Федеральное агентство по образованию
АМУРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
(ГОУВПО «АмГУ»)
Факультет математики и информатики

УТВЕРЖДАЮ
Зав. кафедрой МАиМ
Т.В. Труфанова
«___»________2007г.

ФИЛОСОФИЯ МАТЕМАТИКИ

Учебно – методический комплекс дисциплины

для специальностей
010101 – математика
010501 – прикладная математика

Составитель: В.П. Нейман

Благовещенск
2007

ББК

К

Печатается по решению редакционно-издательского совета факультета математики и информатики Амурского государственного университета

Нейман В.П.

Философия математики. Учебно – методический комплекс дисциплины для студентов очной формы обучения специальностей 010101 «Математика» и 010501 «Прикладная математика и информатика». – Благовещенск: Амурский гос. ун–т, 2007. − 42 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ.

1. РАБОЧАЯ ПРОГРАММА

по дисциплине «Философия математики»

для специальностей: 010101–«Математика»,
010501–«Прикладная математика»

Курс 4 Семестр 7

Лекции: 32 час.(010101), Экзамен (нет).
16 час.(010501)

Практические занятия 16 час. Зачет 7 семестр.

Лабораторные занятия (нет).

Самостоятельная работа: 22 час.(010101),
24 час.(010501).

Всего: 70 часов (010101),
56 часов (010501).

1. ЦЕЛИ И ЗАДАЧИ ДИСЦИПЛИНЫ, ЕЕ МЕСТО В УЧЕБНОМ ПРОЦЕССЕ

1.1 . Цель преподавания учебной дисциплины

Целью преподавания философии математики является создание философской основы для глубокого полного освоения курсов математических дисциплин. Изучение философии математики необходимо для четкого определения математических понятий, категорий, понимания оптимального формирования аксиоматического подхода, использования определенных методов познания, выработки умений правильного использования теории, гипотез, понимания опасности однобокого подхода к изучению математических дисциплин и схематичного использования формальных или логических высказываний.

1.2. Задачи изучения дисциплины

Основная задача состоит обеспечении математической подготовки студентов на современном уровне и выработке правильного методологического подхода к изучению и изложению математики.

1.3 . Перечень дисциплин с указанием разделов, усвоение которых студентами необходимо для изучения данной дисциплины

Философия, логика, математические дисциплины, методология, история математики.

1.4 . Перечень основных умений и навыков, приобретаемых студентами при изучении дисциплины.

Студенты должны усвоить основные философские понятия, философские школы и направления, существовавшие с древнейших времен по настоящее время, научиться использовать основные методы познания, грамотно определять понятия, формулировать теоремы и применять надежные методы доказательства, понимать важность комплексного подхода к изучению современных математических проблем.

2. СОДЕРЖАНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ

2.1. Наименование разделов (тем), их содержание, объем в часах лекционных занятий.

№ п/п	Тема, ее содержание	Кол-во часов	
	VII семестр	010101	010501
1.	Предмет философии математики. Аксиоматика. Метод дедуктивных выводов. Логика дедуктивного вывода. Проблема истинности исходных аксиом и истинности заключения. Анализ успехов математики, достигнутых с помощью дедуктивного метода.	2	1
2.	Прошлое – плодотворный источник познания настояще-	4	2

	го. Становление математических истин. Рациональное, критическое восприятие явлений природы древнегреческими мыслителями. Научные школы. Рациональный характер натурфилософии пифагорейской школы. Варианты «математизированного плана» строения вселенной.		
3.	Роль математических законов в открытии истин о природе (по сочинениям греческих мыслителей). Расцвет математических истин.	2	1
4.	От физического объяснения к математическому описанию явлений действительного мира. Научный метод Г. Галилея.	2	1
5.	Интуиция и дедукция – методы познания (Р. Декарт). Диалектика философии Декарта.	2	1
6.	Принцип наименьшего действия П. Ферма, П. Мопертюи, Лагранжа, У. Гамильтона. Возникновение вариационного исчисления. Философские аспекты.	2	1
7.	Б. Фонтенель, Т. Гоббс, Дж. Локк, Дж. Беркли, Д. Юм. Ощущения. Восприятия. Законы, относящиеся к объективно существующему миру. Вопросы ценности логической дедуктивной схемы.	2	1
8.	Противоречивость математики. Возникновение различных геометрий, арифметик, алгебр. Г. Риман, Лобачевский, А.Келли, Г. Гюнтер. Критерий применимости законов арифметики. Г. Гельмгольц.	4	2
9.	Онтологизация математики.	2	1
10.	Логицизм. Г. Лейбниц, Р. Дедекинд, Г. Фреге, Б. Рассел.	2	1
11.	Интуиционизм. Р. Декарт, Б. Паскаль, И. Кант, Э. Бауэр.	2	1
12.	Формализм. Д. Гильберт, В. Аккерман, Дж. Нейман.	2	1
13.	Теоретико–множественные основания математики. Г. Кантор, Ю. Дедекинд	4	2
14.	Философские проблемы современной математики.	2	1
	Итого:	32	16

2.2. Практические (семинарские) занятия, объем в часах.

№ п/п	Тема, ее содержание	Кол. часов
1.	Абстракции математики. Неопределяемые и определяемые понятия. Аксиоматический подход.	1
2.	Закон противоречия, закон исключенного третьего, правила дедуктивного рассуждения по Аристотелю.	1
3.	Создание концепции логического, математического подхода к познанию природы.	1
4.	Афинский и александрийский период греческой культуры. Евклид, Апполоний, Архимед, Клавдий Птолемей.	1
5.	Развитие понятия числа по трудам Диофанта, Евклида, Герона, Л. Пачоли, М. Штифеля, Ф. Виета, Дж. Непера, А. Арно.	1
6.	Краткий анализ состояния философских основ математики периодов (II – XII вв., XIII – XVII вв., XVIII – XIX вв., XX в.)	2
7.	Диалектика философии Декарта и ее роль в возникновении и развитии дифференциального и интегрального исчисления.	2
8.	И. Кеплер, Н. Коперник, Г. Галилей. Рационализм, гармонические математические отношения в описании явлений природы, простая гармоничная математическая теория.	1
9.	Философские концепции Ф. Бэкона, Ж. Фурье, Лапласа, Гаусса, О. Коши, Д. Бернулли. Агностицизм Лагранжа и Лапласа.	1
10	И. Ньютон, Лейбниц.	1
11	Логицизм и интуиционизм. Аксиомы сводимости, выбора, бесконечности.	1
12	Формализм. Теоретико-множественное направление. Система аксиом Цермело-Френкеля. Проблема разрешимости, проблема непротиворечивости.	1
13	Заключительное занятие.	2
	Итого:	16

2. КРАТКИЙ КОНСПЕКТ ЛЕКЦИЙ

Тема 1. Предмет философии математики. Аксиоматика. Метод дедуктивных выводов. Логика дедуктивного вывода. Проблема истинности исходных аксиом и истинности заключения. Анализ успехов математики, достигнутых с помощью дедуктивного метода

Философия в сфере математики способствует выработке адекватного понимания математического знания, решению естественно возникающих вопросов о предмете, и методах математики, специфике ее понятий, а если несколько упростить дело, то можно сказать, что ее задача состоит в том, чтобы ответить на вопрос: «Что такое математика?».

Рассмотрение содержания науки может и должно в конечном итоге привести к уяснению некоторых специфических черт ее как таковой, к формулировке общих принципов, которые отличают ее от других видов знания, т. е. к философскому, а точнее, к гносеологическому ее определению.

