часть комплексного числа $b=\operatorname{Im}z$.

Два комплексных числа $a+bi$ и $c+di$ равны, если равны их действительные и мнимые части, т.е. $a=b$ и $c=d$.

При сложении комплексных чисел складывают отдельно их действительные и мнимые части

$$(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i.$$

Аналогичное правило существует и для вычитания

$$(a+bi)-(c+di)=(a-c)+(b-d)i.$$

Для умножения комплексных чисел в алгебраической форме необходимо выполнить следующие действия

$$(a+bi)(c+di)=ac+adi+cbi+bdi^2=(ac-bd)+(ad+cb)i.$$

Число, сопряженное числу $z=a+bi$ – это число $\bar{z}=a-bi$, для которого верны соотношения $z+\bar{z}=2a$ и $z\bar{z}=(a+bi)(a-bi)=a^2-(bi)^2=a^2+b^2$.

Пример. Доказать, что $\overline{z_1+z_2}=\overline{z_1}+\overline{z_2}$.

Решение. Пусть $z_1=x_1+y_1i$ и $z_2=x_2+y_2i$ – данные комплексные числа, а

$\overline{z_1}=x_1-y_1i$ и $\overline{z_2}=x_2-y_2i$ – им сопряженные комплексные числа. Тогда

$$\overline{z_1+z_2}=\overline{(x_1+y_1i)+(x_2+y_2i)}=\overline{(x_1+x_2)+(y_1+y_2)i}=(x_1+x_2)-(y_1+y_2)i=$$
$$=(x_1-y_1i)+(x_2-y_2i)=\overline{z_1}+\overline{z_2}.$$

При делении комплексных чисел числитель и знаменатель данной дроби умножают на число, сопряженное знаменателю:

$$\frac{a+bi}{c+di}=\frac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)}=\frac{(ac+bd)+(bc-ad)i}{c^2+d^2}=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\frac{bc-ad}{c^2+d^2}i.$$

Извлечение квадратного корня из алгебраической формы комплексного числа

$$\sqrt{a+bi}=x+yi$$

$$a+bi=(x+yi)^2$$

$a+bi=x^2+2xyi+(yi)^2=(x^2-y^2)+2xyi$, отсюда справедлива система уравнений:

$$\begin{cases} x^2-y^2=a \\ 2xy=b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x^2-y^2)^2=a^2 \\ 4x^2y^2=b^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2-y^2=a \\ x^4-2x^2y^2+y^4+4x^2y^2=a^2+b^2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x^2-y^2=a \\ x^4+2x^2y^2+y^4=a^2+b^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2-y^2=a \\ (x^2+y^2)^2=a^2+b^2 \end{cases} \Rightarrow \quad (\text{т.к. } x^2+y^2>0)$$

$$\begin{cases} x^2-y^2=a \\ x^2+y^2=\sqrt{a^2+b^2} \end{cases}.$$

При сложении уравнений последней системы получаем

$$2x^2=a+\sqrt{a^2+b^2},\quad x_{1,2}=\pm\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}},$$

а при вычитании уравнений последней системы получаем

$$2y^2=-a+\sqrt{a^2+b^2},\quad y_{1,2}=\pm\sqrt{\frac{-a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}}.$$

Так как $2xy=b$, то при $b>0$ x и y имеют одинаковые знаки, а при $b<0$ x и y имеют различные знаки.

Пример. Вычислить $\sqrt{3-4i}$.

Решение. Так как a=3, а b=-4, то $x_{1,2}=\pm\sqrt{\frac{3+\sqrt{3^2+(-4)^2}}{2}}=\pm 2$,

$$y_{1,2} = \mp\sqrt{\frac{-3+\sqrt{3^2+(-4)^2}}{2}} = \mp 1, \quad \sqrt{3-4i} = \pm(2-i).$$

Пример. Решить уравнение

$$(1+2i)x+(3-5i)y = 1-3i,$$

считая x и y действительными числами.

Решение. Приведем левую часть уравнения к виду $a+bi,$ где $a\in R,\ b\in R$: $(x+3y)+(2x-5y)i = 1-3i.$ Полученное уравнение равносильно данному. Так как равенство комплексных чисел означает равенство действительных и мнимых частей, то имеем систему уравнений

$$\begin{cases} x+3y = 1, \\ 2x-5y = -3. \end{cases}$$

Решая эту систему, получим

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -3 & -5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -5 \end{vmatrix}} = -\frac{4}{11}, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -5 \end{vmatrix}} = \frac{5}{11}.$$

Пример. Вычислить $i^{44},\ i^{135},\ i^{237}.$

Решение. Находим, что $i^0 = 1;\ i^1 = i,\ i^2 = -1;\ i^3 = -i,\ i^4 = 1.$ Из этих равенств непосредственно следует, что $i^{4n} = 1,\ i^{4n+1} = i,\ i^{4n+2} = -1,\ i^{4n+3} = -i.$ Значит, $i^{44} = i^{4\cdot 11} = (i^4)^{11} = 1^{11} = 1,\ i^{135} = i^{4\cdot 33+3} = 1i^3 = -i,\ i^{237} = i^{4\cdot 59+1} = i.$

Пример. Вычислить $\frac{1+4i}{-3-i}(-5i)+2$.

Решение.

$$\frac{1+4i}{-3-i}(-5i)+2=\frac{(1+4i)(-3+i)}{(-3-i)(-3+i)}(-5i)+2=\frac{-3+i-12i+4i^2}{(-3)^2-(i)^2}(-5i)+2=$$

$$=\frac{(-3-4)-11i}{9+1}(-5i)+2=\frac{-7-11i}{10}(-5i)+2=\frac{7+11i}{2}i+2=\frac{-11+7i+4}{2}=\frac{-7+7i}{2}=$$

$$=-\frac{7}{2}+\frac{7}{2}i=-3{,}5+3{,}5i$$

Пример. Решить уравнение $z^2-z+5=0.$

Решение. Найдем дискриминант уравнения $z^2-z+5=0$

$$D=(-1)^2-4\cdot 1\cdot 5=-19$$

$$z_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{19}i}{2}$$

Пример. Решить уравнение $z^2+\bar{z}=0.$

Решение. $z^2+\bar{z}=0$, $(x+yi)^2+x-yi=0$, $x^2+2xyi+(yi)^2+x-yi=0$, $x^2+2xyi-y^2+x-yi=0$, $(x^2-y^2+x)+(2xy-y)i=0$,

$(x^2-y^2+x)+(2xy-y)i=0+0i$

$$\begin{cases}x^2-y^2+x=0\\ 2xy-y=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}(2x-1)y=0\\ x^2-y^2+x=0\end{cases}\Rightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}2x-1=0\\ x^2-y^2+x=0\end{cases}\\ \begin{cases}y=0\\ x^2-y^2+x=0\end{cases}\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}2x=1\\ x^2-y^2+x=0\end{cases}\\ \begin{cases}y=0\\ x^2+x=0\end{cases}\end{array}\right.\Rightarrow$$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=\frac{1}{2}\\ \frac{1}{4}-y^2+\frac{1}{2}=0\end{cases}\\ \begin{cases}y=0\\ x(x+1)=0\end{cases}\end{array}\right.\Rightarrow\begin{cases}x=\frac{1}{2}\\ y^2=\frac{3}{4}\end{cases}\text{ или }\begin{cases}y=0\\ x=0\end{cases}\text{ или }\begin{cases}y=0\\ x=-1\end{cases}.$$

Следовательно, решения данного уравнения имеют вид $z_{1,2}=\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i$, $z_3=0,\ z_4=-1$.

Упражнения

1. Доказать свойства операции комплексного сопряжения:

а) $\overline{\overline{z}} = z$; б) $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1}\ \overline{z_2}$; в) $\overline{z_1 - z_2} = \overline{z_1} - \overline{z_2}$; г) $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$.

2. Найти все комплексные числа z, для которых $z^n = \overline{z}$.

Тригонометрическая форма комплексного числа

Любое комплексное число $z = a + bi$ можно изобразить точкой $M\ (a,b)$ на плоскости OXY.

Плоскость, на которой изображаются комплексные числа, называются комплексной плоскостью. Ось абсцисс называют действительной осью, а ось ординат – мнимой.

Комплексное число $z = a + bi$ можно изобразить и с помощью радиус–вектора $\vec{OM} = (a,b)$. Длина радиус–вектора, изображающего комплексное число z, называется модулем этого числа, обозначается $|z|$ или ρ и однозначно определяется по формуле $|z| = \rho = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Величина угла φ между положительным направлением действительной оси и вектором $\vec{OM}$, изображающим комплексное число, называется аргументом этого числа и обозначается $\arg z$.

Аргумент φ определяется из формул $\cos\varphi = \frac{a}{\rho}$, $\sin\varphi = \frac{b}{\rho}$, где $\rho = \sqrt{a^2 + b^2}$. И так как аргумент комплексного числа $z \neq 0$ величина многозначная: $\arg z = \varphi + 2\pi k,\ k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots,$ то в качестве аргумента можно брать величину из промежутка $[0; 2\pi)$.

Запись числа z в виде $z = a + bi = \rho\cos\varphi + \rho\sin\varphi\cdot i = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ называется тригонометрической формой комплексного числа.

А запись числа z в виде $z = |z|e^{i\varphi}$ называется показательной формой комплексного числа.

Пример. Представить комплексные числа в тригонометрической форме

а) $\sqrt{3} - i$; б) $2\cos\dfrac{\pi}{3} - 2i\sin\dfrac{\pi}{3}$; в) $\sin\varphi + i\cos\varphi$; д) $1 + \cos 44^o + i\sin 44^o$.

Решение. а) Для представления числа $\sqrt{3} - i$ в тригонометрической форме найдем его модуль $\rho = \sqrt{a^2 + b^2}$ и аргумент φ

$$\rho = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + (-1)^2} = \sqrt{4} = 2;$$

$$\cos\varphi = \frac{a}{\rho} = \frac{\sqrt{3}}{2},\quad \sin\varphi = \frac{b}{\rho} = -\frac{1}{2},\ \text{следовательно,}\quad \varphi = -\frac{\pi}{6}.$$

Таким образом, $\sqrt{3} - i = 2\left(\cos\left(-\dfrac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)\right)$.

б) $2\cos\dfrac{\pi}{3} - 2i\sin\dfrac{\pi}{3} = 2\left(\cos\dfrac{\pi}{3} - i\sin\dfrac{\pi}{3}\right) = 2\left(\cos\left(-\dfrac{\pi}{3}\right) + \sin\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)\right)$;

в) $\sin\varphi + i\cos\varphi = \cos\left(\dfrac{\pi}{2} - \varphi\right) + i\sin\left(\dfrac{\pi}{2} - \varphi\right)$;

г)

$$1 + \cos 44^o + i\sin 44^o = 2\cos^2 22^o + i2\sin 22^o\cos 22^o = 2\cos 22^o(\cos 22^o + i\sin 22^o).$$

Действия над комплексными числами в тригонометрической форме

Даны два комплексных числа в тригонометрической форме $z_1 = \rho_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$, $z_2 = \rho_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$

$$z_1 z_2 = \rho_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)\rho_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) =$$
$$= \rho_1\rho_2[(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2) + i(\sin\varphi_1\cos\varphi_2 + \cos\varphi_1\sin\varphi_2)] =$$
$$= \rho_1\rho_2[\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)]$$

$$|z_1 z_2| = \rho_1\rho_2 = |z_1||z_2|, \quad \arg z_1 z_2 = \varphi_1 + \varphi_2 = \arg z_1 + \arg z_2$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)}{\rho_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)} = \frac{\rho_1}{\rho_2}\cdot\frac{(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)(\cos\varphi_2 - i\sin\varphi_2)}{(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)(\cos\varphi_2 - i\sin\varphi_2)} =$$
$$= \frac{\rho_1}{\rho_2}\cdot\frac{(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 + \sin\varphi_1\sin\varphi_2) + i(\sin\varphi_1\cos\varphi_2 - \cos\varphi_1\sin\varphi_2)}{(\cos\varphi_2)^2 - (i\sin\varphi_2)^2} =$$
$$= \frac{\rho_1}{\rho_2}\cdot\frac{\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)}{\cos^2\varphi_2 + \sin^2\varphi_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2}\cdot\frac{\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)}{1} =$$
$$= \frac{\rho_1}{\rho_2}\cdot[\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)]$$

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|}, \quad \arg\frac{z_1}{z_2} = \varphi_1 - \varphi_2 = \arg z_1 - \arg z_2$$

$z^n = [\rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)]^n = \rho^n[\cos n\varphi + i\sin n\varphi]$ – формула Муавра для возведения комплексных чисел в натуральную степень.

Эта формула позволяет выразить $\cos n\varphi$ и $\sin n\varphi$ через $\cos\varphi$ и $\sin\varphi$. Для этого нужно вычислить $[\rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)]^n$ другим способом, пользуясь формулой бинома Ньютона. В результате получим

$$\cos n\varphi = \cos^n\varphi - C_n^2\cos^{n-2}\varphi\sin^2\varphi + C_n^4\cos^{n-4}\varphi\sin^4\varphi - \ldots$$

И

$$\sin n\varphi = n\cos^{n-1}\varphi\sin n\varphi - C_n^3\cos^{n-3}\varphi\sin^3\varphi + C_n^5\cos^{n-5}\varphi\sin^5\varphi - \ldots$$

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{\rho(\cos\varphi + i\sin\varphi} = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

$$\rho(\cos\varphi + i\sin\varphi) = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta)$$

$$\rho = r^n$$

$$\varphi + 2\pi k = n\theta \quad \theta = \frac{\varphi + 2\pi k}{n}, \quad k = 0,1,\ldots,n-1.$$

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{\rho(\cos\varphi + i\sin\varphi} = \sqrt[n]{\rho}\,(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}).$$

Пример. Вычислить $\left(\frac{-1-i}{1-i\sqrt{3}}\right)^{18}$.

Решение. Представим число $-1-i$ в тригонометрической форме

$$\rho = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{2} \quad \cos\varphi = \frac{a}{\rho} = -\frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \sin\varphi = \frac{b}{\rho} = -\frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \varphi = \frac{5\pi}{4}.$$

$$-1-i = \sqrt{2}(cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}).$$

$$1-i\sqrt{3}$$

$$\rho = \sqrt{1^2 + \sqrt{3}} = 2 \quad \cos\varphi = \frac{a}{\rho} = \frac{1}{2}, \quad \sin\varphi = \frac{b}{\rho} = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \varphi = -\frac{\pi}{3}.$$

$$1-i\sqrt{3} = 2(cos(-\frac{\pi}{3}) + i\sin(-\frac{\pi}{3}))$$

Пример. Найти $\sqrt[3]{1}$.

Решение. Представим число, стоящее под корнем в алгебраической форме

$$\sqrt[3]{1} = \sqrt[3]{1+0i},$$

а затем в тригонометрической форме

$$\rho = \sqrt{1^2 + 0^2} = 1; \quad \cos\varphi = \frac{1}{1}, \quad \sin\varphi = \frac{0}{1},$$

следовательно, $\varphi = 0$ и $\sqrt[3]{1} = \sqrt[3]{1+0i} = \sqrt[3]{1(\cos 0 + i\sin 0)}$.

Используя формулу для извлечения корня n–степени из тригонометрической формы комплексного числа, имеем

$$\sqrt[3]{1} = \sqrt[3]{1+0i} = \sqrt[3]{1(\cos 0 + i\sin 0)} = \sqrt[3]{1}(\cos\frac{0+2\pi k}{3} + i\sin\frac{0+2\pi k}{3}), \text{где } k = 0,\ 1,\ 2.$$

При k=0 $\sqrt[3]{1}=\sqrt[3]{1}(\cos\frac{0+2\pi 0}{3}+i\sin\frac{0+2\pi 0}{3})=\cos 0+i\sin 0=1$.

При k=1 $\sqrt[3]{1}=\sqrt[3]{1}(\cos\frac{0+2\pi}{3}+i\sin\frac{0+2\pi}{3})=cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

При k=2 $\sqrt[3]{1}=\sqrt[3]{1}(\cos\frac{0+4\pi}{3}+i\sin\frac{0+4\pi}{3})=cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}=-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Корни n–степени из 1, имеющие вид $z_k=\cos\frac{2\pi k}{n}+i\sin\frac{2\pi k}{n},\ k=0,1,...,n-1$, являются вершинами правильного n-угольника, вписанного в окружность радиуса 1 с центром в начале координат, причем одной из вершин этого многоугольника является 1.

Совокупность T_n всех корней n – ой степени из 1 является подгруппой мультипликативной группы комплексных чисел. В частности, эта группа T_n циклическая с образующим элементом $z_1=\cos\frac{2\pi}{n}+i\sin\frac{2\pi}{n}$, называемым первообразным корнем n – ой степени из 1.

ТЕОРЕМА О СУЩЕСТВОВАНИИ КОРНЯ В ПОЛЕ КОМПЛЕКСНЫХ ЧИСЕЛ

Теорема (основная теорема алгебры). Всякое алгебраическое уравнение положительной степени с числовыми коэффициентами имеет корень в поле комплексных чисел.

Данная теорема впервые была доказана Гауссом в 1799 году.

Существует несколько способов доказательства этой теоремы. Рассмотрим доказательство, основанное на применении леммы о минимуме функции и леммы Даламбера.

Рассмотрим нормированный многочлен $f(x)=x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+...+a_n$ степени n≥0 с комплексными коэффициентами и уравнение $f(x)=0$.

Лемма 1. Существует такое положительное число A, что при всех $x_0 \in$ **C**, удовлетворяющих условию $|x_0| > A$, выполняется неравенство $|f(x_0)| > |f(0)|$.

Доказательство. Для всякого комплексного числа x_0 имеем:

$$f(x_0) = x_0{}^n + a_1 x_0{}^{n-1} + a_2 x_0{}^{n-2} + \dots a_{n-1}x_0 + a_n = x_0^n \left(1 + \frac{a_1}{x_0} + \frac{a_2}{x_0^2} + \dots + \frac{a_n}{x_0^n}\right),$$

так что

$$|\ f(x_0)\ | = |x_0^n| \left|1 + \frac{a_1}{x_0} + \dots + \frac{a_n}{x_0^n}\right| \geq |x_0^n| \left(1 - \left|\frac{a_1}{x_0} + \dots + \frac{a_n}{x_0^n}\right|\right) \geq |x_0|^n \left(1 - \left|\frac{a_1}{x_0}\right| - \dots - \left|\frac{a_n}{x_0^n}\right|\right) =$$

$$= |x_0|^n \left(1 - \frac{|a_1|}{|x_0|} - \dots - \frac{|a_n|}{|x_0^n\ |}\right).$$

Рассмотрим функцию $\varphi(t) = t^n \left(1 - \frac{|a_1|}{t} - \frac{|a_2|}{t^2} - \dots - \frac{|a_n|}{t^n}\right)$ действительного переменного t. Очевидно, что $\lim\limits_{t \to +\infty} \varphi(t) = +\infty$. Следовательно, для любого C существует такое $A>0$, что $\varphi(t) > C$ при всех $t>A$. В частности, можно взять $C = |f(0)| = |a_n|$. Соответствующее A будет удовлетворять условию леммы. В самом деле, при $|x_0| > A$ имеем:

$$|f(x_0)| \geq \varphi(|x_0|) > C = |f(0)|.$$

Лемма доказана.

Лемма 2 (лемма Даламбера). Если многочлен $f(x)$ не обращается в нуль в точке $x_0 \in C$, то для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $u \in C$, что $|u| < \varepsilon$ и $|f(x_0 + u)| < |f(x_0)|$.

Доказательство. Сделаем замену $x = x_0 + y$, где y – новая переменная и представим многочлен $f(x)$ в виде многочлена от y:

$$f(x) = (x_0 + y)^n + a_1(x_0 + y)^{n-1} + \dots + a_{n-1}(x_0 + y) + a_n = c_0 + c_1 y + \dots + c_{n-1}y^{n-1} + c_n y^n. \qquad (1)$$

Так как $y = x - x_0$, то при подстановке в это равенство $x = x_0$ получаем $f(x_0) = c_0$. По условию $f(x_0) \neq 0$.Следовательно, $c_0 \neq 0$. Кроме того, $c_n = 1 \neq 0$, поскольку член y^n, появляется только при раскрытии скобок в выражении $(x_0 + y)^n$. Пусть k – наименьшее положительное число такое, что $c_k \neq 0$. Тогда

$$f(x) = c_0 + c_k y^k + c_{k+1} y^{k+1} + \ldots + c_n y^n \ (c_0 \neq 0,\ c_k \neq 0). \tag{2}$$

Идея доказательства леммы Даламбера заключается в том, что поведение функции $f(x)$ в малой окрестности точки x_0 в основном определяется первыми двумя членами разложения (2). Если бы остальных членов разложения не было, то можно было бы рассуждать так. Обозначим через y_0 какое – либо решение уравнения $c_0 + c_k y^k = 0$, т.е. одно из значений корня k-ой степени из $-\frac{c_0}{c_k}$.

Пусть t – действительное число, лежащее в интервале (0;1). Тогда

$$f(x_0 + ty_0) = c_0 + c_k t^k y_0^k = c_0(1 - t^k),$$

откуда видно, что

$$|f(x_0 + ty_0)| < |c_0|.$$

Выбирая t достаточно малым, можно добиться того, чтобы $|ty_0| < \varepsilon$ и тогда комплексное число $u = ty_0$ будет удовлетворять требованиям леммы. В общем случае доказательство будет отличаться тем, что оценивается модуль суммы остальных членов разложения (2).

Доказательство основной теоремы алгебры. Пусть число A − число, определенное по лемме 1. Рассмотрим на комплексной плоскости круг K радиуса A с центром в начале координат. По лемме вне круга K многочлен $f(x)$ принимает значения по модулю большие, чем $f(0)$.

Рассмотрим функцию $\psi(u;v) = |f(u + iv)|$ двух действительных переменных u и v. Покажем, что она непрерывна на всей плоскости. Пусть $a_k = b_k + ic_k$, где $b_k,\ c_k \in R$; тогда $f(u+iv) = (u+iv)^n + (b_1 + ic_i)(u+iv)^{n-1} + \ldots + (b_n + ic_n) = \psi_1(u,v) + i\psi_2(u,v)$, где $\psi_1(u,v)$ и $\psi_2(u,v)$ – некоторые многочлены с действительными коэффициентами. Очевидно, что $\psi(u,v) = \sqrt{\psi_1^2(u,v) + \psi_2^2(u,v)}$. Так как многочлены $\psi_1(u,v)$ и $\psi_2(u,v)$ – непрерывные функции, то и функция $\psi(u,v)$ непрерывна. Область определения функции $\psi(u,v)$, т.е. плоскость переменных u и v можно отождествить с комплексной плоскостью.

Из курса анализа известно, что всякая функция двух действительных переменных, определенная и непрерывная во всех точках замкнутого ограниченного множества достигает минимума в некоторой точке этого множества. Применяя эту теорему к функции $\psi(u,v)$ в круге *K*, можно заключить, что существует точка $x_0 = u_0 + iv_0$ этого круга, в которой функция $\psi(u,v)$ достигает минимума. Это означает, что $|f(x_0)| \le |f(x_1)|$ для всех $x_1 \in$ *K*. В частности, $|f(x_0)| \le |f(0)|$, так как $0 \in K$. Согласно построения круга *K*, значение многочлена $f(x)$ вне этого круга по модулю больше, чем $f(0)$, и тем более, чем $f(x_0)$. Следовательно, неравенство $|f(x_0)| \le |f(x_1)|$ выполняется для всех $x_1 \in$ ***C***.

Смысл же леммы Даламбера заключается в следующем: на комплексной плоскости найдутся точки, в которых значение многочлена $f(x)$ по модулю меньше, чем $f(x_0)$. Поэтому если $|f(x)|$ достигает минимума в какой-то точке комплексной плоскости, то этот минимум равен нулю.

С другой стороны, выше было доказано, что $|f(x)|$ достигает минимума в некоторой точке x_0. По лемме Даламбера заключаем, что $|f(x_0)| = 0$ и значит, $f(x_0) = 0$, т.е. x_0 – корень уравнения $f(x) = 0$.

Следствие. Всякое алгебраическое уравнение степени ≥1 с числовыми коэффициентами имеет в поле комплексных чисел ***C*** ровно n корней (с учетом кратностей).

УРАВНЕНИЯ 3 СТЕПЕНИ

Если дано кубическое уравнение с любыми комплексными коэффициентами

$$y^3 + a_1 y^2 + a_2 y + a_3 = 0,$$

то с помощью замены $y - \frac{a_1}{3} = x$ можно добиться того, чтобы оно не содержало слагаемое второй степени.

Рассмотрим полученное неполное кубическое уравнение с произвольными комплексными коэффициентами

$$x^2 + px + q = 0.$$

Это уравнение по основной теореме алгебры обладает тремя комплексными корнями. Пусть x_0 – один из этих корней имеет вид $x_0 = u + v$, тогда левая часть уравнения примет вид

$$(u+v)^3 + p(u+v) + q = u^3 + v^3 + (3uv + p)(u+v) + q.$$

Отсюда следует, что u и v являются решениями системы уравнений

$$\begin{cases} u^3 + v^3 + q = 0 \\ 3uv + p = 0 \end{cases}.$$

Для решения этой системы представим второе уравнение в виде $u^3 v^3 = -\frac{p^3}{27}$, тогда система примет вид $\begin{cases} u^3 + v^3 = -q \\ u^3 v^3 = -\frac{p^3}{27} \end{cases}$.

Следуя теореме Виета выражения u^3 и v^3 можно рассматривать как корни некоторого квадратного уравнения

$$z^2 + qz - \frac{p^3}{27} = 0,$$

дискриминант которого равен $D = q^2 - 4\left(-\frac{p^3}{27}\right) = q^2 + \frac{4p^3}{27}$.

Тогда решения квадратного уравнения имеют вид

$$u^3 = -\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}; \quad v^3 = -\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}.$$

Тогда u и v соответственно равны

$$u = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}, \quad v = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$$

Из этих формул получаем формулу решения неполного кубического называемую формулой Кардано

$$x_0 = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}.$$

Значение кубических корней в этой формуле не могут выбираться произвольно, так как в системе уравнений относительно u и v имеется условие $uv = -\frac{p}{3}$. Значение кубических корней в формуле Кардано следует выбирать таким образом, чтобы их произведение равнялось $-\frac{p}{3}$.

Пусть u_1 будет одно из трех значений радикала u. Тогда два других можно получить умножением u_1 на кубические корни $\varepsilon = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ и $\varepsilon^2 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$ из единицы:

$$u_2 = u_1\varepsilon, \quad u_3 = u_1\varepsilon^2.$$

Обозначим через v_1 одно из трех значений радикала v, которое соответствует значению u_1 радикала u на основании равенства $uv = -\frac{p}{3}$. Два других значения v будут

$$v_2 = v_1\varepsilon^2, \quad v_3 = v_1\varepsilon \; .$$

Так как, ввиду $\varepsilon^3 = 1$,

$$u_2v_2 = u_1\varepsilon \cdot v_1\varepsilon^2 = u_1v_1\varepsilon^3 = u_1v_1 = -\frac{p}{3} \text{ и } u_3v_3 = u_1\varepsilon^2 \cdot v_1\varepsilon = u_1v_1\varepsilon^3 = u_1v_1 = -\frac{p}{3},$$

то значению u_2 радикала u соответствует значение v_2 радикала v; аналогично значению u_3 соответствует значение v_3. Таким образом, все корни три корня неполного кубического уравнения могут быть записаны следующим образом:

$$x_1 = u_1 + v_1,$$
$$x_2 = u_2 + v_2 = u_1\varepsilon + v_1\varepsilon^2,$$
$$x_3 = u_3 + v_3 = u_1\varepsilon^2 + v_1\varepsilon .$$

Теперь, возвращаясь к обратной замене, можно получить корни исходного кубического уравнения.

Пример. Решить уравнение в поле комплексных чисел ***C***

$$x^3 - 6x^2 + 57x - 196 = 0 .$$

Решение. Делая замену $x = y + 2$ в данном уравнении, получаем неполное кубическое уравнение:

$$y^3 + 6y^2 + 12y + 8 - 6(y^2 + 4y + 4) + 57y + 114 - 196 = 0$$

$$y^3 + 6y^2 + 12y + 8 - 6y^2 - 24y - 24 + 57y - 82 = 0$$

$$y^3 + 45y - 98 = 0$$

$$p = 45, \; q = -98$$

$$y = \alpha + \beta = \sqrt[3]{-\frac{-98}{2} + \sqrt{\frac{(-98)^2}{4} + \frac{45^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{-98}{2} - \sqrt{\frac{(-98)^2}{4} + \frac{45^3}{27}}} =$$
$$= \sqrt[3]{49 + \sqrt{5776}} + \sqrt[3]{49 - \sqrt{5776}} = \sqrt[3]{125} + \sqrt[3]{-27}$$

Пусть $\alpha_1 = 5$, тогда $\beta_1 = -3$, так как $\alpha_1\beta_1 = -\frac{p}{3} = -15$. Следовательно,

$$y_1 = \alpha_1 + \beta_1 = 5 + (-3) = 2.$$

Найдем y_2 и y_3:

$$y_2 = \alpha_2 + \beta_3 = \alpha_1\varepsilon + \beta_1\varepsilon^2 = 5(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i) - 3(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i) = -1 + 4\sqrt{3}i,$$

$$y_3 = \alpha_3 + \beta_2 = \alpha_1\varepsilon^2 + \beta_1\varepsilon = 5(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i) - 3(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i) = -1 - 4\sqrt{3}i.$$

Делая обратную замену, получим корни исходного уравнения

$$x_1 = 4,\ x_2 = 1 + 4\sqrt{3}i,\ x_3 = 1 - 4\sqrt{3}i.$$

Пример. Решить уравнение $y^3 + 3iy^2 - (3 + 6i)y + 10 - 5i = 0$.

Решение. Сделаем замену в данном уравнении $y = x - i$:

$(x - i)^3 + 3i(x - i)^2 - (3 + 6i)(x - i) + 10 - 5i = 0$

$x^3 - 3ix^2 - 3x + i + 3i(x^2 - 2ix - 1) - (3x - 3i + 6ix + 6) + 10 - 5i = 0$

$x^3 - 3ix^2 - 3x + i + 3ix^2 + 6x - 3i - 3x + 3i - 6ix - 6 + 10 - 5i = 0$

и получим неполное кубическое уравнение

$$x^3 - 6ix + 4 - 4i = 0,$$

где $p = -6i,\ q = 4 - 4i$.

Найдем корни полученного уравнения по формулам Кардано

$$x = \alpha + \beta = \sqrt[3]{-\frac{4-4i}{2} + \sqrt{\frac{(4-4i)^2}{4} - \frac{(6i)^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{(4-4i)}{2} - \sqrt{\frac{(4-4i)^2}{4} - \frac{(6i)^3}{27}}},$$

$$\alpha = \sqrt[3]{-\frac{4-4i}{2} + \sqrt{\frac{(4-4i)^2}{4} - \frac{(6i)^3}{27}}} = \sqrt[3]{-2 + 2i + \sqrt{(2-2i)^2 + 8i}} =$$
$$= \sqrt[3]{-2 + 2i + \sqrt{4 - 8i - 4 + 8i}} = \sqrt[3]{-2 + 2i}$$

$$\beta = \sqrt[3]{-\frac{(4-4i)}{2} - \sqrt{\frac{(4-4i)^2}{4} - \frac{(6i)^3}{27}}} = \sqrt[3]{-2 + 2i}.$$

$$\sqrt[3]{-2+2i} = \sqrt{2}(\cos\frac{\frac{3\pi}{4}+2\pi k}{3} + i\sin\frac{\frac{3\pi}{4}+2\pi k}{3}),\ k = 0,\ 1,\ 2$$

Укажем значение корня при k=0 , тогда

$$\alpha_1 = \sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}) = \sqrt{2}(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}) = 1+i$$

Найдем β_1 из условия $\alpha_1\beta_1 = -\frac{p}{3}$

$\alpha_1\beta_1 = (1+i)\beta_1 = -\frac{-6i}{3} = 2i$, отсюда $\beta_1 = 1+i$.

Тогда $x_1 = \alpha_1 + \beta_1 = 2+2i$,

$$x_2 = \alpha_1\varepsilon + \beta_1\varepsilon^2 = (1+i)(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i) + (1+i)(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i) =$$
$$= -1-i,$$

$$x_3 = \alpha_1\varepsilon^2 + \beta_1\varepsilon = (1+i)(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i) + (1+i)(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i) =$$
$$= -1-i.$$

Выполним обратную замену и получим корни исходного уравнения

$$y_1 = 2+i,\ y_2 = -1-2i,\ y_3 = -1-2i.$$

Кубические уравнения с действительными коэффициентами

Рассмотрим неполное кубическое уравнение с действительными коэффициентами

$$x^2 + px + q = 0.$$

Выражение $D = -4p^3 - 27q^2 = -108(\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27})$ называется дискриминантом кубического уравнения. В зависимости от знака выражения $\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}$, стоящего в формуле Кардано под знаком квадратного корня и имеющего противоположный знак дискриминанту, кубическое уравнение может иметь три различных действительных корня, один действительный и два комплексно-сопряженных корня и три действительных корня, из которых два корня равны между собой.

1. При $D<0$ выражение $\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}$ положительно, поэтому в формуле Кардано под знаком каждого из кубических радикалов оказываются различные действительные числа. Тогда

$$\begin{gathered} x_1 = u_1 + v_1, \\ x_2 = u_1\varepsilon + v_1\varepsilon^2, \\ x_3 = u_1\varepsilon^2 + v_1\varepsilon = \overline{x}_2. \end{gathered}$$

Так как $x_2 \neq x_3$, то x_2 и x_3 – сопряженные мнимые числа. Число x_1, очевидно, действительное.

Итак, если $D<0$, то уравнение $x^2+px+q=0$ имеет один действительный и два сопряженных мнимых корня.

2. При $D>0$ выражение $\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}$ отрицательно, поэтому в формуле Кардано под знаком квадратного корня находится отрицательное число и кубические корни извлекаются из двух сопряженных комплексных чисел. Тогда, учитывая $\varepsilon^2 = \overline{\varepsilon}$,

$$\begin{gathered} x_1 = u_1 + \overline{u}_1, \\ x_2 = u_1\varepsilon + \overline{u}_1\varepsilon^2 = u_1\varepsilon + \overline{u_1\varepsilon}, \\ x_3 = u_1\varepsilon^2 + \overline{u}_1\varepsilon = u_1\varepsilon^2 + \overline{u_1\varepsilon^2}. \end{gathered}$$

Итак, если $D>0$, то уравнение $x^2+px+q=0$ имеет

3. При $D=0$ имеем $u_1 = v_1$ и тогда, используя очевидное равенство, получим:

$$\begin{gathered} x_1 = 2u_1, \\ x_2 = u_1(\varepsilon + \varepsilon^2) = -u_1, \\ x_3 = u_1(\varepsilon^2 + \varepsilon) = -u_1. \end{gathered}$$

Итак, если $D=0$, то все корни уравнения $x^2+px+q=0$ действительны, причем два из них равны между собой.

РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ 4 СТЕПЕНИ МЕТОДОМ ФЕРРАРИ

Рассмотрим приведенное уравнение 4-й степени

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0.$$

Сделав замену переменной $x = y - \dfrac{a}{4}$, приведем данное уравнение к виду

$$y^4 + py^2 + qy + r = 0.$$

Будем решать это уравнение методом, который носит название метода Феррари.

Преобразуем левую часть уравнения так:

$$\left(y^2 + \frac{p}{2}\right)^2 + qy + \left(r - \frac{p^2}{4}\right) = 0.$$

Затем введем новую переменную z следующим образом:

$$\left(y^2 + \frac{p}{2} + z\right)^2 - \left[2z\left(y^2 + \frac{p}{2}\right) + z^2 - qy + \frac{p^2}{4} - r\right] = 0.$$

Подберем значение z так, чтобы многочлен 2-й степени стоящий в квадратных скобках, стал полным квадратом. Для того чтобы многочлен $2zy^2 - qy + \left(zp + z^2 + \dfrac{p^2}{4} - r\right)$ был полным квадратом необходимо и достаточно, чтобы его дискриминант равнялся нулю, т.е.

$$D = q^2 - 4 \cdot 2z\left(zp + z^2 + \frac{p^2}{4} - r\right) = 0,$$

$$8z^3 + 8pz^2 - 8rz + (2p^2 - q^2) = 0.$$

Получили уравнение 3-й степени относительно неизвестного z, которое можно решить по формулам Кардано и найти хотя бы один действительный корень z_0. Подставляя это значение в уравнение

$$\left(y^2+\frac{p}{2}+z\right)^2-\left[2z\left(y^2+\frac{p}{2}\right)+z^2-qy+\frac{p^2}{4}-r\right]=0$$

, получим в левой части разность квадратов. Тогда полученную разность квадратов можно разложить в произведение двух многочленов второй степени относительно y. После этого останется решить два получившихся уравнения 2-й степени.

Таким образом, уравнение 4-й степени всегда может быть решено и, более того, можно, аналогично случаю уравнения 3-й степени, получить формулу, выражающую корни общего уравнения 4-й степени через коэффициенты уравнения с помощью операций сложения, вычитания, умножения, деления, возведения в натуральную степень и извлечения корней натуральной степени.

Однако, общее уравнение с одним неизвестным степени выше 4-й неразрешимо в радикалах, т.е. не существует формулы, выражающей корни общего уравнения степени выше 4-й через коэффициенты уравнения с помощью операций сложения, вычитания, умножения, деления, возведения в натуральную степень и извлечения корней натуральной степени. Это положение известно как теорема Абеля.

Пример. Решить уравнение методом Феррари

$$x^4-2x^3+2x^2+4x-8=0.$$

Решение.

$$x^4-2x^3=-2x^2-4x+8$$

$$(x^2)^4-2x^2x+x^2=-x^2-4x+8$$

$$(x^2-x)^2=-x^2-4x+8$$

$$(x^2-x+y)^2=-x^2-4x+8+2(x^2-x)y+y^2$$

$$(x^2-x+y)^2=(2y-1)x^2+(-2y-4)x+y^2+8$$

$$D=(-2y-4)^2-4(2y-1)(y^2+8)=4y^2+16y+16-8y^3+4y^2-64y+32=$$

$$=-8y^3+8y^2-48y+48$$

$$-8y^3+8y^2-48y+48=0$$

$$y^3-y^2+6y-6=0$$

$$y^2(y-1)+6(y-1)=0$$

$$(y-1)(y^2+6)=0$$

$$y-1=0$$

$$y=1$$

$$(x^2-x+1)^2=x^2-6x+9$$

$$(x^2-x+1)^2=(x-3)^2$$

$x^2-x+1=x-3$ или $x^2-x+1=-x+3$

$x^2-2x+4=0$ или $x^2-2=0$

$$x^2-2x+4=0$$

$$D=2^2-4\cdot 4=-12$$

$$x_{1,2}=\frac{2\pm 2\sqrt{3}i}{2}=1\pm\sqrt{3}i;$$

$$x^2-2=0$$

$$x_{3,4}=\pm\sqrt{2}.$$

КОЛЬЦА И ИДЕАЛЫ

§ 1. Кольца

Прежде чем давать определение кольца, рассмотрим, какими общими свойствами обладают множество целых чисел Z и множество многочленов с действительными коэффициентами $R[x]$.

Во-первых, сумма целых чисел — целое число; аналогично сумма многочленов с действительными коэффициентами — многочлен с действительными коэффициентами. Во-вторых, как в Z, так и в $R[x]$, операция сложения коммутативна и ассоциативна. В третьих, как в Z, так и в $R[x]$, имеется нулевой элемент 0, такой, что для всех a имеем $a + 0 = a$, и для всех a есть противоположный элемент $-a$: $a + (-a) = 0$.

Все эти свойства можно кратко сформулировать так: и Z и $R[x]$ являются коммутативными группами относительно операции сложения.

Кроме операции сложения, и в Z, и в $R[x]$ есть операция умножения, причем эта операция дистрибутивна относительно операции сложения:

$a(b + c) = ab + ac$.

Определим в общем виде понятие дистрибутивности одной бинарной операции относительно другой. Пусть в множестве M заданы две бинарные операции, одна из которых обозначена $\circ$,а втораям $*$.

Определение 1. Операция $*$ в M дистрибутивна слева относительно операции $\circ$, если для любых трех элементов a, b, c. из M имеем:

$$a * (b \circ c) = (a * b) \circ (a * c).$$

Операция $*$ дистрибутивна справа относительно a, если для любых трех элементов a, b, c из M имеем:

$(b \circ c) - a = (b * a) \circ (c * a)$.

В дальнейшем, как правило, мы будем иметь дело с коммутативными операциями. Для таких операций понятия дистрибутивности слева и справа совпадают, а потому говорят просто, что операция $*$ дистрибутивна относительно.

Примеры.

1. Умножение в множестве Z дистрибутивно как относительно сложения, так и относительно вычитания:

$a(b+c)=ab+ac$, $a(b-c)=ab-ac$.

То же справедливо и для множества многочленов $R[x]$.

2. Пусть $*$ — операция возведения в степень в множестве N натуральных чисел, а $\circ$ — операция умножения в том же множестве, т. е.

$a*b=a^b$, $a\circ b=ab$, a, $b\in N$

Операция $*$ дистрибутивна справа относительно операции $\circ$, поскольку

$(b\circ c)*a=(bc)^a=b^a c^a=(b*a)\circ(c*a)$.

Но $*$ не дистрибутивна слева относительно $\circ$, так как

$a*(b\circ c)=a^{bc}$, но $(a*b)\circ(a*c)=a^b a^c\neq a^{bc}$,

Определение 2. Кольцом называется непустое множество R, в котором определены две бинарные операции: сложение $a+b$ и умножение $a\cdot b$, причем:

1) R является коммутативной группой относительно сложения;

2) умножение дистрибутивно слева и справа относительно сложения.

В развернутом виде определение кольца таково:

Определение 2'. Кольцом называется непустое множество R, в котором определены две бинарные операции: сложение $a+b$ и умножение $a\cdot b$, причем:

1) сложение ассоциативно и коммутативно:

$(a+b)+c=a+(b+c)$ для любых $a, b, c\in R$;

2) существует нулевой элемент кольца 0, такой, что для любого $a\in R$ имеем: $a+0=a$ (поскольку сложение коммутативно, то и $0+a=a$);

3) для любого $a \in R$ существует противоположный элемент кольца $-a$, такой, что $a+(-a)=0$ (и тем самым $-a+a=0$);

умножение дистрибутивно относительно сложения, т. е. для любых трех элементов a, b, c из R

$$a(b+c)=ab+ac$$

и

$$(b+c)a=ba+ca.$$

Мы уже отмечали, что все требования 1) — 4) выполняются и в множестве Z целых чисел, и в множестве $R[x]$ многочленов с действительными коэффициентами. Поэтому как Z, так и $R[x]$ являются кольцами. Эти кольца обладают дополнительными свойствами, которые, вообще говоря, могут не иметь места в произвольных кольцах: умножение и в Z, и в $R[x]$ коммутативно и ассоциативно. Кольца, в которых умножение ассоциативно, называются ассоциативными, а кольца, в которых умножение коммутативно, — коммутативными. Таким образом, Z и $R[x]$ — коммутативные ассоциативные кольца. Кроме того, в Z и $R[x]$ есть единица, т. е. такой элемент 1, что для всех a имеем: $a \cdot 1 = a$. Любое кольцо R в котором есть такой нейтральный элемент e, что для всех $a \in R$ имеем $ae=ea=a$, называют кольцом с единицей.

Сравнивая определение кольца с определением поля, видим, что всякое поле является кольцом (обратное, вообще говоря, неверно— кольцо Z целых чисел не является полем). Поле — это ассоциативное и коммутативное кольцо с отличной от нуля единицей, в котором каждый отличный от нуля элемент имеет обратный. Иными словами, если a — отличный от нуля элемент поля P, то в P есть такой элемент a^{-1} что $a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = e$.

3. Примеры колец.

1) Простейшим кольцом является множество, состоящее лишь из нуля: $R=\{0\}$. В самом деле, равенства $0+0=0$ и $0 \cdot 0 = 0$ показывают, что сложение и

умножение — бинарные операции в R. Очевидна и ассоциативность, и коммутативность сложения, а также ассоциативность и коммутативность умножения. Умножение дистрибутивно относительно сложения. В этом кольце элемент 0 сам себе является противоположным. Он же выполняет и роль единицы, и роль нуля кольца.

Множество $Ч$ всех четных чисел образует кольцо. Это видно из того, что сумма и произведение четных чисел — четные числа, а число, противоположное четному — четно. Ассоциативность, коммутативность сложения и умножения, а также дистрибутивность умножения относительно сложения вытекают из того, что все эти свойства имеют место для операций в кольце Z целых чисел. Кольцо $Ч$ не содержит единицы.

