

Федеральное агентство по образованию  
АМУРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
ГОУВПО «АмГУ»

УТВЕРЖДАЮ

Зав. кафедрой АПП и Э

\_\_\_\_\_ А.Н. Рыбалев

« \_\_\_\_ » \_\_\_\_\_ 2007 г.

Теория колебаний  
УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКИЙ КОМПЛЕКС ДИСЦИПЛИНЫ  
для специальности  
220301– Автоматизация технологических процессов и производств  
(по отраслям)

Составитель: В.И. Усенко, доцент кафедры автоматизации  
производственных процессов и электротехники АмГУ

Благовещенск

2007 г.

Печатается по решению  
редакционно-издательского совета  
энергетического факультета  
Амурского государственного  
университета.

В.И. Усенко

Учебно-методический комплекс по дисциплине «Теория колебаний» для студентов очной формы обучения специальности 220301 «Автоматизация технологических процессов и производств». – Благовещенск. Амурский государственный университет, 2007.

Учебно-методические рекомендации ориентированы на оказание помощи студентам специальности 220301 «Автоматизация технологических процессов и производств» для формирования знаний и умений по теории и применению колебательных процессов, имеющих место в физике и технике, необходимых студентам при изучении курса теории автоматического управления.

Задачей курса теории колебаний является изучение с единой точки зрения колебательных процессов, имеющих место в физике и технике. Такой подход значительно облегчает анализ и исследование тех устройств, в которых имеет место закономерная связь колебаний различных физических величин – электрических и механических и которые часто встречаются в технических устройствах и физических явлениях. Изучение колебаний с единой точки зрения развивает у студентов способность к анализу явлений посредством сравнений и аналогий, которые могут оказаться весьма полезными при исследовании новых неизученных процессов.

Амурский государственный университет, 2007.

## СОДЕРЖАНИЕ:

1. Рабочая программа.....	4
2. Краткий конспект лекций.....	15
3. Самостоятельная работа студентов .....	17
4. Вопросы к зачету.....	75
5. Контроль знаний.....	76

# 1. Рабочая программа.

Федеральное агентство по образованию Российской Федерации  
АМУРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
(ГОУВПО «АмГУ»)

УТВЕРЖДАЮ  
Проректор по учебной работе  
Е.С. Астапова  
личная подпись, И.О.Ф

«\_\_» \_\_\_\_\_ 20 \_\_ г.

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА  
по дисциплине  
«ТЕОРИЯ КОЛЕБАНИЙ»  
для специальности 22.03.01  
«Автоматизация технологических процессов и производств»

курс	2	семестр	4
лекции	36		
практические -		зачет	4 семестр
лабораторные -			
самостоятельная работа	24		
ВСЕГО ЧАСОВ:	60		

Составитель В. И. Усенко, доц.  
Факультет энергетический  
Кафедра АППиЭ

2006 г.

Рабочая программа составлена на основании Учебного плана специальности 22.03.01 - «Автоматизация технологических процессов и производств»

Зав. кафедрой

А. Н. Рыбалев

Рабочая программа одобрена на заседании УМС специальности 22.03.01 «Автоматизация технологических процессов и производств»

«\_\_» \_\_\_\_\_ 200\_\_ г., протокол №

Председатель УМС

А. Н. Рыбалев

СОГЛАСОВАНО

Начальник УМУ

\_\_\_\_\_ Г. Н. Торопчина  
«\_\_» \_\_\_\_\_ 200\_\_ г.

СОГЛАСОВАНО

Председатель УМС факультета

\_\_\_\_\_ Ю. В. Мясоедов  
«\_\_» \_\_\_\_\_ 200\_\_ г.

СОГЛАСОВАНО

Зав. выпускающей кафедрой

\_\_\_\_\_ А. Н. Рыбалев  
«\_\_» \_\_\_\_\_ 200\_\_ г.

## 1. ЦЕЛИ И ЗАДАЧИ ИЗУЧЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ, ЕЕ МЕСТО В УЧЕБНОМ ПРОЦЕССЕ

Теория колебаний представляет самостоятельную дисциплину, так как разнообразные применения этой теории настолько тесно связаны друг с другом, что их необходимо изучать с единых математических и физических позиций.

Анализ колебательных процессов в технике и физических науках – оптике, акустике, механике, электричестве, в теории атома показывает единство законов колебаний во всех случаях.

Таким образом, задачей курса теории колебаний является изучение с единой точки зрения колебательных процессов, имеющих место в физике и технике. Такой подход значительно облегчает анализ и исследование тех устройств, в которых имеет место закономерная связь колебаний различных физических величин – электрических и механических и которые часто встречаются в технических устройствах и физических явлениях. Изучение колебаний с единой точки зрения развивает у студентов способность к анализу явлений посредством сравнений и аналогий, которые могут оказаться весьма полезными при исследовании новых неизученных процессов.

Теоретической базой дисциплины "Теория колебаний" являются высшая математика, физика и теория цепей. В свою очередь, изучаемая дисциплина является базой для изучения теории автоматического управления студентами специальности 22.03.01.

## 2. СОДЕРЖАНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ

### 2.1. ЛЕКЦИОННЫЙ КУРС

2.1.1. Введение. Задачи теории колебаний. – 2 ч.

2.1.2. Физические системы и их математические модели – 6 ч.

Математические модели простейших электрических цепей, механических систем с линейным перемещением и вращательным движением и электромеханических систем.

Математические модели динамических систем  $n$ -го порядка. Линеаризация физических систем.

Математические модели в переменных состояниях.

2.1.3. Операторные и временные характеристики линейных цепей и систем. – 16 час.

Прямое преобразование Лапласа и его свойства (теоремы). Уравнения электрического равновесия электрической цепи в операторной форме.

Операторные схемы замещения идеализированных двухполюсных элементов.

Обратное преобразование Лапласа. Теорема разложения. Табличный и программный метод преобразования Лапласа. Решение уравнений состояния операторным методом.

Операторные характеристики линейных электрических цепей и систем. Полусно-нулевая диаграмма. Схемы моделирования в переменных состояниях.

Расчет переходных процессов с помощью операторных схем замещения (операторный метод).

Активные цепи и системы с обратной связью и их передаточные функции. Структурные схемы. Преобразования структурных схем.

Единичные функции и их свойства. Переходная и импульсная характеристики линейных цепей и систем. Применение операторного метода для определения реакции цепи или системы управления на тестовые входные сигналы.

Передаточные функции и временные характеристики типовых звеньев систем управления. Требования к временным характеристикам при синтезе систем.

Моделирование электрических цепей и систем с помощью MATLAB.

2.1.4. Частотные характеристики электрических цепей и систем управления – 8 час.

Комплексные частотные характеристики. Диаграммы Боде.

Понятие о резонансе в электрических цепях. Резонанс в последовательном колебательном контуре.

Резонанс в параллельном колебательном контуре и связанных контурах.

Некоторые применения теории резонанса. Пассивные и активные электрические фильтры.

2.1.5 Устойчивость состояний равновесия линейных динамических систем – 4 час.

Определение устойчивости равновесного состояния системы. Критерий

устойчивости Русса – Гурвица и Михайлова.

Принцип аргумента. Критерий устойчивости Найквиста.

## 2.2. САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА – 24 часа

1). Расчетно-графическая работа:

«Расчет переходных процессов в линейных электрических цепях операторным методом. Частотные характеристики линейных электрических цепей». Выполнение и защита – 10 ч.

2). Теоретические вопросы:

1. Комплексный метод расчета установившихся режимов.– 2 ч.

2. Резонанс напряжения. Частотные характеристики. – 2 ч.

3. Аппроксимация характеристик нелинейных элементов. – 2 ч.

4. Резонансные явления в индуктивно-связанных контурах. Применение индуктивно-связанных контуров. – 4 ч.

5. Характеристики систем управления. Чувствительность. Точность в установившихся режимах. – 2 ч.

3). Подготовка к зачету – 2ч.

## 2.3. ПЕРЕЧЕНЬ И ТЕМЫ ПРОМЕЖУТОЧНЫХ ФОРМ КОНТРОЛЯ ЗНАНИЙ

Промежуточный контроль знаний студентов по дисциплине предусматривает две контрольные точки в 4 семестре, оценки по которым выставляются на основе информации о посещении лекционных занятий, а также на основе тестирования теоретических знаний, полученных за прошедший период обучения. Предусмотрено тестирование по темам:

1. Временные характеристики колебательных систем второго порядка – 4 семестр, 1-я контрольная точка.

2. Критерии устойчивости линейных колебательных систем – 4 семестр, 2-я контрольная точка.

## ВОПРОСЫ К ЗАЧЕТУ

1. Силы, действующие на материальную точку, совершающую колебательные движения: восстанавливающая, возмущающаяся и сила трения. Кинетическая и потенциальная энергии систем.

2. Характерные признаки любой колебательной системы. Условия возникновения колебаний. Типы колебаний.

3. Идеализированные пассивные элементы электрических схем и их компонентные уравнения. Законы электрических цепей для мгновенных значений.

4. Свойства идеализированного операционного усилителя (ОУ) как схемного элемента. Линейные статические элементы на ОУ.

5. Модели элементов механических систем с линейным перемещением: масса, трение, упругость. Законы Ньютона.



6. Модели элементов механических систем с вращательным движением: момент инерции, трение, скручивающая пружина. Составление уравнений, описывающих вращательное движение.
7. Математическая модель двигателя постоянного тока в виде дифференциального уравнения.
8. Описание динамики электрической цепи или системы с помощью дифференциального уравнения  $n$ -го порядка (модель вход-выход). Запись ДУ в операторной форме с помощью дифференциального оператора. Передаточные функции.
9. Линеаризация характеристик статических элементов.
10. Линеаризация физических систем (линеаризация дифференциальных уравнений).
11. Общее решение линейного ДУ второго порядка с правой частью. Принцип суперпозиции. Начальные условия. Собственные колебания динамических систем.
12. Разряд конденсатора на индуктивную катушку. Три вида разряда.
13. Включение простого колебательного контура под постоянное напряжение. Три вида переходного процесса.
14. Переменные состояния динамической системы.
15. Дифференциальные уравнения состояния. Схемы моделирования.
16. Переходная матрица состояния. Полное решение уравнений состояния с помощью переходной матрицы состояния.
17. Прямое преобразование Лапласа и его свойства (теоремы).
18. Уравнения электрического равновесия электрической цепи в операторной форме.
19. Операторные схемы замещения идеализированных двухполюсных элементов и электрических цепей.
20. Обратное преобразование Лапласа. Теорема разложения. Табличный и программный метод преобразования Лапласа.
21. Решение уравнений состояния операторным методом.
22. Операторные характеристики линейных электрических цепей и систем. Полусно-нулевая диаграмма.
23. Схемы моделирования в переменных состояния: канонические формы управляемости и наблюдаемости.
21. Операторные схемы замещения электрических цепей.
22. Операторный метод расчета переходных процессов в электрических цепях.
23. Активные цепи и системы с обратной связью и их передаточные функции. Связь между передаточной функцией и уравнениями состояния.
24. Структурные схемы. Преобразования структурных схем.
25. Преобразования подобия.
26. Единичные функции и их свойства. Временные характеристики линейных электрических цепей и систем.

27. Применение операторного метода для определения реакции цепи или системы управления на тестовые входные сигналы.
28. Передаточные функции и временные характеристики типовых звеньев систем управления.
29. Показатели качества переходных процессов цепей и систем второго порядка. Требования к временным характеристикам при синтезе.
30. Моделирование электрических цепей и систем с помощью MATLAB.
31. Комплексные частотные характеристики цепей и систем.
32. Логарифмические характеристики цепей и систем.
34. Характеристики систем управления. Чувствительность.
35. Точность в установившихся режимах.
36. Понятие о резонансе в электрических цепях.
37. Резонанс в последовательном колебательном контуре.
38. Резонанс в параллельном колебательном контуре.
39. Резонанс в связанных контурах.
40. Некоторые применения теории резонанса.
41. Пассивные и активные электрические фильтры.
42. Определение устойчивости равновесного состояния системы.
43. Критерий устойчивости Русса – Гурвица.
44. Критерий устойчивости Михайлова.
45. Частотный критерий устойчивости Найквиста. Принцип аргумента.
46. Запасы устойчивости замкнутой системы.

### 3. УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКИЕ МАТЕРИАЛЫ ПО ДИСЦИПЛИНЕ

#### 3.1. ПЕРЕЧЕНЬ ОБЯЗАТЕЛЬНОЙ (ОСНОВНОЙ) ЛИТЕРАТУРЫ

1. Баскаков С.М. Радиотехнические цепи и сигналы. – М.: высшая школа, 2000.
2. В.А. Бессекерский, Е.П. Попов. Теория систем автоматического управления. – Санкт-Петербург, 2004.
3. Никулин Е.А. Основы теории автоматического управления. – Санкт-Петербург, «БХВ-Петербург», 2004.
4. Филипс Ч., Харбор Р. Системы управления с обратной связью. – М.: Лаборатория Базовых Знаний, 2001.
5. Дорф Р., Бишоп Р. Современные системы управления.– М.: Лаборатория Базовых Знаний, 2004.
6. Белецкий А.Ф. Теория линейных электрических цепей: Учебник для вузов. – М.: Радио и связь, 1986. – 544 с. Разделы для углубленного изучения: Глава 10. Временной метод анализа переходных процессов в линейных электрических цепях с сосредоточенными элементами.
7. Попов В.П. Основы теории цепей. – М: Высш. шк., 1985.
8. Сборник задач по теории автоматического регулирования и управления, под редакцией В.А. Бессекерского. – М.: Наука, 1969.

### 3.2. ПЕРЕЧЕНЬ ДОПОЛНИТЕЛЬНОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Андронов А.А., Витт А.А., Хайкин С.Э. Теория колебаний. - Физматгиз, 1959.
2. Бабаков И.М. Теория колебаний. - М.:Наука,1968.
3. Стрелков С.П. Введение в теорию колебаний. – М.:Наука, 1964.

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКАЯ (ТЕХНОЛОГИЧЕСКАЯ) КАРТА ДИСЦИПЛИНЫ  
ТЕОРИЯ КОЛЕБАНИЙ

Номер недели	Номер темы	Вопросы, изучаемые на лекции	Занятия (номера)		Используемые наглядные и метод. пособия	Самостоятельная работа студентов		Формы контроля
			практич. (семина.)	лаборат.		содержание	час.	
1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1	Введение. Задачи теории колебаний. Типы колебательных явлений. Линейные и нелинейные колебательные системы.				Комплексный метод анализа установившихся режимов.	2	Тестирование (1 к.т.), зачет
2	2	Моделирование систем. Модели элементов электрических цепей, элементов механических систем с линейным перемещением и вращательным движением. Модель двигателя постоянного тока..				Резонанс напряжений. Частотные характеристики.	2	Тестирование (1 к.т.), зачет
3	3	Описание динамики электрических цепей и систем с помощью дифференциальных уравнений. Линеаризация статических элементов и физических систем.				Аппроксимация характеристик нелинейных элементов.	2	Тестирование (1 к.т.), зачет
4	4	Переменные состояния динамической системы. Дифференциальные уравнения состояния. Переходная матрица состояния.				Подготовка к тестированию.	2	Тестирование (1 к.т.), зачет
5	5	Прямое преобразование Лапласа и его свойства (теоремы). Уравнения электрического равновесия электрической цепи в операторной форме. Операторные схемы замещения идеализированных двухполюсных элементов и электрических цепей.				Выполнение РГР.	1	Тестирование (1 к.т.), зачет

1	2	3	4	5	6	7	8	9
6	6	Обратное преобразование Лапласа. Теорема разложения. Табличный и программный метод преобразования Лапласа. Решение уравнений состояния операторным методом				Выполнение РГР.	1	Тестирование (1 к.т.), зачет
7	7	Операторные характеристики линейных электрических цепей и систем. Полусно-нулевая диаграмма. Схемы моделирования в переменных состояния.				Выполнение РГР.	1	зачет
8	8	Операторные схемы замещения электрических цепей. Операторный метод расчета переходных процессов в электрических цепях.				Выполнение РГР.	1	зачет
9	9	Активные цепи и системы с обратной связью и их передаточные функции. Связь между передаточной функцией и уравнениями состояния. Структурные схемы. Преобразования структурных схем. Преобразования подобия.				Резонансные явления в индуктивно-связанных контурах.	2	зачет
10	10	Единичные функции и их свойства. Временные характеристики линейных электрических цепей и систем. Применение операторного метода для определения реакции цепи или системы управления на тестовые входные сигналы.				Выполнение РГР.	2	зачет
11	11	Передаточные функции и временные характеристики типовых звеньев систем управления. Показатели качества переходных процессов. Требования к временным характеристикам при синтезе.				Применение индуктивно-связанных контуров.	2	Тестирование (2 к.т.), зачет
12	12	Основы MATLAB. Моделирование электрических цепей с помощью MATLAB.				Выполнение РГР.	1	Тестирование (2 к.т.), зачет

1	2	3	4	5	6	7	8	9
13	13	Комплексные частотные характеристики электрических цепей и систем. Логарифмические характеристики цепей и систем.				Выполнение РГР.	1	Тестирование (2 к.т.), зачет
14	14	Понятие о резонансе в электрических цепях. Резонанс в последовательном колебательном контуре.				Подготовка к защите РГР.	1	Тестирование (2 к.т.), зачет
15	15	Резонанс в параллельном колебательном контуре. Резонанс в связанных контурах.				Защита РГР.	1	зачет
16	16	Некоторые применения теории резонанса. Пассивные и активные электрические фильтры.				Характеристики систем управления. Чувствительность.	1	зачет
17	17	Определение устойчивости равновесного состояния системы. Критерий устойчивости Русса – Гурвица. Критерий устойчивости Михайлова.				Характеристики систем управления. Точность в установившихся режимах	1	зачет
18	18	Частотный критерий устойчивости Найквиста. Принцип аргумента. Запасы устойчивости замкнутой системы.				Подготовка к зачету	2	зачет

## 2. Краткий конспект лекций.

### *Лекция 1*

*Введение.*

- 1). Задачи теории колебаний.*
- 2). Типы колебательных явлений.*
- 3). Линейные и нелинейные колебательные системы.*

### *Лекция 2*

- 1). Моделирование систем. Модели идеализированных пассивных и активных элементов электрических цепей.*
- 2). Модели элементов механических систем с линейным перемещением и вращательным движением.*
- 3). Модель двигателя постоянного тока (сервопривода).*

### *Лекция 3*

- 1). Описание динамики электрических цепей и систем с помощью дифференциальных уравнений  $n$ -го порядка (модель вход-выход).*
- 2). Линеаризация статических элементов.*
- 3). Линеаризация физических систем.*

### *Лекция 4*

- 1). Переменные состояния динамической системы.*
- 2). Дифференциальные уравнения состояния.*
- 3). Переходная матрица состояния.*

### *Лекция 5*

- 1). Прямое преобразование Лапласа и его свойства (теоремы).*
- 2). Уравнения электрического равновесия электрической цепи в операторной форме.*
- 3). Операторные схемы замещения идеализированных двухполюсных элементов.*

## *Лекция 6*

- 1). Обратное преобразование Лапласа. Теорема разложения. Табличный и программный метод преобразования Лапласа.*
- 2). Решение уравнений состояния операторным методом.*

## *Лекция 7*

- 1). Операторные характеристики линейных электрических цепей и систем. Полусно-нулевая диаграмма.*
- 2). Схемы моделирования в переменных состояниях.*

## *Лекция 8*

- 1). Операторные схемы замещения электрических цепей.*
- 2). Операторный метод расчета переходных процессов в электрических цепях.*

## *Лекция 9*

- 1). Активные цепи и системы с обратной связью и их передаточные функции. Связь между передаточной функцией и уравнениями состояния.*
- 2). Структурные схемы. Преобразования структурных схем.*
- 3). Преобразования подобия.*

## *Лекция 10*

- 1). Единичные функции и их свойства. Временные характеристики линейных электрических цепей и систем.*
- 2). Применение операторного метода для определения реакции цепи или системы управления на тестовые входные сигналы.*

## *Лекция 11*

- 1). Передаточные функции и временные характеристики типовых звеньев систем управления.*
- 2). Показатели качества переходных процессов. Требования к временным характеристикам при синтезе.*

## *Лекция 12*

- 1). Основы MATLAB.*



2). Моделирование электрических цепей и систем с помощью MATLAB.

### *Лекция 13*

1). Комплексные частотные характеристики электрических цепей и систем.

2). Логарифмические характеристики цепей и систем.

### *Лекция 14*

1). Понятие о резонансе в электрических цепях.

2). Резонанс в последовательном колебательном контуре.

### *Лекция 15*

1). Резонанс в параллельном колебательном контуре.

2). Резонанс в связанных контурах.

### *Лекция 16*

1). Некоторые применения теории резонанса.

2). Пассивные и активные электрические фильтры.

### *Лекция 17*

1). Определение устойчивости равновесного состояния системы.

2). Критерий устойчивости Русса – Гурвица.

3). Критерий устойчивости Михайлова.

### *Лекция 18*

1). Частотный критерий устойчивости Найквиста. Принцип аргумента.

2). Запасы устойчивости замкнутой системы.

## 3. Самостоятельная работа студентов.

1). Расчетно-графическая работа:

«Расчет переходных процессов в линейных электрических цепях операторным методом. Частотные характеристики линейных электрических цепей». Выполнение и защита – 10 ч.

2). Теоретические вопросы:

1. Комплексный метод расчета установившихся режимов. – 2 ч.

2. Резонанс напряжения. Частотные характеристики. – 2 ч.

3. Аппроксимация характеристик нелинейных элементов. – 2 ч.

4. Резонансные явления в индуктивно-связанных контурах.

Применение индуктивно-связанных контуров. – 4 ч.

5. Характеристики систем управления. Чувствительность. Точность в установившихся режимах. – 2 ч.

3). Подготовка к зачету – 2ч.

## РГР по ТК

### *Переходные процессы в линейных электрических цепях*

**Задание.** В момент времени  $t = 0$  электрическая схема подключается к источнику постоянной ЭДС  $E_0 = 10 \text{ В}$ . Заданы параметры элементов схемы. Требуется выполнить следующий объем расчетов:

1. Составить по заданной схеме операторную схему замещения и определить операторный коэффициент передачи по напряжению  $K_U(p)$ .