Действительное философское понимание математики таким образом может предстать только как сумма выводов, сумма определений, полученных на основе анализа различных ее сторон.

Студент-математик, как правило, убежден, что все, что доказано, доказано строго и окончательно.

В этом выражается интуитивное представление о математике как о строгой дедуктивной науке, разделяемое всеми математиками и нематематиками вплоть до XX в.. В настоящее время, однако, есть серьезные доводы за то, что это убеждение неверно.

Таким образом, если мы хотим дать адекватное представление о математике, необходимо прибегнуть к исследованиям, прежде всего в историческом плане различных ее сторон, в том числе ее структуры, функции, отношения к другим наукам, показывая каждый раз, каким образом и в силу каких факторов устаревшие воззрения заменялись новыми, более соответствующими действительному содержанию этой науки, хотя и менее очевидными для здравого смысла.

Поставлена задача коротко проследить изменение воззрений на математику, начиная с ее возникновения как теоретической (дедуктивной) науки и кончая рассмотрением наиболее важных проблем современного ее понимания.

Тема 2. Прошлое – плодотворный источник познания настоящего. Восприятие явлений природы древнегреческими мыслителями. Натурфилософия пифагорейской школы

Первой философской теорией математики был пифагореизм, который рассматривал математическое знание как необходимую основу всякого другого знания и как наиболее истинную его часть. Как философское течение пифагореизм выходит за рамки собственно философии математики, но в его центре тем не менее лежит определенное истолкование сути математического знания.

Есть основание предполагать, что ни египтянам, ни вавилонянам не была известна сама идея дискурсивного доказательства, обеспечивающая необходимость и истинность результата в силу правил логики. Простые правила выводились из опыта, более сложные сводились к простым посредством той или иной мысленной операции, но это сведение никогда не оформлялось в качестве строгой логической процедуры.

Громадный сдвиг, осуществленный в греческой математике, заключается в идее доказательства или дедуктивного вывода. Доказательство первых геометрических теорем приписывается выдающемуся греческому философу Фалесу из Милета, который жил между 625-547 гг. до н.э. Согласно Проклу, Фалес впервые доказал, что вертикальные углы равны, что углы при основании равнобедренного треугольника равны и что диаметр делит круг пополам. Если верно, что дедуктивный метод в математику был внесен Фалесом, то надо констатировать, что математика в Греции, начиная с этого момента, развивалась чрезвычайно быстрыми темпами, и прежде всего в плане логической систематизации. Исследования Гиппократа Хиосского, связанные с задачей о квадратуре круга выполненные на рубеже V и IV вв. до н.э., т. е. примерно за 100 лет до Евклида, находятся уже на таком уровне строгости, что, как замечает Д. Стройк, они вполне могли бы быть отнесены и к послеевклидовской математической традиции. На фоне многих веков медленного эмперического развития зачатков математического знания в Египте, Вавилоне, Китае и Индии развитие математики в Греции было поистине революционным. В результате математика оформилась как особая наука, она нашла свой специфический метод - метод дедуктивного доказательства, который определяет ее развитие до настоящего времени.

Неудивительно, что в математике греки увидели не просто практически полезное средство, но, прежде всего, выражение глубинной сущности мира, нечто связанное с истинной и неизменной природой вещей. Они космологизировали и мистифицировали математику, сделав ее исходным пунктом во всех подходах к описанию действительности. Эта мистификация математики нашла свое выражение в философском учении Пифагора и его последователей. Основной тезис пифагореизма состоит в том, что «все есть число».

Пифагорейская метафизика переступила все грани благоразумия.

Философия превратилась у пифагорейцев в мистику чисел и геометрических фигур, убеждение в истинности того или иного утверждения о мире достигалось сведением его к числовой гармонии.

Тема 3. Роль математических законов в открытии истин о природе (по сочинениям греческих мыслителей)

Наряду с пифагорейской философией, провозглашающей математические объекты последними сущностям мироздания, существовала, хотя и в недостаточно выраженной форме, другая, более реалистическая (с современной точки зрения) философия математики, идущая от атомизма Левкиппа и Демокрита. Известно, что Демокрит отрицал возможность геометрических построений в пустоте: геометрические фигуры были для него не умозрительными сущностями, а прежде всего материальными телами, состоящими из атомов. Атомы Демокрита 'являются неделимыми, также и применительно к геометрическим объектам. Демокрит не допускал бесконечной делимости отрезка.

Дело в том, что допущение бесконечной делимости отрезка приводило к парадоксам, что было хорошо известно Демокриту. Действительно, если допустить, что отрезок разделен до бесконечности, то последние элементы деления равны нулю (не имеют никакой длины), ибо если они не равны нулю, то деление нельзя считать законченным. Но если все элементы деления равны нулю, то и весь отрезок равен нулю, так как любое количество нулей не может дать конечной величины.

Идея атомистов, однако, содержала в себе ценный эвристический принцип. Известно, что исходя из нее греческий математик V в. до н. э. Антифонт разработал метод вычисления площадей криволинейных фигур, первый прообраз исчисления бесконечно малых. Этот метод состоял в следующем. В криволинейную фигуру вписывалась прямолинейная фигура, по отношению к которой было достаточно очевидно, что при последовательном удвоении числа ее сторон площадь ее приближается к площади криволинейной фигуры.

Метод Антифонта был впоследствии усовершенствован в логическом отношении Евдоксом и Архимедом и вошел в историю математики под именем метода исчерпывания. В методе исчерпывания важной частью рассуждения является строгое доказательство того, что площадь (объем) вписанной фигуры при удвоении сторон (граней отличается от площади (объема) описанной фигуры на сколь угодно малую величину.

Широкая и в определенном смысле исчерпывающая критика пифагореизма была дана Аристотелем в «Метафизике». Хотя Аристотель - непосредственный ученик Платона, его мировосприятие отличается от платоновского радикальным образом. Аристотель скорее исследователь природы, чем умозрительный философ. Он ценит логику и факты больше, чем любые умозрительные представления.

Наука для Аристотеля – не конструирование гармоний, но отыскание причин явлений.

Отношение Аристотеля к пифагорейцам отрицательное и даже пренебрежительное. Пифагорейская философия ложна прежде всего потому, что она не раскрывает причин вещей.

Основной грех пифагорейцев состоит, по Аристотелю, в том, что они мыслят о природе, не считаясь с фактами, искусственно приводят факты в соответствие с числами.

Математика по Аристотелю – это не знание об идеальных сущностях, существующих независимо от вещей, но знание, отвлеченное от вещей.

Упадок пифагореизма в греческой философии и появление в системе Аристотеля более правильного представления о задачах науки вообще и о месте математики, в частности, не привело, однако, к полному исчезновению пифагорейских тенденций. Несмотря на свою внешнюю наивность, пифагореизм представляет собой довольно сложное, многокомпонентное воззрение, открывающее простор для различных вариаций. Не признавая пифагореизма как учения о. математических началах мира, можно признавать его как определенный метод аргументации, как способ обоснования истины через обращение к ее внутренней законченности, гармонии, симметрии. В этом качественном плане пифагореизм оказал громадное влияние на последующее развитие философской и научной мысли вплоть до XIX в.

Тема 4. От физического объяснения к математическому описанию. Научный метод Галилея

До XVII в. система научной мысли и самый характер научной деятельности находились под сильным влиянием Аристотеля. Основной особенностью его подхода к природе был поиск материальных или качественных объяснений.

В силу ряда обстоятельств аристотелевский подход к изучению природы сохранял господствующее положение и в средние века, и в эпоху Возрождения. Сочинения Аристотеля были поистине всеобъемлющими и получили более широкое распространение, чем работы других греческих авторов.