3) Множество $Z[i]$ всех комплексных чисел вида $a+bi$, где a и b — целые числа, является кольцом относительно обычных операций сложения и умножения комплексных чисел. В самом деле, пусть $z_1 = a_1 + b_1 i \in Z[i]$ и $z_2 = a_2 + b_2 i \in Z[i]$. Тогда имеем:

$$z_1 + z_2 = (a_1 + b_1 i) + (a_2 + b_2 i) = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i.$$

$$z_1 \cdot z_2 = (a_1 + b_1 i)\cdot(a_2 + b_2 i) = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1)i.$$

Так как $a_1 + a_2$, $b_1 + b_2$, $a_1 a_2 - b_1 b_2$, $a_1 b_2 + a_2 b_1$ — целые числа, то $z_1 + z_2 \in Z[i]$ и $z_1 \cdot z_2 \in Z[i]$. Иными словами, сложение и умножение — бинарные операции в $Z[i]$. Число $-z = -a - bi$, противоположное числу $z = a + bi$, тоже принадлежит $Z[i]$ (так как $-a$ и $-b$ — целые числа). Проверка условий коммутативности и ассоциативности сложения, дистрибутивности умножения относительно сложения излишня, поскольку эти свойства действий имеют место для любых комплексных чисел.

Кольцо $Z[i]$ впервые изучал великий немецкий математик Карл Фридрих Гаусс. Поэтому $Z[i]$ называют кольцом целых гауссовых чисел.

Множество нечетных чисел не является кольцом, так как сумма нечетных чисел четна, а потому сложение не является бинарной операцией в этом множестве.

Не является кольцом и множество N натуральных чисел, поскольку N не содержит нуля. Множество Z_0 неотрицательных целых чисел тоже не является кольцом, так как, например, $4 \in Z_0$, но $-4 \notin Z_0$.
Элементами колец из примеров 1—3 являлись числа.

Определение 3. Кольцо, элементами которого являются некоторые комплексные числа с обычными операциями сложения и умножения, называется числовым кольцом. Таким образом, 0, Z, $Ч$, $Z[i]$ — числовые кольца.

Рассмотрим теперь несколько примеров колец, не являющихся числовыми кольцами.

6) С каждым числовым кольцом R связано кольцо $R[x]$, состоящее из многочленов от x, коэффициенты которых принадлежат R. Например, $Z[x]$ — кольцо многочленов с целыми коэффициентами, $R[x]$ — кольцо многочленов с действительными коэффициентами, $C[x]$ — кольцо многочленов с комплексными коэффициентами. Эти кольца будут изучены в четвертой части курса.

7) Множество всех квадратных матриц n-го порядка с действительными элементами образует кольцо относительно операций сложения и умножения матриц. В самом деле, сумма (и произведение) двух квадратных матриц n-го порядка с действительными элементами является матрицей n-го порядка с действительными элементами. Роль нуля играет матрица с нулевыми элементами, а роль противоиоложного элемента для матрицы A — матрица $-A$, получаемая из A изменением знаков элементов.
Это кольцо ассоциативно, но некоммутативно. Оно имеет единицу — единичную матрицу E.

8) Множество $C[a,b]$ всех действительных функций, непрерывных на отрезке $[a,b]$, образует кольцо относительно обычных операций сложения и

умножения функций (сумма и произведение непрерывных функций — непрерывные функции, а вместе с $f(x)$ функция $-f(x)$ непрерывна). Кольцо $C[a,b]$ коммутативно, ассоциативно и имеет единичный элемент — функцию, тождественно равную 1.

9) Пусть R — любое кольцо. Обозначим через R_n множество кортежей $(a_1,...,a_n)$, где все $a_k \in R$. Операции сложения и умножения в R_n введем «покоординатно»:

$(a_1,...,a_n)+(b_1,...,b_n)=(a_1+b_1,...,a_n+b_n)$ и $(a_1,...,a_n)\cdot(b_1,...,b_n)=(a_1\cdot b_1,...,a_n\cdot b_n)$.

Легко проверить, что R_n тоже является кольцом. Если кольцо R ассоциативно (соответственно коммутативно), то и R_n — ассоциативное (соответственно коммутативное) кольцо. Если R — кольцо с единицей e, то единицей в R_n является кортеж $(e,...,e)$.

10) Наконец, приведем пример кольца, которое неассоциативно и некоммутативно. Пусть R^3 — множество векторов трехмерного просгранства. В качестве бинарных операций в R^3 возьмем сложение векторов и векторное произведение. Из курса геометрии известно, что векторное произведение некоммутативно и неассоциативно, и значит, и кольцо R^3 некоммутативно и неассоциативно. В кольце R^3 вместо этих свойств выполняются соотношения;

$[a,b]=-[b,a]$ (1)

(антикоммутативность) и

$$[[a,b],c]+[[b,c],a]+[[c,a],b]=0 \qquad (2)$$

(тождество Якоби). Кольца, обладающие свойствами (1) и (2), напеваются кольцами Ли.

Простейшие свойства колец.

Рассмотрим некоторые свойства конец. По определению каждое кольцо является коммутативной группой относительно сложения. Эту группу называют аддитивной группой кольца R (иными словами, аддитивная группа кольца R — это то же самое множество элементов, в котором рассматривают не две, а лишь одну операцию — сложение).

Из свойств бинарных операций вытекают следующие утверждения об аддитивной группе кольца R:

1) нуль кольца R является единственным элементом, нейтральным относительно сложения;

2) для любого $a \in R$ элемент $-a$ является единственным элементом в R, симметричным с а относительно сложения, причем $-(-a) = a$;

3) уравнение $b + x = a$ для любых, $a, b \in R$ имеет одно и только одно решение: $x = a + (-b)$, называемое разностью элементов a и b и обозначаемое $a - b$.

Итак, $a - b = a + (-b)$;

4) если $a + b = a + c$, то $b = c$;

для любого кортежа $(a_1, \ldots, a_n)$ элементов кольца R определена сумма $a_1 + \ldots + a_n$, значение которой не зависит ни от расстановки скобок, ни от порядка слагаемых.

Пусть a – любой элемент кольца R. Обозначим сумму n слагаемых, каждое из которых равно a, через na, а сумму n слагаемых, равных $-a$, через $-na$.

Элемент na нельзя, вообще говоря, рассматривать как произведение n и a, поскольку кольцо R не всегда содержит кольцо Z целых чисел. Лишь в случае, когда R содержит единицу e, можно отожествить na с $(ne)a$, т. е. с произведением элементов ne и a кольца R. В самом деле, в этом случае мы имеем при натуральном n

$$(ne)a = \underbrace{(e + \ldots + e)}_{n\ раз}a = \underbrace{ea + \ldots + ea}_{n\ раз} = \underbrace{a + \ldots + a}_{n\ раз} = na$$

В любом кольце R выполняются следующие равенства (где a и b — любые элементы из R, а m и n — любые целые числа):

$$a - (-b) = a + b, \qquad (1)$$

$$-(a+b)=-a-b, \quad (2)$$

$$\sum_{k=1}^{m} a_k + \sum_{k=m+1}^{m+n} a_k = \sum_{k=1}^{m+n} a_k, \quad (3)$$

$$ma+na=(m+n)a, \quad (4)$$

$$m(na)=mn(a), \quad (5)$$

$$na+nb=n(a+b). \quad (6)$$

Равенство (1) следует из того, что $-(-b)=b$, и потому

$$a-(-b)=a+[-(-b)]=a+b.$$

Чтобы доказать равенство (2), достаточно заметить, что в силу ассоциативности и коммутативности сложения в кольце R имеем:

$$a+b+[(-a)+(-b)]=[a+(-a)]+[b+(-b)]=0.$$

Это и означает, что элемент $(-a)+(-b)$ противоположен $a+b$, т. е. равен $-(a+b)$ (напомним, что в кольце каждый элемент имеет единственный противоположный элемент).

Далее, равенство (3) справедливо в любом множестве с ассоциативной бинарной операцией сложения. При натуральных m и n равенство (4) следует из (3), если положить $a_k=a$. Если m и n — отрицательные целые числа, $m=-|m|$, $n=-|n|$, то по определению имеем:

$$ma=|m|(-a), \quad na=|n|(-a),$$

а тогда

$$ma+na=|m|(-a)+|n|(-a)=(|m|+|n|)(-a)=-(|m|+|n|)a=(-|m|-|n|)a=(m+n)a.$$

Рассмотрим, наконец, случай, когда $m>0$, $n=-|n|$, причем $m \geq |n|$. Тогда по определению

$$ma+na=\underbrace{a+\ldots+a}_{m\ раз}+\underbrace{(-a)+\ldots+(-a)}_{|n|\ раз}.$$

Эту сумму можно переписать следующим образом:

$$ma+na=\underbrace{[a+(-a)]}_{|n|\ раз}+\underbrace{a+\ldots+a}_{m-|n|\ раз}$$

Так как $a+(-a)=0$, то получим, что

$$ma+na=(m-|n|)a=(m+n)a.$$

Аналогично рассматривается случай, когда $m>0$, $n=-|n|$, $m<|n|$. Так как при $m=0$ или $n=0$ равенство (4) очевидно, то мы доказали справедливость этого равенства при любых целых m и n.

Справедливость равенства (5) при натуральных m и n видна того, что

$$m(na)=\underbrace{na+\ldots+na}_{m\ раз}=\underbrace{\underbrace{a+\ldots+a}_{n\ раз}+\ldots+\underbrace{a+\ldots+a}_{n\ раз}}_{m\ раз}=\underbrace{a+\ldots+a}_{mn\ раз}=(mn)a$$

случае, когда $n<0$, имеем:

$$na=\underbrace{(-a)+\ldots+(-a)}_{|n|\ раз}$$

после чего доказательство заканчивается аналогично. Если же и $n<0$ и $m<0$, то надо еще воспользоваться равенством $-(-a)=a$.

Равенство (6) при натуральном n следует из того, что сложение в R коммутативно и ассоциативно, а потому

$$na+nb=\underbrace{a+\ldots+a}_{n\ раз}+\underbrace{b+\ldots+b}_{n\ раз}=\underbrace{(a+b)+\ldots+(a+b)}_{n\ раз}=n(a+b)$$

Случай $n<0$ рассматривается аналогично, а при $n=0$ обе части равенства равны нулю,

Перейдем теперь к изучению свойств умножения в кольцах. Сначала докажем, что для любого элемента a кольца R выполняются равенства:

$$a\cdot 0=0 \qquad (7)$$

и

$$0\cdot a=0. \qquad (8)$$

В самом деле, пусть $b\in R$. Тогда имеем:

$$ab+a\cdot 0=a(b+0)=ab,$$

Значит, $a\cdot 0=ab-ab=0$. Равенство $0\cdot a=0$ доказывается точно так же.

Теперь докажем правило знаков:

$$a(-b)=-ab, \ (9)$$

$$(-a)b = -ab, \quad (10)$$

$$(-a)(-b) = ab. \qquad (11)$$

В самом деле, в силу дистрибутивности умножения относительно сложения имеем:

$$ab + a(-b) = a[b + (-b)] = a \cdot 0 = 0.$$

Значит, элемент $a(-b)$ противоположен ab, т. е. $a(-b) = -ab$ Равенство (10) доказывается точно так же. Из (9) и (10) следует, что

$$(-a)(-b) = -a(-b) = -(-ab) = ab.$$

Наконец, докажем, что умножение в любом кольце дистрибутивно не только относительно сложения, но и относительно вычитания, т. е. что для любых трех элементов кольца R выполняются равенства:

$$a(b - c) = ab - ac \qquad (12)$$

и

$$(b - c)a = ba - ca. \qquad (13)$$

Так как $b - c = b + (-c)$, то

$$a(b - c) = a[b + (-c)] = ab + a(-c) = ab - ac,$$

Точно так же получаем, что

$$(b - c)a = [b + (-c)]a = ba + (-c)a = ba - ca.$$

Доказанные выше свойства умножения имеют место в любых кольцах. Если умножение в кольце R ассоциативно, то в силу общих свойств ассоциативных бинарных операций (см. п. приложения к главе II) для любого кортежа $(a_1, \ldots, a_n)$ элементов из R определено произведение $a_1, \ldots, a_n$, значение которого не зависит от расстановки скобок. В частности,

$$\prod_{k=1}^{m} a_k \cdot \prod_{k=m+1}^{m+n} a_k = \prod_{k=1}^{m+n} a_k. \qquad (14)$$

В ассоциативном кольце произведение n множителей, каждый из которых равен a, обозначают a^n. Справедливы формулы:

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n} \qquad (15)$$

и

$$\left(a^m\right)^n = a^{mn}, \quad (16)$$

доказываемые, как в обычной алгебре.

Если кольцо R не только ассоциативно, но и коммутативно, то справедлива формула:

$$\left(ab\right)^n = a^n b^n. \quad (17)$$

В коммутативном и ассоциативном кольце верна формула бинома Ньютона:

$$\left(a+b\right)^n = a^n C_n^1 a^{n-1} b + \ldots + C_n^k a^{n-k} b^k + \ldots + b^n. \qquad (18)$$

Подкольца.

Определение 4. Подмножество S кольца R называется подкольцом в R, если оно само является кольцом относительно тех же операций сложения и умножения, что и кольцо R. Чтобы проверить, является ли подмножество S кольца R подкольцом, достаточно убедиться в том, что:

а) сумма двух элементов a и b из S принадлежит S;

б) элемент $-a$, противоположный любому элементу a из S,принадлежит S;

в) произведение любых двух элементов из S принадлежит S.

В самом деле, условия а) и в) показывают, что сложение и умножие являются бинарными операциями в S. При этом сложение в S обладает свойствами ассоциативности и коммутативности, поскольку оно обладает этими свойствами и во всем кольце R. Поскольку в силу условия б) вместе с каждым элементом a в S входит и противоположный ему элемент $-a$ то S является группой относительно сложения. Наконец, умножение в S дистрибутивно относительно сложения, поскольку это имеет место и во всем кольце R. Тем самым доказано, что S — кольцо, т. е. подкольцо в R.

Заметим, что условия а) и б) можно заменить одним условием а') разность любых двух элементов из S принадлежит S.

В самом деле, из условия а') вытекает, что $0 \in S$, поскольку $0 = a - a$. Кроме того, если $a \in S$, то и $-a = 0 - 0 \in S$. Наконец, если $a \in S$, $b \in S$, то

$a+b=a-(-b)\in S$. Значит, из условия а') вытекают и условие а), и условие б).

Числовые кольца — это подкольца поля C комплексных чисел. Поэтому, чтобы проверить, что множество S комплексных чисел явяется числовым кольцом, достаточно убедиться, что:

а) разность любых двух элементов из S принадлежит S;

б) произведение любых двух элементов из S принадлежит S.

Если кольцо R ассоциативно, то любое его подкольцо тоже ассоциативно, а если R коммутативно, то и любое его подкольцо коммутативно. Но из того, что R содержит единицу, не следует, что любое подкольцо в R содержит единицу. Например, кольцо Z содержит единицу, а его подкольцо, состоящее из четных чисел, не содержит единицы.

Примеры.

1. Покажем, что множество $Z[\sqrt{2}]$ чисел вида $a+b\sqrt{2}$, где a и b — целые числа, является кольцом. Для этого достаточно убедиться, что разность и произведение чисел такого вида имеют тот же самый вид. А это следует из равенств:

$(a_1+b_1\sqrt{2})-(a_2+b_2\sqrt{2})=(a_1-a_2)+(b_1-b_2)\sqrt{2}$ и

$(a_1+b_1\sqrt{2})(a_2+b_2\sqrt{2})=(a_1b_1-2a_2b_2)+(a_1b_2-a_2b_1)\sqrt{2}$.

2. Множество M чисел вида $a+b\sqrt[3]{2}$, где $a\in Z$, $b\in Z$, не является кольцом. В самом деле, $\sqrt[3]{2}\in M$, но $\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[3]{2}=\sqrt[3]{4}\notin M$. Проверьте, что множество $Z[\sqrt[3]{2}]$ чисел вида $a+b\sqrt[3]{2}+c\sqrt[3]{4}$ где $a,b,c\in Z$ — кольцо.

3. Множество $Z[x]$ многочленов с целыми коэффициентами является подкольцом в $R[x]$ — кольце многочленов с действительными коэффициентами. Чтобы убедиться в этом, достаточно заметить, что разность и произведение многочленов с целыми коэффициентами имеют целые коэффициенты.

4. Множество M чисел вида $a+b\sqrt{2}+c\sqrt{3}$, где a,b,c целые числа, не является

числовым кольцом, так как $\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}=\sqrt{6}\in M$. Проверьте, что множество $Z\left[\sqrt{2},\sqrt{3}\right]$ чисел вида $a+b\sqrt{2}+c\sqrt{3}+d\sqrt{6}$, где $a,b,c,d\in Z$, является кольцом

5. Матрицы n-го порядка с целыми элементами образуют подкольцо в кольце всех матриц n-го порядка с действительными элементами. Это вытекает из того, что разность и произведение матриц с целыми элементами имеют целые элементы.

6. Диагональные матрицы n-го порядка, т, е. матрицы вида

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & .. \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

образуют подкольцо в кольце всех матриц n-го порядка. Это следует из того, что разность и произведение диагональных матриц – диагональные матрицы.

6. Характеристика кольца с единицей. Пусть R — кольцо с единицей e. Найдем в этом кольце наименьшее подкольцо, содержащее единицу. Из определения подкольца вытекает, что вместе с единицей e это подкольцо должно содержать и противоположный элемент $-e$, а также все суммы

$ne=\underbrace{e+\ldots+e}_{n\ раз}$ и $-ne=\underbrace{(-e)+\ldots+(-e)}_{n\ раз}$.

11ными словами, искомое подкольцо должно содержать все элементы вида ne, где $n\in Z$. Но разность двух таких элементов, а также их произведение являются элементами того же вида:

$ne-me=(n-m)e$, $(ne)(me)=nmee=nme$.

Тем самым доказано, что множество элементов вида ne является подкольцом в R, причем это— наименьшее подкольцо в R, содержащее единицу e.

Возможны два случая:

а) ни один из элементов ne, где $n\neq 0$, не равен нулю:

$n\neq 0\to ne\neq 0$;

б) существует такое $n\neq 0$, что $ne=0$. В этом случае и $-ne=0$, а потому, не теряя общности, можно считать, что $n>0$. В множестве A натуральных чисел

m, таких, что $me = 0$, существует наименьшее число.

Определение 5. Характеристикой кольца с единицей R называется нуль, если при $n \neq 0$ имеем $ne \neq 0$, и наименьшее натуральное число, для которого $ne = 0$, в противном случае.

Характеристика любого числового кольца равна нулю. Примеры колец с ненулевой характеристикой будут приведены ниже.

Теорема 1. Если R — кольцо характеристики n, то для нового элемента $a \in R$ имеем $na = 0$.

Доказательство. Теорема вытекает из того, что

$na = n(ea) = (ne)a = 0$.

7. Отношение делимости в кольцах. Мы уже говорили выше, что кольца являются естественной областью для построения теории делимости. При этом мы будем рассматривать лишь ассоциативные и коммутативные кольца с единицей. Таким образом, до конца параграфа слово «кольцо» будет обозначать ассоциативное и коммутативное кольцо с единицей.

Определение 6. Элемент a кольца R делится на элемент $b \neq 0$ того же кольца, если существует такой элемент $q \in R$, что $a = bq$. В этом случае пишут $a \vdots b$. Элемент b называется делителем пемента a.

Примеры.

1. В кольце $R[x]$ многочленов с действительными коэффициентами отношение делимости совпадает с обычным отношением делимости для многочленов: многочлен $f(x)$ делится на многочлен $\varphi(x)$, если существует такой многочлен $q(x)$, что $f(x) = \varphi(x) \cdot q(x)$. Например, $x^4 - 16$ делится на $x^2 - 4$, так как $x^4 - 16 = (x^2 - 4) \times (x^2 - 4)$,

2. В кольце Zi целых гауссовых чисел $23 + 2i$ делится на $2 + 3i$. В самом деле, $\frac{23+2i}{2+3i} = \frac{(23+2i)(2-3i)}{(2+3i)(2-3i)} = \frac{52+65i}{13} = 4 - 5i$, а $4 - 5i \in Z[i]$.

3. Точно так же доказывается, что в кольце $Z[\sqrt{3}]$ число $-7 + 18\sqrt{3}$ делится на

$4+\sqrt{3}$:

$$\frac{-7+18\sqrt{3}}{4-\sqrt{3}}=\frac{\left(-7+18\sqrt{3}\right)\left(4+\sqrt{3}\right)}{\left(4-\sqrt{3}\right)\left(4+\sqrt{3}\right)}=\frac{26+65\sqrt{3}}{13}=2+5\sqrt{3}\in Z\left[\sqrt{3}\right].$$

4. Докажем, что в кольце $Z\left[\sqrt[3]{2}\right]$, состоящем из чисел вида $a+b\sqrt[3]{2}+c\sqrt[3]{4}$, где a,b,c — целые числа, $-19+10\sqrt[3]{2}+20\sqrt[3]{4}$ делится на $1-3\sqrt[3]{2}+5\sqrt[3]{4}$. Для этого надо найти число $x+y\sqrt[3]{2}+z\sqrt[3]{2}$ из $Z\left[\sqrt[3]{2}\right]$, такое, что $\left(1-3\sqrt[3]{2}+5\sqrt[3]{4}\right)\left(x+y\sqrt[3]{2}+z\sqrt[3]{4}\right)=-19+10\sqrt[3]{2}+20\sqrt[3]{4}$

Раскрывая скобки, получаем, что $x+10y-6z+(3x+y+10z)\sqrt[3]{2}+(5x-3y+z)\sqrt[2]{4}=-19+10\sqrt[3]{2}+20\sqrt[3]{4}$

Это равенство может иметь место лишь при условии, что x,y,z удовлетворяют системе уравнений:

$$\begin{cases} x+10y-6z=-19 \\ -3x+y+10z=10 \\ 5x-3y+z=20 \end{cases}$$

Решая эту систему, получаем, что $x=3$, $y=-1$, $z=2$. Значит, $-19+10\sqrt[3]{2}+20\sqrt[3]{4}=\left(1-3\sqrt[3]{2}+5\sqrt[3]{4}\right)\left(3-\sqrt[3]{2}+2\sqrt[3]{4}\right)$. А число $-18+10\sqrt[3]{2}+20\sqrt[3]{4}$ не делится на $1-3\sqrt[3]{2}+5\sqrt[3]{4}$. В этом случае мы получили бы систему уравнений:

$$\begin{cases} x+10y-6z=-18 \\ -3x+y+10z=10 \\ 5x-3y+z=20 \end{cases},$$

имеющую дробные решения.

5. В поле P любой элемент a делится на любой отличный от нуля элемент b. В самом деле, если $b\neq 0$, то существует элемент b^{-1}, обратный b, т. е. такой, что $b\cdot b^{-1}=e$. А тогда имеем: $a=b\left(ab^{-1}\right)$. Так как $ab^{-1}\in P$ то $a\,\vdots\,b$.

Многие свойства отношения делимости в кольце целых чисел Z сохраняются для любых колец (напомним еще раз, что мы рассматриваем лишь ассоциативные и коммутативные кольца с единицей). Именно, справедливы следующие утверждения:

1) Отношение делимости рефлексивно, т. е. для любого $a \in R$, $a \neq 0$ имеем $a \vdots a$.

В самом деле, $a = ae$ (по условию $e \in R$).

2) Отношение делимости транзитивно: если $a \vdots b$ и $b \vdots c$, то $a \vdots c$.

В самом деле, если $a \vdots b$, то существует такое $q \in R$, что $a = bq$. А так как $b \vdots c$, то существует такое $s \in R$, что $b = cs$. Но тогда мы имеем:

$a = bq = (cs)q$.

В силу ассоциативности кольца R получаем, что $a = c(sq)$. А это и означает, что $a \vdots c$.

3) Если $a \vdots c$ и $b \in R$, то $ab \vdots c$,

В самом деле, так как $a \vdots c$, то существует такое $q \in R$, что $a = cq$. А тогда имеем: $ab = (cq)b$. В силу ассоциативности кольца R получаем, что $ab = c(qb)$. Так как $qb \in R$, то $ab \vdots c$.

4) Если $a \vdots c$ и $b \vdots c$, то $(a \pm b) \vdots c$.

В самом деле, $a = cq$, $b = cs$, где $q \in R$ и $s \in R$. А тогда имеем:

$a \pm b = cq \pm cs = c(q \pm s)$.

Так как $(q \pm s) \in R$, то $(a \pm b) \vdots c$

Если $a \vdots c$, а b не делится на c, то $a \pm b$ не делится на c.

Нуль делится на любой отличный от нуля элемент b кольца R.

В самом деле, $0 = 0 \cdot b$.

7) Любой элемент а кольца R делится на единицу e. В самом деле, $a = e \cdot a$.

8. Обратимые элементы. Чтобы сформулировать дальнейшие свойства отношения делимости в кольцах, введем понятие обратимого элемента.

Определение 7. Элемент ε кольца R называется обратимым, если в R существует такой элемент ε_1 что $\varepsilon\varepsilon_1 = e$.

Примеры.

В кольце Z целых чисел обратимыми являются числа 1 и -1. Других обратимых чисел в Z нет, так как единственными делителями числа 1 являются 1 и -1.

В кольце $Z[i]$ целых гауссовых чисел 4 обратимых элемента: 1, -1, i и $-i$. Других обратимых элементов в $Z[i]$ нет. В самом деле, если элемент $(a+bi)\in Z[i]$ обратим, то найдется число $(c+di)\in Z[i]$, такое, что $(a+bi)(c+di)=1$.

Но тогда и $|a+bi|^2|c+di|^2=1$, т. е.

$(a^2+b^2)(c^2+d^2)=1$.(1)

Так как a,b,c,d — целые числа и $(a^2+b^2)>0$, то равенство (1) может иметь место лишь при условии, что $a^2+b^2=1$, т. е. в одном из четырех случаев: $a=1$, $b=0$; $a=-1$, $b=0$; $a=0$, $b=1$; $a=0$, $b=-1$. Это и означает, что $a+bi$ может иметь лишь четыре значения: 1, -1, i и $-i$.

3. Аналогичным образом ищут обратимые элементы в кольце $Z[\sqrt{3}]$ чисел вида $a+b\sqrt{3}$ где a и b — целые числа. Если число $a+b\sqrt{3}$ обратимо, то

$(a+b\sqrt{3})(c+d\sqrt{3})=1$. (2)

Раскрывая скобки, получаем, что $ac+3d^2=1$ и $ad+bc=0$. Но тогда и

$(a+b\sqrt{3})(c+d\sqrt{3})=(ac+3d^2)-(ad+bc)\sqrt{3}=1$. (3)

Перемножая равенства (2) и (3), получаем, что $(a^2-3b^2)(c^2-3d^2)=1$.

Значит, a^2-3b^2 является целым делителем единицы, и потому $a^2-3b^2=\pm 1$. Четыре решения этого уравнения находятся сразу: $a=2$, $b=1$; $a=2$, $b=-1$; $a=-2$, $b=1$; $a=-2$, $b=-1$. Значит, числа $\pm(2+\sqrt{3})$, $\pm(2-\sqrt{3})$ обратимы в $Z[\sqrt{3}]$. Но числа $(2+\sqrt{3})^n$ и $(2-\sqrt{3})^n$ при любом натураль ном значении n тоже обратимы в $Z[\sqrt{3}]$, так как

$(2+\sqrt{3})^n(2-\sqrt{3})^n=(4-3)^n=1$.

Можно показать, что множество всех обратимых чисел кольца $Z[\sqrt{3}]$ состоит из элементов вида $\pm\left(2+\sqrt{3}\right)^n$ где n — целое число (в частности, при $n=0$ получаем число 1, а при $n=-1$ число $2-\sqrt{3}$).

4. В кольце $R[x]$ многочленов с действительными коэффициентами обратимыми являются многочлены нулевой степени, т. е. отличные от нуля действительные числа.

Выясним теперь роль обратимых элементов при делении элементов кольца. В кольце Z целых чисел отношение делимости не нарушилось при умножении делителя на -1, т. е. на обратимый элемент. Аналогичное утверждение верно в любом кольце.

Если $a \vdots b$ и элемент ε обратим в R, то $a \vdots b\ \varepsilon$.

В самом деле, так как $a \vdots b$, то существует такой элемент q, что $a=bq$. А так как ε обратим в R, то существует такой элемент $\varepsilon_1 \in R$, что $\varepsilon \cdot \varepsilon_1 = e$. А тогда имеем:

$$a=(b\varepsilon\varepsilon_1)q=(b\varepsilon)(\varepsilon_1 q).$$

Это равенство показывает, что $a \vdots b\varepsilon$. Утверждение доказано.

Заметим, что (в силу свойства 3 отношения делимости в кольцах) если $a \vdots b$, то и $a\varepsilon \vdots b$.

Докажем следующую теорему об обратимых элементах любого кольца.

Теорема 2. Множество $\widetilde{R}$ обратимых элементов кольца R образует коммутативную группу относительно умножения.

Доказательство. Так как по условию кольцо R коммутативно, ассоциативно и обладает единицей, то для доказательства теоремы нам достаточно показать справедливость двух утверждений:

а) произведение двух обратимых элементов обратимо в R;

б) если ε — обратимый элемент в R, то и ε^{-1} обратимо в R.

Пусть δ и ε обратимы в R. Тогда существуют такие элементы δ_1 и ε_1 в R, что $\delta\delta_1=e$ и $\varepsilon\varepsilon_1=e$. Но тогда имеем:

$(\delta\varepsilon)(\delta_1\varepsilon_1) = (\delta\delta_1)(\varepsilon\varepsilon_1) = e\cdot e = e$.

Значит, $\delta\varepsilon$ тоже обратимо в R. Этим доказано утверждение а) Утверждение же б) сразу следует из того, что если $\varepsilon\varepsilon_1 = e$, то не только ε, но и $\varepsilon_1 = \varepsilon^{-1}$ обратимо в R.

Группу $\widetilde{R}$ называют группой обратимых элементов кольца R. Единичным элементом группы $\widetilde{R}$ является единица e кольца R. Предоставляем читателю проверить, что во всех разобранных выше примерах множество обратимых элементов действительно является коммутативной группой относительно операции умножения.

9. Области целостности. Мы видели, что многие свойства отношения делимости в кольце целых чисел сохраняются и для отношения делимости в любом кольце. Но в произвольном кольце нельзя говорить о частном двух элементов даже в случае, когда a делится на b. Дело в том, что в некоторых кольцах деление неоднозначно, т. е. для некоторых элементов $a\in R$, $b\in R$ можно найти несколько элементов q, таких, что $a = bq$. Мы хотим выделить класс колец, в которых имеет смысл говорить и о частном двух элементов.

Определение 8. Отличный от нуля элемент a кольца R называется делителем нуля в R, если в R существует отличный от нуля элемент b, такой, что $ab = 0$ (разумеется, в этом случае и элемент b является делителем нуля в R).

Определение 9. Кольцо R называется областью целостности, если в нем нет делителей нуля.

Иными словами, кольцо R является областью целостности, если из $ab = 0$ следует, что $a = 0$ или $b = 0$:

$ab = 0 \to a = 0 \vee b = 0$.

Примеры.

1. Пусть R^2 — кольцо, состоящее из пар (a,b) действительных чисел, в котором сложение и умножение определяются «покоординатно»:

$(a_1,b_1) + (a_2,b_2) = (a_1 + a_2, b_1 + b_2)$ и $(a_1,b_1)\cdot(a_2,b_2) = (a_1a_2, b_1b_2)$.

Элементы $(1,0)$ и $(0,1)$ кольца R^2 отличны от нулевого элемента $(0,0)$, но $(1,0)(0,1)=(0,0)$. Значит, эти элементы-делители нуля в R^2, и потому R^2 не является областью целостности.

Любое поле является областью целостности. В самом деле, если P — поле и $a\in P$, $a\neq 0$, то существует элемент a^{-1}, обратный a. Если $ab=0$, то $a^{-1}(ab)=0$, т. е. $b=0$. Значит, равенство $ab=0$ может выполняться лишь при условии, что $a=0$ или $b=0$. Это и значит, что P — область целостности.

Так как множество C комплексных чисел является полем, то в C нет делителей нуля. А тогда их нет и ни в каком числовом кольце. Значит, любое числовое кольцо является областью целостности. В частности, областями целостности являются кольцо $Z[i]$ целых гауссовых чисел, кольцо $Z[\sqrt{2}]$ чисел вида $a+b\sqrt{2}$, $a,b\in Z$ и т. д. Разумеется, областью целостности является и кольцо Z целых чисел.

Кольцо многочленов $P[x]$ с коэффициентами из числового поля P является областью целостности. Это вытекает из того, что при умножении многочленов их степени складываются, а потому произведение двух отличных от нуля многочленов не может равняться нулю.

Кольцо $C[a,b]$ функций, непрерывных на отрезке $[a,b]$ не является областью целостности. В самом деле, если функция $f(x)$ отлична от нуля лишь на промежутке (a,c), а функция $\varphi(x)$ — лишь на промежутке (b,c), то их произведение $f(x)\varphi(x)$ равно нулю на всем отрезке $[a,b]$. Например, можно положить

$$f(x)=\begin{cases}(x-a)(c-x), & a\leq x\leq c\\ 0 & , c<x\leq b\end{cases}$$

$$\varphi(x)=\begin{cases}0 & , a\leq x\leq c\\ (x-a)(c-x), & c<x\leq b\end{cases}.$$

Свойства отношения делимости в областях целостности.

Теорема 3. Если a — отличный от нуля элемент области целостности

R, то из равенства $ab = ac$, где $b, c \in R$, следует, что $b = c$.

Иными словами, в областях целостности можно сокращать обе части равенства на отличный от нуля элемент.

Доказательство. Из равенства $ab = ac$ следует, что $a(b - c) = 0$, Поскольку по условию $a \neq 0$, а R не содержит делителей нуля, то равенство $a(b - c) = 0$ может иметь место лишь при условии, что $b - c = 0$, т. е. что $b = c$. Теорема доказана.

Из теоремы 3 вытекает, что если a и $b \neq 0$ — элементы области целостности R, причем $a \vdots b$, то в R существует единственный элемент q, такой, что $a = bq$. В самом деле, если $a = bq$ и $a = bs$, то $bq = bs$, и поскольку $b \neq 0$, то $q = s$.

Определение 10. Если R — область целостности и $a \vdots b$, то единственный элемент $q \in R$, такой, что $a = bq$, называют частным от деления a на b.

В кольце целых чисел Z из отношений $a \vdots b$, $b \vdots a$ следует, что $a = b$ или $a = -b$, т. е. a и b отличаются друг от друга лишь обратимым множителем. По аналогии введем следующее определение:

Определение 11. Элементы a и b области целостности R называются ассоциированными в R, если существует обратимый элемент $\varepsilon \in R$, такой, что $a = b\varepsilon$.

Например, числа 5 и -5 ассоциированы в кольце Z целых чисел. А числа $5 + 2\sqrt{3}$ и $4 - \sqrt{3}$ ассоциированы в кольце $Z[\sqrt{3}]$ мсел вида $a + b\sqrt{3}$, a, $b \in Z$. В самом деле, мы видели (см. стр. 76), что $2 - \sqrt{3}$ обратимо в $Z[\sqrt{3}]$, а $4 - \sqrt{3} = (5 + 2\sqrt{3})(2 - \sqrt{3})$.

Бинарное отношение «элемент a ассоциирован с элементом b в кольце целостности R» является отношением эквивалентности — оно рефлексивно, симметрично и транзитивно. В самом деле, a ассоциировано с a, так как $a = ae$, а e обратимо в R. Далее, пусть a ассоциировано с b. Тогда есть такой обратимый элемент ε, что $a = bs$. Но в R есть такой обратимый элемент ε_1, что $\varepsilon\varepsilon_1 = e$. Умножая обе части равенства $a = b\varepsilon$ на ε_1 получаем, что $a\varepsilon_1 = b$. Это показывает, что b ассоциировано с a. Значит, отношение ассоциированности симметрично. Наконец, если a ассоциировано с b, а b ассоциировано с c, то $a = b\delta$, $b = c\varepsilon$, где δ и ε — обратимые в R. А тогда

$a = b\delta = (c\varepsilon)\delta = c(\varepsilon\delta)$.

Но элемент $\varepsilon\delta$ обратим в силу теоремы 2 п. 8. Значит, a ассоциировано с c. Этим доказана транзитивность отношения ассоциированности.

В п. 8 было доказано, что если $a \vdots b$ и элемент ε обратим в R, то $a \vdots b\varepsilon$ и $a\varepsilon \vdots b$. Отсюда вытекает следующее утверждение:

Если a ассоциировано с a_1, а b – с b_1 и $a \vdots b$, то $a_1 \vdots b_1$.

В самом деле, $a_1 = a\delta$, $b_1 = b\varepsilon$, где δ и ε — обратимые элементы, а из $a \vdots b$ следует, что $a\delta \vdots b\varepsilon$, т. е. что $a_1 \vdots b_1$.

Теорема 4. Для того чтобы в области целостности R выполнялись отношения $a \vdots b$ и $b \vdots a$, необходимо и достаточно, чтобы элементы a и b были ассоциированы в R.

Доказательство. Сначала докажем достаточность условия. Пусть элементы a и b ассоциированы. Так как $a \vdots a$, то из ассоциированности a и b следует в силу доказанного выше, что $a \vdots b$. Точно так же из $a \vdots a$ и ассоциированности b и a следует, что $b \vdots a$.

Значит, из ассоциированности a и b вытекают оба отношения делимости: $a \vdots b$ и $b \vdots a$.

Теперь докажем необходимость этого условия, т. е. докажем, что из $a \vdots b$ и $b \vdots a$ вытекает ассоциированность элементов a и b в R. Так как $a \vdots b$, то в R найдется такой элемент δ, что $a = b\delta$, а так как $b \vdots a$, то в R найдется такой элемент ε, что $b = a\varepsilon$. Для доказательства ассоциированности a и b осталось показать, что элементы δ и ε обратимы в R. Для этого перемножим почленно равенства $a = b\delta$ и $b = a\varepsilon$. Мы получим $ab = ab\delta\varepsilon$, откуда следует, что $ab(e - \delta\varepsilon) = 0$. Так как по условию R — область целостности и $a \neq 0$, $b \neq 0$, то $ab \neq 0$, а тогда из $ab(e - \delta\varepsilon) = 0$ следует, что $(e - \delta\varepsilon) = 0$, т. е. $\delta\varepsilon = e$. Это и показывает, что δ и ε обратимы в R. Теорема доказана.

Простые и составные элементы области целостности.

Определение 12. Элемент a области целостности R называется простым в R, если он не обратим в R, а любой делитель b элемента a либо обратим в R, либо ассоциирован с a.

Это определение можно сформулировать так: элемент a области целостности R является простым, если он не обратим в R, а любое разложение a на два множителя имеет вид $a = bc$, где один из элементов b, с обратим в R, а второй ассоциирован с a.

Определение 13. Элемент a области целостности R называется составным, если он допускает разложение на множители $a = bc$, причем ни b, ни c не обратимы в R.

Таким образом, все элементы области целостности R распадаются на четыре класса: нуль, обратимые элементы, простые элементы и составные элементы.

Ясно, что элемент, ассоциированный с простым элементом a, является простым, а ассоциированный с составным элементом — составным (напомним, что умножение на обратимые элементы не изменяет отношения делимости).

Одно и то же число может оказаться простым в одном кольце и составным в другом кольце. Например, число 5 просто в кольце Z целых чисел. А в кольце $Z[i]$ целых гауссовых чисел оно является составным, так как $5 = (1 + 2i)(1 - 2i)$.

Одной из задач, вызвавших построение теории колец, была задача о разложении на простые множители в числовых кольцах. Оказалось, что в некоторых числовых кольцах дело обстоит примерно так же, как в кольце целых чисел, т. е. любое составное число разлагается на простые множители, причем это разложение по сути дела однозначно определено (смысл этих слов будет уточнен ниже), в других числовых кольцах разложение на простые множители существует, но некоторые числа могут иметь несколько существенно различных разложений, а в третьих кольцах есть числа, не имеющие разложений на простые множители.

Уточним, что мы будем понимать под словами «разложение элемента a области целостности R на простые множители однозначно определено». Во-первых, мы знаем, что эти множители можно переставлять друг с другом. Но, кроме того, можно умножить один из фостых множителей на какой-нибудь обратимый элемент ε, а другой — на такой обратимый элемент ε_1, что $\varepsilon\varepsilon_1 = e$. Тогда оба множителя останутся простыми, произведение же не изменится. Ясно, что полученное разложение не следует считать отличающимся от исходного. Итак, введем следующее определение:

Определение 14. Два разложения

$a = p_1 ... p_n$

и

$a = s_1 ... s_m$

элемента a области целостности R на простые множители по существу одинаковы, если они содержат одинаковое число множителей и могут быть переведены друг в друга перестановкой множителей и умножением их на обратимые элементы.

Примеры.

1. В кольце $Z[i]$ целых гауссовых чисел существуют такие разложения для 5 на простые множители:

$5 = (1 + 2i)(1 - 2i)$ и $5 = (-1 + 2i)(-1 - 2i)$

Эти разложения по существу одинаковы, так как второе разложение получается из первого умножением первого множителя на обратимый элемент i, а второго на обратимый элемент $-i$.

2. В кольце $Z[\sqrt{3}]$ чисел вида $a + b\sqrt{3}$, a, $b \in Z$ разложения

$13=\left(4-\sqrt{3}\right)\left(4+\sqrt{3}\right)$ и $5=\left(5-2\sqrt{3}\right)\left(5+2\sqrt{3}\right)$

по существу одинаковы, так как второе разложение получается из первого следующим образом: первый множитель умножается на обратимый элемент $2+\sqrt{3}$, второй — на обратимый элемент $2-\sqrt{3}$, после чего множители переставляются.

3. В кольце $Z\left[\sqrt{-3}\right]$ чисел вид $a+b\sqrt{-3}$, a, $b\in Z$ число 4 разлагается на множители следующими способами:

$4=2\cdot 2$ и $4=\left(1+\sqrt{-3}\right)\left(1-\sqrt{-3}\right)$.

Можно доказать (мы опускаем здесь это доказательство), что числа 2, $1+\sqrt{-3}$, $1-\sqrt{-3}$ просты в $Z\left[\sqrt{-3}\right]$, причем 2 и $1+\sqrt{-3}$ не являются ассоциированными. Значит, в кольце $Z\left[\sqrt{-3}\right]$ число 4 допускает два существенно различных разложения на простые множители.

4. Обозначим через R числовое кольцо, состоящее из конечных сумм вида $\sum a_r 2^r$, где a_r — целые числа и r неотрицательные рациональные числа (при этом, например, $3\cdot 2^{\frac{3}{2}}-4\cdot 2^{\frac{1}{2}}$ и $2\cdot 2^{\frac{1}{2}}$ – один и тот же элемент кольца, поскольку $2^{\frac{3}{2}}=2\cdot 2^{\frac{1}{2}}$, и потому $3\cdot 2^{\frac{3}{2}}-4\cdot 2^{\frac{1}{2}}=2\cdot 2^{\frac{1}{2}}$). Так как R — числовое кольцо, оно является областью целостности. В этом кольце для числа 2 имеем бесконечную последовательность разложений:

$2=2^{\frac{1}{2}}\cdot 2^{\frac{1}{2}}=2^{\frac{1}{2}}\cdot 2^{\frac{1}{4}}\cdot 2^{\frac{1}{4}}=2^{\frac{1}{2}}\cdot 2^{\frac{1}{4}}\cdot 2^{\frac{1}{8}}\cdot 2^{\frac{1}{8}}=\ldots$

Значит, число 2 не имеет в R разложения на простые множители. Разобранные примеры показывают, что вопрос о разложении на простые множители в произвольных числовых кольцах сложнее, чем в кольце Z целых чисел. Причиной этого является то, что в произвольных числовых кольцах два элемента a и b могут не иметь наибольшего общего делителя, т. е. такого общего делителя a и b, который бы делился на все общие делители этих чисел. Чтобы найти выход из создавшегося положения, обобщили понятие делимости элементов. Это привело к созданию теории идеалов, которая и будет рассмотрена в следующем параграфе. С помощью теории идеалов удалось выяснить, в каких кольцах имеет место теорема о существовании и однозначности разложения на простые множители.

ЭЛЕМЕНТЫ ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ

§ 1. Системы линейных уравнений

Систему m линейных уравнений с n неизвестными будем записывать в следующем виде:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}. \qquad (1)$$

Здесь $x_1, x_2, \ldots, x_n$ – неизвестные величины, a_{ij} ($i = 1,2, \ldots, m$; $j = 1, 2, \ldots, n$) – числа, называемые коэффициентами системы (первый индекс фиксирует номер уравнения, второй — номер неизвестной), $b_1, b_2, \ldots, b_m$ – числа, называемые свободными членами.

Решением системы будем называть упорядоченный набор чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$, обращающий каждое уравнение системы в верное равенство.

Решить систему — значит найти все ее решения или доказать, что ни одного решения нет.

Система, имеющая решение, называется совместной.

Если система имеет только одно решение, то она называется определенной. Система, имеющая более чем одно решение, называется неопределенной (совместной и неопределенной).

Если система не имеет решений, то она называется несовместной.

Система, у которой все свободные члены равны нулю ($b_1 = b_2 = \ldots = b_n = 0$), называется однородной. Однородная система всегда совместна, так как набор из n нулей удовлетворяет любому уравнению такой системы.