2. Определить с помощью операторного коэффициента передачи  $K_U(p)$  реакцию схемы на единичный скачок и единичный импульс, т.е. переходную  $h^1(t)$  и импульсную  $h^\delta(t)$  характеристики выходного напряжения. Построить графики этих характеристик в функции времени. Для определения оригиналов применить теорему разложения.

3. Определить с помощью коэффициента передачи по напряжению  $K_U(p)$  реакцию схемы (выходное напряжение) на импульс  $e(t) := 10e^{-\alpha t}$ , где  $\alpha = |p_{\min}|$  или  $\alpha = \delta$ . Здесь  $p_{\min}$  - меньший по модулю корень характеристического уравнения в случае вещественных и разных корней и  $\delta$  – модуль вещественной части комплексно сопряженных корней  $p_1 = -\delta + j\omega'$  и  $p_2 = -\delta - j\omega'$ . Построить график реакции в функции времени.

4. Определить комплексный коэффициент передачи по напряжению. С этой целью в выражение для операторного коэффициента  $K_U(p)$  вместо  $p$  подставить  $j\omega$ . В полученном выражении выделить модуль и аргумент, вещественную и мнимую части и построить АЧХ, ФЧХ, ВЧХ, МЧХ. АФЧХ. На оси абсцисс применить логарифмический масштаб. Построить ЛАЧХ (диаграмму Боде).

- Примечания.** 1. Номер варианта задается двузначным числом (две последние цифры номера зачетной книжки). Первая цифра этого числа -- номер варианта в таблице параметров, вторая цифра -- номер схемы (рис.1).
2. Графики всех функций можно строить в программе MathCad.
3. Для проверки оригиналов также можно воспользоваться программой MathCad.

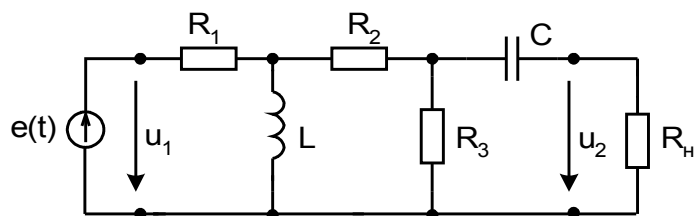


Схема 0

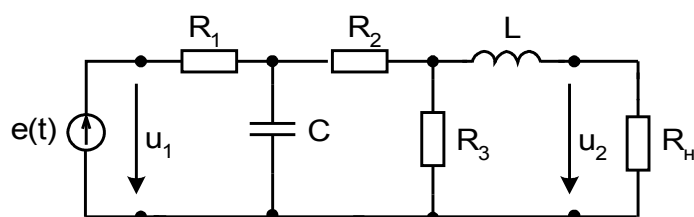


Схема 1

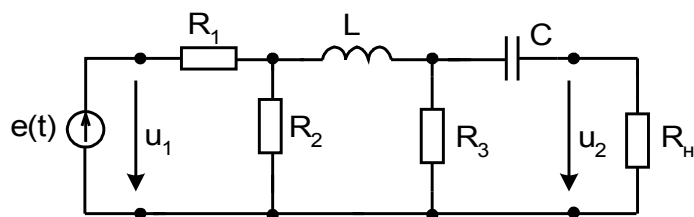


Схема 2

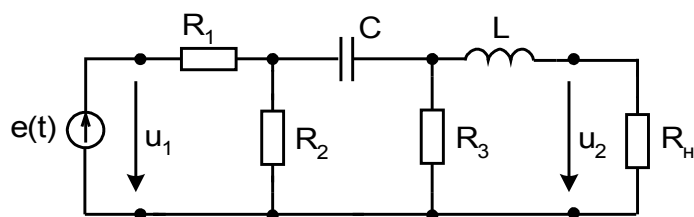


Схема 3

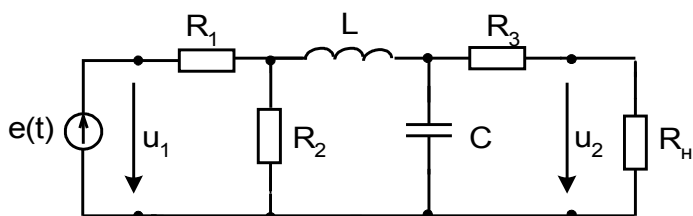


Схема 4

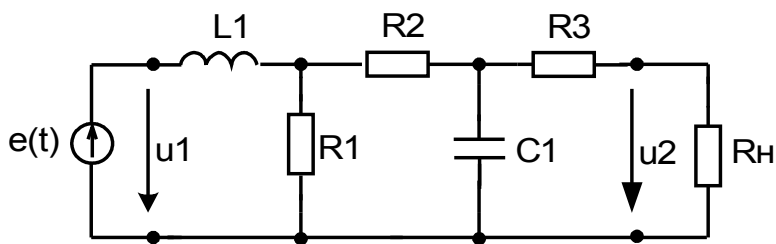


Схема 5

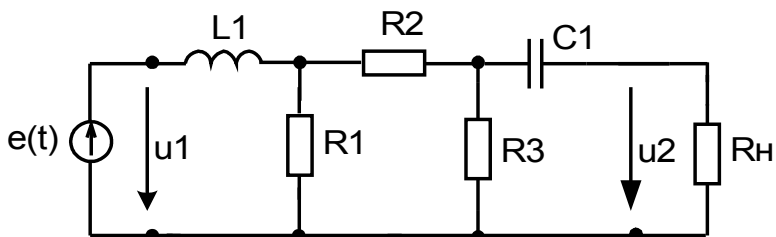


Схема 6

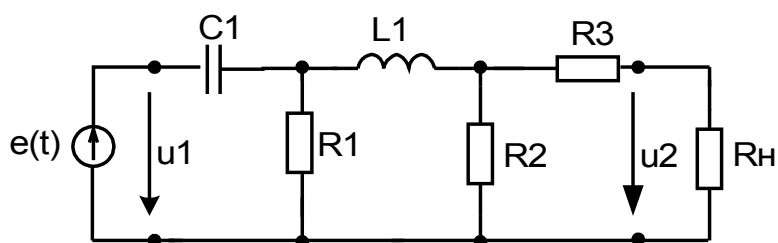


Схема 7

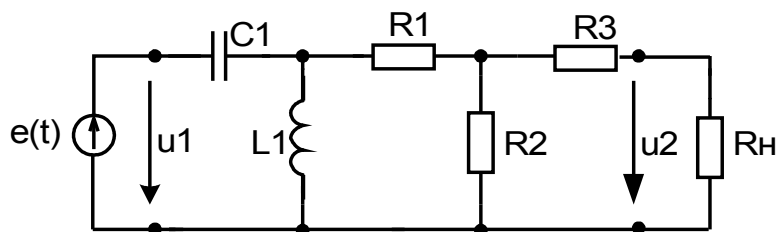


Схема 8

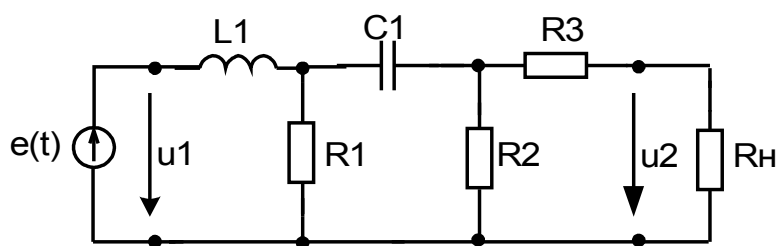


Схема 9

Рис. 1. Схемы электрических цепей

Таблица параметров

Параметры	В А Р И А Н Т Ы									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$R_1, \text{ Ом}$	5	12	10	20	18	12	8	14	10	12
$R_2, \text{ Ом}$	12	5	12,5	10	15	10	10	18	15	15
$R_3, \text{ Ом}$	15	20	5	12,5	12,5	20	15	15	20	10
$R_H, \text{ Ом}$	20	10	15	5	20	12	22	10	22	25
$L, \text{ Гн}$	0,08	0,1	0,12	0,14	0,16	0,18	0,2	0,15	0,17	0,19
$C, \text{ мкФ}$	10	45	20	55	35	15	50	25	40	30

## 1 СИСТЕМА ДВУХ СВЯЗАННЫХ КОНТУРОВ

### 1.1 Цель занятий

При изучении раздела 7 на практических занятиях ставятся следующие основные цели:

1) изучить условия наступления каждого из возможных типов резонансов в связанной системе и основные соотношения между токами, напряжениями, мощностями и сопротивлениями в двухконтурной системе при резонансе, научиться уверенно определять тип резонанса в системе двух связанных контуров по различным исходным условиям;

2) усвоить понятия оптимальной и критической связи;

3) научиться вычислять входное сопротивление системы, токи, напряжения, мощности, выделяемые в контурах, к.п.д., а также фазовые сдвиги между токами и напряжениями как настроенной, так и расстроенной системы при последовательном и параллельном подключении генератора сигнала к первичному контуру;

4) научиться вычислять полосу пропускания системы при разных значениях связи между контурами;

5) усвоить форму АЧХ двухконтурной системы при разных значениях связи между контурами и аргументировано объяснять, какой тип резонанса имеет место в экстремумах резонансных кривых.

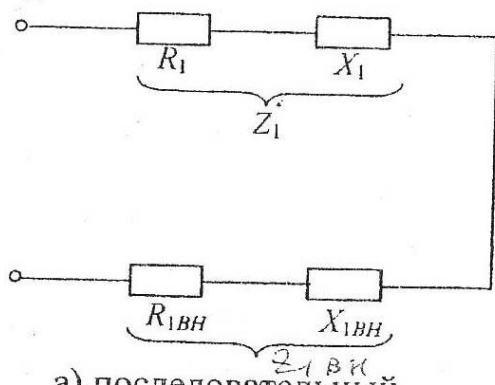
### 1.2 Краткие теоретические сведения

Контуров называются связанными, если электрические процессы в одном из них вызывают электрические процессы в другом, т.е. связанные контуры влияют друг на друга.

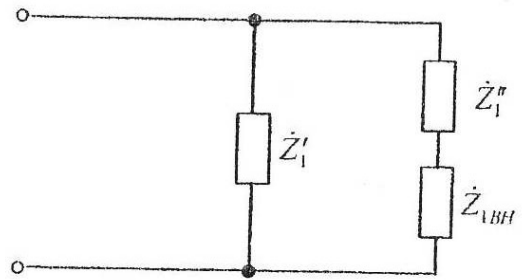
#### 1.2.1 Входное сопротивление системы

По отношению к источнику сигнала система связанных контуров, как всякая электрическая цепь, выступает в качестве двухполюсника. При этом входное сопротивление системы определяется способом подключения генератора сигнала к системе.

На рисунке 7.1 представлены способы подключения генератора сигнала к системе связанных контуров, когда влияние второго контура на первый учтено в виде внесенных сопротивлений, т.е. система представлена в виде одноконтурной схемы замещения.



а) последовательный



б) параллельный

Рисунок 7.1 – Одноконтурные схемы замещения связанной системы при последовательном и параллельном подключении генератора к элементам первого контура

При последовательном подключении генератора

$$\dot{Z}_{BX} = R_{1\text{Э}} + jX_{1\text{Э}} = (R_1 + R_{1BH}) + j(X_1 + X_{1BH}),$$

а при параллельном в общем случае

$$\dot{Z}_{BX} = \frac{\dot{Z}'_1 (\dot{Z}''_1 + \dot{Z}_{1BH})}{\dot{Z}'_1 + \dot{Z}''_1 + \dot{Z}_{1BH}} = \frac{\dot{Z}'_1 (\dot{Z}''_1 + \dot{Z}_{1BH})}{R_{1\text{Э}} + jX_{1\text{Э}}},$$

где  $R_{1\text{Э}}$  и  $X_{1\text{Э}}$  - эквивалентные сопротивления первого контура с учетом влияния второго.

Влияние второго контура на первый учитывается в виде внесенных сопротивлений

$$\dot{Z}_{1BH} = R_{1BH} + jX_{1BH}.$$

Здесь

$$R_{1BH} = \frac{X_{CB}^2}{R_2^2 + X_2^2} \cdot R_2 \quad \text{и} \quad X_{1BH} = - \frac{X_{CB}^2}{R_2^2 + X_2^2} X_2, \quad (7.1)$$

где  $X_{CB}$  - сопротивление связи между контурами,  $X_1$  и  $X_2$  - полные реактивные сопротивления, а

$R_1$  и  $R_2$  - полные сопротивления потерь соответственно первого и второго контуров при их последовательном обходе, независимо от способа подключения генератора сигнала.

Примеры расчета входного сопротивления приводятся в пункте 7.3.2.

### 7.2.2 Виды резонансов

В системе двух связанных контуров резонанс, как и в любой электрической цепи, сопровождается условием

$$X_{BX}(\omega_{p.сист}) = 0 \quad \text{или} \quad X_{1\partial} = X_1 - \frac{X_{CB}^2}{R_2^2 + X_2^2} \cdot X_2 \Big|_{\omega_{p.сист}} = 0. \quad (7.2)$$

При этом состояние резонанса может соответствовать либо обоим настроенным контурам ( $X_1 = 0$  и  $X_2 = 0$ ), либо обоим расстроенным контурам ( $X_1 \neq 0$  и  $X_2 \neq 0$ ). Резонанс в системе невозможен, когда один контур настроен, а другой - расстроен. Возможные резонансы в двухконтурной системе представлены в таблице 7.1.

Таблица 7.1 - Резонансы в системе двух связанных контуров

	Вид резонанса	$X_{BX}$	$X_1$	$X_2$	Связь
Оба контура настроены	индивидуальный	0	0	0	не оптимальная
	полный	0	0	0	$X_{CB.опт.пол} = \sqrt{R_1 \cdot R_2}$
Оба контура расстроены	частный	0	$\neq 0$	$\neq 0$	не оптимальная
	сложный	0	$\neq 0$	$\neq 0$	$X_{CB.опт.сл} =  \dot{Z}_2  \cdot \sqrt{\frac{R_1}{R_2}} =  \dot{Z}_1  \cdot \sqrt{\frac{R_2}{R_1}}$

Резонансы полный и сложный называются оптимальными, т.к. соответствуют оптимальной связи (см.п.7.2.5.). При этом, несмотря на то, что

$$X_{CB.опт.пол} < X_{CB.опт.сл},$$

при обоих значениях оптимальной связи



$$R_{1BH} = R_1 \quad \text{или} \quad R_{2BH} = R_2. \quad (7.3)$$

Выражение (7.2) при оптимальных связях вырождается в

$$X_{1\Omega} = X_1 - \frac{R_1}{R_2} \cdot X_2 = 0. \quad (7.4)$$

Последнее соотношение существенно упрощает расчеты при сложном резонансе, при полном резонансе выражение (7.4) практического значения не имеет.

### 4.2.3 Токи системы при разных способах ее подключения к генератору сигнала

При последовательном подключении генератора с э.д.с.  $E$  к первому контуру для любого из четырех видов резонанса токи в контурах определяются в самом общем случае как:

$$I_{1p} = \frac{E}{R_1 + R_{1BH}}, \quad I_{2p} = I_{1p} \cdot \frac{X_{CB}}{|Z_2|}, \quad (7.5)$$

а в частном случае любого из оптимальных резонансов эти токи принимают значения:

$$I_{1p.opt} = \frac{E}{2 \cdot R_1}, \quad I_{2p.opt} = I_{2p.max} = \frac{E}{2\sqrt{R_1 \cdot R_2}}. \quad (7.6)$$

Ток во втором контуре достигает максимально возможной для данной системы величины.

При параллельном подключении генератора к связанной системе токи в контурах можно рассчитывать по формулам (7.5) и (7.6), если параллельное подключение пересчитать в последовательное по методу эквивалентного генератора (рисунок 7.7). В противном случае, т.е. без пересчета, следует рассчитать ток в параллельном (первом) контуре так, как это сделали бы в *одиночном* параллельном контуре и затем вычислить второй ток как

$$I_2 = I_1 \cdot \frac{X_{CB}}{|Z_2 + Z_{2BH}|}. \quad (7.7)$$

При этом способе расчета взаимное влияние контуров удобнее учитывать путем внесения сопротивлений  $R_{2BH}$  и  $X_{2BH}$  во второй контур.

### 1.2.4 Энергетические соотношения

Мощности, выделяемые в первом и втором контурах, определяются как:

$$P_1 = I_1^2 \cdot R_1 = \frac{I_{1m}^2}{2} \cdot R_1, \quad (7.8)$$

$$P_2 = I_2^2 \cdot R_2 = I_1^2 \cdot R_{1BH}, \quad (7.9)$$

а коэффициент полезного действия системы как

$$\eta = \frac{P_2}{P_1 + P_2} = \frac{R_{1BH}}{R_1 + R_{1BH}}. \quad (7.10)$$

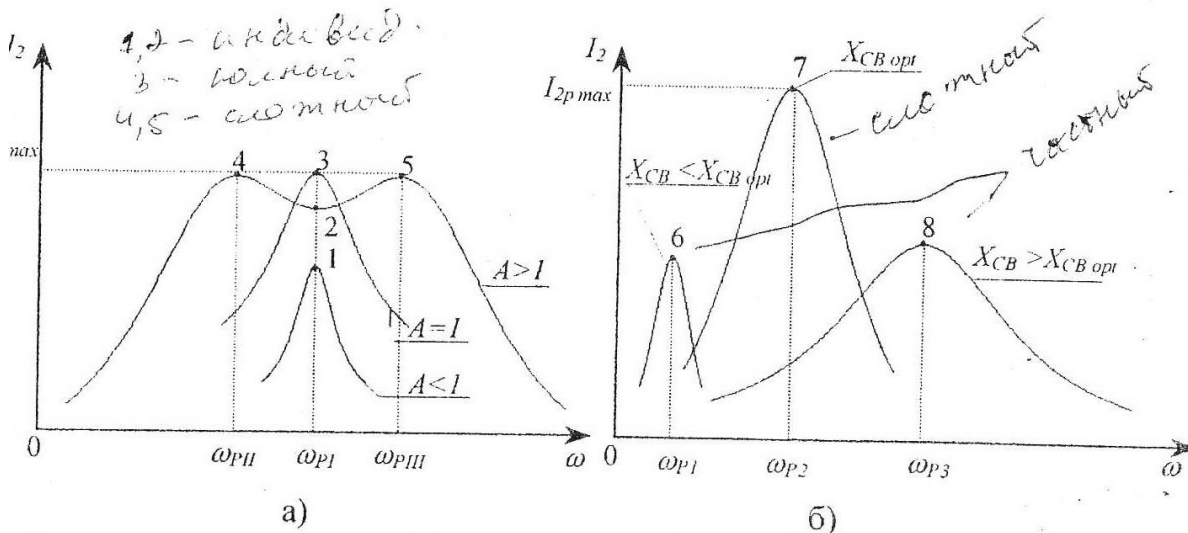
При оптимальной связи к.п.д. принимает значение  $\eta = 50\%$ , а мощность во втором контуре достигает наибольшего значения:

$$P_{2\max} = \frac{E^2}{4 \cdot R_1} = \frac{E_m^2}{8 \cdot R_1}, \quad (7.11)$$

где  $E_m$  - амплитуда э.д.с. генератора напряжения, включенного в первый контур последовательно.

### 1.2.5 Резонансные кривые. Понятие оптимальной и критической связи

На рисунке 7.2 изображены резонансные кривые тока во втором контуре при разных значениях связи между контурами для разных типов двухконтурной системы.



а) резонансные кривые  $I_2(\omega)$  в системе двух одинаковых колебательных контуров; б) резонансные кривые  $I_2(\omega)$  в двухконтурной системе из колебательного и апериодического  $RL$ -контура

Рисунок 7.2 - Резонансные кривые двухконтурной системы

На рисунке 7.2.а величина связи обозначена через фактор или параметр связи  $A$ .

$$A = k \cdot \sqrt{Q_1 \cdot Q_2}.$$

Если контуры, входящие в систему одинаковы, т.е.  $Q_1 = Q_2$ ,  $R_1 = R_2$ , то

$$A = k \cdot Q = \frac{k}{d} = \frac{X_{CB}}{R_1} = \frac{X_{CB}}{R_2},$$

где  $Q$  - добротность контура,

$d$  - затухание контура,  $d = \frac{1}{Q}$ ,

$k$  - коэффициент связи между контурами;

в частном случае трансформаторной связи:

$$k = \frac{X_{CB}}{\sqrt{X_{L1} \cdot X_{L2}}} = \frac{M}{\sqrt{L_1 \cdot L_2}}.$$

В системе с апериодическим контуром (пусть это будет второй контур)  $X_2 \neq 0$  для всех частот, кроме  $\omega = 0$  (или  $\omega = \infty$  для апериодического  $RC$ -контура). В соответствии с условием (7.2) резонанс в системе возможен лишь на одной частоте, а в соответствии с таблицей 7.1 лишь частный (точки 6 и 8 на рисунке 7.2.б) или сложный (точка 7), когда ток достигает наибольшего значения.

В системе с одинаковыми колебательными контурами (а также, если контуры имеют одинаковые резонансные частоты, но разные добротности  $Q_1$  и  $Q_2$ ) возможны все виды резонансов. На частоте  $\omega_{PI}$  оба контура настроены и может иметь место как индивидуальный резонанс (точки 1 и 2 на рисунке 7.2.а), так и полный резонанс (точка 3). На частотах  $\omega_{PII}$  и  $\omega_{PIII}$  оба контура расстроены, однако ток достигает наибольшего значения, т.е. имеет место сложный резонанс (точки 4 и 5). Таким образом, в зависимости от величины связи в системе возможно различное число резонансных частот и различные типы резонансов.

Понятие "критическая связь" связано с числом резонансных частот в системе. При связи критической ( $A=1$ ) и ниже критической ( $A<1$ ) (см. рисунок 7.2.а) в системе из двух колебательных контуров резонанс имеет место на единственной частоте  $\omega_{PI}$ . При связи выше критической ( $A>1$ ) в такой системе резонанс имеет место на трех частотах. Резонансные час-

тоги  $\omega_{PI}$  и  $\omega_{PII}$  называются частотами связи и при идентичных контурах вычисляются следующим образом:

$$\omega_{PI,II} = \frac{\omega_p}{\sqrt{1 \pm \frac{1}{Q} \cdot \sqrt{A^2 - 1}}}. \quad (7.12)$$

К двухконтурной системе из колебательного и апериодического контуров понятие критической связи не применимо.