Выдвинутый Галилеем грандиозный план прочтения «книги природы» провозгласил совершенно новую концепцию целей научного исследования и определил роль математики в достижении этих целей. Именно с предложенного Галилеем плана исследования и постижения природы берет начало современная математическая физика. Что привело Галилея к поистине революционному пересмотру методологии науки, остается неясным.

В небольшом, ныне довольно известном сочинении «Пробирных дел мастер» (1623) Галилей писал: «Философия природы написана в величайшей книге, которая всегда открыта перед нашими глазами,— я разумею Вселенную, но понять ее сможет лишь тот, кто сначала выучит язык и постигнет письмена, которыми она начертана. А написана эта книга на языке математики, и письмена ее — треугольники, окружности и другие геометрические фигуры, без коих нельзя понять по-человечески ее слова: без них — тщетное кружение в темном лабиринте. ([13], с. 58.)».

Дерзкий новаторский подход Галилея, развитый его последователями, состоял в том, чтобы получить количественные описания явлений, представляющих научный интерес, независимо от каких бы то ни было физических объяснений. Поясним на примере. Представим себе простую ситуацию: мяч, выпущенный из руки, падает на землю. Почему он падает? В объяснение этого можно приводить бесчисленное множество гипотез. Галилей рекомендует поступить иначе. По мере того как время, отсчитываемое от начала падения, увеличивается, растет и расстояние, пройденное мячом от начальной точки. На математическом языке и расстояние, проходимое мячом при свободном падении, и время, отсчитываемое от начала падения, называются переменными, ибо в процессе падения и то и другое изменяется. Галилей попытался найти математическое соотношение между этими переменными. Полученный им результат нетрудно записать с помощью принятой в современной науке «стенографии» — в виде формулы. Формула, о которой идет речь, имеет вид $s = \frac{gt^2}{2} = 4.9t^2$ (где g = *9,8* м/с^2 -ускорение свободного падения вблизи поверхности Земли). Она означает, что расстояние (в метрах), проходимое падающим мячом за t секунд, в 4,9 раза больше квадрата числа секунд. Например, за 3 с мяч пройдет при свободном падении $\mathbf{4.9} \times \mathbf{3}^2 = \mathbf{44.1}$ м, за 4 с: $\mathbf{4.9} \times \mathbf{4}^2 = \mathbf{78.4}$ м и т. д.

Отметим, что формула компактна, точна и отличается количественной полнотой. При любом значении одной переменной (в нашем примере — времени) формула позволяет точно вычислить соответствующее значение другой переменной (расстояния). Эти вычисления могут быть выполнены при любом (в действительности неограниченном) числе значений временной переменной, поэтому простая формула $s = 4.9t^2$ в действительности содержит в себе бесконечно много информации.

Следует подчеркнуть, однако, одно важное обстоятельство: эта математическая формула описывает то, что происходит, не объясняя причинной связи, т. е. ничего не говорит о том, почему мяч падает. Она лишь дает нам количественную информацию о том, как происходит падение мяча. Обычно ученый пытается установить математическую зависимость (выражаемую формулой) между переменными, которые, как он надеется, имеют причинно-следственную связь. Но для успешного решения этой задачи — установления математической зависимости между переменными — ученому вовсе не обязательно исследовать или понимать причинную зависимость. И это отчетливо понимал Галилей, отстаивая приоритет математического описания перед менее успешным качественным исследованием и поиском причинных связей в природе.

Галилей решительно отдавал предпочтение поиску математических формул, описывающих явления природы. Сама по себе эта идея, как и большинство идей, рожденных гениями, поначалу не производит особого впечатления. Много ли проку в «голых» математических формулах? Ведь они ничего не объясняют. Они просто описывают происходящее на точном языке, не допускающем недомолвок и иносказаний. Тем не менее именно формулы оказались наиболее ценным знанием, которое людям удалось получить о природе. Поразительные практические и теоретические достижения современной науки стали возможны вследствие того, что человечество накопило количественное описательное знание и научилось пользоваться им, а отнюдь не благодаря метафизическим, теологическим и даже механическим объяснениям причин наблюдаемых явлений.

Тема 5. Интуиция и дедукция – методы познания. Диалектика философии Декарта

В XVII в. Декарт и Галилей как бы реформировали саму природу научной деятельности. Они критически пересмотрели понятия, которыми должна оперировать наука, по-новому определили цели и задачи научной деятельности и даже изменили саму методологию науки. Новые цели и новая методология не только придали естествознанию небывалую силу, но и провозгласили нерасторжимый союз с математикой. Декарт и Галилей практически свели теоретическую физику к математике. Чтобы понять, чем вдохновлялось развитие математики начиная с XVII в., нам следует познакомиться с некоторыми идеями Декарта.

Применять математический метод для установления истины, по мнению Декарта, надлежит потому, что подобный подход не скован рамками предмета исследования: «Это более мощный инструмент познания, чем все остальные, что дала нам человеческая деятельность, ибо он служит источником всего остального». В том же духе выдержан и следующий отрывок из декартовых «Правил для руководства ума» (правило IV):

К области математики относятся только те науки, в которых рассматривается либо порядок, либо мера, и совершенно несущественно, будут ли это числа, фигуры, звезды, звуки или что-нибудь другое, в чем отыскивается эта мера. Таким образом, должна существовать некая общая наука, объясняющая все относящееся к порядку и мере, не входя в исследование никаких частных предметов, и эта наука должна называться не иностранным, но старым, уже вошедшим в употребление именем всеобщей математики, ибо она содержит в себе все то, благодаря чему другие науки называются частями математики.

Исследуя математический метод, Декарт в своем «Рассуждении о методе» выделяет следующие четыре правила, которые гарантируют возможность получения точного знания.

Первое: не принимать за истинное что бы то ни было, прежде чем не признал это несомненно истинным, т. е. старательно избегать поспешности и предубеждения и включать в свои суждения только то, что представляется моему уму так ясно и отчетливо, что никоим образом не может дать повод к сомнению.

Второе: делить каждую из рассматриваемых мной трудностей на столько частей, на сколько потребуется, чтобы лучше их разрешить.

Третье: руководить ходом своих мыслей, начиная с предметов простейших и легко познаваемых, и восходить мало-помалу, как по ступеням, до познания наиболее сложных, допуская существование порядка даже среди тех, которые в естественном порядке вещей не предшествуют друг другу.

И последнее: делать всюду настолько полные перечни и такие общие обзоры, чтобы быть уверенным, что ничего не пропущено.

Способность разума к непосредственному постижению основных ясных и четких истин, его острая интуиция и дедукция следствий — в этом суть философии знания Декарта. Возникает вопрос: как отличить интуитивно постижимые истины от истин, интуитивно непостижимых? Ключ к ответу следует искать в словах «ясных и четких». В третьем из «Правил для руководства ума» Декарт дает следующий ответ на свой вопрос:

В предметах нашего исследования надлежит отыскивать не то, что о них думают другие или что мы предполагаем о них сами, но то, что мы ясно и очевидно можем усмотреть или надежно дедуцировать, ибо знание не может быть достигнуто иначе.

По Декарту существуют только два акта мышления, позволяющие нам достигать знания без опасения впасть в ошибку: интуиция и дедукция. Оба акта он определяет в приводимом ниже отрывке — еще одном примере того, сколь действительно неоценимы «Правила» для ясного понимания метода Декарта:

Под интуицией я понимаю не веру в шаткое свидетельство чувств и не обманчивое суждение беспорядочного воображения, но понятие ясного и внимательного ума, настолько простое и отчетливое, что оно не оставляет никакого сомнения в том, что мы мыслим, или, что одно и то же, прочное понятие ясного и внимательного ума, порождаемое лишь естественным светом разума и благодаря своей простоте более достоверное, чем сама дедукция, хотя последняя и не может быть плохо построена человеком, как я уже говорил выше.