Если число уравнений системы совпадает с числом неизвестных ($m=n$), то система называется квадратной.

Две системы, множества решений которых совпадают, называются эквивалентными или равносильными (совпадение множеств решений означает, что каждое решение первой системы является решением второй системы, и каждое решение второй системы является решением первой).

Две несовместные системы считаются эквивалентными.

Преобразование, применение которого превращает систему в новую систему, эквивалентную исходной, называется эквивалентным или равносильным преобразованием. Примерами эквивалентных преобразований могут служить следующие преобразования: перестановка местами двух уравнений системы, перестановка местами двух неизвестных вместе с коэффициентами у всех уравнений, умножение обеих частей какого-либо уравнения системы на отличное от нуля число.

§ 2. Метод Гаусса решения систем линейных уравнений

Рассмотрим квадратную систему

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 11 \\ 4x_1 + 6x_2 - x_3 = -1 \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 - x_4 = 3 \\ 5x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 2 \end{cases}. \qquad (1)$$

У этой системы коэффициент a_{11} отличен от нуля. Если бы это условие не выполнялось, то чтобы его получить, нужно было бы переставить местами уравнения, поставив первым то уравнение, у которого коэффициент при x_1 не равен нулю.

Проведем следующие преобразования системы:

1) поскольку $a_{11}\neq 0$, первое уравнение оставим без изменений;

2) вместо второго уравнения запишем уравнение, получающееся, если из второго уравнения вычесть первое, умноженное на 4;

3) вместо третьего уравнения запишем разность третьего и первого, умноженного на 3;

4) вместо четвертого уравнения запишем разность четвертого и первого, умноженного на 5.

Полученная новая система эквивалентна исходной и имеет во всех уравнениях, кроме первого, нулевые коэффициенты при x_1 (это и являлось целью преобразований 1 – 4):

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 11 \\ 10x_2 - 13x_3 - 8x_4 = -45 \\ 5x_2 - 7x_3 - 7x_4 = -30 \\ 4x_2 - 13x_3 - 9x_4 = -53 \end{cases}. \quad (2)$$

Можно доказать, что замена любого уравнения системы новым, получающимся прибавлением к данному уравнению любого другого уравнения системы, умноженного на любое число, является эквивалентным преобразованием системы.

Для приведенного преобразования и для всех дальнейших преобразований не следует целиком переписывать всю систему, как это только что сделано. Исходную систему можно представить в виде таблицы

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 2 & 11 \\ 4 & 6 & -1 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & 2 & -1 & 3 \\ 5 & -1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}. \quad (3)$$

Прямоугольную таблицу, состоящую из p строк и q столбцов, будем называть матрицей размера $p \times q$:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1q} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2q} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{p1} & a_{p2} & a_{p3} & \dots & a_{pq} \end{pmatrix}.$$

Числа a_{ij} называются элементами матрицы. Первый индекс фиксирует номер строки, а второй – номер столбца, в которых стоит данный элемент. Если $p = q$, то есть число столбцов матрицы равно числу строк, то матрица называется квадратной. Элементы a_{ii} образуют главную диагональ матрицы.

Матрица (3) называется расширенной матрицей для исходной системы уравнений. Если из расширенной матрицы удалить столбец свободных членов, то получится матрица коэффициентов системы, которую иногда называют просто матрицей системы.

Очевидно, что матрица коэффициентов квадратной системы является квадратной матрицей.

Каждую систему m линейных уравнений с n неизвестными можно представить в виде расширенной матрицы, содержащей m строк и n+1 столбцов. Каждую матрицу можно считать расширенной матрицей или матрицей коэффициентов некоторой системы линейных уравнений. Системе (2) соответствует расширенная матрица

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 2 & 11 \\ 0 & 10 & -13 & -8 & -45 \\ 0 & 5 & -7 & -7 & -30 \\ 0 & 4 & -13 & -9 & -53 \end{pmatrix}.$$

Преобразуем эту матрицу следующим образом:

1) первые две строки оставим без изменения, поскольку элемент a_{22} не равен нулю;

2) вместо третьей строки запишем разность между второй строкой и удвоенной третьей;

3) четвертую строку заменим разностью между удвоенной второй

строкой и умноженной на 5 четвертой.

В результате получится матрица, соответствующая системе, у которой неизвестная x_1 исключена из всех уравнений, кроме первого, а неизвестная x_2 — из всех уравнений кроме первого и второго:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 2 & 11 \\ 0 & 10 & -13 & -8 & -45 \\ 0 & 0 & 1 & 6 & 15 \\ 0 & 0 & 39 & 29 & 175 \end{pmatrix}.$$

Теперь исключим неизвестную x_3 из четвертого уравнения. Для этого последнюю матрицу преобразуем так:

1) первые три строки оставим без изменения, так как $a_{33} \neq 0$;

2) четвертую строку заменим разностью между третьей, умноженной на 39, и четвертой:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 2 & 11 \\ 0 & 10 & -13 & -8 & -45 \\ 0 & 0 & 1 & 6 & 15 \\ 0 & 0 & 0 & 205 & 410 \end{pmatrix}.$$

Полученная матрица соответствует системе

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 11 \\ 10x_2 - 13x_3 - 8x_4 = -45 \\ x_3 + 6x_4 = 15 \\ 205x_4 = 410 \end{cases}. \qquad (4)$$

Из последнего уравнения этой системы получаем $x_4 = 2$. Подставив это значение в третье уравнение, получим $x_3 = 3$. Теперь из второго уравнения следует, что $x_2 = 1$, а из первого — $x_1 = -1$. Очевидно, что полученное решение единственно (так как единственным образом определяется значение x_4, затем x_3 и т. д.).

Назовем элементарными преобразованиями матрицы следующие преобразования:

1) перемена местами двух строк;

2) умножение строки на число, отличное от нуля;

3) замена строки матрицы суммой этой строки с любой другой строкой, умноженной на некоторое число.

Если матрица А является расширенной матрицей некоторой системы, и путем ряда элементарных преобразований матрица *A* переводится в матрицу В, являющуюся расширенной матрицей некоторой другой системы, то эти системы эквивалентны.

Назовем квадратную матрицу, у которой на главной диагонали стоят числа, отличные от нуля, а под главной диагональю – нули, треугольной матрицей. Матрица коэффициентов системы (4) – треугольная матрица.

Если с помощью элементарных преобразований матрицу коэффициентов квадратной системы можно привести к треугольной матрице, то система совместна и определенна.

Рассмотрим другой пример:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - x_4 + 4x_5 = -2 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 + 3x_5 = 1 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 + x_5 = 7 \\ x_1 - 2x_2 + 5x_3 - 5x_4 + 10x_5 = -10 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 - 3x_5 = 9 \end{cases}. \qquad (5)$$

Проведем следующие преобразования расширенной матрицы системы:

1) первую строку оставим без изменения;

2) вместо второй строки запишем разность между второй строкой и удвоенной первой;

3) вместо третьей строки запишем разность между третьей строкой и утроенной первой;

4) четвертую строку заменим разностью между четвертой и первой;

5) пятую строку заменим разностью пятой строки и удвоенной первой.

В результате преобразований получим матрицу

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 & 4 & -2 \\ 0 & 5 & -5 & 0 & -5 & 5 \\ 0 & 5 & -7 & 4 & -11 & 13 \\ 0 & 0 & 2 & -4 & 6 & -8 \\ 0 & 5 & -7 & 4 & -11 & 13 \end{pmatrix}.$$

Оставив без изменения первые две строки этой матрицы, приведем ее элементарными преобразованиями к следующему виду:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 & 4 & -2 \\ 0 & 5 & -5 & 0 & -5 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & -4 & 6 & -8 \\ 0 & 0 & 2 & -4 & 6 & -8 \\ 0 & 0 & 2 & -4 & 6 & -8 \end{pmatrix}.$$

Если теперь, следуя методу Гаусса, который также называют и методом последовательного исключения неизвестных, с помощью третьей строки привести к нулю коэффициенты при x_3 в четвертой и пятой строках, то после деления всех элементов второй строки на 5 и деления всех элементов третьей строки на 2 получим матрицу

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Каждая из двух последних строк этой матрицы соответствует уравнению $0x_1+0x_2+0x_3+0x_4+0x_5 = 0$. Это уравнение удовлетворяется любым набором чисел $x_1, x_2, \ldots, x_5$, и его следует удалить из системы. Таким образом, система с только что полученной расширенной матрицей эквивалентна системе с расширенной матрицей вида

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 & 4 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 3 & -4 \end{pmatrix}. \qquad (6)$$

Последняя строка этой матрицы соответствует уравнению $x_3 - 2x_4 + 3x_5 = -4$. Если неизвестным x_4 и x_5 придать произвольные значения: $x_4 = r$; $x_5 = s$, то из последнего уравнения системы, соответствующей матрице (6), получим $x_3 = -4 + 2r - 3s$. Подставив выражения x_3, x_4, и x_5 во второе уравнение той же системы, получим $x_2 = -3 + 2r - 2s$. Теперь из первого уравнения можно получить $x_1 = 4 - r + s$. Окончательно решение системы представляется в виде

$$\begin{cases} x_1 = 4 - r + s \\ x_2 = -3 + 2r - 2s \\ x_3 = -4 + 2r - 3s \\ x_4 = r \\ x_5 = s \end{cases}.$$

Рассмотрим прямоугольную матрицу A, у которой число столбцов m больше, чем число строк n. Если матрицу A можно разделить вертикальной чертой на две матрицы: стоящую слева треугольную матрицу размера m и стоящую справа прямоугольную матрицу, то матрицу А назовем трапециевидной или трапецеидальной. Очевидно, что матрица (6) — трапециевидная матрица.

Если при применении эквивалентных преобразований к системе уравнений хотя бы одно уравнение приводится к виду

$$0x_1 + 0x_2 + ..0x_n = b_j \ \ (b_j \neq 0),$$

то система несовместна или противоречива, так как ни один набор чисел $x_1, x_2, .., x_n$ не удовлетворяет этому уравнению.

Если при преобразовании расширенной матрицы системы матрица коэффициентов приводится к трапецеидальному виду и при этом система не получается противоречивой, то система совместна и является неопределенной, то есть имеет бесконечно много решений.

В последней системе можно получить все решения, придавая конкретные числовые значения параметрам r и s.

Те переменные, коэффициенты при которых стоят на главной диагонали трапецеидальной матрицы (это значит, что эти коэффициенты отличны от нуля), называются базисными. В рассмотренном выше примере это неизвестные x_1, x_2, x_3. Остальные неизвестные называются свободными. В рассмотренном выше примере это неизвестные x_4, и x_5. Свободным неизвестным можно придавать любые значения или выражать их через параметры, как это сделано в последнем примере.

Базисные неизвестные единственным образом выражаются через свободные неизвестные.

Если свободным неизвестным приданы конкретные числовые значения и через них выражены базисные неизвестные, то полученное решение называется частным решением.

Если свободные неизвестные выражены через параметры, то получается решение, которое называется общим решением.

Все бесконечное множество решений системы можно получить, придавая свободным неизвестным любые числовые значения и находя соответствующие значения базисных неизвестных.

Если всем свободным неизвестным приданы нулевые значения, то полученное решение называется базисным.

Одну и ту же систему иногда можно привести к разным наборам базисных неизвестных. Так, например, можно поменять местами 3-й и 4-й столбцы в матрице (6). Тогда базисными будут неизвестные x_1, x_2, x_4, а свободными – x_3 и x_5. Рекомендуем читателю самостоятельно привести последнюю систему к такому виду, чтобы свободными неизвестными были x_1

и x_2, а базисными – x_3, x_4, x_5.

Если получены два различных набора базисных неизвестных при различных способах нахождения решения одной и той же системы, то эти наборы обязательно содержат одно и то же число неизвестных, называемое рангом системы.

Рассмотрим еще одну систему, имеющую бесконечно много решений:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 + 4x_4 + x_5 = 2 \\ 2x_1 + 3x_3 + 7x_4 - x_5 = 7 \\ 2x_1 - 4x_2 + 5x_3 + 9x_4 + 5x_5 = 1 \\ 3x_1 - x_2 + 5x_3 + 14x_4 - 2x_5 = 8 \end{cases}.$$

Проведем преобразование расширенной матрицы системы по методу Гаусса:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 4 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & -1 & -3 & 3 \\ 0 & 2 & -1 & -1 & -3 & 3 \\ 0 & 2 & -1 & 2 & -5 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 4 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & -1 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Как видно, мы не получили трапецеидальной матрицы, однако последнюю матрицу можно преобразовать, поменяв местами третий и четвертый столбцы:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & -1 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Эта матрица уже является трапецеидальной. У соответствующей ей системы две свободных неизвестных – x_3, x_5 и три базисных – x_1, x_2, x_4. Решение исходной системы представляется в следующем виде

$$\begin{cases} x_1 = \frac{14}{3} - \frac{3}{2}r - \frac{11}{6}s \\ x_2 = \frac{4}{3} + \frac{1}{2}r + \frac{11}{6}s \\ x_3 = r \\ x_4 = -\frac{1}{3} + \frac{2}{3}s \\ x_5 = s \end{cases}.$$

Приведем пример не имеющей решения системы:

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 7 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 5 \\ 4x_1 + 7x_2 - 3x_3 = 4 \end{cases}.$$

Преобразуем матрицу системы по методу Гаусса:

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 & 7 \\ 3 & 2 & -1 & 5 \\ 4 & 7 & -3 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 & 7 \\ 0 & 13 & -5 & -11 \\ 0 & 13 & -5 & -10 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 & 7 \\ 0 & 13 & -5 & -11 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Последняя строка последней матрицы соответствует не имеющему решения уравнению $0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = 1$. Следовательно, исходная система несовместна.

Сформулируем теперь кратко суть метода Гаусса. Полагая, что в системе коэффициент a_{11} отличен от нуля (если это не так, то следует на первое место поставить уравнение с отличным от нуля коэффициентом при x_1 и переобозначить коэффициенты), преобразуем систему следующим образом: первое уравнение оставляем без изменения, а из всех остальных уравнений исключаем неизвестную x_1 с помощью эквивалентных преобразований описанным выше способом.

В полученной системе

$$
\begin{cases}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ \ a_{13}x_3 + \ldots a_{1n}x_n = b_1 \\
\qquad\quad a_{22}^{*}x_2 + a_{23}^{*}x_3 + \ldots a_{2n}^{*}x_n = b_2^{*} \\
\qquad\quad a_{32}^{*}x_2 + a_{33}^{*}x_3 + \ldots a_{3n}^{*}x_n = b_3^{*} \\
\qquad\quad \ldots\ldots\ldots\ldots \\
\qquad\quad a_{m2}^{*}x_2 + a_{m3}^{*}x_3 + \ldots a_{mn}^{*}x_n = b_m^{*}
\end{cases},
$$

считая, что $a_{22}^{*} \neq 0$ (что всегда можно получить, переставив уравнения или слагаемые внутри уравнений и переобозначив коэффициенты системы), оставляем без изменений первые два уравнения системы, а из остальных уравнений, используя второе уравнения, с помощью элементарных преобразований исключаем неизвестную x_2. Во вновь полученной системе

$$
\begin{cases}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots a_{1n}x_n = b_1 \\
\qquad\quad a_{22}^{*}x_2 + a_{23}^{*}x_3 + \ldots a_{2n}^{*}x_n = b_2^{*} \\
\qquad\qquad\qquad a_{33}^{**}x_3 + \ldots a_{3n}^{**}x_n = b_3^{**} \\
\quad \ldots\ldots\ldots \\
\qquad\qquad\qquad a_{m3}^{**}x_3 + \ldots a_{mn}^{**}x_n = b_m^{**}
\end{cases}
$$

при условии $a_{33}^{**} \neq 0$ оставляем без изменений первые три уравнения, а из всех остальных с помощью третьего уравнения элементарными преобразованиями исключаем неизвестную x_3.

Этот процесс продолжается до тех пор, пока не реализуется один из трех возможных случаев:

1) если в результате приходим к системе, одно из уравнений которой имеет нулевые коэффициенты при всех неизвестных и отличный от нуля свободный член, то исходная система несовместна;

2) если в результате преобразований получаем систему с матрицей коэффициентов треугольного вида, то система совместна и является определенной;

3) если получается система с трапецеидальной матрицей коэффициентов (и при этом не выполняется условие пункта 1), то система

совместна и неопределенна.

§3. Элементы теории матриц

В предыдущем разделе было введено определение матрицы A размерности $p \times q$ как прямоугольной таблицы:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1q} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2q} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{p1} & a_{p2} & a_{p3} & \dots & a_{pq} \end{pmatrix}.$$

Можно пользоваться сокращенной формой записи:

$$A = (a_{ij});\ i = 1, 2, 3, \dots, p;\ j = 1, 2, 3, \dots, q.$$

Две матрицы одинаковой размерности $p \times q$ называются равными, если в них одинаковые места заняты равными числами (на пересечении i-й строки и j-го столбца в одной и в другой матрице стоит одно и то же число; i=1, 2, ..., p; j=1, 2, ..., q).

Пусть $A = (a_{ij})$ – некоторая матрица и α – произвольное число, тогда $\alpha A = (\alpha a_{ij})$, то есть при умножении матрицы A на число α все числа, составляющие матрицу А, умножаются на число α.

Пусть A и B – матрицы одинаковой размерности $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$, тогда их сумма $A + B$ – матрица $C = (c_{ij})$ той же размерности, определяемая из формулы $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$, то есть при сложении двух матриц попарно складываются одинаково расположенные в них числа.

Матрицу A можно умножить на матрицу B, то есть найти матрицу $C = AB$, если число столбцов n матрицы A равно числу строк матрицы В, при этом матрица С будет иметь столько строк, сколько строк у матрицы A и столько столбцов, сколько столбцов у матрицы B. Каждый элемент матрицы С определяется формулой

.

Элемент c_{ij} матрицы-произведения С равен сумме произведений элементов

i-

строки первой матрицы- сомножителя на соответствующие элементы j-го столбца второй матрицы-сомножителя.

Из сказанного следует, что если можно найти произведение матриц AB, то произведение BA, вообще говоря, не определено.

Приведем примеры перемножения матриц:

$$1)\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & -1 & -3 \\ 4 & -2 & 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & -4 \\ 6 & 2 \\ -3 & -1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1\cdot 2 + 2\cdot 1 + 33\cdot 6 + 4\cdot(-3) & 1\cdot 5 + 2\cdot(-4) + 3\cdot 2 + 4\cdot(-1) \\ 2\cdot 3 + 1\cdot 1 + (-1)\cdot 6 + (-3)\cdot(-3) & 2\cdot 5 + 1\cdot(-4) + (-1)\cdot 2 + (-3)\cdot(-1) \\ 4\cdot 5 + (-2)\cdot(-4) + 3\cdot 2 + 1\cdot(-1) & 4\cdot 5 + (-2)\cdot(-4) + 3\cdot 2 + 1\cdot(-1) \end{pmatrix} =$$

$= ;$

2) $= (8, 4)$.

Если АВ и BA одновременно определены, то, вообще говоря, эти произведения не равны. Это означает, что умножение матриц не коммутативно. Продемонстрируем это на примере.

.

Для алгебраических действий над матрицами справедливы следующие законы:

1) $A + B = B + A$;

2) $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$;

3) $(A + B) + C = A + (B + C)$;

4) $(AB)C = A(BC)$;

5) $A(B + C) = AB + AC$.

Матрица, состоящая из одной строки, называется вектором (вектором-строкой). Матрица, состоящая из одного столбца, также называется вектором (вектором-столбцом).

Пусть имеется матрица $A = (a_{ij})$ размерности $m \times n$, n-мерный вектор-столбец X и m-мерный вектор-столбец B:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

Тогда матричное равенство

$$AX = B, \tag{1}$$

если расписать его поэлементно, примет вид:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}.$$

Таким образом, формула (1) является записью системы m линейных уравнений с n неизвестными в матричной форме. Ниже будет показано, что, записывая систему в сжатом виде, кроме краткости написания мы получаем и другие очень важные преимущества.

Пусть имеются две квадратные матрицы одинаковой размерности:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}; \; D = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 7 \\ 3 & -5 & 9 \\ -1 & 4 & 6 \end{pmatrix}.$$

Требуется найти матрицу X, удовлетворяющую матричному уравнению

$$AX = D.$$

Из правила умножения матриц следует, что матрица X должна быть квадратной матрицей той же размерности, что и матрицы A и D:

$$\mathbf{X}=\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{pmatrix}.$$

Из правила умножения матриц и из определения равенства матриц следует, что последнее матричное уравнение распадается на три системы линейных уравнений:

$$\begin{cases} x_{11}+2x_{21}+x_{31}=2 \\ -x_{11}+3x_{21}+2x_{31}=3 \\ 2x_{11}+3x_{21}+x_{31}=-1 \end{cases};$$

$$\begin{cases} x_{12}+2x_{22}+x_{32}=1 \\ -x_{12}+3x_{22}+2x_{32}=-5 \\ 2x_{12}+3x_{22}+x_{32}=4 \end{cases}; \qquad (2)$$

.

Все три системы (2) имеют одинаковые матрицы коэффициентов, что дает возможность решать их одновременно, введя матрицу

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 7 \\ -1 & 3 & 2 & 3 & -5 & 9 \\ 2 & 3 & 1 & -1 & 4 & 6 \end{pmatrix}.$$

Здесь первые четыре столбца образуют расширенную матрицу первой системы, первые три столбца вместе с пятым столбцом образуют расширенную матрицу второй системы, а первые три столбца вместе с шестым – расширенную матрицу третьей системы.

Применим для решения метод Жордана-Гаусса который является модификацией метода Гаусса.

Первый шаг преобразования матрицы по методу Жордана-Гаусса совпадает с первым шагом преобразований по методу Гаусса. Оставляем без изменений первую строку матрицы, а во второй и третьей “организуем” нули в первом столбце:

.

Теперь, следуя методу Жордана-Гаусса, оставляем без изменения лишь вторую строку (так как $a_{22} \neq 0$) и получаем с помощью второй строки в первой и третьей строках во втором столбце нули. Для этого вместо первой строки пишем сумму первой строки, умноженной на 5, и второй строки, умноженной на –2. Вместо третьей строки пишем сумму третьей строки , умноженной на 5, и второй строки, умноженной на –1 После деления полученной третьей строки на 2 получаем матрицу

.

Чтобы в первой и второй строках в третьем столбце получить нули, проведем следующие преобразования последней матрицы. Оставив третью строку без изменений, заменим вторую строку разностью второй строки и утроенной третьей, а первую – суммой первой и третьей строк. После деления первой и второй строк преобразованной матрицы на 5 получится матрица

. (3)

При преобразовании системы по методу Жордана-Гаусса матрица коэффициентов приводится (если это возможно) к такому виду, что на главной диагонали стоят единицы, а над главной диагональю и под главной диагональю – нули.

Если взять первые четыре столбца матрицы (3), то получится матрица, в которую преобразовалась расширенная матрица первой из систем уравнений (2). Из нее следует: $x_{11}=2$; $x_{21}=-5$; $x_{31}=10$. Матрица, образованная первыми тремя столбцами вместе с пятым столбцом матрицы (3), дает решение второй системы уравнений (2): $x_{12}=2$; $x_{22}=1$; $x_{32}=-3$. И, наконец, матрица, образованная первыми тремя столбцами вместе шестым столбцом матрицы (3), дает решение третьей системы уравнений (2): $x_{13}=3$; $x_{23}=-4$; $x_{33}=12$.

Из сказанного можно сделать очень интересный и важный вывод: последние три столбца матрицы (3) образуют искомую матрицу X.

$$X = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ -5 & 1 & -4 \\ 10 & -3 & 12 \end{pmatrix}.$$

Введем ряд новых определений.

Нулевой матрицей называется матрица, у которой все элементы – нули. Очевидно равенство А + (–1)А = 0. Здесь в правой части через 0 обозначена нулевая матрица той же размерности, что и матрица А.

Квадратная матрица размера n называется единичной, если все её элементы, стоящие на главной диагонали, равны единице, а все остальные – нули. Единичную матрицу можно определить формулами:

$$a_{ij} = 1 \text{ при } i = j;$$

$$a_{ij} = 0 \text{ при } i \neq j.$$

Очевидно, что первые три столбца матрицы (3) образуют единичную матрицу.

Единичная матрица, как правило, обозначается буквой Е:

$$\mathbf{E} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Легко проверить справедливость равенств: ЕА = АЕ = А. Здесь А – квадратная матрица, и размеры А и Е одинаковы.

Пусть А – квадратная матрица. Обратной матрицей к матрице А называется такая матрица A^{-1}, для которой справедливы равенства:

$$AA^{-1} = A^{-1}A = E.$$

Очевидно, что A^{-1} – квадратная матрица того же размера, что и матрица А. Сразу заметим, что не всякая квадратная матрица имеет обратную матрицу.

Поставим задачу: найти обратную матрицу к матрице

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Условие

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

где $\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{pmatrix} = \mathbf{A}^{-1}$,

сводится к трём системам уравнений, которые будем решать одновременно, используя метод Жордана-Гаусса. Матрица, представляющая расширенные матрицы всех трёх систем, примет вид

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Подвергая её преобразованиям по методу Жордана-Гаусса, последовательно будем получать:

$$\Rightarrow\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\Rightarrow \qquad (4)$$

Как и в предыдущем примере, можно сказать, что три последних столбца образуют искомую матрицу, то есть

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{7}{8} & -\frac{9}{8} & \frac{5}{8} \\ \frac{5}{8} & -\frac{3}{8} & -\frac{1}{8} \\ -\frac{3}{8} & \frac{5}{8} & -\frac{1}{8} \end{pmatrix}.$$

Теперь сформулируем правило, по которому находится матрица, обратная к квадратной матрице А размера n.

Нужно выписать матрицу размерности $n \times 2n$, первые n столбцов которой образованы матрицей А, а последние n столбцов образуют единичную матрицу Е. Построенная таким образом матрица преобразуется по методу Жордана-Гаусса так, чтобы на месте матрицы А получилась единичная матрица, если это возможно. Тогда на месте матрицы Е получается матрица $А^{-1}$.

Если матрицу А нельзя методом Жордана-Гаусса преобразовать к единичной матрице, то $А^{-1}$ не существует. Так матрица

не имеет обратной. Читатель может в этом убедиться самостоятельно.

§4. Определители

Рассмотрим систему двух линейных уравнений с двумя неизвестными в общем виде:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases}.$$

Найдем x_1 следующим образом: чтобы исключить x_2, умножим первое уравнение на a_{22} и из полученного уравнения вычтем второе, умноженное на a_{12}:

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 = b_1a_{22} - b_2a_{12}. \qquad (1)$$

Обозначим $\Delta = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$, $\Delta_1 = b_1a_{22} - b_2a_{12}$.

Для определения x_2 поступим так: умножим второе уравнение на a_{11} и из полученного уравнения вычтем первое, умноженное на a_{21}:

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_2 = a_{11}b_2 - a_{21}b_1. \qquad (2)$$

Обозначим $\Delta_2 = a_{11}b_2 - a_{21}b_1$.

Из (1) и (2) видно, что если $\Delta \neq 0$, то система имеет единственное решение[1], определяемое формулой

$$x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta}, i = 1,2. \qquad (3)$$

Величина Δ называется определителем матрицы второго порядка

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

Вообще определителем произвольной матрицы второго порядка

$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix}$ называется число, которое обозначается и равно произведению двух чисел, стоящих на главной диагонали минус произведение двух чисел, стоящих на другой диагонали: $\alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{12}\alpha_{21}$.

Например,

$$\begin{vmatrix} 3 & -4 \\ -2 & -5 \end{vmatrix} = -15 - 8 = -23.$$

Из сказанного следует, что величины Δ_1 и Δ_2 в (3) тоже являются определителями:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}; \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}.$$

Рассмотрим теперь систему трех линейных уравнений с тремя

1 Если говорить строго, то из (1) и (2) следует, что если решение существует, то оно единственным образом выражается через коэффициенты системы и свободные члены. Чтобы доказать существование, надо подставить две формулы (3) в систему и убедиться в том, что оба уравнения обращаются в верные равенства.

неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}. \qquad (4)$$

Введем определение. Определителем произвольной квадратной матрицы третьего порядка $\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix}$ называется сумма шести слагаемых, каждое из которых представляет собой произведение трех элементов матрицы, выбираемых по следующему правилу: три произведения элементов, стоящих на главной диагонали и в вершинах двух треугольников: , берутся со знаком "+", а три произведения элементов, стоящих на второй диагонали и в вершинах двух других треугольников: , берутся со знаком "–". Определитель третьего порядка обозначается так:

$$\begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{vmatrix}.$$

Например,

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ -1 & -2 & 3 \\ 2 & 4 & 9 \end{vmatrix} = 2\cdot(-2)\cdot 9 + 3\cdot 3\cdot 2 + (-1)\cdot 4\cdot 5 - 2\cdot(-2)\cdot 5 - (-1)\cdot 3\cdot 9 - 4\cdot 3\cdot 2 =$$

$$= -36 + 18 - 20 + 20 + 27 - 24 = -15$$

Решая систему (4), например методом Гаусса, можно получить равенства

$$\Delta\cdot x_1 = \Delta_1;\ \Delta\cdot x_2 = \Delta_2;\ \Delta\cdot x_3 = \Delta_3, \qquad (5)$$

где

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}; \Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix};$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}; \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}.$$

Из формул (5) видно, что если $\Delta \neq 0$, то единственным образом определяется решение системы:

$$x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta}, i = 1,2,3.$$

Решая квадратные системы линейных уравнений 4-го, 5-го или любого более высокого порядка, можно получить формулы, аналогичные формулам (1), (2) или (5).

Дадим определение определителя

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

квадратной матрицы n-го порядка или просто определителя n-го порядка. (В дальнейшем, принимая во внимание введённое обозначение, под элементами, строками и столбцами определителя матрицы будем подразумевать элементы, строки и столбцы этой матрицы.)

Сформулируем понятие $n!$ (читается *эн факториал*): если n – натуральное (целое положительное) число, то $n!$ – это произведение всех натуральных чисел от 1 до n.

$$n! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot(n-1)\, n.$$

Например,

$$5! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5 = 120.$$

Замечание: в некоторых книгах вместо термина "определитель" используется термин "детерминант" и определитель матрицы А обозначается detA.

Определителем n-го порядка называется сумма $n!$ слагаемых. Каждое слагаемое представляет собой произведение n элементов, взятых по одному из каждой строки и каждого столбца определителя[2]. (Произведения отличаются одно от другого набором элементов.) Перед каждым произведением ставится
знак "+" или "–". Покажем, как определить, какой нужно ставить знак перед произведением.

Так как в каждом произведении присутствует один элемент из 1-й строки, один элемент из 2-ой и т.д., то произведение в общем виде можно записать так:

$$a_{1i}\cdot a_{2j}\cdot a_{3k}\cdot\ldots\cdot a_{ns}.$$

Здесь i, j, k, …, s – номера столбцов, в которых стоят элементы, выбранные из 1-й, 2-й, 3-й, ... n-й строк, соответственно. Ясно из сказанного выше, что каждое из чисел $i, j, k, \ldots, s$ равно какому-либо из чисел 1, 2, ..., n, и что все числа $i, j, k, \ldots, s$ – различные.

Расположенные в данном порядке

$$i, j, k, \ldots, s$$

эти числа образуют "перестановку" из чисел 1, 2, ..., n (перестановкой называется заданный порядок в конечном множестве).

Взаимное расположение двух чисел в перестановке, когда большее стоит впереди меньшего называется инверсией. Например, в перестановке три инверсии; в перестановке – шесть инверсий.

Перестановка называется четной, если в ней четное число инверсий и

2 Попробуйте доказать сами, что таких произведений, отличающихся одно от другого набором элементов существует ровно n!

нечетной, если число инверсий нечетное.

Теперь можно сформулировать правило: произведение $a_{1i}\cdot a_{2j}\cdot a_{3k}\cdot\ldots\cdot a_{ns}$ берется со знаком "+", если вторые индексы образуют четную перестановку, и со знаком "–", если нечетную.

Из определения определителя можно вывести следующие его свойства.

1. Если поменять местами две строки определителя (два столбца), то получим новый определитель, равный исходному умноженному на .

2. Определитель, имеющий две равных строки (два равных столбца), равен нулю.

3. Если одну из строк определителя умножить на какое-либо число, то получится определитель, равный исходному умноженному на это число.

4. Определитель транспонированной[3] матрицы равен определителю исходной матрицы.

5. Если в определителе вместо любой строки записать сумму этой строки и любой другой строки, умноженной на некоторое число, то полученный новый определитель будет равен исходному.

До сих пор было показано, как вычислять определитель второго и третьего порядков. Чтобы вычислить определитель более высоких порядков, пользуются формулой Лапласа разложения определителя по строке или столбцу:

$$\det A = a_{i1}(-1)^{i+1}M_{i1} + a_{i2}(-1)^{i+2}M_{i2} + \ldots + a_{in}(-1)^{i+n}M_{in} =$$

$$= a_{1j}(-1)^{1+j}M_{1j} + a_{2j}(-1)^{2+j}M_{2j} + \ldots + a_{nj}(-1)^{n+j}M_{nj}$$

Здесь i и j — любые числа от 1 до n. Последняя формула представляет собой разложение определителя по i-й строке или j-му столбцу. M_{ij} называется минором и равняется определителю порядка $n-1$, который получается из

3 i-я строка исходной матрицы **A**, имеющей m строк, является i-м столбцом транспонированной матрицы . Например,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, A^T = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Операцию транспонирования матрицы можно назвать поворотом на 180° вокруг главной диагонали.

определителя detA, если вычеркнуть i-ю строку и j-й столбец. Произведение $(-1)^{i+j}M_{ij}$ обозначается A_{ij} и называется алгебраическим дополнением элемента a_{ij}.

Пусть Δ – определитель четвертого порядка: $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & -2 & 5 \\ 6 & 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$. Представим его разложение по второй строке:

$$\Delta = 2(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & 5 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} + (-1)(-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ -3 & -2 & 5 \\ 6 & 8 & 9 \end{vmatrix} + 1(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -3 & 1 & 5 \\ 6 & 7 & 9 \end{vmatrix} + 0,$$

и по второму столбцу:

.

Аналогичным образом можно вычислить Δ, разлагая его по первой, третьей, четвертой строке или по первому, второму или четвертому столбцу.

Вычисление определителя четвертого порядка сводится в худшем случае (если среди элементов нет нулей) к вычислению четырех определителей третьего порядка.

Аналогичным образом вычисление определителя 5-го порядка сводится к вычислению 5-ти определителей 4-го порядка и т.д.

Для того чтобы получить представление о том, что такое определитель n-го порядка, не прибегая к определению на предыдущей странице, можно поступить так: выучить, как вычисляются определители 2-го и 3-го порядков и как по методу Лапласа сводить вычисление определителя n-го порядка к вычислению определителя n – 1-го порядка. Тогда становится понятным, как вычислять определитель 4-го порядка, затем 5-го порядка и т. д.

Из сказанного следует, что вычисление определителя 5-го порядка можно в общем случае свести к вычислению 20-ти(!) определителей 3-го порядка, что очень затрудняет задачу.

Вычисление определителя упрощается, если воспользоваться свойством 5. Пусть Δ – определитель четвертого порядка

.

Этот определитель разложим по третьей строке, так как там есть нуль и, что особенно важно, –1. Задача заключается в таком преобразовании определителя Δ, чтобы получить нули на месте a_{31} и a_{33}. К первому столбцу прибавим второй столбец, умноженный на –2, а к третьему столбцу прибавим второй столбец, умноженный на –3. Второй столбец, с помощью которого проводились преобразования, остается без изменений.

Таким образом, вычисление определителя 4-го порядка сведено к вычислению только одного определителя 3-го порядка:

.

Пусть теперь Δ — определитель 5-го порядка:

.

Предположим, что мы решили разложить его по первому столбцу. Можно поступить следующим образом. Оставим первую строку без изменений. Вторую строку умножим на 3 и прибавим к ней первую, умноженную на –2. При этом обязательно за знак определителя выносится множитель $\frac{1}{3}$ (см. свойство 3). Вместо третьей строки пишем сумму третьей и умноженной на первой. Четвертую строку умножаем на 3 и прибавляем первую, умноженную на –4, опять вынося множитель $\frac{1}{3}$ за знак определителя. Пятую строку умножаем на 3, прибавляем к ней первую, умноженную на –5 и опять выносим за знак определителя. Теперь получим

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 5 & . & . & . \\ 0 & . & . & . & . \\ 0 & . & . & . & . \\ 0 & . & . & . & . \\ 0 & . & . & . & . \end{vmatrix} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3}.$$

Теперь вычисление определителя 5-го порядка сведено к вычислению только одного определителя 4-го порядка.

Таким образом, пользуясь свойствами определителя и методом Лапласа, можно вычисление определителя n-го порядка свести к вычислению лишь одного определителя порядка n – 1.

§5. Вычисление обратной матрицы

Пусть A = (a_{ij}) – квадратная матрица с определителем, не равным нулю. Тогда существует обратная матрица A^{-1}, которая вычисляется по формуле

$$\mathbf{A}^{-1} = \left(c_{ij}\right) = \left(\frac{A_{ji}}{\det \mathrm{A}}\right).$$

Последняя формула означает, что в i-й строке и j-м столбце обратной матрицы располагается алгебраическое дополнение элемента, стоящего в j-й строке и в i-м столбце исходной матрицы, деленное на определитель исходной матрицы.

Напомним здесь, что $A_{pq} = (-1)^{p+q}M_{pq}$, где M_{pq} называется минором и представляет собой определитель, получающийся из определителя detA вычеркиванием p-й строки и q-го столбца.

Рассмотрим пример:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 5 & 1 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix} \quad \det A = 20 + 6 - 24 = 2;$$

$$\begin{array}{lll} A_{11} = 20, & A_{12} = -9, & A_{13} = -15, \\ A_{21} = -8, & A_{22} = 4, & A_{23} = 6, \\ A_{31} = 2, & A_{32} = -1, & A_{33} = -1; \end{array} \qquad \mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 10 & -4 & 1 \\ -\frac{9}{2} & 2 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{15}{2} & 3 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Еще раз подчеркнем, что обратная матрица существует только для квадратной матрицы с определителем, отличным от нуля!

§6. Правило Крамера решения квадратных систем линейных уравнений.

Пусть мы имеем квадратную систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}.$$

Ее можно записать в матричной форме:

$$AX = B,$$

где

$$\mathbf{A} = (a_{ij})i, j = 1,2,\ldots,n; \mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}; \mathbf{B} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Если определитель матрицы A не равен нулю, то система имеет единственное решение, определяемое формулами:

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{\Delta_1}{\Delta} \\ x_2 = \dfrac{\Delta_2}{\Delta} \\ \ldots\ldots \\ x_n = \dfrac{\Delta_n}{\Delta} \end{cases}.$$

Здесь Δ_i – определитель n-го порядка, получающийся из определителя Δ матрицы А коэффициентов системы заменой i-го столбца столбцом свободных членов.

Например,

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 2 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 3 \\ 4x_1 + x_2 + 3x_3 = 5 \end{cases};$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & 3 \end{vmatrix} = -17; \Delta_1 = \begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 5 & 1 & 3 \end{vmatrix} = -16;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 4 & 5 & 3 \end{vmatrix} = 3; \Delta_3 = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 5 \end{vmatrix} = -8;$$

$$x_1 = \frac{16}{17}; x_2 = -\frac{3}{17}; x_3 = \frac{8}{17}.$$

Отметим, что если определитель матрицы А коэффициентов квадратной системы линейных уравнений равен нулю, то возможен один из двух случаев: либо система несовместна, либо она совместна и неопределенна.

Теоремы Фредгольма

В этом параграфе излагается бездетерминантная теория линейных уравнений. Преимущество ее заключается в том, что она послужила основой и аналогом для многих обобщений в математическом анализе. Первые такие важные обобщения принадлежат Фредгольму.

Будем рассматривать линейный оператор A:

$$y = Ax \quad (x \in R_n), \tag{1}$$

приводящий в соответствие каждому вектору $x \in R_n$ вектор $y \in R_n$ при помощи равенств

$$y_i = \sum_{s=1}^{n} a_{is} x_s \quad (i = 1,\dots,n). \tag{2}$$

Здесь

$$A = \|a_{is}\| = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ . & . & . & . \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{Vmatrix} \tag{3}$$

—заданная квадратная матрица. Оператору A соответствует сопряженный ему оператор

$$y = A^* x \quad (x \in R_n), \tag{1*}$$

определяемый сопряженной к (2) матрицей

$$A^* = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ . & . & , & . \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{Vmatrix}. \tag{3*}$$

При помощи компонент векторов x, y он записывается в виде

$$y_j = \sum_{l=1}^{n} a_{lj} x_j \quad (j = 1,\dots,n). \tag{2*}$$

т. е. компонента y_j выражается через координаты вектора x с помощью j-й строки матрицы A^* или j-го столбца матрицы A.

Справедливо равенство

$$(Ax, z) = (x, A^* z), \quad \forall\, x, z \in R_n, \tag{4}$$

верное для всех $x, y \in R_n$. В самом деле,

$$\left(Ax, z\right) = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{s=1}^{n} a_{is} x_s \right) z_i = \sum_{s=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} a_{is} z_i \right) x_s = \left(x, A^* z\right).$$

Равенство (4) характерно для сопряженного оператора, потому что, если для некоторого линейного оператора B выполняется равенство

$$\left(Ax, z\right) = \left(x, Bz\right), \quad \forall\, x, z \in R_n, \tag{5}$$

то необходимо $B = A^*$. Действительно $\left(B = \|b_{ir}\|\right)$,

$$\left(Ax, z\right) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{s=1}^{n} a_{is} x_s z_i$$

$$\left(x, Bz\right) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{s=1}^{n} b_{si} z_i x_s = \sum_{i=1}^{n} \sum_{s=1}^{n} b_{si} x_s z_i$$

Из (5) следует, что,

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{s=1}^{n} a_{is} x_s z_i = \sum_{i=1}^{n} \sum_{s=1}^{n} b_{si} x_s z_i \tag{6}$$

откуда $a_{is} = b_{si}$ $\left(i, s = 1,\ldots,n\right)$, в чем можно убедиться, если положить в (6) $x = \left(0,\ldots,0,1,0,\ldots,0\right)$ и $z = \left(0,\ldots,0,1,0,\ldots,0\right)$ где у x единица стоит на s-м месте, а у z — на i-м месте.

Таким образом, сопряженный оператор A^* к линейному оператору A, можно также определить как такой линейный оператор, для которого выполняется равенство (4).

Равенства (1) и (I*) можно рассматривать как уравнения — задан вектор $y \in R_n$, и мы ищем $x \in R_n$, для которого выполняется равенство (1) или (1*).

Соответствующие однородные уравнения имеют вид.

$$Ax = o \tag{1_0}$$

или

$$\sum_{s=1}^{n} a_{is} x_s = 0 \quad \left(i = 1,\ldots,n\right) \tag{2_0}$$

и

$$A^* z = o \qquad (1^*_0)$$

или

$$\sum_{l=1}^{n} a_{lj} x_l = 0 \quad (j = 1,\dots,n) \qquad (2^*_0)$$

Обозначим через L образ пространства R_n при помощи оператора A: $L = A(R_n)$,

и через L' подпространство всех векторов z, удовлетворяющих однородному сопряженному уравнению (1^*_0).

Мы назвали L' подпространством, потому что вместе с z, z', к нему принадлежат также $\alpha z + \beta z'$, где α и β – числа:

$$A^*(\alpha z + \beta z') = \alpha A^* z + \beta A z' = o$$

L есть тоже подпространство, потому что, если $y, y' \in L$, то существуют векторы $x, x' \in R_n$ такие, что $y = Ax,\ y' = Ax'$, и, следовательно,

$$\alpha y + \beta y' = \alpha Ax + \beta Ax' = A(\alpha x + \beta x'),$$

т.е. $\alpha y + \beta y' \in L.$

Лемма 1. Подпространства L и L' взаимно ортогональны, т. е. L' есть множество всех векторов z, каждый из которых ортогонален к L, а L в свою очередь есть множество всех векторов y, каждый из которых ортогонален к L'. Если L имеет k измерений, L' имеет $n-k$ измерений.

Доказательство. Обратимся к равенству

$$(Ax, z) = (x, A^* z) \qquad (7)$$

верному для всех $x, z \in R_n$. Пусть z есть вектор, ортогональный к L, тогда для него левая часть (7) равна нулю для $x \in R_n$, но тогда и правая, часть равна нулю для всех $x \in R_n$, в частности для $x = A' z$:

$$(A^* z, A^* z) = 0.$$

Следовательно, $A^* z = o$. Мы доказали, что если вектор z ортогонален к L, то он удовлетворяет уравнению $A^* z = o$ (т.е. $z \in L'$).

Обратно, пусть вектор z удовлетворяет уравнению $A^*z=o$. Для такого z правая часть (7) равна нулю при любых x, но тогда и левая равна нулю, т. е. z ортогонален ко всем векторам вида Ax, т. е. ко всем векторам $y\in L$. Другими словами, z ортогонален к L.