Понятие “оптимальная связь” связано с величиной второго или выходного тока. При оптимальной связи ток и, следовательно, напряжение и мощность во втором контуре достигают наибольших возможных значений. Оптимальная связь имеет место в точках 3,4,5 и 7 резонансных кривых рисунка 7.2.

Понятие критической и оптимальной связи совпадают лишь при полном резонансе - точка 3 на рисунке 7.2.

#### 1.2.6 Полоса пропускания системы

Обозначим относительную полосу пропускания через  $S_0$

$$S_0 = \frac{2\Delta\omega_{II}}{\omega_p} = \frac{2\Delta f_{II}}{f_p}$$

и введем дополнительные индексы: для системы -  $S_{OC}$ , для одиночного контура -  $S_{OK}$ . Расчетные соотношения для полосы пропускания системы из двух колебательных контуров зависят от величины связи. Если контуры идентичны, то

$$S_{OC} = d\sqrt{A^2 - 1 + \sqrt{2(1 + A^4)}} \quad \text{при } A \leq 1, \quad (7.13)$$

$$S_{OC} = d\sqrt{A^2 - 1 + 2 \cdot A} \quad \text{при } A \geq 1. \quad (7.14)$$

При критической связи ( $A=1$ )  $S_{OC} = \sqrt{2} \cdot d$ , т.е.

$$S_{OC} \approx 1,41 \cdot S_{OK}.$$

Наибольшую возможную полосу пропускания система из двух колебательных контуров имеет при факторе связи  $A=2,41$ :

$$S_{OC, \max} = 3,1 \cdot d = 3,1 \cdot S_{OK}.$$

Для системы из колебательного и апериодического контура, полоса пропускания определяется как  $S_{OC} \approx \frac{1}{Q_{\Sigma}}$ , где  $Q_{\Sigma}$  - добротность колебательного контура с учетом внесенных сопротивлений из апериодического. Если первый контур колебательный с параметрами  $L_1, C_1, R_1$ , а второй - апериодический с параметрами  $L_2, R_2$ , то

$$Q_{\Sigma} = \frac{\rho_{1\Sigma}}{R_{1\Sigma}},$$

где  $R_{1\Sigma} = R_1 + R_{1BH}$ ,

$$\rho_{1\Sigma} = \omega_{PC} \cdot (L_1 - L_{1BH}) = \frac{1}{\omega_{PC} C_1}.$$

Полоса пропускания двухконтурной системы увеличивается при увеличении связи между контурами, что хорошо видно на рисунке 7.2.

### §2.7 Фазовые соотношения в связанной системе

В основе расчета любых фазовых соотношений связанной системы лежат общие выражения для токов, записанные в комплексной форме.

$$\dot{I}_1 = \frac{\dot{E}}{\dot{Z}_{1\Sigma}}, \quad (7.16)$$

$$\dot{I}_2 = \dot{I}_1 \cdot \frac{\pm jX_{CB}}{\dot{Z}_2} = \frac{\dot{E}}{\dot{Z}_{1\Sigma}} \cdot \frac{\pm jX_{CB}}{\dot{Z}_2}, \quad (7.17)$$

где  $\dot{Z}_{1\Sigma} = \dot{Z}_{BX} = \dot{Z}_1 + \dot{Z}_{1BH}$  есть полное входное сопротивление системы при последовательном ее подключении к генератору сигнала. Падение напряжения на любом участке схемы выражается по закону Ома в комплексной форме через токи  $\dot{I}_1$  и  $\dot{I}_2$ .

Фазовый сдвиг между любыми двумя электрическими величинами находится по известным правилам работы с комплексными выражениями (см. разделы 3 и 4).

Например, фазовый сдвиг между  $\dot{I}_1$  и  $\dot{E}$ .

$$\varphi_1 = \text{Arg}\left(\frac{\dot{I}_1}{\dot{E}}\right) = -\text{Arg}(\dot{Z}_{13}),$$

фазовый сдвиг между  $\dot{I}_2$  и  $\dot{E}$

$$\varphi_2 = \text{Arg}\left(\frac{\dot{I}_2}{\dot{E}}\right) = \pm 90^\circ - [\text{Arg}(\dot{Z}_{13}) + \text{Arg}(\dot{Z}_2)],$$

фазовый сдвиг между  $\dot{U}_{C2}$  и  $\dot{E}$

$$\varphi_3 = \text{Arg}\left(\frac{\dot{U}_{C2}}{\dot{E}}\right) = \varphi_2 - 90^\circ$$

т.к.  $\dot{U}_{C2} = \dot{I}_2 \cdot \frac{1}{j\omega C_2}$ .

### 4.3 Методические указания к решению задач и примеры

#### 4.3.1 Определение типа резонанса

Прежде чем решать любую задачу по изучаемой теме, надо ответить на вопрос находится система в резонансе или нет и, если находится, то установить тип резонанса в соответствии с условиями таблицы 7.1.

Примеры определения типа резонанса по некоторым исходным данным.

**Пример 1.** Система состоит из двух настроенных на частоту генератора контуров и имеет к.п.д. 60%.

Т.к. каждый контур настроен (подразумевается, что каждый контур колебательный), то  $X_1 = 0$  и  $X_2 = 0$ ; значит, в системе уже имеет место индивидуальный резонанс. Если бы связь была оптимальной, то  $\eta = 50\%$  и в системе имел бы место полный резонанс. В соответствии с заданными условиями  $\eta = 60\%$ , т.е. связь больше оптимальной, и система настроена в индивидуальный резонанс.

**Пример 2.** Система состоит из колебательного и апериодического контуров и настроена в резонанс. Известно, что э.д.с., включенная в первый контур,  $E_m = 10$  В, сопротивления  $R_1 = 10$  Ом,  $R_2 = 1$  кОм, а амплитуда тока во втором контуре 10 мА.

Т.к. один из контуров (пусть второй - это не имеет значения) апериодический, то  $X_2 \neq 0$ ; но система в резонансе, т.е.  $X_{12} = X_1 - \frac{X_{CB}^2}{|Z_2|^2} \cdot X_2 = 0$

следовательно,  $X_1 \neq 0$ .

При таких условиях возможен либо частный, либо сложный резонанс. Если в системе сложный резонанс, то амплитуда тока во втором контуре должен быть максимально возможной

$$I_{2P_{\max}} = \frac{E_m}{2\sqrt{R_1 \cdot R_2}} = \frac{10}{2\sqrt{10 \cdot 10^3}} = 50 \text{ мА.}$$

В соответствии с условиями задачи ток во втором контуре меньше максимально возможного, поэтому в системе имеет место частный резонанс.

**Пример 3.** Система состоит из двух колебательных контуров; в системе имеет место оптимальный резонанс. Известно, что частота генератора  $10^6$  рад/с,  $L_1 = 500$  мкГн,  $C_1 = 500$  пФ.

В системе имеет место либо полный, либо сложный резонанс. Если  $X_1 = 0$  или  $\omega_{P1} = \omega_r$ , то в системе полный резонанс (см. таблицу 7.1)

$$\omega_{P1} = \frac{1}{\sqrt{L_1 C_1}} = \frac{1}{\sqrt{500 \cdot 10^{-6} \cdot 500 \cdot 10^{-12}}} = 2 \cdot 10^6 \text{ рад/с} \neq \omega_r.$$

Установлено, что первый контур расстроен относительно частоты питающего генератора  $X_1 \neq 0$ , следовательно, и  $X_2 \neq 0$  (в противном случае резонанс в системе невозможен вообще!).

Таким образом, система находится в сложном резонансе.

**Пример 4.** Система находится в резонансе; ее параметры:

$$X_1 = +100 \text{ Ом}, R_1 = 20 \text{ Ом}, X_2 = +250 \text{ Ом}, K_2 = 50 \text{ Ом.}$$

Т.к.  $X_1 \neq 0$  и  $X_2 \neq 0$ , то возможен либо частный, либо сложный резонанс. Если в системе любой из оптимальных резонансов, то выполняется условие (7.4):

$$X_{12} = 100 - \frac{20}{50} (+250) = 0.$$

Следовательно, связь оптимальная и система настроена в сложный резонанс.

### 1.3.2 Определение входного сопротивления системы

Общая методика состоит в следующем. Влияние второго контура на первый учитывается в виде внесенных сопротивлений, после чего второй контур “как бы не существует”. Входное сопротивление системы рассчитывается как у обычного одиночного контура в зависимости от способа подключения источника (см. рисунок 7.1).

**Пример 5.** Определить входное сопротивление системы (рисунок 7.3), если сопротивления отдельных участков цепи на некоторой частоте  $f$  на схеме указаны в омах.

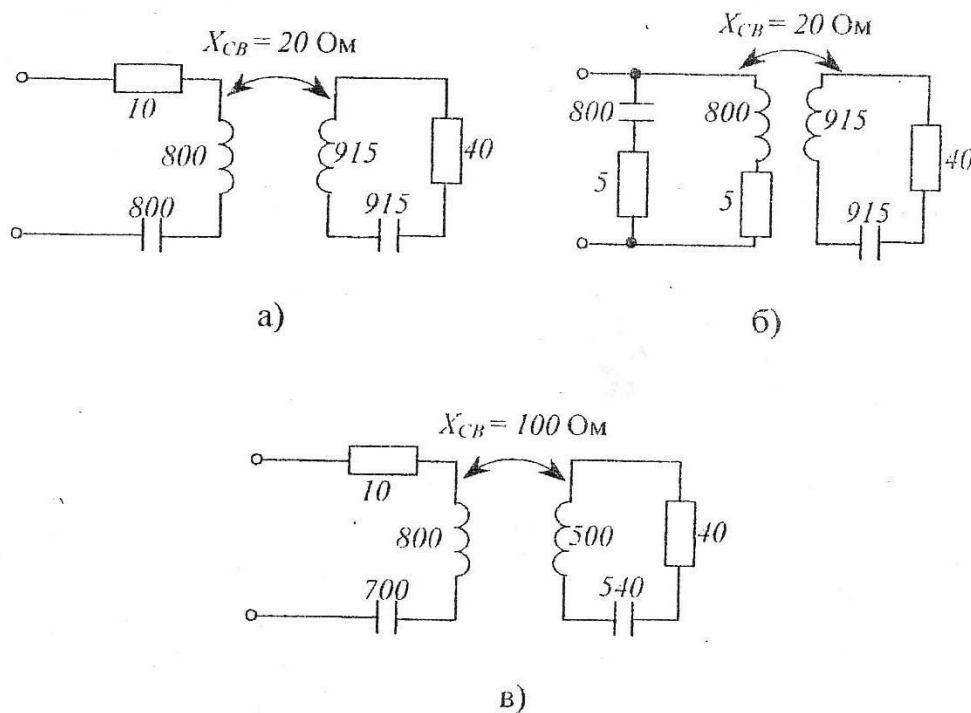


Рисунок 7.3 - Схемы связанных систем

Система (см. рисунок 7.3.а) в резонансе, т.к.  $X_1 = 0$  и  $X_2 = 0$ . Это либо индивидуальный, либо полный резонанс в зависимости от величины связи.

$$X_{CB.opt} = \sqrt{R_1 \cdot R_2} = \sqrt{10 \cdot 40} = 20 \text{ Ом.}$$

Так как связь оказалась оптимальной, то в системе полный резонанс и в соответствии с (7.3)



$$R_{1BH} = R_1 = 10 \text{ Ом}; \quad X_{1BH} = 0, \quad \text{т.к. } X_2 = 0.$$

Входное сопротивление системы

$$Z_{BX}(\omega_p) = R_{BX} = R_1 + R_{1BH} = 10 + 10 = 20 \text{ Ом.}$$

В системе (см. рисунок 7.3.б) также полный резонанс, т.к.  $X_1=0$ ;  $X_2=0$ ,  $X_{CB} = 20 \text{ Ом} = X_{CB \text{ opt}}$ . Влияние второго контура на первый:

$$X_{1BH} = 0, \quad \text{т.к. } X_2 = 0; \quad R_{1BH} = R_1 = 10 \text{ Ом, так как связь оптимальная.}$$

Входное сопротивление системы определяется как сопротивление параллельного контура на резонансе

$$Z_{BX}(\omega_p) = R_p = \frac{(X'_{1p})^2}{R_{1\text{Э}}} = \frac{(X''_{1p})^2}{R_1 + R_{1BH}} = \frac{800^2}{10 + 10} = 32 \text{ кОм.}$$

Обратите внимание на существенное различие в величинах входного сопротивления (20 Ом и 32 кОм) в зависимости от способа подключения источника к системе с одними и теми же параметрами (см. свойства последовательного и параллельного контуров).

В системе (см. рисунок 7.3.в) при указанных параметрах наступление резонанса вообще невозможно, т.к. контуры расстроены и имеют сопротивления разного знака (характера):  $X_1 = +100 \text{ Ом}$ ,  $X_2 = -40 \text{ Ом}$ .

В соответствии с выражениями (7.1)

$$R_{1BH} = \frac{100^2}{40^2 + (-40)^2} \cdot 40 = 125 \text{ Ом,}$$

$$X_{1BH} = -\frac{100^2}{40^2 + (-40)^2} \cdot (-40) = +125 \text{ Ом.}$$

$$R_{BX} = R_{1\text{Э}} = R_1 + R_{1BH} = 10 + 125 = 135 \text{ Ом,}$$

$$X_{BX} = X_{1\text{Э}} = X_1 + X_{1BH} = 100 + 125 = 225 \text{ Ом,}$$

$$Z_{BX} = R_{BX} + jX_{BX} = (135 + j225) \text{ Ом.}$$

### 1.3.3 Определение полосы пропускания системы

Во всех задачах, связанных с полосой пропускания системы связанных колебательных контуров, главным является вопрос, какова связь между контурами - выше или ниже критической. От этого зависит выбор расчетных формул (см. п. 7.2.6).

**Пример 6.** Два одинаковых связанных контура имеют добротности, равные 100, резонансные частоты, равные  $10^7$  рад/с; частота генератора  $10^7$  рад/с, полоса пропускания системы 40 кГц. Определить какова связь, выше или ниже критической.

Сравним относительные полосы пропускания системы и одиночного контура, входящего в нее:

$$S_{OK} = \frac{1}{Q} = 0,01,$$

$$S_{OC} = \frac{2\Delta\omega_{\Pi}}{\omega_p} = \frac{40 \cdot 10^3 \cdot 2\pi}{10^7} = 0,0251.$$

**Примечание:** обратите внимание на размерность частоты!

Частота генератора задана как  $\omega$  в рад/с, а полоса как  $2\Delta f_{\Pi}$  в кГц.

При  $A = 1$   $S_{OC} = 0,01 \cdot 1,41 = 0,0141$ , а в нашем случае больше, т.е. связь выше критической. В то же время  $S_{OC} = 0,025$  не превышает максимально возможного значения полосы  $S_{OC\max} = 3,1 \cdot d$ , значит  $1 < A < 2,41$ .

### 1.3.4 Пример решения типовой задачи

Система двух одинаковых трансформаторно связанных колебательных контуров настроена в резонанс с источником э.д.с.  $e(t) = 40 \cdot \cos 10^6 \cdot t$  В, включенным в первый контур последовательно. При этом ток во втором контуре  $I_{m2} = 400$  мА. Параметры контуров:  $L_1 = 0,5$  мГн,  $C_1 = 2000$  пФ,  $R_1 = 30$  Ом.

Установить тип резонанса на частоте источника, ответ пояснить. Изобразить примерный график  $I_2(\omega)$  при заданных параметрах.

**Вычислить:**

- 1) при каком значении взаимной индукции  $M$  между контурами амплитуда тока во втором контуре равна заданному значению;
- 2) к.п.д. системы и мощность, выделяемую во втором контуре;
- 3) полосу пропускания системы.

**Решение:**

1) установим тип резонанса:

$$\omega_{P2} = \omega_{P1} = \frac{1}{\sqrt{L_1 C_1}} = \frac{1}{\sqrt{0,5 \cdot 10^{-3} \cdot 2000 \cdot 10^{-12}}} = 10^6 \text{ рад/с} = \omega_f,$$

т.е. оба контура настроены на частоту генератора ( $X_1 = 0$  и  $X_2 = 0$ ); амплитуда тока при оптимальной связи

$$I_{2P \max} = \frac{E_m}{2\sqrt{R_1 \cdot R_2}} = \frac{E_m}{2R_1} = \frac{40}{2 \cdot 30} = 666,6 \text{ мА},$$

а заданная амплитуда  $I_{m2}$  только 400 мА.

Таким образом, в системе имеет место индивидуальный резонанс. При этом в общем случае возможна связь и ниже и выше критической. Проанализируем наши данные: при связи выше критической на частоте генератора  $I_{m2}$  не может уменьшиться более, чем в  $\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot I_{2P \max}$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot I_{2P \max} = \frac{666,6}{\sqrt{2}} = 471,3 \text{ мА},$$

следовательно, в системе индивидуальный резонанс при связи ниже критической. Примерный график  $I_2(\omega)$  показан на рисунке 7.4 сплошной линией. Для сравнения на этом же рисунке пунктиром изображен ток при максимально возможной связи  $A = 2,41$ .

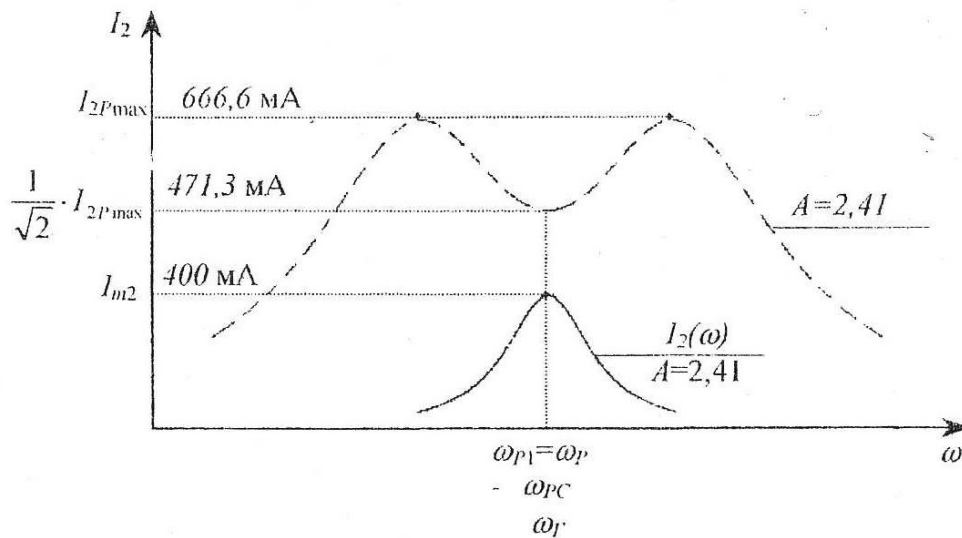


Рисунок 7.4 - Частотная характеристика тока во втором контуре

2) найдем  $X_{CB}$ , при котором  $I_{m2} = 400$  мА.

При индивидуальном резонансе ток во втором контуре:

$$I_{m2} = \frac{E_m}{R_1 + R_{1BH}} \cdot \frac{X_{CB}}{R_2} = \frac{E_m \cdot X_{CB}}{R_1 \cdot R_2 + X_{2CB}^2} = \frac{E_m \cdot X_{CB}}{R_1^2 + X_{CB}^2}$$

$$0,4 = \frac{40 \cdot X_{CB}}{30^2 + X_{CB}^2}, \text{ откуда}$$

$$X_{CB1} = 10 \text{ Ом}, X_{CB2} = 90 \text{ Ом}.$$

Оптимальное значение  $X_{CB \text{ opt}} = \sqrt{R_1 R_2} \doteq R_1 = 30$  Ом соответствует фактору связи  $A=1$ . Соответственно  $X_{CB}=10$  Ом - фактору связи  $A=1/3$ , а  $X_{CB} = 90$  Ом - фактору связи  $A=3$ . Последнее значение превышает максимально допустимое ( $A=2,41$ ) и поэтому отбрасывается.

Итак,  $X_{CB} = 10$  Ом, связь ниже критической, что полностью соответствует первому пункту решения.

$$X_{CB} = \omega \cdot M, \text{ откуда } M = \frac{X_{CB}}{\omega} = \frac{10}{10^6} = 10 \text{ мкГн};$$

3) вычислим к.п.д. и мощность  $P_2$

$$\eta = \frac{R_{1BH}}{R_1 + R_{1BH}} = \frac{\frac{X_{CB}^2}{R_2}}{R_1 + \frac{X_{CB}^2}{R_2}} = \frac{X_{CB}^2}{R_1^2 + X_{CB}^2} = \frac{10^2}{30^2 + 10^2} = 0,1$$

$$P_2 = \frac{I_{m2}}{2} \cdot R_2 = \frac{(0,4)^2}{2} \cdot 30 = 2,4 \text{ Вт}$$

4) определим полосу пропускания системы

Т.к. связь ниже критической, то относительная полоса определяется по формуле (7.13).

$$S_{OC} = d \sqrt{A^2 - 1 + \sqrt{2(1 + A^4)}},$$

где  $d = \frac{R}{\omega_p L}$ ,  $R = R_1 = R_2$ ,  $L = L_1 = L_2$ .

$$2\Delta\omega_{II} = \frac{R}{L} \sqrt{A^2 - 1 + \sqrt{2(1 + A^4)}} = \frac{30}{0,5 \cdot 10^{-3}} \sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^2 - 1 + \sqrt{2\left(1 + \left(\frac{1}{3}\right)^4\right)}} = 4,385 \cdot 10^4 \text{ рад/с,}$$

$$2\Delta f_{II} = \frac{2\Delta\omega_{II}}{6,28} = \frac{4,385 \cdot 10^4}{6,28} = 6,98 \text{ кГц.}$$

Ответ: 10 мкГн; 0,1; 2,4 Вт; 6,98 кГц.

#### 1.4 Задачи для самостоятельной работы

Первые семь упражнений и задач рекомендуются для общего разбора на занятиях с целью усвоения основных положений изучаемой темы и знакомства с типовыми задачами. Остальные задачи этого раздела используются для самостоятельной работы в аудитории и индивидуальных домашних заданий, наиболее простыми из них являются задачи 7.4.8-7.4.21.