Так, например, всякий может интуитивно постичь умом, что он существует, что он мыслит, что треугольник ограничивается только тремя линиями, что шар имеет только одну поверхность и подобные этим истины.

Свой вывод о том, что именно математический метод открывает перед человеком путь к постижению законов природы, Декарт обосновал в «Рассуждении о методе, чтобы хорошо направлять свой разум и отыскивать истину в науках» (1637).

Тема 6. Принцип наименьшего действия Ферма, Мопертюи, Лагранжа, Гамильтона. Возникновение вариационного исчисления. Философские аспекты

Герон доказал, что свет, двигаясь из точки P в точку Q и отражаясь в зеркале, распространяется по кратчайшему пути. Так как скорость света при этом постоянна, то кратчайший путь означает и кратчайшее время распространения света.

Один из величайших математиков XVIII в. Пьер Ферма (1601 — 1665), опираясь на весьма скудные экспериментальные данные, сформулировал принцип наименьшего времени: свет, идущий из одной точки в другую, распространяется по такому пути, на преодоление которого уходит наименьшее время. Очевидно, что таким сотворил свет господь бог, наделив его способностью не только неукоснительно следовать математическим законам, но и распространяться по пути, требующему минимальных затрат времени. Ферма окончательно уверовал в правильность своего принципа, когда ему удалось вывести из него закон преломления света, открытый ранее Снеллиусом и Декартом.

К началу XVIII в. математики располагали уже несколькими впечатляющими примерами того, как природа пытается «максимизировать» или «минимизировать» те или иные важные характеристики физических процессов. Христиан Гюйгенс, первоначально возражавший против принципа Ферма, доказал, что тот же самый принцип верен и для света, распространяющегося в среде с непрерывно изменяющимися свойствами. Даже первый закон Ньютона, утверждающий что всякое находящееся в состоянии движения тело, если на него не действуют никакие силы, движется по прямой, стали рассматривать как еще одно свидетельство «принципа экономии», выполняющегося в природе.

Ученые XVIII в. были убеждены в том, что совершенная Вселенная не терпит напрасных затрат,— и потому каждое действие природы для достижения конечного результата должно быть наименьшим из возможных; на этой основе они принялись за поиск общего принципа. Первую формулировку такого принципа предложил Пьер Луи Моро де Мопертюи (1698—1759), математик, возглавлявший экспедицию в Лапландию, цель которой заключалась, в измерении по меридиану длины дуги в один градус. Произведенные экспедицией измерения показали, что Земля сплюснута у полюсов, как предсказывали на основе теоретических соображений Ньютон и Гюйгенс. Открытие Мопертюи устранило возражения против теории Ньютона, выдвинутые Жаном Домиником Кассини.

В 1740 году, занимаясь теорией света, Мопертюи провозгласил свой знаменитый принцип наименьшего действия, опубликовав статью под названием «О различных законах природы, казавшихся несовместимыми». Мопертюи исходил из принципа Ферма, но, поскольку не существовало единого мнения относительно того, в какой среде скорость света больше — в воде (как считали Декарт и Ньютон) или в воздухе (как полагал Ферма), Мопертюи отказался от наименьшего времени и заменил его новым понятием — действием. Под действием Мопертюи понимал интеграл (определяемый в математическом анализе) от произведения массы, скорости, и пройденного расстояния. Согласно принципу наименьшего действия, все явления природы происходят так, что действие оказывается минимальным. Предложенное Мопертюи определение действия нуждается в некоторых уточнениях: Мопертюи не указал, по какому интервалу времени надлежит вычислять интеграл, и в каждом из найденных им приложений принципа в оптике и в некоторых задачах механики придавал действию разный смысл.

Более точную и общую форму принципу наименьшего действия придал Лагранж. Действие фактически свелось к энергии. Из обобщенного принципа наименьшего действия удалось получить решения многих новых задач механики. (Принцип наименьшего действия по существу стал центральным принципом вариационного исчисления — новой области математического анализа, основателем которой стал Лагранж, опиравшийся на труды Эйлера.) Дальнейшее обобщение принципа наименьшего действия было предложено «вторым Ньютоном» Британии — Уильямом Роуаном Гамильтоном (1805 - 1865). Этот принцип и поныне является одним из наиболее универсальных принципов, лежащих в основе механики. По образу и подобию принципа наименьшего действия аналогичные принципы, получившие название вариационных, были сформулированы и в приложении к другим областям физики.

Тема 7. Вопросы ценности логической дедуктивной схемы. Ощущения, восприятия, законы объективно существующего мира (Фонтенель, Гоббс, Локк, Беркли, Юм)

Перед мыслителями встал вопрос: почему математические законы природы непременно должны выражать абсолютные истины? Дидро в своих «Мыслях об объяснении природы» (1753) одним из первых отрицал абсолютность математических законов. Математик, утверждал он, подобен игроку: и тот, и другой играет в игры, руководствуясь ими же самими созданными абстрактными правилами. Предмет математического исследования — условность, не имеющая опоры в реальности. Столь же критическую позицию занял в своей работе «Беседы о множественности миров» писатель Бернар Ле Бовье де Фонтенель (1657—1757). Он подверг критике веру в. неизменность законов движения небесных тел.

Математики предпочитают верить, что именно они создают пищу, которой кормятся философы. Но в XVIII веке в авангарде тех, кто отрицал истины о физическом мире, шли философы. Мы обходим молчанием учения Томаса

Гоббса (1588 — 1679), Джона Локка (1632 — 1704) и епископа Джорджа Беркли (1685 — 1753) не потому, что их трудно было бы опровергнуть, а лишь по той причине, что они оказали меньшее влияние на развитие мысли, чем теории более радикально мыслящего Дэвида Юма (1711 — 1776), который не только воспринял идеи Беркли, но и развил их дальше. В своем «Трактате о человеческой природе» (1739 — 1740) Юм утверждал, что мы не знаем ни разума, ни материи, и то, и другое — фикции. Мы воспринимаем только ощущения. Простые идеи, такие, как образы, воспоминания и мысли, представляют собой слабый отзвук ощущений. Любая сложная идея есть не что иное, как набор простых идей. Наш разум тождествен имеющемуся у нас набору ощущений и идей. Не следует предполагать существование каких-либо субстанций, кроме тех, которые мы воспринимаем непосредственно на опыте. Всякий опыт порождает только ощущения.

Юм равным образом сомневался и в существовании материи. Кто гарантирует, что перманентно существующий мир материальных предметов не фикция? Все, что мы о нем знаем, — это наши ощущения (впечатления). Из того, что ощущения стула неоднократно воспроизводимы, еще не следует, что стул реально существует. Пространство и время, по Юму, — это способ и порядок постижения идей, а причинность — привычная взаимосвязь идей. Ни пространство, ни время, ни причинность не есть объективная реальность. Сила и яркость наших ощущений вводят нас в заблуждение, заставляя верить в реальность окружающего мира. В действительности же существование окружающего мира с заданными свойствами не более чем умозаключение, в истинности которого мы не можем быть уверенными. Происхождение наших ощущений необъяснимо; мы не можем сказать, что является их источником: реально существующие внешние объекты, разум или бог.