Мы доказали, что L' есть множество всех векторов z, ортогональных к подпространству L. Но тогда на основании ранее доказанной теоремы и, обратно, L есть множество всех векторов y, ортогональных к L', и сумма измерений L и L' равна n. Лемма доказана,

Справедлива теорема.

Теорема 1. Для того чтобы уравнение

$$y=Ax \qquad (1')$$

имело решение для данного вектора $y\in R_n$ необходимо и достаточно, чтобы вектор y был ортогональным ко всем векторам z, удовлетворяющим однородному сопряженному уравнению

$$A^*z=0. \qquad (1^*_0)'$$

Решение x уравнения (1), если оно существует, можно записать в виде суммы

$$x=x^0+u,$$

где x^0 — какое-либо частное решение уравнения (1), а u — произвольное решение однородного уравнения

$$Au=o. \qquad (1_0)$$

Любая указанная сумма есть решение (1').

Доказательство. В силу леммы 1, если $L=A(R_n)$, а L' есть множество всех z, удовлетворяющих уравнению $A^*z=o$, то L и L' суть подпространства, ортогональные взаимно. Но тогда, если для y существует решение уравнения (1), то $y\in L$ и необходимо все $z\in L'$ ортогональны к y. Если же вектор y ортогоналён ко всем $z\in L'$, то $y\in L$,т. е. существует x, для которого $y=Ax$.

Пусть теперь для вектора y существует решение уравнения (1'). Обозначим его через x^0:

$$y = Ax^0$$

Тогда, очевидно, сумма $x^0 + u$, где $Au = o$, есть тоже решение уравнения (1'):

$$A\left(x^0 + u\right) = Ax^0 + Au = y + o = y.$$

Обратно, если x есть произвольное решение уравнений (1'), а x^0 — определенное частное решение, то

$$y = Ax, \; y = Ax^0,$$

и, следовательно,

$$o = Ax - Ax^0 = A\left(x - x^0\right) = Au,$$

где $u = x - x^0$, т. е. $x = x^0 + u$, где u удовлетворяет уравнению $Au = o$.

Замечание. Поясним на примере пространства R_2 связь теоремы. 1 с теорией Кронекера – Капели.

Пусть вектор $y = \left(y_1, y_2\right)$ ортогонален ко всем решениям системы

$$\left.\begin{aligned} a_{11}z_1 + a_{21}z_2 = 0, \\ a_{12}z_1 + a_{22}z_2 = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (8)$$

Покажем, что тогда ранги матрицы A и расширенной матрицы

$$B = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & y_1 \\ a_{21} & a_{22} & y_2 \end{Vmatrix}$$

равны между собой. Если $рангA = 2$, то, очевидно, $рангB = 2$. Пусть $рангA = 1$. Всегда $рангB \geq рангA = 1$. Поэтому нам необходимо доказать, что

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & y_1 \\ a_{21} & y_2 \end{vmatrix} = 0, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{12} & y_1 \\ a_{22} & y_2 \end{vmatrix} = 0.$$

В самом деле, так как y ортогонален к решениям системы (8) (нетривиальным), то $y_1 z_1 + y_2 z_2 = 0$. Поэтому, считая, что $z_1 \neq 0$,

$$\Delta_1 = a_{11}y_2 - a_{21}y_1 = a_{11}y_2 - a_{21}\frac{y_2 z_2}{z_1} = \frac{y_2}{z_1}\left(a_{11}z_1 + a_{21}z_2\right) = 0,$$

$$\Delta_2 = a_{12}y_2 - a_{22}y_1 = a_{12}y_2 - a_{22}\frac{y_2 z_2}{z_1} = \frac{y_2}{z_1}\left(a_{12}z_1 + a_{22}z_2\right) = 0$$

Отсюда следует, что $рангB = рангA = 1$.

Обратно, пусть вектор $y = (y_1, y_2)$ таков, что $рангB = рангA$, тогда (1) имеет некоторое решение (x_1, x_2). Докажем, что y ортогонален к решениям $z = (z_1, z_2)$ системы (8). В самом деле,

$$y_1 z_1 + y_2 z_2 = (a_{11}x_1 + a_{12}x_2)z_1 + (a_{21}x_1 + a_{22}x_2)z_2 =$$
$$= (a_{11}z_1 + a_{21}z_2)x_1 + (a_{12}z_1 + a_{22}z_2)x_2 = 0\cdot x_1 + 0\cdot x_2 = 0.$$

Теорема 2. Однородные уравнения

$$Ax = o \qquad (1_0)$$

и

$$A^* x = o \qquad (1^*_0)$$

имеют одинаковое число линейно независимых решений.

В частности, если одно из этих уравнений имеет только тривиальное решение о, т. е. имеет нуль независимых решений, то это верно и для другого.

Замечание. В последнем случае уравнение (1) имеет единственное решение.

Доказательство. Матрицы A и A^* имеют один и тот же ранг, который обозначим через k. Они имеют также один и тот же определитель Δ.

Если $k = n$, то $\Delta \neq 0$ и уравнения (1_0) и . (1^*_0) имеют только тривиальные решения o. В этом случае, согласно теореме 1, уравнение (1) имеет единственное решение при любых $y \in R_n$.

Пусть теперь $1 \le k < n$. После соответствующей перенумерации уравнений и компонент определитель

$$\begin{Vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} \\ . \ . & . \ . & . \ . \\ a_{k1} & \dots & a_{kk} \end{Vmatrix} \neq 0$$
.

Первые k уравнений (1^0) теперь запишем в виде

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1k}z_k &= -a_{1,k+1}x_{k+1} - \ldots - a_{1n}x_n, \\ a_{k1}x_1 + \ldots + a_{kk}z_k &= -a_{k,k+1}x_{k+1} - \ldots - a_{kn}x_n, \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Ниже приводится таблица $n-k$ векторов

$$\left.\begin{aligned} x^1 &= \left(x_1^1,\ldots,x_k^1,1,0,\ldots,0\right) \\ x^2 &= \left(x_1^2,\ldots,x_k^2,0,1,\ldots,0\right) \\ &\quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \\ x^{n-k} &= \left(x_1^{n-k},\ldots,x_k^{n-k},0,\ldots,0,1\right) \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

Чтобы получить первый вектор, подставляем в систему (9)

$$x_{k+1} = 1,\ x_{k+2} = 0,\ldots,x_n = 0$$

и решаем ее относительно $x_1,\ldots,x_k$. Единственные решения, которые здесь получаются, обозначим через $x_1^1,\ldots,x_k^1$. Чтобы получить второй вектор, подставляем в (9)

$$x_{k+1} = 0,\ x_{k+2} = 1,\ x_{k+3} = 0,\ldots,x_n = 0$$

и находим числа $x_1^2,\ldots,x_k^2$ и т. д. Векторы (10) обладают следующими свойствами.

1) Система векторов (10) линейно независима, потому что ранг матрицы этих векторов равен числу этих векторов $\mu = n-k$.

2) Каждый вектор системы (10) есть решение (любых!) уравнений (1_0) или $Ax = o$.

3) Всевозможные решения уравнения имеют вид

$$\lambda_1 x^1 + \ldots + \lambda_{n-k}x^{n-k},$$

где $\lambda_1,\ldots,\lambda_{n-k}$ — произвольные числа.

Обычно эти три утверждения заменяют словами уравнение (1_0), имеет $n-k$ линейно независимых решений.

Подобными рассуждениями, учитывая, что $рангA = рангA^*$, доказываем, что уравнение $A^*x = o$ тоже имеет $n-k$ линейно независимых решений. Теорема доказана.

Теорема 3. Если одно из однородных уравнений (1_0) или(1^*_0) имеет k

линейно независимых решений, то и другое имеет k линейно независимых решений; образы же $L = A(R_n)$ и $L^* = A^*(R_n)$ пространства R_n, получаемые при помощи операторов A и A^*, суть подпространства $n - k$ измерений.

Доказательство. Первое утверждение теоремы о равенстве количеств линейно независимых решений однородных уравнений (1_0) и (1^*_0) есть теорема 2, а второе — есть лемма 1, в силу которой измерение подпространства L равно $n - k$, где k — измерение подпространства L' векторов z, удовлетворяющих уравнению $A^* x = o$. Аналогично измерение L^* равно $n - k$, где k — количество измерений подпространства векторов u, удовлетворяющих уравнению $Ax = o$.

Глава 1 **ЛИНЕЙНЫЕ ПРОСТРАНСТВА**.

§ 1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЛИНЕЙНОГО ПРОСТРАНСТВА. ПРИМЕРЫ.

Рассмотрим совокупность направленных отрезков пространства, исходящих из некоторой точки O. По правилу параллелограмма для любых двух таких отрезков или векторов a и b найдется вектор $a+b$. Кроме этой операции сложения векторов, хорошо известна также операция умножения вектора a на вещественное число λ. Часто эту совокупность векторов с указанными операциями называют векторным пространством. В дальнейшем оно обозначается V_3.

Аксиоматизируя свойства операций над векторами из V_3, приходим к общему понятию векторного, или линейного пространства.

Определение 1. Пусть P - некоторое числовое поле, R - любое непустое множество элементов и

а) в R определена операция сложения (т е. указан закон, по которому для любых двух элементов $a, b \in R$ находится вполне определенный элемент в R, называемый их суммой и обозначаемый $a+b$).

б) определена операция умножения элементов из R на числа P (т.е. указан закон, по которому для любого элемента $a \in R$ и любого числа $\lambda \in P$ находится вполне определенный элемент в R, называемый произведением числа λ на элемент a и обозначаемый через $\lambda \cdot a$ или λa).

Множество R называется линейным (или векторным) пространством над полем P, а его элементы - векторами, если указанные операции (сложения векторов и умножения вектора на число) удовлетворяют аксиомам:

I. 1. $a+b=b+a$ (коммутативность сложения).

2. $(a+b)+c=a+(b+c)$ (ассоциативность сложения).

3. Существует вектор θ, такой, что $a+\theta=a$ для любого $a \in R$. Вектор

θ называется нулевым или просто нулем пространства R.

4. Для каждого вектора $a \in R$ существует вектор $-a$, такой, что $a+(-a)=\theta$. Вектор $-a$ называется противоположным для a.

II. 5. $1 \cdot a = a$, где 1 – единица поля P.

6. $\alpha(\beta a)=(\alpha\beta)a$ (ассоциативность умножения на число поля P.

III. 7. $(\alpha+\beta)a=\alpha a+\beta a$ (дистрибутивность относительно сложения чисел поля P).

8. $\alpha(a+b)=\alpha a+\alpha b$ (дистрибутивность умножения относительно сложения в множестве R).

Если поле коэффициентов P есть ноле всех комплексных чисел, то линейное пространство называется комплексным линейным пространством; если P есть иоле всех вещественных чисел, то - вещественным линейным пространством; если P - произвольное поле, то R - линейным пространством над полем P.

Как правило, в дальнейшем всюду в качестве основного поля P будет предполагаться поле вещественных чисел R. Отступление от этого правила будет оговариваться.

Как и при определении группы, в определении линейного пространства ничего не говорится о технике выполнения операций: в любом конкретном случае, как только выполняемые операции будут удовлетворять аксиомам 1-8, эти операции приобретают право называться сложением и умножением на число, а совокупность элементов с такими операциями получает право называться линейным пространством.

Примеры линейных пространств.

1. Пространство V_3. Элементы этого пространства - направленные геометрические отрезки обычного пространства, имеющие общее начало в фиксированной точке O.

2. Пространство T_n. Элемент x - вектор этого так называемого

арифметического линейного пространства - любая упорядоченная совокупность n вещественных чисел $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ (n-фиксированное натуральное число):

$$x = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n).$$

Числа ξ_i называются компонентами вектора x.

3. Пространство $C(a,b)$. Элемент этого линейного пространства - любая вещественная функция $x = x(t)$ определенная и непрерывная на отрезке $a \leq t \leq b$.

4. Пространство решений однородной системы линейных уравнений. Пусть

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{s1}x_1 + a_{s2}x_2 + \dots + a_{sn}x_n = 0 \end{array}\right\}$$

- однородная система s линейных уравнении с n неизвестными и с коэффициентами из поля D.

5. Пространство многочленов. Множество всех многочленов вида

$$a_0 + a_1 t + \dots + a_n t^n$$

с комплексными коэффициентами a_0, a_1, …, a_n при фиксированном n, очевидно является комплексным линейным пространством относительно обычных операций сложения многочленов и умножения многочлена на число. Это пространство мы будем называть комплексным пространством многочленов степени $\leq n$ (хотя содержащийся в нем нуль-многочлен не имеет степени). Заметим, что совокупность многочленов данной степени $n > 0$ линейного пространства не образует; сумма двух многочленов степени n может оказаться многочленом более низкой степени.

6. Пространство квадратных матриц. Векторы этого пространства - квадратные матрицы одного и того же порядка n с

вещественными элементами. Основное поле - поле вещественных чисел. Сложение матриц и умножение их на числа выполняются по известным правилам. Аксиомы 1-8 выполняются. Нулевым элементом θ здесь будет матрица, все элементы которой нули.

7. Пространство R, векторы которого положительные вещественные числа, основное поле — поле D вещественных чисел. Сложение и умножение чисел α, β …поля D обозначаем обычными знаками + и •. «Сложение» $\oplus$ векторов a и b в R по определению есть обычное умножение вещественных чисел;

$$a \oplus b = a \cdot b.$$

«Умножение» $\otimes$ числа $\alpha \in D$ на вектор $a \in R$ по определению есть возвышение числа a в степень α:

$$\alpha \otimes a = a^{\alpha}.$$

Проверьте выполнимость аксиом 1—8.

8. Основное поле P состоит из двух элементов, обозначаемых 0 и 1. Операции сложения и умножения в P заданы таблицами;

+	0	1
0	0	1
1	1	0

*	0	1
0	0	0
1	0	1

Элементами пространства R являются наборы длины n элементов из P. Операции сложения векторов из R и умножение их на элементы из P производятся покомпонентно (как и в T_n). Получаем линейное пространство R над (нечисловым) полем P; в отличие от ранее рассмотренных пространств это пространство конечно и состоит из 2^n

векторов (поскольку каждая из n компонент вектора принимает два значения независимо от других компонент).

§ 2. ПРОСТЕЙШИЕ СВОЙСТВА ЛИНЕЙНЫХ ПРОСТРАНСТВ.

Отметим некоторые свойства линейных пространств, которые непосредственно вытекают из аксиом 1-8.

Аксиомы 1-4 означают, что относительно операции сложения линейное пространство R является коммутативной группой. Следовательно, все свойства коммутативных групп имеют место для линейных пространств. В частности:

1. В линейном пространстве существует единственный нуль.
2. В линейном пространстве для каждого элемента существует единственный противоположный элемент.
3. Уравнение $a+x=b$, где a и b - любые данные элементы линейного пространства R, разрешимо в R и притом единственным образом.

Другие свойства линейного пространства R связаны с операцией умножения.

4. $a\cdot\theta=\theta$.

5. $0\cdot a=\theta$, где 0 - нуль поля P.

6. Если $\alpha a=\theta$, то или $\alpha=0$, или $a=\theta$.

8. $(-\alpha)a=-(\alpha a)$.

9. $\alpha(a-b)=\alpha a-\alpha b$.

10. $(\alpha-\beta)a=\alpha a-\beta a$.

Определение 2. Линейной комбинацией векторов $a,b,...,c$ называется вектор x, получаемый по формуле

$$x=\alpha a+\beta b+...+\gamma c,$$

где $\alpha, \beta, ...\gamma$ - некоторые числа основного поля P. Говорят при этом также, что вектор x: линейно выражается через векторы $a, b, ..., c$.

§ 3. ЛИНЕЙНАЯ ЗАВИСИМОСТЬ ВЕКТОРОВ.

Важнейшим понятием в теории линейных пространств является линейная зависимость векторов.

Определение 3. Система векторов $a_1, a_2, ...a_k$ линейного пространства R над полем P называется линейно зависимой, если существуют не все равные нулю числа $c_1, c_2, ...c_k$ поля P, такие, что

$$c_1 a_1 + c_2 a_2 + ... + c_k a_k = \theta \quad .$$

(1)

Если же для векторов $a_1, a_2, ...a_k$ равенство (1) имеет место только при $c_1 = c_2 = ... = c_k = 0$, то система векторов $a_1, a_2, ...a_k$ называется линейно независимой.

Заметим, что свойство линейной зависимости и независимости является свойством системы векторов.

Отметим некоторые свойства линейной зависимости векторов.

Свойство 1. Система векторов, содержащая линейно зависимую подсистему, линейно зависима.

Из свойства 1 следует, что всякая подсистема линейно независимой системы векторов линейно независима.

Свойство 2. Если система векторов $a_1, a_2, ...a_k$ линейно независима, а система векторов $a_1, a_2, ...a_k, b$ линейно зависима, то вектор b линейно выражается через векторы системы $a_1, a_2, ...a_k$.

Свойство 3. Упорядоченная система ненулевых векторов $a_1, a_2, ...a_k$ ($k > 1$)

линейно зависима тогда и только тогда, когда некоторый вектор a_i, $2 \le i \le k$, является линейной комбинацией предшествующих векторов.

Из свойства 3 легко следует, что система векторов $a_1, a_2, ... a_k$ $(k > 1)$ тогда и только тогда линейно зависима, когда хотя бы один ее вектор линейно выражается через остальные. В этом смысле и говорят, что понятие линейной зависимости эквивалентно понятию линейной выражаемости.

Свойство 4, Если вектор x линейно выражается через векторы системы

$$a_1, ..., a_{i-1}, a_i, a_{i+1}, ..., a_k,$$

(2)

а вектор a_i, линейно выражается через остальные векторы системы (2), то вектор x также линейно выражается через эти векторы системы (2).

Теорема 1. Если каждый вектор линейно независимой системы $a_1, a_2, ... a_m$ есть линейная комбинация векторов $b_1, b_2, ..., b_n$, то $m \le n$. Другими словами, в линейно независимой системе векторов, являющихся линейными комбинациями n векторов $b_1, b_2, ..., b_n$, число векторов не может быть больше n.

Рассмотрим теперь, что означает линейная зависимость векторов в различных пространствах.

1. Пространство V_3. Если система двух векторов a и b линейно зависима, то $a = \lambda b$ или $b = \lambda a$, т. е. векторы коллинеарны. Верно и обратное. Система трех векторов пространства V_3 линейно зависима тогда и только тогда, когда они лежат в одной плоскости. (Докажите!) Система четырех векторов a_1, a_2, a_3, a_4 пространства V_3 всегда линейно зависима

2. Пространство T_n. Линейная зависимость векторов пространства T_n как строк матрицы, рассматривалась нами ранее при изучении систем линейных уравнений. В связи с этим будем считать известным, что

максимальное число линейно независимых векторов системы

$$\left.\begin{aligned} a_1 &= (\zeta_{11}, \zeta_{12}, \ldots, \zeta_{1n}), \\ a_1 &= (\zeta_{21}, \zeta_{22}, \ldots, \zeta_{2n}), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_1 &= (\zeta_{k1}, \zeta_{k2}, \ldots, \zeta_{kn}). \end{aligned}\right\}$$

(3)

т. е. строк или столбцов матрицы

$$M = \begin{pmatrix} \zeta_{11} \zeta_{12} \cdots \zeta_{1n} \\ \zeta_{21} \zeta_{22} \cdots \zeta_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \zeta_{k1} \zeta_{k2} \cdots \zeta_{kn} \end{pmatrix},$$

есть ранг матрицы M (ранг M). В частности, система векторов (3) линейно независима, если ранг $M = k$, и линейно зависима, если ранг $M < k$. Таким образом, решение вопроса о линейной зависимости системы векторов сводится к вычислению ранга матрицы.

3. В пространстве $C(a,b)$ линейная зависимость векторов

$$x_1 = x_1(t),\ x_2 = x_2(t),\ \ldots,\ x_k = x_k(t)$$

означает, что соотношение

$$c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t) + \ldots + c_k x_k(t) = \theta$$

выполняется тождественно относительно t, $a \le t \le b$, при некоторых постоянных $c_1, c_2, \ldots, c_k$, не всех равных нулю; здесь θ - функция, равная нулю при любом $t \in [a,b]$.

§ 4. БАЗИС ЛИНЕЙНОГО ПРОСТРАНСТВА. КООРДИНАТЫ ВЕКТОРА ОТНОСИТЕЛЬНО БАЗИСА.

Определение 4. Базисом или координатной системой линейного пространства R над числовым полем P называется такая упорядоченная линейно независимая система векторов $e_1, e_2, \ldots, e_n$ этого пространства, что для всякого вектора $x \in R$ существует линейное представление

$$x = \zeta_1 e_1 + \zeta_2 e_2 + \ldots + \zeta_n e_n,$$

(1)

где $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n \in P$.

Таким образом, по определению к базису предъявляются два требования: первое - векторы, входящие в базис, линейно независимы; второе - каждый вектор $x \in R$ линейно выражается через векторы базиса. (Покажите независимость этих требований друг от друга.) Если $e_1, e_2, \ldots, e_n$ - базис, то коэффициенты $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n$ представления (1) находятся однозначно.

Числа $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n$ в представлении (1) называют координатами, а набор чисел $(\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n)$ - координатной строкой вектора x в базисе $e_1, e_2, \ldots, e_n$. Иногда этот набор чисел мы будем записывать в виде

$$\begin{pmatrix} \zeta_1 \\ \zeta_2 \\ \ldots \\ \zeta_n \end{pmatrix}$$

и называть координатным столбцом вектора x.

Примеры.

1. В пространстве V_3 в качестве базиса можно взять любые три вектора, не лежащие в одной плоскости. (Докажите!)

2. В пространстве T_n базис составляют, например, векторы

$e_1 = (1,0,0,\ldots,0)$, $e_2 = (0,1,0,\ldots,0)$, …, $e_n = (0,0,0,\ldots,1)$.

В пространстве T_n можно указать бесконечное множество базисов.

3. R - линейное пространство многочленов от t степени $\leq n-1$. Одним из базисов этого пространства является: $e_0 = 1$, $e_1 = t$, $e_2 = t^2$, …, $e_{n-1} = t^{n-1}$.

4. R - линейное пространство вещественных квадратных матриц порядка n. Базис этого пространства составляют n^2 матриц E_{ij}, $i, j = 1,2,\ldots,n$;

E_{ij} есть матрица, в которой элемент $a_{ij} = 1$, а остальные элементы нули.

5. В пространстве $C(a,b)$ нет базиса в смысле определения 4.

Теорема 2. Если пространство R имеет базис из n векторов, то всякая линейно независимая система из n его векторов также является базисом.

Теорема 3. Если $a_1, a_2, ..., a_m$ и $b_1, b_2, ..., b_n$ - два базиса некоторого линейного пространства R, то $m = n$, т. е. все базисы линейного пространства R состоят из одинакового числа векторов.

Теорема 4. Система векторов $a_1, a_2, ...a_k$ пространства R, имеющего базис, линейно зависима тогда и только тогда, когда линейно зависима система координатных столбцов векторов $a_1, a_2, ...a_k$ в каком-либо базисе пространства R.

Следствие 1. Максимальное число линейно независимых векторов системы $a_1, a_2, ...a_k$ пространства R, имеющего базис $e_1, e_2, ..., e_n$, равно рангу матрицы M, составленной из координатных столбцов векторов этой системы. (Докажите!)

Следствие 2. Система n векторов пространства R, имеющего базис $e_1, e_2, ..., e_n$, линейно независима тогда и только тогда, когда матрица M, составленная из координатных столбцов этих векторов относительно данного базиса, является невырожденной.

Замечание. Значение теоремы 4 заключается в том, что она сводит вопрос о линейной зависимости системы векторов произвольного линейного пространства R, имеющего базис, к вопросу о линейной зависимости системы векторов арифметического пространства T_n. (Пример)

§ 5. РАЗМЕРНОСТЬ ЛИНЕЙНОГО ПРОСТРАНСТВА.

Определение 5. Линейное пространство R называется n-мерным, если в нем выполнимы аксиомы:

IV. 9. В пространстве R существует хотя бы одна линейно независимая система n векторов.

10. Всякая система $n+1$ векторов пространства R линейно зависима.

Число n при этом называется размерностью пространства R и обозначается через $\dim R$. Линейное пространство R размерности n будем обозначать R_n. Пространства, в которых можно указать как угодно большое число линейно независимых векторов, называются бесконечномерными. Примером такого пространства может служить пространство $C(a,b)$.

Теорема 5. Линейное пространство R является n-мерным тогда и только тогда, когда в нем существует базис из n векторов.

§ 6. ИЗОМОРФИЗМ ЛИНЕЙНЫХ ПРОСТРАНСТВ.

Определение 6. Два линейных пространства R и R' над полем P называются изоморфными, если между ними можно установить взаимно однозначное соответствие

$$x \leftrightarrow x',\ (x \in R, x' \in R'),$$

так что

$$(x+y)' = x' + y',\qquad (\lambda x)' = \lambda x' \tag{1}$$

для любых векторов $x, y \in R$ и любого $\lambda \in P$.

Если указание соответствие обозначить буквой Φ, то вместо x' можно будет писать $\Phi(x)$ и условия (1) запишутся в виде

$$\Phi(x+y) = \Phi(x) + \Phi(y),\ \Phi(\lambda x) = \lambda \Phi(x).$$

Отметим некоторые свойства изоморфизма пространств.

Свойство 1. При изоморфном соответствии двух пространств R и R' произвольной линейной комбинации векторов пространства R соответствует такая же линейная комбинация векторов пространства R'.

Свойство 2. При изоморфном соответствии двух пространств нулевому вектору соответствует нулевой вектор.

Свойство 3. При изоморфизме линейно независимая система векторов переходит в линейно независимую систему векторов.

Из свойств 2 и 3, в частности, следует, что при изоморфизме двух пространств всякий базис одного пространства переходит в базис другого.

Теорема 6. Любые два n-мерных линейных пространства R_n и R_n' изоморфны над одним полем P.

Пусть R_n - некоторое n-мерное линейное пространство над полем D вещественных чисел, T_n - арифметическое пространство. Тогда из теоремы 6 имеем

Следствие. Всякое n-мерное линейное пространство над полем D изоморфно пространству T_n.

§ 7. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ КООРДИНАТ ВЕКТОРА ПРИ ИЗМЕНЕНИИ БАЗИСА.

Пусть R_n - линейное пространство над полем P и $e_1, e_2, ..., e_n$; $e_1', e_2', ..., e_n'$ - два его базиса. Условимся первый из этих базисов называть «старым», второй - «новым» и обозначать соответственно через $\{e\}$ и $\{e'\}$. Так как $\{e\}$ и $\{e'\}$ - базисы, то имеют место однозначные представления:

$$x = \zeta_1 e_1 + \zeta_2 e_2 + ... + \zeta_n e_n = \zeta_1' e_1' + \zeta_2' e_2' + ... + \zeta_n' e_n',$$

(1)

$\zeta_1, \zeta_2, ..., \zeta_n$ - координаты вектора x в базисе $\{e\}$, а $\zeta_1', \zeta_2', ..., \zeta_n'$ - его координаты в базисе $\{e'\}$. Задача состоит в вычислении координат вектора x в одном базисе по известным его координатам в другом базисе.

Как и все векторы пространства R_n, векторы базиса $\{e'\}$ однозначно выражаются через векторы базиса $\{e\}$, так что можно записать:

$$\left.\begin{array}{l} e_1' = \tau_{11}e_1 + \tau_{21}e_2 + ... + \tau_{n1}e_n, \\ e_2' = \tau_{12}e_1 + \tau_{22}e_2 + ... + \tau_{n2}e_n, \\ .... \\ e_n' = \tau_{1n}e_1 + \tau_{2n}e_2 + ... + \tau_{nn}e_n, \end{array}\right\}$$

(2)

где τ_{ij} - числа основного поля P.

Матрица

$$T = \begin{pmatrix} \tau_{11}\tau_{12}\ldots\tau_{1n} \\ \tau_{21}\tau_{22}\ldots\tau_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \tau_{n1}\tau_{n2}\ldots\tau_{nn} \end{pmatrix}$$

называется матрицей перехода от базиса $\{e\}$ к базису $\{e'\}$. Заметим, что столбцами матрицы T являются координаты векторов $e_1', e_2', \ldots, e_n'$ в базисе $\{e\}$.

Выразим координаты $\zeta_1', \zeta_2', \ldots, \zeta_n'$ через координаты $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n$. Подставив в (1) вместо $e_1', e_2', \ldots, e_n'$ их выражения через $e_1, e_2, \ldots, e_n$ из (2), получим:

$$x = \zeta_1 e_1 + \zeta_2 e_2 + \ldots + \zeta_n e_n = \zeta_1'(\tau_{11}e_1 + \tau_{21}e_2 + \ldots + \tau_{n1}e_n) +$$

$$+ \zeta_2'(\tau_{12}e_1 + \tau_{22}e_2 + \ldots + \tau_{n2}e_n) + \ldots + \zeta_n'(\tau_{1n}e_1 + \tau_{2n}e_2 + \ldots + \tau_{nn}e_n).$$

Так как представление вектора x в базисе $\{e\}$ единственно, то коэффициенты $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n$ при $e_1, e_2, \ldots, e_n$ в левой части этого равенства равны соответствующим коэффициентам при $e_1, e_2, \ldots, e_n$ в правой части, т. е.

$$\left.\begin{array}{l} \zeta_1 = \tau_{11}\zeta_1' + \tau_{12}\zeta_2' + \ldots + \tau_{1n}\zeta_n', \\ \zeta_2 = \tau_{21}\zeta_1' + \tau_{22}\zeta_2' + \ldots + \tau_{2n}\zeta_n', \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \zeta_n = \tau_{n1}\zeta_1' + \tau_{n2}\zeta_2' + \ldots + \tau_{nn}\zeta_n'. \end{array}\right\}$$

(3)

Равенства (3) можно записать в матричной форме так:

$$\begin{pmatrix} \zeta_1 \\ \zeta_2 \\ . \\ . \\ \zeta_n \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} \zeta_1' \\ \zeta_2' \\ . \\ . \\ \zeta_n' \end{pmatrix},$$

(4)

или если обозначить через X столбец координат вектора x в базисе $\{e\}$, а через X_1, - столбец координат того же вектора в базисе $\{e'\}$, то

$$X = TX_1.$$

(5)

Таким образом, столбец координат вектора x в базисе $\{e\}$ равен столбцу координат этого вектора в базисе $\{e'\}$, умноженному слева на матрицу T перехода от базиса $\{e\}$ к базису $\{e'\}$.

Из равенства (5) легко получить также выражение вектора X_1 через X. В самом деле, по следствию 2 из теоремы 4 матрица T невырожденная, а потому имеет обратную. Умножая обе части равенства (5) на матрицу T^{-1}, получим:

$$X_1 = T^{-1}X.$$

Пример. Найти матрицу перехода от базиса e_1, e_2, e_3 к базису e_1', e_2', e_3' пространства T_3, если:

$$\begin{aligned} e_1 &= (1,2,1), & e_1' &= (3,1,4),\\ e_2 &= (2,3,3), & e_2' &= (5,2,1),\\ e_3 &= (3,7,1), & e_3' &= (1,1,-6). \end{aligned}$$

§ 8. ПОДПРОСТРАНСТВА ЛИНЕЙНОГО ПРОСТРАНСТВА.

Определение 7. Подмножество L данного линейного пространства R над полем P называется линейным подпространством или просто подпространством пространства R, если оно само является линейным пространством над полем P относительно определенных в R операций сложения векторов и умножения вектора на числа из P.

Теорема 7. Для того чтобы непустое подмножество L линейного пространства R над полем P было его подпространством, достаточно выполнения следующих двух требований:

а) если $x, y \in L$, то $x + y \in L$;

б) если $x \in L,\ \lambda \in P$, то $\lambda x \in L$.

Примеры:

1. Нуль-вектор θ и само пространство R - тривиальные подпространства пространства R.

2. Все векторы пространства V_3, расположенные в некоторой плоскости (или на некоторой прямой), проходящей через O, составляют подпространство V_2 (соответственно V_1,) пространства V_3.

3. Совокупность L решений однородной линейной системы уравнений

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{s1}x_1 + a_{s2}x_2 + \ldots + a_{sn}x_n = 0, \end{array}\right\}$$

(1)

т. е. совокупность L всех тех векторов $x = (\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n)$ пространства T_n, компоненты которых удовлетворяют уравнениям системы (1), будет, очевидно, подпространством пространства T_n.

4. Пересечение двух подпространств L_1, L_2 пространства R есть снова подпространство пространства R.

5. Множество L векторов вида $x_1 + x_2$, где $x_1 \in L_1$, $x_2 \in L_2$ и L_1, L_2 - подпространства из R, есть подпространство пространства R.

Определение 8. Построенное выше подпространство L называется суммой пространств L_1, L_2 и обозначается через $L_1 + L_2$. В том случае, когда $L_1 \cap L_2 = \{\theta\}$, эта сумма называется прямой суммой.

Пусть L, есть нетривиальное подпространство пространства R_n. Так как не все векторы из R_n входят в L, то не из всякого базиса пространства R_n можно выбрать базис пространства L. Больше того, в R_n могут существовать базисы, целиком содержащиеся в $R_n \setminus L$ ($R_n \setminus L$ есть множества векторов из R_n, не содержащихся в L).

Теорема 8. Если L - подпространство в R_n размерности $k < n$ и $e_1, e_2, ..., e_k$ - его базис, то в R_n всегда можно выбрать векторы $e_{k+1}, ..., e_n$ так, чтобы система векторов $e_1, e_2, ..., e_k$, $e_{k+1}, ..., e_n$ была базисом пространства R_n. Иначе говоря, любой базис подпространства L, можно дополнить до базиса всего пространства R_n.

Теорема 9. Если пространство R_n есть прямая сумма подпространств L_1, L_2, то:

$$\dim L_1 + \dim L_2 = \dim R_n = n \quad (2)$$

Из доказательства теоремы 9 видно, что при $L_1 \cap L_2 = \{\theta\}$ объединение базисов пространств L_1 и L_2 есть базис пространства $L_1 + L_2$ (Верно ли обратное утверждение?)

Отметим еще без доказательства следующее обобщение теоремы 9:

$$\dim(L_1 + L_2) = \dim L_1 + \dim L_2 - \dim(L_1 \cap L_2).$$

§ 9. ЛИНЕЙНАЯ ОБОЛОЧКА ИЛИ ПОДПРОСТРАНСТВО, НАТЯНУТОЕ НА ДАННУЮ СИСТЕМУ ВЕКТОРОВ.

В § 8 были рассмотрены общие положения о подпространствах. Возникает, однако, естественный вопрос конструктивного характера о способах построения подпространств; одним из таких способов начнется образование так называемой линейной оболочки заданной системы векторов.

Определение 9. Пусть $x, y, ..., z$ - конечная система векторов линейного пространства R над полем P. Линейной оболочкой системы $x, y, ..., z$ называется совокупность всех конечных линейных комбинаций векторов данной системы, т. е. совокупность векторов вида

$$\alpha x + \beta y + ... + \gamma z$$

(1)

с произвольными коэффициентами $\alpha, \beta, ...\gamma$, взятыми из поля P.

Линейную оболочку векторов $x, y, ..., z$ обозначим через $L(x, y, ..., z)$.

Пусть $a \in L(x, y, ..., z)$, $b \in L(x, y, ..., z)$, т.е.

$a = \alpha_1 x + \beta_1 y + ... + \gamma_1 z,$

$b = \alpha_2 x + \beta_2 y + ... + \gamma_2 z.$

Тогда $a + b = (\alpha_1 + \alpha_2)x + (\beta_1 + \beta_2)y + ... + (\gamma_1 + \gamma_2)z \in L(x, y, ..., z),$

$\lambda a = \lambda a_1 x + \lambda \beta_1 y + ... + \lambda \gamma_1 z \in L(x, y, ..., z).$

По теореме 7 получаем, что $L(x, y, ..., z)$ - подпространство пространства R. Значит, образование линейных оболочек действительно является способом конструирования подпространств.

О пространстве $L(x, y, ..., z)$ говорят также, что оно порождено векторами $x, y, ..., z$ или натянуто на систему векторов $x, y, ..., z$.

Очевидно, что $L(x, y, ..., z)$ содержит и сами векторы $x, y, ..., z$. С другой стороны, всякое подпространство, содержащее векторы $x, y, ..., z$, содержит, очевидно, и все их линейные комбинации. Значит, линейная оболочка системы векторов $x, y, ..., z$ содержится во всяком подпространстве, содержащем векторы $x, y, ..., z$, т. е. $L(x, y, ..., z)$ есть наименьшее подпространство, содержащее векторы $x, y, ..., z$. Указанный способ построения подпространств с помощью линейных оболочек является весьма общим. В самом деле, каждый вектор произвольного подпространства $F \subset R_n$ по определению базиса есть линейная комбинация векторов базиса пространства F и, значит, всякое подпространство F линейного пространства R_n является подпространством, натянутым на некоторые векторы из R_n (на векторы базиса F).

Из теоремы 1 следует, что размерность пространства $L(x, y, ..., z)$ равна числу векторов в максимальной линейно независимой подсистеме системы порождающих векторов $x, y, ..., z$, короче, максимальному числу линейно независимых векторов в системе $x, y, ..., z$.

Примеры:

1. Исходное пространство V_3. Порождающая система состоит из одного вектора a, подпространство $L(a)$ состоит из всех векторов, коллинеарных вектору a.

2. Исходное пространство V_3. Порождающая система состоит из двух неколлинеарных векторов a и b. Подпространство $L(a,b)$ есть совокупность векторов вида $\alpha a + \beta b$, $(\alpha, \beta \in D)$, $L(a,b) = \{\alpha a + \beta b\}$, т. е. плоскость, проходящая через векторы a и b.

3. Исходное пространство V_3. Порождающая система векторов - три некомпланарных вектора a, b, c. В этом случае подпространство $L(a,b,c)$ есть V_3.

4. R_n - произвольное линейное пространство; $e_1, e_2, ..., e_n$ - его базис. Тогда $L(e_1, e_2, ..., e_n) = R_n$.

5. Исходное пространство $C(a,b)$. Система порождающих векторов - совокупность функций: $1, t, t^2, ..., t^k$. Тогда

$$L\left(1, t, t^2, ..., t^k\right) = \left\{\alpha_0 + \alpha_1 t + \alpha_2 t^2 + ... + \alpha_k t^k\right\}, \ \alpha_i \in D,$$

т. е. линейная оболочка L есть пространство всех многочленов степени $\le k$.

6. Найти размерность и базис подпространства $L(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5)$ пространства T_4, если

$$a_1 = (1, 0, 0, -1), \qquad a_4 = (1, 2, 3, 4),$$
$$a_2 = (2, 1, 1, 0), \qquad a_5 = (0, 1, 2, 3).$$
$$a_3 = (1, 1, 1, 1),$$

7. Найти базис и размерность суммы и пересечения подпространств, натянутых на векторы:

$a_1 = (1,\ 2,\ 1,\ 0),$ $\qquad b_1 = (2, -1, 0, 1),$

$a_1 = (-1, 1, 1, 1),$ $\qquad b_2 = (1, -1, 3, 7).$

§ 10. ФУНДАМЕНТАЛЬНАЯ СИСТЕМА РЕШЕНИЙ ОДНОРОДНОЙ СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ.

Пусть дана однородная система линейных уравнений

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{s1}x_1 + a_{s2}x_2 + \ldots + a_{sn}x_n = 0. \end{array}\right\}$$

(1)

с произвольными вещественными коэффициентами. Мы знаем (§ 1, пример 4), что совокупность всех решений системы (1) образует линейное пространство, являющееся подпространством в T_n. Решим вопрос о размерности этого подпространства L.

Пусть A - матрица коэффициентов системы (1). Предположим, что ранг матрицы A равен r и минор r-го порядка, находящийся в левом верхнем углу матрицы A, отличен от нуля. Тогда система (1) эквивалентна ее подсистеме из первых r уравнений:

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1r}x_r = -a_{1,r+1}x_{r+1} - \ldots - a_{1n}x_n, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2r}x_r = -a_{2,r+1}x_{r+1} - \ldots - a_{2n}x_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \ldots + a_{rr}x_r = -a_{r,r+1}x_{r+1} - \ldots - a_{rn}x_n. \end{array}\right\}$$

(2)

Для отыскания решений системы (2), а следовательно, и системы (1) неизвестным $x_{r+1}, \ldots, x_n$ системы (2) придаем произвольные значения $c_{r+1}, \ldots, c_n$ и затем (например, по формулам Крамера) находим соответствующие значения $c_1, c_2, \ldots, c_r$ для первых r неизвестных:

$$c_i = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} \ldots a_{1,i-1} & -a_{1,r+1}c_{r+1} - \ldots - a_{1n}c_n & a_{1,i+1} \ldots a_{1r} \\ a_{21} \ldots a_{2,i-1} & -a_{2,r+1}c_{r+1} - \ldots - a_{2n}c_n & a_{2,i+1} \ldots a_{2r} \\ a_{r1} \ldots a_{r,i-1} & -a_{r,r+1}c_{r+1} - \ldots - a_{rn}c_n & a_{r,i+1} \ldots a_{rr} \end{vmatrix}}{\Delta},$$

(3)

где Δ - определитель системы (2) (т. е. отличный от нуля минор порядка r).

Таким образом, произвольному набору чисел $c_{r+1}, ..., c_n$, т. е. вектору пространства T_{n-r} мы сопоставили вектор $(c_1, ..., c_r, c_{r+1}, ..., c_n)$ пространства L решений системы (2) или (1). А так как для любых фиксированных значений неизвестных $x_{r+1}, ..., x_n$ система уравнений (2) имеет единственное решение относительно неизвестных $x_1, x_2, ..., x_r$ то

$$(c_{r+1}, ..., c_n) \leftrightarrow (c_1, ..., c_r, c_{r+1}, ..., c_n)$$

(4)

является взаимно однозначным соответствием между пространствами T_{n-r} и L. Это соответствие является изоморфизмом.

Отсюда следует, что

$$\dim L = \dim T_{n-r} = n - r.$$

Определение 10. Любой базис пространства L, т. е. любая совокупность $n-r$ линейно независимых решений однородной линейной системы (1), называется фундаментальной системой решений системы (1).

Так как при изоморфизме двух пространств базис одного переходит в базис другого (§ 6), то для построения фундаментальной системы решений можно воспользоваться любым базисом пространства T_{n-r}. Если в качестве последнего взять стандартный базис

$$e_1 = (1, 0, ..., 0),\ e_2 = (0, 1, ..., 0),\ ...,\ e_{n-r} = (0, 0, ..., 1),$$

то получим фундаментальную систему решении, которая называется нормальной.

Обозначим через $x^{(1)}, x^{(2)}, ..., x^{(n-r)}$ фундаментальную систему решений системы (1). По определению базиса для любого решения x системы (1) будет иметь место равенство:

$$x = c_1 x^{(1)} + c_2 x^{(2)} + \ldots + c_{n-r} x^{(n-r)},$$

(5)

где $c_1, c_2, \ldots, c_{n-r}$ — некоторые числа. Формула (5) содержит $n-r$ произвольных параметров и заключает в себе любое решение системы (1), поэтому можно сказать, что формула (5) дает общее решение системы (1).

Пример. Найти нормальную фундаментальную систему решений для системы уравнений:

$$\left.\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 &= 0,\\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 - 3x_5 &= 0,\\ x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 6x_5 &= 0,\\ 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 3x_4 - x_5 &= 0. \end{aligned}\right\}.$$

(6)

О рассмотренном выше подпространстве L, решений однородной системы уравнений (1) говорят, что оно задается системой (1). Оказывается, что такой способ задания подпространств пространства T_n является универсальным, а именно:

Всякое подпространство L, пространства T_n может быть задано некоторой системой линейных однородных уравнении.

Пример. Найти однородную систему линейных уравнений, задающую в T_4 подпространство L, порожденное векторами

$$\begin{aligned} a_1 &= (1, 0, 0, -1),\\ a_2 &= (2, 1, 1, 0),\\ a_3 &= (1, 1, 1, 1),\\ a_4 &= (1, 2, 3, 4). \end{aligned}$$

§ 11. ЛИНЕЙНОЕ МНОГООБРАЗИЕ. ЛИНЕЙНОЕ МНОГООБРАЗИЕ РЕШЕНИЙ СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ.

Совокупность векторов пространства V_3. исходящих из точки O и расположенных на прямой a, проходящей через точку O, образует подпространство L, состоящее из векторов вида αe_1 при произвольном вещественном α (Рисунок 1). Пусть вектор x_0 не принадлежит L. При фиксированном x_0 и переменном α совокупность концов векторов вида $x_0 + \alpha e_1$ дает прямую a_1, параллельную прямой a и проходящую через точку x_0. Геометрически ясно, что если x_1 и x_2 - два вектора совокупности H векторов вида $x_0 + \alpha e_1$, то их сумма $x_1 + x_2$ не принадлежит этой совокупности. Таким образом, если векторы, лежащие на прямой a, составляют подпространство, то векторы с концами на прямой a_1, не проходящей через точку O, подпространства не образуют. Вместе с тем нежелательно исключать из рассмотрения прямые типа a_1 - им и присваивают наименование линейных многообразий, полученных сдвигом подпространства L.