7.4.1. Определить тип резонанса из следующих условий:

- 1) система настроена в резонанс и состоит из двух колебательных контуров, параметры первого контура  $C_1 = 500$  пФ,  $L_1 = 500$  мкГн, частота питающего генератора  $2 \cdot 10^6$  рад/с, связь оптимальная;
- 2) сохраняется предыдущее условие за исключением частоты генератора,  $\omega_r = 10^6$  рад/с;
- 3) в системе из двух колебательных контуров оба контура настроены на частоту генератора, а связь такова, что к.п.д. системы 40%;
- 4) в системе из двух колебательных контуров каждый контур настроен на частоту входного сигнала, а связь такова, что мощность во втором контуре в два раза больше мощности в первом ( $P_2 = 2P_1$ );
- 5) система из колебательного и апериодического контуров настроена в резонанс и имеет  $R_{1BH} = R_1$ ;
- 6) возможен ли в системе резонанс и какого типа, если  $f_{P1} = 500$  кГц,  $f_{P2} = 510$  кГц, а частота питающего генератора  $f$  равна:
  - а) 500 кГц, б) 520 кГц, в) 505 кГц, г) 510 кГц?

7.4.2. Вычислить входное сопротивление систем, изображенных на рисунке 7.5, на некоторой частоте  $f$ , если известно, что на этой частоте отдельные участки цепи имеют сопротивления, указанные на схеме в омах.

Является ли частота  $f$ -резонансной? Каков тип резонанса? Как изменится  $Z_{ВХ}$  системы (см. рисунок 7.5.а), если связь сделать оптимальной?

С каким входом (последовательным или параллельным) следует использовать систему связанных контуров в качестве нагрузки генератора:

а) с низкоомным внутренним сопротивлением, б) с высокоомным внутренним сопротивлением?

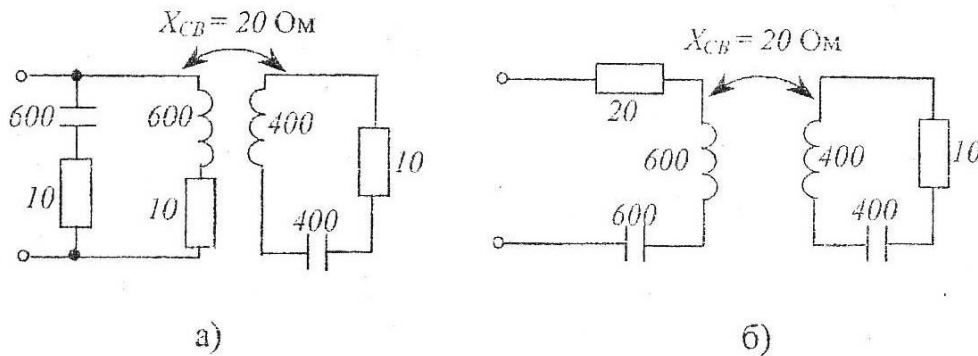


Рисунок 7.5 - Системы связанных контуров при разных способах подключения источника сигнала

7.4.3. Параметры системы, изображенной на рисунке 7.6, следующие:  $E_m = 10$  В,  $L_1 = 10$  мкГн,  $L_2 = 50$  мкГн,  $R_1 = 20$  Ом,  $R_H = 500$  Ом. Частота питающего генератора  $10^7$  рад/с. В системе имеет место “оптимальный” резонанс. Определить:

- 1) какой из “оптимальных” резонансов возможен в данной системе и почему;
- 2) значения  $M$  и  $C_1$  таким образом, чтобы ток во втором контуре достигал максимально возможного значения;
- 3) значение мощности, выделяемой во втором контуре;
- 4) каков к.п.д. системы при вычисленных значениях  $M$  и  $C_1$ ;
- 5) какова мощность в первом контуре;
- 6) относительную полосу пропускания системы;
- 7) изобразить качественный характер зависимости  $I_2(\omega)$ , отметить на графике взаимное расположение резонансных частот системы  $\omega_{rc}$  и первого контура  $\omega_{p1}$ .

Ответ: 14,14 мкГн; 1250 пФ; 625 мВт; 0,5; 625 мВт; 0,5.

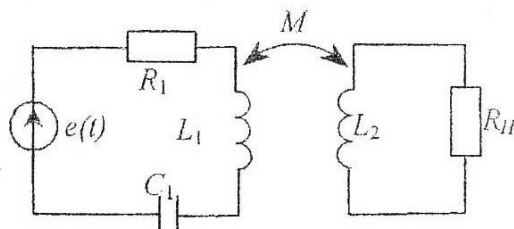


Рисунок 7.6 - Система связанных контуров с апериодическим контуром

7.4.4. Система, состоящая из двух одинаковых колебательных контуров с  $Q = 100$ , настроена на частоту 1 МГц и имеет полосу пропускания 30 кГц. Изобразить характер  $I_2(\omega)$ , соответствующий заданным условиям.

7.4.5. В системе из двух одинаковых колебательных контуров  $Q_1=Q_2=50$ . При каком коэффициенте связи  $k$  ширина полосы пропускания системы окажется равной ширине полосы пропускания одного отдельно взятого контура.

Ответ: 1,34%

7.4.6. Система состоит из двух одинаковых колебательных контуров (рисунок 7.7.а):  $\rho_1 = \rho_2 = 200$  Ом,  $R_1 = R_2 = 2$  Ом,  $f_{p1} = f_{p2} = 2 \cdot 10^6$  Гц,  $E = 600$  В,  $R_i = 40$  кОм. Определить:

- 1) коэффициент связи  $k$  между контурами, при котором ток во втором контуре будет иметь максимальное значение при частоте питания  $2 \cdot 10^6$  Гц;
- 2) значение этого тока;
- 3) полосу пропускания системы без учета влияния генератора сигнала;
- 4) каков характер влияния генератора на полосу пропускания системы.

**Примечание:** ток второго контура вычислить двумя способами - непосредственно по схеме рисунка 7.7.а и путем пересчета параллельно включенного генератора в последовательно включенный (рисунок 7.7.б) по методу эквивалентного генератора (см. п.7.2.3).

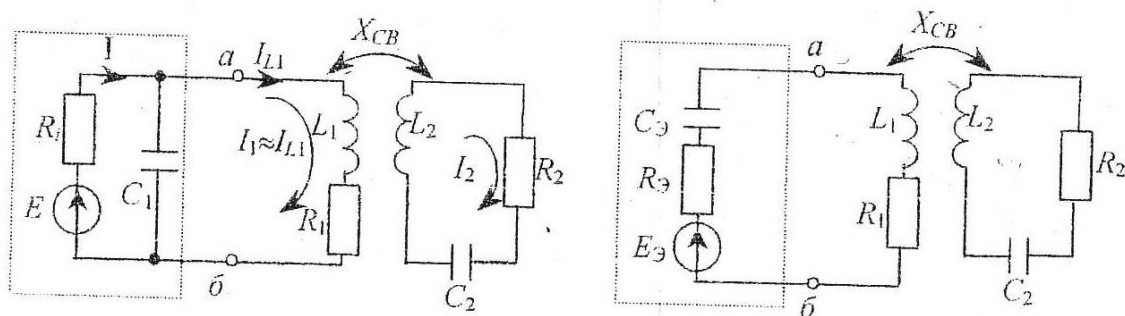


Рисунок 7.7 - Схемы к задаче 7.4.6

7.4.7. Система из двух колебательных контуров с трансформаторной связью последовательно подключена к источнику сигнала и на частоте источника имеет следующие параметры:  $R_1 = 24$  Ом,  $X_{L1} = 200$  Ом,  $|X_{C1}| = 168$  Ом,  $R_2 = 60$  Ом,  $X_{L2} = 320$  Ом,  $|X_{C2}| = 240$  Ом.

Определить:

1) коэффициент связи  $k$  между индуктивностями колебательных контуров, при котором мощность, расходуемая во втором контуре вдвое больше, теряемой в первом;

2) находится ли при этих условиях система в резонансе и, если да, то в каком именно.

Ответ: 35,34 %.

7.4.8. Определить входные сопротивления двухполосников, если сопротивления отдельных участков цепи на схемах рисунка 7.8 указаны в омах.

Ответ: 40 Ом, 20 кОм, 20 Ом,  $(9-j4)$  Ом, 18 кОм, 12,8 кОм.

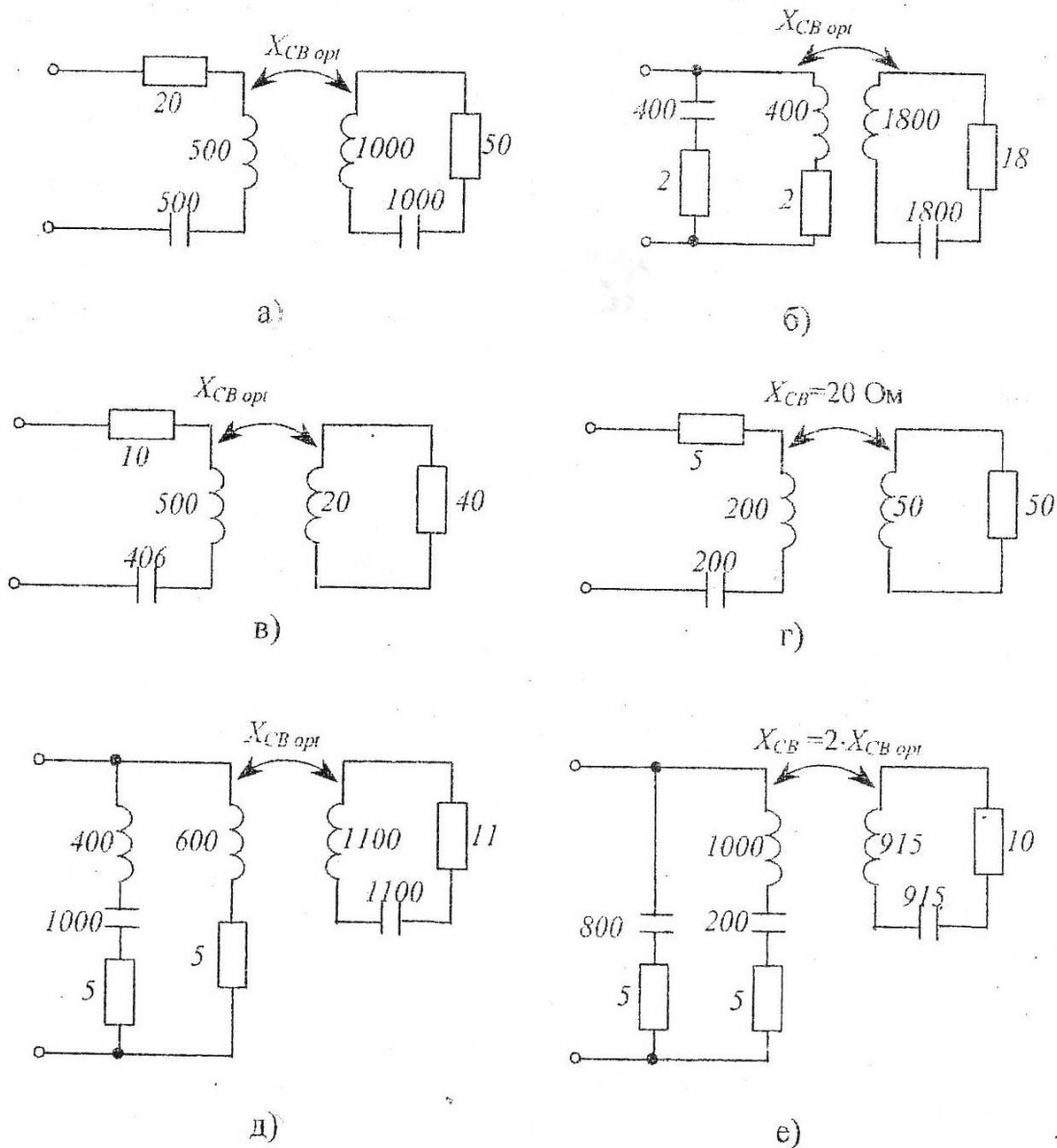


Рисунок 7.8 - Схемы двухполосников со связанными контурами



7.4.9. Два индуктивно связанных контура настроены в полный резонанс. Частота генератора 400 кГц, э.д.с. генератора, последовательно подключенного к первому контуру,  $E = 100$  В,  $M_{опт} = 20$  мкГн. Определить значение тока во втором контуре.

Ответ: 1 А.

7.4.10. Каждый из одинаковых контуров двухконтурной связанной системы настроен в резонанс,  $R_1 = R_2 = 5$  Ом,  $\eta = 0,8$ ,  $P_2 = 10$  кВт. Найти токи  $I_1$  и  $I_2$ . Установить тип резонанса, ответ пояснить. Определить, во сколько раз полоса пропускания системы шире полосы пропускания контура входящего в нее? Изобразить характер зависимости  $I_2(\omega)$  при указанных условиях и установить типы резонансов в экстремальных точках резонансной кривой.

Ответ: 22,36 А; 44,72 А; в 2,65 раза.

7.4.11. Система состоит из двух связанных колебательных контуров. Оба контура настроены на частоту генератора, последовательно подключенного к первичному контуру и имеющего  $e(t) = 10\cos 10^6 t$  В;  $R_1 = 20$  Ом,  $R_2 = 10$  Ом,  $M = 20$  мкГн. Найти мощность, выделяющуюся во вторичном контуре и к.п.д. Установить тип резонанса на частоте генератора, ответ обосновать. Изобразить вид АЧХ при заданной связи.

Ответ: 556 мВт; 67 %.

7.4.12. Сопротивление потерь первого контура системы связанных контуров 5 Ом, второго - 4 Ом, эффективное значение э.д.с., включенной в первый контур - 60 В. Подобрать сопротивление связи, обеспечивающее передачу во второй контур мощности 100 Вт. Каждый контур в отдельности настроен на частоту э.д.с. Изобразить характер АЧХ  $I_2(\omega)$ , соответствующий расчетным значениям сопротивления связи. Определить  $I_{2p}$  на частоте генератора и установить тип резонанса.

Ответ:  $\pm 10$  Ом или  $\pm 2$  Ом; 5 А.

7.4.13. Система состоит из двух подобных связанных колебательных контуров. Резонансная частота каждого отдельно взятого контура 600 кГц. Добротность каждого из контуров  $Q_1 = Q_2 = 40$ . Определить полосу пропускания системы при коэффициентах связи  $k_1 = 0,4 k_{кр}$ ,  $k_2 = k_{кр}$  и  $k_3 = 2 k_{кр}$ . Изобразить резонансные кривые  $I_2(\omega)$  для заданных значений связи.

Ответ: 11,6 кГц; 21,2 кГц; 39,6 кГц.

7.4.14. Система состоит из двух одинаковых колебательных контуров, настроенных на 600 кГц, фактор связи  $A = 1$ . Определить добротность контуров, если полоса пропускания системы 12 кГц.

Ответ: 70,5.

7.4.15. Определить полосу пропускания системы двух одинаковых связанных колебательных контуров, если  $L_1 = L_2 = 250$  мкГн,  $R_1 = R_2 = 10$  Ом,  $M = M_{кр}$ .

Ответ: 9,01 кГц.

7.4.16. Два связанных контура настроены в частный резонанс. Генератор с напряжением 50 В последовательно включен в первый контур, который имеет реактивное сопротивление 20 Ом, активное сопротивление 4 Ом. Второй контур соответственно имеет 15 Ом и 5,6 Ом. Определить сопротивление связи, значение тока в первом контуре и к.п.д. системы.

Ответ: 18,5 Ом; 4,34 А; 65,15%.

7.4.17. Два индуктивно связанных контура настроены в полный резонанс на частоту генератора 500 кГц, включенного последовательно в первый контур. Напряжение генератора 40 В. Контур имеет активные сопротивления по 20 Ом. Емкость второго контура 1000 пФ. Определить напряжение на емкости второго контура на резонансной частоте и полосу пропускания системы.

Ответ: 318 В; 44,3 кГц.

7.4.18. Приемная антенна (рисунок 7.9) индуктивно связана с настроенным в резонанс входным контуром, параметры которого  $C = 300$  пФ,  $R = 8$  Ом;  $M = 20$  мкГн. Определить напряжение на сетке лампы, если ток  $I$  в приемной антенне 0,17 мкА.

Ответ: 1,42 мВ.

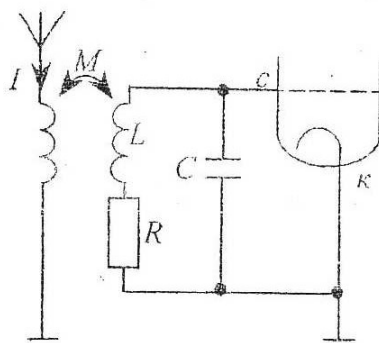


Рисунок 7.9 - Схема входной цепи

7.4.19. Приемная антенна индуктивно связана с настроенным в резонанс входным контуром (см. рисунок 7.9). Определить напряжение на сетке лампы по следующим данным:  $f_p = 2$  МГц,  $M = 10$  мкГн,  $L = 30$  мкГн,  $R = 10$  Ом, ток в антенне  $I = 1$  мкА.

Ответ: 4,73 мВ.

7.4.20. Система состоит из двух индуктивно связанных колебательных контуров:  $L_1 = 100$  мкГн,  $R_1 = 2$  Ом,  $L_2 = 400$  мкГн,  $C_2 = 100$  пФ,  $R_2 = 8$  Ом.

Рассчитать:

- 1) значение  $C_1$ ,  $M$  и частоту входного воздействия, при которых в системе наступает полный резонанс;
- 2) амплитуду  $E_m$  э.д.с., последовательно включенной в первый контур, при которой амплитудное значение тока во втором контуре равно  $0,5$  А;
- 3) амплитудное значение тока в первом контуре;
- 4) мощность, выделяемую в первом и втором контурах и к.п.д. системы;
- 5) абсолютную и относительную полосу пропускания системы.

Ответ:  $400$  пФ;  $0,8$  мкГн;  $5 \cdot 10^6$  рад/с;  $4$  В;  $1$  А;  $1$  Вт;  $50\%$ ;  $28,2 \cdot 10^3$  рад/с;  $5,64 \cdot 10^{-3}$ .

7.4.21. Дана система из двух одинаковых индуктивно связанных колебательных контуров, каждый из которых настроен на частоту  $f_p = 10^6$  Гц, частота генератора больше частоты  $f_p$  на  $3,18$  кГц. Данные контуров:  $L = 500$  мкГн,  $R = 10$  Ом.

Найти взаимную индукцию  $M_{орн}$ , при которой ток во втором контуре на частоте генератора будет максимально возможным. Какой тип резонанса имеет место в системе при этих условиях? Ответ поясните.

Ответ:  $3,55$  мкГн.

7.4.22. Рассчитать необходимые параметры связанных контуров  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $M_{орн}$  при полном резонансе, а также полосу пропускания системы, если  $L_1 = 100$  мкГн,  $R_1 = 8$  Ом,  $L_2 = 400$  мкГн,  $R_2 = 32$  Ом, частота входного воздействия  $400$  кГц.

Ответ:  $1600$  пФ;  $400$  пФ;  $6,37$  мкГн;  $17,96$  кГц.

7.4.23. Оба контура системы (рисунок 7.10) порознь настроены в резонанс на частоту генератора, внутреннее сопротивление которого  $R_i = 2$  Ом, сопротивления потерь контуров  $R_1 = R_2 = 2$  Ом, сопротивление емкости  $C_2$  на частоте генератора равно  $400$  Ом. При каком значении сопротивления связи в нагрузке  $R_H = 80$  кОм будет выделяться максимальная мощность? Какова при этом относительная полоса пропускания системы  $S_{ос}$ , если  $L_1 = L_2$ ?

Ответ:  $4$  Ома;  $0,0141$ .

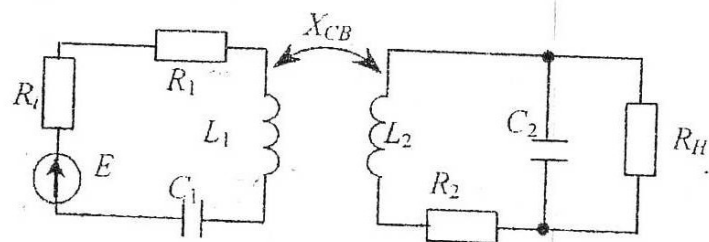


Рисунок 7.10 - Схема связанных контуров

7.4.24. Параметры двух индуктивно связанных колебательных контуров:  $L_1 = 200$  мкГн,  $L_2 = 250$  мкГн,  $R_1 = R_2 = 100$  Ом,  $C_2 = 900$  пФ,  $M = 40$  мкГн, частота генератора 700 кГц. Рассчитать значение  $C_1$ , при котором будет выполняться условие частного резонанса. Во сколько раз величина тока при частном резонансе меньше величины тока при сложном резонансе, который может быть достигнут в этой системе. Поясните методику настройки в сложный резонанс на заданную частоту генератора.

Ответ: 270 пФ; 2,5 раз.

7.4.25. Система состоит из двух колебательных контуров, связанных трансформаторной связью. Источник  $e(t) = 50 \cos 10^6 t$  В,  $L_1 = 250$  мкГн,  $L_2 = 200$  мкГн,  $C_1 = 2000$  пФ,  $R_1 = R_2 = 20$  Ом,  $M = 100$  мкГн. Найти величину емкости  $C_2$  и к.п.д. при частном резонансе.

Ответ: 4545 пФ; 92,6 %.

7.4.26. Рассчитать параметры  $L$ ,  $R$  и  $M$  системы, состоящей из двух одинаковых индуктивно связанных контуров, если резонансная частота каждого контура 600 кГц, емкость 250 пФ, резонансная кривая тока  $I_2 / I_{2P}$  двугорбая и на частоте 600 кГц имеет "провал", ордината которого 0,707, полоса пропускания системы 8 кГц. Укажите типы резонансов в экстремальных точках резонансной характеристики, дав соответствующие пояснения.

Ответ: 282 мкГн; 4,60 Ом; 2,94 мкГн.

7.4.27. Два одинаковых связанных контура имеют  $Q_1 = Q_2 = 100$ .  $\omega_{p1} = \omega_{p2} = 10^7$  рад/с, коэффициент связи 1,5 %. Пропустит ли система полосу частот в 40 кГц? Если не пропустит, то каким образом можно получить нужную полосу пропускания? Изобразить резонансную кривую  $I_2(\omega)$  при заданном коэффициенте связи. Указать, пояснив, тип резонанса в экстремумах резонансной кривой.