Сам человек, по Юму, — это обособленный набор восприятий, т. е. впечатлений и идей. Он существует только в себе. Субъект суть набор различных восприятий. Любая попытка познать самого себя приводит только к некоторому восприятию. Все остальные люди и предполагаемый внешний мир также являются лишь восприятиями данного субъекта — и нет уверенности, что они действительно существуют.

Разрушив догмат о существовании внешнего мира, следующего неизменным математическим законам, Юм тем самым разрушил ценность логической дедуктивной схемы, которая представляла реальность для мыслителей последующих поколений. Но математика содержит также и теоремы о числах и геометрию, неоспоримо вытекающие из тех истин о числах и геометрических фигурах, которые положены в основу их изучения. Юм не отвергал аксиом, но их выбор, а значит и результаты, получаемые из них методом дедукции, он ставил под сомнение. Что касается аксиом, то они возникают из тех ощущений, которые мы получаем от предполагаемого физического мира. Теоремы действительно с необходимостью следуют из аксиом, но они представляют собой не более чем усложненные перепевы аксиом. Теоремы являются дедукциями, но дедукциями утверждений, неявно содержащихся в аксиомах. Теоремы не что иное, как тавтологии. Следовательно, ни аксиомы, ни теоремы не могут рассматриваться как абсолютные истины.

Философия Юма встретила такое резкое неприятие у большенства мыслителей XVIII в., показалась им столь неприемлемой и противоречащей выдающимся успехам математики и естествознания, что возникла острая необходимость в ее опровержении.

Философия Канта воздавала хвалу человеческому разуму, но отводила ему роль инструмента познания не природы, а тайников человеческого ума. Опыт получил должное признание как необходимый элемент познания, так как ощущения, поступающие из внешнего мира, Кант считал сырым материалом, который упорядочивается и организуется разумом. Математика обрела свое место, став открывателем необходимых законов разума.

Тема 8. Противоречивость математики. Возникновение различных геометрий, арифметик, алгебр (Риман, Лобачевский, Келли, Гюнтер, Гельмгольц)

11 февраля 1826 г. профессор Казанского университета Н. И. Лобачевский представил ученому совету физико-математического факультета доклад с изложением основ новой геометрии. Главная идея его состояла в том, что аксиома Евклида о параллельных независима от других аксиом евклидовой геометрии (невыводима из них) и, следовательно, возможно построить другую геометрию, столь же непротиворечивую, как и евклидова, если в евклидовой геометрии заменить аксиому о параллельных на противоположное утверждение. В последующие годы Лобачевский всесторонне разработал теорию новой геометрии и указал ряд ее приложений в области математического анализа. Одновременно с Лобачевским те же идеи были развиты молодым венгерским математиком Яношем Больяи.

Лобачевский, как можно заключить из некоторых его высказываний, испытывал некоторые колебания в вопросе о путях оправдания новой геометрии. Так, он пишет в статье «О началах геометрии»: «Очень вероятно что эвклидовы положения одни только истинные, хотя и останутся навсегда недоказанными. Как бы то ни было, новая геометрия, основание которой здесь уже положено, если и не существует в природе, тем не менее может существовать в нашем воображении и, оставаясь без употребления для измерений в самом деле, открывает новое обширное поле для взаимного применения Геометрии и Аналитики». Здесь Лобачевский, как мы видим, делает основной акцент на внутриматематической ценности своей геометрии и в вопросе ее оправдания занимает позицию, близкую к взглядам Лейбница и Карно.

В 1854 г. Б. Риман выдвинул концепцию *n*-мерных геометрических многообразий – чрезвычайно общее понимание пространства, в котором геометрия Лобачевского – Больяи заняла определенное место как трехмерная геометрия с отрицательной кривизной. Тем самым эта геометрия становится узаконенной, необходимой частью математики при ее систематическом развитии. В 1868 г. Е. Бельтрами, занимаясь геометрией кривых поверхностей, нашел поверхность с отрицательной кривизной (псевдосферу), внутренняя геометрия которой оказалась совпадающей с планиметрией Лобачевского. Основной вопрос относительно геометрии Лобачевского – Больяи – вопрос о ее внутренней непротиворечивости — был в значительной мере разрешен.

Несколько позднее А. Пуанкаре, С. Ли, Л. Кронекер начали использовать неевклидовы геометрии как эффективный аппарат для решения различных задач в теории функции и других областях математики. Сам принцип построения новой математической теории через изъятие и замену аксиом, примененный при создании неевклидовых геометрий, был положен в основу исследований по основаниям математики, которые к концу XIX в. стали превращаться в особую, все более важную область математических исследований. Можно сказать, что к 80-м гг. XIX в. собственно математическое значение неевклидовых геометрий было вполне осознано.

Сформулируем в рамках общей концепции некоторые утверждения о математике с тем, чтобы отметить прогресс философии математики, который наметился к началу нашего века.

1. Математика не есть опытная наука, изучающая определенные свойства действительности, наряду с механикой, физикой, химией и т. д. Математика находится не рядом с опытными науками, как считал Аристотель и многие после него, а над опытными науками, представляя собой определенную надстройку над ними. Математика в общем является набором формальных (знаковых) моделей для теоретического знания и таким образом связана с опытом не непосредственно, а через другие науки.

2. Математика выступает по отношению к эмпирическом знанию как особого рода язык, способ трансформации эмпирических высказываний, установления связи между ними. Для этой цели математическая теория должна быть непротиворечивой, но не обязательно интуитивно ясной или имеющей опытное происхождение. В математике в принципе допустимы любые непротиворечивые структуры, которые эффективны в прикладном отношении или важны для внутреннего обоснования математической науки. Неевклидова геометрия не менее законна, чем евклидова или какие-либо другие мыслимые математические структуры. Математика, в отличие от других наук, имеет право на со-

здание чистых форм, т.е. образов, не имеющих какой-либо эмпирической интерпретации, но лишь в интенции на некоторую внутреннюю задачу. (Лобачевский, как мы уже говорили, допускал такое чисто функциональное оправдание своей геометрии, но оно не казалось ему достаточным из-за его в целом эмпирического взгляда на природу геометрических истин).

3. Математические утверждения необходимы (неопровержимы на опыте) вследствие внутренней логической определенности понятий. Эмпирический закон, к примеру, закон, утверждающий, что все газы расширяются при нагревании по закону $V_0(1+\alpha t)$, где V_0 - исходный объем, t – температура, α – коэффициент расширения, может быть опровергнут только потому, что мы имеем внешнее, эмпирическое определение газа, независимое от самого закона. Если же газом назвать всякое вещество, которое расширяется в соответствии с данным законом, то закон, очевидно, будет неопровержим, ибо все, что ему не соответствует, не будет газом по определению. Утверждение 2+2=4, как и любое другое математическое утверждение, неопровержимо просто потому, что символы, его составляющие, не имеют внешних определений, независимых от самого утверждения. Математические понятия, даже если они генетически связаны с опытом, представляют собой не просто абстракции и даже не просто идеализации, но конструкции, т. е. понятия, свойства которых определены включающей их системой формальных связей.

4. Математическая теория сама по себе не истинна, не ложна, она приобретает это свойство только после интерпретации в определенной сфере опытных представлений. Убеждение пифагорейцев и некоторых более поздних философов – рационалистов (Декарт, Лейбниц, Фреге) в особой достоверности математического знания является не более чем мистификацией логической структуры математических теорий, необходимости их внутренних связей.

5. Единство математики обеспечивается исключительно методом, но не предметом исследования.