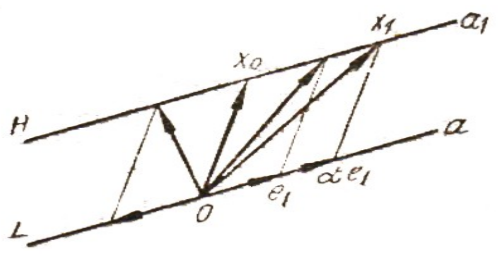


Рисунок 1.

Определение 11. Пусть дано линейное пространство R и его подпространство L. Линейным многообразием, полученным параллельным сдвигом подпространства L на вектор x_0, называется совокупность H всех векторов $x \in R$ вида

$$x = x_0 + y,$$

где вектор y пробегает все подпространство L. При этом L называют определяющим пространством многообразия H, x_0 - его вектором сдвига и пишут:

$$H = x_0 + L.$$

Рассмотрим совместную неоднородную систему линейных уравнений над полем D:

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ...+ a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ...+ a_{2n}x_n = b_2, \\ .... \\ a_{s1}x_1 + a_{s2}x_2 + ...+ a_{sn}x_n = b_s \end{array}\right\}$$

(1)

И соответствующую ей однородную систему:

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + ...+ a_{1n}y_n = 0, \\ a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + ...+ a_{2n}y_n = 0, \\ .... \\ a_{s1}y_1 + a_{s2}y_2 + ...+ a_{sn}y_n = 0. \end{array}\right\}$$

(2)

Обозначим через L пространство решений системы (2). Как мы уже знаем, L есть подпространство пространства T_n. Примем обозначения:

$$x_0 = \left(\zeta_1^{(0)}, \zeta_2^{(0)}, ..., \zeta_n^{(0)}\right),\ \ y = \left(\eta_1, \eta_2, ..., \eta_n\right),\ \ x = \left(\zeta_1, \zeta_2, ..., \zeta_n\right),$$

где x_0 есть некоторое фиксированное решение системы (1), y - произвольное решение системы (2), x - произвольное решение системы (1). Известно, что все решения системы (1) могут быть получены также прибавлением всех решений системы (2) к одному и тому же частному решению системы (1). Значит, множество H векторов x исчерпывается векторами вида $x_0 + y$, когда y пробегает все пространство L, так что $H = x_0 + L$.

Таким образом, совокупность решений произвольной совместной системы линейных уравнений (1) есть линейное многообразие, полученное параллельным сдвигом пространства решений соответствующей однородной системы. Вектором сдвига является некоторое частное решение системы (1). Говорят, что это линейное многообразие задано системой линейных уравнений (1).

Если r - ранг основной матрицы системы (1), а совокупность векторов $y^{(1)}, y^{(2)}, ..., y^{(n-r)}$ составляет фундаментальную систему решений системы (2), то любой вектор x линейного многообразия H можно записать в виде

$$x = x_0 + c_1 y^{(1)} + c_2 y^{(2)} + \dots + c_{n-r} y^{(n-r)},$$

где $c_1, c_2, \dots, c_{n-r}$ - произвольные числа.

Из геометрических соображений видно (см. Рисунок 1), что многообразие H (прямая H) может быть получено сдвигом подпространства L (прямой L) и на другой вектор $x_1 \neq x_0$. В связи с этим, естественно, возникает вопрос об описании всех определяющих подпространств и векторов сдвига для заданного многообразия H. Этот вопрос решает

Теорема 10. Пусть L_1, L_2 - подпространства линейного пространства R и

$$H_1 = x_1 + L_1, \qquad H_2 = x_2 + L_2. \tag{3}$$

Линейные многообразия H_1, H_2 совпадают тогда и только тогда, когда совпадают L_1, L_2 и $x_1 - x_2 \in L_1$.

Определение 12. Размерностью линейного многообразия называется размерность того линейного подпространства, параллельным сдвигом которого оно получено.

Одномерные линейные многообразия называются прямыми, двумерные - плоскостями. Линейное многообразие размерности $n-1$ пространства R_n называют гиперплоскостью.

ЛИНЕЙНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ.

§ 12. ПОНЯТИЕ ЛИНЕЙНОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ЛИНЕЙНОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ МАТРИЦЕЙ.

Если каждому элементу x некоторого множества M поставлен в соответствие вполне определенный элемент y множества N, то говорят, что задано отображение f множества M в множество N и пишут:

$f : M \to N$ и $y = f(x)$ или $y = fx$.

Отображение множества M в себя называется преобразованием множества M. Два преобразования f_1 и f_2 множества M называются равными, если $f_1(x) = f_2(x)$ для любого $x \in M$.

В дальнейшем мы будем рассматривать преобразования линейных пространств. Наличие операций в линейном пространстве R позволяет из множества всех преобразований выделить класс наиболее важных и поддающихся изучению так называемых линейных преобразований.

Определение 13. Линейным преобразованием (или линейным оператором) линейного пространства R над полем P называется такое его преобразование φ, которое удовлетворяет условиям:

1*. $\varphi(x_1 + x_2) = \varphi x_1 + \varphi x_2$,

2*. $\varphi(\lambda x) = \lambda \varphi x$

для любых $x_1, x_2, x \in R$ и $\lambda \in P$.

Вектор φx называется образом вектора x, вектор x - прообразом вектора φx.

Отметим два следствия из определения 13.

1. Всякое линейное преобразование переводит нулевой вектор в нулевой вектор.

2. Условия 1* и 2* эквивалентны одному условию:

$\varphi(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) = \lambda_1 \varphi x_1 + \lambda_2 \varphi x_2$.

(1)

В случае, когда линейное пространство R n-мерно, имеет место следующее важное утверждение.

Теорема 11. Для фиксированного базиса $e_1, e_2, ..., e_n$ линейного пространства R_n и произвольного набора его векторов $b_1, b_2, ..., b_n$ существует и притом только одно линейное преобразование пространства R_n, которое переводит векторы $e_1, e_2, ..., e_n$ соответственно в векторы $b_1, b_2, ..., b_n$.

Теорема 11 означает, что линейное преобразование φ пространства R_n вполне определяется заданием лишь образов $\varphi e_1, \varphi e_2, ..., \varphi e_n$ векторов

$e_1, e_2, ..., e_n$ какого-либо базиса. Этот факт дает возможность указать удобное для практического обращения с линейными преобразованиями описание их с помощью матриц.

Пусть R_n - линейное пространство с фиксированным базисом $e_1, e_2, ..., e_n$. Векторы $\varphi e_1, \varphi e_2, ..., \varphi e_n$ в базисе $\{e\}$ задаются своими координатами:

$$\left.\begin{array}{l} \varphi e_1 = a_{11}e_1 + a_{21}e_2 + ...+ a_{n1}e_n \ , \\ \varphi e_2 = a_{12}e_1 + a_{22}e_2 + ...+ a_{n2}e_n \ , \\ .... \\ \varphi e_n = a_{1n}e_1 + a_{2n}e_2 + ...+ a_{nn}e_n \ . \end{array}\right\}$$

(2)

Матрица

$$A = \begin{pmatrix} a_{11}a_{12}...a_{1n} \\ a_{21}a_{22}...a_{2n} \\ .... \\ a_{n1}a_{n2}...a_{nn} \end{pmatrix}$$

называется матрицей линейного преобразования φ в базисе $e_1, e_2, ..., e_n$.

Таким образом, при фиксированном базисе всякому линейному преобразованию φ пространства R_n соответствует единственная матрица A с элементами из основного поля P.

Обратно, пусть дана квадратная матрица A порядка n с элементами из поля P. Пользуясь матрицей A, при фиксированном базисе $\{e\}$ по формулам (2) найдем векторы $\varphi e_1, \varphi e_2, ..., \varphi e_n$. Однако по теореме 11 выбором этих векторов вполне определяется линейное преобразование φ пространства R_n. Очевидно, что матрицей этого преобразования в базисе $\{e\}$ является матрица A.

В итоге при фиксированном базисе пространства R_n имеем взаимно однозначное соответствие между линейными преобразованиями в R_n и квадратными матрицами порядка n с элементами из основного поля P. Этот факт и позволяет говорить, что линейное преобразование задается матрицей A в базисе $e_1, e_2, ..., e_n$. Заметим, что полученное взаимно однозначное соответствие между множествами линейных преобразований в R_n и матриц существенно зависит от базиса.

Выясним, как выражаются координаты вектора-образа φx через координаты данною вектора x, если преобразование φ задало матрицей A в базисе $\{e\}$.

Если

$$x = \xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + ... + \xi_n e_n \text{ –}$$

какой-либо вектор из R_n, то по свойству 2° и формулам (2)

$$y = \varphi x = \xi_1 \varphi e_1 + \xi_2 \varphi e_2 + ... + \xi_n \varphi e_n = \xi_1 (a_{11} e_1 + a_{21} e_2 + ... + a_{n1} e_n) +$$
$$+ \xi_2 (a_{12} e_1 + a_{22} e_2 + ... + a_{n2} e_n) + ... + \xi_n (a_{1n} e_1 + a_{2n} e_2 + ... + a_{nn} e_n) =$$
$$= (a_{11}\xi_1 + a_{12}\xi_2 + ... + a_{1n}\xi_n) e_1 + (a_{21}\xi_1 + a_{22}\xi_2 + ... + a_{2n}\xi_n) e_2 +$$
$$+ ... + (a_{n1}\xi_1 + a_{n2}\xi_2 + ... + a_{nn}\xi_n) e_n.$$

Обозначив через $\eta_1, \eta_2, ..., \eta_n$ координаты вектора $y = \varphi x$ в базисе $\{e\}$, получаем:

$$\left.\begin{array}{l} \eta_1 = a_{11}\xi_1 + a_{12}\xi_2 + ... + a_{1n}\xi_n, \\ \eta_2 = a_{21}\xi_1 + a_{22}\xi_2 + ... + a_{2n}\xi_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \eta_n = a_{n1}\xi_1 + a_{n2}\xi_2 + ... + a_{nn}\xi_n. \end{array}\right\}$$

(3)

Вводя матричные обозначения

$$X = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ . \\ . \\ \xi_n \end{pmatrix}, \qquad Y = \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ . \\ . \\ \eta_n \end{pmatrix}$$

для столбцов координат данного вектора x и его образа φx, получаем матричную запись системы равенств (3):

$$Y = AX.$$

(5)

Таким образом, при фиксированном базисе столбец координат преобразованного вектора получается умножением матрицы A линейного преобразования φ па столбец координат данного вектора.

§ 13. ПРИМЕРЫ ЛИНЕЙНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ.

1. Исходное пространство - пространство векторов, исходящих из фиксированной точки O. Преобразование φ в нем - ортогональное проектирование векторов на некоторую плоскость π, проходящую через точку O (Рисунок 2).

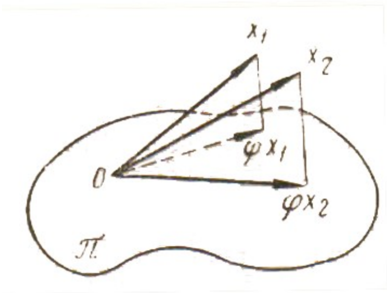


Рисунок 2.

2. Исходное пространство R есть n-мерное пространство многочленов $f(t)$ степени $\le n-1$ с вещественными коэффициентами. Оператор φ в пространстве R - дифференцирование:

$$\varphi f(t) = f'(t),$$

где $f'(t)$ - производная многочлена $f(t)$.

3. Исходное пространство $C(a,b)$. Функции $f(t) \in C(a,b)$ поставим в соответствие функцию

$$\varphi f(t) = \int_a^t f(\tau)\,d\tau.$$

4. Преобразование φ, переводящее вектор $x = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ в вектор $\varphi(x) = (\xi_1 + 4, \xi_2, \xi_3)$, не является линейным.

§ 14. СВЯЗЬ МЕЖДУ МАТРИЦАМИ ЛИНЕЙНОГО

ПРЕОБРАЗОВАНИЯ В РАЗЛИЧНЫХ БАЗИСАХ.

В § 12 было показано, что при фиксированном базисе всякое линейное преобразование пространства R_n задается матрицей. Интересно, как изменяется матрица линейного преобразования при переходе от одного базиса к другому. На этот вопрос отвечает

Теорема 12. Если A, A_1 - матрицы линейного преобразования φ пространства R_n соответственно в базисах $\{e\},\{e'\}$ и T - матрица перехода от базиса $\{e\}$ к базису $\{e'\}$, то

$$A_1 = T^{-1} A T.$$

Лемма. Если A и B - квадратные матрицы порядка n, то ранг $AB \leq$ ранга A и ранг $AB \leq$ ранга B.

Следствие 1. A и B - квадратные матрицы порядка n и матрица B невырожденная, то

ранг $AB =$ ранг $BA =$ ранг A

(т. е. при умножении матрицы A справа или слева на невырожденную матрицу B ранг матрицы не изменяется).

Следствие 2. Ранг матрицы линейного преобразования φ пространства R_n не изменяется при переходе от одного базиса к другому.

§ 15. ДЕЙСТВИЯ НАД ЛИНЕЙНЫМИ ПРЕОБРАЗОВАНИЯМИ И МАТРИЦАМИ. КОЛЬЦО ЛИНЕЙНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ И КОЛЬЦО МАТРИЦ.

В приложениях приходится иметь дело с несколькими преобразованиями, которые используются в различных комбинациях друг с другом. Чаще всего используют либо последовательное применение двух преобразований, либо так называемую сумму преобразований.

Пусть даны линейные преобразования φ и ψ, действующие в линейном пространстве R_n. Напомним, что два преобразования φ_1 и φ_2 считаются равными, если для любого вектора $x \in R_n$ будет $\varphi_1 x = \varphi_2 x$.

Определение 15. Суммой линейных преобразований φ и ψ называется преобразование $\varphi + \psi$, которое ставит в соответствие вектору x вектор $\varphi x + \psi x$, т. е.

$$(\varphi + \psi)x = \varphi x + \psi x.$$

Определение 16. Произведением линейного преобразования φ на число $\lambda \in P$ называется преобразование $\lambda\varphi$, определяемое равенством

$$(\lambda\varphi)x = \lambda(\varphi x).$$

Определение 17. Произведением линейных преобразований φ и ψ называется преобразование (обозначаемое через $\varphi\psi$), состоящее в последовательном выполнении сначала преобразования ψ, а затем преобразования φ.

По этому определению

$$(\varphi\psi)x = \varphi(\psi x).$$

Теорема 13. Множество линейных преобразований пространства R_n над полем P образует кольцо, изоморфное кольцу квадратных матриц порядка n с элементами из поля P.

Отсюда, в частности, следует, что сложение и умножение линейных преобразований пространства R_n обладают свойствами:

1. $\varphi + \psi = \psi + \varphi$.
2. $(\varphi + \psi) + \omega = \varphi + (\psi + \omega)$.
3. $(\varphi\psi)\omega = \varphi(\psi\omega)$.
4. $(\varphi + \psi)\omega = \varphi\omega + \psi\omega$.

   $\omega(\varphi + \psi) = \omega\varphi + \omega\psi$.

Таким образом, установленный изоморфизм позволил нам перенести свойства матриц на линейные преобразования. Однако на основании того же изоморфизма можно свойства линейных преобразований переносить на матрицы. При этом в ряде случаев мы получаем значительные упрощения в доказательствах.

Во множестве линейных преобразований пространства R_n можно выделить нуль-преобразование 0, которое каждому вектору $x \in R_n$ ставит в соответствие нуль-вектор θ этого пространства. Матрицей этого преобразования в любом базисе будет нулевая матрица

$$\begin{pmatrix} 0\;0\;\ldots\;0 \\ 0\;0\;\ldots\;0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ 0\;0\;\ldots\;0 \end{pmatrix}.$$

Обозначим через ε так называемое тождественное линейное преобразование, ставящее в соответствие каждому вектору $x \in R_n$ этот же вектор x: $\varepsilon x = x$ для любого $x \in R_n$. Матрицей этого преобразования в любом базисе будет единичная матрица E.

Для нулевого и единичного преобразований 0 и ε и для любого преобразования φ имеют место следующие очевидные равенства:

$$\varphi + 0 = \varphi, \quad \varepsilon\varphi = \varphi\varepsilon = \varphi.$$

Примеры:

1. Пусть линейное преобразование φ пространства R_n переводит линейно независимые векторы $a_1, a_2, \ldots, a_n$ в векторы $b_1, b_2, \ldots, b_n$ соответственно. Доказать, что матрица A_e этого преобразования в некотором базисе $e_1, e_2, \ldots, e_n$ равна $B \cdot A^{-1}$, где столбцы матриц A и B состоят из координат векторов $a_1, a_2, \ldots, a_n$ и соответственно $b_1, b_2, \ldots, b_n$ в базисе $e_1, e_2, \ldots, e_n$.

2. Преобразование φ в базисе $a_1 = (2,1)$, $a_2 = (1,1)$ имеет матрицу

$$A_a = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Преобразование ψ в базисе $b_1 = (5,2)$, $b_2 = (1,0)$ имеет матрицу

$$B_b = \begin{pmatrix} 7{,}5 & 3{,}5 \\ 4{,}5 & 1{,}5 \end{pmatrix}.$$

Найти матрицу преобразования $\varphi + \psi$ в базисе b_1, b_2.

§ 16. ОБРАТНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ. ВЫРОЖДЕННЫЕ И НЕВЫРОЖДЕННЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ. РАНГ И ЯДРО ЛИНЕЙНОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ.

Среди всех линейных преобразований пространства R_n особое место занимают взаимнооднозначные преобразования (при которых каждый вектор пространства является образом ровно одного вектора).

Теорема 14. Линейное преобразование φ пространства R_n взаимно однозначно тогда и только тогда, когда его матрица в каком-нибудь базисе невырожденна.

Определение 18. Линейное преобразование φ пространства R_n называется обратимым (или невырожденным), если существует такое линейное преобразование ψ, что

$$\psi\varphi = \varphi\psi = \varepsilon,$$

(1)

где ε - тождественное преобразование.

Очевидно, что если какое-либо преобразование ψ удовлетворяет равенствам (1), то оно единственно, линейно и невырожденно. Это преобразование называется обратным для φ и обозначается через φ^{-1}, так что

$$\varphi^{-1}\varphi = \varphi\varphi^{-1} = \varepsilon.$$

(2)

Теорема 15. Линейное преобразование φ пространства R_n обратимо тогда и только тогда, когда оно в каком-либо базисе задается невырожденной матрицей A. При этом обратное преобразование (когда оно существует) определяется матрицей A^{-1}.

Определение 19. Пусть φ - линейное преобразование пространства R_n. Совокупность векторов $y = \varphi x$ для всех $x \in R_n$ называется областью значений преобразования φ и обозначается φR_n. φR_n есть подпространство линейного пространства R_n.

Ранг матрицы линейного преобразования пространства R_n не зависит от выбора базиса в нем, а зависит только от самого преобразования. Этот факт делает обоснованным следующее

Определение 20. Рангом линейного преобразования φ пространства R_n называется ранг его матрицы.

Теорема 16. Размерность подпространства φR_n (области значений линейного преобразования φ) равна рангу преобразования φ, т. е.

$$\dim \varphi R_n = \text{ранг } \varphi .$$

Из теорем 15—16 заключаем следующее. Для невырожденных преобразований φ ранг $\varphi = n$, область значений φR_n имеет размерность n и совпадает с пространством R_n.

Если преобразование вырожденное, то ранг $\varphi < n$, в этом случае преобразование φ переводит пространство R_n в его правильную часть φR_n размерности $\leq n-1$. Наряду с областью значений важной характеристикой линейного преобразования является так называемое ядро линейного преобразования.

Определение 21. Ядром линейного преобразования φ пространства R_n называется множество всех векторов, отображаемых преобразованием φ в нулевой вектор.

Ядро преобразования φ обозначается через $Ker\varphi$. Легко видеть, что оно является подпространством пространства R_n.

Теорема 17. Размерность ядра преобразования φ пространства R_n равна разности $n-r$, где $r =$ ранг φ.

Из теорем 15 и 17 получаем

Следствие. Для того чтобы линейное преобразование пространства R_n было невырожденным, необходимо и достаточно, чтобы ядро этого преобразования было нулевым.

Пример. Найти ядро и область значений линейного преобразования φ, заданного в некотором фазисе пространства T_4 матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 4 & 7 & 13 & 3 \\ 3 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

§ 17. ОБ ИНВАРИАНТНЫХ ПОДПРОСТРАНСТВАХ И ИНДУЦИРОВАННЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЯХ.

Определение 22. Пусть φ - линейное преобразование пространства R. Подпространство $L \subset R$ называется инвариантным относительно преобразования φ, если из $x \in L$ следует $\varphi x \in L$.

В случае инвариантности подпространства L можно говорить о линейном преобразовании φ_1 с областью определения L. Преобразование φ_1 называется индуцированным преобразованием. Если $x \in L$, то $\varphi x = \varphi_1 x$; если же $x \notin L$, то φx существует, а $\varphi_1 x$ не определено. Различие преобразований φ и φ_1 состоит лишь в различии между их областями применения.

Примеры:

1. Нуль-подпространство, состоящее из одного вектора θ, и само пространство R инвариантны относительно любого преобразования в R.

2. В пространстве V_3 выполняется некоторый поворот φ вокруг оси l, проходящей через точку O. Подпространствами, инвариантными относительно φ, будут:

а) совокупность векторов, лежащих на оси l;

б) совокупность векторов, лежащих в плоскости, проходящей через точку O и перпендикулярной оси l.

3. R_n - пространство многочленов $f(t)$ степени $\le n-1$. Преобразование φ, переводящее любой многочлен в его производную, является линейным. Пусть k - натуральное число, причем $k \le n-1$. Тогда

подпространство всех многочленов степени $\leq k$ будет инвариантным относительно преобразования φ.

§ 18. СОБСТВЕННЫЕ ВЕКТОРЫ И СОБСТВЕННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ ЛИНЕЙНОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ.

Пусть φ - линейное преобразование пространства R_n над полем P. Простейшей, но весьма важной будет ситуация, при которой вектор x переходит в коллинеарный вектор λx, так что $\varphi x = \lambda x$, где λ - некоторое число из поля P. Понятно, что для данного линейного преобразования φ соотношение $\varphi x = \lambda x$ может выполняться лишь для некоторых векторов x - такие векторы и называются собственными векторами линейного преобразования φ. Условие $\varphi x = \lambda x$ выполняется тривиальным образом для нулевого вектора $x = \theta$, так как всегда $\varphi\theta = \theta = \lambda\theta$. Но этот случай не представляет интереса. Когда говорят о собственных векторах преобразования, то имеют в виду векторы, отличные от нулевого.

Определение 23. Собственным вектором линейного преобразования φ пространства R_n над полем P называется ненулевой вектор x, удовлетворяющий условию

$$\varphi x = \lambda x$$

(1)

для некоторого $\lambda \in P$. Число λ при этом называется собственным значением преобразования φ, соответствующим вектору x.

Свойство 1. Собственные векторы линейного преобразования φ, отвечающие данному собственному значению λ, вместе с нулевым вектором образуют подпространство.

Свойство 2. Собственные векторы $x_1, x_2, ..., x_m$ линейного преобразования φ, соответствующие попарно различным собственным значениям $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m$ линейно независимы.

Следствие. Линейное преобразование φ пространства R_n не может иметь более n собственных векторов с попарно различными собственными значениями.

Свойство 3. Пусть $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ - попарно различные собственные значения преобразования φ. Если для каждого из этих значений взять линейно независимую систему собственных векторов, то система, состоящая из всех этих векторов, линейно независима.

§ 19. ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИЙ МНОГОЧЛЕН МАТРИЦЫ И ЛИНЕЙНОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ. СУЩЕСТВОВАНИЕ СОБСТВЕННЫХ ВЕКТОРОВ.

Определение 24. Пусть A - квадратная матрица порядка n с элементами a_{ij} из поля P. Тогда многочлен

$$\Delta(\lambda) = |A - \lambda E| = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix}$$

называется характеристическим многочленом матрицы A.

Уравнение $|A - \lambda E| = 0$ относительно λ называют характеристическим уравнением, а его корни - характеристическими числами матрицы A.

Из определения определителя следует, что $\Delta(\lambda)$ есть многочлен от λ степени n, коэффициент старшего члена равен $(-1)^n$.

Пусть φ - линейное, преобразование пространства R_n. Выбирая различные базисы пространства R_n, мы будем получать различные матрицы преобразования φ. Естественно возникает вопрос: зависит ли характеристический многочлен матрицы линейного преобразования от выбора базиса? На этот вопрос отвечает

Теорема 18. Характеристический многочлен матрицы линейного преобразования не зависит от выбора базиса.

Теорема 18 позволяет характеристический многочлен матрицы линейного преобразования называть характеристическим многочленом преобразования. Множество характеристических чисел матрицы преобразования также не будет зависеть от базиса, поэтому говорят о характеристических числах преобразования.

Теорема 19. Множество собственных значений преобразования φ линейного пространства R_n над числовым полем P совпадает с множеством корней характеристического многочлена преобразования φ, принадлежащих полю P.

§20. О приведении матрицы линейного преобразования к диагональной форме.

Теорема 20. Если линейное преобразование φ пространства R_n имеет n линейно независимых собственных векторов, то в базисе, состоящем из этих векторов, матрица преобразования φ имеет диагональную форму.

Обратно, если в некотором базисе матрица преобразования φ диагональна, то векторы этого базиса являются собственными.

Из теоремы 20, учитывая свойство 2 собственных векторов (18) получаем: если характеристический многочлен преобразования φ пространства R_n над полем P имеет n различных корней, принадлежащих полю P, то матрица преобразования приводится к диагональной форме.

Если число кратных корней характеристического многочлена равно n, то приведение матрицы преобразования к диагональной форме возможно, если же оно меньше n, то невозможно.

Приведем без доказательства теорему о размерности подпространства $R^{(\lambda)}$.

Теорема 21. Размерность подпространства $R^{(\lambda)}$, принадлежащего корню λ_0 характеристического многочлена, не превосходит кратности этого корня.

Позднее выяснится (теорема 32), что в случае, когда основное поле P есть поле всех вещественных чисел, а матрица A, задающая линейное преобразование, симметрична, размерность пространства $R^{(\lambda)}$ совпадает с кратностью корня λ_0.

Примеры.1. Линейное преобразование φ пространства T_3 задано в некотором базисе матрицей

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 \\ -3 & 5 & -1 \\ -3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Можно ли путем перехода к новому базису привести матрицу этого преобразования к диагональному виду? Найти этот базис и соответствующую матрицу.

2. $$A = \begin{pmatrix} 6 & -5 & -3 \\ 3 & -2 & -2 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

§21.О собственных векторах линейного преобразования с симметрической матрицей.

Среди линейных преобразований часто встречаются такие, матрицы которых в некотором базисе симметричны. Для таких преобразований справедливы специфические теоремы о собственных значениях и собственных векторах.

Напомним свойство комплексных чисел. Если $\bar{z}$ есть комплексное число, сопряженное числу z, и $|z|$ модуль числа z, то

$$\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2, \qquad \overline{z_1 * z_2} = \overline{z_1} * \overline{z_2}, \qquad z * \bar{z} = |z|^2. \qquad (1)$$

Для любой матрицы A с комплексными элементами через $\overline{A}$ обозначают матрицу, полученную из A заменой всех элементов на сопряженные. Из (1) следует, что для произвольных матриц A и B справедливо:

$$\overline{AB} = \overline{A} * \overline{B},$$

(2)

$$\overline{\alpha A} = \overline{\alpha} * \overline{A},$$

(3)

где α - комплексное число.

Условие вещественности комплексного числа z и матрицы A запишется так:

$$z = \overline{z},\ A = \overline{A}.$$

Теорема 22. все собственные значения линейного преобразования φ с вещественной симметрической матрицей A вещественны.

Теорема 23. Пусть линейное преобразование φ в некотором базисе задается симметрической матрицей A. Если x и y – два собственных вектора преобразования φ, отвечающие различным собственным значениям λ и μ, и $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$; $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n$ - координаты этих векторов в рассматриваемом базисе, то

$$\xi_1\eta_1 + \xi_2\eta_2 + \ldots + \xi_n\eta_n = 0$$

Пример. Матрицу A линейного преобразования привести, если возможно, к диагональному виду:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Глава III
ЕВКЛИДОВЫ ПРОСТРАНСТВА

§22. Понятие евклидова пространства. Примеры

Определение 25. Евклидовым пространством E_n размерности n называется n-мерное линейное пространство над полем вещественных чисел, в котором каждой паре векторов x и y поставлено в соответствие вещественное число, обозначаемое через (x, y) и называемое скалярным произведением этих векторов, причем выполнены аксиомы:

11.$(x, y) = (y, x)$

12.$(x_1 + x_2, y) = (x_1, y) + (x_2, y)$

13.$(\alpha x, y) = \alpha (x, y)$

14.$(x, x) > 0, x \neq \Theta$, где α -любое вещественное число.

Из аксиом 11-14 следует (докажите):

1.$(\Theta, \Theta) = 0$

2.$(x, \Theta) = 0$

3.$(x_1 + x_2 + \ldots + x_k, y) = (x_1, y) + (x_2, y) + \ldots + (x_k, y)$

4.$(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_k x_k, y) = \alpha_1 (x_1, y) + \alpha_2 (x_2, y) + \ldots + \alpha_k (x_k, y)$

Примеры.1. Исходное линейное пространство V_3.Скалярное произведение векторов из V_3 определяется как произведение длин векторов на косинус угла между ними:

$(x, y) = |x| \cdot |y| \cdot \cos(x \wedge y)$

Аксиомы 11-14 выполняются, следовательно, имеем евклидово пространство, для которого сохраним обозначение V_3.

2. Исходное линейное пространство T_n. Скалярное произведение векторов

$x = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n), y = (\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n)$

определим формулой

$(x, y) = \xi_1 \eta_1 + \xi_2 \eta_2 + \ldots + \xi_n \eta_n$

Аксиомы 11-14 легко проверяются. В дальнейшем пространство T_n с указанным скалярным произведением будем обозначать через T_n^o и называть арифметическим евклидовым пространством.

Этот пример показывает, что евклидовы пространства существуют для любого n.

В пространстве T_n Скалярное произведение векторов x и y можно задавать формулой:

$$(x, y) = \xi_1\eta_1 + \xi_2\eta_2 + \ldots + n\xi_n\eta_n \qquad (1')$$

Здесь также выполнены аксиомы 11-14.

Таким образом, одно и то же линейное пространство можно различными способами превратить в евклидово, по-разному определяя скалярное произведение.

3. Исходное линейное пространство T_n то же, что и в примере 2. Для определения скалярного произведения возьмем некоторую вещественную матрицу

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & .. & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ .. & .. & .. & .. \\ a_{n1} & a_{n2} & .. & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Выясним, какой должна быть матрица A, для того, чтобы формула

$$\begin{aligned}(x, y) = {} & a_{11}\xi_1\eta_1 + a_{12}\xi_1\eta_2 + \ldots + a_{1n}\xi_1\eta_n + \\ & + a_{21}\xi_2\eta_1 + a_{22}\xi_2\eta_2 + \ldots + a_{2n}\xi_2\eta_n + \ldots + \\ & a_{n1}\xi_n\eta_1 + a_{n2}\xi_n\eta_2 + \ldots + a_{nn}\xi_n\eta_n \end{aligned} \qquad (2)$$

определяла скалярное произведение векторов $x = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n), y = (\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n)$.

Аксиомы 12-13 выполняются для любой A. Чтобы выполнялась 11, необходимо и достаточно, чтобы $a_{ij} = a_{ji}$ (3)

То есть, чтобы A была симметрическая.

Аксиома 14 требует, чтобы выражение

$$
\begin{aligned}
(x,x) = {} & a_{11}\xi_1^{\ 2} + a_{12}\xi_1\xi_2 + ..+ a_{1n}\xi_1\xi_n + \\
& + a_{21}\xi_2\xi_1 + a_{22}\xi_2^2 + ...+ a_{2n}\xi_2\xi_n + \\
& .... \\
& + a_{n1}\xi_n\xi_1 + a_{n2}\xi_n\xi_2 + ...+ a_{nn}\xi_n^2
\end{aligned} \qquad (4)
$$

было положительно для любых значений $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n$, одновременно не равных нулю, т.е. чтобы квадратичная форма (4) с матрицей A была положительно определенной.

Если в качестве A взять единичную матрицу E, формула (2) принимает вид (1), и мы получаем евклидово пространство T_n^o .Если же

$$
A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 2 & ... & 0 \\ .. & .. & .. & .. \\ 0 & 0 & ... & n \end{pmatrix}
$$

то формула (2) принимает вид (1’).

4.Исходное линейное пространство-пространство функций, непрерывных на отрезке $a \le t \le b$,скалярное произведение функций $x(t), y(t)$ определим так

$$
(x,y) = \int_b^a x(t)y(t)dt
$$

Аксиомы 11-14 выполнены, полученное евклидово пространство бесконечномерно.

5. Исходное пространство-пространство многочленов от t степени $\le n-1$. Скалярное произведение двух многочленов $f(t)$ и $g(t)$ определим как в примере 4. Получим n-мерное евклидово пространство.

§23.Длина вектора. Угол между векторами. Неравенство Коши-Буняковского.

Для скалярного произведения, определенного формулой

$$(x, y) = |x||y|\cos(x, y) \tag{1}$$

имеем

$$(x, x) = |x|^2.$$

Определение 26. Длиной вектора в евклидовом пространстве E_n называется неотрицательное значение квадратного корня из скалярного квадрата этого вектора, и обозначается $|x|$.

$$|x| = \sqrt{(x, x)}$$

$$|x|^2 = (x, x)$$

Число (x, x)-скалярный квадрат вектора x по аксиоме 14 число неотрицательное, и поэтому каждый вектор имеет определенную неотрицательную длину. Длина нулевого вектора равна нулю. Вектор, длина которого равна 1, называется единичным, или нормированным.

Если α есть некоторое вещественное число, то

$$|\alpha x| = \sqrt{(\alpha x, \alpha x)} = \sqrt{\alpha^2 (x, x)} = |\alpha| \sqrt{(x, x)} = |\alpha||x|.$$

Отсюда следует, что каждый вектор можно нормировать, умножив его на $\frac{1}{|x|}$.

Примеры.1. В пространстве T_n^o для вектора $x = (\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n)$ получаем выражение его длины

$$|x| = \sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2 + .. + \xi_n^2}$$

2. В пространстве $C(a,b)$ длина вектора $x(t)$ будет выражаться формулой

$$|x| = \sqrt{(x, x)} = \sqrt{\int_b^a x^2(t)dt}$$

Определение 27. Углом между ненулевыми векторами x и y евклидова пространства E_n называется число

$$\varphi = \arccos\frac{(x,y)}{|x||y|} \qquad (2)$$

Следовательно,

$$\cos\varphi = \frac{(x,y)}{|x||y|} \qquad (3)$$

Чтобы определение угла было корректным, надо доказать, что

$-1 \le \dfrac{(x,y)}{|x||y|} \le 1$, т.е. что

$$\frac{|(x,y)|}{|x||y|} \le 1$$

или что для любых векторов x и y имеет место неравенство

$$|(x,y)| \le |x||y| \qquad (4)$$

Неравенство (4) называют неравенством Коши-Буняковского.

Примеры. 1. В пространстве V_3 неравенство Коши—Буняковского следует непосредственно из (1).

2. В пространстве T_n^O для векторов $x = (\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n), y = (\eta_1, \eta_2, ..., \eta_n)$

неравенство Коши—Буняковского принимает вид:

$$|\xi_1\eta_1 + \xi_2\eta_2 + ... + \xi_n\eta_n| \le \sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2 + ... + \xi_n^2} \times \sqrt{\eta_1^2 + \eta_2^2 + ... + \eta_n^2}$$

где знак = будет тогда и только тогда, когда при некотором α

$$(\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n) = \alpha\ (\eta_1, \eta_2, ..., \eta_n)$$

т. е. когда наборы координат пропорциональны.

§ 24. ПОНЯТИЕ МЕТРИЧЕСКОГО ПРОСТРАНСТВА

Докажем так называемое неравенство треугольника для любых двух векторов x и $y \in E_n$. Используя аксиомы 11°—14° и неравенство Коши — Буняковского, получаем:

$$|x+y|^2 = (x+y, x+y) = (x,x) + 2(x,y) + (y,y) \le |x|^2 + 2|x||y| + |y|^2 = (|x| + |y|)^2$$

(1)

Неравенство (1) называют неравенством треугольника. Это название оправдывается тем, что в случае пространства V_2 мы имеем дело с треугольником, длины сторон которого суть $|x|, |y|, |x+y|$ (сделайте чертеж).

Выясним, когда в соотношении (1) имеет место знак =. Случай, когда хотя бы один из векторов нулевой, очевиден.

а) Пусть оба вектора x и y ненулевые, но

$$|x+y| = |x| + |y|$$

Тогда

$$|x+y|^2 = |x|^2 + 2|x||y| + |y|^2$$

С другой стороны

$$|x+y|^2 = (x+y, x+y) = (x,x) + 2(x,y) + (y,y) = |x|^2 + 2(x,y) + |y|^2$$

Следовательно,

$$(x,y) = |x||y|$$

а это, как мы видели ранее (§ 23), означает, что $x = \alpha y$, где α -вещественное число, и $(x,y) > 0$.

Значит,

$$(x,y) = (\alpha y, y) = \alpha (y,y) > 0$$

откуда следует, что $\alpha > 0$.

б) Обратно, пусть $x = \alpha y$, где $\alpha > 0$. Тогда

$$|x+y| = |\alpha y + y| = |(\alpha + 1)y| = |\alpha + 1||y|,$$
$$|x| + |y| = |\alpha y| + |y| = |\alpha||y| + |y| = (|\alpha| + 1)|y| = |\alpha + 1||y|$$

и, значит, при $x = \alpha y$, где $\alpha > 0$ в соотношении (1), имеет место знак = .

Итак, для ненулевых векторов x и y в соотношении (1) имеет место знак =тогда и только тогда, когда $x = \alpha y$, где $\alpha > 0$, т. е. когда векторы x и y коллинеарны и одинаково направлены.

Длина вектора $x \in E_n$ является, таким образом, неотрицательной числовой функцией, определенной на E_n и обладающей свойствами:

1*. $\|x\| = 0$ тогда и только тогда, когда $x = 0$.

2*. $\|x + y\| \le \|x\| + \|y\|$.

3*. $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$

Произвольное линейное пространство R (не обязательно евклидово), на котором задана числовая функция $\|x\|$ обладающая свойствами 1*—3*, называется нормированным, сама же функция $\|x\|$ называется нормой вектора.

Таким образом, евклидовы пространства являются нормированными, причем нормой вектора является его длина.

Введем понятие расстояния $\rho(x, y)$ между двумя векторами x и y произвольного нормированного пространства R, положив

$$\rho(x, y) = \|x - y\| \qquad (2)$$

Это определение находится в полном соответствии со свойствами расстояния в обычном трехмерном пространстве. Действительно, если точка A в пространстве является концом вектора $x = O\overline{A}$, а точка B — концом вектора $y = O\overline{B}$, то расстояние между точками A и B есть не что иное, как длина вектора AB, равного $y - x$.

На основе аксиом нормы {т. е. аксиом 1* —3*) можно получить, что $\rho(x, y) > 0$, при этом:

а) $\rho(x, y) = 0$ тогда и только тогда, когда $x = y$ (свойство тождества),

б) $\rho(x, y) = \rho(y, x)$ (свойство симметрии),

в) $\rho(x, y) \le \rho(x, z) + \rho(z, y)$ (свойство треугольника).

В самом деле, из 1* по определению (2) следует а). По аксиоме 3* и определению (2) получаем б), так как

$$\rho(x, y) = \|x - y\| = \|(-1)(y - x)\| = |-1|\|y - x\| = \|y - x\| = \rho(y, x)$$

Свойство в) получаем по определению (2), пользуясь аксиомой 2*:

$$\rho(x,y) = \|x-y\| = \|(x-z)+(z-y)\| \le \|x-z\| + \|z-y\| = \rho(x,z) + \rho(z,y)$$

^ Произвольное множество, в котором определена неотрицательная вещественная функция $\rho(x,y)$, обладающая свойствами а), б), в) (аксиомами метрики), называется метрическим пространством. Следовательно, всякое нормированное (в частности, евклидово) пространство является метрическим пространством.

Для евклидова пространства E_n расстояние между векторами x и y определяется формулой

$$\rho(x,y) = |x-y| = \sqrt{(x-y,x-y)} \tag{3}$$

в частности,

$$\rho(x,\Theta) = \sqrt{(x,x)} = |x|$$

т. е. длина вектора x есть расстояние от этого вектора x (точки x) до вектора Θ (точки Θ) — до «начала координат» Θ.

§ 25. ОРТОГОНАЛЬНОСТЬ ВЕКТОРОВ. ОРТОНОРМИРОВАННЫЙ БАЗИС. ОРТОГОНАЛЬНО-ДОПОЛНИТЕЛЬНОЕ ПОДПРОСТРАНСТВО.

Определение 28. Векторы x и y евклидова пространства E_n называются ортогональными, если их скалярное произведение равно нулю, т. е. если

$$(x,y) = 0. \tag{1}$$

Согласно определению 27 угол между ненулевыми ортогональными векторами равен 90^o.

Если $x = \Theta$, то $(x,y) = (\Theta,y) = (0 \times z,y) = 0(z,y) = 0$,т.е. нулевой вектор оказывается ортогональным к любому вектору.

Из аксиомы 13° следует, что ортогональность двух векторов сохраняется при умножении любого из них па произвольное вещественное число.

Отметим два свойства ортогональности векторов.

Свойство 1. Любая система ненулевых попарно ортогональных векторов

$$a_1, a_2, ..., a_k \tag{3}$$

линейно независима.

Допустим, что система (3) линейно зависима. Тогда существуют не равные одновременно нулю числа $c_1, ..., c_k$ такие, что

$$c_1 a_1 + ... + c_k a_k = \theta \tag{4}$$

Не нарушая общности, положим $c_1 \neq 0$. Умножив обе части (4) скалярно на a_1 и учитывая ортогональность вектора a_1 к остальным, получим, что

$$c_1 (a_1, a_1) = 0$$

откуда, в силу $c_1 \neq 0$, следует, что $(a_1, a_1) = 0$. Отсюда по аксиоме, 14° получаем $a_1 = \theta$, что противоречит условию. Следовательно, допущение о линейной зависимости системы (3) неверно.

Свойство 2. Если вектор $b \in E_n$ ортогонален к каждому из векторов

$$a_1, a_2, ..., a_k$$

то он ортогонален к каждому из векторов линейного подпространства L, натянутого на векторы $a_1, a_2, ..., a_k$.

В самом деле, пусть $L = L(a_1, a_2, ..., a_k) = \{\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + ... + \alpha_k a_k\}$, где $\alpha_1, .., \alpha_k$ - произвольные вещественные числа. Согласно условию и аксиомам 12° — 13° имеем:

$$(\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + ... + \alpha_k a_k, b) = \alpha_1 (a_1, b) + ... + \alpha_k (a_k, b) = 0$$

Свойство 2 является обобщением на любое евклидово пространство теоремы о двух перпендикулярах из элементарной геометрии (сделайте чертеж).

Определение 29. Векторы $e_1, e_2, ..., e_n$, отличные от нулевого, образуют ортогональный базис n-мерного евклидова пространства, если они попарно ортогональны.

Определение 30. Векторы $e_1, e_2, ..., e_n$ евклидова пространства размерности n образуют ортонормированный базис, если они попарно ортогональны и каждый имеет длину, равную 1, т. е. если

$$(e_i, e_k) = \begin{cases} 1, i = k \\ 0, i \neq k \end{cases}$$

Существование ортогональных базисов доказывается конструктивно с помощью так называемого процесса ортогонализации.

Теорема 24. Во всяком n-мерном евклидовом пространстве E_n существуют ортогональные (а также и ортонормированные) базисы.

Следующая теорема показывает значение ортонормированных базисов в определении скалярного произведения.

Теорема 25. 1) В ортонормированном базисе евклидова пространства скалярное произведение любых двух векторов равно сумме произведений соответствующих координат:

$$(x, y) = \xi_1\eta_1 + ... + \xi_n\eta_n \qquad (5)$$

где ξ_i, η_i — координаты векторов x и y в указанном базисе.

2) Обратно, если в некотором базисе $e_1, e_2, ..., e_n$ евклидова пространства E_n скалярное произведение любых двух векторов x и y задается формулой (5), то этот базис является ортонормированным.

Определение 31. Ортогональным дополнением подпространства L пространства E_n называется совокупность L^* всех векторов из E_n, ортогональных к L.

Докажем, что L^* является подпространством пространства E_n.

Пусть $x^*, y^* \in L^*$. Это означает, что если x — произвольный вектор из L, то

$$(x^*, x) = (y^*, x) = 0,$$

и потому

$$(x^* + y^*, x) = (x^*, x) + (y^*, x) = 0.$$

Следовательно, $(x^* + y^*) \in L^*$. Кроме того, для произвольного вещественного числа α и любого $x^* \in L^*$, имеем:

$$(\alpha x^*, x) = \alpha (x^*, x) = \alpha \cdot 0 = 0$$

Следовательно, $\alpha x^* \in L$.