Ответ: 1,88 %.

7.4.28. Дан полосовой фильтр в виде связанных контуров с частотами  $f_{p1} = f_{p2} = 456$  кГц. Параметры контуров:  $L_1 = L_2 = 800$  мкГн,  $R_1 = R_2 = 20$  Ом,  $M = 15$  мкГн. Определить емкость контуров, полосу пропускания фильтра, а также значение тока во втором контуре, если амплитуда последовательно включенной в первый контур э.д.с.  $E_m = 2$  В, а частота 456 кГц. Изобразите резонансную кривую  $I_2(\omega)$ . Укажите, пояснив, тип резонанса в экстремумах характеристики.

Ответ: 152 пФ; 11,2 кГц; 38,3 мА.

7.4.29. Два одинаковых индуктивно связанных контура настроены в полный резонанс на частоту генератора  $5 \cdot 10^6$  рад/с, включенного последовательно в первый контур.  $C_2 = 100$  пФ. Найти  $M_{opt}$ , при котором напряжение на емкости второго контура будет в 10 раз больше напряжения генератора в первом контуре; вычислить полосу пропускания системы.

Ответ: 20 мкГн;  $0,35 \cdot 10^6$  рад/с.

7.4.30. Два одинаковых колебательных контура соединены трансформаторной связью, в первый контур включен источник э.д.с.  $e(t) = 4 \cos 10^6 t$  В,  $L_1 = L_2 = 0,5$  мГн,  $R_1 = R_2 = 10$  Ом,  $M = 20$  мкГн,  $\omega_{p1} = \omega_{p2} = 10^6$  рад/с. Какой вид резонанса имеет место на частоте источника? Ответ пояснить.

Определить напряжение на емкости второго контура на частоте источника. Вычислить полосу пропускания системы. Изобразить АЧХ вторичного тока и рассчитать значения ординаты и абсциссы, соответствующие экстремумам резонансной кривой.

Ответ: 80 В;  $5,29 \cdot 10^4$  рад/с; 100 В;  $0,983 \cdot 10^6$  и  $1,018 \cdot 10^6$  рад/с.

7.4.31. Даны два индуктивно связанных контура, причем, частота генератора 600 кГц, а резонансная частота первого контура  $f_{p1} = 610$  кГц. Найти частоту  $f_{p2}$  и величину взаимной индукции  $M$ , при которых ток во втором контуре системы имеет максимально возможное значение, если  $R_1 = 12$  Ом,  $R_2 = 16$  Ом,  $Q_1 = 60$ ,  $L_2 = 360$  мкГн.

Ответ: 607 кГц; 8,17 мкГн.

7.4.32) Параметры системы (см. рисунок 7.6) следующие:  $L_1 = L_2 = L = 800$  мкГн;  $C_1 = 800$  пФ,  $R_1 = 10$  Ом,  $R_H = 1$  кОм,  $M = 100$  мкГн. Пользуясь теорией связанных контуров, определите резонансную частоту и полосу пропускания системы. Для сравнения вычислите те же параметры для первого контура без учета влияния второго контура. Соблюдая относительный масштаб изобразите зависимости  $I(\omega)$  для одиночного контура  $L_1 C_1 R_1$  и  $I_1(\omega)$  в связанной системе.

**Примечание:** для удобства вычислений следует обозначить искомую частоту  $\omega_c = n \cdot 10^6$  и вычислять значение  $n$ .

Ответ:  $1,255 \cdot 10^6$  рад/с;  $2,27 \cdot 10^4$  рад/с;  $1,25 \cdot 10^6$  рад/с;  $1,25 \cdot 10^4$  рад/с.

7.4.33. Два индуктивно связанных контура имеют параметры:  $L_1 = 400$  мкГн,  $L_2 = 410$  мкГн,  $C_1 = 310$  пФ,  $C_2 = 290$  пФ,  $R_1 = 16$  Ом,  $R_2 = 14$  Ом,  $M = 36$  мкГн. Источник сигнала с частотой 460 кГц и э.д.с.  $E = 100$  В включен в первый контур последовательно. Найти фазовый сдвиг между напряжением на емкости второго контура и э.д.с. на входе системы.

Ответ:  $-0,032$  рад или  $-1^\circ 50'$ .

7.4.34. Рассчитать параметры элементов двух одинаковых индуктивно связанных контуров  $L$ ,  $R$  и  $M$ , если каждый контур настроен на длину волны  $\lambda_p = 100$  м и имеет  $Q = 100$ ,  $C = 300$  пФ. Интервал между горбами 6 кГц. Вычислить полосу пропускания системы.

Ответ: 9,39 мкГн; 1,77 Ом;  $9,575 \cdot 10^{-2}$  мкГн; 43,26 кГц.

7.4.35. В системе двух одинаковых индуктивно связанных колебательных контуров требуется получить двугорбую симметричную кривую вторичного тока, максимумы которой разнесены по частоте на 20 кГц. Оба контура порознь настроены на частоту 1 МГц. Вторичный ток на этой частоте должен быть в  $\sqrt{2}$  раз меньше максимально возможного. Найти значения добротности контуров и коэффициент связи между ними, обеспечивающие получение требуемой резонансной кривой; вычислить полосу пропускания системы.

Ответ: 111,28; 2,17%; 27,86 кГц.

7.4.36. Система состоит из двух индуктивно связанных колебательных контуров. Э.д.с.  $E$  подключается к первому контуру последовательно. Параметры контуров:  $L_1 = 0,5$  мГн,  $L_2 = 1$  мГн,  $C_1 = 2000$  пФ,  $C_2 = 1000$  пФ,  $R_1 = 5$  Ом,  $R_2 = 10$  Ом,  $k = 8\%$ . Частота генератора равна резонансной частоте первого контура.

Находится ли система в резонансе, если да, то указать тип резонанса и привести необходимые обоснования для ответа.

Определить значение коэффициента передачи системы

$K(\omega) = \frac{U_{c2}(\omega)}{E}$  на частоте генератора. Вычислить фактор связи  $A$  и изобразить примерный вид частотной характеристики  $K(\omega)$ .

Ответ: 17,4.

7.4.37. Система (см. рисунок 7.6) имеет параметры:  $L_1 = L_2 = 1$  мГн,  $R_1 = 10$  Ом,  $R_H = 1$  кОм, частота источника  $10^6$  рад/с.

Найти значения  $M$  и  $C_1$  при оптимальном резонансе. Вычислить полосу пропускания системы. Изобразить резонансную кривую  $U_{ВЫХ}(\omega)$ .

Ответ: 141 мкГн; 1010 пФ;  $22 \cdot 10^3$  рад/с.

7.4.38. Система состоит из двух связанных колебательных контуров. Частота э.д.с., включенной в первом контуре, равна  $10^6$  рад/с. Определить, возможно ли при заданной связи получить оптимальный резонанс. Если возможно, то какой именно и при каких значениях  $C_1$  и  $C_2$  он может быть получен? Параметры:  $L_1 = 2$  мГн,  $R_1 = 10$  Ом,  $L_2 = 250$  мкГн,  $R_2 = 5$  Ом.

$M = 50$  мкГн. Каков при этом получается коэффициент передачи по напряжению  $K_U = \frac{U_{C2}}{E}$  на частоте генератора?

Ответ: 518 пФ; 4650 пФ; 15,2.

7.4.39. Параметры системы двух индуктивно связанных колебательных контуров:  $R_1 = 10$  Ом,  $R_2 = 8$  Ом,  $L_1 = 350$  мкГн,  $L_2 = 365$  мкГн,  $C_1 = 250$  пФ. Оба контура в отдельности настроены в резонанс на частоту генератора, включенного в первый контур последовательно и имеющего э.д.с.  $E_m = 200$  В. Найти:

- 1) при каком коэффициенте связи  $k$  к.п.д. равен 75 %;
- 2) чему при этом равна мощность, выделяемая во втором контуре;
- 3) на сколько эта мощность меньше максимальной;
- 4) вычислить фактор связи и полосу пропускания системы.

Изобразить вид резонансной кривой  $I_2(\omega)$  при вычисленном значении связи.

Ответ: 1,28 %; 375 Вт; 125 Вт.

7.4.40. Параметры системы двух одинаковых индуктивно связанных колебательных контуров:  $L_1 = L_2 = 0,5$  мГн,  $R_1 = R_2 = 10$  Ом,  $\omega_{P1} = \omega_{P2} = 10^6$  рад/с,  $M = 20$  мкГн. Источник сигнала с э.д.с.  $e(t) = 4 \cos 10^6 t$  В включен в первый контур последовательно.

Определить какой вид резонанса имеет место в системе на частоте источника; ответ пояснить. Изобразить вид резонансной кривой  $I_2(\omega)$  при заданной связи.

Вычислить:

- 1) амплитуду напряжения  $U_{C2m}$  на частоте генератора;
- 2) к.п.д. и мощность, отдаваемую во второй контур;
- 3) полосу пропускания системы.

Ответ: 80 В; 0,8; 0,128 Вт;  $5,29 \cdot 10^4$  рад/с.

7.4.41. Система двух одинаковых связанных колебательных контуров должна иметь полосу пропускания  $80 \cdot 10^3$  рад/с. Контур настроены на частоту  $2 \cdot 10^6$  рад/с и имеют добротность 50. В системе трансформаторная связь,  $M = 0,289$  мкГн. Источник э.д.с. с частотой  $2 \cdot 10^6$  рад/с включен в первый контур последовательно. Определить параметры контуров, при которых система обеспечит требуемую полосу пропускания. Изобразить характер зависимости  $I_2(\omega)$ .

Ответ: 9,96 мкГн;  $25 \cdot 10^3$  пФ; 0,4 Ом.

7.4.42. Система из двух колебательных контуров имеет следующие параметры:  $R_1 = 5 \text{ Ом}$ ,  $R_2 = 8 \text{ Ом}$ ,  $L_1 = 5 \text{ мГн}$ ,  $L_2 = 2,5 \text{ мГн}$ ,  $C_2 = 500 \text{ пФ}$ . Источник э.д.с.  $e(t) = 5 \cos 10^6 t \text{ В}$  включен в первый контур последовательно. Определить какой из оптимальных резонансов возможен в системе при заданных условиях. Ответ пояснить. Вычислить значения:

1)  $C_1$  и  $M$ , при которых в системе имеет место оптимальный резонанс;

2) к.п.д. и мощности, отдаваемой во второй контур.

Ответ: 213,3 пФ; 395,3 мкГн; 0,5; 0,625 Вт.

7.4.43. Система двух связанных колебательных контуров настроена в резонанс с источником э.д.с.  $e(t) = 20 \cos 2 \cdot 10^6 t \text{ В}$ , включенным в первый контур последовательно. При этом ток во втором контуре  $I_{m2} = 200 \text{ мА}$ . Параметры системы:  $L_1 = 250 \text{ мкГн}$ ,  $C_1 = 1000 \text{ пФ}$ ,  $R_1 = 15 \text{ Ом}$ ,  $R_2 = 60 \text{ Ом}$ .  $\omega_{p1} = \omega_{p2}$ .

Установить тип резонанса на частоте источника, ответ пояснить. Изобразить примерный график  $I_2(\omega)$  при заданных параметрах.

Вычислить:

1) при каком значении взаимной индукции  $M$  между контурами амплитуда тока во втором контуре равна заданному значению;

2) к.п.д. системы и мощность, выделяемую во втором контуре.

Ответ: 5 мкГн; 0,1; 1,2 Вт.

7.4.44. Два колебательных контура связаны трансформаторной связью и имеют параметры:  $L_1 = 180 \text{ мкГн}$ ,  $L_2 = 200 \text{ мкГн}$ ,  $R_1 = 20 \text{ Ом}$ ,  $R_2 = 100 \text{ Ом}$ ,  $C_1 = 5000 \text{ пФ}$ . Э.д.с.  $e(t) = 5 \cos 10^6 t \text{ В}$  включена в первый контур последовательно. В системе имеет место оптимальный резонанс.

Установите тип резонанса, дав соответствующие пояснения.

Вычислите:

1) значения  $M$  и  $C_2$  при оптимальном резонансе;

2) значения к.п.д. системы, мощность потерь в первом контуре и мощность, расходуемую источником в связанной системе на резонансе.

Ответ: 63,2 мкГн; 3333 пФ; 0,5; 156 мВт; 312 мВт.

7.4.45. Колебательный контур  $L, C, R$  индуктивно связан с передающей антенной, которая может быть представлена эквивалентным контуром, имеющим параметры  $R_A, X_A$ . Частота генератора меняется в пределах от  $f_1$  до  $f_2$  и при этом реактивное сопротивление антенны меняется в пределах от  $X_{A1}$  до  $X_{A2}$ . Определить значения емкости или индуктивности первого контура, при которых обеспечивается настройка заданной связанной системы по частному резонансу. Данные для расчета приведены в таблице 7.2.



Таблица 7.2

№	Колебательный контур		Частота генератора				Данные антенного контура			Связь $M$ , мкГн
	$C$ , пФ	$L$ , мкГн	$\lambda_1$ , м	$f_1$ , МГц	$\lambda_2$ , м	$f_2$ , МГц	$R_A$ , Ом	$X_{A1}$ , Ом	$X_{A2}$ , Ом	
1	400	-	680	-	600	-	16	-18	-24	20
2	300	-	650	-	620	-	10	-15	-21	20
3	-	500	-	0,8	-	0,9	10	50	10	10
4	-	400	-	0,4	-	0,5	10	40	5	30
5	-	600	-	0,4	-	0,6	12	20	6	40

Ответы к заданиям 1 и 3:

1	$L_1$ , мкГн	242
	$L_2$ , мкГн	218
3	$C_1$ , пФ	81
	$C_2$ , пФ	66,3

7.4.46. Рассчитать эквивалентное (входное) сопротивление системы, составляющей из двух связанных индуктивной трансформаторной связью контуров по данным таблицы 7.3. Генератор включен последовательно в первый контур.

Таблица 7.3

№	Данные первого контура					Данные второго контура					Данные связи		Данные генератора	
	$L_1$ , мкГн	$C_1$ , пФ	$f_{P1}$ , кГц	$R_1$ , Ом	$Q_1$	$L_2$ , мкГн	$C_2$ , пФ	$f_{P2}$ , кГц	$R_2$ , Ом	$Q_2$	$X_{CB}$ , Ом	$M$ , мкГн	$f$ , кГц	$\lambda$ , м
1	164	600	-	4	-	195	540	-	6	-	-	4	500	-
2	-	500	340	-	30	-	460	320	-	34	-	6	330	-
3	150	650	-	5	-	200	500	-	8	-	-	4	550	-
4	-	400	350	-	25	-	400	340	-	30	-	5	360	-
5	226	220	-	6	-	248	200	-	8	-	12	-	-	420
6	-	60	3000	6	-	-	54	3004	5	-	9	-	3010	-
7	200	210	-	5	-	230	150	-	7	-	10	-	-	450
8	-	50	2900	7	-	-	52	2905	5	-	10	-	3005	-
9	374	1600	-	-	36	333	2000	-	8	-	-	10	200	-
10	350	1800	-	-	35	300	1800	-	7	-	-	8	250	-

## 1.5 Знания и умения

В результате работы над темой «Система двух связанных контуров» студент должен знать основы теории и уметь решать задачи. Конкретно следующее.

### *Знать:*

- 1) выражения для  $X_{ВВ}$ ,  $R_{ВВ}$ ,  $X_{ВХ}$ ,  $R_{ВХ}$ ,  $X_{СВ\text{ ори}}$  при полном и сложном резонансах, для токов  $I_1$  и  $I_2$  в общем случае и для любого из резонансов при последовательно включенном генераторе, для к.п.д. и мощности в каждом контуре;
- 2) методику определения резонансных частот системы и число резонансных частот в зависимости от величины связи в системах разного типа (система из двух колебательных контуров, система из колебательного и апериодического контуров);
- 3) условия наступления любого из резонансов в системе и методику настройки;
- 4) что такое «оптимальная» и что такое «критическая» связь;
- 5) методику расчета входного сопротивления двухконтурной связанной системы при последовательном и параллельном подключении генератора к первому контуру;
- 6) методику расчета второго тока как при последовательном, так и при параллельном подключении генератора к системе;
- 7) методику вычисления фазового сдвига между любыми токами и напряжениями в двухконтурной связанной системе;
- 8) форму АЧХ второго контура для различных значений связи в двухконтурных системах из двух одинаковых колебательных контуров и из колебательного и апериодического контуров;
- 9) как зависит полоса пропускания системы от величины связи в любой двухконтурной системе;

10) основные соотношения между полосами пропускания системы из двух колебательных контуров и одиночного контура при критической и максимально возможной связи между контурами.

**Уметь:**

- 1) аргументированно установить, находится система в резонансе или нет и, если находится, то каков тип резонанса (см. п.7.3.1.);
- 2) вычислить входное сопротивление системы на заданных частотах при последовательном и параллельном подключении генератора сигнала к первому контуру (см. п.7.3.2);
- 3) вычислять токи и падения напряжения на любом участке связанной системы, а также к.п.д. и мощности в любом контуре и коэффициент передачи по напряжению на заданной частоте при известных параметрах системы;
- 4) решать обратную задачу, т.е. находить параметры системы  $C$ ,  $L$ ,  $R$ ,  $k$ , обеспечивающие необходимые свойства системы: требуемую полосу пропускания, коэффициент передачи, энергетические соотношения и т.п.;
- 5) в системе из двух связанных колебательных контуров по данным, представленным в неявной форме, аргументированно установить, какова связь: критическая, выше или ниже критической (см. п.7.3.3);
- 6) вычислять полосу пропускания системы из двух колебательных контуров и системы из колебательного и апериодического контуров;
- 7) вычислять фазовый сдвиг между двумя любыми токами и напряжениями на заданной частоте.

## 1.6 Формы контроля

Тестовый опрос после изучения темы на аудиторных занятиях с целью выяснения степени усвоения основных соотношений и основных положений теории связанных контуров.

Самостоятельная работа с целью выявления навыков в решении задач по данной теме. Для самостоятельной работы используются задачи п.7.4.

## Физические системы и их математические модели

### 1. Модели вход – выход.

Пример 1. Математическая модель  $RC$ -цепи.

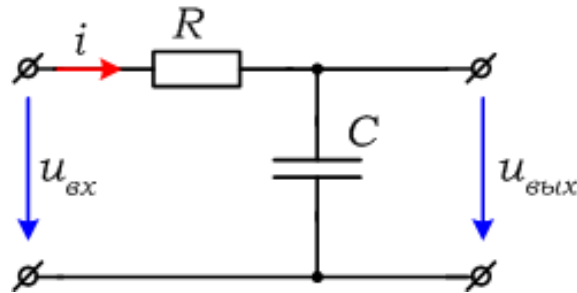


Рис. 1. Схема  $RC$ -цепи

Согласно второму закону Кирхгофа получаем интегральное уравнение

$$Ri + \frac{1}{C} \int idt = u_{вх}. \quad (1)$$

Дифференцируем это уравнение по  $t$  и получаем ДУ относительно тока:

$$R \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} i = \frac{du_{вх}}{dt}. \quad (2)$$

Это уравнение можно записать иначе

$$\frac{di}{dt} + \frac{1}{RC} i = \frac{1}{R} \frac{du_{вх}}{dt}. \quad (3)$$

Вводя обозначение  $\frac{1}{RC} = \alpha$ , где  $\alpha$  – коэффициент затухания, получим:

$$\frac{di}{dt} + \alpha \cdot i = \frac{1}{R} \frac{du_{вх}}{dt}. \quad (4)$$

Вводя обозначения  $RC = \tau$ , где  $\tau$  – постоянная времени цепи, определяющая временной масштаб протекания переходных процессов, получим:

$$\tau \frac{di}{dt} + i = C \frac{du_{вх}}{dt}. \quad (5)$$

Если в схеме указана выходная величина, то можно составить ДУ относительно именно этой величины. Пусть выходной переменной является

напряжение на емкости. Тогда в уравнение по второму закону Кирхгофа нужно ввести напряжение на емкости:

$$Ri + u_{\text{емк}} = u_{\text{вх}}. \quad (6)$$

Так как  $i = i_C = C \frac{du_C}{dt}$ , то уравнение принимает вид:

$$RC \frac{du_{\text{емк}}}{dt} + u_{\text{емк}} = u_{\text{вх}} \quad (7)$$

или

$$\tau \frac{du_{\text{емк}}}{dt} + u_{\text{емк}} = u_{\text{вх}}. \quad (8)$$

Пример 2. Математическая модель  $RL$ -цепи.

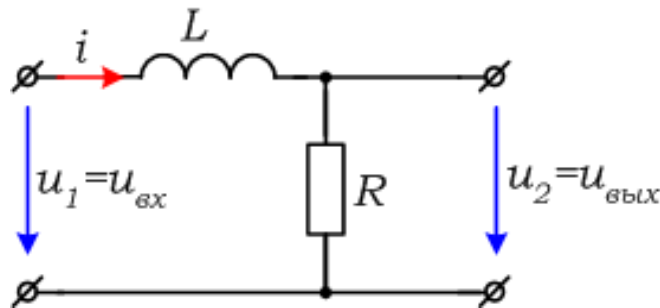


Рис. 2. Схема  $RL$ -цепи

Согласно второму закону Кирхгофа получаем дифференциальное уравнение вида

$$L \frac{di}{dt} + Ri = u_1. \quad (9)$$

Пусть выходным сигналом является напряжение на сопротивлении. Тогда, учитывая связь  $i = \frac{u_2}{R}$ , получим ДУ относительно выходного напряжения

$$\frac{L}{R} \frac{du_2}{dt} + u_2 = u_1 \quad (10)$$

или

$$\tau \frac{du_2}{dt} + u_2 = u_1, \quad (11)$$

где  $\tau = \frac{L}{R}$  – постоянная времени  $RL$ -цепи.

Таким образом, цепи с одним реактивным элементом описываются в общем случае неоднородным (с правой частью, отличной от нуля) ДУ первого порядка. Порядок схемы равен порядку ДУ.

Пример 3. Математическая модель системы, состоящей из двух RC-цепей, разделённых идеальным операционным усилителем (ОУ) с коэффициентом усиления  $K_0$ . Такой усилитель является идеальным элементом развязки между цепями.