Развитие новых представлений о природе математики завершилось в первых двух десятилетиях XX века. Уже в самом начале XX в. центр тяжести в философии математики смещается к проблемам логического обоснования. И это обусловлено не только интересом к новым проблемам, но и тем обстоятельством, что вопрос о природе неевклидовых геометрий постепенно перестает быть загадкой. Несмотря на различия в понимании своей науки, проявившиеся в отношении путей поиска ее логических оснований, математики начала XX века не оспаривают того, что логическая непротиворечивость есть необходимое и достаточное условие существования математической теории как таковой. Неевклидовы геометрии, а также и другие «монстры» математическое мира, открытые позднее, превращаются с этой точки зрения в обычные рядовые объекты математики, ничуть не более странные, чем дробные или отрицательные числа. Тем самым завершается один из самых глубоких переворотов в философии математики, в представлениях о природе математического знания. Философское значение неевклидовых геометрий состоит в том, что их открытие явилось исходным пунктом и основным стимулом этого переворота.

Открытие в науке, как бы оно ни было велико, само по себе не является вкладом в философию. Однако существуют открытия, которые влекут за собой изменения в философии науки, в понимании ее предмета, методов, связей с другими науками. Неевклидовы геометрии – пример одного из таких открытий, чрезвычайно редких в истории науки. До построения неевклидовых геометрий к таким сдвигам в математике, имевшим философское значение, можно отнести только три события, а именно появление самой идеи математики как дедуктивной науки, открытие несоизмеримых величин и открытие дифференциального исчисления в XVII в. В наше время таким событием явился отказ от основных программ обоснования математики (прежде всего под влиянием логических исследований К. Геделя), последствия которого для философии математики пока еще окончательно не осмыслены.

Тема 9. Онтологизация математики

Неклассическая наука обладает следующей беспрецедентной особенностью. В ней конкретное, частное изменение представлений о тех или иных процессах может изменить весьма общие принципы, оказаться исходным пунктом для новой, весьма общей теории. Отсюда подвижность общих концепций и их зависимость от эксперимента. Чем дальше, тем чаще при решении частных проблем модифицируются общие принципы и тем чаще само обоснование общих принципов становится неотделимым от частных экспериментов и применений и от их обобщения. Такая пластичность общих принципов и такая эвентуальная фундаментальность частных результатов приводят к новом стилю мышления. Анализ частных экспериментов всегда может привести исследователя к проблеме мира как целого, в свою очередь решение этой проблемы заставит его вспомнить о частных экспериментах.

Философские интересы становятся поэтому профессиональными интересами людей весьма различных профессий.

Математика, которая сейчас переходит через границы отдельных отраслей науки, по-иному связана с философией, чем математика, ограничивавшая себя механикой, астрономией и физикой. Она уже не только философия познания, она становится философией бытия. В классические времена основными философскими проблемами математики были главным образом гносеологические проблемы априорности, интуитивности, условности и эмпирических корней математических представлений. Сейчас, охватывая своими понятиями и методами всю сумму представлений о мире и о его преобразовании, математика приобретает онтологический смысл, она становится общим учением о закономерностях мира. Не механического костяка мира, а всего мира, включая наиболее сложные ряды явлений, включая жизнь, разум, человеческую историю. Подобная онтологизация – эффект того, что иногда называют прикладной математикой.

Тем самым в математику входят общие понятия бытия и истины, уже не сводящиеся к традиционным понятиям существования решений и их корректности. Профессиональными интересами математика, хотя бы и непрофессионального, становятся проблемы бытия. Но именно эти проблемы являются сквозными проблемами истории философии.

Хотелось бы проиллюстрировать одним примером онтологический характер современных философских проблем математики. Аксиомы геометрии считались чисто математическими понятиями, к ним применяли критерии независимости и другие логико-математические критерии; когда Лобачевский ставил вопрос о физической реальности евклидовой и неевклидовой геометрии, это оставалось идеей, которая излучалась математикой, но не достигала физики наподобие виртуальной частицы, излученной, а затем поглощенной ее же источником. Со времени появления общей теории относительности положение изменилось. Наиболее общая физическая, астрофизическая, космологическая и космогоническая проблема — судьба Метагалактики решается как геометрическая проблема, математика здесь явно, физически ощутимо, становится учением о мире, явно приобретает онтологический смысл.

Тема 10. Логицизм (Лейбниц, Дедекинд, Фреге, Рассел)

Г. Фреге, хотя и в косвенной форме, впервые поставил . вопрос об обосновании самой теории множеств. Наряду с Булем и Шредером он много способствовал развитию математической логики в XIX в. Логика математического мышления была выделена из математики и предстала в такой стройной и законченной форме, что так же, как в свое время силлогистика Аристотеля, не оставляла сомнений в своей завершенности. Фреге предпринял попытку уточнения исходных понятий математического мышления, таких, как множество (класс), число, функция, на основе понятий логики. Он не сомневался в том, что логика представляет достаточную базу для выяснения истинного смысла всех математических понятий. Его основная математическая задача состояла в том, чтобы свести арифметику к логике, подобно тому как евклидова геометрия может быть сведена к алгебре и арифметике посредством арифметической интерпретации ее аксиом. Эта программа, которая позднее получила название логицизма, для самого Фреге закончилась неудачно. Выполнив огромную работу, он должен был признать наличие противоречий в своей системе и отказаться от дальнейших исследований в этом направлении.

Начавшийся было триумф теории множеств был прерван в начале XX в. открытием целого ряда противоречий (парадоксов) в ее основе.

Логицизм в XX в. связан в основном с именем Рассела. Подвергнув критике построения Фреге, Рассел, однако, не отверг его программу в целом. он полагал, что эта программа, при некоторой реформе логики, может быть осуществлена и тем самым желаемая строгость математики будет достигнута.

Рассел исходит из того, что все логические парадоксы сводится к антиномии лжеца и общий источник их состоит в том, что в суждении высказывается мысль не только о некоторых внешних по отношению к нему предметах, но одновременно и о самом суждении, или, иначе, суждение оборачивается само на себя. Рассел исключает такого рода суждения из математического языка посредством своей теории типов или теории логических ступеней. Суть этой теории состоит в том, что математические высказывания делятся на классы в соответствии с областью определения.

Основное правило теории типов состоит в том, что каждый предикат относится только к определенному типу и может быть осмысленно применен только к объектам нижележащего типа; он не может быть применен к предикатам более высокого уровня или к самому себе как к объекту.

Идея ступенчатой логики позволяет исключить все известные парадоксы теории множеств.

Логицизм как программа полного сведения математики к логике в какой-то мере сам поставил себя под сомнение в результате своего развития. Даже если принять, что ступенчатое исчисление предикатов само по себе непротиворечиво, то вместе с аксиомой бесконечности, аксиомой выбора и аксиомой сводимости оно становится уже проблематичным в этом отношении.

Против логицизма с самого начала были выдвинуты также возражения общего методологического порядка. Д. Гильберт видел в логическом обосновании математики порочный круг, ибо, «внимательно присматриваясь, мы замечаем, что при обычном изложении законов логики применяются уже некоторые основные понятия арифметики». Пуанкаре охарактеризовал логицизм как безнадежную попытку свести бесконечное к конечному.

Сама мысль свести математику к логике возникла у Фреге прежде всего под влиянием учения Лейбница о «всеобщей характеристике» и традиционного разделения истин на истины опыта и истины разума. Как и Лейбниц, Фреге был убежден, что истины логики и метафизики (философии) не являются эмпирическими и что арифметика родственна с логикой, но не с физикой и поэтому должна найти свое окончательное обоснование на базе логики.