По теореме 7 получаем, что L^* подпространство.

Тот факт, что подпространство L^* названо дополнением подпространства L, объясняется следующей теоремой.

Теорема 26. Пространство E_n есть прямая сумма подпространств L и L^*.

Пусть L — линейное подпространство пространства E_n. Докажем, что любой вектор x из E_n однозначно представляется в виде $x = y + z$, где $y \in L$ и $z \in L$. Вектор y называется ортогональной проекцией вектора x на подпространство L, а z — ортогональной составляющей вектора x относительно L.

Пусть $e_1, e_2, ..., e_n$ — некоторый базис подпространства L. Будем искать вектор y, требуемый задачей в виде

$$y = c_1 e_1 + c_2 e_2 + ... + c_k e_k \qquad (6)$$

где числа $c_1, c_2, ..., c_k$ найдем из условия ортогональности вектора $x - y$ к L.

Из следует, что $(x - y, e_i = 0)$, а отсюда

$$(x, e_i) = (y, e_i), i = 1,2,...,k.$$

Таким образом, получаем систему для отыскания чисел $c_1, c_2, ..., c_k$:

$$\left.\begin{array}{l}(e_1,e_1)c_1 + (e_2,e_1)c_2 + \ldots + (e_k,e_1)c_k = (x,e_1)\\ (e_1,e_2)c_1 + (e_2,e_2)c_2 + \ldots + (e_k,e_2)c_k = (x,e_2)\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ (e_1,e_k)c_1 + (e_2,e_k)c_2 + \ldots + (e_k,e_k)c_k = (x,e_k)\end{array}\right\}$$

(7)

Если базис $e_1, e_2, ..., e_n$ ортонормирован, то система (7) обращается в систему:

$$c_i = (x, e_i), i = 1,2,...,k \qquad (8)$$

откуда находятся и притом однозначно коэффициенты $c_1, c_2, ..., c_k$. Так как базис всегда можно ортонормировать, а исходное условие $(x - y) \perp L$ не зависит от базиса, то тем самым доказано существование и единственность вектора у, такого, что $(x - y) \perp L$. Отсюда следует, что при произвольном базисе $e_1, e_2, ..., e_n$ определитель системы (7)

$$\begin{vmatrix}(e_1,e_1)(e_2,e_1)\ldots\ldots(e_k,e_1)\\ (e_1,e_2)(e_2,e_2)\ldots\ldots(e_k,e_2)\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ (e_1,e_k)(e_2,e_k)\ldots.(e_k,e_k)\end{vmatrix}$$

отличен от нуля (так называемый определитель Грама векторов $e_1, e_2, ..., e_n$)

Таким образом, числа $c_1, c_2, ..., c_k$ находим из системы (7), а затем по формуле (6) и сам вектор у. Найдя вектор у, полагаем $z = x - y$.

Пример. Найти ортогональную проекцию y и ортогональную составляющую z вектора $x = (5,2,-2,2)$ на линейное пространство L, натянутое на векторы

$e_1 = (2,1,1,-1)$, $e_2 = (1,1,3,0)$

Расстоянием от вектора x до линейного многообразия $H = L + x_0$

называется минимум расстояний от данного вектора до векторов многообразия, т. е. минимум длин векторов $x-u$, где u — вектор из H.

Докажем, что указанное расстояние равно длине ортогональной составляющей z векторов $x-x_0$ относительно линейного подпространства L.

Пусть $x-x_0=y+z$, где y — ортогональная проекция вектора $x-x_0$ на L, z - его ортогональная составляющая относительно L, так что

$$x-x_0-y\perp L.$$

Имеем:

$$x-u=(x-x_0)-(u-x_0)=[(x-x_0)-y]+[y-(u-x_0)]$$

Здесь $(x-x_0)-y\perp L, y-(u-x_0)\in L$, а потому

$$|x-u|^2=(x-u,x-u)=|(x-x_0)-y|^2+|y-(u-x_0)|^2$$

Так как первое слагаемое не зависит от u, то $\min|x-u|$ достигается при $\min|y-(u-x_0)|$, который равен нулю (при $u=x_0+y\in H$). Следовательно,

$$\min|x-u|=|(x-x_0)-y|=|z|,$$

что и требовалось доказать.

Теперь докажем, что из всех векторов линейного подпространства L, наименьший угол с данным вектором $x\in E_n$ образует ортогональная проекция y вектора x на L.

Пусть $x=y+z$, где y и z имеют тот же смысл, что и выше. Тогда

$$(x,y)=(y+z,y)=(y,y)+(z,y)=(y,y)=|y|^2$$

а поэтому

$$\cos(x,y)=\frac{(x,y)}{|x|\cdot|y|}=\frac{|y|^2}{|x|\cdot|y|}=\frac{|y|}{|x|}$$

Пусть теперь y' — произвольный вектор из L. Учитывая, что

$$(x,y')=(y+z,y')=(y,y')+(z,y')=(y,y')$$

получаем:

$$\cos(x,y') = \frac{(x,y')}{|x|\cdot|y'|} = \frac{(y,y')}{|x|\cdot|y'|} = \frac{|y|\cdot|y'|}{|x|\cdot|y'|}\cos(y,y') \le \frac{|y|}{|x|} = \cos(x,y)$$

что и доказывает утверждение.

Угол между вектором x и его ортогональной проекцией на подпространство L называется углом между x и L.

§ 26. ИЗОМОРФИЗМ ЕВКЛИДОВЫХ ПРОСТРАНСТВ

Определение 32. Два евклидовых пространства E_n и E_n' называются изоморфными, если между ними можно установить взаимно однозначное соответствие Φ, такое, что:

$$1. \Phi(x+y) = \Phi(x) + \Phi(y),$$
$$2. \Phi(\lambda x) = \lambda\Phi(x),$$
$$3. (x,y) = (\Phi(x),\Phi(y)),$$

где λ — произвольное вещественное число.

Первые два условия означают, что и изоморфны как линейные пространства, третье условие означает, что при изоморфизме Φ сохраняется скалярное произведение.

Теорема 27. Любые два евклидовых пространства E_n и E_n' размерности n изоморфны.

Как следствие, получаем, что каждое евклидово пространство E_n изоморфно арифметическому евклидову пространству T_n^0.

§ 27. ОРТОГОНАЛЬНЫЕ МАТРИЦЫ

Пусть $e_1, e_2, ..., e_n$ и $e_1', e_2', ..., e_n'$ — два базиса евклидова пространства E_n и

$$Q = \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} & \cdots & q_{1n} \\ q_{21} & q_{22} & \cdots & q_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ q_{n1} & q_{n2} & \cdots & q_{nn} \end{pmatrix}$$

- матрица перехода от базиса $\{e\}$ к базису $\{e'\}$, т. е.

$$\left.\begin{aligned} e_1' &= q_{11}e_1 + q_{21}e_2 + \ldots + q_{n1}e_n, \\ e_2' &= q_{12}e_1 + q_{22}e_2 + \ldots + q_{n2}e_n, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ e_n' &= q_{1n}e_1 + q_{2n}e_2 + \ldots + q_{nn}e_n \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Как мы видели в § 7, матрицей перехода от одного базиса к другому может служить любая невырожденная матрица. В евклидовых пространствах особую роль играют ортонормированные базисы, поэтому естественно поставить вопрос: какими свойствами обладает матрица Q в случае, когда базисы $\{e\}$ и $\{e'\}$ ортонормированны. В этом случае для векторов $e_1, e_2, \ldots, e_n$ по теореме 25 имеем (для $i,k = 1,2,..,n$):

$$(e_i', e_k') = q_{1i}q_{1k} + q_{2i}q_{2k} + \ldots + q_{ni}q_{nk} = \begin{cases} 1, i = k, \\ 0, i \neq k. \end{cases} \qquad (2)$$

Равенства (2) означают, что каждый столбец матрицы Q нормирован, и любые два столбца ортогональны.

Определение 33. Матрица, у которой каждый столбец нормирован, а любые два различных столбца ортогональны, называется ортогональной.

Итак, матрица перехода от одного ортонормированного базиса к другому ортогональна.

Примеры ортогональных матриц:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2/3 & 2/3 & -1/3 \\ 2/3 & -1/3 & 2/3 \\ -1/3 & 2/3 & 2/3 \end{pmatrix}$$

Если матрица Q ортогональна, а Q' - транспонированная к ней матрица, то

$$Q \cdot Q' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ .. & .. & .. & .. \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} = E$$

(3)

Отсюда следует, что матрица Q невырожденная и что

$$Q' = Q^{-1} \qquad (4)$$

Следовательно, вместе с (3) имеет место также соотношение

$$Q \cdot Q' = E \qquad (5)$$

Таким образом, если столбцы матрицы ортонормированы, то ортонормированы и ее строки.

Так как $|Q| = |Q'|$, то из (5) получаем, что $|Q|^2 = 1$, откуда $|Q| = \pm 1$, т.е. определитель ортогональной матрицы равен 1 или —1 (обратное, вообще говоря, не будет верно. Приведите пример).

Пусть теперь Q — произвольная ортогональная матрица и $e_1, e_2, \dots, e_n$ — ортонормированный базис пространства E_n. Тогда векторы $e_1', e_2', \dots, e_n'$, определяемые равенствами (1), будут ортогональны и нормированы — это следует из равенств (2). Таким образом, всякая ортогональная матрица есть матрица перехода от одного ортонормированного базиса к другому ортонормированному базису.

Примеры. 1. Показать, что при $n = 2$ всякая ортогональная матрица с определителем, равным +1, имеет вид:

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix},$$

т. е. является матрицей преобразования поворота на угол α .

2. Ясно, что целочисленная матрица является ортогональной тогда и только тогда, когда в каждой строке и в каждом столбце имеется только один

отличный от нуля элемент, равный + 1 или -1.

Доказать, что всего имеется $2^n \cdot n!$ целочисленных ортогональных матриц порядка n.

3. Показать, что множество всех ортогональных матриц порядка n образует группу относительно операции умножения матриц.

$ 28. ОРТОГОНАЛЬНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЕВКЛИДОВА ПРОСТРАНСТВА.

Определение 34. Линейное преобразование φ евклидова пространства E_n называется ортогональным, если оно сохраняет скалярное произведение векторов, т. е, если

$$(\varphi x, \varphi y) = (x, y) \tag{1}$$

для всех $x, y \in E_n$.

Полагая в (1) $x = y$, получаем:

$$(\varphi x, \varphi x) = (x, x)$$

т. е. для любого $x \in E_n$

$$|\varphi x|^2 = |x|^2 \tag{2}$$

Следовательно,

$$|\varphi x| = |x| \tag{3}$$

т. е. ортогональное преобразование сохраняет длины векторов. В связи с этим говорят, что ортогональное преобразование не меняет метрики пространства E_n.

Переход (1)=>(2)=>(3) обратим.

Определение 34'. Ортогональным преобразованием φ евклидова пространства E_n называется такое линейное преобразование, которое сохраняет скалярный квадрат каждого вектора:

$$(\varphi x, \varphi x) = (x, x)$$

или, другими словами, сохраняет длину каждого вектора из E_n. Так как

$$\cos(x, y) = \frac{(x, y)}{|x| \cdot |y|}$$

и числитель и знаменатель в этом выражении не меняются при ортогональном преобразовании, то ортогональное преобразование сохраняет утлы между векторами.

Теорема 28. 1) Если линейное преобразование φ евклидова пространства E_n ортогонально, то образы всех векторов ортонормированного базиса сами составляют ортонормированный базис,

2) Обратно, если линейное преобразование φ евклидова пространства E_n переводит хотя бы один ортонормированный базис снова в ортонормированный базис, то это преобразование φ ортогонально.

Смысл теоремы 28 состоит, следовательно, в том, что понятие ортогонального преобразования пространства E_n есть обобщение на евклидово пространство E_n вращения обычного пространства при неподвижном начале координат или вращения, соединенного с отражением относительно какой-либо плоскости, проходящей через начало координат.

Следующая теорема дает матричное описание ортогонального преобразования.

Теорема 29. 1) Если линейное преобразование φ евклидова пространства E_n ортогонально, то его матрица в любом ортонормированном базисе ортогональна.

2) Обратно, если линейное преобразование φ евклидова пространства E_n хотя бы в одном ортонормированном базисе имеет ортогональную матрицу, то это преобразование φ ортогонально.

Из теоремы 29 следует, что произведение ортогональных преобразований есть снова ортогональное преобразование. А так как тождественное преобразование ортогонально и преобразование, обратное ортогональному, тоже ортогонально (см. пример 3, § 27), то ортогональные преобразования образуют группу. Она является подгруппой группы всех невырожденных преобразований пространства E_n.

§29. СИММЕТРИЧЕСКИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЕВКЛИДОВА ПРОСТРАНСТВА.

Определение 35. Линейное преобразование ψ евклидова пространства E_n называется симметрическим, если для любых двух векторов x и y из E_n имеет место равенство скалярных произведений:

$$(\psi x, y) = (x, \psi y) \tag{1}$$

Следующая теорема аналогична теореме 29, она дает матричную характеристику симметрических преобразований.

Теорема 30. 1) Если линейное преобразование ψ евклидова пространства E_n является симметрическим, то его матрица в любом ортонормированном базисе есть матрица симметрическая.

2) Если линейное преобразование ψ евклидова пространства E_n хотя бы в одном ортонормированном базисе имеет симметрическую матрицу, то это преобразование симметрическое.

Теорема 30 позволяет дать новое определение симметрического преобразования, эквивалентное определению 35: симметрическим преобразованием называется такое линейное преобразование, матрица которого хотя бы в одном ортонормированном базисе является симметрической.

Теорема 31. Симметрическое преобразование евклидова пространства имеет хотя бы один собственный вектор.

В самом деле, пусть ψ — симметрическое преобразование пространства E_n. Тогда по теореме 30 в любом ортонормированном базисе оно задается симметрической матрицей A и, следовательно, по теореме 22 все собственные значения преобразования ψ вещественны. Пусть λ_0 - одно из собственных значений преобразования ψ. Тогда $\Delta(\lambda_0) = |A - \lambda_0 E| = 0$, а потому однородная система уравнений $(A - \lambda_0 E)X = \Theta$ имеет хотя бы одно ненулевое решение, которое и является координатным столбцом собственного вектора преобразования ψ.

Для вещественной симметрической матрицы A, соответствующей симметрическому преобразованию ψ пространства E_n, уравнение $|A-\lambda E|=0$ n-ой степени относительно λ, имеет, как известно, только вещественные корни. Если бы все эти корни были различны, то по свойству 2 собственных векторов (§ 18) преобразование ψ имело бы n собственных векторов, составляющих базис пространства E_n.Однако в случае наличия кратных корней уравнения $|A-\lambda E|=0$ вопрос о числе линейно независимых собственных векторов преобразования ψ требует специального рассмотрения,

Теорема 32. 1) Для любого симметрического преобразования ψ евклидова пространства E_n можно указать n собственных векторов, составляющих ортонормированный базис пространства E_n.

2) Обратно, если линейное преобразование ψ пространства имеет n собственных векторов, составляющих ортонормированный базис пространства E_n, то преобразование ψ симметрическое.

Следствие. Пусть ψ — линейное преобразование пространства E_n с вещественной симметрической матрицей A. Тогда каждому корню λ кратности m характеристического многочлена преобразования ψ соответствует ровно m линейно независимых собственных векторов (т, е. размерность пространства $R^{(\lambda)}$ собственных векторов, отвечающих значению λ, равна m).

Симметрическое преобразование сводится к растяжению или сжатию плоскости в двух взаимно перпендикулярных направлениях e_1 и e_2 — в направлениях собственных векторов. Собственные значения λ_1 и λ_2 при этом являются коэффициентами соответствующих растяжений (при отрицательном λ растяжение сопровождается еще изменением направления на противоположное). Симметрическое преобразование пространства V_3 сводится к растяжению пространства в трех взаимно перпендикулярных направлениях e_1, e_2, e_3 с возможным изменением каких-либо из этих направлений на противоположные.

§ 30. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ НЕВЫРОЖДЕННОГО ЛИНЕЙНОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЕВКЛИДОВА ПРОСТРАНСТВА В ВИДЕ ПРОИЗВЕДЕНИЯ ОРТОГОНАЛЬНОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ НА СИММЕТРИЧЕСКОЕ.

В предыдущих параграфах были подробно рассмотрены ортогональные и симметрические преобразования евклидова пространства. Интерес, который представляет изучение этих преобразований, обусловлен не только их самостоятельной ценностью, но и той важной ролью, которую они играют в исследовании линейных преобразований самого общего вида.

Введем понятие преобразования ω^*,сопряженного данному линейному преобразованию ω пространства E_n; по определению если в некотором ортонормированном базисе $\{e\}$ преобразование о задано матрицей A, то преобразование ω^*задается в том же базисе $\{e\}$ транспонированной матрицей A'. Указанная связь между матрицами преобразований ω и ω^* сохранится и после перехода к новому ортонормированному базису $\{e'\}$, так как матрица A перейдет при этом в матрицу $Q^{-1}AQ = Q'AQ$, а матрица A' — в матрицу $Q^{-1}A'Q = Q'A'Q = (Q'AQ)'$. (Здесь Q — матрица перехода от базиса $\{e\}$ к базису $\{e'\}$,являющаяся, как известно из § 27, ортогональной матрицей, так что $Q^{-1} = Q$)

Пусть

$$\omega e_1 = a_{11}e_1 + a_{21}e_2 + ...+ a_{n1}e_n,$$
$$\omega e_2 = a_{12}e_1 + a_{22}e_2 + ...+ a_{n2}e_n,$$
....
$$\omega e_n = a_{1n}e_1 + a_{2n}e_2 + ...+ a_{nn}e_n,$$
$$\omega^* e_1 = a_{11}e_1 + a_{12}e_2 + ...+ a_{1n}e_n,$$
$$\omega^* e_2 = a_{21}e_1 + a_{22}e_2 + ...+ a_{2n}e_n,$$
....
$$\omega^* e_n = a_{n1}e_1 + a_{n2}e_2 + ...+ a_{nn}e_n,$$

так что матрицей преобразования ω является

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Рассмотрим два произвольных вектора x и y из E_n

$x = \xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + ...+ \xi_n e_n, y = \eta_1 e_1 + \eta_2 e_2 + ...+ \eta_n e_n$

Непосредственные вычисления (выполнение которых предлагаем в качестве упражнения) показывают, что для преобразований ω и ω^* будет иметь место следующее равенство скалярных произведений:

$(\omega x, y) = (x, \omega^* y)$ (1)

где x и y — произвольные векторы из E_n.

Из теоремы 30 следует, что симметрическое преобразование совпадает со своим сопряженным (поэтому симметрические преобразования называют самосопряженными). Из определения 34 и теоремы 29 следует, что преобразование φ будет ортогональным тогда и только тогда, когда его обратное преобразование φ^{-1} совпадает с сопряженным, т. е. когда $\varphi^*\varphi = \varepsilon$ (докажите это в качестве упражнения).

Пусть ω — произвольное невырожденное линейное преобразование пространства E_n, А —матрица этого преобразования в некотором ортонормированном базисе $\{e\}$. Рассмотрим сопряженное преобразование ω^*. Его матрицей в том же базисе является A'. Преобразованию $\psi_0 = \omega^*\omega$ соответствует в том же базисе согласно § 15 матрица $A'A$. Так как $(A'A)' = A'A'' = A'A$, то получаем, что преобразование $\psi_0 = \omega^*\omega$ является симметрическим. Если e_0 — нормированный собственный вектор преобразования ψ_0 собственным значением λ_0, то $\psi_0 e_0 = \lambda_0 e_0$ и

$$(e_0, \psi_0 e_0) = (e_0, \lambda_0 e_0) = \lambda_0 (e_0, e_0) = \lambda_0$$

С другой стороны, в силу (1) имеем:

$$(e_0, \psi_0 e_0) = (e_0, \omega^*(\omega e_0)) = (\omega e_0, \omega e_0) \geq 0$$

Мы получили, что $\lambda_0 \geq 0$, т. е. собственные значения симметрического преобразования $\psi_0 = \omega^*\omega$ неотрицательны (такие симметрические преобразования называются положительно определенными). По теореме 32 это преобразование имеет n попарно ортогональных собственных векторов $e_1', e_2', ..., e_n'$ и в базисе, составленном из этих векторов, его матрицей будет

$$B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & \lambda_2 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & \lambda_n \end{pmatrix}$$

где λ_i неотрицательны. Рассмотрим наряду с B вещественную матрицу

$$C = \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & 0 & ... & 0 \\ 0 & \sqrt{\lambda_2} & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & \sqrt{\lambda_n} \end{pmatrix}$$

Линейное преобразование ψ с матрицей C в базисе $\{e'\}$ будет симметрическим, причем $\psi^2 = \psi_0$, так как в матрицах $C^2 = B$. Заметим, что преобразование $\psi_0 = \omega^*\omega$ является невырожденным, так как $|A'A| = |A| \cdot |A'|$ ввиду невырожденности ω. Из $\psi^2 = \psi_0$ следует невырожденность преобразования ψ и существование преобразования ψ^{-1}, обратного для ψ. Отсюда

$$\omega = \omega\varepsilon = \omega(\psi^{-1}\psi) = (\omega\psi^{-1})\psi = \varphi\psi$$

(2)

Полученное представление (2) доказывает следующую теорему.

Теорема 33. Всякое невырожденное линейное преобразование пространства E_n можно представить в виде произведения ортогонального преобразования на симметрическое.

Теорема 33 на языке матриц формулируется так: всякую невырожденную вещественную матрицу можно представить в виде произведения ортогональной матрицы на симметрическую.

§ 31. ТЕОРЕМА О ТРАНСФОРМИРОВАНИИ СИММЕТРИЧЕСКОЙ МАТРИЦЫ В ДИАГОНАЛЬНУЮ МАТРИЦУ С ПОМОЩЬЮ ОРТОГОНАЛЬНОЙ.

Теорема 34. Для всякой вещественной симметрической матрицы A можно найти такую ортогональную матрицу Q, что матрица $Q^{-1}AQ$ будет диагональной.

Другими словами, любую вещественную симметрическую матрицу A можно трансформировать в диагональную с помощью некоторой ортогональной матрицы Q.

Пример. Дана матрица

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Найти ортогональную матрицу Q, трансформирующую A в диагональную матрицу.

Глава IV

КВАДРАТИЧНЫЕ ФОРМЫ

§ 32. ПОНЯТИЕ КВАДРАТИЧНОЙ ФОРМЫ.

Определение 36. Вещественной квадратичной формой от n переменных $x_1, x_2, ..., x_n$ называется однородный многочлен $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ второй степени с вещественными коэффициентами от переменных $x_1, x_2, ..., x_n$.

Пример. $f(x_1, x_2, ..., x_n) = 2x_1^2 + 3x_2^2 + 4x_3^2 - 2x_1x_2 + 4x_1x_3 - 3x_2x_3$ есть квадратичная форма от переменных $x_1, x_2, ..., x_n$.

Согласно определению каждый член квадратичной формы содержит или квадрат одного из переменных $x_1, x_2, ..., x_n$ или произведение двух разных переменных.

Для квадратичных форм используется специальная запись. Пусть в квадратичной форме $f = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ уже выполнено приведение подобных членов. Тогда коэффициент при x_i^2 обозначают через a_{ii}, а коэффициент при x_ix_j, где $i \neq j$ — через $2a_{ij}$ и пишут

$$2a_{ij}x_ix_j = a_{ij}x_ix_j + a_{ji}x_jx_i$$

так что

$$a_{ij} = a_{ji}$$

(1)

С учетом этого соглашения квадратичная форма запишется в общем виде следующим образом:

$$f(x_1,x_2,...,x_n) = a_{11}x_1^2 + a_{12}x_1x_2 + ...+ a_{1n}x_1x_n +$$
$$a_{21}x_2x_1 + a_{22}x_2^2 + ...+ a_{2n}x_2x_n +$$
$$...$$
$$+ a_{n1}x_nx_1 + a_{n2}x_nx_2 + ...+ a_{nn}x_n^2$$

(2)

Очевидно, что всякая квадратичная форма от n переменных может быть единственным образом приведена к такому виду. Квадратичной форме, записанной в виде (2), соответствует матрица

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{pmatrix}$$

которая называется матрицей квадратичной формы $f(x_1,x_2,...,x_n)$. Согласно условию (1) матрица квадратичной формы есть матрица симметрическая, так что $A' = A$. Очевидно, что каждой симметрической матрице A n порядка соответствует вполне определенная квадратичная форма f от n переменных.

Пример. Для квадратичной формы

$f(x_1,x_2,...,x_n) = 2x_1^2 + 3x_2^2 + 4x_3^2 - 2x_1x_2 + 4x_1x_3 - 3x_2x_3$ запись (2) будет иметь вид:

$$f(x_1,x_2,x_3) = 2x_1^2 - x_1x_2 + 2x_1x_3 - x_2x_1 + 3x_2^2 - \frac{3}{2}x_2x_3 + 2x_3x_1 - \frac{3}{2}x_3x_2 + 4x_3^2$$

Матрицей дайной квадратичной формы является

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & -\frac{3}{2} \\ 2 & -\frac{3}{2} & 4 \end{pmatrix}$$

Ранг матрицы A квадратичной формы f называется рангом самой квадратичной формы f. Если ранг A равен n, то матрица A невырожденная; квадратичная форма с такой матрицей называется также невырожденной, Пользуясь правилом умножения матриц, квадратичную форму (2) можно записать в матричном виде:

$$f = X'AX$$

где

$$X' = (x_1, x_2, ..., x_n), X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix}$$

§ 33. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ МАТРИЦЫ КВАДРАТИЧНОЙ ФОРМЫ ПРИ ЛИНЕЙНОЙ ЗАМЕНЕ ПЕРЕМЕННЫХ. КАНОНИЧЕСКИЙ ВИД КВАДРАТИЧНОЙ ФОРМЫ

Пусть в пространстве E_n задано линейное преобразование φ, матрица которого в некотором фиксированном базисе есть

$$Q = \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} & \cdots & q_{1n} \\ q_{21} & q_{22} & \cdots & q_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ q_{n1} & q_{n2} & \cdots & q_{nn} \end{pmatrix}$$

Под действием преобразования φ каждый вектор y с координатами $y_1, y_2, ..., y_n$ в данном базисе переходит в другой вектор x с координатами $x_1, x_2, ..., x_n$. При этом согласно § 12 имеем:

$$\left.\begin{matrix} x_1 = q_{11}y_1 + q_{12}y_2 + ... + q_{1n}y_n, \\ .... \\ x_n = q_{n1}y_1 + q_{n2}y_2 + ... + q_{nn}y_n \end{matrix}\right\}$$

(1)

или, в матричной записи,

$$X = QY,$$

где X и Y — матрицы-столбцы

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix}$$

Имея в виду формулы (1), говорят, что преобразование φ осуществляет линейное преобразование переменных с матрицей Q.

Пусть $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ — квадратичная форма. Если в выражении для f заменить переменные $x_1, x_2, \dots, x_n$ их выражениями через $y_1, y_2, \dots, y_n$ по формулам (1), то получим некоторую квадратичную форму $\tilde{f}(y_1, y_2, \dots, y_n)$. Выясним, как связаны матрицы квадратичных форм f и $\tilde{f}$, другими словами, как изменяется матрица квадратичной формы f, если переменные $x_1, x_2, \dots, x_n$ подвергаются линейному преобразованию (1).

Теорема 35. Если в квадратичной форме f с матрицей A выполнено линейное преобразование переменных с матрицей Q,

то полученная квадратичная форма $\tilde{f}$ будет иметь матрицу $Q'AQ$, где матрица Q' получается транспонированием Q.

Пример. Квадратичная форма

$$f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + 3x_2^2 + 4x_3^2 - 2x_1x_2 + 4x_1x_3 - 3x_2x_3$$

имеет матрицу

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & -\frac{3}{2} \\ 2 & -\frac{3}{2} & 4 \end{pmatrix}$$

Выполним преобразование переменных

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = y_1 + y_2 - 9y_3, \\ x_2 = 2y_2 + y_3, \\ x_3 = 10y_3 \end{array}\right\}$$

матрицей которого является

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -9 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}$$

Тогда новая квадратичная форма будет иметь матрицу

$$B = Q'AQ = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 190 \end{pmatrix}$$

Таким образом, в результате замены переменных получаем квадратичную форму

$$\widetilde{f}(y_1, y_2, y_3) = Y'BY = 2y_1^2 + 10y_2^2 + 190y_3^2$$

Если для переменных $x_1, x_2, ..., x_n$ выполнить другое линейное преобразование, например,

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = z_1 + 2z_2 + 2z_3, \\ x_2 = 4z_2 + 2z_3, \\ x_3 = 6z_3. \end{array}\right\}$$

то получим квадратичную форму

$$2z_1^2 + 40z_2^2 + 168z_3^2 + 28z_1z_3 + 16z_2z_3.$$

Теорема 36. Ранг квадратичной формы не меняется в результате выполнения невырожденного линейного преобразования переменных.

Определение 37. Квадратичная форма вида

$$b_1y_1^2 + b_2y_2^2 + ... + b_ny_n^2,$$

не содержащая членов с произведениями различных переменных (т. е. имеющая диагональную матрицу), называется квадратичной формой канонического (или диагонального) вида.

Теорема 37. Число отличных от нуля коэффициентов в каноническом виде

квадратичной формы f равно ее рангу.

В самом деле, пусть квадратичная форма f от n переменных $x_1, x_2, ..., x_n$ с матрицей A невырожденным линейным преобразованием уже приведена к каноническому виду

$$b_1y_1^2 + b_2y_2^2 + ... + b_ny_n^2,$$

где $y_1, y_2, ..., y_n$ - новые переменные.

Матрицей B квадратичной формы канонического вида является

$$B = \begin{pmatrix} b_1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & b_2 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & b_n \end{pmatrix}$$

По теореме 36 $rangf = rangA = rangB$. А так как матрица B диагональна, то ранг равен числу ее от личных от нуля диагональных элементов. Теорема доказана.

Если $rangB = r$ и отличные от нуля r элементов матрицы B окажутся первыми, то канонический вид квадратичной формы f будет таким:

$$b_1y_1^2 + b_2y_2^2 + ... + b_ry_r^2$$

§ 34. ОРТОГОНАЛЬНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ КВАДРАТИЧНОЙ ФОРМЫ К КАНОНИЧЕСКОМУ ВИДУ.

Существует довольно простой метод (метод Лагранжа) приведения квадратичной формы к каноническому виду. Этот метод, однако, во многих задачах не дает нужного результата. Например, в задачах аналитической геометрии часто требуется привести общее уравнение кривой или поверхности второго порядка к каноническому виду, причем такое приведение требуется осуществить с помощью весьма специального преобразования переменных (а именно ортогонального); метод Лагранжа не всегда обеспечивает это условие. В связи с этим мы укажем способ, основанный на отыскании собственных значений матрицы квадратичной формы.

Теорема 38. Всякая квадратичная форма с матрицей A может быть приведена к каноническому виду

$$\lambda_1y_1^2 + \lambda_2y_2^2 + ... + \lambda_ny_n^2$$

при помощи преобразования переменных с ортогональной матрицей. При этом коэффициенты $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ канонического вида являются корнями характеристического многочлена матрицы A, каждый из которых взят столько раз, какова его кратность.

Канонический вид формы f можно найти, таким образом, и не находя самого ортогонального преобразования переменных, а зная лишь собственные значения $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ определяемые матрицей A .

Это положение подтверждает важность понятия собственного значения.

Пример. Найти канонический вид, к которому приводится квадратичная форма

$$f = 3x_2^2 + 3x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 - 2x_2x_3$$

посредством ортогонального преобразования, не находя самого этого преобразования.

§ 35. НАХОЖДЕНИЕ ОРТОГОНАЛЬНОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ, ПРИВОДЯЩЕГО ВЕЩЕСТВЕННУЮ КВАДРАТИЧНУЮ ФОРМУ К КАНОНИЧЕСКОМУ ВИДУ

Исходя из доказательства теоремы 38, можно указать практическую схему для отыскания ортогонального преобразования переменных, в результате которого квадратичная форма принимает канонический вид, или, что то же, ее матрица заменяется на диагональную.

1-й ш а г. Для данной квадратичной формы строим ее симметрическую матрицу А.

2-й ш а г. Составляем характеристический многочлен $\Delta(\lambda) = |A - \lambda E|$ и находим его корни. (В силу теоремы 22 все n корней этого многочлена вещественны, но не обязательно различны.) Обозначим корни характеристического многочлена через $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$.

3-й ш а г. Зная корни характеристического многочлена $\Delta(\lambda)$ можно написать канонический вид данной квадратичной формы:

$$\tilde{f} = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \ldots + \lambda_n y_n^2$$

4-й ш а г. Для каждого корня λ_i кратности m_i составляем однородную систему линейных уравнений:

$$\left.\begin{array}{l} (a_{11} - \lambda_i)\xi_1 + a_{12}\xi_2 + \ldots + a_{1n}\xi_n = 0, \\ a_{21}\xi_1 + (a_{22} - \lambda_i)\xi_2 + \ldots + a_{2n}\xi_n = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}\xi_1 + a_{n2}\xi_2 + \ldots. + (a_{nn} - \lambda_i)\xi_n = 0 \end{array}\right\}$$

(1)

где a_{ij} — элементы матрицы A.

5-й ш а г. Для каждого λ_i кратности m_i находим какую-нибудь одну ортонормированную систему из m_i векторов, являющихся решениями системы (1). Индекс i меняется от 1 до k, где k есть число различных корней характеристического многочлена $\Delta(\lambda)$. Согласно теореме 32 получим n попарно ортогональных нормированных векторов:

$$\begin{array}{l} e_1' = (q_{11}, q_{21}, \ldots, q_{n1}) \\ e_2' = (q_{12}, q_{22}, \ldots, q_{n2}) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ e_n' = (q_{1n}, q_{2n}, \ldots, q_{nn}) \end{array}$$

(Порядок следования векторов $e_1', e_2', \ldots, e_n'$ соответствует порядку λ_i в каноническом виде.)

6-й шаг. Составляем матрицу Q, столбцами которой являются координаты векторов $e_1', e_2', \ldots, e_n'$:

$$Q = \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} & \cdots & q_{1n} \\ q_{21} & q_{22} & \cdots & q_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ q_{n1} & q_{n2} & \cdots & q_{nn} \end{pmatrix}$$

7-й шаг. Записываем искомое ортогональное преобразование переменных:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= q_{11}y_1 + q_{12}y_2 + ..+ q_{1n}y_n, \\ x_2 &= q_{21}y_1 + q_{22}y_2 + ...+ q_{2n}y_n, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n &= q_{n1}y_1 + q_{n2}y_2 + ...+ q_{nn}y_n. \end{aligned}\right\}$$

то есть

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix} = Q\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

8-й ш а г. Если требуется выразить новые переменные $y_1, y_2,..., y_n$ через старые $x_1, x_2,..., x_n$, то, учитывая, что $Q^{-1} = Q'$, получаем:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdots \\ y_n \end{pmatrix} = Q'\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Замечание. В случае правильности полученного результата должно быть $B = Q'AQ$, где B — диагональная матрица, отвечающая форме $\widetilde{f}$. Отметим еще, что в связи с неоднозначностью отыскания фундаментальной системы решений однородной линейной системы (5-й шаг) ортогональное преобразование переменных будет находиться также неоднозначно.

Пример. Найти ортогональное преобразование, приводящее квадратичную форму

$$f = 8x_1^2 - 7x_2^2 + 8x_3^2 + 8x_1x_2 - 2x_1x_3 + 8x_2x_3$$

к каноническому виду.

§ 36. МЕТОД ЛАГРАНЖА ПРИВЕДЕНИЯ КВАДРАТИЧНОЙ ФОРМЫ К КАНОНИЧЕСКОМУ ВИДУ

Элементарным способом приведения квадратичной формы к каноническому виду является метод Лагранжа. Рассмотрим его сначала па примерах.

Примеры. 1. Привести к каноническому виду квадратичную форму

$$f = 2x_1^2 + 3x_2^2 + 4x_3^2 - 2x_1x_2 + 4x_1x_3 - 3x_2x_3$$

2. Привести к каноническому виду квадратичную форму

$$f = 2x_4^2 + x_1x_2 + x_1x_3 - 2x_2x_3 + 2x_2x_4$$

3. Привести к каноническому виду квадратичную форму

$$f = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3$$

Теорема 39 (Лагранжа). Всякая квадратичная форма при помощи невырожденного линейного преобразования переменных может быть приведена к каноническому виду.

§ 37. ЗАКОН ИНЕРЦИИ КВАДРАТИЧНЫХ ФОРМ.

Применяя преобразования переменных

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = t_1 - \frac{1}{2}t_2 - 4t_3, \\ x_2 = t_1 + \frac{1}{2}t_2 - 2t_3, \\ x_3 = t_3 \end{array}\right\}, \left.\begin{array}{l} x_1 = u_1 - u_2 - 2u_3, \\ x_2 = u_1 + u_2 - u_3, \\ x_3 = \frac{1}{2}u_3 \end{array}\right\}$$

для квадратичной формы

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1x$$

получим два канонических вида:

$$t_1^2 - \frac{1}{4}t_2^2 - 8t_3^2, u_1^2 - u_2^2 - 2u_3^2$$

Таким образом, канонический вид данной квадратичной формы не однозначен. Мы получили два различных канонических вида, но можно заметить, что в каждом из них один положительный коэффициент и два отрицательных. Оказывается, что имеет место общее положение: число положительных и число отрицательных коэффициентов канонического вида данной вещественной квадратичной формы будет одно и то же независимо от преобразования переменных, приводящего к каноническому виду. В этом и состоит закон инерции вещественных квадратичных форм.

Предварительно сделаем замечание. Выполнив подходящее невырожденное линейное преобразование переменных, можно согласно теореме Лагранжа каждую вещественную квадратичную форму привести к каноническому виду

$$\widetilde{f} = \alpha_1 y_1^2 + \alpha_2 y_2^2 + \ldots + \alpha_r y_r^2 \qquad (1)$$

где все коэффициенты вещественны и отличны от нуля. Число этих коэффициентов согласно теореме 37 равно рангу квадратичной формы f. После надлежащего линейного преобразования, состоящего в изменении нумерации переменных, канонический вид (1) можно записать так:

$$\widetilde{f} = \alpha_1 y_1^2 + \alpha_2 y_2^2 + \ldots + \alpha_k y_k^2 - \alpha_{k+1} y_{k+1}^2 - \ldots - \alpha_r y_r^2 \qquad (1')$$

где все числа $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ положительны и $0 < k \le r$. Применив к форме (1') невырожденное линейное преобразование

$$\left.\begin{array}{l} y_1 = \dfrac{1}{\sqrt{\alpha_1}} z_1, y_2 = \dfrac{1}{\sqrt{\alpha_2}} z_2, \ldots, y_k = \dfrac{1}{\sqrt{\alpha_k}} z_k, \ldots \\ \ldots, y_r = \dfrac{1}{\sqrt{\alpha_r}} z_r, \\ y_{r+1} = z_{r+1}, \ldots, y_n = z_n \end{array}\right\} \qquad (2)$$

с вещественными коэффициентами, получим форму:

$$z_1^2 + z_2^2 + \ldots + z_k^2 - z_{k+1}^2 - \ldots - z_r^2 \qquad (3)$$

которая называется нормальным видом квадратичной формы f. Принимая во внимание теорему Лагранжа, мы получили утверждение: всякая вещественная квадратичная форма невырожденным линейным преобразованием переменных с вещественными коэффициентами приводится к нормальному виду (3) с коэффициентами +1 и -1 при квадратах переменных.

Теорема 40. (Закон инерции.) Число положительных и число отрицательных квадратов в каноническом виде, к которому приводится данная вещественная квадратичная форма невырожденным линейным преобразованием переменных с вещественными коэффициентами, не зависит от выбора этого преобразования.

Закон инерции дает основание принять следующее

Определение 38. Число k положительных и число q отрицательных коэффициентов в каноническом виде вещественной квадратичной формы f называется соответственно положительным и отрицательным индексом инерции; разность $s = k - q$ называется сигнатурой данной квадратичной формы.

5. МАТЕРИАЛЫ ДЛЯ ТЕКУЩЕГО И ИТОГОВОГО КОНТРОЛЯ

5.1 Самостоятельная работа по теме «Векторы»

Дан параллелограмм ABCD. Точка O – пересечение диагоналей. Построить вектор $\overline{AB}+\overline{CO}; \overline{AC}+\overline{OD}; \overline{AB}+\overline{DC}; \overline{AC}+\overline{OC}+\overline{OD}$.

Дан вектор а. Построить: 1) $-\frac{3}{5}\overline{a}$;

2) $2{,}5\overline{a}$;

3) $\sqrt{2}\overline{a}$.

Дан правильный шестиугольник ABCDF, O – центр:

6.Найти: а) пару коллинеарных векторов;

б) сонаправленных;

в) противоположных;

г) равных;

2) Построить: а) $\overline{AB}-\overline{OD}$;

б) $\overline{BD}+\overline{OC}-\overline{OF}$;

в) $2\overline{AB}-\overline{OE}$.

5.2 Самостоятельная работа по теме «Зависимость векторов. Базис. Координаты вектора»

1. Дан параллелограмм ABCD; $\overline{AB}=\overline{a},\ \overline{AD}=\overline{b},$ O – точка пересечения диагоналей. Найти коэффициент в разложении векторов $\overline{AO}, \overline{AC}, \overline{DC}, \overline{DO},$ через векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$.

2. Найти числа α и β такие, что $\overline{m}=\alpha\,\overline{a}+\beta\,\overline{b}$.

3. Дана равнобокая трапеция ABCD; AB||CD, $\overline{AB}=k\overline{CD}$. O – точка пересечения диагоналей; $\overline{AB}=\overline{a},\ \overline{AD}=\overline{b}$. Разложить по векторам $\overline{a}$ и $\overline{b}$ $\overline{DB},\ \overline{AO}$.

4. Дана система векторов $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}.$

$2\overline{a} + \overline{b} - \overline{c} = 0$;

$\alpha_1 = 2, \alpha_2 = 1, \alpha_3 = -1 \quad \alpha_i \neq 0$;

$\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ – л.з.

a||b $\quad (\alpha + \beta - 1)\overline{a} + (2\alpha - \beta)\overline{b} = 0$

$\alpha = ? \quad \beta = ?$

5. Дан базис АВС. Найти координаты данных векторов в базисе:

$\overline{p} = \overline{a} + \overline{b} - \overline{c} \qquad \overline{m} = \frac{1}{2}\overline{a}$

$\overline{k} = \overline{a} - 2\overline{b} \qquad \overline{l} = -\overline{b}$

$\overline{p} = (1;1;-1); \quad \overline{m} = \left(\frac{1}{2};0;0\right) \quad \overline{k} = (1;-2;0) \quad \overline{l} = (0;-1;0).$

$\overline{c} = -2\overline{a} + \overline{b}$, $\overline{a} = 2\overline{y} - \overline{v}$, $\overline{b} = \overline{y} + 2\overline{v}$. Найти координаты $\overline{c}$ в базисе $\{\overline{yv}\}$.

6. Дан $\overline{c}$ =(-2;-12) в базисе $\{e_1 e_2\}$, представить $\overline{c}$ в виде линейной комбинации векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$ если $\overline{a}$ =(4;-2), $\overline{b}$ =(3;5) в этом базисе. $\overline{c}$ = $\alpha\,\overline{a} + \beta\,\overline{b}$. α =? β =?

5.3 Контрольная работа по теме «Скалярное произведение векторов»

1. $|\overline{a}| = 3$, $|\overline{b}| = 4$, $(\overline{a} \wedge \overline{b}) = \frac{2\pi}{3}$. а) $(\overline{a};\overline{b})$; б) $(\overline{a} + \overline{b})^2$; в) $(3\overline{a} - 2\overline{b}; \overline{a} + 2\overline{b})$-?

2. $|\overline{a}| = 4 \qquad (\overline{a} \wedge \overline{b}) = 60^\circ$

$|\overline{b}| = 2 \qquad (\overline{a} \wedge \overline{c}) = 60^\circ$

$|\overline{c}| = 6 \qquad (\overline{b} \wedge \overline{c}) = 60^\circ$

$\overline{p} = \overline{a} + \overline{b} + \overline{c} \qquad |\overline{p}| = ?$

3. $|\overline{a}| = \sqrt{3}$, $|\overline{b}| = 1$, $(\overline{a} \wedge \overline{b}) = \frac{\pi}{6}$,

$\overline{p} = \overline{a} + \overline{b}$, $\overline{q} = \overline{a} - \overline{b}$.

Найти: $(\overline{p} \wedge \overline{q})$-?

4. $\overline{a} = \alpha \overline{i} - 3\overline{g}$, $\overline{a} \perp \overline{b}$

$\overline{b} = \overline{i} + 2\overline{j}$, α-?.

5. A=(2;-3);

B=(4;0);

$\overline{F}$=(3;-5); A_p - ?

6. $\overline{a} = (2;-1)$, $\overline{b} = (0;1)$;

$(\overline{a};\overline{x}) = -8$, $(\overline{b};\overline{x}) = 2$;

$\overline{x} = ?$

7. $\overline{p} = \alpha\,\overline{a} - \overline{b}$ $\overline{p} \perp \overline{a}$

$\overline{a} = (-2;7)$, $\overline{b} = (4;-1)$.