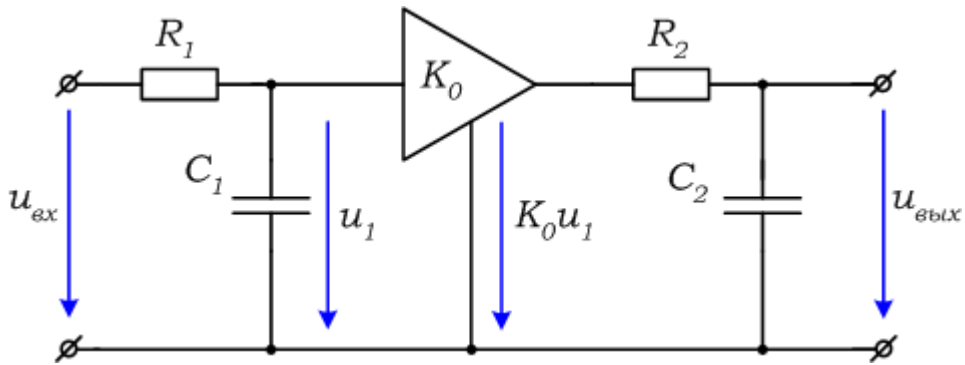


Рис 3. Схема 2-го порядка

Величина  $u_1$  является выходным напряжением для левой RC-цепи. Входным напряжением для правой RC-цепи является величина  $K_0 u_1$ . Вводя постоянные времени цепей  $\tau_1 = R_1 C_1$  и  $\tau_2 = R_2 C_2$ , получим два ДУ 1-го порядка:

$$\tau_2 \frac{du_{\text{вых}}}{dt} + u_{\text{вых}} = K_0 u_1, \quad (12)$$

$$\tau_1 \frac{du_1}{dt} + u_1 = u_{\text{вх}}. \quad (13)$$

Исключая напряжение  $u_1$  из уравнений, получим ДУ 2-го порядка, связывающее вход с выходом:

$$\tau_1 \tau_2 \frac{d^2 u_{\text{вых}}}{dt^2} + (\tau_1 + \tau_2) \frac{du_{\text{вых}}}{dt} + u_{\text{вых}} = K_0 u_{\text{вх}}. \quad (14)$$

Пример 4. Математическая модель двигателя постоянного тока.

Двигатель постоянного тока (ДПТ) – мощное исполнительное устройство, преобразующее электрическую энергию постоянного тока в механическую энергию вращательного движения. ДПТ имеет ряд положительных качеств: высокий вращающий момент, возможность регулирования скорости в широком диапазоне, удобство применения в различных САУ. Все это позволяют применять ДПТ в роботах-манипуляторах, лентопротяжных механизмах, в исполнительных устройствах следящих систем. ДПТ, предназначенный для использования в замкнутых

САУ, называется *сервоприводом*. Имеет обмотку возбуждения (ОВ) и обмотку якоря (ОЯ) и может быть представлен схемой на рис. 4.

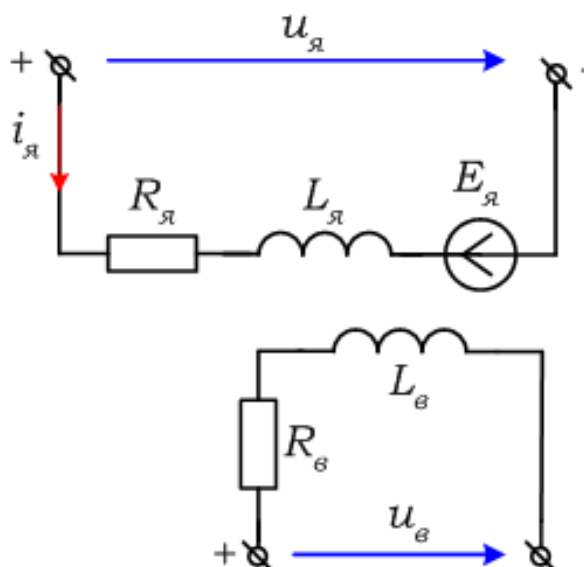


Рис. 4. Схема ДПТ независимого возбуждения

Как правило, для управления угловой скоростью двигателя используют метод изменения напряжения, подводимого к якорной цепи (якорное управление). Так как ОВ двигателя постоянно подключена под неизменное напряжение, то угловая скорость  $\omega$  и направление вращения вала зависят только от значения и полярности напряжения  $u_я$ , подаваемого на якорь. В системах управления двигатель всё время работает в переходном процессе, поэтому для якорной цепи составляется ДУ

$$L_я \frac{di_я}{dt} + R_я i_я + e_я = u_я, \quad (15)$$

где  $e_я$  – противо-ЭДС, возникающая в якоре при его вращении и направленная навстречу току, так как двигатель потребляет электрическую энергию. Если пренебречь влиянием реакции якоря, то можно считать, что противо-ЭДС пропорциональна угловой скорости вала

$$e_я = c_e \Phi \omega = k_e \omega, \quad (16)$$

где  $\Phi$  – магнитный поток ОВ;  $c_e$  – конструктивный коэффициент двигателя.

С учётом (20) получим уравнение для цепи якоря:

$$L_я \frac{di_я}{dt} + R_я i_я + k_e \omega = u_я. \quad (17)$$

Дифференциальное уравнение движения вала двигателя имеет вид

$$M = M_c + J \frac{d\omega}{dt}, \quad (18)$$

где  $M$  – электромагнитный момент двигателя;

$M_c$  – статический момент или момент сопротивления, который в общем случае равен сумме момента нагрузки и момента трения двигателя ;

$J$  – момент инерции вращающихся частей, приведённый к валу двигателя.

Вращающий момент двигателя пропорционален току якоря

$$M = c_e \Phi i_{\text{я}} = k_e i_{\text{я}}. \quad (19)$$

Тогда из уравнения для моментов  $k_e i_{\text{я}} = M_c + J \frac{d\omega}{dt}$  можно найти выражения для тока якоря и его производной

$$i_{\text{я}} = \frac{M_c}{k_e} + \frac{J}{k_e} \frac{d\omega}{dt}, \quad (20)$$

$$\frac{di_{\text{я}}}{dt} = \frac{1}{k_e} \frac{dM_c}{dt} + \frac{J}{k_e} \frac{d^2\omega}{dt^2} \quad (21)$$

и использовать их в уравнении цепи якоря (21):

$$\frac{L_{\text{я}}}{k_e} \cdot \frac{dM_c}{dt} + \frac{L_{\text{я}} J}{k_e} \cdot \frac{d^2\omega}{dt^2} + \frac{R_{\text{я}}}{k_e} M_c + \frac{R_{\text{я}} J}{k_e} \cdot \frac{d\omega}{dt} + k_e \omega = u_{\text{я}} \quad (22)$$

или

$$\frac{L_{\text{я}} J}{k_e^2} \cdot \frac{d^2\omega}{dt^2} + \frac{R_{\text{я}} J}{k_e^2} \cdot \frac{d\omega}{dt} + \omega = \frac{1}{k_e} u_{\text{я}} - \frac{R_{\text{я}}}{k_e^2} M_c - \frac{L_{\text{я}}}{k_e^2} \cdot \frac{dM_c}{dt}. \quad (23)$$

Если ввести обозначения:  $\frac{R_{\text{я}} J}{k_e^2} = T_m$  – электромеханическая постоянная

времени двигателя и  $\frac{L_{\text{я}}}{R_{\text{я}}} = T_{\text{я}}$  – электромагнитная постоянная времени якоря,

то уравнение (23) принимает компактный вид:

$$T_{\text{я}} T_m \frac{d^2\omega}{dt^2} + T_m \cdot \frac{d\omega}{dt} + \omega = \frac{1}{k_e} u_{\text{я}} - \frac{T_m}{J} M_c - \frac{T_{\text{я}} T_m}{J} \cdot \frac{dM_c}{dt}. \quad (24)$$

В этом уравнении напряжение якоря  $u_{\text{я}}$  и момент сопротивления  $M_c$  являются входными величинами, а угловая скорость вала  $\omega$  – выходной величиной.

### Пример 5. Математическая модель электрической цепи 2-го порядка.

Схема на рис.5 содержит два узла и два независимых контура. Число независимых уравнений, записываемых по 1-му закону Кирхгофа, на единицу меньше числа узлов. Уравнения по 2-му закону Кирхгофа записываются для независимых контуров.



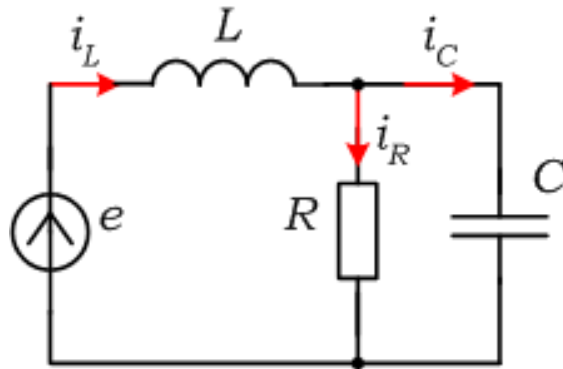


Рис. 5. Схема цепи 2-го порядка

Итак, применение законов Кирхгофа позволяет получить следующую систему уравнений:

$$\left\{ \begin{array}{l} i_L = i_R + i_C; \\ L \frac{di_L}{dt} + Ri_R = e(t); \\ L \frac{di_L}{dt} + \frac{1}{C} \int_0^t i_C dt + u_C(0) = e(t). \end{array} \right. \quad (25)$$

$$L \frac{di_L}{dt} + Ri_R = e(t); \quad (26)$$

$$L \frac{di_L}{dt} + \frac{1}{C} \int_0^t i_C dt + u_C(0) = e(t). \quad (27)$$

Выражение для тока  $i_R = i_L - i_C$  подставим в (26), а также продифференцируем (27) по  $t$ :

$$L \frac{di_L}{dt} + Ri_L - Ri_C = e(t); \quad (28)$$

$$L \frac{d^2 i_L}{dt^2} + \frac{1}{C} i_C = \frac{d}{dt} e(t). \quad (29)$$

Выражение для тока в ёмкости

$$i_C = \frac{L}{R} \cdot \frac{di_L}{dt} + i_L - \frac{e(t)}{R}, \quad (30)$$

Полученное выражение (30) подставим в (29):

$$L \frac{d^2 i_L}{dt^2} + \frac{L}{RC} \cdot \frac{di_L}{dt} + \frac{1}{C} i_L = \frac{d}{dt} e(t) + \frac{1}{RC} e(t). \quad (31)$$

Обычно используется две формы записи – с коэффициентом, равным 1 при младшем члене в левой части

$$LC \frac{d^2 i_L}{dt^2} + \frac{L}{R} \cdot \frac{di_L}{dt} + i_L = C \frac{d}{dt} e(t) + \frac{1}{C} e(t), \quad (32)$$

или с коэффициентом, равным 1 при старшей производной в левой части

$$\frac{d^2 i_L}{dt^2} + \frac{1}{RC} \cdot \frac{di_L}{dt} + \frac{1}{LC} i_L = \frac{1}{L} \frac{d}{dt} e(t) + \frac{1}{RLC} e(t). \quad (33)$$

Если указана выходная величина, то можно составить модель вход–выход.

Пусть выходной величиной является напряжение на ёмкости. Тогда уравнения нужно записать иначе:

$$\left\{ \begin{array}{l} i_L = i_R + i_C; \end{array} \right. \quad (34)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} L \frac{di_L}{dt} + u_C = e(t); \end{array} \right. \quad (35)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} u_C = R i_R. \end{array} \right. \quad (36)$$

Учтём, что  $i_C = C \frac{du_C}{dt}$  и  $i_R = \frac{u_C}{R}$ , с помощью (35) получим:

$$L \frac{di_R}{dt} + L \frac{di_C}{dt} + u_C = e(t) \quad (37)$$

или

$$\frac{L}{R} \frac{du_C}{dt} + LC \frac{d^2 u_C}{dt^2} + u_C = e(t). \quad (38)$$

Окончательно получим

$$LC \frac{d^2 u_C}{dt^2} + \frac{L}{R} \frac{du_C}{dt} + u_C = e(t). \quad (39)$$

Уравнения (33) и (39) отличаются только правыми частями. Каждое из них является линейным неоднородным ДУ с постоянными коэффициентами. Такое уравнение описывает процессы в схеме после коммутации и представляет собой математическую модель этих процессов.

## 2. Модели в переменных состояния.

Пример 6. Составить уравнения состояния и записать уравнение для выходного напряжения.

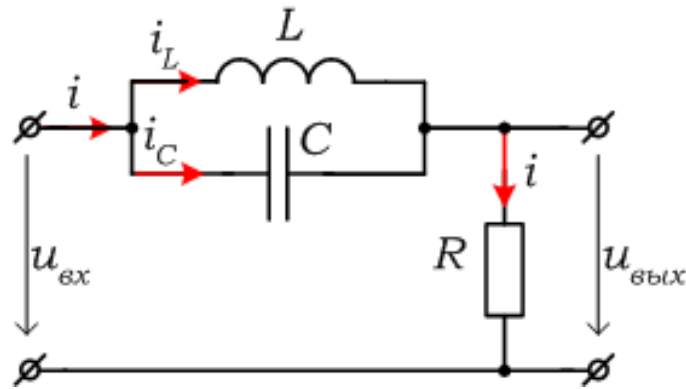


Рис. 2. Схема

Запишем три уравнения по законам Кирхгофа:

$$\begin{cases} i_C + i_L = i; \end{cases} \quad (40)$$

$$\begin{cases} u_C + Ri = u_{\text{вх}}; \end{cases} \quad (41)$$

$$\begin{cases} L \frac{di_L}{dt} - u_C = 0. \end{cases} \quad (42)$$

Учитывая компонентное уравнение ёмкости  $i_C = C \frac{du_C}{dt}$ , получим:

$$\begin{cases} u_C + R(C \frac{du_C}{dt} + i_L) = u_{\text{вх}}; \\ L \frac{di_L}{dt} = u_C \end{cases} \quad (43)$$

или

$$\begin{cases} \frac{du_C}{dt} = -\frac{1}{RC}u_C - \frac{1}{C}i_L + \frac{1}{RC}u_{\text{вх}}; \\ \frac{di_L}{dt} = \frac{1}{L}u_C. \end{cases} \quad (44)$$

Переменные состояния – это частично или полностью промежуточные (внутренние) величины. Поэтому необходимо найти выходной сигнал:

$$u_{\text{вых}} = -u_C + u_{\text{вх}}. \quad (45)$$

Для записи уравнений состояния в матричной форме необходимо, чтобы правая часть каждого уравнения содержала все переменные состояния и все входные воздействия, поэтому полученную систему уравнений нужно записать в виде:

$$\begin{cases} \frac{du_C}{dt} = -\frac{1}{RC}u_C - \frac{1}{C}i_L + \frac{1}{RC}u_{ex}; \\ \frac{di_L}{dt} = \frac{1}{L}u_C + 0 \cdot i_L + 0 \cdot u_{ex}. \end{cases} \quad (46)$$

В матричной форме:

$$\begin{bmatrix} \frac{du_C}{dt} \\ \frac{di_L}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{RC} & -\frac{1}{C} \\ \frac{1}{L} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_C \\ i_L \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{RC} \\ 0 \end{bmatrix} u_{ex} \quad (47)$$

или

$$\begin{bmatrix} \frac{du_C}{dt} \\ \frac{di_L}{dt} \end{bmatrix} = \mathbf{A} \begin{bmatrix} u_C \\ i_L \end{bmatrix} + \mathbf{B}u_{ex}. \quad (48)$$

Уравнения состояния всегда дополняются *уравнением выхода*, в которое входят переменные состояния и входные величины. В данном случае, для схемы с одним входом и одним выходом, это уравнение имеет вид:

$$u_{вых} = -1 \cdot u_C + 0 \cdot i_L + 1 \cdot u_{ex} \quad (49)$$

или

$$u_{вых} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_C \\ i_L \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix} \cdot u_{ex}. \quad (50)$$

Вводя обозначения матриц, получим:

$$u_{вых} = \mathbf{C} \begin{bmatrix} u_C \\ i_L \end{bmatrix} + \mathbf{D}u_{ex}. \quad (51)$$

В общем случае уравнения состояния для системы второго порядка с одним входом и различными реактивными элементами записываются в виде

$$\begin{cases} \frac{du_C}{dt} = a_{11}u_C + a_{12}i_L + b_1u_{ex}; \\ \frac{di_L}{dt} = a_{21}u_C + a_{22}i_L + b_2u_{ex}. \end{cases} \quad (52)$$

Пример 7. Математическая модель двигателя постоянного тока из примера 4.

В качестве переменных состояния выбираем выходную величину – угловую скорость вала  $\omega$ , которую можно измерить с помощью тахогенератора (датчика скорости), и ток якоря, который измеряется с помощью амперметра. Для составления уравнений состояния используем соотношения (20) и (17). В результате получим

$$\begin{cases} \frac{d\omega}{dt} = \frac{k_e}{J} i_a - \frac{M_c}{J} \\ \frac{di_a}{dt} = -\frac{R_a}{L_a} i_a - \frac{k_e}{L_a} \omega + \frac{1}{L_a} u_a \end{cases}, \quad (53)$$

Представим (53) в развёрнутой матричной форме:

$$\begin{cases} \frac{d\omega}{dt} = 0 \cdot \omega + \frac{k_e}{J} i_a + 0 \cdot u_a - \frac{1}{J} M_c; \\ \frac{di_a}{dt} = -\frac{k_e}{L_a} \omega - \frac{R_a}{L_a} i_a + \frac{1}{L_a} u_a + 0 \cdot M_c \end{cases}. \quad (54)$$

Запишем матрицы коэффициентов  $\mathbf{A}_1$  и  $\mathbf{B}_1$  этих уравнений

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} 0 & \frac{k_e}{J} \\ -\frac{k_e}{L_a} & -\frac{R_a}{L_a} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_1 = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{J} \\ \frac{1}{L_a} & 0 \end{bmatrix}. \quad (55)$$

В результате решения ДУ состояния определяются законы изменения переменные состояния в функции времени. Знание переменных состояния позволяет определять любые токи и напряжения в электрических цепях, в том числе и выходные переменные. Как правило, переменные состояния используются для нахождения выходных величин.

### 3. Модели в виде передаточных функций.

**Пример 8.** Составить передаточную функцию для схемы примера 3.

Процессы в схеме описываются ОДУ 2-го порядка:

$$\tau_1 \tau_2 \frac{d^2 u_{\text{вых}}}{dt^2} + (\tau_1 + \tau_2) \frac{du_{\text{вых}}}{dt} + u_{\text{вых}} = K_0 u_{\text{вх}}.$$

Принимая во внимание, что ПФ определяется при нулевых начальных условиях, перейдем в ДУ от оригиналов к изображениям при этих условиях:

$$\tau_1 \tau_2 p^2 U_{\text{вых}}(p) + (\tau_1 + \tau_2) p U_{\text{вых}}(p) + U_{\text{вых}}(p) = K_0 U_{\text{вх}}(p)$$

или

$$[\tau_1 \tau_2 p^2 + (\tau_1 + \tau_2) p + 1] U_{\text{вых}}(p) = K_0 U_{\text{вх}}(p).$$

Отсюда получаем ПФ электрической цепи:

$$W(p) = \frac{U_{\text{вых}}(p)}{U_{\text{вх}}(p)} = \frac{K_0}{\tau_1 \tau_2 p^2 + (\tau_1 + \tau_2)p + 1} = \frac{K_0}{T_2^2 p^2 + T_1 p + 1}.$$

**Пример 9.** Составить передаточную функцию для схемы примера 4.

ДПТ описывается ДУ второго порядка:

$$\frac{L_{\text{я}} J}{k_e^2} \cdot \frac{d^2 \omega}{dt^2} + \frac{R_{\text{я}} J}{k_e^2} \cdot \frac{d\omega}{dt} + \omega = \frac{1}{k_e} u_{\text{я}} - \frac{R_{\text{я}}}{k_e^2} M_c - \frac{L_{\text{я}}}{k_e^2} \cdot \frac{dM_c}{dt}.$$

Запишем уравнение для операторных изображений при нулевых начальных условиях:

$$\frac{L_{\text{я}} J}{k_e^2} \cdot p^2 \Omega(p) + \frac{R_{\text{я}} J}{k_e^2} \cdot p \Omega(p) + \Omega(p) = \frac{1}{k_e} U_{\text{я}}(p) - \frac{R_{\text{я}}}{k_e^2} M_c(p) - \frac{L_{\text{я}}}{k_e^2} \cdot p M_c(p)$$

или

$$\left( \frac{L_{\text{я}} J}{k_e^2} \cdot p^2 + \frac{R_{\text{я}} J}{k_e^2} \cdot p + 1 \right) \Omega(p) = \frac{1}{k_e} U_{\text{я}}(p) - \left( \frac{R_{\text{я}}}{k_e^2} + \frac{L_{\text{я}}}{k_e^2} \cdot p \right) M_c(p).$$

Считая напряжение якоря управляющим воздействием, а момент сопротивления – воздействием возмущающим, определим две ПФ – по управлению и по возмущению. При нахождении ПФ по управлению, мы принимаем возмущение равным нулю и наоборот.

ПФ по управлению ( $M_c = 0$ ):

$$W_{\text{упр}}(p) = \frac{\Omega(p)}{U_{\text{я}}(p)} = \frac{\frac{1}{k_e}}{\frac{L_{\text{я}} J}{k_e^2} \cdot p^2 + \frac{R_{\text{я}} J}{k_e^2} \cdot p + 1} = \frac{k_e}{L_{\text{я}} J \cdot p^2 + R_{\text{я}} J \cdot p + k_e^2}.$$

ПФ по возмущению ( $U_{\text{я}} = 0$ ):

$$W_f(p) = \frac{\Omega(p)}{M_c(p)} = \frac{- \left( \frac{R_{\text{я}}}{k_e^2} + \frac{L_{\text{я}}}{k_e^2} \cdot p \right)}{\frac{L_{\text{я}} J}{k_e^2} \cdot p^2 + \frac{R_{\text{я}} J}{k_e^2} \cdot p + 1} = \frac{- (R_{\text{я}} + L_{\text{я}} \cdot p)}{L_{\text{я}} J \cdot p^2 + R_{\text{я}} J \cdot p + k_e^2}.$$

Для получения ПФ ДУ можно не составлять, но построить по системе операторных уравнений структурную схему. Прделаем эту процедуру.