Тема 11. Интуиционизм (Декарт, Паскаль, Кант, Брауэр)

Интуиционизм — направление в обосновании математики, созданное голландским математиком Брауэром и его последователями – Гейтингом и Вейлем (хотя элементы интуиционистской позиции имелись уже у Кронекера и Пуанкаре). Исходным пунктом интуиционизма является вера в то, что некоторые объекты математики, а также некоторые операции, связанные с ними, безусловно ясны во всех своих свойствах и оперирование с ним никогда не сможет привести к противоречивым заключениям. Такая позиция прямо связана с философией Канта, с истолкованием числа и фигур в качестве продуктов непосредственного знания (чистого созерцания), универсального и непогрешимого.

Брауэр считал, что, хотя неевклидовы геометрии нанесли удар по кантовской интуиции пространства, позиция Канта в истолковании времени должна быть сохранена. Время— фундаментальный феномен человеческого интеллекта и самая глубокая основа наших математических представлений. На интуиции времени покоится понятие натурального числа, а также наше представление о линейном континууме.

Центральная идея интуиционизма заключается в специфическом понимании математического существования. Математический объект существует, если он дан интуитивно, или может быть сконструирован, построен мысленно посредством интуитивно ясных операций под интуитивно ясными элементами. В первоначальной (брауэровской) версии интуиционизма понятие конструирования не разъясняется, оно также относится к числу интуитивно ясных. Объекты, не удовлетворяющие требованию конструктивности, например бесконечные множества, взятые в качестве законченных, объявляются незаконными, несуществующими. Интуиционизм, таким образом, противостоит, прежде всего, формалистской философии математики, допускающей все объекты, заданные непротиворечивыми требованиями.

По мнению Брауэра, математика должна быть содержательной наукой, она должна иметь дело с некоторыми конкретными объектами (хотя бы только и представимыми в уме), но которые имеют ценность независимо от выражения их свойств в языке.

Логисты и формалисты по мнению Брауэра, заменили истинную математику как интуитивно ясную мысленную деятельность с конкретными объектами анализом математического языка, механической стенографией и лингвистическими ухищрениями. Вследствие этого математика оказалась заполненной словесными определениями, которым ничего не соответствует и которые способны только порождать противоречия. Только идея конструирования, согласно Брауэру, может избавить математику от парадоксов.

Отрицая неконструктивные объекты и определения, интуиционизм естественно не признает также и так называемых чистых доказательств существования, т.е. доказательств существования объектов, без гарантии построения соответствующего примера.

Отбрасывая чистые доказательства существования и соответственно ограничивая логику рассуждения, интуиционизм отказывается от значительной части результатов классической математики. В особенности это относится к анализу и теории множеств.

Интуиционистская реформа меньше затрагивает арифметику и алгебру, но и здесь появляются невосполнимые пробелы.

Тема 12. Формализм (Д. Гильберт, В. Аккерман, Дж. Нейман)

На основе критического пересмотра существующих программ обоснования математики Гильберт предложил свой путь обоснования, который стал, известен под наименованием формализма.

Основная философская предпосылка Гильберта заключалась в том, что обоснование математической теории является исключительно обоснованием ее непротиворечивости. Это важно подчеркнуть, ибо интуиционисты хотели видеть математику еще и интуитивно ясной, а логицисты – представленной в виде логических тавтологий. Очевидная с современной точки зрения мысль, что математическая теория функционирует только за счет своей непротиворечивости, что ее ценность основана исключительно на этом качестве, в начале XX века не была общепризнаной.

Гильберт был глубоко убежден в том, что математика должна быть обоснована в целом, во всех своих практически ценных результатах, без какого-либо ограничения ее понятий и методов.

Процедура обоснования математической теории, предложенная Гильбертом, включала в себя два этапа. Теория должна быть, во-первых, формализована, представлена как совокупность формул, строчек символов, соединенных логическими константами. Для этого необходимо записать в логических символах ее аксиомы и явно сформулировать (в виде формул) допустимые правила логики. Формализация, по Гильберту, не требует сведения математики к логике, превращения теорем в тавтологии, как это требовалось программой логицизма, но просто состоит в использовании логических символов для записи математических утверждений. Такой перевод содержательной аксиоматики на логический язык в большинстве случаев не вызывает каких-либо затруднений. Все дело состоит здесь в наличии самой адекватной аксиоматики. Во-вторых, требуется доказать непротиворечивость этой системы аксиом вместе с ее логическими правилами исходя только из ее формальной структуры, т. е. на чисто синтаксическом уровне. Этот последний этап является более сложным.

Непротиворечивость математической теории можно доказать так называемым методом моделей, которым пользовался еще Бельтрами для доказательства непротиворечивости геометрии Лобачевского.

Найдя интерпретацию неевклидовой геометрии на образах евклидовой, мы можем утверждать, что первая по крайней мере так же непротиворечива, как и вторая. Непротиворечивость обычной геометрии таким же образом может быть сведена к непротиворечивости арифметики. К обоснованию же арифметики уже неприменим метод моделей. Идея Гильберта состояла в том, чтобы доказать непротиворечивость арифметики без ссылки на какую-то другую теорию, но исходя исключительно из ее знаковой структуры, определенных ее синтаксических характеристик.

Однако, несмотря на обстоятельства, выгодно отличающие формализм от других программ обоснования математики, он также оказался несостоятельным, — по чисто математическим соображениям.

Все три программы, выдвинутые в первое десятилетие XX в., достигли известных успехов, однако все они в дальнейшем столкнулись с большими затруднениями. Природа этих затруднений стала ясной с появлением в 1931 г. статьи австрийского .математика К. Геделя «О формально неразрешимых утверждениях Principia mathematica и родственных систем», где он доказал широкоизвестные в настоящее время метатеоремы. Первая теорема Геделя (о неполноте) утверждала, что если формальная система, содержащая арифметику, не противоречива, то она неполна, т. е. что она содержит истинные утверждения, формулируемые в ее исходных понятиях, которые недоказуемы и не опровержимы в этой системе. Вторая теорема (о непротиворечивости) утверждает, что если арифметика или система, включающая ее, непротиворечива, то доказательство этой непротиворечивости не может быть достигнуто в метаязыке, допускающем представление в арифметическом формализме.

Непосредственным следствием из этих теорем является то, что формализм и логицизм как программы обоснования математики не могут быть реализованы.

Тема 13. Теоретико-множественные основания математики (Г. Кантор, Ю. Дедекинд)

Было обнаружено, что для строгого доказательства ряда теорем внутри анализа требуется понятие множества со всеми его элементами, т.е. понятие актуальной бесконечности. Этот факт был замечен Б. Больцано при анализе им доказательства теоремы о существовании верхней грани ограниченного множества. Больцано показал также, что оперирование с бесконечными множествами требует принципиально других правил и законов, чем те, к которым мы привыкли в арифметике. Еще с большей очевидностью необходимость введения в математику бесконечных множеств была подтверждена исследованиями Дирихле и Римана по теории тригонометрических рядов.

Новые факты математики, таким образом, породили потребность в новых, более широких основаниях математического анализа и математики в целом. Задача состояла в том, чтобы: а) дать обоснование действительных чисел, независимое от понятия предела; б) строго обосновать те разделы анализа, где практически использовалось понятие актуальной бесконечности. Первую задачу в начале 70х гг. разрешил Дедекинд своей теорией сечений. В это же время Кантор выдвинул теорию трансфинитных чисел, которая не только устанавливала законы оперирования с бесконечными множествами, но и давала полную теорию действительных чисел. Нужно сказать, что до настоящего времени теория множеств является наиболее глубокой основой для понимания соподчинения и связи различных числовых множеств.

Восприятие теории множеств современниками было затруднено по той же причине, что и восприятие неевклидовых геометрий: бесконечности высших порядков были слишком оторваны от действительности и казались поэтому искусственными и бесполезными построениями. Идея Кантора, что математика свободна в конструировании своих объектов в рамках логической непротиворечивости, которую он выражал тезисом «сущность математики в ее свободе», была еще чуждой подавляющему большинству математиков.

Л. Кронекер резко критиковал канторовское учение о трансфинитном с точки зрения логики; по его мнению, обычная логика неприменима к бесконечным множествам и может породить только противоречия. В дальнейшем эта критика была продолжена и развита Брауэром в его концепции интуиционистского обоснования математики.

В конце XIX в., однако, появилось большое число работ, использующих теорию множеств. Пуанкаре, Гильберт, Фреге и многие другие математики оценили фундаментальность и глубину новой теории. Математика стала быстро приобретать теоретико-множественный облик, а обоснование математики стало ориентироваться на понятия теории множеств как наиболее фундаментальные.

Тема 14. Философские проблемы современной математики

Можно указать ряд проблем, которые являются основными.

Первой и наиболее актуальной философской проблемой в современной математике является вопрос о природе логики. Достаточно сказать, что сам смысл требования «обосновать математику» не может быть уяснен без уточнения гносеологического статуса логики. Господствующие в настоящее время интуиционистские и эмпирические трактовки логики, которые сводят ее к простой кодификации средств математического рассуждения, являются совершенно неудовлетворительными.

Второй не менее важный вопрос связан с понятием метода. Останется ли математика в рамках строгой дедукции, либо ей предстоит отказ от строгости в интересах практики?

Третья группа вопросов касается понятия математического объекта. Основной вопрос состоит здесь в том, следует ли математические понятия считать просто оперативными символами, значение которых исчерпывается системой применимых к ним операций, или они непосредственно относятся , к некоторым реальностям. В более общем плане проблема состоит в анализе содержательности математики, в выяснении смысла этого понятия.

Четвертая проблема касается механизмов, детерминирующих развития математического знания. Вопрос о природе «предустановленной гармонии» между миром математических построений и физическим миром, о природе эвристической функции математики в целом связан с выяснением социальных и психологических механизмов, определяющих развитие математического знания, скрытых механизмов целесообразности в образовании абстрактных математических понятий.

Большой круг вопросов связан с процессом математизации знания. Выяснение предпосылок математизации посредством анализа уже математизировавшейся части знания было бы, конечно, важным методологическим ориентиром для тех его областей, где математизация еще предстоит.

3. ПЕРЕЧЕНЬ УЧЕБНИКОВ, УЧЕБНЫХ ПОСОБИЙ

3.1.Основная литература.

1. Бесконечность в математике: Философские и исторические аспекты. – М.: Янус, 1997
2. Гайденко П. История греческой философии в ее связи с наукой {Текст}: учебное пособие для вузов. – СПб.: ПЕРСЭ: Университетская книга, 2000. – 320 с.
3. Канке В.А. Основные философские направления и концепции науки. Итоги XX столетия. – М.: Логос, 2000.-320 с.
4. Кохановский В.П. Философия и методология науки. – Ростов н/Д.: Феникс, 1999.-576 с.
5. Кохановский В.П., Лешкевич Т.Г., Матяш Т.П., Фахти Т.Б. Основы философии как науки. – Ростов н/Д.: Феникс, 2004.-608 с.
6. Перминов В.Я. Философия и основания математики. – М.: Прогресс- Традиция, 2001.-320 с.
7. Стили в математике: социокультурная философия математики / под ред. А.Г.Барабашева.- СПб.: РХГИ, 1999.-552 с.
8. Философия математики и технических наук: учебное пособие, ред. С.А. Лебедев. – М.: Академический Проект, 2006. – 779 с.

3.2.Дополнительная литература

1. Асмус В.Ф. Проблема интуиции в философии математике [Текст]: очерки истории XVII – начало XX в. / В.Ф. Асмус. – М.: Соцэкгиз, 1963. – 312 с.
2. Беляев Е. А., Перминов В.Я. Философские и методологические проблемы математики. – М.: Изд. МГУ, 1981 г.
3. Карри Х.Б. Основания математической логики. – М.: Мир, 1964.
4. Конан В.Р. Основания геометрии. – М.: Наука. 1986.
5. Клайн М. Математика. Поиск истины. – М.: Мир, 1998 г.
6. Клайн М. Утрата определенности. – М.: Мир,1984 г.

7. Клейн Ф. Лекции о развитии математики в XIX столетии. – М.: Наука,1989.
8. Рассел Б. Введение в математическую философию. – М.: Гнозис, 1996
9. Философия в вопросах и задачах. – М.: Изд. МГУ,1977.
10. Шемякинский В.М. Философское обоснование программы геометризации физики. – Екатеринбург: Изд. УГУ,1992.

4. САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА СТУДЕНТОВ

Основными задачами самостоятельной работы студентов являются:

- формирование интереса к познавательной деятельности и навыков самостоятельной работы в профессиональной сфере;

- развитие творческого мышления, способности принимать самостоятельное решение, находить выход из кризисной ситуации;

- применение теории к практике.

Самостоятельная работа студента состоит в подготовке к лекциям, семинарам, практическим занятиям, коллоквиумам, контрольным точкам, зачетам и экзаменам.

Согласно учебному плану требуется:

- один реферат в семестр.

- один доклад в семестр.

Тема доклада и реферата выбирается студентом самостоятельно.

5. МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ОРГАНИЗАЦИИ МЕЖСЕССИОННОГО КОНТРОЛЯ ЗНАНИЙ СТУДЕНТОВ

Целью текущего контроля самостоятельной работы студентов является стремление упорядочить работу студентов в течение семестра, сделать ее более регулярной, организованной, ритмичной, чтобы разгрузить предэкзаменационный период, нормализовать получение зачетов, улучшить в конечном итоге качество знаний и экзаменационные показатели успеваемости.

В связи с этим подход к оценке на контрольных точках и на экзаменах должен в принципе отличаться: на экзаменах необходимо учитывать только объем и уровень знаний студентов, а на контрольных точках должны оценивать в первую очередь не качество знаний и способности студента, а объем и тщательность выполненной им работы, ее регулярность и даже посещаемость учебных занятий. Именно такой подход позволит организовать работу студентов в течение семестра должным образом.

6. ВОПРОСЫ ДЛЯ ПОДГОТОВКИ К ЗАЧЕТУ

1. Философия математики как предмет.
2. Античная философия математики. Пифагорейская школа. Эволюция пифагореизма.
3. Философские проблемы обоснования дифференциального исчисления.
4. Натурфилософия и эмпиризм в истории математики.
5. Философия математики в начале 19 в.
6. Основные направления философского обоснования неевклидовых геометрий в 19 в.
7. Философские проблемы теории множеств.
8. Логицизм в философии математики XX в.
9. Интуиционизм в философии математики XX в.
10. Формализм в философии математики XX в.
11. Значение теорем Геделя в философии математики.
12. Философские проблемы логики.
13. Эмпиризм в современной философии математики. Неоэмпиризм.
14. Номинализм и реализм в современной философии математики.
15. Философские концепции великих математиков.
16. Философские проблемы обоснования математики.
17. Основные философские проблемы современной математики.

7. КАРТА КАДРОВОЙ ОБЕСПЕЧЕННОСТИ

Лекционные и практические занятия по дисциплине «Философия математики» для студентов специальностей:
- 010101 – математика
- 010501 – прикладная математика

проводит доцент кафедры МАиМ Нейман В.П.