$\alpha = ?$

8. $(\overline{a};\overline{x}) = -10$, $\overline{x} = ?$

5.4 Самостоятельная работа по теме «Простейшие задачи в координатах»

1. Даны точки $M_1(2;-3), M_2(1;-4), M_3(-1;-7), M_4(-4;8)$. Вычислить длину и полярный угол следующих отрезков: 1) $\overline{M_1M_2}$; 2) $\overline{M_1M_3}$; 3) $\overline{M_2M_4}$; 4) $\overline{M_4M_3}$.

2. Даны смежные вершины параллелограмма A(-3;5) B(1;7) и точки пересечения его диагоналей M(1;1). Определить две другие вершины.

3. Отрезок, ограниченный точками A(1;-3) и B(4;-3), разделен на три равные части. Определить координаты точек деления.

4. Вычислить площадь треугольника, вершинами которого являются точки: 1) A(2;-3), B(3;2) и C(-2;5).

5. Вершины треугольника суть точки A(3;6), B(-1;3), C(2;-1). Вычислить длину его высоты, проведённой из вершины C.

5.5 Самостоятельная работа по теме «Прямая на плоскости»

1. Определить, какие из точек

$M_1(3;1), M_2(2;3), M_3(6;3), M_4(-3;3), M_5(3;-1), M_6(-2;1)$ лежат на прямой 2x+3y-3=0 и какие не лежат на ней.

2. Определить угловой коэффициент r и отрезок b, отсекаемый на оси Oy, для каждой из прямых: 1) 5x-y+3=0; 2) 2x+3y-6=0; 3) 5x+3y+2=0; 4) 3x+2y=0; 5) y-3=0.

3. Вычислить угловой коэффициент r прямой, проходящей через две данные точки: а) M_1(2;-5), M_2(3;2); б) P(-3;1), Q(7;8) в) A(5;-3), B(-1;6).

4. Составить уравнения прямых, проходящих через вершины треугольника A(5;-4), B(-1:3), C(-3;-2) параллельно противоположным сторонам.

5. Даны середины сторон треугольника M_1(2;1), M_2(5;3) и M_3(3;-4). Составить уравнение его сторон.

6. Даны вершины треугольника M_1(2;1), M_2(-1;-1) и M_3(3;2). Составить уравнения его высот.

5.6 Самостоятельная работа по теме «Прямая»

1. Привести общее уравнение прямой к нормальному виду в каждом из следующих случаев: 1) 4x-3y-10=0; 2) $\frac{4}{5}x-\frac{3}{5}y+10=0$; 3) 12x-5y+13=0; 4)x+2=0;

5) $2x-y-\sqrt{5}=0$.

2. Доказать, что прямая 5x-2y-1=0 параллельна прямым 5x-2y+7=0, 5x-2y-9=0 и делит расстояние между ними пополам.

3. Составить уравнения биссектрис углов, образованных двумя пересекающимися прямыми:

12.x-3y+5=0, 3x-y-2=0;

13.x-2y-3=0, 2x+4y+7=0;

14.3x+4y-1=0, 5x+12y-2=0.

4. Составить уравнение прямой, которая проходит через точку пересечения прямых 2x+y-2=0, x-5y-23=0 и делит пополам отрезок, ограниченный точками (5;-6) и (-1;-4). Решить задачу, не вычисляя координат точки пересечения данных прямых.

5.8 Контрольная работа по теме «Прямые на плоскости»

1. Дан треугольник ABC $A(5;-4),\ B(-1;3),\ C(-3;-2).$ Найти координаты ортоцентра, точку пересечения высот.

2. Найти центр тяжести треугольника ABC, т.е. точку пересечения медиан данного треугольника.

$A(5;-4),\ B(-1;3),\ C(-3;-2)$

$Al - \text{медиана} \quad kC - \text{медиана} \quad Bl = lC$

$Ak = kB \quad k \in AB \quad l \in BC.$

3. Дан треугольник ABC $A(5;-4),\ B(-1;3),\ C(-3;-2).$ Найти центр описанной окружности.

4. Найти длину высоты треугольника ABC из вершины C.

$A(5;-4),\ B(-1;3),\ C(-3;-2).$ Найти ρ от центра тяжести до стороны AC.

5. Определить, при каких значениях m и n прямая (2m-n+5)x+(m+3n-2)y+2m+7n+19=0 параллельна оси ординат и отсекает на оси абсцисс отрезок, равный +5 (считая от начала координат). Написать уравнение этой прямой.

6. Установить, какие из следующих пар прямых перпендикулярны:

1) 3x-y+5=0, x+3y-1=0;

2) 3x-4y+1=0, 4x-3y+7=0;

3) 6x-15y+7=0, 10x+4y-3=0.

7. Определить, при каком значении m две прямые (m-1)x+my-5=0, mx+(2m-1)y+7=0 пересекаются в точке, лежащей на оси абсцисс.

8. Вычислить расстояние d между параллельными прямыми:

$d_1: 4x - 3y + 15 = 0$

$d_2: 8x - 6y + 25 = 0$

9. Найти уравнение прямой, принадлежащей пучку прямых

$\alpha(x + 2y - 5) + \beta(3x - 2y + 1) = 0$ и параллельной оси Оу.

5.9. Самостоятельная работа по теме «Эллипс»

1. $F_1(-2;1,5)$

$F_2(2;-1,5)$

$E = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

Записать уравнение эллипса.

2. Составить уравнение эллипса, фокусы которого лежат на оси абсцисс симметрично относительно начала координат, зная, кроме того, что:

3. его полуоси равны 5 и 2;
4. его большая ось равна 10, а расстояние между фокусами 2c=8;
5. его малая ось равна 24, а расстояние между фокусами 2c=10;
6. расстояние между его фокусами 2c=6 и эксцентриситет ε=3/5;
7. его большая ось равна 20, а эксцентриситет ε=3/5;
8. его малая ось равна 10, а эксцентриситет ε=12/13;
9. расстояние между его директрисами равно 5 и расстояние между фокусами 2c=4;
10. его большая ось равна 8, а расстояние между директрисами равно 16;
11. его малая ось равна 6, а расстояние между директрисами равно 13;

10) расстояние между его директрисами равно 32 и ε=1/2.

3. $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{16} = 1$

$M_1(-4;2,4)$

Найти: $r_1, r_2\ и\ M \in\ эллипсу$.

4. Установить какая линия определяется следующим уравнением

$y = \frac{3}{4}\sqrt{16 - x^2}$.

5. Установить, что каждое из следующих уравнений определяет эллипс, и найти координаты его центра C, полуоси, эксцентриситет и уравнения директрис: 2) $16x^2 + 25y^2 + 32x - 100y - 284 = 0$.

6. Установить, какие линии определяются следующими уравнениями:

2) $y = 1 - \frac{3}{4}\sqrt{-6x - x^2}$;

3) $x = -2\sqrt{-5 - 6y - y^2}$.

Изобразить эти линии на чертеже.

7. Составить уравнение эллипса, зная, что:

его фокусы суть $F_1(1;3), F_2(3;1)$ и расстояние между директрисами равно $12\sqrt{2}$.

8. Составить уравнение эллипса, если известны его эксцентриситет ε=2/3, фокус F(2;1) и уравнение соответствующей директрисы x-5=0.

5.10 Самостоятельная работа по теме «Гипербола»

1. Дана гипербола $16x^2 - 9y^2 = -144$. Найти: 1) полуоси *a* и *b*; 2) фокусы; 3) эксцентриситет; 4) уравнения асимптот; 5) уравнения директрис.

2. $\gamma : \frac{x^2}{80} - \frac{y^2}{20} = 1$

$M(10;-\sqrt{5})$

$M \in \gamma = ?$

$MF_1, MF_2 = ?$

3. Составить уравнение гиперболы, фокусы которой расположены на оси абсцисс симметрично относительно начала координат, зная, кроме того, что:

1.её оси 2a=10 и 2b=8;

2.расстояние между фокусами 2c=10 и ось 2b=8;

3.расстояние между фокусами 2c=6 и эксцентриситет ε=3/2;

4.ось 2a=16 и эксцентриситет ε=5/4;

5.уравнения асимптот $y = \pm \frac{4}{3}x$ и расстояние между фокусами 2c=20;

6.расстояние между директрисами равно 228/13 и расстояние между фокусами 2c=26;

7.расстояние между директрисами равно 32/5 и ось 2b=6;

8.расстояние между директрисами равно 8/3 и эксцентриситет ε=3/2;

9.уравнения асимптот $y = \frac{3}{4}x$ и расстояние между директрисами равно 64/5.

4. Составить уравнение гиперболы, фокусы которой расположены на оси ординат симметрично относительно начала координат, зная, кроме того, что;

1. её полуоси a=6, b=18 (буквой a обозначаем полуось гиперболы, расположенную на оси абсцисс);
2. расстояние между фокусами 2c=10 и эксцентриситет ε=5/3;
3. уравнения асимптот $y = \pm \frac{12}{5}x$ и расстояние между вершинами равно 48;
4. расстояние между директрисами равно 50/7 и эксцентриситет ε=7/5;
5. уравнения асимптот $y = \pm \frac{4}{3}x$ и расстояние между директрисами равно 32/5.

5. Составить уравнение гиперболы, фокусы которой лежат на оси абсцисс симметрично относительно начала координат, если даны точки $M_1(6;-1)$ и $M_2(-8;2\sqrt{2})$ гиперболы.

6. Определить эксцентриситет гиперболы, если отрезок между её вершинами виден из фокусов сопряжённой гиперболы под углом 60°.

7. Фокусы гиперболы совпадают с фокусами эллипса $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1.$ Составить уравнение гиперболы, если её эксцентриситет ε=2.

8. Составить уравнение гиперболы, фокусы которой лежат на оси абсцисс симметрично относительно начала координат, если даны:

2) точка $M_1(-5;3)$ гиперболы и эксцентриситет ε=$\sqrt{2}$;

3) точка $M_1\left(\frac{9}{2};-1\right)$ гиперболы и уравнения асимптот $y = \pm\frac{2}{3}x$.

9. Составить уравнение гиперболы, фокусы которой лежат в вершинах эллипса $\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{64}=1$, а директрисы проходят через фокусы этого эллипса.

10. Установить, что каждое из следующих уравнений определяет гиперболу, и найти координаты её центра С, полуоси, эксцентриситет, уравнения директрис:

1) $16x^2 - 9y^2 - 64x - 54y - 161 = 0$;

2) $9x^2 - 16y^2 + 90x + 32y - 367 = 0$.

11. Составить уравнение гиперболы, зная, что:

4. расстояние между её вершинами равно 24 и фокусы суть $F_1(-10;2)$, $F_2(16;2)$;
5. фокусы суть $F_1(3;4)$, $F_2(-3;-4)$ и расстояние между директрисами равно 3,6;
6. угол между асимптотами равен 90° и фокусы суть $F_1(4;-4)$, $F_2(-2;2)$.

5.11 Самостоятельная работа по теме «Парабола»

1. Определить величину параметра и расположение относительно координатных осей следующих парабол:

1) $y^2 = 6x$; 3) $y^2 = -4x$;

2) $x^2 = 5y$; 4) $x^2 = -y$;

2. Составить уравнение параболы, вершина которой находится в начале координат, зная, что:

4. парабола расположена симметрично относительно оси Ох и проходит

через точку A(9;6).

5. парабола расположена симметрично относительно оси Oy и проходит через точку D(4;-8).

3. Составить уравнение параболы, которая имеет фокус E(0;-3) и проходит через начало координат, зная, что её осью служит ось Oy.

4. На параболе $y^2 = 16x$ найти точки, фокальный радиус которых равен 13.

5. Стальной трос подвешен за два конца; точки крепления расположены на одинаковой высоте; расстояние между ними равно 20м. Величина его прогиба на расстоянии 2м от точки крепления, считая по горизонтали, равно 14,4см. Определить величину прогиба этого троса в середине между точками крепления, приближенно считая, что трос имеет форму параболы.

6. Установить, какие линии определяются следующими уравнениями:

4. $y = +2\sqrt{x}$;

15. $y = -2\sqrt{x}$;

7) $x = -\sqrt{3y}$.

Изобразить эти линии на чертеже.

7. Вычислить фокальный радиус точки M параболы $y^2 = 12x$, если ордината точки M равна 6.

8. Составить уравнение параболы, если дан фокус F(-7;0) и уравнение директрисы x-7=0.

9. Установить, что каждое из следующих уравнений определяет параболу, и найти ординаты её вершины A и величину параметра p:

5. $x = -\frac{1}{4}y^2 + y$;

6. $x = -y^2 + 2y - 1$.

5.12 Контрольная работа «Линии второго порядка»

Вариант № 1 Привести к каноническому виду и построить.

1. $3x^2 - 4xy - 2y^2 + 3x - 12 - 7 = 0$.

2. $4x^2 + 5xy + 3y^2 - x + 9y - 12 = 0$.

3. $4x^2 - 4xy + y^2 - 6x + 8y + 13 = 0$.

Вариант № 2 Привести к каноническому виду и построить.

1. $4x^2 - 4xy + y^2 - 12x + 6y - 11 = 0$.

2. $x^2 - 2xy + 4y^2 + 5x - 7y + 12 = 0$.

4. $x^2 - 2xy + y^2 - 6x + 6y - 3 = 0$.

Вариант № 3 Привести к каноническому виду и построить.

1. $4x^2 - 20xy + 25y^2 - 14x + 2y - 15 = 0$.

2. $4x^2 - 6xy - 9y^2 + 3x - 7y + 12 = 0$.

3. $3x^2 + 5xy + y^2 - 8x - 11y - 7 = 0$.

Вариант № 4 Привести к каноническому виду и построить:

1. $5x^2 + 4xy + 2y^2 + 20x + 20y - 18 = 0$.

2. $9x^2 - 4xy - 7y^2 - 12 = 0$.

$2x^2 - 6xy + 5y^2 + 22x - 36y + 11 = 0$.

5.13 Индивидуальное задание по теме «Приведение линии второго порядка к каноническому виду»

Вариант № 1 Привести к каноническому виду и построить.

$14x^2 + 24xy + 21y^2 - 4x + 18y - 139 = 0$

Вариант № 2 Привести к каноническому виду и построить

$11x^2 - 20xy - 4y^2 - 20x - 8y + 1 = 0$.

Вариант № 3 Привести к каноническому виду и построить

$4x^2 - 4xy + y^2 - 6x + 8y + 13 = 0$.

Вариант № 4 Привести к каноническому виду и построить.

$4x^2 - 4xy + y^2 - 12x + 6y - 11 = 0$.

Вариант № 5 Привести к каноническому виду и построить

$50x^2 - 8xy + 35y^2 + 100x - 8y + 67 = 0$.

Вариант № 6 Привести к каноническому виду и построить

$x^2 - 2xy + y^2 - 6x + 6y - 3 = 0$.

Вариант № 7 Привести к каноническому виду и построить

$4x^2 - 20xy + 25y^2 - 14x + 2y - 15 = 0$.

Вариант № 8 Привести к каноническому виду и построить

$41x^2 + 24xy + 34y^2 + 34x - 112y + 129 = 0$.

Вариант № 9 Привести к каноническому виду и построить

$29x^2 - 24xy + 36y^2 + 82x - 96y - 91 = 0$.

Вариант № 10 Привести к каноническому виду и построить:

$4x^2 + 24xy + 11y^2 + 64x + 42y + 51 = 0$.

Вариант № 11 Привести к каноническому виду и построить

$41x^2 + 24xy + 9y^2 + 24x + 18y - 36 = 0$.

Вариант № 12 Привести к каноническому виду и построить

$4xy + 3y^2 + 16x + 12y - 36 = 0$.

Вариант № 13 Привести к каноническому виду и построить.

$x^2 - 6xy + 9y^2 - 12x + 36y + 20 = 0$

Вариант № 14 Привести к каноническому виду и построить

$4x^2 + 4xy + y^2 - 8x - 4y - 21 = 0$

Вариант № 15 Привести к каноническому виду и построить

$25x^2 - 10xy + y^2 + 40x - 8y + 7 = 0$

Вариант № 16 Привести к каноническому виду и построить

$19x^2 + 6xy + 11y^2 + 38x + 6y + 29 = 0$

Вариант № 17 Привести к каноническому виду и построить

$5x^2 - 2xy + 5y^2 - 4x + 20y + 20 = 0$

Вариант № 18 Привести к каноническому виду и построить

$3x^2 - 8xy + 7y^2 + 8x - 15y + 20 = 0$

Вариант № 19 Привести к каноническому виду и построить

$25x^2 - 20xy + 4y^2 - 12x + 20y - 17 = 0$

Вариант № 20 Привести к каноническому виду и построить

$x^2 - 4xy + 4y^2 + 7x - 12 = 0$

Вариант № 21 Привести к каноническому виду и построить

$41x^2 + 24xy + 9y^2 + 24x + 18y - 36 = 0$

Вариант № 22 Привести к каноническому виду и построить

$8x^2 + 4xy + 5y^2 + 16x + 4y - 28 = 0$

Вариант № 23 Привести к каноническому виду и построить

$13x^2 + 10xy + 13y^2 + 46x + 62y + 13 = 0$

Вариант № 24 Привести к каноническому виду и построить

$4x^2 + 24xy + 11y^2 + 64x + 42y + 51 = 0$

5.14 Самостоятельная работа по теме «Векторы пространства. Базис пространства»

Задание №1.

Дано:

$ABCDA_1B_1C_1D_1$ – параллелепипед. $\overline{AD} = b, \overline{AB} = a, \overline{AA_1} = c$

Построить:

1) a+b+c 2) *a-2b+c* 3) *a-c+b* 4) *a-c-b*

Задание №2.

Дано:

Куб AD_1 $\overline{AB} = \overline{e}_1, \overline{AD} = \overline{e}_2, \overline{AC} = \overline{e}_3$

Разложить по векторам базиса векторы AA_1, AD_1, B_1C_1

Задание №3

Дано:

$\overline{a} = (1;3;2)$

$\overline{b} = (-1;4;0)$

$\overline{c} = (6;-2;5)$

Найти базис {a;b;c}

5. 15 Самостоятельная работа по теме «Скалярное произведение векторов»

1. Определить при каком значении α векторы a=α i-3j+2k и b=i+2j-α k взаимно перпендикулярны.

2. Вычислить косинус угла, образованного векторами a={2;-4;4} и b={-3;2;6}.

3. Найти вектор *x*, коллинеарный вектору *a*={2;1;-1} и удовлетворяющий условию *xa*=3.

5.16 Самостоятельная работа по теме «Векторное произведение»

1. Векторы a и b образуют угол $\varphi = \pi/6.$ Зная что,

$|\bar{a}| = 6$

$|\bar{b}| = 5$

$Найти\ |[a;b]|$

2. Даны $|a| = 10, |b| = 2\ и\ ab = 12$. Вычислить $\|[ab]\|$.

3. Даны векторы $a = \{3;-1;-2\},\quad b = \{1;2;-1\}.$ Найти координаты векторных произведений $1)\ [ab];\quad 2)\ [(2a + b)b],\quad 3)\ [(2a - b)(2a + b)]$.

4. Даны точки $A(1;2;0)$, B(3;0;-3), C(5;2;6). Вычислить площадь треугольника ABC.

5. Найти вектор x, зная, что он перпендикулярен к векторам a={2;-3;1} и b={1;-2;3} и удовлетворяет условию x=(i+2j-7r)=10.

6. Какому условию должны удовлетворять векторы a, b, чтобы векторы a+b и a-b были коллинеарны ?

5.17 Задания для самостоятельного решения.

№848.

Векторы a, b и c удовлетворяют условию a+b+c=0. Доказать что $[ab] = [bc] = [ca]$.

№851.

Даны точки A(2;-1;2), B(1;2;-1) и C(3;2;1). Найти координаты векторных произведений: 1) $\left[\overline{AB}\overline{BC}\right]$; 2) $\left[\left(\overline{BC}-2\overline{CA}\right)\overline{CB}\right]$.

№854.

Сила Q={3;4;-2} приложена к точке C(2;-1;-2). Определить величину и направляющие косинусы момента этой силы относительно начала координат.

№871.

Доказать, что векторы a,b,c, удовлетворяющие условию $[ab]+[bc]+[ca]=0$, компланарны.

5.18 Самостоятельная работа по теме «Смешанное произведение»

1. Векторы a,b,c, образующие правую тройку, взаимно перпендикулярны. Зная, что |a|=4, |b|=2, |c|=3, вычислить abc.

2. Вычислить объём тетраэдра, вершины которого находятся в точках A(2;-1;1), B(5;5;4), C(3;2;-1), D(4;1;3).

3. Объём тетраэдра V=5, три его вершины находятся в точках A(2;1;-1), B(3;0;1), C(2;-1;3). Найти координаты четвёртой D, если известно, что она лежит на оси Oy.

5.19 Контрольная работа по теме «Скалярное, векторное и смешанное произведения векторов»

1. Даны 3 вектора p={3;-2;1}, q={-1;1;-2}, r={2;1;-3}. Найти разложение вектора c={11;-6;5} по базису p, q, r.

2. Вычислить косинус угла, образованного векторами a={2;-4;4} и b={-3;2;6}.

3. Найти вектор x, коллинеарный вектору a={2;1;-1} и удовлетворяющий условию xa=3.

4. Даны точки A(2;-1;2), B(1;2;-1) и C(3;2;1). Найти координаты векторных произведений: 1) $\left[\overline{AB}\overline{BC}\right]$; 2) $\left[\left(\overline{BC}-2\overline{CA}\right)\overline{CB}\right]$.

5. Доказать, что точки A(1;2;-1), B(0;1;5), C(-1;2;1), D(2;1;3) лежат в одной плоскости.

6. Даны вершины тетраэдра A(2;3;1) B(4;1;-2) C(6;3;7) D(-5;-4;8). Найти длину его высоты, опущенную из вершины D.

5.20 Самостоятельная работа по теме «Плоскость»

1. Составить уравнение плоскости, которая проходит через начало координат и имеет нормальный вектор n={5;0;-3}.

2. Даны точки $M_1(3;-1;2)$ и $M_2(4;-2;-1)$. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку M_1 перпендикулярно вектору $\overline{M_1M_2}$.

3. Вычислить площадь треугольника, который отсекает плоскость 5x-6y+3z+120=0 от координатного угла Oxy.

4. Вычислить объём пирамиды, ограниченной плоскостью 2x-3y+6z-12=0 и координатными плоскостями.

5. Составить уравнение плоскости, которая проходит:

4. через точку M_1 (2;-3;3) параллельно плоскости Oxy;
5. через точку M_2 (1;-2;4) параллельно плоскости Oxz;
6. через точку M_3 (-5;2;-1) параллельно плоскости Oyz.

5.21 Контрольная работа по теме «Плоскость»

1. Составить уравнения плоскостей, которые проходят через точку M_1 (4;3;2) и отсекают на координатных осях отличные от нуля отрезки одинаковой длины.

2. Составить уравнение плоскостей, отсекающей на оси Oz отрезок c=-5 и перпендикулярной к вектору n={-2;1;3}.

3. Составить уравнение плоскости, которая проходит через начало координат параллельно плоскости 5x-3y+2z-3=0.

4. Составить уравнение плоскости, которая проходит через точку M_1 (2;-1;1) перпендикулярно к двум плоскостям 2x-z+1=0, y=0.

5. Две грани куба лежат на плоскостях 2x-2y+z-1=0, 2x-2y+z+5=0. вычислить объём куба.

6. Составить уравнение плоскостей, параллельных плоскости 2x-2y-z-3=0 и отстающих от неё на расстояние d=5.

7. Установить какие из следующих пар уравнений определяют перпендикулярные плоскости:

3)2x-5y+z=0, x+2z-3=0.

8. Определить, при каких значениях l и m следующие пары уравнений будут определять параллельные плоскости:

2) 3x-y+lz-9=0, 2x+my+2z-3=0.

9. Определить, при каких значениях a и b плоскости 2x-y+3z-1=0, x+2y-z+b=0, x+ay-6z+10=0:

1) имеют одну общую точку;

2) проходят через одну прямую;

3) пересекаются по трём различным параллельным прямым.

5.22 Самостоятельная работа по теме «Прямая»

1. Составить каноническое уравнение прямой, проходящей через точку M_1 (2;3;-5) параллельно прямой 3x-y+2z-7=0, x+3y-2z+3=0.

2. Составить каноническое уравнение следующих прямых x-2y+3z-4=0, 3x+2y-5z-4=0.

3. Найти острый угол между прямыми $\frac{x-3}{1}=\frac{y+2}{-1}=\frac{z}{\sqrt{2}}$, $\frac{x+2}{1}=\frac{y-3}{1}=\frac{z+5}{\sqrt{2}}$.

5.23 Самостоятельная работа по теме «Прямая и плоскость»

1. Составить уравнения прямой, которая проходит через точку M_1(-4;-5;3) и пересекает две прямые $\frac{x+1}{3}=\frac{y+3}{-2}=\frac{z-2}{-1}$, $\frac{x-2}{2}=\frac{y+1}{3}=\frac{z-5}{-5}$.

2. Составить уравнение прямой, проходящей через точку M_0(2;-3;-5) и перпендикулярно к плоскости 6x-3y-5z+2=0.

3. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку M_0(1;-2;1) перпендикулярно к прямой x-2y+z-3=0, x+y-z+2=0.

4. Найти проекцию точки C(3;-4;-2) на плоскость, проходящую через параллельные прямые $\frac{x-5}{13}=\frac{y-6}{1}=\frac{z+3}{-4}$, $\frac{x-2}{13}=\frac{y-3}{1}=\frac{z+3}{-4}$.

5.Доказать, что прямые x=3t-2, y=-4t+1, z=4t-5 параллельны плоскости 4x-3y-6z-5=0.

5.24 Тестовые задания по теме «Векторы»

Задание № 1. Найти косинус острого угла между диагоналями параллелограмма, построенного на векторах

$$\bar{a} = 4\bar{i} - 3\bar{j} + 3\bar{k}, \quad \bar{b} = 3\bar{i} - \bar{j} + \bar{k}.$$

Задание № 2. Даны точки: A(3, 1, -4), B(4, 8, 2), C(0, 8, 2), D(0, 1, -4). Определить вид четырехугольника ABCD. Варианты ответа: 1 – прямоугольник; 2 – параллелограмм (не прямоугольник); 3 – трапеция; 4 – правильный ответ не указан.

Задание № 3. Найти площадь треугольника с вершинами в точках

A(1, -2, -2), B(-2, 3, 2), C(-2, -3, 2).

Задание № 4. Найти сумму коэффициентов разложения вектора $\bar{x}$ по базису $\bar{p}, \bar{q}, \bar{r}$, где $\bar{x} = (9, -3, -4), \quad \bar{p} = (4, -4, -2), \quad \bar{q} = (1, 2, -1), \quad \bar{r} = (-3, -3, 2).$

Задание № 5. Найти высоту тетраэдра ABCD, опущенную из вершины D, если известны координаты: A(1, -2, 2), B(-1, 4, 1), C(-3, -2, 4), D(1, -4, 3).

Номер задания	1	2	3	4	5
Ответ:					

5. 25 Контрольная работа по теме «Линии второго порядка»

ВАРИАНТ 1

4. Дан эллипс $9x^2+25y^2=225$.
   Найти: 1) его полуоси;
   2) фокусы;
   3) эксцентриситет.
   Построить.
5. Дана гипербола $16x^2-9y^2=144$.
   Найти: 1) полуоси a и $в$;
   2) оси;
   3) фокусы;
   4) эксцентриситет;
   5) уравнения асимптот.
   Построить.
6. Определить величину параметра и построить параболу:
   a. $y^2=6x$;
   b. $x^2=-4y$.

ВАРИАНТ 2

4. Дан эллипс $9x^2+16y^2=144$.
   Найти: 1) его полуоси;
   2) оси
   3) вершины;
   4) фокусы;
   5) эксцентриситет.
   Построить.
5. Дана гипербола $9x^2-25y^2=225$.
   Найти: 1) полуоси a и $в$;
   2) фокусы;
   4) эксцентриситет;
   5) уравнения асимптот.
   Построить.
6. Определить величину параметра и построить параболу:

13. $y^2=-4x$;
14. $x^2=5y$.

ВАРИАНТ 3

17. Дан эллипс $16x^2+y^2=16$.
    Найти: 1) его полуоси;
    2) оси
    3) вершины;
    4) фокусы;
    5) эксцентриситет.
    Построить.

18. Дана гипербола $4x^2-9y^2=36$.
Найти: 1) полуоси a и $в$;
2) фокусы;
3) эксцентриситет;
4) уравнения асимптот.
Построить.
19. Определить величину параметра и построить параболу:
4) $y^2=8x$;
5) $x^2=--6y$.

ВАРИАНТ 4

4. Дан эллипс $x^2+25y^2=25$.
Найти: 1) его полуоси;
2) оси
3) вершины;
4) фокусы;
5) эксцентриситет.
Построить.
5. Дана гипербола $\frac{y^2}{16} - \frac{x^2}{9} = 1$.
Найти: 1) полуоси a и $в$;
2) фокусы;
4) эксцентриситет;
5) уравнения асимптот.
Построить.
6. Определить величину параметра и построить параболу:
3) $y^2=-6x$;
4) $x^2=6y$.

ВАРИАНТ 5

5. Дан эллипс $x^2+9y^2=9$.
Найти: 1) его полуоси;
2) оси
3) вершины;
4) фокусы;
5) эксцентриситет.
Построить.
6. Дана гипербола $\frac{x^2}{64} - \frac{y^2}{36} = 1$.
Найти: 1) полуоси a и $в$;
2) фокусы;
3) эксцентриситет;

4) уравнения асимптот.

Построить.

7. Определить величину параметра и построить параболу:
3) $y^2=16x$;
4) $x^2=-8y$.

ВАРИАНТ 6

3) Дан эллипс $25x^2+9y^2=225$.
Найти: 1) его полуоси;
2) оси
3) вершины;
4) фокусы;
5) эксцентриситет.
Построить.

4) Дана гипербола $\frac{y^2}{64}-\frac{x^2}{36}=1$
Найти: 1) полуоси a и $в$;
2) фокусы;
4) эксцентриситет;
5) уравнения асимптот.
Построить.

5) Определить величину параметра и построить параболу:
5) $y^2=-10x$;
6) $x^2=8y$.

ВАРИАНТ 7

5) Дан эллипс $16x^2+9y^2=144$.
Найти: 1) оси;
2) полуоси;
3) вершины;
4) фокусы;
5) эксцентриситет.
Построить.

6) Дана гипербола $\frac{x^2}{144}-\frac{y^2}{25}=1$.
Найти: 1) полуоси a и $в$;
2) фокусы;
3) эксцентриситет;
4) уравнения асимптот.
Построить.

7) Определить величину параметра и построить параболу:
7) $y^2=2x$;

8) x^2=--2y.

ВАРИАНТ 8

5. Дан эллипс $x^2+16y^2=16$.

Найти: 1) его полуоси;

2) оси;

3) вершины;

4) фокусы;

5) эксцентриситет.

Построить.

6. Дана гипербола $\frac{y^2}{144} - \frac{x^2}{25} = 1$

Найти: 1) полуоси a и $в$;

2) фокусы;

4) эксцентриситет;

5) уравнения асимптот.

Построить.

7. Определить величину параметра и построить параболу:
5. $y^2=-2x$;
6. $x^2=4y$.

ВАРИАНТ 9

6. Дан эллипс $25x^2+y^2=25$.

Найти: 1) его полуоси;

2) оси

3) вершины;

4) фокусы;

5) эксцентриситет.

Построить.

7. Дана гипербола $x^2-4y^2=16$.

Найти: 1) полуоси a и $в$;

2) фокусы;

3) эксцентриситет;

4) уравнения асимптот.

Построить.

8. Определить величину параметра и построить параболу:
4. $y^2=10x$;
5. x^2=--8y.

ВАРИАНТ 10

3. Дан эллипс $9x^2+y^2=9$.

Найти: 1) его полуоси;
2) оси
3) вершины;
4) фокусы;
5) эксцентриситет.

Построить.

4. Дана гипербола y^2-4x^2=16

Найти: 1) полуоси *а* и *в*;
2) фокусы;
4) эксцентриситет;
5) уравнения асимптот.

Построить.

5. Определить величину параметра и построить параболу:
3. y^2=-5x;
4. x^2=3y.

5.26 Тестовые задания по аналитической геометрии на плоскости

Задание № 1. Найти сумму координат точки пересечения прямой, проходящей через точки M(-6, 5, 4), N(1, 3, 3) и плоскости, проходящей через точки A(-3, 1, 3), B(-5, 3, 5), C(-1, 2, 3).

Задание № 2. Найти расстояние от точки M_0(2, -1, -7) до плоскости $x-2y+2z-6=0$.

Задание № 3. Найти косинус острого угла между прямыми, заданными параметрическими уравнениями $x=8-2t,\quad y=3+t,\quad z=7+2t$ и $x=8+2s,\quad y=3+2s,\quad z=7-s,\quad t,s\in\Re$.

Задание № 4. Найти коэффициент D уравнения плоскости $Ax+By+Cz+D=0$, проходящей через точку M_0(2, -6, -6), параллельно плоскости $2x+y+5z-7=0$, считая, что A, B, C и D – целые числа без общих делителей, A>0.

Задание № 5. Определить вид кривой, заданной уравнением

$2y^2 + 2x + 4y - 35 = 0$.

Варианты ответа: 1 – окружность, 2 – эллипс (полуоси не совпадают), 3 – парабола, 4 – гипербола, 5 – две пересекающиеся прямые, 6 – одна точка, 7 – прямая, 8 – среди первых семи вариантов нет правильного ответа.

Номер задания	1	2	3	4	5
Ответ:					

5.27 Индивидуальное задание по теме «Векторы на плоскости»

Вариант 1.

3. Доказать, что сумма векторов, соединяющих центр правильного треугольника с его вершинами, равна нуль-вектору.
4. Проверить, что векторы $\vec{e}_1 = (1;-1)$ и $\vec{e}_2 = (2;3)$ образуют базис и найти разложение вектора $\vec{a} = (2;-1)$ по этому базису.
5. Доказать, что диагонали ромба взаимно перпендикулярны.
6. Найти угол между векторами $\vec{a} = (2;2)$ и $\vec{a} + \vec{b}$, где $\vec{b} = (3;-2)$.

Вариант 2

4) $ABCD$ - квадрат, O - точка пересечения его диагоналей. Найти координаты векторов $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{DO}$ в базисе $\{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}\}$, где $\overrightarrow{e_1} = \overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{e_2} = \overrightarrow{OC}$.

5) $ABCD$ - параллелограмм, $\overrightarrow{AB} = 2\vec{m} + 3\vec{n}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{m} - \vec{n}$, где $|\vec{m}| = 2$, $|\vec{n}| = 3$, $\left(\vec{m},\hat{\ }\vec{n}\right) = \frac{\pi}{3}$. Вычислить $\cos\left(\overrightarrow{AD},\hat{\ }\overrightarrow{AC}\right)$.

6) Даны векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Найти угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{a} + \vec{b}$, где $\vec{a} = (3;3)$, $\vec{b} = (-8;-3)$.

Вариант 3

6.По данным векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$ построить вектор $\sqrt{2}\vec{a}-\frac{4}{3}\vec{b}$.

7.Дан параллелограмм $ABCD$. Точка M делит сторону BC в отношении $1:2$, точка N делит сторону AD в отношении $2:1$, точка P - середина стороны CD. Найти координаты векторов $\overrightarrow{MN}$ и $\overrightarrow{AP}$, приняв векторы $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AD}=\vec{b}$ за векторы базиса.

8.В прямоугольном треугольнике проведены медианы из вершин острых углов. Найти угол между ними.

9.Даны векторы $\vec{a}=(2;-1)$ и $\vec{b}=(0;1)$. Найти вектор $\vec{x}$, если $(\vec{x},\vec{a})=5$, $(\vec{x},\vec{b})=-3$.

Вариант 4

3.Сторона AC треугольника ABC разделена на пять равных частей, все точки деления A_1, A_2, A_3, A_4 соединены с вершиной A. Обозначив $\overrightarrow{AB}=\vec{c}$ и $\overrightarrow{BC}=\vec{a}$, найти векторы $\overrightarrow{A_1A}$, $\overrightarrow{A_2A}$, $\overrightarrow{A_3A}$, $\overrightarrow{A_4A}$.

4.Проверить, что векторы $\vec{e}_1=(1;-1)$ и $\vec{e}_2=(2;3)$ образуют базис и найти разложение вектора $\vec{a}=(-4;-11)$ по этому базису.

5. Даны векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Найти угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{a}+\vec{b}$, где $\vec{a}=(2;-2)$, $\vec{b}=(5;2)$.

Вариант 5

4.Пусть $ABCDEF$ правильный шестиугольник. Найти равнодействующую сил $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AE}$, $\overrightarrow{AF}$ приложенных к точке A.

5.Проверить, что векторы $\vec{e}_1=(1;-1)$ и $\vec{e}_2=(2;3)$ образуют базис и найти разложение вектора $\vec{a}=(-1;-4)$ по этому базису.

6. $ABCD$ - параллелограмм, $\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{e_1}-3\overrightarrow{e_2}$, $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{e_1}+\overrightarrow{e_2}$, где $\left|\overrightarrow{e_1}\right|=1$, $\left|\overrightarrow{e_2}\right|=\sqrt{2}$, $\left(\overrightarrow{e_1},\!\!^{\wedge}\,\overrightarrow{e_2}\right)=\frac{\pi}{4}$. Вычислить $\cos\left(\overrightarrow{BD},\!\!^{\wedge}\,\overrightarrow{AC}\right)$.

7.Даны векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Найти угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{a}+\vec{b}$, где $\vec{a}=(-2;-2)$, $\vec{b}=(8;8)$.

Вариант 6

4.Дана трапеция $ABCD$, $\overrightarrow{DC}=k\cdot\overrightarrow{AB}$, P - точка пересечения диагоналей, M и N - середины оснований. Разложить векторы $\overrightarrow{MN}$, $\overrightarrow{PB}$ по векторам $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AD}$.

5.В треугольнике ABC BM - медиана. Известно, что $\overrightarrow{AB}=\vec{p}-3\vec{q}$, $\overrightarrow{AC}=2\vec{p}-4\vec{q}$, где $|\vec{p}|=\sqrt{3}$, $|\vec{q}|=2$, $\left(\vec{p},\!\hat{}\ \vec{q}\right)=\dfrac{\pi}{6}$. Вычислить $\cos\left(\overrightarrow{BM},\!\hat{}\ \overrightarrow{BC}\right)$.

6.Даны векторы $\vec{a}=(2;-1)$ и $\vec{b}=(0;1)$. Найти вектор $\vec{x}$, если $(\vec{x},\vec{a})=7$, $(\vec{x},\vec{b})=-3$.

Вариант 7

1) Отрезок AB разделен точками C_1, C_2, C_3 на четыре равные части. Полагая, что $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$, выразить через них векторы $\overrightarrow{OC_1}$, $\overrightarrow{OC_2}$, $\overrightarrow{OC_3}$, где точка O - произвольная точка плоскости.
2) При каком значении α векторы $\vec{a}+\alpha\cdot\vec{b}$ и $\vec{a}-\alpha\cdot\vec{b}$ будут перпендикуляры, если $|\vec{a}|=3$, $|\vec{b}|=5$.
3) Дан вектор $\vec{a}=(a_1,a_2)$ в базисе $\{\vec{i},\vec{j}\}$. Найти координаты вектора $\vec{x}$, если $\vec{x}$ перпендикулярен $\vec{a}$ и $|\vec{x}|=|\vec{a}|$.
4) Даны векторы $\vec{s}=(-2;1)$, $\vec{t}=(4;3)$, $\vec{a}=(-1;2)$, $\vec{b}=(3;3)$. Найти координаты вектора $\vec{c}=\vec{a}+3\vec{b}$ в базисе $\{\vec{s},\vec{t}\}$.

Вариант 8

1) Пользуясь параллелограммом, построенном на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$, проверить на чертеже справедливость тождества

$$\left(\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}\right)+\left(\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{a}\right)=\frac{3}{2}\left(\vec{a}+\vec{b}\right).$$

2) Проверить, что векторы $\vec{e}_1=(1;-1)$ и $\vec{e}_2=(2;3)$ образуют базис и найти разложение вектора $\vec{a}=(5;5)$ по этому базису.

3) В треугольнике ABC AK - медиана. Известно, что $\overrightarrow{AB}=\vec{m}+\vec{n}$, $\overrightarrow{AC}=\vec{m}-3\vec{n}$, где $\left|\vec{m}\right|=1$, $\left|\vec{n}\right|=\sqrt{2}$, $\left(\vec{m}\,\hat{,}\,\vec{n}\right)=\frac{\pi}{4}$. Вычислить $\cos\left(\overrightarrow{AK}\,\hat{,}\,\overrightarrow{BC}\right)$.

4) Даны векторы $\vec{a}=(2;-1)$ и $\vec{b}=(0;1)$. Найти вектор $\vec{x}$, если $(\vec{x},\vec{a})=1$, $(\vec{x},\vec{b})=3$.

Вариант 9

1) Дан правильный пятиугольник $ABCDE$ приняв $\overrightarrow{AB}=\vec{m}$, $\overrightarrow{CB}=\vec{n}$, $\overrightarrow{CD}=\vec{p}$, $\overrightarrow{DE}=\vec{q}$, $\overrightarrow{AE}=\vec{s}$, построить $\vec{a}=3\vec{n}-\vec{p}+\vec{q}-\frac{1}{2}\vec{s}$, $\vec{b}=\vec{m}+\vec{n}-\vec{q}-\vec{p}-2\vec{s}$, $\vec{c}=2(\vec{m}-\vec{q})+\frac{1}{2}(\vec{p}-\vec{s})+\vec{n}$.

2) Проверить, что векторы $\vec{e}_1=(1;-1)$ и $\vec{e}_2=(2;3)$ образуют базис и найти разложение вектора $\vec{a}=(2;8)$ по этому базису.

3) Определить при каком значении α векторы $\vec{m}=2\vec{p}-3\vec{q}$, $\vec{n}=\vec{p}+\alpha\cdot\vec{q}$ взаимно перпендикулярны, если $\left|\vec{p}\right|=\left|\vec{q}\right|=1$, $\left(\vec{p}\,\hat{,}\,\vec{q}\right)=\frac{\pi}{3}$.

4) Даны векторы $\vec{a}=(2;-1)$ и $\vec{b}=(0;7)$. Найти вектор $\vec{x}$, если $(\vec{x},\vec{a})=-3$, $(\vec{x},\vec{b})=1$.

5.28 Индивидуальное задание по теме «Векторы»

1) Длины сторон треугольника.
2) Уравнения сторон треугольника.
3) Уравнения медиан тр-ника.
4) Длины высот треугольника.

5) Уравнения высот треугольника.

6) Уравнения серединных перпендикуляров треугольника.

7) Центр тяжести треугольника.

8) Центр описанной окружности.

9) Углы треугольника.

10) Площадь треугольника.

Вариант № 1

Даны вершины треугольника АВС:

А (8; -1), В (8;-5), С (4;-5) .

Вариант № 2

Даны вершины треугольника АВС:

А (5; -2), В (5;-6), С (1;-6).

Вариант № 3

Даны вершины треугольника АВС:

А (6; 3), В (6;-1), С (2;-1) .

Вариант № 4

Даны вершины треугольника АВС:

А (3; 5), В (3;1), С (-1;1) .

Вариант № 5

Даны вершины треугольника АВС:

А (2; 6), В (2;2), С (-2;2) .

Вариант № 6

Даны вершины треугольника АВС:

А (-1; 1),В (-1;-3), С (-5;-3).

Вариант № 7

Даны вершины треугольника АВС:

А (-3; -2),В (-3;-6), С (-7;-6) .

Вариант № 8

Даны вершины треугольника ABC:

A (-4; -1),B (-4;-5), C (-8;-5).

Вариант № 9

Даны вершины треугольника ABC:

A (-5; 0), B (-5;-4), C (-9;-4).

Вариант № 10

Даны вершины треугольника ABC:

A (-4; 2),B (-4;-2), C (-8;-2).

5.29 Индивидуальное задание «Прямая на плоскости»

Вариант № 1

Даны вершины треугольника ABC:

A (8; -1), B (8;-5), C (4;-5) Найти:

Вариант № 2

Даны вершины треугольника ABC:

A (5; -2), B (5;-6), C (1;-6) Найти:

Вариант № 3

Даны вершины треугольника ABC:

A (6; 3), B (6;-1), C (2;-1) Найти:

Вариант № 4

Даны вершины треугольника ABC:

A (3; 5), B (3;1), C (-1;1) Найти:

Вариант № 5

Даны вершины треугольника ABC:

A (2; 6), B (2;2), C (-2;2) Найти:

Вариант № 6

Даны вершины треугольника ABC:

A (-1; 1),B (-1;-3), C (-5;-3) Найти:

Вариант № 7

Даны вершины треугольника АВС:

А (-3; -2),В (-3;-6), С (-7;-6) Найти:

Вариант № 8

Даны вершины треугольника АВС:

А (-4; -1),В (-4;-5), С (-8;-5) Найти:

Вариант № 9

Даны вершины треугольника АВС:

А (-5; 0), В (-5;-4), С (-9;-4) Найти:

Вариант № 10

Даны вершины треугольника АВС:

А (-4; 2),В (-4;-2), С (-8;-2) Найти:

1) Уравнения сторон треугольника.
2) Уравнения медиан тр-ника.
3) Уравнения серединных перпендикуляров треугольника.
4) Центр тяжести треугольника.
5) Центр описанной окружности.
6) Радиус описанной окружности.
7) Расстояние от центра тяжести до сторон треугольника.
8) Углы между медианами.
9) Площадь треугольника.