Воспользуемся уравнениями

$$L_{\text{я}} \frac{di_{\text{я}}}{dt} + R_{\text{я}} i_{\text{я}} + e_{\text{я}} = u_{\text{я}}, \quad M = M_c + J \frac{d\omega}{dt}, \quad e_{\text{я}} = k_e \omega, \quad M = k_e i_{\text{я}},$$

представив их в операторной форме:

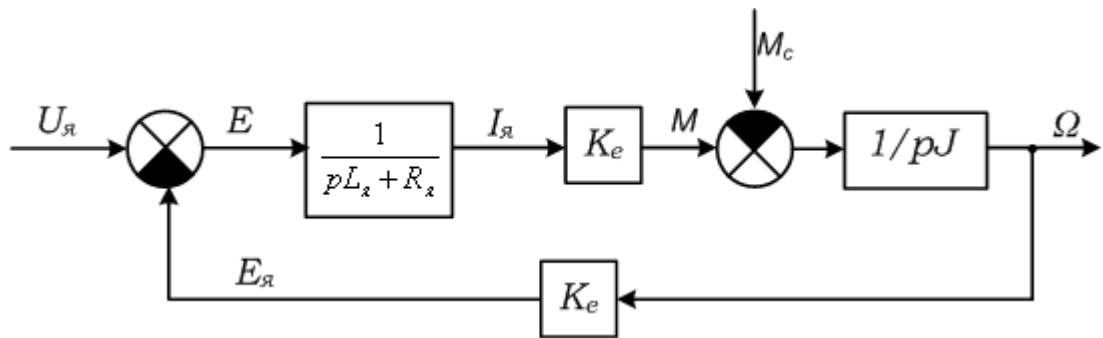
$$L_{\text{я}} p I_{\text{я}}(p) + R_{\text{я}} I_{\text{я}}(p) + E_{\text{я}}(p) = U_{\text{я}}(p), \quad M(p) = M_c(p) + J p \Omega(p),$$

$$E_{\text{я}}(p) = k_e \Omega(p), \quad M(p) = k_e I_{\text{я}}(p).$$

Из первого уравнения выразим изображение тока якоря, а из второго – изображение угловой частоты:

$$I_{\text{я}}(p) = \frac{U_{\text{я}}(p) - E_{\text{я}}(p)}{pL_{\text{я}} + R_{\text{я}}}, \quad \Omega(p) = \frac{M(p) - M_c(p)}{Jp}, \quad E_{\text{я}}(p) = k_e \Omega(p), \quad M(p) = k_e I_{\text{я}}(p).$$

Данным уравнениям отвечает следующая структурная схема:



Для нахождения передаточных функций применяется метод преобразования структурных схем. Если структурная схема не сложная, то можно составить уравнение, связывающее изображение выхода с изображениями внешних воздействий. Следует последовательно осматривать схему, начиная с управляемой величины и двигаясь против направления передачи сигналов. От каждого сумматора схему следует осматривать в нескольких направлениях: до какого-либо из внешних воздействий или до управляемой величины. При этом изображение выходной величины каждого звена выражается через его передаточную функцию и изображение входной величины, а изображение суммы нескольких слагаемых выражается через сумму их изображений. Постепенно исключаются изображения промежуточных переменных, и получается искомое уравнение. Действуя указанным способом в полученной схеме, получим цепочку равенств:

$$\begin{aligned} \Omega(p) &= \frac{1}{pJ} (M - M_c) = \frac{1}{pJ} (k_e I_{\text{я}} - M_c) = \frac{1}{pJ} \left( k_e \frac{1}{pL_{\text{я}} + R_{\text{я}}} E - M_c \right) = \\ &= \frac{1}{pJ} \left[ k_e \frac{1}{pL_{\text{я}} + R_{\text{я}}} \cdot (U_{\text{я}} - k_e \Omega) - M_c \right] = \frac{k_e}{pJ(pL_{\text{я}} + R_{\text{я}})} \cdot U_{\text{я}} - \frac{k_e^2}{pJ(pL_{\text{я}} + R_{\text{я}})} \cdot \Omega - \frac{1}{pJ} \cdot M_c \end{aligned}$$

или

$$\left[ 1 + \frac{k_e^2}{pJ(pL_{\text{я}} + R_{\text{я}})} \right] \cdot \Omega = \frac{k_e}{pJ(pL_{\text{я}} + R_{\text{я}})} \cdot U_{\text{я}} - \frac{1}{pJ} \cdot M_c.$$

ПФ по управлению ( $M_c=0$ ):

$$W_{\text{yup}}(p) = \frac{\Omega(p)}{U_{\text{я}}(p)} = \frac{\frac{k_e}{pJ(pL_{\text{я}} + R_{\text{я}})}}{1 + \frac{k_e^2}{pJ(pL_{\text{я}} + R_{\text{я}})}} = \frac{k_e}{L_{\text{я}}J \cdot p^2 + R_{\text{я}}J \cdot p + k_e^2} \cdot$$

ПФ по возмущению ( $U_{\text{я}}=0$ ):

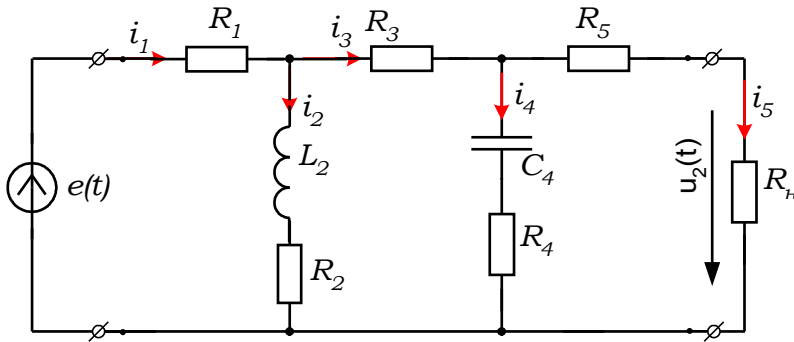
$$W_f(p) = \frac{\Omega(p)}{M_c(p)} = \frac{-\frac{1}{pJ}}{1 + \frac{k_e^2}{pJ(pL_{\text{я}} + R_{\text{я}})}} = \frac{-(R_{\text{я}} + L_{\text{я}} \cdot p)}{L_{\text{я}}J \cdot p^2 + R_{\text{я}}J \cdot p + k_e^2} \cdot$$



# L'analisi dei circuiti in dominio temporale

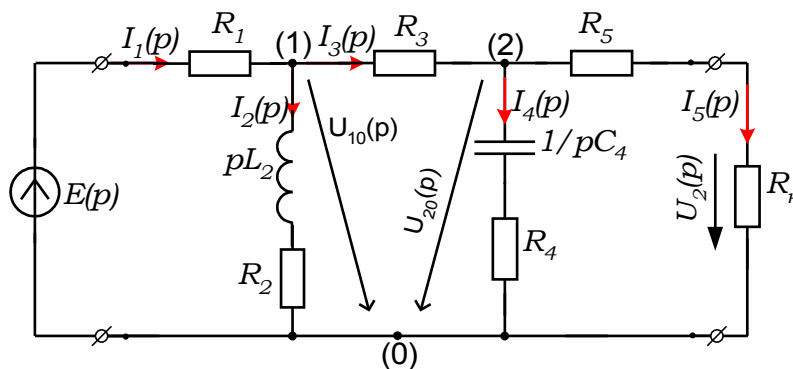
## Il problema

### Enunciato



$$\begin{aligned}
 R_1 &:= 200 & R_2 &:= 5 \\
 R_3 &:= 10 & R_4 &:= 10 \\
 R_5 &:= 10 & R_H &:= 200 \\
 L_2 &:= 0.2 \\
 C_4 &:= 10 \cdot 10^{-6}
 \end{aligned}$$

1. Trovare la funzione di trasferimento  $K_U(p)$ .



## Il problema risolto

$$\begin{aligned}
 Z_1(p) &:= R_1 & Z_2(p) &:= p \cdot L_2 + R_2 & Z_3(p) &:= R_3 & Z_4(p) &:= \frac{1}{p \cdot C_4} + R_4 & Z_5(p) &:= R_5 + R_H \\
 Z_1(p) &\rightarrow 200 & Z_2(p) &\rightarrow .2 \cdot p + 5 & Z_3(p) &\rightarrow 10 & Z_4(p) &\rightarrow \frac{100000}{p} + 10 & Z_5(p) &\rightarrow 210
 \end{aligned}$$

Si può calcolare la funzione di trasferimento  $U_2(p)$  e  $U_{10}(p)$  e  $U_{20}(p)$  e  $U_{10}(p)$  è  $U_{20}(p)$  e  $U_{10}(p)$  è  $U_{20}(p)$

În continuare:

$$Y_{11}(p) := Z_1(p)^{-1} + Z_2(p)^{-1} + Z_3(p)^{-1}$$

$$Y_{22}(p) := Z_3(p)^{-1} + Z_4(p)^{-1} + Z_5(p)^{-1}$$

$$Y_{12}(p) := -Z_3(p)^{-1}$$

$$Y_{21}(p) := Y_{12}(p)$$

$$Y_{12}(p) \text{ float, 3} \rightarrow -.100$$

În continuare:

$$Y(p) := \begin{pmatrix} Y_{11}(p) & Y_{12}(p) \\ Y_{21}(p) & Y_{22}(p) \end{pmatrix}$$

$$J(p) := \begin{pmatrix} E(p) \cdot Z_1(p)^{-1} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$J(p) \text{ float, 3} \rightarrow \begin{pmatrix} 5.00 \cdot 10^{-3} \cdot E(p) \\ 0 \end{pmatrix}$$

Pe baza relațiilor anterioare:

$$U(p) := Y(p)^{-1} \cdot J(p)$$

$$U(p) \text{ float, 3} \rightarrow \begin{bmatrix} 2.38 \cdot 10^{-5} \cdot \frac{2.20 \cdot 10^5 + 43 \cdot p}{2.26 \cdot p + 2.30 \cdot 10^{-3} \cdot p^2 + 1.10 \cdot 10^3} \cdot (.200 \cdot p + 5.) \cdot E(p) \\ \frac{5.00 \cdot 10^{-4}}{2.26 \cdot p + 2.30 \cdot 10^{-3} \cdot p^2 + 1.10 \cdot 10^3} \cdot (1.00 \cdot 10^4 + p) \cdot (.200 \cdot p + 5.) \cdot E(p) \end{bmatrix}$$

Amplasăm:

$$\text{ORIGIN} := 1$$

$$U_{20}(p) := U(p)_1$$

$$U_{20}(p) \left| \begin{array}{l} \text{float, 3} \\ \text{complex} \end{array} \right. \rightarrow \frac{5.2360 + 1.0234 \cdot 10^{-3} \cdot p}{2.26 \cdot p + 2.30 \cdot 10^{-3} \cdot p^2 + 1.10 \cdot 10^3} \cdot (.200 \cdot p + 5.) \cdot E(p)$$

În continuare:

$$K_u(p) := \frac{\frac{U_{20}(p)}{Z_5(p)} \cdot R_H}{E(p)}$$

$$K_U(p) \text{ float, 3} \rightarrow 2.27 \cdot 10^{-5} \cdot \frac{2.20 \cdot 10^5 + 43 \cdot p}{2.26 \cdot p + 2.30 \cdot 10^{-3} \cdot p^2 + 1.10 \cdot 10^3} \cdot (.200 \cdot p + 5.)$$

~~reducing the variable~~

$$A(p) := \text{numer}(K_U(p)) \left| \begin{array}{l} \text{simplify} \\ \text{expand, p} \rightarrow 4.42 \cdot 10^4 \cdot p + 1.10 \cdot 10^6 + 8.60 \cdot p^2 \\ \text{float, 3} \end{array} \right.$$

$$D(p) := \text{denom}(K_U(p))$$

$$D(p) \text{ float, 3} \rightarrow 9.98 \cdot 10^4 \cdot p + 101 \cdot p^2 + 4.84 \cdot 10^7$$

~~reducing the variable~~

$$K_U(p) := \frac{A(p)}{D(p)} \text{ float, 3} \rightarrow \frac{4.42 \cdot 10^4 \cdot p + 1.10 \cdot 10^6 + 8.60 \cdot p^2}{9.98 \cdot 10^4 \cdot p + 101 \cdot p^2 + 4.84 \cdot 10^7}$$

~~finding the roots~~

$$Z := A(p) \left| \begin{array}{l} \text{solve, p} \rightarrow \begin{pmatrix} -5.11 \cdot 10^3 \\ -25.0 \end{pmatrix} \\ \text{float, 3} \end{array} \right.$$

~~finding the roots~~

$$P := D(p) \left| \begin{array}{l} \text{solve, p} \rightarrow \begin{pmatrix} -492. - 485 \cdot i \\ -492. + 485 \cdot i \end{pmatrix} \\ \text{float, 3} \end{array} \right. \quad p_1 := P_2 \quad p_2 := P_1$$

$$p_1 = -492 + 485i$$

$$p_2 = -492 - 485i$$

~~finding the damping ratio and the natural frequency~~

$$\delta := |\text{Re}(p_1)|$$

$$\omega' := |\text{Im}(p_1)|$$

$$\delta = 492$$

$$\omega' = 485$$

~~finding the transfer function~~

$$H(p) := \frac{1}{p} \cdot K_U(p)$$

~~finding H(p) in the~~

$$H(p) \begin{cases} \text{float, 3} \\ \text{convert, parfrac, p} \\ \text{float, 3} \end{cases} \rightarrow \frac{2.27 \cdot 10^{-2}}{p} + 9.90 \cdot 10^{-3} \cdot \frac{4.19 \cdot 10^4 + 6.30 \cdot p}{p^2 + 988 \cdot p + 4.79 \cdot 10^5}$$

Încercăm să scriem (factorizăm) numitorul:

$$h(t) := H(p) \begin{cases} \text{invlaplace, p} \\ \text{float, 3} \\ \text{collect, e}^{(-492 \cdot t)} \end{cases} \rightarrow 2.27 \cdot 10^{-2} + 6.24 \cdot 10^{-2} \exp(-494 \cdot t) \cdot \cos(485 \cdot t) + .793 \cdot \exp(-494 \cdot t) \cdot \sin(485 \cdot t)$$

$$h(t) \text{ float, 3} \rightarrow 2.27 \cdot 10^{-2} + 6.24 \cdot 10^{-2} \exp(-494 \cdot t) \cdot \cos(485 \cdot t) + .793 \cdot \exp(-494 \cdot t) \cdot \sin(485 \cdot t)$$

3. Încercăm să scriem numitorul în funcție de rădăcinile lui  $K_U(p)$  (adăugăm) în  $e(t) := 10e^{-\alpha t}$ , cu  $\alpha = |p_{\min}|$  și  $\alpha = \delta$ . Cău  $p_{\min} = -\delta \pm j\omega$  în  $p_{\min} = -\delta + j\omega$  și  $p_{\max} = -\delta - j\omega$ .

Încercăm să scriem numitorul:

$$e(t) := 10 \cdot \exp(-494 \cdot t) \quad E(p) := e(t) \text{ laplace, t} \rightarrow \frac{10}{s + 494} \quad E(p) := \frac{10}{p + 492}$$

$$K_U(p) \begin{cases} \text{simplify} \\ \text{float, 3} \\ \text{complex} \end{cases} \rightarrow \frac{44200 \cdot p + 1.10000 \cdot 10^6 + 8.600 \cdot p^2}{9.98 \cdot 10^4 \cdot p + 101 \cdot p^2 + 4.84 \cdot 10^7}$$

Încercăm să scriem numitorul:

$$U_2(p) := K_U(p) \cdot E(p)$$

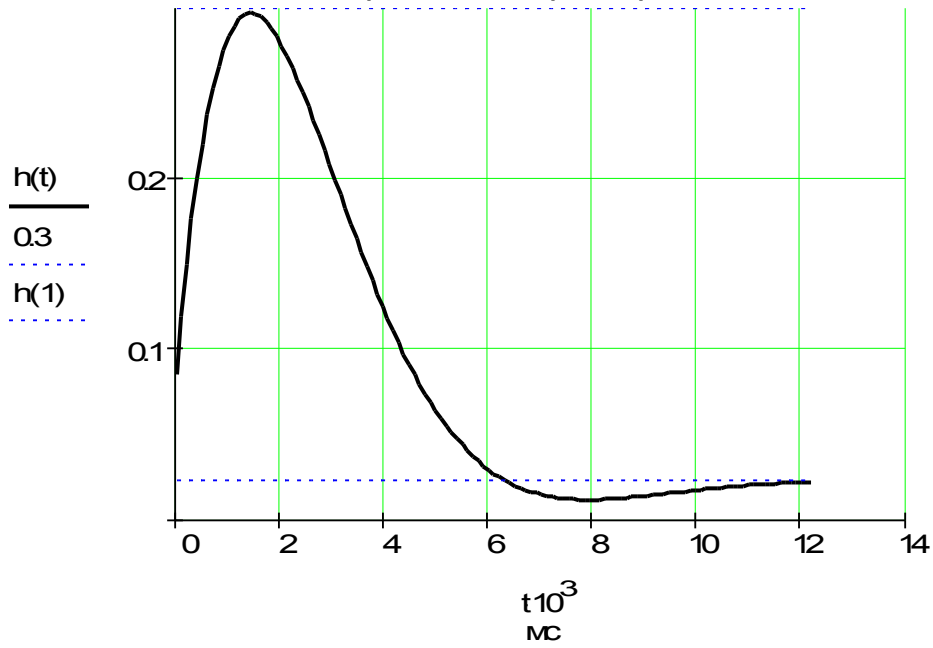
$$u_2(t) := U_2(p) \begin{cases} \text{invlaplace, p} \\ \text{float, 3} \end{cases} \rightarrow -7.82 \cdot \exp(-492 \cdot t) + 8.67 \cdot \exp(-494 \cdot t) \cdot \cos(485 \cdot t) + 7.33 \cdot \exp(-494 \cdot t) \cdot \sin(485 \cdot t)$$

$$u_2(t) \text{ float, 3} \rightarrow -7.82 \cdot \exp(-492 \cdot t) + 8.67 \cdot \exp(-494 \cdot t) \cdot \cos(485 \cdot t) + 7.33 \cdot \exp(-494 \cdot t) \cdot \sin(485 \cdot t)$$

Încercăm să

$$t := 0, \frac{1}{20 \cdot \delta} \dots \frac{6}{\delta} \quad h(0) = 0.0851 \quad h(1) = 0.0227$$

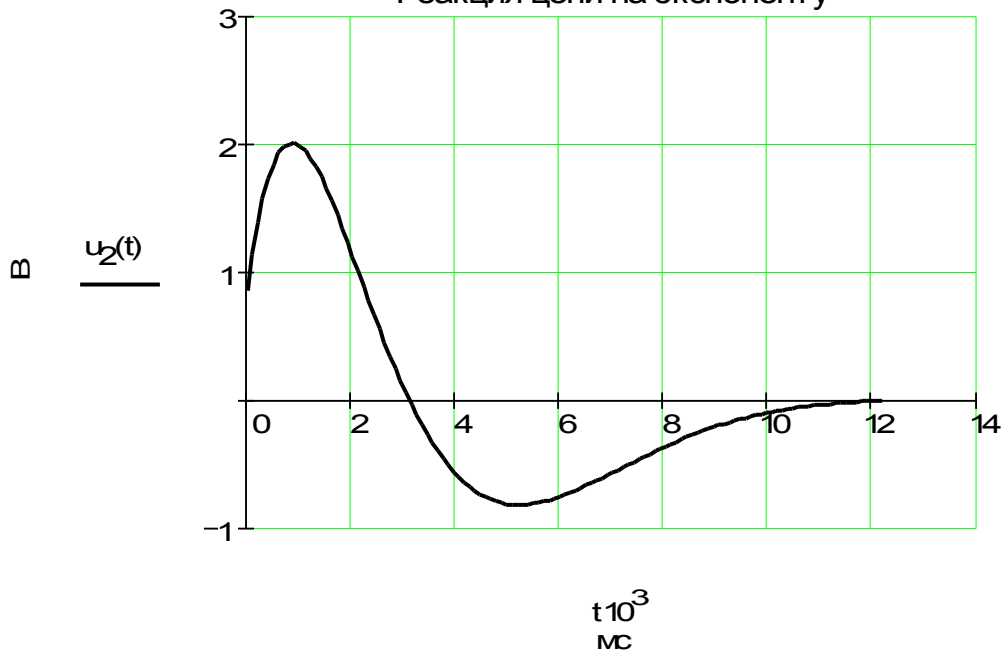
Переходная характеристика

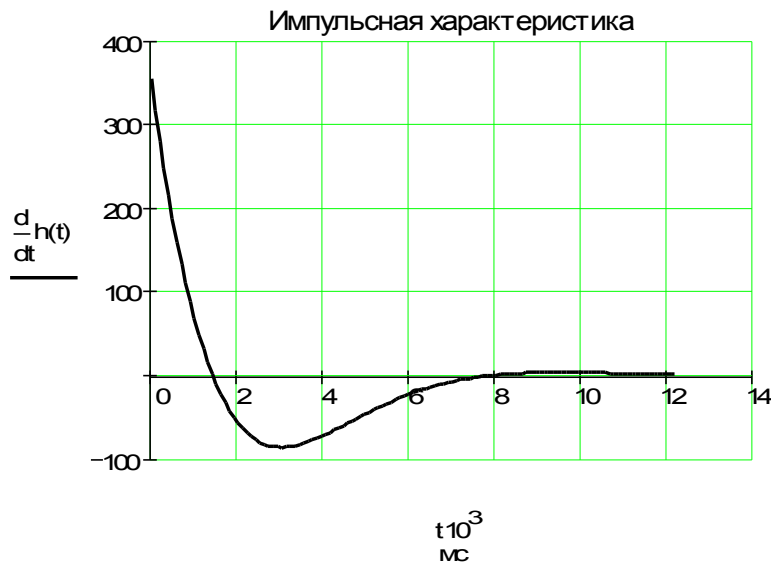


$$u_2(0) = 0.85$$

$$u_2(1) = 0$$

Реакция цепи на экспоненту





Impulse response derivative

$$Z(p) := Z_1(p) + \frac{1}{\frac{1}{Z_2(p)} + \frac{1}{Z_3(p) + \frac{1}{\left(\frac{1}{Z_4(p)} + \frac{1}{Z_5(p)}\right)}}}$$

$$Z(p) \left| \begin{array}{l} \text{simplify} \\ \text{float, 3} \end{array} \right. \rightarrow 5 \cdot \frac{2.31 \cdot 10^8 + 4.75 \cdot 10^5 \cdot p + 483 \cdot p^2}{5.63 \cdot 10^6 + 6.35 \cdot 10^3 \cdot p + 11 \cdot p^2}$$

$$P := Z(p) \left| \begin{array}{l} \text{solve, p} \\ \text{float, 3} \end{array} \right. \rightarrow \begin{pmatrix} -492 - 485 \cdot i \\ -492 + 485 \cdot i \end{pmatrix} \quad p_1 := P_2 \quad p_2 := P_1$$

$$p_1 = -492 + 485i \quad p_2 = -492 - 485i$$

4. Impulse response derivative

$$K_U(j \cdot \omega) \left| \begin{array}{l} \text{simplify} \\ \text{float, 3} \end{array} \right. \rightarrow 200 \cdot \frac{-2.21 \cdot 10^5 \cdot i \cdot \omega - 5.50 \cdot 10^6 + 43 \cdot \omega^2}{-9.98 \cdot 10^4 \cdot i \cdot \omega + 101 \cdot \omega^2 - 4.84 \cdot 10^7}$$