10. Уравнения прямых параллельных сторонам, проходящим через вершины.

5. 30 Индивидуальная домашняя работа по теме «Линии второго порядка на плоскости»

Вариант 1.

Найти центр или вершину, полуоси, эксцентриситет, директрисы, фокусы, построить линию

1) $(x-6)^2-3(y+4)^2=144$

2) $12(x-6)^2+3(y+6)^2=144$

3) $x^2 + x = y$

Вариант 2.

Найти центр или вершину, полуоси, эксцентриситет, директрисы, фокусы, построить линию

1) $12(x-6)^2 + 3(y+6)^2 = 144$

2) $9(x-7)^2 - 3(y+1)^2 = 144$

3) $2x^2 + x = 9y$

Вариант 3.

Найти центр или вершину, полуоси, эксцентриситет, директрисы, фокусы, построить линию

1) $(x-9)^2 - 9(y+4)^2 = 144$

2) $(x-5)^2 + 9(y-2)^2 = 144$

3) $x = -2y^2 + y$

Вариант 4.

Найти центр или вершину, полуоси, эксцентриситет, директрисы, фокусы, построить линию

4. $(x+5)^2 - 16(y+4)^2 = 144$

5. $(x-5)^2 + 6(y+2)^2 = 144$

6. $6x = -4y^2 + y$

Вариант 5.

Найти центр или вершину, полуоси, эксцентриситет, директрисы, фокусы, построить линию

3. $(x-3)^2+3(y+9)^2=144$

4. $3(x+5)^2-6(y+2)^2=144$

5. $3x^2+x=-y$

Вариант 6.

Найти центр или вершину, полуоси, эксцентриситет, директрисы, фокусы, построить линию

4. $(x-6)^2-(y+4)^2=144$

5. $(x+6)^2-3(y+3)^2=144$

6. $8x=y^2+y$

Вариант 7.

Найти центр или вершину, полуоси, эксцентриситет, директрисы, фокусы, построить линию

3. $12(x-6)^2+3(y+9)^2=144$

4. $9(x-7)^2-3(y+1)^2=144$

5. $-6x=y^2+y$

Вариант 8.

Найти центр или вершину, полуоси, эксцентриситет, директрисы, фокусы, построить линию

1) $3(x-7)^2-3(y+4)^2=144$

2) $6(x-5)^2+24(y+2)^2=144$

3) $9x=y^2+y$

Вариант 9.

Найти центр или вершину, полуоси, эксцентриситет, директрисы, фокусы, построить линию

1. $(x-1)^2-18(y+4)^2=144$

2. $(x-5)^2+9(y-2)^2=144$

3. $-4x^2+x=y$

Вариант 10.

Найти центр или вершину, полуоси, эксцентриситет, директрисы, фокусы, построить линию

1. $(x-4)^2-24(y+8)^2=144$

2. $12(x-6)^2+3(y+6)^2=144$

3. $3x=-y^2+y$

5.31 Индивидуальное задание по теме «Векторы в пространстве»

Вариант 1

1) В параллелепипеде $ABCDA'B'C'D'$ заданы векторы, совпадающие с его ребрами: $\overrightarrow{AB}=\vec{n}$, $\overrightarrow{AD}=\vec{m}$, $\overrightarrow{AA'}=\vec{p}$. Построить каждый из следующих векторов: $\vec{m}+\vec{n}+\vec{p}$, $\vec{m}+\vec{n}+\frac{1}{2}\vec{p}$, $\frac{1}{2}\vec{m}+\frac{1}{2}\vec{n}+\vec{p}$, $-\vec{m}-\vec{n}+\frac{1}{2}\vec{p}$.
2) Найти вектор $\vec{x}$ из уравнения $3\left(\vec{a_1}-\vec{x}\right)+2\left(\vec{a_2}+\vec{x}\right)=5\left(\vec{a_3}+\vec{x}\right)$, где $\vec{a_1}=(5,-6,-2)$, $\vec{a_2}=(2,-1,4)$, $\vec{a_3}=(-3,2,-5)$.

3) Даны три силы $\vec{M} = (3,-4,2)$, $\vec{N} = (2,3,-5)$, $\vec{P} = (-3,-2,4)$, приложенные к одной точке. Вычислить, какую работу производит равнодействующая этих сил, когда ее точка приложения, двигаясь прямолинейно, перемещается вдоль вектора $\vec{r} = (-1,-4,3)$.

4) Вычислить площадь и высоту треугольника ABC, где $A(1,2,0)$, $B(3,0,-3)$, $C(5,2,6)$.

5) При каком значении m векторы $\vec{a} = \vec{i} + \vec{j} + m\vec{k}$, $\vec{b} = \vec{j}$, $\vec{c} = 3\vec{i} + \vec{k}$ компланарны?

Вариант 2

1. Выяснить является ли система векторов $\vec{a_1} = (-7,21,-49)$, $\vec{a_2} = (4,12,28)$ линейно зависимой?
2. Даны векторы $\vec{a} = (4,-2,-4)$ и $\vec{b} = (6,-3,2)$. Вычислить скалярное произведение векторов $\vec{p} = \vec{a} + 2\vec{b}$, $\vec{q} = 2\vec{a} - 3\vec{b}$.
3. Вектор $\vec{x}$ перпендикулярен векторам $\vec{a} = (4,-2,-3)$ и $\vec{b} = (0,1,3)$ и образует с осью OY тупой угол. Зная, что $|\vec{x}| = 2b$, найти его координаты.
4. Показать, что векторы $\vec{a} = \vec{i} + \vec{j} + 4\vec{k}$, $\vec{b} = \vec{i} - 2\vec{j}$, $\vec{c} = 3\vec{i} - 3\vec{j} + 4\vec{k}$ компланарны и найти линейную зависимость между ними.
5. Каковы бы ни были векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ векторы $\vec{a} - \vec{b}$, $\vec{b} - \vec{c}$, $\vec{c} - \vec{a}$ компланарны. Доказать это утверждение аналитически.

Вариант 3

1) Найти орт вектора $\vec{a} = (6,-2,2)$.

2) Показать, что векторы $\vec{a}=(2,3,-1)$, $\vec{b}=(5,7,0)$, $\vec{c}=(3,-2,4)$ образуют базис и найти координаты вектора $\vec{d}=(4,12,-3)$ в этом базисе.

3) Найти угол между биссектрисами углов *XOY* и *YOZ*.

4) Найти единичный вектор $\vec{p}$, одновременно перпендикулярный вектору $\vec{i}$ и вектору $\vec{a}=(3,6,8)$.

5) Доказать компланарность векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, если $[\vec{a},\vec{b}]+[\vec{b}+\vec{c}]+[\vec{c}+\vec{a}]=\vec{0}$.

Вариант 4

1. Дан параллелепипед $ABCDA'B'C'D'$, $\overrightarrow{AA'}=\vec{r}$, $\overrightarrow{A'C}=\vec{s}$, $\overrightarrow{AB}=\vec{t}$. Выразить векторы $\overrightarrow{B'D}$, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AC'}$ через $\vec{r}$, $\vec{s}$, $\vec{t}$.
2. Векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ линейно независимы. Выяснить, будут ли линейно независимыми векторы $\vec{p}=-\vec{a}+2\vec{b}-\vec{c}$, $\vec{q}=2\vec{a}-2\vec{b}+\vec{c}$, $\vec{r}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$.
3. Найти вектор $\vec{x}$, коллинеарный вектору $\vec{a}=(2,2,-1)$ и удовлетворяющий условию $(\vec{x},\vec{a})=3$.
4. Найти площадь треугольника, построенного на векторах $\vec{a}=\vec{i}-2\vec{j}+5\vec{k}$, $\vec{b}=5\vec{j}-7\vec{k}$.
5. Вычислить произведения: $(\vec{b},\vec{c}+\vec{a},\vec{b}+2\vec{c})$, $(\vec{a}+\vec{b},\vec{a}-2\vec{b}+\vec{c},\vec{c}-\vec{a})$, $(\vec{c}+\vec{b},2\vec{a},\vec{b})$, если $(\vec{a},\vec{b},\vec{c})=5$.

Вариант 5

1) Дан правильный тетраэдр $ABCD$. DO – высота тетраэдра. DK –

медиана грани DCB. Выразить векторы $\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{DO}$, $\overrightarrow{DK}$ через векторы $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AC}=\vec{b}$, $\overrightarrow{AD}=\vec{c}$.

2) Векторы $\vec{p}$, $\vec{q}$, $\vec{r}$ образуют базис пространства. Выяснить будут ли векторы $\vec{a}=2\vec{p}-3\vec{q}+\vec{r}$, $\vec{b}=-\vec{p}+\vec{q}-2\vec{r}$, $\vec{c}=-2\vec{p}-\vec{q}+\vec{r}$ образовывать базис?

3) Найти длины диагоналей параллелограмма, построенного на векторах $\vec{m}=2\vec{a}+\vec{b}$, $\vec{m}=\vec{a}-2\vec{b}$, где $\vec{a}$ и $\vec{b}$ - единичные векторы, угол между которыми 60°.

4) Найти единичный вектор $\vec{q}$, одновременно перпендикулярный векторам $\vec{j}$ и $\vec{a}=(2,0,-8)$.

5) Вектор $\vec{c}$ перпендикулярен векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$, величина угла между которыми равна 30°. Зная, что $|\vec{a}|=6$, $|\vec{b}|=3$ вычислить смешанное произведение $(\vec{a},\vec{b},\vec{c})$.

Вариант 6

1. Дана правильная четырехугольная пирамида $SABCD$. SF – медиана грани SDC, $(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{BD})=0$. Выразить векторы $\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{SF}$, $\overrightarrow{AB}$ через векторы $\overrightarrow{AS}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AD}=\vec{b}$, $\overrightarrow{SO}=\vec{c}$.
2. Даны три вектора $\vec{p}=(3,-2,1)$, $\vec{q}=(-1,1,-2)$, $\vec{r}=(2,1,-3)$. Найти разложение по ним вектора $\vec{m}=(11,-6,5)$.
3. Используя свойства скалярного произведения, доказать теорему Пифагора.
4. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ составляют угол в 45°. Найти площадь треугольника

построенного на векторах $\vec{a}-2\vec{b}$, $3\vec{a}+2\vec{b}$, если $|\vec{a}|=|\vec{b}|=5$.

5. Вычислить высоту параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{a}=\vec{i}+\vec{j}-3\vec{k}$, $\vec{b}=-\vec{i}+\vec{j}+2\vec{k}$, $\vec{c}=2\vec{i}-\vec{j}+\vec{k}$.

Вариант 7

1) Три силы $\vec{F_1}$, $\vec{F_2}$, $\vec{F_3}$, приложенные к одной точке, имеют взаимно перпендикулярные направления. Определить величину их равнодействующей $\vec{R}$, если $|\vec{F_1}|=1$, $|\vec{F_2}|=8$, $|\vec{F_3}|=5$.
2) Даны три вектора $\vec{m}=(-1,1,-2)$, $\vec{n}=(2,1,-3)$, $\vec{k}=(3,-2,1)$. Найти разложение вектора $\vec{a}=(-6,5,11)$ по базису $\vec{m}$, $\vec{n}$, $\vec{k}$.
3) Векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ попарно образуют друг с другом углы, каждый из которых равен 60°. Зная, что $|\vec{a}|=2$, $|\vec{b}|=4$, $|\vec{c}|=6$, определить длину вектора $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$.
4) Найти площадь треугольника, построенного на векторах $\vec{a}=4\vec{i}-5\vec{j}$, $\vec{b}=4\vec{j}-3\vec{k}$.
5) Доказать, что векторы $\vec{m}-2\vec{n}$, $\vec{n}-\vec{k}$, $2\vec{k}-\vec{m}$ компланарны. Здесь $\vec{m}$, $\vec{n}$, $\vec{k}$ - произвольные векторы.

Вариант 8

1. В тетраэдре $ABCD$ даны ребра, выходящие из вершины D: $\overrightarrow{DA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{DB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{DC}=\vec{c}$. Выразить через эти векторы медиану *AL* грани *ABC*.
2. Векторы $\vec{l}$, $\vec{m}$, $\vec{n}$ разложены по трем компланарным векторам $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$:

$\vec{l} = 2\vec{a} - \vec{b} - \vec{c}$, $\vec{m} = 2\vec{b} - \vec{c} - \vec{a}$, $\vec{n} = 2\vec{c} - \vec{a} - \vec{b}$. Определить, являются ли векторы $\vec{l}$, $\vec{m}$, $\vec{n}$ базисом пространства.

3. Найти вектор $\vec{x}$, коллинеарный вектору $\vec{p} = (3,2,4)$ и удовлетворяющий условию $(\vec{x}, \vec{p}) = -29$.
4. Векторы $\vec{m}$, $\vec{n}$, $\vec{p}$ являются взаимно перпендикулярными ортами, образующими правую тройку. Разложить вектор $\vec{q} = [3\vec{m} + 4\vec{n}, \vec{m} + 6\vec{n} + 4\vec{p}]$ по векторам $\vec{m}$, $\vec{n}$, $\vec{p}$.
5. Доказать тождество $(\vec{a} + \vec{b}, \vec{b} + \vec{c}, \vec{c} + \vec{a}) = 2(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$.

Вариант 9

1) Дан параллелепипед $ABCDA'B'C'D'$, $\overrightarrow{AA'} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{c}$. Построить вектор $-\frac{1}{2}(\vec{c} - \vec{b}) + \vec{a}$.
2) Определить, образуют ли векторы $\vec{p} = 5\vec{i} + 7\vec{j}$, $\vec{q} = 3\vec{i} - 2\vec{j} + 4\vec{k}$, $\vec{r} = 2\vec{i} + 3\vec{j} + \vec{k}$ базис пространства.
3) Векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ попарно образуют друг с другом углы, каждый из которых равен 60°. Зная, что $|\vec{a}| = 1$, $|\vec{b}| = 3$, $|\vec{c}| = 2$, определить длину вектора $2\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$.
4) Найти единичный вектор $\vec{m}$, одновременно перпендикулярный векторам $\vec{k}$ и $\vec{r} = (6,8,11)$.
5) Вычислить высоту параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{a} = -\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$, $\vec{b} = -\vec{j} + 3\vec{k}$, $\vec{c} = \vec{i} + 2\vec{j} - 2\vec{k}$.

Вариант 10

1. В пирамиде $ABCD$ точки F и Q – середины ребер AD и BC соответственно. Выразить векторы $\overrightarrow{BD}$ и $\overrightarrow{FQ}$ через векторы $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$.
2. Доказать, что векторы $\vec{a} = (1,2,3)$, $\vec{b} = (-1,3,2)$, $\vec{c} = (7,-3,5)$ образуют базис пространства и найти координаты вектора $\vec{d} = (6,10,17)$ в этом базисе.
3. Дан треугольник ABC и известны координаты векторов $\overrightarrow{AB} = \left(-1,-1,-\sqrt{2}\right)$, $\overrightarrow{AC} = \left(\sqrt{3},\sqrt{3},-\sqrt{6}\right)$. Найти углы треугольника.
4. Треугольник ABC построен на векторах $\overrightarrow{AB} = (2,0,6)$ $\overrightarrow{AC} = (3,4,0)$. Найти длину высоты AD и синус угла C этого треугольника.
5. Дан тетраэдр $ABCD$ и известны координаты векторов $\overrightarrow{AB} = (2,0,0)$, $\overrightarrow{AC} = (3,4,0)$, $\overrightarrow{AD} = (3,4,2)$. Найти высоту DH этого тетраэдра.

5.32 Индивидуальное задание по теме «Аналитическая геометрия в пространстве»

Вариант 1

1) Даны координаты вершин пирамиды $A_1A_2A_3A_4$: $A_1(1;3;2)$, $A_2(3;2;3)$, $A_3(4;0;1)$, $A_4(1;1;1)$. Найти:

1. уравнение плоскости $A_1A_2A_3$;
2. уравнение прямой A_1A_4;
3. угол между прямой A_1A_4 и плоскостью $A_1A_2A_3$;
4. угол между прямыми A_1A_3 и A_1A_4;
5. уравнение высоты, опущенной из вершины A_4;
6. точку пересечения этой высоты с основанием пирамиды;
7. выполнить чертеж пирамиды.

2) Построить плоскости

а) $-3x+5y+2z=5$

б) $2x-3y=0$

в) $2x=3$

г) $2z-3y-4=0$

д) $3x-5y-6z=0$.

3) Построить поверхности

а) $4x^2-y^2+6z^2=0$

б) $z^2-2x+2=0$

в) $z=x^2-3$

г) $3x^2-4y^2+z^2=12$.

4) Построить тело, ограниченное данными поверхностями

а) $z=3x^2+y^2$, $x=\sqrt{y}$, $z=0$, $y=4$

б) $x^2+y^2=2ax$, $x^2+y^2=z^2$, $z=0$

в) $x+y+z=3a$, $x^2+y^2=a^2$, $z=0$.

Вариант 2

1. Даны координаты вершин пирамиды $A_1A_2A_3A_4$: $A_1(3;1;1)$, $A_2(1;4;1)$, $A_3(1;1;7)$, $A_4(3;4;-1)$. Найти:
    1. уравнение плоскости $A_1A_2A_3$;
    2. уравнение прямой A_1A_4;
    3. угол между прямой A_1A_4 и плоскостью $A_1A_2A_3$;
    4. угол между прямыми A_1A_3 и A_1A_4;
    5. уравнение высоты, опущенной из вершины A_4;
    6. точку пересечения этой высоты с основанием пирамиды;
    7. выполнить чертеж пирамиды.
2. Построить плоскости

а) $x+4y-2z=3$

б) $2x - 5y = 2$

в) $3x - 5y + 4 = 0$

г) $3y = -5$

д) $2z = 0$.

3. Построить поверхности

а) $4z^2 + y^2 - 2x = 0$

б) $y^2 - 4z^2 + 8x^2 + 8 = 0$

в) $y^2 - 4z - 6 = 0$

г) $x = -2z^2 - 3$.

4. Построить тело, ограниченное данными поверхностями

а) $z = x^2 + y^2 + 1$, $x + y = 2$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$

б) $z = 6 - x^2 - y^2$, $z = \sqrt{x^2 + y^2}$

в) $az = x^2 + y^2$, $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.

Вариант 3

1) Даны координаты вершин пирамиды $A_1A_2A_3A_4$: $A_1(-1;3;0)$, $A_2(4;5;-2)$, $A_3(1;-1;6)$, $A_4(6;1;5)$. Найти:

1. уравнение плоскости $A_1A_2A_3$;
2. уравнение прямой A_1A_4;
3. угол между прямой A_1A_4 и плоскостью $A_1A_2A_3$;
4. угол между прямыми A_1A_3 и A_1A_4;
5. уравнение высоты, опущенной из вершины A_4;
6. точку пересечения этой высоты с основанием пирамиды;
7. выполнить чертеж пирамиды.

2) Построить плоскости

а) $2x - 3y + 4z = 7$

б) $4x + y = 4$

в) $3z - 5x - y = 0$

г) $x + 6y = 0$

д) $2x - 3 = 0$.

3) Построить поверхности

а) $4x^2 + y^2 + 2z^2 = 6$

б) $2x^2 - y^2 = 2$

в) $x = 3y^2 + 2$

г) $3x^2 + 3y^2 + 3z^2 = 1$.

4) Построить тело, ограниченное данными поверхностями

а) $y = z$, $x = 4$, $y = \sqrt{25 - x^2}$, $x = 0$, $z = 0$

б) $z = x^2 + y^2$, $y = x$, $y = 2x$, $x = 1$

в) $z = 1 - x^2$, $y = 3 - x$, $y = 0$, $z = 0$.

Вариант 4

1. Даны координаты вершин пирамиды $A_1A_2A_3A_4$: $A_1(-1;3;0)$, $A_2(4;5;-2)$, $A_3(1;-1;6)$, $A_4(6;1;5)$. Найти:
   1. уравнение плоскости $A_1A_2A_3$;
   2. уравнение прямой A_1A_4;
   3. угол между прямой A_1A_4 и плоскостью $A_1A_2A_3$;
   4. угол между прямыми A_1A_3 и A_1A_4;
   5. уравнение высоты, опущенной из вершины A_4;
   6. точку пересечения этой высоты с основанием пирамиды;
   7. выполнить чертеж пирамиды.
2. Построить плоскости

   а) $2x-3y-z=4$

   б) $2x-5z=3$

   в) $2x-y=0$

   г) $5x=3$

   д) $-7x+2z=3$.
3. Построить поверхности

   а) $y^2-4z^2=25$

   б) $y^2+4x^2=z$

   в) $y^2=-5z^2-3$

   г) $x^2+y^2-z^2=1$.
4. Построить тело, ограниченное данными поверхностями

   а) $z=4y$, $y=\sqrt{9-x^2}$, $z=0$, $y=0$

   б) $2az=x^2+y^2$, $x^2+y^2+3z^2=3a^2$

   в) $z=3-x^2$, $x=0$, $y=0$ $z=0$, $x+y=\sqrt{3}$ $(x\geq 0)$.

Вариант 5

1) Даны координаты вершин пирамиды $A_1A_2A_3A_4$: $A_1(-2;3;-2)$, $A_2(2;-4;2)$, $A_3(2;2;-1)$, $A_4(1;5;5)$. Найти:

1. уравнение плоскости $A_1A_2A_3$;
2. уравнение прямой A_1A_4;
3. угол между прямой A_1A_4 и плоскостью $A_1A_2A_3$;
4. угол между прямыми A_1A_3 и A_1A_4;
5. уравнение высоты, опущенной из вершины A_4;
6. точку пересечения этой высоты с основанием пирамиды;
7. выполнить чертеж пирамиды.

2) Построить плоскости

а) $x-2y-2z=4$

б) $2x+z=6$

в) $4x-z+y=0$

г) $2x-3=0$

д) $4z+y=0$.

3) Построить поверхности

а) $y^2-4z^2-6=0$

б) $y^2+4x^2-4=0$

в) $x=-4y^2+6$

г) $x^2+y^2-z^2=-1$.

4) Построить тело, ограниченное данными поверхностями

а) $z^2=4-y$, $x^2+y^2=4y$

б) $x^2+y^2+z^2=a^2$, $x^2+y^2=ax$

в) $z=0$, $z=1-y$, $y=x^2$.

Вариант 6

1. Даны координаты вершин пирамиды $A_1A_2A_3A_4$: $A_1(4;0;1)$, $A_2(2;1;5)$, $A_3(0;4;1)$, $A_4(-1;2;0)$. Найти:

    1. уравнение плоскости $A_1A_2A_3$;
    2. уравнение прямой A_1A_4;
    3. угол между прямой A_1A_4 и плоскостью $A_1A_2A_3$;
    4. угол между прямыми A_1A_3 и A_1A_4;
    5. уравнение высоты, опущенной из вершины A_4;
    6. точку пересечения этой высоты с основанием пирамиды;
    7. выполнить чертеж пирамиды.

2. Построить плоскости

    а) $2 = 3x + 2z - y$

    б) $x + 3z = 3$

    в) $3y - 3 = 0$

    г) $-z = 2y$

    д) $6x - 5y = 0$.

3. Построить поверхности

    а) $4x^2 - y^2 - 4x + 4y = 3$

    б) $3x^2 + 3y^2 - 9z^2 = 0$

    в) $z = x^2 - \dfrac{1}{3}$

    г) $2x^2 - 2y^2 + 4z^2 = 4$.

4. Построить тело, ограниченное данными поверхностями

    а) $z = x^2 + y^2$, $y = x^2$, $y = 1$, $z = 0$

    б) $z = 3x^2 + y^2$, $x + y = 6$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$

    в) $y = \sqrt{x}$, $y = \dfrac{\sqrt{x}}{2}$, $x + z = 4$, $z = 0$.

Вариант 7

1) Даны координаты вершин пирамиды $A_1A_2A_3A_4$: $A_1(-2;1;2)$, $A_2(4;0;0)$, $A_3(3;2;7)$, $A_4(1;3;2)$. Найти:

1. уравнение плоскости $A_1A_2A_3$;
2. уравнение прямой A_1A_4;
3. угол между прямой A_1A_4 и плоскостью $A_1A_2A_3$;
4. угол между прямыми A_1A_3 и A_1A_4;
5. уравнение высоты, опущенной из вершины A_4;
6. точку пересечения этой высоты с основанием пирамиды;
7. выполнить чертеж пирамиды.

2) Построить плоскости

а) $3x-2z+y=1$

б) $x+2y-z=0$

в) $y=3x$

г) $2z=5$

д) $2y-3z-12=0$.

3) Построить поверхности

а) $y=-x^2+2$

б) $y^2-z^2+x^2-6=0$

в) $y^2+z^2-4x=0$

г) $3x^2+y^2+z^2=0$.

4) Построить тело, ограниченное данными поверхностями

а) $x^2+y^2=4$, $x^2+z^2=4$

б) $z=0$, $z=2-x$, $x=1$, $x=y^2$

в) $x=0$, $y=0$, $z=0$, $x-4=-y^2$, $z=4-2x^2$.

Вариант 8

1. Даны координаты вершин пирамиды $A_1A_2A_3A_4$: $A_1(1;3;2)$, $A_2(3;2;3)$, $A_3(4;0;1)$, $A_4(1;1;1)$. Найти:
   1. уравнение плоскости $A_1A_2A_3$;
   2. уравнение прямой A_1A_4;
   3. угол между прямой A_1A_4 и плоскостью $A_1A_2A_3$;
   4. угол между прямыми A_1A_3 и A_1A_4;
   5. уравнение высоты, опущенной из вершины A_4;
   6. точку пересечения этой высоты с основанием пирамиды;
   7. выполнить чертеж пирамиды.
2. Построить плоскости

   а) $x-3y-2z=2$

   б) $2x-z=4$

   в) $4x-2z-2y=0$

   г) $2x-5=0$

   д) $3z=y$.
3. Построить поверхности

   а) $x^2+4y^2-z^2-10x-16y+6z=-16$

   б) $y^2+4x^2=4$

   в) $z=-2y^2+6x^2$

   г) $x^2-y^2-z^2=1$.
4. Построить тело, ограниченное данными поверхностями

   а) $z=2x^2+y^2+1$, $x+y=1$, $x=0$, $y=0$, $z=0$

   б) $z=4-x^2-y^2$, $x=y^2$, $x=1$, $z=0$

   в) $z=x+y+2$, $y=x^2$, $y^2=x$, $z=0$.

Вариант 9

1. Даны координаты вершин пирамиды $A_1A_2A_3A_4$: $A_1(4;-3;2)$, $A_2(2;2;3)$, $A_3(2;-2;-3)$, $A_4(-1;-2;3)$. Найти:
   1. уравнение плоскости $A_1A_2A_3$;
   2. уравнение прямой A_1A_4;
   3. угол между прямой A_1A_4 и плоскостью $A_1A_2A_3$;
   4. угол между прямыми A_1A_3 и A_1A_4;
   5. уравнение высоты, опущенной из вершины A_4;
   6. точку пересечения этой высоты с основанием пирамиды;
   7. выполнить чертеж пирамиды.
2. Построить плоскости

   а) $4x-z+y-9=0$

   б) $2y-z-x=0$

   в) $4y+z=0$

   г) $y=x$

   д) $2x-5y+2=0$.
3. Построить поверхности

   а) $3x^2+3y^2+3z^2-6x+4y-1=0$

   б) $x^2-6z=0$

   в) $-\frac{1}{2}(y+4)=x^2$

   г) $x^2+3y^2-z^2=1$.
4. Построить тело, ограниченное данными поверхностями

   а) $x^2+y^2=4$, $y+z=2$, $z=0$

   б) $x=y^2$, $z=2-x$, $x=1$, $z=0$

   в) $x=y^2$, $x=2y^2+1$, $z=1-y^2$, $z=0$.

Вариант 10

1. Даны координаты вершин пирамиды $A_1A_2A_3A_4$: $A_1(2;2;3)$, $A_2(-2;1;-1)$, $A_3(3;1;-2)$, $A_4(1;-2;1)$. Найти:
   1. уравнение плоскости $A_1A_2A_3$;
   2. уравнение прямой A_1A_4;
   3. угол между прямой A_1A_4 и плоскостью $A_1A_2A_3$;
   4. угол между прямыми A_1A_3 и A_1A_4;
   5. уравнение высоты, опущенной из вершины A_4;
   6. точку пересечения этой высоты с основанием пирамиды;
   7. выполнить чертеж пирамиды.
2. Построить плоскости

   а) $3x-4z+2y=5$

   б) $-6=7y$

   в) $2x-y+z=0$

   г) $x-5z=0$

   д) $y=z$.
3. Построить поверхности

   а) $z=2x^2-4y^2-6x+8y+1$

   б) $x^2+y^2+z^2=9$

   в) $x=-2z^2-4$

   г) $3z^2-2x=y^2$.
4. Построить тело, ограниченное данными поверхностями

   а) $z=a-x$, $y^2=ax$, $z=0$

   б) $z=2x^2+y^2+1$, $x+y=1$, $x=0$, $y=0$, $z=0$

   в) $y=a-x-z$, $x^2+y^2=a^2$, $x=0$, $y=0$, $z=0$.

5.33 Индивидуальное задание по теме «Прямая и плоскость»

ВАРИАНТ № 1

Даны вершины тетраэдра: А(2,-1,1), В(5,5,4), С(3,2,-1), Д(4,1,3)

ВАРИАНТ №2

Даны вершины тетраэдра:

А(-10,-13,-11), В(-7,-7,-8), С(-9,-10,-13), Д(-8,-11,-9)

ВАРИАНТ №3

Даны вершины тетраэдра: А(4,1,3), В(7,7,6), С(5,4,1), Д(6,3,5).

ВАРИАНТ №4

Даны вершины тетраэдра: А(7,4,6), В(10,10,9), С(8,7,4), Д(9,6,8).

ВАРИАНТ №5

Даны вершины тетраэдра:

А(-9,-12,-10), В(-6,-6,-7), С(-8,-9,-12),Д(-7,-10,-8).

ВАРИАНТ №6

Даны вершины тетраэдра: А(3,0,2), В(6,6,5), С(4,3,0), Д(5,2,4).

ВАРИАНТ №7

Даны вершины тетраэдра: А(-7,-10,-8),

В(-4,-4,-5), С(-6,-7,-10), Д(-5,-8,-6).

ВАРИАНТ №8

Даны вершины тетраэдра: А(5,2,4), В(8,8,7), С(6,5,2), Д(7,4,6).

ВАРИАНТ №9

Даны вершины тетраэдра: А(-4,-7,-5), В(-1,-1,-2), С(-3,-4,-7), Д(-2,-5,-3)

ВАРИАНТ №10

Даны вершины тетраэдра: А(6,3,5), В(9,9,8), С(7,6,3), Д(8,5,7).

6,3,5), В(9,9,8), С(7,6,3), Д(8,5,7).

Найти:

1. Уравнения боковых ребер.
2. Длины боковых ребер.
3. Уравнение основания АВС

4. Углы между ребрами при вершине Д.
5. Уравнения апофемы грани АВД.
6. Углы между ребрами и основанием АВС.
7. Двугранные углы при основании АВС.
8. Уравнения перпендикуляра к ребрам АД и ВС
9. Уравнения высоты из вершины Д.
10. Длину апофемы грани АВД.
11. Длину перпендикуляра к ребрам АД и ВС.
12. Длину высоты из вершины Д.
13. Основание высоты из вершины Д.
14. Объем тетраэдра
15. Площадь основания

5.34 Индивидуальное задание по теме «Поверхности второго порядка»

ВАРИАНТ № 1

Построить поверхности, заданные уравнениями:

1. $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} + \frac{z^2}{25} = 1$ 7. $-x^2 + y^2 = 1$;

2. $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} + \frac{z^2}{25} = 1$; 8. $x^2 = 2z$;

3. $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} - \frac{z^2}{4} = 1$; 9. $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 0$;

4. $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = z$; 10. $x^2 - 4 = 0$;

5. $\frac{x^2}{9} - \frac{z^2}{16} = y$; 11. $y^2 = 0$;

6. $x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$; 12. $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4} - \frac{z^2}{1} = 0$.

ВАРИАНТ № 2

Построить поверхности, заданные уравнениями:

1. $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{25}+\frac{z^2}{9}=1;$ 7. $-\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{36}=1;$

2. $-\frac{x^2}{16}+\frac{z^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1;$ 8. $y^2=4z;$

3. $-\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{25}=1;$ 9. $\frac{x^2}{4}-\frac{z^2}{9}=0;$

4. $\frac{y^2}{16}+\frac{z^2}{9}=x;$ 10. $y^2-25=0;$

5. $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4}=z;$ 11. $z^2=0;$

6. $\frac{x^2}{4}+\frac{z^2}{9}=1$ 12. $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}+\frac{z^2}{25}=0.$

ВАРИАНТ № 3.

Построить поверхности, заданные уравнениями:

1. $\frac{x^2}{1}+\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{16}=1;$ 7. $-\frac{x^2}{9}+\frac{z^2}{16}=1;$

2. $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}-\frac{z^2}{25}=1;$ 8. $z^2=2x;$

3. $-\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{16}-\frac{z^2}{9}=1;$ 9. $\frac{z^2}{16}-\frac{y^2}{4}=0;$

4. $\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{3}=z;$ 10. $z^2-16=0;$

5. $\frac{y^2}{9}-\frac{z^2}{4}=x;$ 11. $x^2=0;$

6. $\frac{y^2}{4}+\frac{z^2}{16}=1$ 12. $-\frac{x^2}{9}+\frac{z^2}{16}+\frac{y^2}{4}=0.$

ВАРИАНТ № 4.

Построить поверхности, заданные уравнениями:

1. $\frac{x^2}{81}+\frac{y^2}{36}+\frac{z^2}{9}=1;$ 7. $\frac{z^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1;$

2. $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}-\frac{z^2}{4}=1;$ 8. $x^2=2y;$

3. $-\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}-\frac{z^2}{16}=1;$ 9. $\frac{x^2}{36}-\frac{y^2}{16}=0;$

4. $\frac{x^2}{4}+\frac{z^2}{16}=$ y; 10. $y^2-9=0;$

5. $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{36}=$ z; 11. $z^2=0;$

6. $\frac{x^2}{4}+\frac{z^2}{9}=1;$ 12. $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}-\frac{z^2}{1}=0.$

ВАРИАНТ № 5.

Построить поверхности, заданные уравнениями:

1. $\frac{x^2}{9}+y^2+\frac{z^2}{16}=1;$ 7. $-\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1;$

2. $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{16}+z^2=1;$ 8. $y^2=$ 2x;

3. $-\frac{x^2}{1}+\frac{y^2}{4}-\frac{z^2}{25}=1;$ 9. $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{16}=0;$

4. $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=$ z 10. $z^2-16=0;$

5. $\frac{x^2}{9}-\frac{z^2}{4}=$ y; 11. $x^2=0;$

6. $\frac{x^2}{16}+\frac{z^2}{9}=1;$ 12. $-\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{25}=0.$

ВАРИАНТ № 6.

Построить поверхности, заданные уравнениями:

1. $x^2+y^2+z^2=1;$ 7. $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}=1;$

2. $x^2-\frac{y^2}{4}+\frac{z^2}{9}=1;$ 8. $\frac{x^2}{9}-\frac{z^2}{16}=0;$

3. $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{25}+\frac{z^2}{16}=1;$ 9. $z^2=$ 4x;

4. $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}-\frac{z^2}{25}=1;$ 10. $x^2-9=0;$

5. $\frac{x^2}{16}+\frac{z^2}{9}=y$;

6. $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$;

11. $z^2=0$;

12. $-x^2+\frac{y^2}{16}+\frac{z^2}{9}=0$.

ВАРИАНТ № 7.

Построить поверхности, заданные уравнениями:

1. $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{16}=1$;

2. $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{1}-\frac{z^2}{9}=1$;

3. $-\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{1}+\frac{z^2}{25}=1$;

4. $\frac{x^2}{9}+\frac{z^2}{16}=y$;

5. $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}=z$;

6. $y^2+\frac{z^2}{4}=1$;

7. $-\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{16}=1$;

8. $y^2=2z$;

9. $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$;

10. $z^2-25=0$;

11. $y^2=0$;

12. $-\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{4}+\frac{z^2}{9}=0$.

ВАРИАНТ № 8.

Построить поверхности, заданные уравнениями:

1. $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}+z^2=1$;

2. $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{25}+\frac{z^2}{4}=1$;

3. $-x^2-\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{4}=1$;

4. $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{16}=z$;

5. $\frac{y^2}{16}-\frac{x^2}{9}=z$;

6. $\frac{x^2}{25}+y^2=1$;

7. $\frac{y^2}{4}-\frac{z^2}{16}=1$;

8. $y^2=9z$;

9. $\frac{x^2}{25}-\frac{z^2}{16}=0$;

10. $z^2=25$;

11. $y^2=0$;

12. $\frac{x^2}{25}-y^2+\frac{z^2}{4}=0$.

ВАРИАНТ № 9.

Построить поверхности, заданные уравнениями:

1. $x^2 + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{16} = 1;$ 7. $\frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{4} = 1;$

2. $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{16} + \frac{z^2}{25} = 1;$ 8. $y^2 = 9z;$

3. $x^2 - \frac{y^2}{4} - \frac{z^2}{16} = 1;$ 9. $\frac{y^2}{16} - \frac{x^2}{25} = 0;$

4. $\frac{y^2}{16} + \frac{z^2}{9} = x;$ 10. $y^2 = 25;$

5. $y^2 - \frac{x^2}{4} = z;$ 11. $x^2 = 0;$

6. $\frac{x^2}{16} + \frac{z^2}{25} = 1;$ 12. $-\frac{x^2}{16} + y^2 + \frac{z^2}{25} = 0.$

ВАРИАНТ № 10.

Построить поверхности, заданные уравнениями:

1. $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{4} = 1;$ 7. $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{1} = 1;$

2. $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4} - \frac{z^2}{16} = 1;$ 8. $y^2 = 4x;$

3. $x^2 - \frac{y^2}{4} - \frac{z^2}{9} = 1;$ 9. $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 0;$

4. $4x^2 + y^2 - 16 = 0;$ 10. $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{25} + \frac{z^2}{36} = 0;$

5. $\frac{x^2}{9} - \frac{z^2}{16} = y;$ 11. $-\frac{x^2}{1} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{16} = 0;$

6. $x^2 + y^2 = 9;$ 12. $z^2 - 25 = 0.$

ВАРИАНТ № 11.

Построить поверхности, заданные уравнениями:

1. $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{16} = 1;$ 7. $\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{9} = 1;$

2. $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{16} + \frac{z^2}{9} = 1$; 8. $x^2 = 4y$;

3. $-\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} + \frac{z^2}{4} = 1$; 9. $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 0$;

4. $\frac{x^2}{16} + \frac{z^2}{4} = y$; 10. $x^2 - 16 = 0$;

5. $\frac{y^2}{4} - \frac{z^2}{16} = x$; 11. $y^2 = 0$;

6. $\frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{9} = 1$; 12. $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{25} = 0$.

ВАРИАНТ № 12.

Построить поверхности, заданные уравнениями:

1. $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{36} = 1$; 7. $\frac{y^2}{4} - \frac{z^2}{16} = 1$;

2. $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{16} - \frac{z^2}{4} = 1$; 8. $z^2 = 9x$;

3. $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{4} - \frac{z^2}{9} = 1$; 9. $\frac{y^2}{4} - \frac{z^2}{25} = 0$;

4. $\frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{16} = x$; 10. $z^2 - 4 = 0$;

5. $\frac{x^2}{25} - \frac{z^2}{9} = y$; 11. $z^2 = 0$;

6. $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1$; 12. $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{25} - \frac{z^2}{9} = 0$.

ВАРИАНТ № 13.

Построить поверхности, заданные уравнениями:

1. $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{4} = 1$; 7. $-\frac{y^2}{9} + z^2 = 1$;

2. $x^2 + y^2 - \frac{z^2}{9} = 1$; 8. $y^2 = 4z$;

3. $-\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{25} + z^2 = 1$; 9. $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 0$;

4. $\frac{x^2}{4} + \frac{z^2}{25} = y$; 10. $z^2 - 4 = 0$;

5. $\frac{y^2}{4} + z^2 = 1$; 11. $y^2 = 0$;

6. $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = z$; 12. $-\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{25} = 0$.

ВАРИАНТ № 14.

Построить поверхности, заданные уравнениями:

1. $\frac{x^2}{4} + y^2 + z^2 = 1$; 7. $\frac{y^2}{4} - \frac{z^2}{16} = 1$;

2. $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} + z^2 = 1$; 8. $y^2 = 4z$;

3. $-\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{25} + \frac{z^2}{4} = 1$; 9. $\frac{x^2}{4} - \frac{z^2}{36} = 0$;

4. $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = z$; 10. $z^2 = 16$;

5. $\frac{y^2}{25} - \frac{x^2}{16} = z$; 11. $x^2 = 0$;

6. $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} = 1$; 12. $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{25} + \frac{z^2}{9} = 0$.

ВАРИАНТ № 15.

Построить поверхности, заданные уравнениями:

1. $x^2 + y^2 + \frac{z^2}{25} = 1$; 7. $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$;

2. $\frac{x^2}{4} - y^2 + \frac{z^2}{4} = 1$; 8. $x^2 = 4z$;

3. $-\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} - \frac{z^2}{9} = 1$; 9. $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{16} = 0$;

4. $\frac{x^2}{16} + \frac{z^2}{4} = y$; 10. $x^2 - 4 = 0$;

5. $\frac{z^2}{4} - \frac{y^2}{16} = x$; 11. $y^2 = 0$;

6. $\frac{x^2}{16} + \frac{z^2}{9} = 1;$ 12. $-\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{16} = 0.$

5.35 Индивидуальное задание по теме: «Канонический вид уравнения квадрики»

Вариант № 1

Привести квадрику к каноническому виду и построить

$6x^2 - 2y^2 + 6z^2 + 4xz + 8x - 4y - z + 1 = 0$

Вариант № 2

Привести квадрику к каноническому виду и построить

$x^2 + y^2 + 5z^2 - 6xy + 2xz - 2yz - 4x + 8y - 12z + 14 = 0$

Вариант № 3

Привести квадрику к каноническому виду и построить

$2x^2 + 5y^2 + 2z^2 - 2xy - 4xz + 2yz + 2x - 10y - 2z - 1 = 0$

Вариант № 4

Привести квадрику к каноническому виду и построить

$2x^2 + y^2 + 2z^2 - 2xy + 2yz + x + y + z = 0$

Вариант № 5

Привести квадрику к каноническому виду и построить

$7x^2 + 6y^2 + 5z^2 - 4xy - 4yz + 2x + y + z + 2 = 0$

Вариант № 6

Привести квадрику к каноническому виду и построить

$x^2 - 2y^2 + z^2 + 4xy - 8xz - 4yz + y + z + 10 = 0$

Вариант № 7

Привести квадрику к каноническому виду и построить

$x^2 + 5y^2 + z^2 + 2xy + 6xz + 2yz + 2x + z + 8 = 0$

Вариант № 8

Привести квадрику к каноническому виду и построить

$$x^2 - 2y^2 + z^2 + 4xy - 10xz + 4yz + 4y + z + 6 = 0$$

Вариант № 9

Привести квадрику к каноническому виду и построить

$$4y^2 - 3z^2 + 4xy - 4xz + 8yz + 4x + y - 6 = 0$$

Вариант № 10

Привести квадрику к каноническому виду и построить

$$2x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 8xy + 8xz - 8yz + z + 4 = 0$$

Вариант № 11

Привести квадрику к каноническому виду и построить

$$2x^2 + 9y^2 + 2z^2 - 4xy + 4yz + 2x + y - 8 = 0$$

Вариант № 12

Привести квадрику к каноническому виду и построить

$$-4x^2 - 4y^2 + 2z^2 - 4xy + 8xz - 8yz + x + y + z = 0$$

7. КАРТА КАДРОВОЙ ОБЕСПЕЧЕННОСТИ ДИСЦИПЛИНЫ

Лектор – доцент кафедры МАиМ Ермак Наталья Валентиновна (стаж работы в вузе 14 лет, к.ф.-.м.н.); старший преподаватель кафедры МАиМ Кван Наталья Владимировна (стаж работы в вузе 14 лет);

ведущий практические занятия – доцент кафедры МАиМ Ермак Наталья Валентиновна, старший преподаватель кафедры МАиМ Кван Наталья Владимировна, ассистент Грек Надежда Анатольевна (стаж работы в вузе 4 года).

ОГЛАВЛЕНИЕ