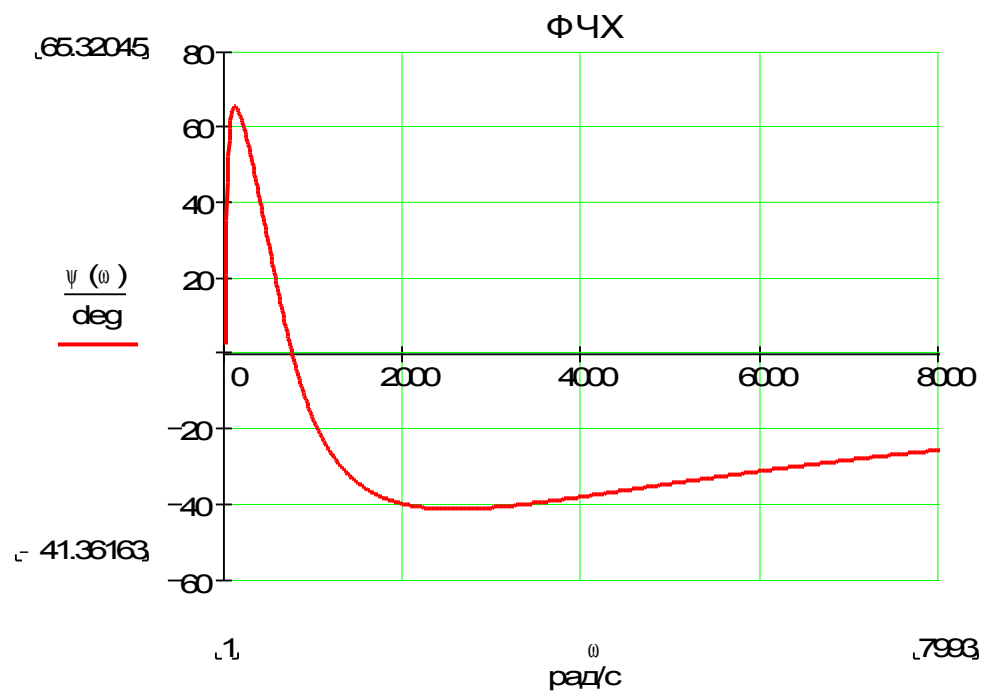
Impulse response derivative

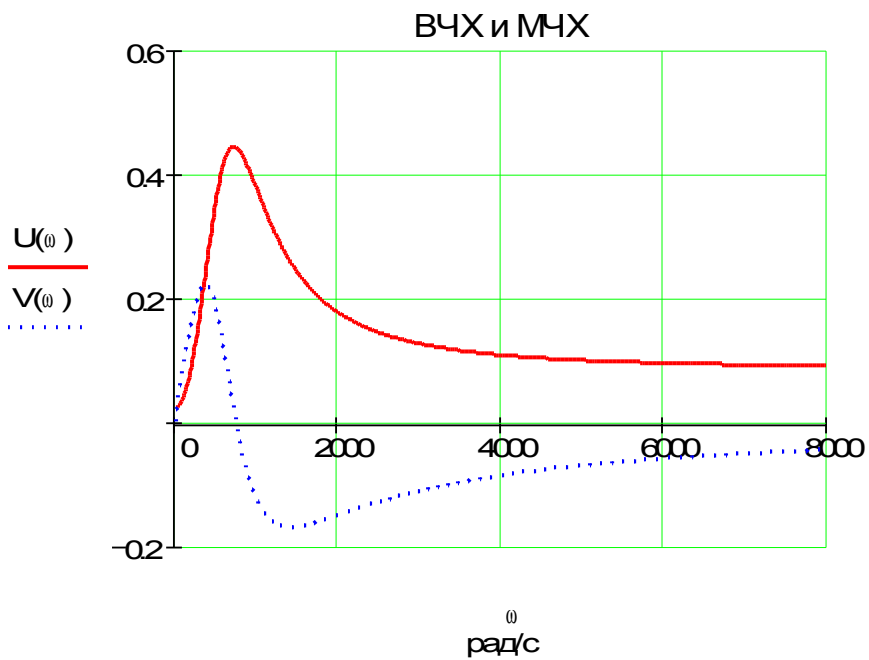
$$A(\omega) := |K_U(j \cdot \omega)| \quad U(\omega) := \text{Re}(K_U(j \cdot \omega)) \quad V(\omega) := \text{Im}(K_U(j \cdot \omega))$$

$$\psi(\omega) := \text{atan}\left(\frac{V(\omega)}{U(\omega)}\right)$$

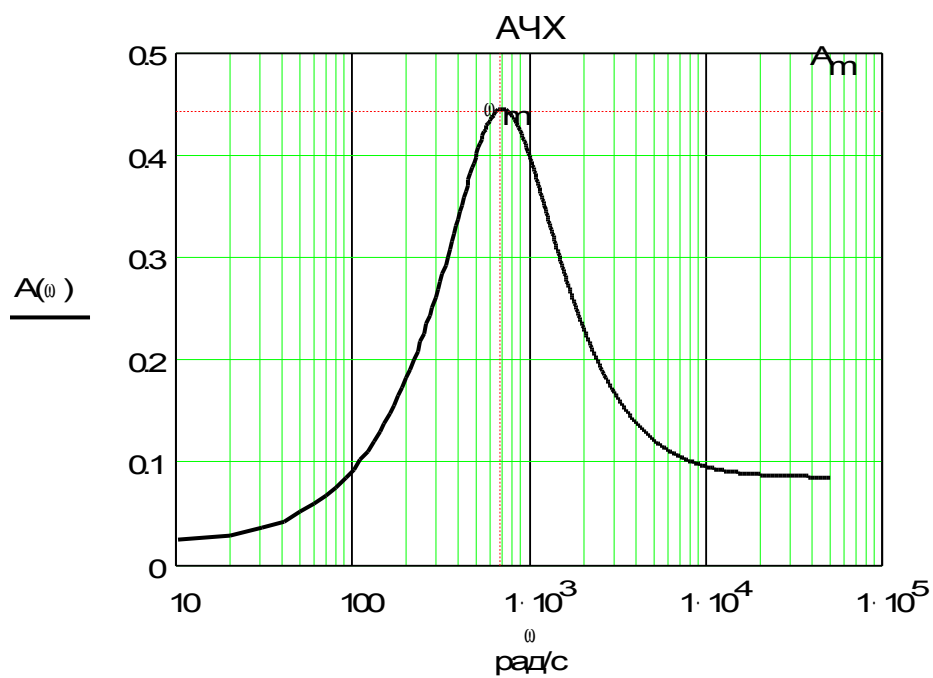
$$\omega := 1, 10.. 8000$$

$$A(0) = 0.02273 \quad A(1000000) = 0.08515 \quad \omega_m := 695 \quad A_m := 0.44525$$

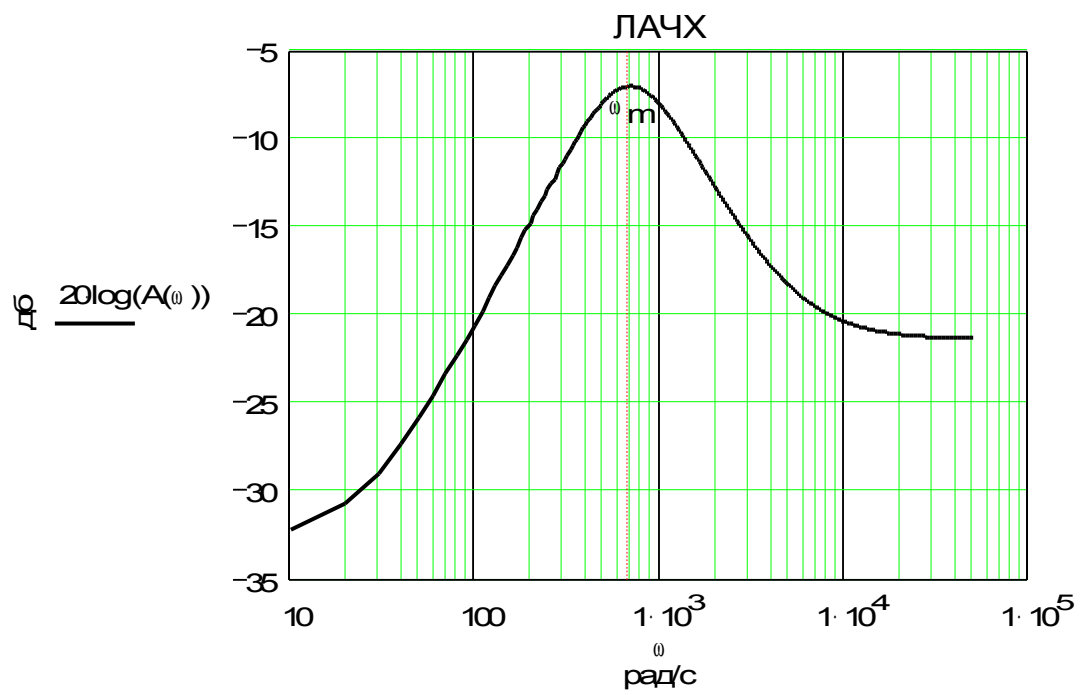
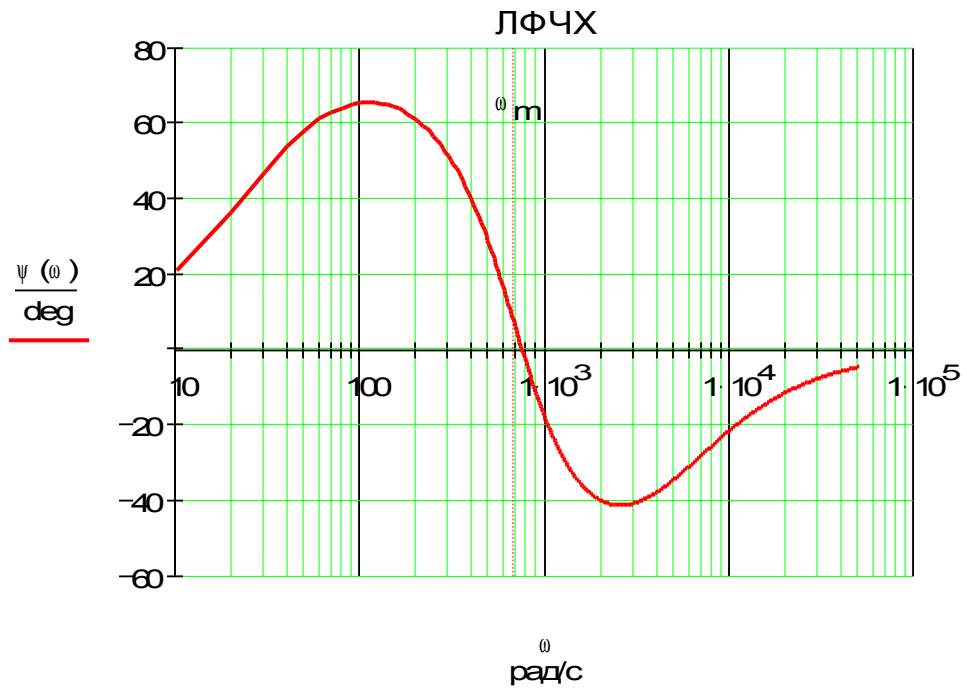




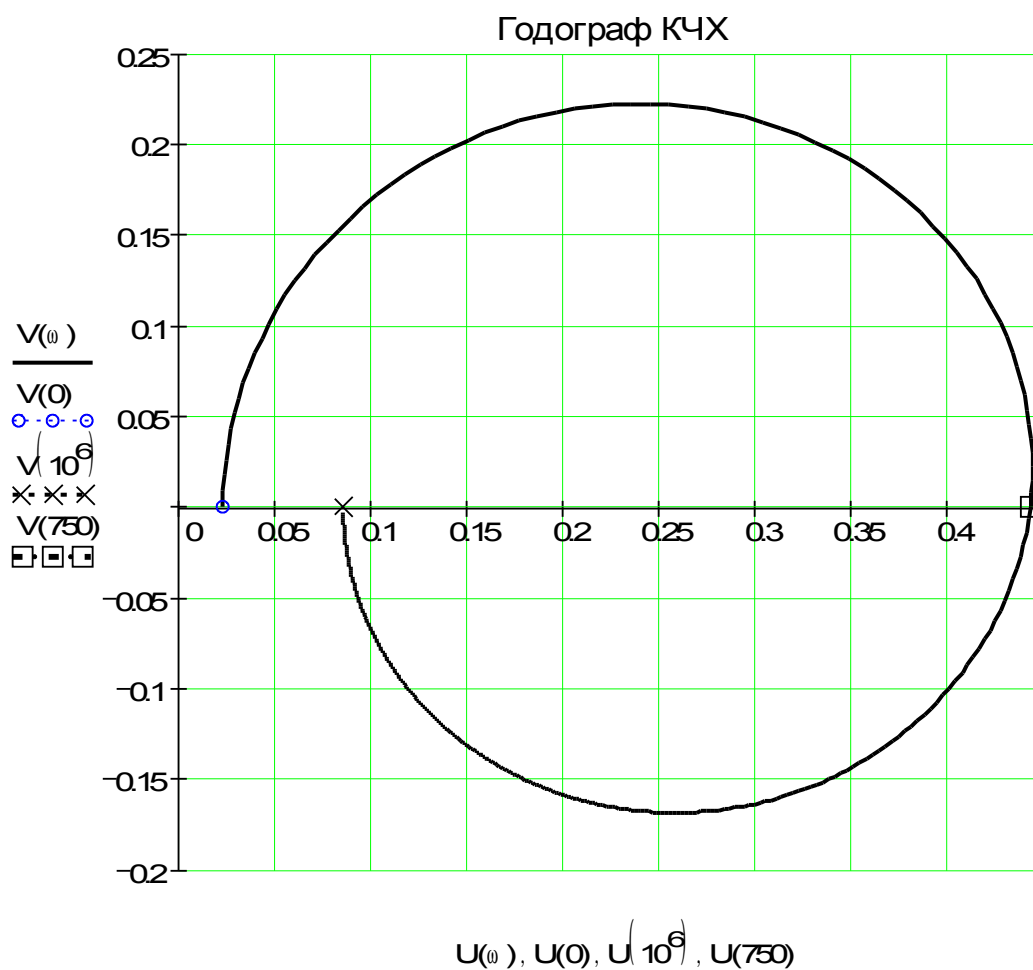
$\omega := 10, 20 \dots 50000$







$\omega := 0, 10 \dots 100000$



Задачи для самостоятельной работы по разделам “Временные характеристики”, “Частотные характеристики”, “Устойчивость колебательных процессов” имеются в литературе [4], [5] и [8].

#### 4. Вопросы к зачету.

1. Силы, действующие на материальную точку, совершающую колебательные движения: восстанавливающая, возмущающаяся и сила трения. Кинетическая и потенциальная энергии систем.
2. Характерные признаки любой колебательной системы. Условия возникновения колебаний. Типы колебаний.
3. Идеализированные пассивные элементы электрических схем и их компонентные уравнения. Законы электрических цепей для мгновенных значений.
4. Свойства идеализированного операционного усилителя (ОУ) как схемного элемента. Линейные статические элементы на ОУ.
5. Модели элементов механических систем с линейным перемещением: масса, трение, упругость. Законы Ньютона.
6. Модели элементов механических систем с вращательным движением: момент инерции, трение, скручивающая пружина. Составление уравнений, описывающих вращательное движение.
7. Математическая модель двигателя постоянного тока в виде дифференциального уравнения.
8. Описание динамики электрической цепи или системы с помощью дифференциального уравнения  $n$ -го порядка (модель вход-выход). Запись ДУ в операторной форме с помощью дифференциального оператора. Передаточные функции.
9. Линеаризация характеристик статических элементов.
10. Линеаризация физических систем (линеаризация диф. уравнений).
11. Общее решение линейного ДУ второго порядка с правой частью. Принцип суперпозиции. Начальные условия. Собственные колебания динамических систем.
12. Разряд конденсатора на индуктивную катушку. Три вида разряда.
13. Включение простого колебательного контура под постоянное напряжение. Три вида переходного процесса.
14. Переменные состояния динамической системы.
15. Дифференциальные уравнения состояния. Схемы моделирования.
16. Переходная матрица состояния. Полное решение уравнений состояния с помощью переходной матрицы состояния.
17. Прямое преобразование Лапласа и его свойства (теоремы).
18. Уравнения электрического равновесия электрической цепи в операторной форме.
19. Операторные схемы замещения идеализированных двухполюсных элементов и электрических цепей.
20. Обратное преобразование Лапласа. Теорема разложения. Табличный и программный метод преобразования Лапласа.

21. Решение уравнений состояния операторным методом.
22. Операторные характеристики линейных электрических цепей и систем. Полностью-нулевая диаграмма.
23. Схемы моделирования в переменных состояниях: канонические формы управляемости и наблюдаемости.
  21. Операторные схемы замещения электрических цепей.
  22. Операторный метод расчета переходных процессов в электр. цепях.
  23. Активные цепи и системы с обратной связью и их передаточные функции. Связь между передаточной функцией и уравнениями состояния.
  24. Структурные схемы. Преобразования структурных схем.
  25. Преобразования подобия.
  26. Единичные функции и их свойства. Временные характеристики линейных электрических цепей и систем.
  27. Применение операторного метода для определения реакции цепи или системы управления на тестовые входные сигналы.
  28. Передаточные функции и временные характеристики типовых звеньев систем управления.
  29. Показатели качества переходных процессов цепей и систем второго порядка. Требования к временным характеристикам при синтезе.
  30. Моделирование электрических цепей и систем с помощью MATLAB.
    31. Комплексные частотные характеристики цепей и систем.
    32. Логарифмические характеристики цепей и систем.
    34. Характеристики систем управления. Чувствительность.
    35. Точность в установившихся режимах.
    36. Понятие о резонансе в электрических цепях.
    37. Резонанс в последовательном колебательном контуре.
    38. Резонанс в параллельном колебательном контуре.
    39. Резонанс в связанных контурах.
    40. Некоторые применения теории резонанса.
    41. Пассивные и активные электрические фильтры.
    42. Определение устойчивости равновесного состояния системы.
    43. Критерий устойчивости Русса – Гурвица.
    44. Критерий устойчивости Михайлова.
    45. Частотный критерий устойчивости Найквиста. Принцип аргумента.
    46. Запасы устойчивости замкнутой системы.

## 5. Контроль знаний.

Промежуточный контроль знаний студентов по дисциплине предусматривает две контрольные точки в 4 семестре, оценки по которым выставляются на основе информации о посещении лекционных занятий, а также на основе тестирования теоретических знаний, полученных за прошедший период обучения. Предусмотрено тестирование по темам:

1. Временные характеристики колебательных систем второго порядка – 4 семестр, 1-я контрольная точка.

2. Критерии устойчивости линейных колебательных систем – 4 семестр, 2-я контрольная точка.

Для допуска к зачету достаточными основаниями являются выполнение и защита РГР. Для подготовки ответа студенту отводится 40 мин. Каждый билет содержит один теоретический вопрос и две задачи. Для сдачи студентом зачета необходимо решить все задачи, ответить на теоретический вопрос и иметь конспект разделов, предназначенных для самостоятельного изучения.

# Образец билета к зачету

## ԱՊՐԷՆՈՎԱԿԱՆԱԿԱՆԱԿՆԵՐ

Օգտագործելով հարկի և հարկի

" " ֆյ 2007 թ

Հարկի համար

Համար \_\_\_\_\_

Բաժնի Ան՝

Կառավարիչ

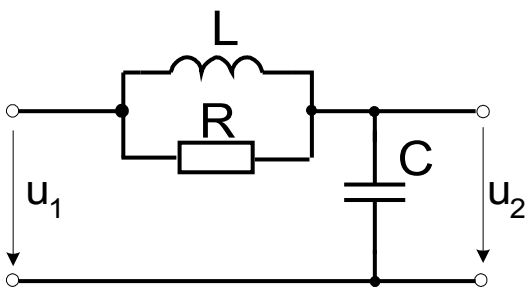
ԲՈՒՄ

Արտագծող

Գրանց

### Ան՝ 1

1. Ինչպես կազմակերպել լարված և անլարված շղթաների (հարմարագրություն) երկուսն էլ իրար հանդեպ:



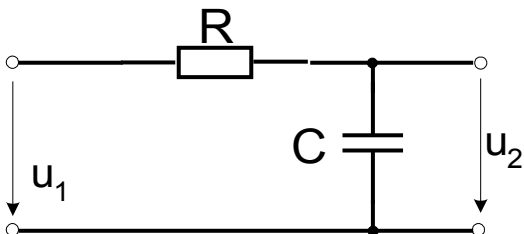
$$R = 80 \text{ Օմ}$$

$$L = 0,8 \text{ Հ}$$

$$C = 20 \text{ մԳ}$$

2. Ինչպես կազմակերպել լարված և անլարված շղթաների (հարմարագրություն) երկուսն էլ իրար հանդեպ:

Ինչպես կազմակերպել



$$R = 100 \text{ Օմ}$$

$$C = 20 \text{ մԳ}$$

3. Ինչպես կազմակերպել լարված և անլարված շղթաների (հարմարագրություն) երկուսն էլ իրար հանդեպ: