

Федеральное агентство по образованию РФ  
АМУРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
(ГОУВПО «АмГУ»)

УТВЕРЖДАЮ  
Зав. каф. МАиМ  
\_\_\_\_\_ Т.В. Труфанова  
«\_\_» \_\_\_\_\_ 2007г.

# МЕТОДЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

## Учебно-методический комплекс дисциплины

для специальности  
010701-"Физика"

Составители: Нейман В.П., Труфанова Т.В.

2007

*Печатается по решению  
редакционно-издательского совета  
факультета математики и  
информатики  
Амурского государственного  
университета*

**Нейман В.П., Труфанова Т.В.**

**Методы математической физики.** Учебно-методический комплекс дисциплины для студентов АмГУ по направлению подготовки дипломированных специалистов по специальности - 010701-"Физика"  
Благовещенск: Амурский гос. ун-т, 2007 – 216 с.

© Амурский государственный университет, 2007

© Кафедра математического анализа и моделирования, 2007

## ОГЛАВЛЕНИЕ

1	Выписка из государственного образовательного стандарта высшего профессионального образования	4
2	Рабочая программа	4
3	График самостоятельной работы студентов	16
4	Методические рекомендации по проведению самостоятельной работы студентов	17
5	Перечень учебников, учебных пособий	18
6	Краткий конспект лекций	20
7	Методические рекомендации по выполнению индивидуальных заданий и комплект заданий	165
8	Методические указания по организации межсессионного контроля знаний студентов	205
9	Фонд тестовых и контрольных заданий для оценки качества знаний по дисциплине	205
10	Примеры экзаменационных билетов	214
11	Карта кадровой обеспеченности дисциплины	216

# 1 ВЫПИСКА ИЗ ГОСУДАРСТВЕННОГО ОБРАЗОВАТЕЛЬНОГО СТАНДАРТА ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ

ОПД.Ф.02	<p style="text-align: center;"><b>Методы математической физики</b></p> <p style="text-align: center;"><b>Линейные и нелинейные уравнения физики</b></p> <p>Физические задачи, приводящие к уравнениям в частных производных. Классификация уравнений в частных производных второго порядка. Общая схема метода разделения переменных. Специальные функции математической физики. Краевые задачи для уравнения Лапласа. Уравнения параболического типа. Краевые задачи для уравнения Гельмгольца. Понятие о нелинейных уравнениях математической физики.</p>
----------	---

## 2.РАБОЧАЯ ПРОГРАММА

по дисциплине **"Методы математической физики"**

для специальности 010701–"Физика"

Курс 2,3

Семестр 4,5

Лекции 72 (36+36) час.

Экзамен 5 семестр

Практические (семинарские) занятия 72 (36+36) час. Зачет 4 семестр

Лабораторные занятия (нет).

Самостоятельная работа 96 час.

Всего 240 часов.

Рабочая программа составлена на основании Государственного образовательного стандарта высшего профессионального образования по специальности 010701–"Физика"

## **1. Цели и задачи дисциплины, её место в учебном процессе**

### 1.1 Цель и задачи преподавания учебной дисциплины.

Дисциплина "*Методы математической физики*" посвящена изучению математических моделей естественнонаучных явлений, которые приводят к задачам для дифференциальных уравнений с частными производными второго порядка.

Целью дисциплины является знакомство с методами построения математических моделей различных процессов и явлений естествознания, изучение основных методов исследования возникающих при этом математических задач и их решение, выяснение физического смысла полученного решения.

### 1.2 Перечень дисциплин, необходимых для изучения данной дисциплины.

Для изучения дисциплины "*Методы математической физики*" необходимо знание: математического анализа, дифференциальных уравнений, алгебры, физики.

### 1.3 Перечень основных умений и навыков, приобретаемых при изучении дисциплины.

Дисциплина "*Методы математической физики*" вырабатывает у студентов навыки построения математических моделей простейших физических явлений и решения (аналитического и численного) получающихся при этом математических задач.

## **2. Содержание дисциплины**

### 2.1 Наименование разделов (тем), их содержание, объём в часах лекционных занятий.

<i>N n/n</i>	<i>Кол-во</i>
--------------	---------------

*часов*

<i>1. Введение.</i>	
---------------------	--

2

Применение методов математической физики для описания закономерностей различных физических явлений.

*2. Классификация уравнений с частными производными. 4*

Классификация и приведение к каноническому виду линейных уравнений второго порядка с двумя независимыми переменными.

Уравнение гиперболического типа.

*3. Физические задачи, приводящие к уравнениям гиперболического типа.*

Уравнение малых поперечных колебаний струны. Уравнение продольных колебаний стержней и струн. Энергия колебания струны. Вывод уравнения электрических колебаний в проводах. Поперечные колебания мембраны. Граничные и начальные условия.

*4. Теорема единственности решения. 2*

*5. Метод распространяющихся волн. 2*

Формула Даламбера. Физическая интерпретация. Устойчивость решения.

*6. Метод разделения переменных. 2*

Уравнения свободных колебаний струны. Интерпретация решений.

*7. Неоднородные уравнения. Вынужденные колебания. 2*

*8. Формула Киркгофа-Соболева и распространение волн в неограниченном пространстве. 2*

*9. Задача с данными на характеристиках. 2*

*10. Метод Римана решения задачи Коши для гиперболического уравнения на плоскости. 2*

Уравнения параболического типа

*11. Простейшие задачи, приводящие к уравнениям параболического типа. Постановка краевых задач. 2*

Линейная задача о распространении тепла. Уравнение диффузии.

*12. Уравнение теплопроводности в ограниченной области. 2*

Принцип максимума для уравнения теплопроводности. Единственность и устойчивость решения.

13. *Метод разделения переменных.* 2  
Однородная      краевая      задача.      Функция      источника.

2

14. *Неоднородное уравнение теплопроводности.* 1

15. Задачи на бесконечной прямой. Распространение тепла на бесконечной прямой. Функция источника для неограниченной области. Интеграл Пуассона. Краевая задача для полуограниченной прямой. Принцип Дюамеля - 3

*семестр 5, курс 3*

Уравнения эллиптического типа

16. *Задачи, приводящиеся к уравнению Лапласа.* 4  
Уравнение Лапласа в криволинейной системе координат.

17. *Формулы Грина. Интегральное представление решения.* 4

18. *Общие свойства гармонических функций. Единственность и устойчивость решения.* 2

19. *Функция Грина и её свойства.* 2

20. *Решение краевых задач для простейших областей. Метод* 4  
*разделения переменных.*

21. *Теория потенциала.*

Объёмный потенциал. Поверхностные потенциалы. 4

22. *Применение поверхностных потенциалов к решению краевых задач. Интегральные уравнения соответствующие краевым задачам.* 2

23. *Задача для неограниченной области.* 3

Примеры применения. Уравнение  $\Delta u + cu = -f$  в неограниченном пространстве. Принцип предельного поглощения. Условия поглощения.

24. *Метод конечных разностей.* 4

Аппроксимация простейших дифференциальных операторов. Разностная задача. Устойчивость, сходимость и разрешимость разностных схем.

Применение метода конечных разностей для решения уравнений математической физики.

25. Специальные функции. Общая схема метода разделения переменных. Уравнение специальных функций и свойства его решений. Уравнение Бесселя. Различные типы цилиндрических функций. Асимптотические формулы. Функции Бесселя чисто мнимого аргумента. Полиномы Лежандра. Присоединенные функции Лежандра. Шаровые и сферические функции. Классические ортогональные полиномы. Полиномы Чебышева-Лагерра и Чебышева-Эрмита. Применение специальных функций к решению краевых задач для уравнений математической физики.

## 2.2 Программа практических занятий.

*2 курс, 4 семестр*

*N n/n*

*Кол-вочасов*

1. Дифференциальное уравнение с частными производными и его решения. Классификация уравнений с частными производными. 2

2. Приведение к каноническому виду линейных уравнений с частными производными второго порядка с двумя независимыми переменными. 4

### Уравнения гиперболического типа

3. Волновое уравнение. Общее решение. 2

4. Задача Коши для волнового уравнения. Задача Гурса для волнового уравнения. 2

5. Смешанная задача для уравнения гиперболического типа. Метод разделения переменных - метод Фурье для однородного уравнения с однородными граничными условиями. 2

6. Неоднородная смешанная задача для уравнения гиперболического типа. Вынужденные колебания. 4

7. Контрольная работа. 2

*3 курс, 5 семестр*

### Уравнения параболического типа

8. Построение математических моделей для параболического типа - 2

9. Метод Фурье для решения уравнения теплопроводности. 2



10. Неоднородное уравнение теплопроводности и его решение. 4

11. Распространение тепла на бесконечной прямой. Функция источника для неограниченной области. Краевая задача для полуограниченной прямой. 4

### Уравнения эллиптического типа

12. Постановка задач для уравнения Лапласа и Пуассона. Задача Дирихле и Неймана. 2

13. Основные свойства гармонических функций. 2

14. Формула Грина. Интегральное представление решения. 2

15. Функция Грина и её свойства. 2

16. Решение краевых задач для простейших областей методом разделения переменных. 6

17. Метод функции Грина. 4

18. Теория потенциала. Метод интегральных уравнений. 4

19. Решение уравнения  $\Delta u + cu = -f$  в неограниченном пространстве. 4

20. Применение метода конечных разностей для решения уравнений математической физики. 6

21. Уравнение Бесселя. 2

22. Различные типы цилиндрических функций 2

23. Полиномы Лежандра. Шаровые и сферические функции 2

24. Применение специальных функций к решению краевых задач для уравнений математической физики 2

25. Контрольная работа. 2

### **3. Перечень и темы промежуточных форм контроля знаний студентов**

3.1 Контрольные работы.

#### *4 семестр*

3.1.1 Приведение к каноническому виду линейных уравнений 1 с частными производными второго порядка.

3.1.2 Задача Коши для волнового уравнения. 1

#### *5 семестр*

3.1.3 Метод разделения переменных для уравнения теплопроводности.

3.2 Коллоквиумы.

#### *4 семестр*

3.2.1 Классификация уравнений второго порядка. Основные краевые задачи. Методы решения краевых задач. 2

#### *5 семестр*

3.2.2 Теория потенциалов. Функция Грина. 2

3.3 Расчётно-графические работы (РГР).

#### *4 семестр*

3.3.1 Метод Фурье для решения неоднородного волнового уравнения.

Время, затраченное на выполнение. 6

#### *5 семестр*

3.3.2 Краевые задачи для уравнения Лапласа на плоскости (для кольца, круга, прямоугольника).

Время, затраченное на выполнение. 6

### **4 Требования к знаниям студентов, предъявляемые на зачете**

Необходимым условием допуска на зачет является сдача всех практических работ и расчетных работ. Зачет сдается в конце семестра. Форма зачета – устная. Студент должен дать развернутый ответ на два вопроса, предложенных в билете. При выполнении указанных требований ставится отметка «зачтено».

## **5 Требования к знаниям студентов, предъявляемые на экзамене**

Необходимым условием допуска на экзамен является сдача всех практических и расчетных работ. В билет входят два вопроса и одна задача. Студент должен дать развернутый ответ на основные вопросы и краткий – на дополнительные, решить задачу.

Оценка «отлично» ставится при полном изложении теоретического материала экзаменационного билета, ответах на дополнительные вопросы, подтверждающие знание материала, и при правильном решении задачи.

Оценка «хорошо» ставится при твердых знаниях студентом материала (в пределах конспектов лекций); при решении задачи допущены небольшие недочеты и ошибки вычислительного характера.

Оценка «удовлетворительно» ставится, если на оба вопроса даны неполные ответы, показывающие поверхностное знание излагаемого материала; задача не решена до конца.

Оценка «неудовлетворительно» ставится, если совсем не решена задача и студент не ответил ни на один из вопросов.

## **6 Вопросы к зачету**

1. Основные понятия и определения. Цели и задачи математической физики
2. Классификация уравнений в частных производных 2-го порядка.
3. Приведение дифференциального уравнения 2-го порядка к каноническому виду.
4. Уравнения гиперболического типа. Простейшие задачи, приводящиеся к уравнениям гиперболического типа (уравнения малых поперечных колебаний струны, уравнения продольных колебаний струны, стержня, пружины).
5. Энергия поперечных колебаний струны.
6. Вывод уравнения электрических колебаний в проводках.

7. Краевые задачи для гиперболического уравнения. Предельные задачи.
8. Теорема единственности для решения уравнения колебаний струны.
9. Метод распространяющихся волн. Формула Даламбера.
10. Устойчивость решения уравнения поперечных колебаний струны.
11. Колебания полуограниченной струны.
12. Метод разделения переменных или метод Фурье для уравнений гиперболического типа.
13. Физическая и геометрическая интерпретация решения уравнения свободных колебаний струны.
14. Краевые задачи для неоднородного уравнения гиперболического типа.
15. Общая первая краевая задача.
16. Краевые задачи со стационарными неоднородностями.
17. Общая схема метода разделения переменных.
18. Основные свойства собственных значений.
19. Вычисления коэффициентов разложения ряда Фурье.
20. Решение 3-ей краевой задачи для уравнения гиперболического типа.
21. Задача с данными на характеристиках. Метод последовательных приближений для задачи Гурса.
22. Параболический тип. Линейная задача о распространении тепла (законы Фурье).
23. Начальные и граничные условия для уравнения параболического типа.
24. Первая краевая задача для уравнения параболического типа.
25. Принцип максимального значения для уравнения теплопроводности.
26. Следствие принципа максимального значения.
27. Теорема единственности. Решение первой краевой задачи для уравнения параболического типа.
28. Метод разделения переменных для уравнений параболического типа.
29. Функции источника.

30. Неоднородные уравнения теплопроводности и его решение.
31. Общая первая краевая задача для уравнения параболического типа.
32. Распространение тепла на бесконечной прямой. Функция источника для неограниченной области.
33. Краевые задачи для полуограниченной прямой.

### **7 Вопросы к экзамену**

1. Понятие дифференциальных уравнений в частных производных и его решения.
2. Понятие характеристической формы и классификация линейных уравнений 2-го порядка (гиперболического, эллиптического, параболического).
3. Характеристические кривые и характеристические направления.
4. Приведение к каноническому виду уравнений 2-го порядка с двумя переменными.
5. Простейшие задачи, приводящие к уравнениям гиперболического типа (колебание струны, распространение звука, распространение волн).
6. Уравнение малых поперечных колебаний струны.
7. Уравнение продольных колебаний струны (стержня).
8. Энергия колебаний струны.
9. Уравнение колебаний мембраны (б.в.).
10. Граничные и начальные условия (3 типа).
11. Теорема единственности решения для гиперболического типа.
12. Формула Даламбера. (Решение задачи Коши для гиперболического типа)
13. Устойчивость решения.
14. Метод разделения переменных для уравнения свободных колебаний струны (метод Фурье).
15. Интерпретация решения для волнового уравнения.

16. Задачи с данными на характеристиках. Метод последовательных приближений для задачи Гурса.
17. Простейшие задачи, приводящие к уравнению параболического типа (уравнение теплопроводности, диффузионные процессы).
18. Линейная задача о распространении тепла (уравнение теплопроводности)
19. Постановка краевой задачи для уравнения теплопроводности.
20. Принцип максимального значения для уравнения теплопроводности.
21. Теорема единственности для параболического типа.
22. Метод разделения переменных для уравнения теплопроводности. Однородная краевая задача.
23. Функция источника для уравнения теплопроводности.
24. Неоднородное уравнение теплопроводности и его решение.
25. Общая (первая) краевая задача для уравнения теплопроводности (уравнение и граничные условия неоднородны).
26. Распространение тепла на бесконечной прямой (задача Коши).
27. Интеграл Пуассона для решения уравнения теплопроводности.
28. Краевая задача для полуограниченной прямой (леммы).
29. Уравнения эллиптического типа. Задачи, приводящие к уравнениям Лапласа.
30. Уравнения Лапласа в криволинейной системе координат (3 вида: в сферической, полярной, цилиндрической).
31. Фундаментальные решения уравнения Лапласа.
32. Гармонические функции. Общие свойства функций.
33. Первая и вторая формулы Грина.
34. Основная формула Грина.
35. Внешние краевые задачи для уравнений эллиптического типа.
36. Решение краевых задач для простейших областей методом разделения переменных.
37. Интеграл Пуассона (эллиптические уравнения).

38. Функция источника для уравнения Лапласа.
39. Свойства функции источника для уравнения Лапласа.
40. Теория потенциалов. Объемный потенциал.
41. Плоская задача. Логарифмический потенциал.
42. Поверхностный потенциал. Потенциал простого слоя.
43. Потенциал диполя. Потенциал двойного слоя.
44. Применение поверхностных потенциалов к решению краевых задач.
45. Первая краевая задача для круга (вывод).
46. Уравнения колебания в пространстве.
47. Метод усреднения.
48. Формула Пуассона для решения задачи Коши о распространении волн в пространстве.
49. Метод спуска. Сферические, цилиндрические, плоские волны.
50. Решения уравнений колебания на плоскости и в пространстве (интегральные формулы Кирхгофа).
51. Решение неоднородного волнового уравнения в пространстве.
52. Колебания ограниченных объемов. Общая схема метода разделения переменных.
53. Колебания прямоугольной мембраны.
54. Колебания круглой мембраны.
55. Функция температурного влияния.
56. Распределение тепла в пространстве (неограниченном).
57. Распространение тепла в ограниченных телах. Схема метода разделения переменных.
58. Решение неоднородного уравнения теплопроводности в ограниченных телах.

### 3 ГРАФИК САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ СТУДЕНТОВ

Содержание	Объем в часах	Сроки и формы контроля
Подготовка к коллоквиуму: «Классификация уравнений второго порядка и их приведение к каноническому виду. Основные краевые задачи для волнового уравнения. Метод Фурье»	3	15 неделя, 5 семестр собеседование
Подготовка к коллоквиуму: «Теория потенциалов»	3	15 неделя, 6 семестр собеседование
Выполнение РГР – Метод разделения переменных для неоднородного волнового уравнения.	4	16 неделя, 5 семестр, проверка РГР
Выполнение РГР – Краевые задачи для уравнения Лапласа на плоскости (для кольца, круга, прямоугольника).	4	16 неделя, 6 семестр, проверка РГР
Выполнение индивидуальных домашних заданий по каждой теме практических занятий	10	1-18 недели 5 и 6 семестра, проверка индивидуальных домашних заданий



#### **4 МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ПО ПРОВЕДЕНИЮ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ СТУДЕНТОВ**

В качестве основных литературных источников используются учебно-методические материалы по дисциплине.

В качестве учебно-методического пособия по самостоятельной работе студентов используются конспекты лекций и пособие: Труфанова Т.В., Сельвинский В.В., Масловская А.Г. Метод разделения переменных для решения уравнений математической физики. Учеб.-метод. пособие: Благовещенск, изд-во АмГУ, 2005.-87 с.

## 5 ПЕРЕЧЕНЬ УЧЕБНИКОВ, УЧЕБНЫХ ПОСОБИЙ

1. Арфкен Г. Математические методы в физике. – М.: Атомиздат, 1970. – 712 с.
2. Будак Б.М., Самарский А.А., Тихонов А.Н. Сборник задач по математической физике. – 4-е изд., испр.- М.: Физматлит, 2003.-688 с.
3. Мартинсон Л.К., Малов Ю.И. Дифференциальные уравнения математической физики.- М., изд. МГТУ, 1996.
4. Масленникова В.Н. Дифференциальные уравнения в частных производных.- М.: Изд-во РУДН, 1997.-447 с.
5. Бицадзе А.В. Уравнения математической физики: Учеб.-М.: Наука, 1982, 336 с.
6. Бицадзе А.В., Калинин Д.Ф. Сборник задач по уравнения математической физики: Учеб. пособие М.: Наука, 1980, 636 с.
7. Владимиров В.С. Уравнения математической физики: Учеб. пособие М.: Наука, 1981, 512 с
8. Владимиров В.С. и др. Сборник задач по уравнениям математической физики: Учеб. пособие М.: Наука, 1982, 256 с.
9. Карслоу Г., Егер Д. Теплопроводность твердых тел. – М.: Наука. 1964. – 490 с.
- 10.Карташов Э. М. Аналитические методы в теории теплопроводности твердых тел. – М.: Наука, 1985. – 480 с.
- 11.Николенко В. И. Уравнения математической физики. М.: изд-во МГУ, 1977 – 111 с.
- 12.Михайлов В.П. Дифференциальные уравнения в частных производных: Учеб. пособие М.: Наука, 1983, 424 с.
- 13.Пакулин В.П., Похожаев С.И. Практический курс по уравнениям математической физики: М.: Наука, 1995, 224 с.
- 14.Петровский И.Г. Лекции об уравнениях с частными производными: Учеб. - М., изд-во МГУ, 1984, 390 с.

- 15.Смирнов В.И. Курс высшей математики. Учеб.: Т. 2,4, М.: Наука, 1981, 655 с.
- 16.Тихонов А.А., Самарский А.А., Уравнения математической физики: Учеб. М.: Наука, 1977, 735 с.
- 17.Уроев В. М. Уравнения математической физики. М.: Наука, ИФ «ЯУЗА», 1998 – 373 с.
- 18.Фарлоу С. Уравнения с частными производными для научных работников и инженеров. – М.: Мир, 1985. – 383с.
- 19.Цой В. М. Методы расчета задач тепломассопереноса. – М.: Наука, 1984. – 478 с.
- 20.Труфанова Т.В., Сельвинский В.В. Метод разделения переменных или метод Фурье для решения уравнений в частных производных. Учеб.-метод. пособие: Благовещенск, изд-во АмГУ, 1999.-61 с.
- 21.Труфанова Т.В., Сельвинский В.В., Масловская А.Г. Метод разделения переменных для решения уравнений математической физики. Учеб.-метод. пособие: Благовещенск, изд-во АмГУ, 2005.-87 с.

## **6 КРАТКИЙ КОНСПЕКТ ЛЕКЦИЙ**

### **6.1 Введение в теорию уравнений с частными производными**

#### **6.1.1 Понятие дифференциального уравнения с частными производными и его решения.**

Большинство физических явлений, как динамика жидкости, электричество и магнетизм, механика, оптика, теплопередача, могут быть описаны с помощью уравнений с частными производными (УЧП). Большинство уравнений математической физики – это уравнения с частными производными. При некоторых упражнениях, предложениях эти уравнения сводятся к обыкновенным дифференциальным уравнениям, но полное описание таких систем неминуемо приводит к исследованию уравнений с частными производными.

Большинство физических законов природы можно сформулировать на языке уравнений с частными производными. В качестве примера можно привести уравнение Максвелла, закон теплообмена Ньютона, уравнение движения Ньютона и т.д. Во всех этих уравнениях физические явления описываются на языке пространственных и временных производных. Производные появляются в уравнениях потому, что они описывают важнейшие физические величины (такие, как скорость, ускорение, сила, трение, поток, ток и т.д.). Таким образом, возникают уравнения с частными производными, содержащие производную функцию, которую необходимо определить.

Метод исследования, характеризует эту отрасль науки, является математическим по своему существу. Однако постановка задач математической физики тесно связана с изучением физических проблем.

Цель дисциплины состоит в том, чтобы научить студентов:

1. Как физическую задачу сформулировать в виде уравнения с частными производными (построение математической модели)

2. Как решить уравнение с частными производными (с учетом начальных и граничных условий)

Введем понятие дифференциального уравнения с частными производными.

Обозначим через  $D$  область  $n$ -го евклидова пространства  $E_k$  точек  $x$  с декартовыми ортогональными координатами  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , где  $n \geq 2$ .

**Определение 1.** Равенство вида

$$F\left(x, \dots, \frac{\partial^k u}{\partial x_1^{i_1} \partial x_2^{i_2} \dots \partial x_n^{i_n}}, \dots\right) = 0, \quad (1)$$

где  $\sum_{j=1}^n i_j = k$ ,  $k = 0, 1, \dots, m$ ;  $m \geq 1$ ,

называется *дифференциальным уравнением с частными производными порядка  $m$  относительно неизвестной функции  $u(x) = u(x_1, \dots, x_n)$ ,  $x \in D$* , а левая часть этого равенства – *дифференциальным оператором с частными производными порядка  $m$* .

**Определение 2.** Определенная в области  $D$ , заданная уравнением (1), действительная функция  $u(x)$ , непрерывная вместе со своими частными производными, входящими в это уравнение, и обращающая его в тождество, называется *регулярным решением*.

Наряду с регулярными решениями в теории ДУ с ЧП важное значение имеют решения, перестающие быть регулярными в изолированных точках или на многообразиях особого вида. К ним относятся так называемые *элементарные или фундаментальные решения*.

Все встречающиеся в приложениях уравнения с ЧП имеют целое семейство решений. Однако существуют дифференциальные уравнения с ЧП множество решений которых весьма узки и в некоторых случаях даже пусты.

**Пример 1.**  $Z = Z(x, y)$ ; найти решение уравнения:

$$\frac{\partial Z}{\partial x} = 1 \Rightarrow z = x + \varphi(y)$$

**Пример 2.**  $Z = Z(x, y)$ ; найти решение уравнения:

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial y^2} = 6y$$

интегрируем дважды, получаем:

$$\frac{\partial Z}{\partial y} = 3y^2 + \varphi(x) \Rightarrow Z(x, y) = y^3 + \varphi(x)y + \psi(x).$$

**Пример 3.**  $Z = Z(x, y)$ ; найти решение уравнения:

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial x \partial y} = 0;$$

$$\frac{\partial Z}{\partial y} = f(y) \Rightarrow Z(x, y) = \tilde{f}(y) + \psi(x).$$

$$\text{Пример 4. } \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial u}{\partial x_i} \right)^2 = 0 \Rightarrow u(x) = \text{const}.$$

$$\text{Пример 5. } \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial u}{\partial x_i} \right)^2 + 1 = 0 \text{ – не имеет действительных решений.}$$

Уравнения с частными производными можно классифицировать по различным признакам:

**1. Порядок уравнения.** Порядком уравнения называемся наивысший порядок частных производных, входящих в уравнение.

*Например:*  $u_t = u_{xx}$  - порядок – 2;

$u_t = u_x$  - порядок – 1;

$u_t = u_{xxx} + \sin x$  - порядок – 3.

**2. Число переменных.** Числом переменных называется число независимых переменных.

*Например:*  $u_t = u_{xx}$  - уравнение с 2-мя переменными  $x$  и  $y$ .

$$u_t = u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta} - \text{уравнение с 3-мя переменными } t, r \text{ и } \theta$$

**3. Линейность.** Уравнение с ЧП называется линейным, если независимая переменная и все ее частные производные входят в уравнение линейно (в частности они не умножаются друг на друга и не возводятся в квадрат и т.д.).

*Например:*  $u_{tt} = e^{-t}u_{xx} + \sin t$  - линейное;

$uu_{xx} + u_t = 0$  – нелинейное;

$u_{xx} + uu_{yy} = 0$  – линейное;

$xu_x + uu_y + u^2 = 0$  - нелинейное.

Когда уравнение линейно относительно старших производных от неизвестной функции, то оно называется квазилинейным.

*Например:*  $\frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + u^2 = 0$  - квазилинейное уравнение второго

порядка относительно неизвестной функции  $u$ .

$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 = u$  – нелинейное и не квазилинейное относительно функции  $u$ .

**4. Однородность.** Линейное уравнение  $Lu = f(x)$  называется однородным, если правая часть  $f(x)$  тождественно равна нулю. Если  $f(x) \neq 0$ , то уравнение называется неоднородным.

Линейное уравнение с частными производными второго порядка можно записать в виде:

$$\sum_{i,j=1}^n A_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{j=1}^n B_j \frac{\partial u}{\partial x_j} + cu = f(x), \quad (2)$$

где  $A_{ij}$ ,  $B_j$ ,  $c$ ,  $f$  - заданные в области  $D$  действительные функции точки  $x$ .

В этом курсе мы будем заниматься главным образом линейными уравнениями второго порядка с одной неизвестной. Такими уравнениями являются, например, следующие:

1.  $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2}$  - уравнение теплопроводности;

2.  $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2}$  - волновое уравнение;

3.  $\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2} = 0$  - уравнение Лапласа.



### 6.1.2 Понятие характеристической формы. Классификация линейных уравнений второго порядка

В теории уравнение (1) фундаментальную роль играет форма порядка  $m$ :

$$K(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \sum_{i_1, \dots, i_n} \frac{\partial F}{\partial P_{i_1, \dots, i_n}} \lambda_1^{i_1} \cdot \dots \cdot \lambda_n^{i_n}, \quad (3)$$

где  $\sum_{j=1}^n i_j = m$ , относительно действительных переменных  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ , которое называется характеристической формой, соответствующей уравнению (1). Здесь

$$P_{i_1, \dots, i_n} = \frac{\partial^k u}{\partial x_1^{i_1} \dots \partial x_n^{i_n}}.$$

В случае уравнения второго порядка (2) характеристическая форма (3)

является квадратичной и имеет вид:  $Q(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \sum_{i,j=1}^n A_{ij}(x) \lambda_i \lambda_j$ .

В каждой точке  $x \in D$  квадратичная форма  $Q$  при помощи не особого арифметического преобразования переменных  $\lambda_i = \lambda_i(\xi_1, \dots, \xi_n)$ ,  $i = 1, \dots, n$ , может быть приведена к каноническому виду

$$Q = \sum \alpha_i \xi_i^2,$$

где коэффициенты  $\alpha_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , принимают значения 1, -1, 0, причем число отрицательных коэффициентов (индекс нумерации) и число нулевых коэффициентов (дефект формы) являются аффинными инвариантами.

Когда все  $\alpha_i = 1$  или все  $\alpha_i = -1$ ,  $i = 1, \dots, n$ , т.е. когда форма  $Q$  соответственно положительна или отрицательна (дефинитная), уравнение (2) называется эллиптическим в точке  $x \in D$ . Если один из коэффициентов  $\alpha_i < 0$ , а все остальные положительны или наоборот, то говорят что уравнение (2) в точке  $x \in D$  гиперболично. В случае, когда  $l$ ,  $1 < l < n - 1$ , коэффициентов  $\alpha_i$

положительные, а остальные  $n - l$  отрицательные, то уравнение (2) называется ультра-гиперболическим. Если хотя бы один из коэффициентов  $\alpha_i = 0$ , то уравнение (2) в точке  $x \in D$  называется параболическим

Говорят, что в области  $D$  своего задания (2) является уравнением эллиптического, гиперболического или параболического типа, если оно соответственно эллиплично, гиперболично или параболично в каждой точке этой области.

Эллиптическое в области  $D$  уравнение (2) называется равномерно эллиптическим, если существуют отличные от нуля действительные числа  $k_0$  и

$$k_1 \text{ одинакового знака такие, что } k_0 \sum_{i=1}^n \lambda_i^2 \leq Q(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \leq k_1 \sum_{i=1}^n \lambda_i^2,$$

для всех  $x \in D$ .

**Пример.** Уравнение  $x_n \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \sum_{i=2}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = 0$  (\*)

показывает, что эллиптическое в области своего значения уравнение не обязано быть равномерно эллиптическим. Это уравнение эллиплично в каждой точке  $x_n > 0$ , не будет в нем равномерно эллиплично. Когда в различных частях области  $D$  уравнение (2) принадлежит к различным типам, то говорят, что оно является уравнением смешенного типа в этой области. Пример (\*) относится как раз к уравнениям смешенного типа в любой области  $D$  пространства  $E_n$ , пересечение которой с гиперплоскостью  $x_n = 0$  не является пустым. В дальнейшем под определено квадратичной формой будем подразумевать ее положительную определенность, ибо отрицательно определенная квадратичная форма  $x(-1)$  становится положительно определенной.

Предполагая, без ограничения общности, что форма  $Q$  симметрична, т.е.  $A_{ij} = A_{ji}$ ,  $i, j = 1, \dots, n$ , и используя критерий Сильвестра положительной

определенности квадратичных форм, мы можем не приводя квадратичную форму  $Q$  к каноническому виду, утверждать, что для эллиптичности уравнения (2) в области  $D$  необходимо и достаточно, чтобы все главные диагональные миноры матрицы

$$A = \begin{vmatrix} A_{11} & \dots & A_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ A_{n1} & \dots & A_{nn} \end{vmatrix}$$

были положительны.

## 6.2 Классификация дифференциальных уравнений с частными производными

Многие задачи математической физики приводят к дифференциальным уравнениям с частными производными. Наиболее часто встречаются дифференциальные уравнения 2-го порядка. В настоящей главе мы рассмотрим классификацию этих уравнений.

### 6.2.1. Классификация уравнений с частными производными 2-го порядка

**1. Дифференциальные уравнения с двумя независимыми переменными.** Дадим необходимые определения.

Уравнением с частными производными 2-го порядка с двумя независимыми переменными  $x, y$  называется соотношение между неизвестной функцией  $u(x, y)$  и ее частными производными до 2-го порядка включительно<sup>1)</sup>:

$$F(x, y, u, u_x, u_y, u_{xx}, u_{yy}, u_{xy}) = 0$$

Аналогично записывается уравнение и для большего числа независимых переменных.

<sup>1)</sup> Мы пользуемся следующими обозначениями для производных:

$$u_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad u_y = \frac{\partial u}{\partial y}, \quad u_{xx} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad u_{xy} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, \quad u_{yy} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \text{ и т.д.}$$

Уравнение называется *линейным относительно старших производных*, если оно имеет вид

$$a_{11}u_{xx} + 2a_{12}u_{xy} + a_{22}u_{yy} + F_1(x, y, u, u_x, u_y) = 0, \quad (1)$$

где  $a_{11}$ ,  $a_{12}$ ,  $a_{22}$  являются функциями  $x$  и  $y$ .

Если коэффициенты  $a_{11}$ ,  $a_{12}$ ,  $a_{22}$  зависят не только от  $x$  и  $y$ , а являются, подобно  $F_1$ , функциями  $x$ ,  $y$ ,  $u$ ,  $u_x$ ,  $u_y$ , то такое уравнение называется *квазилинейным*.

Уравнение называется *линейным*, если оно линейно как относительно старших производных  $u_{xx}$ ,  $u_{yy}$ ,  $u_{xy}$ , так и относительно функции  $u$  и ее первых производных  $u_x$ ,  $u_y$ :

$$a_{11}u_{xx} + 2a_{12}u_{xy} + a_{22}u_{yy} + b_1u_x + b_2u_y + cu + f = 0, \quad (2)$$

где  $a_{11}$ ,  $a_{12}$ ,  $a_{22}$ ,  $b_1$ ,  $b_2$ ,  $c$ ,  $f$  – функции только  $x$  и  $y$ . Если коэффициенты уравнения (2) не зависят от  $x$  и  $y$ , то оно представляет собой линейное уравнение с постоянными коэффициентами. Уравнение называется *однородным*, если  $f(x, y) = 0$ .

С помощью преобразования переменных

$$\xi = \varphi(x, y), \quad \eta = \psi(x, y),$$

допускающего обратное преобразование, мы получаем новое уравнение, эквивалентное исходному. Естественно поставить вопрос: как выбрать  $\xi$  и  $\eta$ , чтобы уравнение в этих переменных имело наиболее простую форму?

В этом пункте мы дадим ответ на поставленный вопрос для уравнений, линейных относительно старших производных вида (1) с двумя независимыми переменными  $x$  и  $y$

$$a_{11}u_{xx} + 2a_{12}u_{xy} + a_{22}u_{yy} + F_1(x, y, u, u_x, u_y) = 0.$$

Преобразуя производные к новым переменным, получаем:

$$\left. \begin{aligned}
u_x &= u_\xi \xi_x + u_\eta \eta_x, \\
u_y &= u_\xi \xi_y + u_\eta \eta_y, \\
u_{xx} &= u_{\xi\xi} \xi_x^2 + 2u_{\xi\eta} \xi_x \eta_x + u_{\eta\eta} \eta_x^2 + u_\xi \xi_{xx} + u_\eta \eta_{xx}, \\
u_{xy} &= u_{\xi\xi} \xi_x \xi_y + u_{\xi\eta} (\xi_x \eta_y + \xi_y \eta_x) + u_{\eta\eta} \eta_x \eta_y + u_\xi \xi_{xy} + u_\eta \eta_{xy}, \\
u_{yy} &= u_{\xi\xi} \xi_y^2 + 2u_{\xi\eta} \xi_y \eta_y + u_{\eta\eta} \eta_y^2 + u_\xi \xi_{yy} + u_\eta \eta_{yy}.
\end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Подставляя значения производных из (3) в уравнение (1), будем иметь:

$$\bar{a}_{11}u_{\xi\xi} + 2\bar{a}_{12}u_{\xi\eta} + \bar{a}_{22}u_{\eta\eta} + \bar{F} = 0, \quad (4)$$

где

$$\begin{aligned}
\bar{a}_{11} &= a_{11}\xi_x^2 + 2a_{12}\xi_x\xi_y + a_{22}\xi_y^2, \\
\bar{a}_{12} &= a_{11}\xi_x\eta_x + a_{12}(\xi_x\eta_y + \eta_x\xi_y) + a_{22}\xi_y\eta_y, \\
\bar{a}_{22} &= a_{11}\eta_x^2 + 2a_{12}\eta_x\eta_y + a_{22}\eta_y^2,
\end{aligned}$$

а функция  $\bar{F}$  не зависит от вторых производных. Заметим, что если исходное уравнение линейно, т.е.

$$F(x, y, u, u_x, u_y) = b_1u_x + b_2u_y + cu + f,$$

то  $\bar{F}$  имеет вид

$$\bar{F}(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta) = \beta_1u_\xi + \beta_2u_\eta + \gamma u + \delta,$$

т.е. уравнение является линейным<sup>1)</sup>

Выберем переменные  $\xi$  и  $\eta$  так, чтобы коэффициент  $\bar{a}_{11}$  был равен нулю.

Рассмотрим уравнение с частными производными 1-го порядка

$$a_{11}z_x^2 + 2a_{12}z_xz_y + a_{22}z_y^2 = 0. \quad (5)$$

Пусть  $z = \varphi(x, y)$  – какое-нибудь частное решение этого уравнения. Если положить  $\xi = \varphi(x, y)$ , то коэффициент  $\bar{a}_{11}$ , очевидно, будет равен нулю. Таким образом, упомянутая выше задача о выборе новых независимых переменных связана с решением уравнения (5).

<sup>1)</sup>

Докажем следующие леммы.

1. Если  $z = \varphi(x, y)$  является частным решением уравнения

$$a_{11}z_x^2 + 2a_{12}z_xz_y + a_{22}z_y^2 = 0,$$

То решение  $\varphi(x, y) = C$  представляет собой общий интеграл обыкновенного дифференциального уравнения

$$a_{11}dy^2 + 2a_{12}dxdy + a_{22}dx^2 = 0. \quad (6)$$

2. Если функция  $\varphi(x, y) = C$  представляет собой общий интеграл обыкновенного дифференциального уравнения

$$a_{11}dy^2 + 2a_{12}dxdy + a_{22}dx^2 = 0,$$

то функция  $z = \varphi(x, y)$  удовлетворяет уравнению (5).

Докажем первую лемму. Поскольку функция  $z = \varphi(x, y)$  удовлетворяет уравнению (5), то равенство

$$a_{11}\left(\frac{\varphi_x}{\varphi_y}\right)^2 - 2a_{12}\left(-\frac{\varphi_x}{\varphi_y}\right) + a_{22} = 0 \quad (7)$$

Является тождеством, так как оно удовлетворяет для всех  $x, y$  в той области, где задано решение. Соотношение  $\varphi(x, y) = C$  является общим интегралом уравнения (6), если функция  $y$ , определенная из неявного соотношения  $\varphi(x, y) = C$ , удовлетворяет уравнению (6).

Пусть  $y = f(x, C)$  есть эта функция, тогда

$$\frac{dy}{dx} = -\left[\frac{\varphi_x(x, y)}{\varphi_y(x, y)}\right]_{y=f(x, C)} \quad (8)$$

где скобки и значок  $y = f(x, C)$  указывают, что в правой части равенства (8) переменная  $y$  не является независимой переменной, а имеет значение, равное  $f(x, C)$ . Отсюда следует, что  $y = f(x, C)$  удовлетворяет уравнению (6), так как

$$a_{11}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 2a_{12}\left(-\frac{dy}{dx}\right) + a_{22} = \left[ a_{11}\left(-\frac{\varphi_x}{\varphi_y}\right)^2 - 2a_{12}\left(-\frac{\varphi_x}{\varphi_y}\right) + a_{22} \right]_{y=f(x,C)} = 0,$$

поскольку выражение в квадратных скобках равно нулю при всех значениях  $x$ ,  $y$ , а не только при  $y = f(x, C)$ .

Докажем вторую лемму. Пусть  $\varphi(x, y) = C$  - общий интеграл уравнения (6). Докажем, что

$$a_{11}\varphi_x^2 + 2a_{12}\varphi_x\varphi_y + a_{22}\varphi_y^2 = 0, \quad (7')$$

для любой точки  $(x, y)$ . Пусть  $(x_0, y_0)$  - какая-нибудь заданная точка. Если мы докажем, что в ней удовлетворяется равенство (7'), то отсюда в силу произвольности  $(x_0, y_0)$  будет следовать, что равенство (7') есть тождество и функция  $\varphi(x, y)$  является решением уравнения (7'). Проведем через точку  $(x_0, y_0)$  интегральную кривую уравнения (6), полагая  $\varphi(x_0, y_0) = C_0$  и рассматривая кривую  $y = f(x_0, C)$ . Очевидно, что  $y_0 = f(x_0, C_0)$ . Для всех точек этой кривой имеем:

$$a_{11}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 2a_{12}\left(-\frac{dy}{dx}\right) + a_{22} = \left[ a_{11}\left(-\frac{\varphi_x}{\varphi_y}\right)^2 - 2a_{12}\left(-\frac{\varphi_x}{\varphi_y}\right) + a_{22} \right]_{y=f(x,C_0)} = 0,$$

Полагая в последнем равенстве  $x=x_0$ , получим:

$$a_{11}\varphi_x^2(x_0, y_0) + 2a_{12}\varphi_x(x_0, y_0)\varphi_y(x_0, y_0) + a_{22}\varphi_y^2(x_0, y_0) = 0,$$

что и требовалось доказать.

Уравнение (6) называется *характеристическим* для уравнения (1), а его интегралы - *характеристиками*.

Полагая  $\xi = \varphi(x, y)$ , где  $\varphi(x, y) = \text{const}$  есть общий интеграл уравнения (6), мы обращаем в нуль коэффициент при  $u_{\xi\xi}$ . Если  $\psi(x, y) = \text{const}$  является другим

общим интегралом уравнения (6), не зависящим от  $\varphi(x, y)$ , то, полагая  $\eta = \psi(x, y)$ , мы обратим в нуль также и коэффициент при  $u_{\eta\eta}$ .

Уравнение (6) распадается на два уравнения:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a_{12} + \sqrt{a_{12}^2 - a_{11}a_{22}}}{a_{11}} \quad (9)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a_{12} - \sqrt{a_{12}^2 - a_{11}a_{22}}}{a_{11}} \quad (10)$$

Знак подкоренного выражения определяет тип уравнения

$$a_{11}u_{xx} + 2a_{12}u_{xy} + a_{22}u_{yy} + F = 0. \quad (11)$$

Это уравнение мы будем называть в точке  $M$  уравнением

*гиперболического* типа, если в точке  $M$   $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} > 0$ ,

*эллиптического* типа, если в точке  $M$   $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} < 0$ ,

*параболического* типа, если в точке  $M$   $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = 0$ <sup>1)</sup>.

Нетрудно убедиться в правильности соотношения

$$\bar{a}_{12}^2 - \bar{a}_{11}\bar{a}_{22} = (a_{12}^2 - a_{11}a_{22})D^2, \quad D = \xi_x \eta_y - \eta_x \xi_y,$$

из которого следует инвариантность типа уравнения при преобразовании переменных, так как функциональный определитель (якобиан)  $D$  преобразования переменных отличен от нуля. В различных точках области определения уравнение может принадлежать различным типам.

Рассмотрим область  $G$ , во всех точках которой уравнение имеет один и тот же тип. Через каждую точку области  $G$  проходят две характеристики, причем для уравнений гиперболического типа характеристики действительны и различны, для уравнения эллиптического типа – комплексны и различны, а для уравнений параболического типа обе характеристики действительны и совпадают между собой.

---

1



Разберем каждый из этих случаев в отдельности.

1. Для уравнения гиперболического типа  $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} > 0$  и правые части уравнений (9) и (10) действительны и различны. Общие интегралы их  $\varphi(x, y) = C$  и  $\psi(x, y) = C$  определяют действительные семейства характеристик.

Полагая

$$\xi = \varphi(x, y), \quad \eta = \psi(x, y) \quad (11)$$

Приводим уравнение (4) после деления на коэффициент при  $u_{\xi\eta}$  к виду

$$u_{\xi\eta} = \Phi(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta),$$

где  $\Phi = -\frac{\bar{F}}{2\bar{a}_{12}}$ .

Это – так называемая *каноническая* форма уравнений гиперболического типа<sup>1)</sup>. Часто пользуются второй канонической формой. Положим

$$\xi = \alpha + \beta, \quad \eta = \alpha - \beta.$$

т.е.

$$\alpha = \frac{\xi + \eta}{2}, \quad \beta = \frac{\xi - \eta}{2},$$

где  $\alpha$  и  $\beta$  – новые переменные. Тогда

$$u_\xi = \frac{1}{2}(u_\alpha + u_\beta), \quad u_\eta = \frac{1}{2}(u_\alpha - u_\beta), \quad u_{\xi\eta} = \frac{1}{4}(u_{\alpha\alpha} + u_{\beta\beta}).$$

<sup>1)</sup> Для того чтобы было возможно введение новых переменных  $\xi$  и  $\eta$  через функции  $\varphi$  и  $\psi$ , надо убедиться в независимости этих функций, достаточным условием чего является отличие от нуля соответствующего функционального определителя. Пусть функциональный определитель

$$\begin{vmatrix} \varphi_x & \psi_x \\ \varphi_y & \psi_y \end{vmatrix}$$

в некоторой точке  $M$  обращается в нуль. Тогда имеет место пропорциональность строк, т.е.

$$\frac{\varphi_x}{\varphi_y} = \frac{\psi_x}{\psi_y},$$

что, однако, невозможно, так как

$$\frac{\varphi_y}{\varphi_x} = -\frac{a_{12} + \sqrt{a_{12}^2 - a_{11}a_{22}}}{a_{11}} \quad \text{и} \quad \frac{\psi_y}{\psi_x} = -\frac{a_{12} - \sqrt{a_{12}^2 - a_{11}a_{22}}}{a_{11}}$$

$$(a_{12}^2 - a_{11}a_{22} > 0)$$

(при этом мы считаем  $a_{11} \neq 0$ , что не является ограничением общности).

Тем самым независимость функций установлена.

В результате уравнение (4) примет вид

$$u_{\alpha\alpha} - u_{\beta\beta} = \Phi_1 \quad (\Phi_1 = 4\Phi).$$

2. Для уравнений параболического типа  $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = 0$  уравнения (9) и (10) совпадают, и мы получаем один общий интеграл уравнения (6):  $\varphi(x, y) = \text{const}$ . Положим в этом случае

$$\xi = \varphi(x, y) \quad \text{и} \quad \eta = \eta(x, y),$$

где  $\eta(x, y)$  – любая функция, не зависящая от  $\varphi$ . При таком выборе переменных коэффициент

$$\bar{a}_{11} = a_{11}\xi_x^2 + 2a_{12}\xi_x\xi_y + a_{22}\xi_y^2 = (\sqrt{a_{11}}\xi_x + \sqrt{a_{22}}\xi_y)^2 = 0,$$

так как  $a_{12} = \sqrt{a_{11}}\sqrt{a_{22}}$ ; отсюда следует, что

$$\begin{aligned} \bar{a}_{12} &= a_{11}\xi_x\eta_x + a_{12}(\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x) + a_{22}\xi_y\eta_y = \\ &= (\sqrt{a_{11}}\xi_x + \sqrt{a_{22}}\xi_y)(\sqrt{a_{11}}\eta_x + \sqrt{a_{22}}\eta_y) = 0 \end{aligned}$$

После деления уравнения (4) на коэффициент при  $u_{\eta\eta}$  получим каноническую форму для уравнения параболического типа

$$u_{\eta\eta} = \Phi(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta) \quad \left( \Phi = -\frac{\bar{F}}{\bar{a}_{22}} \right).$$

Если в правую часть не входит  $u_\xi$ , то это уравнение будет обыкновенным дифференциальным уравнением, зависящим от  $\xi$ , как от параметра.

3. Для уравнения эллиптического типа  $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} < 0$  и правые части уравнений (9) и (10) комплексны. Пусть

$$\varphi(x, y) = \text{const}$$

- комплексный интеграл уравнения (9). Тогда

$$\varphi^*(x, y) = C,$$

где  $\varphi^*$  - сопряженная функция, будет представлять собой общий интеграл сопряженного уравнения (10). Перейдем к комплексным переменным, полагая

$$\xi = \varphi(x, y) \quad \text{и} \quad \eta = \varphi^*(x, y).$$

При этом уравнение эллиптического типа приводится к такому же виду, что и гиперболическое.

Чтобы не иметь дела с комплексными переменными, введем новые переменные  $\alpha$  и  $\beta$ , равные

$$\alpha = \frac{\varphi + \varphi^*}{2}, \quad \beta = \frac{\varphi - \varphi^*}{2i},$$

так что

$$\xi = \alpha + i\beta, \quad \eta = \alpha - i\beta.$$

В этом случае

$$\begin{aligned} a_{11}\xi_x^2 + 2a_{12}\xi_x\xi_y + a_{22}\xi_y^2 &= (a_{11}\alpha_x^2 + 2a_{12}\alpha_x\alpha_y + a_{22}\alpha_y^2) - \\ &- (a_{11}\beta_x^2 + 2a_{12}\beta_x\beta_y + a_{22}\beta_y^2) + \\ &+ 2i(a_{11}\alpha_x\beta_x + a_{12}(\alpha_x\beta_y + \alpha_y\beta_x) + a_{22}\alpha_y\beta_y) = 0, \end{aligned}$$

т.е.  $\bar{a}_{11} = \bar{a}_{22}$  и  $\bar{a}_{12} = 0$ .

Уравнение (4) после деления на коэффициент при  $u_{\alpha\alpha}$  принимает вид<sup>1)</sup>

$$u_{\alpha\alpha} + u_{\beta\beta} = \Phi(\alpha, \beta, u, u_\alpha, u_\beta) \left( \Phi = -\frac{\bar{F}}{\bar{a}_{22}} \right).$$

Таким образом, в зависимости от знака выражения  $a_{12}^2 - a_{11}a_{22}$  имеют место следующие канонические формы уравнения (1):

$$a_{12}^2 - a_{11}a_{22} > 0 \text{ (гиперболический тип)} \quad u_{xx} - u_{yy} = \Phi \quad \text{или} \quad u_{xy} = \Phi,$$

$$a_{12}^2 - a_{11}a_{22} < 0 \text{ (эллиптический тип)} \quad u_{xx} + u_{yy} = \Phi,$$

$$a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = 0 \text{ (параболический тип)} \quad u_{xx} = \Phi.$$

<sup>1)</sup> Подобное преобразование законно только в том случае, если коэффициенты уравнения (1) – аналитические функции. Действительно, если  $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} < 0$ , то правые части уравнений (9) и (10) комплексны, а следовательно, функция  $u$  должна иметь комплексные значения. О решении этих уравнений можно говорить лишь в том случае, когда коэффициенты  $a_{ik}(x, y)$  определены для комплексных значений  $u$ . При приведении эллиптического типа к канонической форме мы ограничимся случаем аналитических коэффициентов.

**2. Классификация уравнений 2-го порядка со многими независимыми переменными.** Рассмотрим линейное уравнение с действительными коэффициентами

$$\sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n a_{ij} u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^n b_i u_{x_i} + cu + f = 0, \quad (a_{ij} = a_{ji}), \quad (12)$$

где  $a, b, c, f$  являются функциями  $x_1, x_2, \dots, x_n$ . Введем новые независимые переменные  $\xi_k$ , полагая

$$\xi_k = \xi_k(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad (k = 1, \dots, n).$$

Тогда

$$u_{x_i} = \sum_{k=1}^n u_{\xi_k} \alpha_{ik},$$

$$u_{x_i x_j} = \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n u_{\xi_k \xi_l} \alpha_{ik} \alpha_{jl} + \sum_{k=1}^n u_{\xi_k} (\xi_k)_{x_i x_j}$$

где

$$\alpha_{ik} = \frac{\partial \xi_k}{\partial x_i}.$$

Подставляя значения для производных в исходное уравнение, получим:

$$\sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \bar{a}_{kl} u_{\xi_k \xi_l} + \sum_{k=1}^n \bar{b}_k u_{\xi_k} + cu + f = 0,$$

где

$$\bar{a}_{kl} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} \alpha_{ik} \alpha_{jl},$$

$$\bar{b}_k = \sum_{i=1}^n b_i \alpha_{ik} + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} (\xi_k)_{x_i x_j}.$$

Рассмотрим квадратичную форму

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}^0 y_i y_j, \quad (13)$$

коэффициенты которой равны коэффициентам  $a_{ij}$  исходного уравнения в некоторой точке  $M_0(x_1^0, \dots, x_n^0)$ . Производя над переменными  $y$  линейное преобразование

$$y_i = \sum_{k=1}^n a_{ik} \eta_k,$$

получим для квадратичной формы новое выражение

$$\sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \bar{a}_{kl}^0 \eta_k \eta_l,$$

где

$$\bar{a}_{kl}^0 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}^0 \alpha_{ik} \alpha_{jl}.$$

Таким образом, коэффициенты главной части уравнения изменяются аналогично коэффициентам квадратичной формы при линейном преобразовании.

Как известно, выбором соответствующего линейного преобразования можно привести матрицу  $(a_{ij}^0)$  квадратической формы к диагональному виду, в котором

$$|\bar{a}_{ii}^0| = 1, \text{ либо } 0;$$

$$\bar{a}_{ij}^0 = 0 \quad (i \neq j, i = 1, 2, \dots, n).$$

Согласно *закону инерции* число положительных, отрицательных и равных нулю коэффициентов  $\bar{a}_{ii}^0$  в каноническом виде квадратичной формы инвариантно относительно линейного преобразования.

Назовем уравнение (12) в точке  $M_0$  уравнением *эллиптического* типа, если все  $n$  коэффициентов  $\bar{a}_{ii}^0$  одного знака; *гиперболического* типа (или *нормального гиперболического* типа), если  $n-1$  коэффициентов  $\bar{a}_{ii}^0$  имеют одинаковый знак, а один коэффициент противоположен им по знаку; *ультрагиперболического* типа, если среди  $\bar{a}_{ii}^0$  имеется  $m$  коэффициентов одного знака и  $n-m$  противоположного знака ( $m, n-m > 1$ ); *параболического* типа, если хотя бы один из коэффициентов  $\bar{a}_{ii}^0$  равен нулю.

Выбирая новые независимые переменные  $\xi_i$  так, чтобы в точке  $M_0$

$$\alpha_{ik} = \frac{\partial \xi_k}{\partial x_i} = \alpha_{ik}^0,$$

где  $\alpha_{ik}^0$  – коэффициент преобразования, приводящего квадратическую форму (13) к каноническому виду (например, полагая  $\xi_k = \sum \alpha_{ik}^{(0)} x_i$ ), получим, что в точке  $M_0$  уравнение в зависимости от типа приводятся к одной из следующих канонических форм:

$$u_{x_1x_1} + u_{x_2x_2} + \dots + u_{x_nx_n} + \Phi = 0 \quad (\text{эллиптический тип}),$$

$$u_{x_1x_1} = \sum_{i=2}^n u_{x_ix_i} + \Phi \quad (\text{гиперболический тип}),$$

$$\sum_{i=1}^n u_{x_ix_i} = \sum_{i=m+1}^n u_{x_ix_i} + \Phi \quad (m > 1, n - m > 1) \quad (\text{ультрагиперболический тип}),$$

$$\sum_{i=1}^{n-m} (\pm u_{x_ix_i}) + \Phi = 0 \quad (m > 0) \quad (\text{параболический тип}).$$

Мы не останавливаемся при этом на более подробном делении уравнений параболического типа на уравнения эллиптически-параболические, гиперболически-параболические и т.д.

Таким образом, если уравнение (12) в некоторой точке  $M$  принадлежит к определенному типу, то его можно привести к соответствующей канонической форме в этой точке.

**3. Канонические формы линейных уравнений второго порядка с двумя переменными.** В случае двух независимых переменных линейное уравнение 2-го порядка с постоянными коэффициентами имеет вид

$$a_{11}u_{xx} + 2a_{12}u_{xy} + a_{22}u_{yy} + b_1u_x + b_2u_y + cu + f(x, y) = 0. \quad (14)$$

Ему соответствует характеристическое уравнение с постоянными коэффициентами. Поэтому характеристики будут прямыми линиями

$$y = \frac{a_{12} + \sqrt{a_{12}^2 - a_{11}a_{22}}}{a_{11}}x + C_1, \quad y = \frac{a_{12} - \sqrt{a_{12}^2 - a_{11}a_{22}}}{a_{11}}x + C_2$$

С помощью соответствующего преобразования переменных уравнение (14) приводя к одной из простейших форм:

$$u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} + b_1u_{\xi} + b_2u_{\eta} + cu + f = 0 \quad (\text{эллиптический тип}), \quad (15)$$

$$\text{или} \left. \begin{aligned} u_{\xi\eta} + b_1u_{\xi} + b_2u_{\eta} + cu + f &= 0 \\ u_{\xi\xi} - u_{\eta\eta} + b_1u_{\xi} + b_2u_{\eta} + cu + f &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (\text{гиперболический тип}), \quad (16)$$

$$u_{\xi\xi} + b_1u_{\xi} + b_2u_{\eta} + cu + f = 0 \quad (\text{параболический тип}). \quad (17)$$

Для дальнейшего упрощения введем вместо  $u$  новую функцию  $v$ :

$$u = e^{\lambda\xi + \mu\eta} \cdot v,$$

где  $\lambda$  и  $\mu$  – неопределенные пока постоянные, тогда

$$u_{\xi} = e^{\lambda\xi + \mu\eta} (v_{\xi} + \lambda v),$$

$$u_{\eta} = e^{\lambda\xi + \mu\eta} (v_{\eta} + \mu v),$$

$$u_{\xi\xi} = e^{\lambda\xi + \mu\eta} (v_{\xi\xi} + 2\lambda v_{\xi} + \lambda^2 v),$$

$$u_{\xi\eta} = e^{\lambda\xi + \mu\eta} (v_{\xi\eta} + \lambda v_{\eta} + \mu v_{\xi} + \lambda\mu v),$$

$$u_{\eta\eta} = e^{\lambda\xi + \mu\eta} (v_{\eta\eta} + 2\mu v_{\eta} + \mu^2 v).$$

Подставляя выражения для производных в уравнение (15) и сокращая затем на  $e^{\lambda\xi + \mu\eta}$ , получим:

$$v_{\xi\xi} + v_{\eta\eta} + (b_1 + 2\lambda)v_{\xi} + (b_2 + 2\mu)v_{\eta} + (\lambda^2 + \mu^2 + b_1\lambda + b_2\mu + c)v + f_1 = 0.$$

Параметры  $\lambda$  и  $\mu$  выбираем так, чтобы два коэффициента, например при первых производных, обратились в нуль  $\left(\lambda = -\frac{b_1}{2}; \mu = -\frac{b_2}{2}\right)$ . В результате получим:

$$v_{\xi\xi} + v_{\eta\eta} + \gamma v + f_1 = 0,$$

где  $\gamma$  – постоянная, выражающаяся через  $c$ ,  $b_1$  и  $b_2$ ,  $f_1 = fe^{-(\lambda\xi + \mu\eta)}$ . Производя аналогичные операции и для случаев (16) и (17), приходим к следующим каноническим формам для уравнений с постоянными коэффициентами:

$$\begin{aligned} v_{\xi\xi} + v_{\eta\eta} + \gamma v + f_1 &= 0 && \text{(эллиптический тип),} \\ \text{или} \left. \begin{aligned} v_{\xi\eta} + \gamma v + f_1 &= 0 \\ v_{\xi\xi} - v_{\eta\eta} + \gamma v + f_1 &= 0 \end{aligned} \right\} && \text{(гиперболический тип),} \\ v_{\xi\xi} + b_2 v_{\eta} + f_1 &= 0 && \text{(параболический тип.)} \end{aligned}$$

Как было отмечено в п. 2, уравнение с постоянными коэффициентами в случае независимых переменных

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^n b_i u_{x_i} + cu + f = 0$$

при помощи линейного преобразования переменных приводится к каноническому виду одновременно для всех точек области его определения.

Вводя вместо  $u$  новую функцию  $v$

$$u = ve^{\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_n x_n}$$

и выбирая нужным способом  $\lambda_i$ , мы можем дальше упростить уравнение, что приводит нас к каноническим формам, сходным со случаем  $n=2$ .



### 6.3 Уравнения гиперболического типа

Уравнения с частными производными 2-го порядка гиперболического типа наиболее часто встречаются в физических задачах, связанных с процессами колебаний. Простейшее уравнение гиперболического типа

$$u_{xx} - u_{yy} = 0$$

Обычно называют *уравнением колебаний струны*. В настоящей главе, как и в последующих, мы ограничимся рассмотрением класса линейных уравнений.

#### 6.3.1 Простейшие задачи, приводящие к уравнениям гиперболического типа.

##### Постановка краевых задач

**1. Уравнение малых поперечных колебаний струны.** Каждую точку струны длины  $l$  можно охарактеризовать значением ее абсциссы  $x$ . Описание процесса колебания струны может быть проведено при помощи задания положения точек струны в различные моменты времени. Для определения положения струны в момент времени  $t$  достаточно задать компоненты вектора смещения  $\{u_1(x, t), u_2(x, t), u_3(x, t)\}$  точки  $x$  в момент времени  $t$ .

Мы рассмотрим наиболее простую задачу о колебаниях струны. Будем предполагать, что смещения струны лежат в одной плоскости  $x, u$  и что вектор смещения  $u$  перпендикулярен в любой момент к оси  $x$ ; тогда процесс колебания можно описать одной функцией  $u(x, t)$ , характеризующей вертикальное перемещение струны. Будем рассматривать струну как гибкую упругую нить. Математическое выражение понятия гибкости заключается в том, что напряжения, возникающие в струне, всегда направлены по касательным к ее мгновенному профилю (рис. 1). Это условие выражает собой то, что струна не сопротивляется изгибу.

Величина натяжения, возникающего в струне вследствие упругости, может быть вычислена по закону Гука<sup>1)</sup>. Будем рассматривать малые колебания струны и пренебрегать квадратом  $u_x$  по сравнению с единицей.

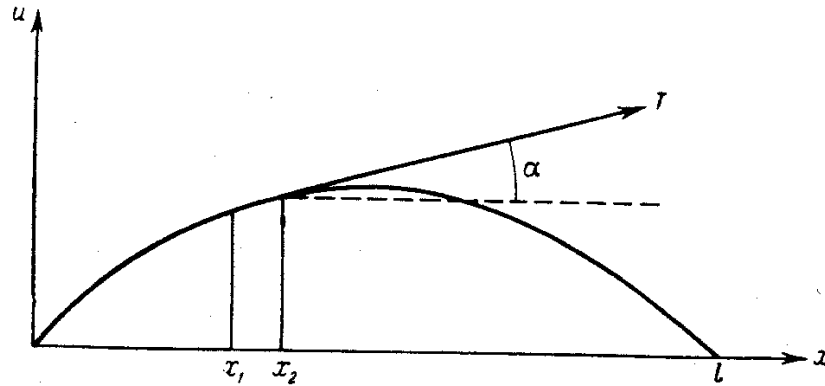


Рис. 1.

Пользуясь этим условием, подсчитаем удлинение, испытываемое участком струны  $(x_1, x_2)$ . Длина дуги этого участка равна

$$S' = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + (u_x)^2} dx \cong x_2 - x_1 = S.$$

Таким образом, в пределах принятой нами точности удлинения участков струны в процессе колебания не происходит; отсюда в силу закона Гука следует, что величина натяжения  $T$  в каждой точке не меняется со временем. Покажем также, что натяжение не зависит от  $x$ , т.е.

$$T(x) = T_0 = const.$$

Найдем проекции натяжения на оси  $x$  и  $u$  (обозначим их  $T_x$  и  $T_u$ ):

$$T_x(x) = T(x) \cos \alpha = \frac{T}{\sqrt{1 + (u_x)^2}} \cong T(x),$$

$$T_u(x) = T(x) \sin \alpha \cong T(x) \operatorname{tg} \alpha = T(x) u_x,$$

где  $\alpha$  – угол касательной к кривой  $u(x, t)$  с осью  $x$ . На участок  $(x_1, x_2)$  действуют силы натяжения, внешние силы и силы инерции. Сумма проекций всех сил на

---

1

ось  $x$  должна быть равна нулю (мы рассматриваем только поперечные колебания). Так как силы инерции и внешние силы по предположению направлены вдоль оси  $u$ , то

$$T_x(x_2) - T_x(x_1) = 0 \text{ или } T(x_1) = T(x_2). \quad (1)$$

Отсюда в силу произвольности  $x_1$  и  $x_2$  следует, что натяжение не зависит от  $x$ , т.е. для всех значений  $x$  и  $t$

$$T(x) \equiv T_0 \quad (2)$$

После сделанных предварительных замечаний перейдем к выводу уравнения поперечных колебаний струны. Воспользуемся вторым законом Ньютона. Составляющая количества движения участка струны  $(x_1, x_2)$  по оси  $u$  равна

$$\int_{x_1}^{x_2} u_t(\xi, t) \rho(\xi) d\xi,$$

где  $\rho$  – линейная плотность струны. Приравняем изменение количества движения за промежуток времени  $\Delta t = t_2 - t_1$

$$\int_{x_1}^{x_2} \rho(\xi) [u_t(\xi, t_2) - u_t(\xi, t_1)] d\xi$$

импульсу действующих сил, складывающихся из натяжения

$T_0 u_x|_{x=x_2} - T_0 u_x|_{x=x_1}$  в точках  $x_2$  и  $x_1$  и внешней силы, которую будем считать непрерывно распределенной с плотностью (нагрузкой)  $F(x, t)$ , рассчитанной на единицу длины. В результате получим уравнение поперечных колебаний элемента струны в интегральной форме

$$\int_{x_1}^{x_2} [u_t(\xi, t_2) - u_t(\xi, t_1)] \rho(\xi) d\xi = \int_{t_1}^{t_2} T_0 [u_x(x_2, \tau) - u_x(x_1, \tau)] d\tau + \int_{x_1}^{x_2} \int_{t_1}^{t_2} F(\xi, \tau) d\xi d\tau. \quad (3)$$

Для перехода к дифференциальному уравнению предположим существование и непрерывность вторых производных от  $u(x, t)$ . Тогда формула (3) после двукратного применения теоремы о среднем примет вид

$$u_{tt}(\xi^*, t^*)\rho(\xi^*)\Delta t\Delta x = \{T_0[u_{xx}(\xi^{**}, t^{**})] + F(\xi^{***}, t^{***})\}\Delta t\Delta x,$$

где

$$\xi^*, \xi^{**}, \xi^{***} \in (x_1, x_2), \text{ а } t^*, t^{**}, t^{***} \in (t_1, t_2).$$

Сократив на  $\Delta t\Delta x$  и переходя к пределу при  $x_2 \rightarrow x_1, t_2 \rightarrow t_1$ , получим дифференциальное уравнение поперечных колебаний струны

$$T_0 u_{xx} = \rho u_{tt} - F(x, t). \quad (4)$$

В случае постоянной плотности  $\rho = \text{const}$  этому уравнению обычно придают вид

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x, t) \quad \left( a = \sqrt{\frac{T_0}{\rho}} \right), \quad (5)$$

где

$$f(x, t) = \frac{1}{\rho} F(x, t) \quad (6)$$

есть плотность силы, отнесенная к единице массы. При отсутствии внешней силы получим однородное уравнение

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}$$

или

$$u_{xx} - u_{yy} = 0 \quad (y=at),$$

описывающее свободные колебания струны. Это уравнение является простейшим примером уравнения гиперболического типа.

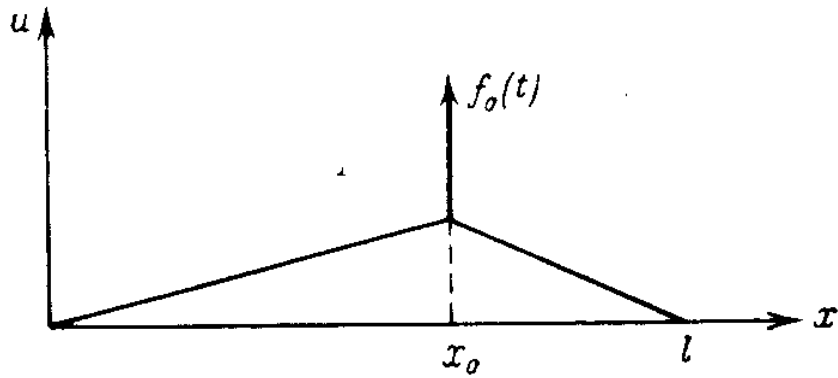


Рис. 2.

Если в точке  $x_0$  ( $x_1 < x_0 < x_2$ ) приложена сосредоточенная сила  $f_0(t)$  (рис. 2), то уравнение (3) запишется так:

$$\int_{x_1}^{x_2} \rho(\xi) [u_t(\xi, t_2) - u_t(\xi, t_1)] d\xi - \int_{x_1}^{x_2} \int_{t_1}^{t_2} f(\xi, \tau) d\xi d\tau =$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} T_0 [u_x(x_2, \tau) - u_x(x_1, \tau)] d\tau + \int_{t_1}^{t_2} f_0(\tau) d\tau$$

Поскольку скорости точек струны ограничены, то при  $x_1 \rightarrow x_0$  и  $x_2 \rightarrow x_0$  интегралы левой части этого равенства стремятся к нулю, и равенство (3) принимает вид

$$\int_{t_1}^{t_2} T_0 [u_x(x_0 + 0, \tau) - u_x(x_0 - 0, \tau)] d\tau = - \int_{t_1}^{t_2} f_0(\tau) d\tau. \quad (7)$$

Пользуясь теоремой о среднем, сокращая обе части на  $\Delta t$  и переходя к пределу при  $t_2 \rightarrow t_1$ , получим:

$$u_x(x, t) \Big|_{x_0-0}^{x_0+0} = - \frac{1}{T_0} f_0(t).$$

Отсюда видно, что в точке приложения сосредоточенной силы первые производные претерпевают разрыв и дифференциальное уравнение теряет смысл. В этой точке должны выполняться два условия сопряжения

$$\left. \begin{aligned} u(x_0 + 0, t) &= u(x_0 - 0, t), \\ u_x(x_0 + 0, t) - u_x(x_0 - 0, t) &= \frac{-1}{T_0} f_0(t) \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

первое из которых выражает непрерывность струны, второе определяет величину излома струны в точке  $x_0$ , зависящую от  $f_0$  и натяжение  $T_0$ .

**2. Уравнение продольных колебаний стержней и струн.** Уравнения продольных колебаний для струны, стержня или пружины записываются одинаково. Рассмотрим стержень, расположенный на отрезке  $(0, l)$  оси  $x$ . Процесс продольных колебаний может быть описан функцией  $u(x, t)$ , представляющей в момент  $t$  смещение точки, имевшей в положении равновесия абсциссу  $x$ . При продольных колебаниях это смещение происходит вдоль стержня. При выводе уравнения будем предполагать, что натяжения, возникающие в процессе колебания, следуют закону Гука.

Подсчитаем относительное удлинение элемента  $(x, x + \Delta x)$  в момент  $t$ . Координаты концов этого элемента в момент  $t$  имеют значения

$$x + u(x, t), \quad x + \Delta x + u(x + \Delta x, t),$$

а относительное удлинение равно

$$\frac{[\Delta x + u(x + \Delta x, t) - u(x, t)] - \Delta x}{\Delta x} = u_x(x + \theta \Delta x, t)$$

$$0 \leq \theta \leq 1.$$

Переходя к пределу при  $\Delta x \rightarrow 0$ , получим, что относительное удлинение в точке  $x$  определяется функцией  $u_x(x, t)$ . В силу закона Гука натяжение равно  $T(x, t)$  равно

$$T(x, t) = k(x)u_x(x, t), \quad (9)$$

где  $k(x)$  - модуль Юнга в точке  $x$  ( $k(x) > 0$ ).

Пользуясь теоремой об изменении количества движения, получаем интегральное уравнение колебаний

$$\int_{x_1}^{x_2} [u_t(\xi, t_2) - u_t(\xi, t_1)] \rho(\xi) d\xi =$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} [k(x_2)u_x(x_2, \tau) - k(x_1)u_x(x_1, \tau)] d\tau + \int_{x_1}^{x_2} \int_{t_1}^{t_2} F(\xi, \tau) d\xi d\tau,$$
(10)

где  $F(x, t)$  – плотность внешней силы, рассчитанная на единицу длины.

Предположим существование и непрерывность вторых производных функций  $u(x, t)$ . Применяя теорему о среднем и совершая предельный переход при  $\Delta x = x_2 - x_1 \rightarrow 0$  и  $\Delta t = t_2 - t_1 \rightarrow 0$ , приходим к дифференциальному уравнению продольных колебаний стержня

$$[k(x)u_x]_x = \rho u_{tt} - F(x, t).$$
(11)

Если стержень однороден ( $k(x) = const, \rho = const$ ), то это уравнение записывают следующим образом:

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x, t) \quad \left( a = \sqrt{\frac{k}{\rho}} \right),$$
(12)

где

$$f(x, t) = \frac{F(x, t)}{\rho}$$
(13)

есть плотность силы, отнесенная к единице массы.

**3. Энергия колебаний струны.** Найдем выражение для энергии поперечных колебаний струны  $E=K+U$ , где  $K$  – кинетическая и  $U$  – потенциальная энергии. Элемент струны  $dx$ , движущихся со скоростью  $v = u_x$ , обладает кинетической энергией

$$\frac{1}{2} mv^2 = \frac{1}{2} \rho(x) dx (u_x)^2 \quad (m = \rho dx).$$

Кинетическая энергия всей струны равна

$$K = \frac{1}{2} \int_0^l \rho(x) [u_t(x, t)]^2 dx. \quad (14)$$

Потенциальная энергия поперечных колебаний струны, имеющей при  $t = t_0$  форму  $u(x, t_0) = u_0(x)$ , равна работе, которую надо совершить, чтобы струна перешла из положения равновесия в положение  $u_0(x)$ . Пусть функция  $u(x, t)$  дает профиль струны в момент  $t$ , причем

$$u(x, 0) = 0 \quad u(x, t_0) = u_0(x).$$

Элемент  $dx$  под действием равнодействующей сил натяжения

$$T \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x+dx} - T \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_x = Tu_{xx} dx \quad \text{за время } dt \text{ проходит путь } u_t(x, t) dt. \text{ Работа,}$$

производимая всей струной за время  $dt$ , равна

$$\left\{ \int_0^l T_0 u_{xx} u_t dx \right\} dt = \left\{ T_0 u_x u_t \Big|_0^l - \int_0^l T_0 u_x u_{xt} dx \right\} dt = \left\{ -\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^l T_0 (u_x)^2 dx + T_0 u_x u_t \Big|_0^l \right\} dt$$

Интегрируя по  $t$  от 0 до  $t_0$ , получаем

$$-\frac{1}{2} \int_0^l T_0 (u_x)^2 dx \Big|_0^{t_0} + \int_0^{t_0} T_0 u_x u_t \Big|_0^l dt = -\frac{1}{2} \int_0^l T_0 [u_x(x, t_0)]^2 dx + \int_0^{t_0} T_0 u_x u_t \Big|_0^l dt.$$

Нетрудно выяснить смысл последнего слагаемого правой части этого равенства. Действительно  $T_0 u_x \Big|_{x=0}$  есть величина натяжения на конце струны  $x = 0$ ;  $u_t(0, t) dt$  - перемещение этого конца, а интеграл

$$\int_0^{t_0} T_0 u_x u_t \Big|_{x=0} dt \quad (15)$$

представляет работу, которую надо затратить на перемещение конца  $x = 0$ . Аналогичный смысл имеет слагаемое, соответствующее  $x = l$ . Если концы струны закреплены, то работа на концах струны будет равна нулю (при этом



$u(0,t) = 0, u_t(0,t) = 0$ ). Следовательно, при перемещении закрепленной на концах струны из положения равновесия  $u = 0$  в положение  $u_0(x)$  работа не зависит от способа перевода струны в это положение и равна

$$- \frac{1}{2} \int_0^l T_0 [u_0(x)]^2 dx, \quad (16)$$

Потенциальной энергии струны в момент  $t = t_0$  с обратным знаком. Таким образом, полная энергия струны равна

$$E = \frac{1}{2} \int_0^l [T_0 (u_x)^2 + \rho(x) (u_t)^2] dx. \quad (17)$$

Совершенно аналогично может быть получено выражение для потенциальной энергии продольных колебаний стержня. Впрочем, его можно получить также, исходя из формулы для потенциальной энергии упругого стержня

$$U = \frac{1}{2} k \left( \frac{l - l_0}{l_0} \right)^2 l_0,$$

где  $l_0$  - начальная длина стержня,  $l$  - конечная длина. Отсюда непосредственно следует:

$$U = \frac{1}{2} \int_0^l k (u_x)^2 dx.$$

#### 4. Вывод уравнения электрических колебаний в проводах.

Прохождение электрического тока по проводу с распределенными параметрами характеризуется силой тока  $i$  и напряжением  $v$ , которые являются функциями положения точки  $x$  и времени  $t$ . Применяя закон Ома к участку длиной  $dx$ , можно написать, что падение напряжения на элементе провода  $dx$  равняется сумме электродвижущих сил:

$$- v_x dx = iRdx + i_t Ldx, \quad (18)$$

где  $R$  и  $L$  – сопротивление и коэффициент самоиндукции, рассчитанные на единицу длины.

Количество электричества, притекающее на элемент провода  $dx$  за время  $dt$

$$[i(x, t) - i(x + dx, t)]dt = -i_x dxdt, \quad (19)$$

Равно сумме количества электричества, необходимого для зарядки элемента  $dx$ , и количества, теряющегося вследствие несовершенства изоляции:

$$C[v(x, t + dt) - v(x, t)]dx + Gdx \cdot vdt = (Cv_t + Gv)dxdt, \quad (20)$$

где  $C$  и  $G$  – коэффициенты емкости и утечки, рассчитанные на единицу длины, причем величину потерь мы считаем пропорциональной напряжению в рассматриваемой точке провода.

Из формул (18), (19) и (20) получаем систему

$$\left. \begin{aligned} i_x + Cv_t + Gv &= 0, \\ v_x + Li_t + Ri &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

называемую системой *телеграфных* уравнений.

Чтобы получить одно уравнение, определяющее функцию  $i$ , продифференцируем первое равенство (21) по  $x$ , второе – по  $t$ , умножив его на  $C$ . Производя вычитание в предположении постоянства коэффициентов, найдем:

$$i_{xx} + Gv_x - CLi_{tt} - CRi_t = 0.$$

Заменяя  $v_x$  его значением из второго уравнения (21), получим уравнение для силы тока

$$i_{xx} = CLi_{tt} + (CR + GL)i_t + GRi = 0. \quad (22)$$

Аналогично выглядит уравнение для напряжения

$$v_{xx} = CLv_{tt} + (CR + GL)v_t + GRv = 0. \quad (23)$$

Уравнение (22) и (23) называется телеграфным уравнением. Если можно пренебречь потерями через изоляцию и если сопротивление очень мало ( $G \cong R \cong 0$ ), то мы приходим к известному уравнению колебаний

$$v_{tt} = a^2 v_{xx}, \left( a = \sqrt{\frac{1}{LC}} \right). \quad (24)$$

**5. Уравнение колебаний струны.** Рассмотрим процесс колебаний тонкой упругой нити, которая может свободно изгибаться, не оказывая сопротивления изменению ее формы. В этом случае напряжения (силы натяжения), возникающие в упругой нити, направлены по касательной к ее мгновенному профилю. Такую нить в дальнейшем будем называть струной.

Пусть в положении равновесия струна расположена вдоль оси  $Ox$ . будем рассматривать только поперечные колебания струны, считая, что перемещение частиц струны происходит в одной плоскости и все точки струны движутся перпендикулярно оси  $Ox$ .

Обозначим через  $u(x,t)$  отклонение от положения равновесия точки струны с абсциссой  $x$  в момент времени  $t$ . При фиксированном значении  $t$  график функции  $u(x,t)$  представляет собой форму струны в момент времени  $t$  (рис.1).

Далее будем рассматривать только малые поперечные колебания струны, когда смещения  $u$  и производные  $\partial u / \partial x$  столь малы, что их квадратами и произведениями можно пренебречь по сравнению со значениями самих величин. В этом случае

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \operatorname{tg} \alpha \approx \sin \alpha \approx \alpha ; 1 + \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \approx 1;$$

$$\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}} \approx 1.$$

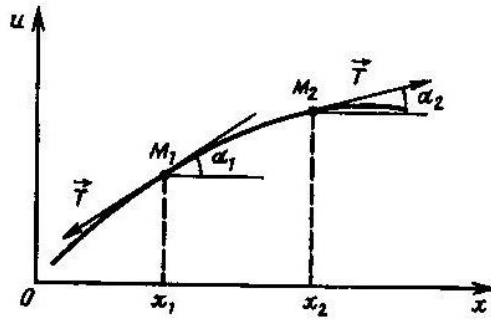


Рис.1

Из предположения о малости колебаний следует, что длина выделенного участка струны в любой момент времени равна:

$$L' = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2} dx \approx x_2 - x_1 = L.$$

Это означает, что в процессе малых колебаний удлинением участков струны можно пренебречь. В этом случае, согласно закону Гука, натяжение  $T$  в каждой точке струны не будет изменяться.

Покажем, что натяжение  $T$  можно считать не зависящим от точки приложения  $x$ . Действительно, для поперечных колебаний струны сумма проекций на ось  $Ox$  сил натяжения, действующая на концах участка струны  $M_1M_2$ , равна нулю:

$$-T(x_1)\cos\alpha(x_1) + T(x_2)\cos\alpha(x_2) = 0,$$

где  $\alpha(x)$  - угол между касательной к струне и осью  $Ox$  в некоторый момент времени.

Так как для малых колебаний  $\cos\alpha(x_1) \approx \cos\alpha(x_2) = 1$ , то  $T(x_1) = T(x_2)$ . таким образом, можно считать, что  $T = T_0 = const$  для всех значений  $x$  и  $t$ .

В случае вынужденных колебаний на струну действует внешняя распределительная сила  $L(x,t)$ , направление которой будет считать перпендикулярным оси  $Ox$ .

Распределение масс в струне будем характеризовать линейной плотностью  $\rho(x)$ , которая в общем случае изменяется вдоль струны. Для однородной струны постоянного сечения  $\rho = \rho_0 = const$ .

Перейдем к построению математической модели процесса малых поперечных колебаний струны. В основе этой модели лежит закон динамики поступательного движения (закон Ньютона), который для механической системы имеет вид

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F}, \quad (25)$$

где  $\vec{P}$  - импульс системы, равный сумме импульсов всех ее частиц;  $\vec{F}$  - результирующая внешняя сила.

В качестве такой механической системы рассмотрим выделенный участок струны  $x_1 < x < x_2$ . Учитывая, что движение этой системы происходит в направлении, перпендикулярном оси  $Ox$ , запишем уравнение (25) в проекции на ось  $Ou$ :

$$\frac{dP}{dt} = F, \quad (26)$$

Так как проекция суммарного импульса системы

$$P = \int_{x_1}^{x_2} \rho(x) \frac{\partial u}{\partial t} dx,$$

то

$$\frac{dP}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{x_1}^{x_2} \rho(x) \frac{\partial u}{\partial t} dx = \int_{x_1}^{x_2} \rho(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} dx.$$

Проекция внешних сил состоит из двух слагаемых. Одно из них учитывает действие сил натяжения на концах выделенного участка струны, а другое – суммарную вынуждающую силу, действующую на частицы этого участка струны. Эти проекции определяются (см.рис. 1) следующими соотношениями:

$$F_1 = T_0 \sin \alpha_2 - T_0 \sin \alpha_1 \approx T_0 \left( \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=x_2} - \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=x_1} \right) = T_0 \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx;$$

$$F_2 = \int_{x_1}^{x_2} F(x, t) dx$$

Подставляя полученные выражения в формулу (26), запишем ее в виде следующего интегрального равенства:

$$\int_{x_1}^{x_2} \left\{ \rho(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - T_0 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - F(x, t) \right\} dx = 0 \quad (27)$$

В силу произвольности выбора отрезка  $[x_1, x_2]$  из уравнения (27) следует, что в любой точке струны в любой момент времени  $t$  подынтегральное выражение должно обращаться в нуль, т.е.

$$\rho(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = T_0 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + F(x, t) \quad (28)$$

Полученное соотношение представляет собой дифференциальное уравнение в частных производных второго порядка относительно искомой функции  $u(x, t)$ . Оно описывает процесс малых поперечных колебаний струны, и его называют неоднородным одномерным волновым уравнением, или уравнением плоских волн. Это уравнение гиперболического типа.

В случае постоянной линейной плотности  $\rho = \rho_0 = const$  уравнение колебаний однородной струны принимает вид

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t) \quad (29)$$

где  $a = \sqrt{T_0 / \rho_0}$ ;  $f(x, t) = F(x, t) / \rho_0$ .

Если  $f(x, t) \equiv 0$ , то однородное уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (30)$$

описывает свободные колебания струны без воздействия вынуждающей силы.

Уравнения вида (28) – (30) описывают не только колебания струны, но и ряд других физических процессов, которые называют волновыми. К ним, в частности относят следующие:

**6. Плоские акустические (звуковые) волны в жидкостях и газах (рис. 3).** В этом процессе волновому уравнению подчиняются возмущения давления  $p$  и плотности  $\rho$  среды или потенциал скорости. Для изентропических (адиабатических) течений сред с уравнением состояния  $p = f(\rho)$  скорость  $a$  распространения возмущений (скорость звука) определяется выражением

$$a^2 = \left. \frac{dp}{d\rho} \right|_{\rho=\rho_0} = f'(\rho_0). \text{ в частности, если } p = p_0(\rho / \rho_0)^\gamma, \text{ где } \gamma = c_p / c_v - \text{показатель}$$

адиабаты газа, то  $a = \sqrt{\gamma p_0 / \rho_0}$ , где  $p_0$  и  $\rho_0$  - невозмущенные значения давления и плотности среды.



Рис. 3

**7. Распространение электрических возмущений в линии (рис. 4) при отсутствии потерь.** Для такого процесса  $u(x, t)$  - напряжение или сила тока в момент времени  $t$  на элементах проводов, имеющих координату  $x$ . Если  $L$  и  $C$  - распределенные индуктивность и емкость проводов на единицу длины, то  $a = \sqrt{1/(LC)}$ .

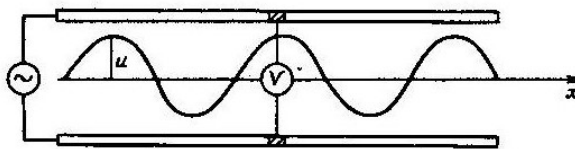


Рис. 4

**8. Плоские электромагнитные волны в непроводящих средах (рис. 5).** Здесь  $u(x, t)$  - напряженность электрического ( $E$ ) или магнитного ( $H$ ) полей;

$a = c / \sqrt{\epsilon\mu}$ , где  $c$  – скорость света в вакууме,  $\epsilon$  и  $\mu$  – диэлектрическая и магнитная проницаемости среды соответственно.

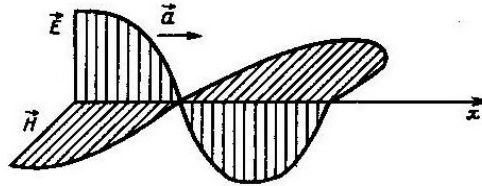


Рис. 5

### 6.3.2. Задача Коши для гиперболического уравнения

**Формула Даламбера.** Рассмотрим свободные колебания бесконечной струны, т.е. достаточно длинной струны, влиянием концов которой на процесс колебаний можно пренебречь.

Причинами, вызывающими такие колебания, могут являться начальные отклонения струны от равновесного положения или сообщенный струне начальный импульс, обуславливающий некоторое распределение скоростей частиц струны. Поэтому, описывая свободные колебания бесконечной струны, мы должны решить однородное уравнение свободных колебаний

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad t > 0, \quad -\infty < x < +\infty, \quad (31)$$

при начальных условиях

$$u|_{t=0} = \varphi(x); \quad \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = \psi(x), \quad (32)$$

где функции  $\varphi(x)$  и  $\psi(x)$  заданы на всей числовой оси.

Начальные условия (32) вполне однозначно определяют колебания бесконечной струны. При этом задачу (31), (32) называют *задачей с начальными условиями*, или *задачей Коши*.

Решение этой задачи проведем *методом Даламбера*.

Для этого введем новые независимые переменные

$$\xi = x - at; \quad \eta = x + at.$$



Преобразуя производные к новым переменным, находим:

$$u_t = u_\xi \xi_t + u_\eta \eta_t = -au_\xi + au_\eta = a(u_\eta - u_\xi);$$

$$u_{tt} = a(u_{\eta\xi} \xi_t + u_{\eta\eta} \eta_t - u_{\xi\xi} \xi_t - u_{\xi\eta} \eta_t) = a^2(u_{\xi\xi} - 2u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta});$$

$$u_x = u_\xi \xi_x + u_\eta \eta_x = u_\xi + u_\eta;$$

$$u_{xx} = u_{\xi\xi} \xi_x + u_{\xi\eta} \eta_x + u_{\eta\xi} \xi_x + u_{\eta\eta} \eta_x = u_{\xi\xi} + 2u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta}.$$

Уравнение (1.7) в новых переменных запишется в виде следующего дифференциального уравнения для функции  $u(\xi, \eta)$ :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = 0.$$

Непосредственной проверкой можно установить, что этому уравнению удовлетворяет функция вида

$$u(\xi, \eta) = u_1(\xi) + u_2(\eta),$$

где  $u_1(\xi)$  и  $u_2(\eta)$  - произвольные дважды дифференцируемые функции.

Следовательно, функция

$$u(x, t) = u_1(x - at) + u_2(x + at) \quad (33)$$

Удовлетворяет уравнению (31).

Определим теперь  $u_1$  и  $u_2$  таким образом, чтобы удовлетворялись начальные условия (32). Тогда

$$u(x, 0) = u_1(x) + u_2(x) = \varphi(x), \quad (34)$$

$$u_t(x, 0) = -au_1'(x) + au_2'(x) = \psi(x). \quad (35)$$

Интегрируя второе равенство в пределах от  $x_0$  до  $x$ , получаем

$$u_2(x) - u_1(x) = \frac{1}{a} \int_{x_0}^x \psi(\theta) d\theta + C, \quad (36)$$

Где  $x_0$  и  $C$  – постоянные.

Из системы уравнений (35) и (36) имеем

$$u_1(x) = \frac{1}{2} \varphi(x) - \frac{1}{2a} \int_{x_0}^x \psi(\theta) d\theta - \frac{C}{2};$$

$$u_2(x) = \frac{1}{2}\varphi(x) - \frac{1}{2a} \int_{x_0}^x \psi(\theta) d\theta + \frac{C}{2}.$$

Подставляя теперь функции  $u_1$  и  $u_2$  в уравнение (34), находим

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\varphi(x-at) - \frac{1}{2a} \int_{x_0}^{x-at} \psi(\theta) d\theta + \frac{1}{2}\varphi(x+at) + \frac{1}{2a} \int_{x_0}^{x+at} \psi(\theta) d\theta,$$

Или

$$u(x,t) = \frac{\varphi(x-at) + \varphi(x+at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(\theta) d\theta. \quad (37)$$

Если функция  $\varphi(x)$  имеет производные до второго порядка включительно, а функция  $\psi(x)$  - до первого порядка, то формула (37) определяет решение задач Коши (31), (32). При этом соотношение (37) называют *формулой Даламбера*.

Из формулы Даламбера следует, что задача Коши (31), (32) для волнового уравнения имеет единственное решение, непрерывно зависящее от начальных условий, т.е. если  $|\varphi_1(x) - \varphi_2(x)| < \delta_1$  и  $|\psi_1(x) - \psi_2(x)| < \delta_2$ , то  $|u_1(x,t) - u_2(x,t)| < \varepsilon$ , причем  $\varepsilon \rightarrow 0$  при  $\delta_{1,2} \rightarrow 0$ . Это свойство непрерывной зависимости решения от начальных условий обеспечивает корректность постановки задачи Коши для гиперболического уравнения, являющуюся следствием физической детерминированности описываемого волнового процесса.

**Распространение волн отклонения.** Пусть в задаче Коши (31), (32)  $\psi(x) \equiv 0$ , т.е. струна колеблется только в результате ее начального отклонения, форма которого определяется функцией  $\varphi(x)$ . Решение (37) принимает в этом случае простой вид

$$u(x,t) = \frac{1}{2}[\varphi(x-at) + \varphi(x+at)] \quad (38)$$

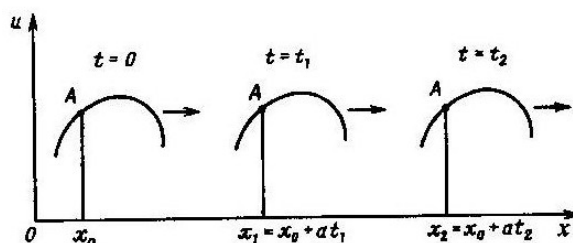


Рис. 6

Дадим физическую интерпретацию каждого слагаемого в этой формуле. Для этого рассмотрим сначала функцию

$$u_1(x, t) = f(x - at).$$

Изобразим график этой функции в различные моменты времени  $t = 0, t = t_1$  и  $t = t_2$  ( $t_2 > t_1$ ) (рис. 6).

Видно, что функция  $u_1(x, t)$  представляет собой неизменный профиль  $f(x)$ , перемещающийся вправо в положительном направлении оси  $Ox$  с конечной скоростью, равной  $a$ . При этом отклонение в точке  $x_2$  повторяет отклонение в точке  $x_1$  лишь со сдвигом по времени на время запаздывания  $\tau = (x_2 - x_1)/a$ .

В подвижной системе координат, движущейся вправо со скоростью  $a$ , наблюдатель будет видеть все время один и тот же, как бы “застывший” профиль струны.

Такой процесс распространения отклонений (возмущений) в струне представляет собой волновой процесс. При этом волну, бегущую с постоянной скоростью  $a$  вправо вдоль оси  $Ox$ , назовем прямой бегущей волной.

Наглядное изображение такого волнового процесса можно получить, вводя плоскость состояний  $(x, t)$  и описывая исследуемый процесс в верхней полуплоскости  $t > 0$  (рис. 7).

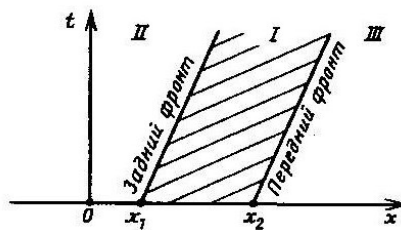


Рис. 7

Функция  $u_1(x, t)$  сохраняет постоянные значения на линиях  $x - at = \text{const}$  плоскости  $(x, t)$ , которые являются характеристиками волнового уравнения (31).

Предположим теперь, что функция  $f(x)$  отлична от нуля лишь в интервале  $x_1 < x < x_2$  и равна нулю вне этого интервала. Функцию такого вида называют финитной, а отрезок  $[x_1, x_2]$  - носителем этой финитной функции.

Для этого случая на плоскости состояний проведем через точки  $(x_1, 0)$  и  $(x_2, 0)$  характеристики  $x - at = x_1$  и  $x - at = x_2$  (см.рис. 7). Они разбивают плоскость  $t > 0$  на три области. В области  $I$  функция  $u_1(x, t) = f(x - at)$  отлична от нуля, причем характеристики  $x - at = x_1$  и  $x - at = x_2$  выделяют передний и задний фронты распространяющейся направо волны, так как на плоскости состояний они отделяют область возмущений  $I$  от невозмущенных областей  $II$  и  $III$ , где функция  $u_1(x, t)$  равна нулю.

### 6.3.3 Колебания полуограниченной струны

Если при описании процесса колебаний струны учесть влияние одного из ее концов ( $x=0$ ), то можно проанализировать колебания в полуограниченной струне, вызванные граничным возмущением, и изучить процесс отражения волн от конца струны.

Сформулируем следующую начально-краевую задачу для полуограниченной прямой:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad t > 0, \quad x > 0$$

- уравнение,

$$u(0, t) = \mu(t), \quad t \geq 0$$

- граничное условие и

(39)

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad x \geq 0$$

$$u_t(x, 0) = \psi(x), \quad x \geq 0$$

- начальные условия.

Здесь заданная функция  $\mu(t)$  описывает закон движения конца струны. В частном случае она может быть периодической функцией времени.

Учитывая линейность задачи (39), найдем ее решение в виде суммы  $u = \omega + v$  решение двух вспомогательных задач, одна из которых соответствует нулевым начальным данным, а другая – однородному граничному условию:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \omega}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2}; \\ \omega(0, t) = \mu(t); \\ \omega(x, 0) = 0; \\ \omega_t(x, t) = 0 \end{cases} \text{ и } \begin{cases} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}; \\ v(0, t) = 0; \\ v(x, 0) = \varphi(x); \\ v_t(x, t) = \psi(x). \end{cases} \quad (40)$$

Решение первой задачи (40) найдем с помощью применения преобразования Лапласа по временной переменной  $t \geq 0$ . После такого преобразования  $\omega(x, t) \doteq \tilde{\omega}(x, p)$ ,  $\mu(t) \doteq \tilde{\mu}(p)$  и первая из задач (40) сводится к простой задаче для нахождения изображения

$$\begin{cases} a^2 \frac{d^2 \tilde{\omega}}{dx^2} = p^2 \tilde{\omega}, & x > 0 \\ \tilde{\omega}(0, p) = \tilde{\mu}(p). \end{cases} \quad (41)$$

Общее решение уравнения (41) имеет вид

$$\tilde{\omega}(x, p) = C_1 e^{-\frac{p}{a}x} + C_2 e^{\frac{p}{a}x}. \quad (42)$$

Константу  $C_2$  следует положить равной нулю, чтобы для  $Re p > 0$  исключить неограниченно растущие при  $x \rightarrow +\infty$  решения.

Выполняя граничное условие в точке  $x=0$ , получаем

$$\tilde{\omega}(0, p) = C_1 = \tilde{\mu}(p). \quad (43)$$

Тогда решение (42) примет вид

$$\tilde{\omega}(x, p) = \tilde{\mu}(p) e^{-\frac{p}{a}x} \quad (44)$$

Из выражения (44) по теореме запаздывания можно найти оригинал

$$\omega(x, t) = \begin{cases} \mu(t - x/a), & x < at; \\ 0, & x > at \end{cases} \quad (45)$$

который и является решением первой задачи (40).

такое решение имеет простой физический смысл. Так как возмущения в струне распространяются в виде волн с конечной скоростью, равной  $a$ , то

колебания в точке с абсциссой  $x$  повторяют колебания струны в точке  $x=0$  с запаздыванием по времени на величину  $\tau = x/a$ . Кроме того, в любой момент времени  $t > 0$  существует область  $x > at$ , куда возмущения от конца струны еще не дошли.

Решение второй задачи (40) проведем методом распространяющихся волн с продолжением начальных данных на всю прямую  $-\infty < x < +\infty$ . Для этого докажем сначала, что если в задаче (31), (32) о колебаниях на неограниченной прямой начальные данные являются нечетными функциями относительно точки  $x=0$ , то в этой точке в любой момент времени решение равно нулю.

Действительно, если в задаче (31), (32)  $\varphi(-x) = -\varphi(x)$  и  $\psi(-x) = -\psi(x)$ , то по формуле Даламбера (37) получим

$$u(0,t) = \frac{\varphi(-at) + \varphi(at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{-at}^{at} \psi(\theta) d\theta = 0,$$

поскольку интеграл от нечетной функции в симметричных относительно начала координат пределах равен нулю.

Доказанное свойство задачи Коши (31), (32) позволяет утверждать, что если во второй задаче (40) начальные данные продолжить нечетным образом на область  $x < 0$  и рассмотреть получившуюся для функции  $v(x,t)$  задачу Коши на неограниченной прямой с начальными данными

$$\begin{aligned} v(x,0) = \varphi^*(x) &= \begin{cases} \varphi(x), & x > 0; \\ -\varphi(-x), & x < 0; \end{cases} \\ v_t(x,0) = \psi^*(x) &= \begin{cases} \psi(x), & x > 0; \\ -\psi(-x), & x < 0, \end{cases} \end{aligned} \quad (46)$$

то ее решение, найденное по формуле Даламбера,

$$u(x,t) = \frac{\varphi^*(x-at) + \varphi^*(x+at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi^*(\theta) d\theta \quad (47)$$

для всех  $t \geq 0$  и  $x \geq 0$  является также решением второй задачи (40).

Действительно, эта функция, являющаяся решением волнового уравнения, равна нулю в точке  $x=0$  в любой момент времени  $t \geq 0$  из-за нечетности начальных данных (46), а при  $t=0$  и  $x>0$  удовлетворяет начальным условиям второй задачи (40)

$$v(x,0) = \varphi^*(x > 0) = \varphi(x), \quad x > 0;$$

$$v_t(x,0) = \psi^*(x > 0) = \psi(x), \quad x > 0.$$

Таким образом, с учетом начальных данных (46) решение (47) второй задачи (1.20) можно окончательно записать в виде

$$v(x,t) = \begin{cases} \frac{\varphi(x-at) + \varphi(x+at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(\theta) d\theta, & x > 0, \quad t < \frac{x}{a}; \\ \frac{\varphi(x+at) - \varphi(at-x)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{at-x}^{at+x} \psi(\theta) d\theta, & x > 0, \quad t > \frac{x}{a}; \end{cases} \quad (48)$$

Проанализируем полученное решение. В области  $x > at$  влияние границы не сказывается и решение (48) здесь полностью совпадает с решением для бесконечной струны (37). В области  $x < at$  волна, пришедшая из вспомогательной области  $x < 0$ , реально описывает воздействие волны, отраженной от закрепленного конца  $x=0$ . Из решения (48) следует, что при отражении волны от закрепленного конца знак отклонения струны изменяется на противоположный.

**Замечание 1.3.** Вторую задачу (40) можно решить и для случая свободного (незакрепленного) конца, когда граничное условие имеет вид  $v_x(0,t) = 0$ . При решении такой задачи начальные данные следует продолжить в область  $x < 0$  четным образом. В такой задаче отражение волны от свободного конца будет происходить без изменения знака отклонения.

Как уже указывалось, решение задачи (39) можно записать в виде суммы решений (35) и (38) вспомогательных задач (40):

$$u(x, t) = \begin{cases} \frac{\varphi(x - at) + \varphi(x + at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(\theta) d\theta, & x > 0, \quad t < \frac{x}{a} \\ \mu\left(t - \frac{x}{a}\right) + \frac{\varphi(x + at) - \varphi(at - x)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{at-x}^{at+x} \psi(\theta) d\theta, & x > 0, \quad t > \frac{x}{a} \end{cases} \quad (49)$$

### 6.3.4 Краевые задачи для гиперболического уравнения

Математическое описание процессов поперечных колебаний струны или продольных колебаний стержня конечной длины должно быть дополнено помимо начальных условий также граничными условиями. Эти условия показывают, что происходит на концах струны или стержня в любой момент времени.

Опишем задание различных граничных режимов на концах струны или стержня, расположенных в точках  $x=0$  и  $x=l$ . При этом для описания выделим один из концов, например  $x=l$ .

Если задан закон движения  $\mu(t)$  этого конца, то решение задачи о колебаниях должно удовлетворять при  $x=l$  граничному условию первого рода

$$u(x, t)|_{x=l} = \mu(t) \quad (50)$$

В частности, однородное условие ( $\mu(t) = 0$ ) задают в случае жесткого закрепления конца струны или стержня.

Если задан закон изменения силы  $F(t)$ , приложенной к концу стержня  $x=l$ , то эта сила вызовет упругие напряжения в стержне, причем по закону Гука упругая сила на конце стержня с площадью поперечного сечения  $S$  пропорциональна относительному удлинению  $\partial u / \partial x$  и равна  $ES \frac{\partial u}{\partial x}$ , где  $E$  - модуль Юнга материала. Следовательно, на конце стержня  $x=l$  должно выполняться граничное условие второго рода

$$\frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=l} = \gamma(t), \quad (51)$$

где  $\gamma(t) = F(t)/(ES)$ . Если  $\gamma(t) = 0$ , то конец стержня является свободным.



Пусть теперь к концу стержня при  $x=l$  прикреплена пружина, действующая на стержень с силой, пропорциональной смещению стержня  $u(x,t)$  при  $x=l$ . Эта упругая сила  $F=-ku(l,t)$ , где  $k$  – коэффициент жесткости пружины, будет играть роль внешней силы. Поэтому в таком случае на конце стержня должно выполняться граничное условие третьего рода

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=l} = -hu(l,t), \text{ или } \left. \left( \frac{\partial u}{\partial x} + hu \right) \right|_{x=l} = 0, \quad (52)$$

где  $h=k/(ES)$ - некоторая постоянная.

Естественным обобщением (52) является условие

$$\left. \left( \frac{\partial u}{\partial x} + hu \right) \right|_{x=l} = g(t) \quad (53)$$

Задачи отыскания решений уравнений колебаний с учетом начальных и граничных условий будем называть начально-краевыми, или просто краевыми, задачами для волнового уравнения.

Краевые задачи, когда в граничных точках заданы условия первого, второго или третьего рода, назовем соответственно первой, второй или третьей краевыми задачами. Можно рассматривать и смешанные краевые задачи, если в граничных точках заданы условия различного типа.

Метод разделения переменных, или метод Фурье, является одним из основных методов решения задач математической физики в ограниченных областях. Изложим этот метод для задач о свободных колебаниях ограниченной струны с закрепленными концами, которая формулируется следующим образом: найти решение однородного волнового уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad t > 0, \quad 0 < x < l \quad (54)$$

удовлетворяющее начальным условиям

$$u|_{t=0} = \varphi(x), \quad \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = \psi(x), \quad 0 \leq x \leq l, \quad (55)$$

и однородным граничным условиям

$$u|_{x=0} = 0, u|_{x=l} = 0, t \geq 0 \quad (56)$$

Идея метода Фурье основана на линейности и однородности уравнения и граничных условий. В этом случае справедлив принцип суперпозиции для любых частных решений  $u_1$  и  $u_2$  уравнения (54), удовлетворяющих условиям (56), т.е. функция  $u = C_1 u_1 + C_2 u_2$ , где  $C_{1,2} = const$ , также удовлетворяет уравнению (54) и граничным условиям (56). Оказывается, что с помощью суперпозиции линейно независимых частных решений можно выполнить также и начальные условия (55).

Будем искать нетривиальное решение уравнения (54) в виде произведения двух функций

$$u(x,t) = X(x)T(t), \quad (57)$$

одна из которых зависит только от переменного  $x$ , а другая – только от  $t$ .

Дифференцируя дважды выражение (57) по  $x$  и по  $t$ , после подстановки его в уравнение (54) получим

$$X(x)T''(t) = a^2 X''(x)T(t),$$

или

$$\frac{1}{a^2} \frac{T''(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)}. \quad (58)$$

Равенство (58) должно соблюдаться при всех значениях  $x \in (0, l)$  и  $t > 0$ . Особенностью равенства (58) является разделение переменных в нем, т.е. его левая часть зависит только от  $t$ , а правая – только от  $x$ . Поэтому, если, например, зафиксировать  $x$ , правая часть, а вместе с ней и левая должны сохранять постоянное значение при различных значениях  $t$ . Аналогично левая часть, а следовательно, и правая часть равенства при фиксированном  $t$  не должны изменяться при изменении  $x$ . Но тогда однозначно вытекает вывод о том, что равенство (58) будет справедливо лишь в том случае, если обе его части вообще

не зависят ни от  $x$ , ни от  $t$ , т.е. являются постоянной величиной. Обозначив эту постоянную разделения буквой  $\lambda$  со знаком минус, запишем (58) в виде

$$\frac{1}{a^2} \frac{T''(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda \quad (59)$$

Отсюда следует, что функции  $T(t)$  и  $X(x)$  можно определить из решения обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

$$T''(t) + \lambda a^2 T(t) = 0; \quad X''(x) + \lambda X(x) = 0$$

Чтобы такие частные решения вида (57) удовлетворяли граничным условиям (56) для любого  $t \geq 0$ , необходимо потребовать выполнения условий  $X(0)=0$  и  $X(l)=0$ .

Таким образом, для отыскания координатной функции  $X(x)$  приходим к следующей задаче. Найти такие решения линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0, \quad 0 < x < l, \quad (60)$$

которые в граничных точках  $x=0$  и  $x=l$  удовлетворяют условиям

$$X(0)=0, \quad X(l)=0. \quad (61)$$

При любом  $\lambda = const$  эта задача имеет тривиальное решение  $X(x) \equiv 0$ . Однако ниже будет показано, что при некоторых положительных значениях постоянной  $\lambda$  задача (60), (61) имеет и нетривиальные решения. Такие «особенные» значения  $\lambda$  называют **собственными значениями**, а соответствующие им нетривиальные решения  $X(x)$  - **собственными функциями** задачи (60), (61). Задачу отыскания собственных значений и собственных функций называют **задачей Штурма – Лиувилля**.

Возвращаясь к задаче (60) и (61), рассмотрим отдельно случаи, когда константа разделения  $\lambda$  равна нулю, отрицательна или положительна.

При  $\lambda = 0$  общее решение уравнения (60) есть линейная функция  $X(x) = C_1 + C_2 x$ , которая может удовлетворять обоим условиям (61) лишь при

$C_1 = C_2 = 0$ . Таким образом, при  $\lambda = 0$  задача (60), (61) имеет только тривиальное решение  $X(x) \equiv 0$ .

Если  $\lambda < 0$ , то общее решение уравнения (60)

$$X(x) = C_1 ch(\sqrt{|\lambda|}x) + C_2 sh(\sqrt{|\lambda|}x)$$

при подстановке в граничные условия (61) дает

$$C_1 + C_2 \cdot 0 = 0;$$

$$C_1 ch(\sqrt{|\lambda|}l) + C_2 sh(\sqrt{|\lambda|}l) = 0.$$

Так как определитель этой однородной системы  $D = sh(\sqrt{|\lambda|}l)$  при любом значении  $\lambda < 0$  не равен нулю, то единственным ее решением является решение  $C_1 = C_2 = 0$ . Следовательно, у задачи (60), (61) нет неположительных собственных значений.

Остается рассмотреть случай  $\lambda > 0$ , когда общее решение уравнения (60)

$$X(x) = C_1 \cos(\sqrt{|\lambda|}x) + C_2 \sin(\sqrt{|\lambda|}x)$$

может удовлетворять граничным условиям

$$X(0) = C_1 + C_2 \cdot 0 = 0;$$

$$X(l) = C_1 \cos(\sqrt{|\lambda|}l) + C_2 \sin(\sqrt{|\lambda|}l) = 0 \tag{62}$$

при  $C_1 = 0$ , но  $C_2 = C \neq 0$ , если определитель системы (62)  $D = \sin(\sqrt{|\lambda|}l) = 0$ , что выполняется при  $\sqrt{|\lambda|}l = n\pi, n = 1, 2, \dots$ .

Таким образом, только при собственных значениях

$$\lambda = \lambda_n = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2, n = 1, 2, \dots, \tag{63}$$

задача (60), (61) имеет в качестве нетривиальных решений систему собственных функций

$$X_n(x) = \sin \frac{n\pi x}{l}, n = 1, 2, \dots \tag{64}$$

ортогональных на отрезке  $[0, l]$ .

Каждому собственному значению  $\lambda_n$  будет соответствовать функция  $T_n(t)$ , которую находим из решения уравнения

$$T_n''(t) + \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 a^2 T_n(t) = 0.$$

Общее решение этого уравнения имеет вид

$$T_n(t) = a_n \cos\left(\frac{n\pi a}{l}t\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi a}{l}t\right), \quad (65)$$

где  $a_n$  и  $b_n$  - произвольные постоянные.

Подставив выражения (64) и (65) в формулу (57), найдем частные решения уравнения (54), удовлетворяющие граничным условиям (56). При этом каждому  $n = 1, 2, \dots$  будет отвечать решение

$$u_n(x, t) = \left[ a_n \cos\left(\frac{n\pi a}{l}t\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi a}{l}t\right) \right] \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right). \quad (66)$$

Суперпозиция всех решений вида (66)

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[ a_n \cos\left(\frac{n\pi a}{l}t\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi a}{l}t\right) \right] \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \quad (67)$$

будет также решением (54), удовлетворяющим граничным условиям (56), если ряд (67) для любого  $x \in (0, l)$  при  $t \geq 0$  является сходящимся рядом и его можно дважды почленно дифференцировать.

В этом случае можно подобрать постоянные  $a_n$  и  $b_n$  в уравнении (67) так, чтобы функция, представленная рядом (67), удовлетворяла начальным условиям (55). Для этого продифференцируем почленно ряд (67) по  $t$ :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\pi a}{l} \left[ -a_n \sin\left(\frac{n\pi a}{l}t\right) + b_n \cos\left(\frac{n\pi a}{l}t\right) \right] \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)$$

и при  $t = 0$  удовлетворим начальным условиям

$$u|_{t=0} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin \frac{n\pi x}{l} = \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq l;$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=0} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\pi a}{l} b_n \sin \frac{n\pi x}{l} = \psi(x), \quad 0 \leq x \leq l.$$

(68)

Равенства (68) представляют собой разложение заданных функций  $\varphi(x)$  и  $\psi(x)$  в ряды Фурье по ортогональной в интервале  $(0, l)$  системе тригонометрических функций  $\left\{ \sin \frac{n\pi x}{l} \right\}_{n=1}^{\infty}$ . Поэтому коэффициенты  $a_n$  и  $\frac{n\pi a}{l} b_n$

этих разложений являются коэффициентами Фурье  $\varphi_n$  и  $\psi_n$  функций  $\varphi(x)$  и  $\psi(x)$ . Определяя эти коэффициенты по формулам Эйлера – Фурье, получаем

$$a_n = \varphi_n = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx;$$

$$b_n = \frac{l}{n\pi a} \psi_n = \frac{2}{n\pi a} \int_0^l \psi(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx.$$
(69)

Таким образом, ряд (67) с коэффициентами  $a_n$  и  $b_n$ , вычисленными по формулам (69), окончательно определяет решение исходной краевой задачи (54) – (56).

Решение (67) можно преобразовать к следующему виду:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \cos(\omega_n t - \delta_n) \sin \frac{n\pi x}{l},$$
(70)

где  $\alpha_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$ ;  $\omega_n = n\pi a / l$ ;  $\operatorname{tg} \delta_n = b_n / a_n$ .

Каждое из слагаемых  $u_n(x, t)$  в уравнении (70) описывает движение струны в виде стоячей волны, которая образуется в результате наложения прямой и обратной бегущих волн при отражении их от концов струны. Эти стоячие волны называют простыми тонами, или гармониками.

В стоячей волне все частицы струны колеблются с одинаковой частотой

$$\omega_n = n\omega_1, \quad \omega_1 = \frac{\pi a}{l} = \frac{\pi}{l} \sqrt{\frac{T_0}{\rho_0}}. \quad (71)$$

Эти частоты  $\omega_n, n = 1, 2, \dots$ , называют собственными частотами колебаний ограниченной струны. Самая низкая частота  $\omega_1$  соответствует основному тону струны, а более высокие частоты, кратные  $\omega_1$ , соответствуют обертонам. Изменяя длину струны или силу ее натяжения  $T_0$ , можно изменять частоты колебаний  $\omega_n$ .

Для  $n$ -ой стоячей волны точки струны с координатами  $x_m = ml/n, m = 0, 1, \dots, n$ , в которых  $\sin(n\pi x_m/l) = 0$ , остаются все время неподвижными. Их называют узлами стоячей волны (рис. 11, темные точки).

Точки струны с координатами  $x_m = \frac{2m-1}{2} \frac{l}{n}, m = 1, 2, \dots, n$ , совершают колебания с максимальной амплитудой, равной  $a_n$ . Такие точки носят названия пучностей стоячей волны (рис. 11, светлые точки).

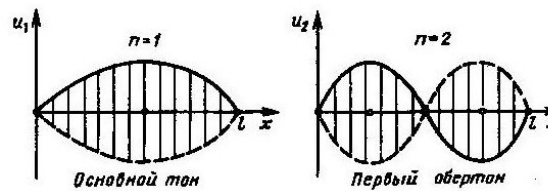


Рис. 11

Установим теперь ограничения на функции  $\varphi(x)$  и  $\psi(x)$ , при выполнении которых возможно двукратное почленное дифференцирование ряда (67) для функции  $u(x, t)$ .

1. Пусть функция  $\varphi(x)$  непрерывна вместе со своими производными до второго порядка включительно, а третья производная кусочно-непрерывна на отрезке  $[0, l]$  и, кроме того,  $\varphi(0) = \varphi(l) = 0, \varphi''(0) = \varphi''(l) = 0$ .

Заметим, что эти требования предполагают, в частности, согласование начальных и граничных условий, когда и начальное распределение отклонений в струне учитывает отсутствие смещений закрепленных концов струны.

2. Функция  $\psi(x)$  непрерывна вместе со своей первой производной и имеет кусочно – непрерывную вторую производную и, кроме того  $\psi(0) = \psi(l) = 0$ .

Тогда при выполнении этих условий из теории рядов Фурье согласно формулам (69), следует, что коэффициенты  $a_n$  и  $b_n$  имеют порядок малости  $O(1/n^4)$  по индексу  $n$ . Поэтому числовой ряд

$$A \sum_{n=1}^{\infty} n^2 (|a_n| + |b_n|)$$

сходится и с некоторой константой  $A$  является мажорантным рядом для функциональных рядов

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = - \left( \frac{\pi}{l} \right)^2 \sum_{n=1}^{\infty} n^2 \left[ a_n \cos \left( \frac{n\pi a}{l} t \right) + b_n \sin \left( \frac{n\pi a}{l} t \right) \right] \sin \frac{n\pi x}{l};$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = - \left( \frac{\pi a}{l} \right)^2 \sum_{n=1}^{\infty} n^2 \left[ a_n \cos \left( \frac{n\pi a}{l} t \right) + b_n \sin \left( \frac{n\pi a}{l} t \right) \right] \sin \frac{n\pi x}{l};$$

Следовательно, эти ряды при  $t \geq 0$  и  $x \in [0, l]$  равномерно сходятся и ряд (67) с коэффициентами (69) при выполнении условий 1 и 2 определяет классическое решение краевой задачи (54) – (56).

Условия 1 и 2 могут быть ослаблены. В этом случае ряд (67) является обобщенным решением краевой задачи и сходимость ряда и его производных следует понимать в более широком смысле, например как сходимость в среднем или слабую сходимость.

Решения задач о свободных колебаниях ограниченной струны или стержня с однородными граничными условиями второго или третьего рода могут быть также построены в виде бесконечных функциональных рядов аналогичной структуры, отличающихся лишь собственными значениями и собственными функциями соответствующей задачи Штурма – Лиувилля.

### 6.3.5 Краевые задачи для неоднородного уравнения

**Вынужденные колебания струны.** Изложенный выше метод Фурье (разделения переменных) позволяет также решать краевые задачи для неоднородного волнового уравнения.



Сформулируем, например, задачу о вынужденных колебаниях струны, закрепленной на концах:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t), t > 0, 0 < x < l; \quad (72)$$

$$u|_{t=0} = \varphi(x), \quad \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = \psi(x), 0 \leq x \leq l; \quad (73)$$

$$u|_{x=0} = 0, \quad u|_{x=l} = 0, t \geq 0. \quad (74)$$

Рассматривая в искомом решении  $u(x, t)$  этой задачи переменное  $t$  как неотрицательный параметр, будем искать это решение в форме разложения в ряд Фурье по ортогональной на отрезке  $[0, l]$  системе собственных функций

$\left\{ \sin \frac{n\pi x}{l} \right\}_{n=1}^{\infty}$ , найденных в задаче о свободных колебаниях ограниченной струны и

удовлетворяющих граничным условиям (74). Тогда

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} V_n(t) \sin \frac{n\pi x}{l}, \quad (75)$$

где коэффициенты разложения  $V_n(t)$  следует определять как функции времени  $t$  так, чтобы ряд (75) удовлетворял уравнению (72) и начальным условиям (73). Для этого представим функции  $f(x, t), \varphi(x)$  и  $\psi(x)$  в виде следующих тригонометрических рядов Фурье:

$$\begin{aligned} f(x, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) \sin \frac{n\pi x}{l}, \quad f_n(t) = \frac{2}{l} \int_0^l f(\xi, t) \sin \frac{n\pi \xi}{l} d\xi; \\ \varphi(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n \sin \frac{n\pi x}{l}, \quad \varphi_n = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(\xi) \sin \frac{n\pi \xi}{l} d\xi; \\ \psi(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n \sin \frac{n\pi x}{l}, \quad \psi_n = \frac{2}{l} \int_0^l \psi(\xi) \sin \frac{n\pi \xi}{l} d\xi; \end{aligned} \quad (76)$$

Подставив ряды (75) и (76) в уравнение (72) и начальные условия (73), получим следующие соотношения:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \left[ V_n''(t) + \left( \frac{n\pi a}{l} \right)^2 V_n(t) \right] \sin \frac{n\pi x}{l} &= \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) \sin \frac{n\pi x}{l}; \\ \sum_{n=1}^{\infty} V_n(0) \sin \frac{n\pi x}{l} &= \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n \sin \frac{n\pi x}{l}, \\ \sum_{n=1}^{\infty} V_n'(0) \sin \frac{n\pi x}{l} &= \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n \sin \frac{n\pi x}{l}. \end{aligned} \quad (77)$$

С учетом полноты ортогональной системы собственных функций приравняем в разложениях (77) коэффициенты при одинаковых собственных функциях. Тогда получим следующую задачу Коши для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка:

$$V_n''(t) + \left( \frac{n\pi a}{l} \right)^2 V_n(t) = f_n(t); \quad (78)$$

$$V_n(0) = \varphi_n, \quad V_n'(0) = \psi_n \quad (79)$$

Общее решение уравнения (78) может быть найдено методом Лагранжа вариации постоянных. Удовлетворяя начальным условиям (79), представим решение задачи (78), (79) в виде

$$V_n(t) = \varphi_n \cos\left(\frac{n\pi a}{l}t\right) + \frac{l}{n\pi a} \psi_n \sin\left(\frac{n\pi a}{l}t\right) + \frac{l}{n\pi a} \int_0^t f_n(\tau) \sin\left(\frac{n\pi a(t-\tau)}{l}\right) d\tau \quad (80)$$

Тогда, подставив найденное выражение для  $V_n(t)$  в ряд (75), получим решение исходной задачи (72) – (74) в следующей форме:

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \varphi_n \cos\left(\frac{n\pi a}{l}t\right) + \frac{l}{n\pi a} \psi_n \sin\left(\frac{n\pi a}{l}t\right) \right] \sin \frac{n\pi x}{l} + \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{l}{n\pi a} \left[ \int_0^t f_n(\tau) \sin \frac{n\pi a(t-\tau)}{l} d\tau \right] \sin \frac{n\pi x}{l} \end{aligned} \quad (81)$$

**Функция источника.** При нулевых начальных условиях, когда  $\varphi(x) \equiv 0$  и  $\psi(x) \equiv 0$ , первое слагаемое в (1.61) равно нулю. В этом случае функция

$$u_1(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{l}{n\pi a} \left[ \int_0^t f_n(\tau) \sin \frac{n\pi a(t-\tau)}{l} d\tau \right] \sin \frac{n\pi x}{l} \quad (82)$$

описывает вынужденные колебания ограниченной струны, которые совершаются только под действием внешней распределенной по струне вынуждающей силы при отсутствии начальных возмущений струны.

Преобразуем формулу (82), заменяя в ней  $f_n(\tau)$  выражением из (76) и меняя порядок суммирования и интегрирования. После этих преобразований получим

$$u_1(x, t) = \int_0^t \int_0^l G(x, \xi, t - \tau) f(\xi, \tau) d\xi d\tau, \quad (83)$$

где

$$G(x, \xi, t - \tau) = \frac{2}{\pi a} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin \frac{n\pi x}{l} \sin \frac{n\pi \xi}{l} \sin \frac{n\pi a(t - \tau)}{l}. \quad (84)$$

Выясним смысл функции  $G$ . Для этого положим функцию  $f(x, t)$  равной

$$f(x, t) = \delta(x - x_0) \delta(t - t_0), \quad x_0 \in (0, l), \quad t_0 > 0,$$

где  $\delta(\xi - \xi_0)$  - обобщенная дельта-функция, описывающая сосредоточенное воздействие при  $\xi = \xi_0$ .

Такая неоднородность в уравнении (72) соответствует заданию сосредоточенной в точке  $x_0$  внешней возбуждающей силы, мгновенно действующей в момент времени  $t_0$ . Такая сила мгновенно передает струне сосредоточенный импульс, численно равный плотности струны  $\rho_0$ .

Используя свойства дельта-функции, с помощью формулы (83) находим закон колебания струны в таком режиме возбуждения в виде

$$\tilde{u}_1(x, t) = \begin{cases} 0, & t < t_0; \\ G(x, x_0, t - t_0), & t > t_0 \end{cases}$$

Естественно поэтому функцию  $G(x, \xi, t - \tau)$ , определенную формулой (84), назвать функцией источника, или функцией влияния мгновенного

сосредоточенного импульса на ограниченном отрезке  $[0, l]$ . Формула же (83) при этом показывает, что действие любой непрерывно распределенной вынуждающей силы, зависящей от времени, можно представить в виде суммы (интеграла) импульсных воздействий, и для нахождения закона колебания струны под действием произвольной распределенной силы  $F(x, t) = \rho_0 f(x, t)$  достаточно знать воздействие мгновенной сосредоточенной силы.

**Первая краевая задача в общей постановке.** Рассмотрим общую постановку задачи о вынужденных колебаниях струны с заданными законами колебаний ее концов:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t), t > 0, 0 < x < l; \quad (85)$$

$$u|_{t=0} = \varphi(x), \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = \psi(x), 0 \leq x \leq l; \quad (86)$$

$$u|_{x=0} = \mu(t), u|_{x=l} = v(t), t \geq 0 \quad (87)$$

Для решения этой задачи введем вспомогательную функцию  $W(x, t)$  таким образом, чтобы она удовлетворяла условиям (87), т.е.

$$W(0, t) = \mu(t), W(l, t) = v(t).$$

В качестве одной из таких функций можно выбрать

$$W(x, t) = \mu(t) + \frac{x}{l} [v(t) - \mu(t)], 0 \leq x \leq l.$$

Тогда с помощью подстановки

$$u(x, t) = W(x, t) + v(x, t)$$

для новой неизвестной функции  $v(x, t)$  получим следующую краевую задачу:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + f_1(x, t), t > 0, 0 < x < l \quad (88)$$

$$v|_{t=0} = \varphi_1(x), \left. \frac{\partial v}{\partial t} \right|_{t=0} = \psi_1(x), 0 \leq x \leq l \quad (89)$$

$$v|_{x=0} = 0, v|_{x=l} = 0, t \geq 0 \quad (90)$$

где новые функции  $f_1(x,t), \varphi_1(x)$  и  $\psi_1(x)$  определены формулами

$$\begin{aligned} f_1(x,t) &= f(x,t) - \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} = f(x,t) - \left\{ \mu''(t) + \frac{x}{l} [v''(t) - \mu''(t)] \right\}; \\ \varphi_1(x) &= \varphi(x) - W(x,0) = \varphi(x) - \left\{ \mu(0) + \frac{x}{l} [v(0) - \mu(0)] \right\}, \\ \psi_1(x) &= \psi(x) - \left. \frac{\partial W}{\partial t} \right|_{t=0} = \psi(x) - \left\{ \mu'(0) + \frac{x}{l} [v'(0) - \mu'(0)] \right\}. \end{aligned}$$

Таким образом, первая краевая задача для неоднородного уравнения в общей постановке сведена к изученной ранее задаче вида (72) – (74) о вынужденных колебаниях ограниченной струны с закрепленными концами.

Можно выделить класс задач со стационарными неоднородностями, когда вынуждающая сила и условия закрепления концов струны не зависят от времени:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x), \quad t > 0, \quad 0 < x < l; \\ u(x,0) &= \varphi(x), \quad u_t(x,0) = \psi(x); \\ u(0,t) &= H_1, \quad u(l,t) = H_2. \end{aligned} \tag{91}$$

Здесь  $H_1$  и  $H_2$  - некоторые заданные константы.

Решение задачи (91) можно найти, выделяя стационарную часть решения:

$$u(x,t) = u_c(x) + v(x,t).$$

В модели струны функция  $u_c(x)$  описывает стационарный профиль, соответствующий статическому прогибу струны под действием распределенной силы  $f(x)$ .

Стационарное решение  $u_c(x)$  находим из решения задачи для обыкновенного дифференциального уравнения

$$\begin{cases} a^2 \frac{d^2 u_c}{dx^2} + f(x) = 0; \\ u_c(0) = H_1, u_c(l) = H_2. \end{cases} \tag{92}$$

Интегрируя уравнение (1.72) и выполняя граничные условия, получаем

$$u_c(x) = H_1 + (H_2 - H_1) \frac{x}{l} + \frac{x}{la^2} \int_0^l d\xi \int_0^\xi f(\eta) d\eta - \frac{1}{a^2} \int_0^x d\xi \int_0^\xi f(\eta) d\eta \quad (93)$$

С учетом соотношений (91) и (92) находим, что функция  $v(x, t)$  удовлетворяет однородному волновому уравнению

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}, \quad t > 0, \quad 0 < x < l,$$

с начальными условиями

$$\begin{aligned} v(x, 0) &= \varphi(x) - u_c(x); \\ u_t(x, 0) &= \psi(x). \end{aligned}$$

Поэтому эту функцию можно найти по формулам (67) и (69), заменив в формуле (69)  $\varphi(x)$  на  $\varphi(x) - u_c(x)$ .

### 6.3.6 Дифференциальное уравнение поперечных колебаний мембраны.

Рассмотрим задачу о малых поперечных колебаниях мембраны, которая является обобщением на двумерный случай задачи о колебаниях струны. Колеблющиеся мембраны являются основным типом излучателей акустических волн. Поэтому расчёт колебаний мембран является важной задачей акустики.

В дальнейшем будем называть мембраной упругую пленку, не сопротивляющуюся изгибу или сдвигу. Рассмотрим такую мембрану, ограниченную контуром  $\Gamma$  и находящуюся в равновесном состоянии в плоскости  $(x, y)$  (Рис. 1). Мембрана жестко закреплена по контуру  $\Gamma$  и находится в напряженном состоянии. Это означает, что если мысленно провести разрез по произвольной линии  $\gamma$ , то на края разреза перпендикулярно  $\gamma$  будет действовать распределенная сила натяжения, модуль которой на единицу длины линии равен  $T_0$ .

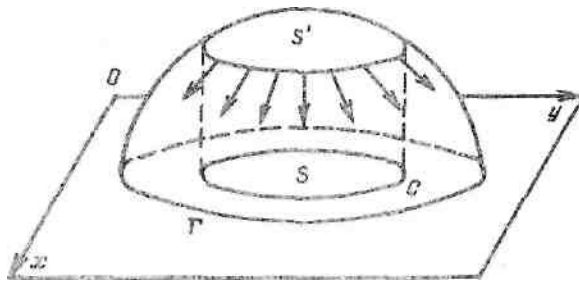


Рис. 1

Выведем мембрану из положения равновесия, отклонив ее в вертикальном направлении. Обозначив через  $u(x, y, t)$  вертикальное смещение элемента мембраны с координатами  $x, y$ , будем считать поперечное перемещение элементов мембраны достаточно малым, так что можно пренебречь квадратами

первых производных  $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2$  и  $\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2$  по сравнению с единицей.

Малость поперечных перемещений элементов мембраны означает малость угла  $\alpha$  между нормалью к поверхности мембраны и вертикальным направлением, перпендикулярным плоскости  $(x, y)$ . Поэтому следует считать

$$\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2}} \approx 1;$$

$$\sin \alpha \approx \sqrt{1 + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2} = |\text{grad } u|;$$

$$S' = \iint_S \frac{dx dy}{\cos \alpha} \approx \iint_S dx dy = S.$$

Последнее соотношение означает, что площадь любого элемента мембраны при его поперечном перемещении не изменяется. Поэтому при малых поперечных колебаниях мембраны не происходит деформации ее материала, и по закону Гука модуль силы натяжения не изменяется со временем и всегда равен  $T_0 = \text{const}$ . Опишем динамику движения мембраны. Для этого определим вертикальную составляющую результирующей силы, действующей на

выделенный элемент  $S$  мембраны, ограниченный контуром  $C$ . Она будет складываться из вертикальной составляющей сил натяжения

$$F_1 = \oint_C T_0 \sin \alpha \, dl = - \oint_C T_0 |\text{grad } u| dl = \oint_C T_0 (\text{grad } u \cdot \vec{\nu}) dl \quad (1)$$

и результирующей поперечно действующей вынуждающей силы, распределенной по поверхности мембраны с некоторой поверхностной плотностью  $f_0(x, y, t)$ ,

$$F_2 = \iint_S f_0(x, y, t) dx dy \quad (2)$$

Здесь  $\vec{\nu}$  – единичная внешняя нормаль к контуру  $C$ .

С помощью формулы Остроградского для плоскости находим

$$F_1 = \oint_C T_0 (\text{grad } u \cdot \vec{\nu}) dl = \iint_S T_0 \text{div grad } u dx dy = \iint_S T_0 \Delta_2 u dx dy,$$

где  $\Delta_2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$  – двумерный оператор Лапласа.

Введя поверхностную плотность мембраны  $\rho(x, y)$  запишем выражение для вертикальной проекции импульса, движущегося участка (элемента) мембраны

$$P = \iint_S \rho \frac{\partial u}{\partial t} dx dy \quad (3)$$

Теперь по закону Ньютона

$$\frac{dP}{dt} = F_1 + F_2$$

или

$$\frac{d}{dt} \iint_S \rho \frac{\partial u}{\partial t} dx dy = \iint_S T_0 \Delta_2 u dx dy + \iint_S f_0(x, y, t) dx dy \quad (4)$$

Внося производную по времени под знак интеграла, получаем

$$\iint_S \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} dx dy = \iint_S [T_0 \Delta_2 u + f_0(x, y, t)] dx dy,$$

или



$$\iint_S \left[ \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - T_0 \Delta_2 u + f_0(x, y, t) \right] dx dy = 0 \quad (5)$$

В силу произвольности выбора элемента мембраны, т.е. произвольности области интегрирования  $S$ , из интегрального равенства (5) следует равенство нулю подынтегрального выражения. Таким образом, мы приходим к дифференциальному уравнению в частных производных гиперболического типа, которое описывает малые поперечные колебания мембраны,

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = T_0 \Delta_2 u + f_0(x, y, t) \quad (6)$$

Для однородной мембраны уравнение (6) можно записать в виде

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \Delta_2 u + f(x, y, t), \quad (7)$$

где  $a = \sqrt{T_0/\rho_0} = const$ ;  $\Delta_2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ ;  $f(x, y, t) = f_0(x, y, t)/\rho_0$  - плотность вынуждающей силы, рассчитанная на единицу массы мембраны.

Уравнение (7) называют двумерным волновым уравнением, поскольку ниже будет показано, что произвольное движение мембраны можно представить как совокупность распространяющихся по мембране колебаний, т.е. механических волн.

Законы механики сплошной среды (гидродинамики, аэромеханики и теории упругости) позволяют вывести уравнение, которому удовлетворяют малые по амплитуде возмущения  $u(M, t)$ ,  $M \in \mathbb{R}^3$  в однородной среде. При наличии объемно распределенной вынуждающей силы это неоднородное уравнение гиперболического типа

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \Delta u + f(M, t), \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (8)$$

обобщает волновое уравнение на случай трех пространственных переменных. Оно описывает процесс распространения механических возмущений в

сплошной среде, причем параметр  $a$  в формуле (8) есть скорость распространения малых механических возмущений, т.е. скорость звука в среде.

Для жидкостей и газов функцию  $u(M,t)$  можно интерпретировать как возмущение плотности или давления, а для твердого тела - как потенциал смещений отдельных частиц среды.

Уравнение (8) лежит в основе линейной акустики и, в частности, ультразвуковой технологии. С помощью этого уравнения решаются задачи о распространении звуковых возмущений в сплошной среде при различных условиях их возбуждения.

Отметим еще раз, что для процессов, описываемых уравнениями (7) и (8), имеет место конечная скорость распространения возмущений. Поэтому для этих уравнений в пространстве состояний  $(M,t)$  можно ввести в рассмотрение характеристический конус с вершиной в точке  $(M_0, t_0)$ . Для двумерного волнового уравнения этот характеристический конус изображен на рис. 2.

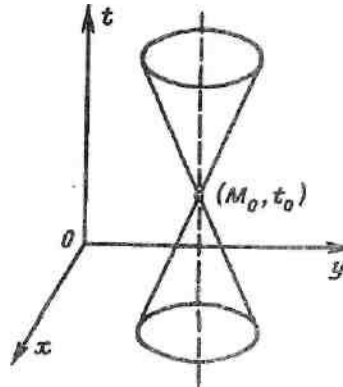


Рис. 2

Поверхность верхней полости конуса, определяемая уравнением  $r_{M_0M} = a(t - t_0)$ ,  $t > t_0$  соответствует точкам фазового пространства, в которые в момент времени  $t > t_0$  приходит сигнал, испущенный в момент времени  $t_0$  источником возмущений, расположенным в точке  $M_0$ . Каждое сечение этой поверхности плоскостью  $t = const$  выделяет фронт волны возмущения (окружность для  $N = 2$  и сферу для  $N = 3$ ) от источника, в момент времени  $t > t_0$ .

Поверхность нижней полости конуса  $r_{M_0M} = a(t_0 - t)$ ,  $t < t_0$  определяет геометрическое место точек, из которых сигналы приходят в точку  $M_0$  пространства в момент времени  $t_0$ .

### Колебания прямоугольной мембраны

Рассмотрим мембрану прямоугольной формы со сторонами  $l_1$  и  $l_2$ , жестко закрепленную по периметру. Опишем процесс малых поперечных колебаний такой мембраны, инициированный начальным отклонением и начальной скоростью.

Математическая модель процесса свободных колебаний такой мембраны имеет вид краевой задачи для функции  $u(x, y, t)$  характеризующей отклонения различных элементов мембраны от положения равновесия. Эта краевая задача включает в себя уравнение

$$\frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad t > 0, \quad (x, y) \in \Omega, \quad (9)$$

$$\Omega = \{(x, y) : 0 < x < l_1, 0 < y < l_2\},$$

начальные условия возбуждения колебаний

$$u(x, y, 0) = h(x, y); \quad (10)$$

$$\frac{\partial u(x, y, 0)}{\partial t} = g(x, y) \quad (11)$$

и граничные условия, заданные на контуре  $\Gamma$  в области  $\Omega$ ,

$$u(0, y, t) = 0, \quad u(l_1, y, t) = 0 \quad (12)$$

$$u(x, 0, t) = 0, \quad u(x, l_2, t) = 0 \quad (13)$$

Решение задачи (9)-(13) будем искать методом разделения переменных, находя частные решения вида

$$u(x, y, t) = v(x, y)T(t), \quad (14)$$

Подставляя решения (14) в уравнение (9), получаем

$$\frac{1}{a^2} \frac{T''}{T} = \frac{\Delta_2 v}{v} = -\lambda = const. \quad (15)$$

Отсюда следуют уравнение для функции  $T(t)$

$$T''(t) + a^2 \lambda T = 0 \quad (16)$$

и задача на собственные значения

$$\begin{cases} \Delta_2 v + \lambda v = 0, & (x, y) \in \Omega; \\ v|_{\Gamma} = 0. \end{cases} \quad (17)$$

Полагая  $v(x, y) = X(x)Y(y)$  и проведя еще раз разделение переменных, получим две идентичные задачи Штурма –Лиувилля

$$\begin{cases} X''(x) + \nu X(x) = 0; \\ X(0) = X(l_1) = 0, \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} Y(y) + \mu Y(y) = 0; \\ Y(0) = Y(l_2) = 0, \end{cases} \quad (18)$$

где  $\nu$  и  $\mu$  - собственные значения, связанные с  $\lambda$  соотношением  $\nu + \mu = \lambda$ .

Для задач (18) наборы собственных значений и соответствующих им собственных функций имеют вид

$$\begin{aligned} \nu_n &= \left( \frac{n\pi}{l_1} \right)^2, & n = 1, 2, \dots; \\ X_n(x) &= \sin \frac{n\pi x}{l_1} \end{aligned} \quad \text{и} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} \mu_m &= \left( \frac{m\pi}{l_2} \right)^2, & m = 1, 2, \dots; \\ Y_m(y) &= \sin \frac{m\pi y}{l_2}. \end{aligned}$$

Но тогда задача на собственные значения (17) имеет в качестве собственных чисел

$$\lambda_{nm} = \left( \frac{n\pi}{l_1} \right)^2 + \left( \frac{m\pi}{l_2} \right)^2, \quad n, m = 1, 2, \dots, \quad (20)$$

каждому из которых соответствует собственная функция

$$v_{nm}(x, y) = \sin \frac{n\pi x}{l_1} \sin \frac{m\pi y}{l_2}. \quad (21)$$

Теперь с учетом (16) находим частные решения уравнения (9), удовлетворяющие граничным условиям (12), (13):

$$u_{nm}(x, y, t) = (A_{nm} \cos \omega_{nm} t + B_{nm} \sin \omega_{nm} t) v_{nm}(x, y), \quad (22)$$

$$\text{где } \omega_{nm} = a \sqrt{\lambda_{nm}} = a \pi \sqrt{\left(\frac{n}{l_1}\right)^2 + \left(\frac{m}{l_2}\right)^2}$$

Окончательно искомое решение краевой задачи (9) -(13) представим в виде суперпозиции частных решений вида (22), т.е. в виде двойного ряда

$$u(x, y, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} (A_{nm} \cos \omega_{nm} t + B_{nm} \sin \omega_{nm} t) \sin \frac{n\pi x}{l_1} \sin \frac{m\pi y}{l_2}. \quad (23)$$

Коэффициенты  $A_{nm}$  и  $B_{nm}$  найдем, выполняя начальные условия (10) и (11):

$$h(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} A_{nm} \sin \frac{n\pi x}{l_1} \sin \frac{m\pi y}{l_2};$$

$$g(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \omega_{nm} B_{nm} \sin \frac{n\pi x}{l_1} \sin \frac{m\pi y}{l_2}.$$

Эти равенства следует рассматривать как разложения функций  $h(x, y)$  и  $g(x, y)$  в двойные тригонометрические ряды Фурье. Поэтому для коэффициентов  $A_{nm}$  и  $B_{nm}$  получаем

$$A_{nm} = \frac{4}{l_1 l_2} \int_0^{l_1} \int_0^{l_2} h(x, y) \sin \frac{n\pi x}{l_1} \sin \frac{m\pi y}{l_2} dx dy;$$

$$B_{nm} = \frac{4}{\omega_{nm} l_1 l_2} \int_0^{l_1} \int_0^{l_2} g(x, y) \sin \frac{n\pi x}{l_1} \sin \frac{m\pi y}{l_2} dx dy. \quad (24)$$

Проведем анализ решения (23), преобразовав его к виду

$$u(x, y, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} u_{nm}(x, y, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \alpha_{nm} \cos(\omega_{nm} t - \delta_{nm}) \sin \frac{n\pi x}{l_1} \sin \frac{m\pi y}{l_2}. \quad (25)$$

Здесь

$$\alpha_{nm} = \sqrt{A_{nm}^2 + B_{nm}^2}, \quad \operatorname{tg} \delta_{nm} = \frac{B_{nm}}{A_{nm}}. \quad (26)$$

Решение (25), (26), описывающее свободные колебания мембраны, представлено как сумма двумерных стоячих волн  $u_{nm}(x, y, t)$  с амплитудами  $\alpha_{nm}$

и собственными частотами  $\omega_{nm}$ . Пространственные профили формы этих стоячих волн определяются собственными функциями  $v_{nm}(x, y)$ . При этом геометрическое место точек на мембране, в которых собственные функции обращаются в нуль, называют узловыми линиями собственных форм колебаний.

Из выражений (24) следует, что при специальной форме начальных возмущений  $h(x, y)$  и  $g(x, y)$ , когда  $A_{nm}$  и  $B_{nm}$  не равны нулю только при  $n = n_1$  и  $m = m_1$ , можно возбудить колебания в мембране в виде отдельной стоячей волны  $\omega_{n_1 m_1}$ .

В общем же случае возбуждается множество таких стоячих волн с разными частотами колебаний. Интерференция этих стоячих волн приводит к сложной картине колебаний мембраны.

### **Колебания круглой мембраны**

Математическая модель свободных колебаний круглой мембраны радиуса  $r_0$  с закрепленным краем имеет вид следующей краевой задачи для определения поперечного смещения  $u(r, \varphi, t)$  мембраны:

$$\frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}, \quad t > 0, \quad (r, \varphi) \in G; \quad (27)$$

$$u(r, \varphi, 0) = h(r, \varphi), \quad \frac{\partial u(r, \varphi, 0)}{\partial t} = g(r, \varphi), \quad (28)$$

$$u(r_0, \varphi, t) = 0, \quad u(r, \varphi, t) = u(r, \varphi + 2\pi, t). \quad (29)$$

Здесь  $G = \{(r, \varphi) : 0 \leq r < r_0, 0 \leq \varphi \leq 2\pi\}$ ;  $h(r, \varphi)$  и  $g(r, \varphi)$  - заданные смещения и скорость различных участков мембраны в начальный момент времени соответственно.

Так как точка  $r = 0$  является особой точкой уравнения (27), то следует потребовать также ограниченности функции  $u$  в этой точке в любой момент времени.

Представляя частное решение уравнения (27) в виде

$$u(r, \varphi, t) = v(r, \varphi)T(t),$$

после разделения переменных получаем уравнение для функции  $T(t)$

$$T''(t) + a^2 \lambda T(t) = 0 \quad (30)$$

и следующую задачу на собственные значения для функции  $v(r, \varphi)$ :

$$\begin{cases} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial v}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2} + \lambda v = 0; \\ v(r_0, \varphi) = 0, & |v(0, \varphi)| < \infty; \\ v(r, \varphi) = v(r, \varphi + 2\pi). \end{cases} \quad (31)$$

Представив  $v(r, \varphi)$  в виде

$$v(r, \varphi) = R(r)\Phi(\varphi),$$

приходим к задаче Штурма – Лиувилля с условием периодичности

$$\begin{cases} \Phi''(\varphi) + v^2 \Phi(\varphi) = 0; \\ \Phi(\varphi) = \Phi(\varphi + 2\pi), \end{cases}$$

которая имеет нетривиальное решение только при  $v^2 = n^2$ , где  $n$  - целое число.

Этим собственным значениям соответствуют собственные функции вида

$$\Phi_n(\varphi) = a_n \cos n\varphi + b_n \sin n\varphi. \quad (32)$$

Для определения функции  $R(r)$  получаем уравнение

$$\frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dR}{dr} + \left( \lambda - \frac{n^2}{r^2} \right) R = 0, \quad (33)$$

которое следует решать с граничными условиями

$$R(r_0) = 0, \quad |R(0)| < \infty \quad (34)$$

Если ввести новую переменную  $x = \sqrt{\lambda} r$ , то для функции  $y(x) = R(x/\sqrt{\lambda})$  получим дифференциальное уравнение Бесселя  $n$ -го порядка

$$y'' + \frac{1}{x} y' + \left( 1 - \frac{n^2}{x^2} \right) y = 0,$$

общее решение которого

$$y(x) = AJ_n(x) + BN_n(x) \quad (35)$$

содержит линейно независимые функции Бесселя  $J_n(x)$  и Неймана  $N_n(x)$   $n$ -го порядка. Так как функция Неймана  $N_n(x)$  неограниченно возрастает по модулю при  $x \rightarrow 0$ , из условия ограниченности в нуле функции  $y$  константу  $B$  в решении (35) следует положить равной нулю.

Теперь, выполняя краевое условие  $y(x_0) = 0$ , где,  $x_0 = \sqrt{\lambda} r_0$  получаем трансцендентное уравнение

$$J_n(\sqrt{\lambda} r_0) = 0$$

для определения собственных значений  $\lambda$  задачи (31).

Если через  $\mu_{nm}$  обозначить  $m$ -й корень уравнения  $J_n(\mu) = 0$ , то

$$\lambda_{nm} = \frac{\mu_{nm}^2}{r_0^2}, \quad n = 0, 1, 2, \dots; \quad m = 1, 2, \dots. \quad (36)$$

Некоторые значения корней  $\mu_{nm}$  уравнения  $J_n(\mu) = 0$ , приведены в таблице.

Значения  $\mu_{nm}$

n	m					
	1	2	3	4	5	6
0	2,405	5,520	8,654	11,794	14,931	18,071
1	3,832	7,016	10,173	13,324	16,471	19,616
2	5,135	8,417	11,620	14,796	17,960	21,117
3	6,380	9,761	13,015	16,223	19,409	22,583

Каждому собственному значению  $\mu_{nm}$  из (36) при  $n > 0$  соответствуют две линейно независимые собственные функции задачи (31):

$$\begin{aligned} \tilde{v}_{nm}(r, \varphi) &= J_n\left(\frac{\mu_{nm} r}{r_0}\right) \cos n\varphi, \quad n = 0, 1, 2, \dots; \\ \tilde{\tilde{v}}(r, \varphi) &= J_n\left(\frac{\mu_{nm} r}{r_0}\right) \sin n\varphi, \quad n = 1, 2, \dots, \end{aligned}$$

для которых справедливы следующие условия ортогональности:



$$\int_0^{2\pi} \int_0^{r_0} \tilde{v}_{nm}(r, \varphi) \tilde{v}_{n'm'}(r, \varphi) r dr d\varphi = \begin{cases} 0 & \text{при } n \neq n' \text{ или } m \neq m'; \\ \|\tilde{v}_{nm}\|^2 & \text{при } n = n' \text{ и } m = m'; \end{cases}$$

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{r_0} \tilde{\tilde{v}}_{nm}(r, \varphi) \tilde{\tilde{v}}_{n'm'}(r, \varphi) r dr d\varphi = \begin{cases} 0 & \text{при } n \neq n' \text{ или } m \neq m'; \\ \|\tilde{\tilde{v}}_{nm}\|^2 & \text{при } n = n' \text{ и } m = m'; \end{cases}$$

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{r_0} \tilde{v}_{nm}(r, \varphi) \tilde{\tilde{v}}_{n'm'}(r, \varphi) r dr d\varphi = 0.$$

Здесь

$$\|\tilde{v}_{nm}\|^2 = \frac{r_0^2}{2} \pi \varepsilon_n [J'_n(\mu_{nm})]^2, \quad \varepsilon_n = \begin{cases} 2, & n = 0; \\ 1, & n > 0; \end{cases}$$

$$\|\tilde{\tilde{v}}_{nm}\|^2 = \frac{r_0^2}{2} \pi [J'_n(\mu_{nm})]^2.$$

Определив спектр собственных значений  $\lambda_{nm}$ , запишем теперь общее решение уравнения (30):

$$T_{nm}(t) = A_{nm} \cos \omega_{nm} t + B_{nm} \sin \omega_{nm} t, \quad (37)$$

где  $\omega_{nm} = a \sqrt{\lambda_{nm}} = \frac{a \mu_{nm}}{r_0}$  - собственные частоты колебаний круглой мембраны с закрепленным краем.

Таким образом, частные решения уравнения (27), удовлетворяющие условиям (29), имеют вид

$$u_{nm}(r, \varphi, t) = \tilde{v}_{nm}(r, \varphi) (A_{nm} \cos \omega_{nm} t + B_{nm} \sin \omega_{nm} t) + \tilde{\tilde{v}}_{nm}(r, \varphi) (C_{nm} \cos \omega_{nm} t + D_{nm} \sin \omega_{nm} t).$$

Взяв суперпозицию таких решений:

$$u(r, \varphi, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} u_{nm}(r, \varphi, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \tilde{v}_{nm}(r, \varphi) (A_{nm} \cos \omega_{nm} t + B_{nm} \sin \omega_{nm} t) + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \tilde{\tilde{v}}_{nm}(r, \varphi) (C_{nm} \cos \omega_{nm} t + D_{nm} \sin \omega_{nm} t) \quad (38)$$

выбором коэффициентов  $A_{nm}$ ,  $B_{nm}$ ,  $C_{nm}$  и  $D_{nm}$  можно удовлетворить начальным условиям (28), которые примут форму равенств

$$h(r, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} (A_{nm} \tilde{v}_{nm}(r, \varphi) + C_{nm} \tilde{\tilde{v}}_{nm}(r, \varphi)) \quad (39)$$

$$g(r, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \omega_{nm} (B_{nm} \tilde{v}_{nm}(r, \varphi) + D_{nm} \tilde{\tilde{v}}_{nm}(r, \varphi)) . \quad (40)$$

Умножив (39) и (40) на  $\tilde{v}_{nm}(r, \varphi)$  и  $\tilde{\tilde{v}}_{nm}(r, \varphi)$  проинтегрировав полученные соотношения по области  $G$ , с учетом условий ортогональности для  $\tilde{v}_{nm}(r, \varphi)$  и  $\tilde{\tilde{v}}_{nm}(r, \varphi)$  получим:

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \int_0^{r_0} h(r, \varphi) \tilde{v}_{nm}(r, \varphi) r dr d\varphi &= A_{nm} \|\tilde{v}_{nm}\|^2; \\ \int_0^{2\pi} \int_0^{r_0} h(r, \varphi) \tilde{\tilde{v}}_{nm}(r, \varphi) r dr d\varphi &= C_{nm} \|\tilde{\tilde{v}}_{nm}\|^2; \\ \int_0^{2\pi} \int_0^{r_0} g(r, \varphi) \tilde{v}_{nm}(r, \varphi) r dr d\varphi &= \omega_{nm} B_{nm} \|\tilde{v}_{nm}\|^2; \\ \int_0^{2\pi} \int_0^{r_0} g(r, \varphi) \tilde{\tilde{v}}_{nm}(r, \varphi) r dr d\varphi &= \omega_{nm} D_{nm} \|\tilde{\tilde{v}}_{nm}\|^2. \end{aligned}$$

Отсюда находим значения коэффициентов

$$\begin{aligned} A_{nm} &= \frac{1}{\|\tilde{v}_{nm}\|^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{r_0} h(r, \varphi) \tilde{v}_{nm}(r, \varphi) r dr d\varphi; \\ C_{nm} &= \frac{1}{\|\tilde{\tilde{v}}_{nm}\|^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{r_0} h(r, \varphi) \tilde{\tilde{v}}_{nm}(r, \varphi) r dr d\varphi; \\ B_{nm} &= \frac{1}{\omega_{nm} \|\tilde{v}_{nm}\|^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{r_0} g(r, \varphi) \tilde{v}_{nm}(r, \varphi) r dr d\varphi; \\ D_{nm} &= \frac{1}{\omega_{nm} \|\tilde{\tilde{v}}_{nm}\|^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{r_0} g(r, \varphi) \tilde{\tilde{v}}_{nm}(r, \varphi) r dr d\varphi. \end{aligned}$$

при которых формула (38) определяет решение  $u(r, \varphi, t)$  задачи (27)-(29) о колебаниях круглой мембраны с закрепленным краем.

#### 6.4 Уравнения эллиптического типа

При исследовании стационарных процессов различной физической природы (колебания, теплопроводности, диффузия и др.) обычно приходят к уравнениям эллиптического типа. Наиболее распространенным уравнением этого типа является уравнение Лапласа

$$\Delta u = 0$$

Функция  $u$  называется гармонической в области  $T$ , если она непрерывна в этой области вместе со своими производными до второго порядка и удовлетворяет уравнению Лапласа.

При изучении свойств гармонических функций были разработаны различные математические методы, оказавшиеся плодотворными и в применении к уравнениям гиперболического и параболического типов.

#### 6.4.1 Задачи, приводящиеся к уравнению Лапласа

##### 1. СТАЦИОНАРНОЕ ТЕПЛОВОЕ ПОЛЕ. ПОСТАНОВКА КРАЕВЫХ ЗАДАЧ.

Рассмотрим стационарное тепловое поле. Температура нестационарного теплового поля удовлетворяет дифференциальному уравнению теплопроводности

$$u_t = a^2 \cdot \Delta u$$

$$a^2 = \frac{k}{c \cdot \rho}$$

Если процесс стационарен, то устанавливается распределение температуры  $u = (x, y, z)$ , не меняющееся с течением времени и, следовательно, удовлетворяющее уравнению Лапласа

$$\Delta u = 0 \tag{1}$$

При наличии источников тепла получаем уравнение

$$\Delta u = -f \tag{2}$$

$$f = \frac{F}{k},$$

где  $F$  - плотность тепловых источников, а  $k$  - коэффициент теплопроводности. Неоднородное уравнение Лапласа (2) часто называют *уравнением Пуассона*.

Рассмотрим некоторый объем  $T$ , ограниченный поверхностью  $\Sigma$ . Задача о стационарном распределении температуры  $u = (x, y, z)$  внутри тела  $T$  формулируется следующим образом:

Найти функцию  $u = (x, y, z)$ , удовлетворяющую внутри  $T$  уравнению

$$\Delta u = -f(x, y, z) \quad (3)$$

и граничному условию, которое может быть взято в одном из следующих видов:

1)  $\Delta u = -f_1$  на  $\Sigma$  (первая краевая задача),

2)  $\frac{\partial u}{\partial n} = f_2$  на  $\Sigma$  (вторая краевая задача),

3)  $\frac{\partial u}{\partial n} + h \cdot (u - f_3) = 0$  на  $\Sigma$  (третья краевая задача),

где  $f_1, f_2, f_3, h$  - заданные функции,  $\frac{\partial u}{\partial n}$  - производная по внешней нормали к поверхности  $\Sigma$ .

Физический смысл этих граничных условий очевиден. Т.к. очевидно, что стационарное распределение температуры может установиться лишь при условии равенства нулю суммарного потока тепла через границу области. Отсюда следует, что функция  $f_2$  должна удовлетворять дополнительному требованию:

$$\iint_{\Sigma} f_2 d\sigma = 0$$

Первую краевую задачу для уравнения Лапласа часто называют задачей Дирихле, а вторую – задачей Неймана.

Если ищется решение в области  $T_0$ , внутренней (внешней) по отношению к поверхности  $\Sigma$ , то соответствующую задачу называют внутренней (или внешней) краевой задачей.

## 2. УРАВНЕНИЕ ЛАПЛАСА В КРИВОЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЕ КООРДИНАТ.

Выведем выражение для оператора Лапласа в ортогональной системе координат. Пусть в пространстве вместо декартовых координат  $x, y, z$  введем криволинейные координаты  $q_1, q_2, q_3$  с помощью соотношений

$$\begin{aligned}q_1 &= f_1(x, y, z) \\q_2 &= f_2(x, y, z) \\q_3 &= f_3(x, y, z)\end{aligned}\tag{4}$$

разрешая которые относительно  $x, y, z$ , можно написать

$$\begin{aligned}x &= \varphi_1(q_1, q_2, q_3) \\y &= \varphi_2(q_1, q_2, q_3) \\z &= \varphi_3(q_1, q_2, q_3)\end{aligned}\tag{5}$$

Полагая  $q_1 = C_1$ ,  $q_2 = C_2$ ,  $q_3 = C_3$ , где  $C_1, C_2, C_3$ , - постоянные, получим три семейства координатных поверхностей:

$$\begin{aligned}f_1(x, y, z) &= C_1 \\f_2(x, y, z) &= C_2 \\f_3(x, y, z) &= C_3\end{aligned}\tag{6}$$

Рассмотрим элемент объема в новых координатах, ограниченный тремя парами координатных поверхностей (рис.1)

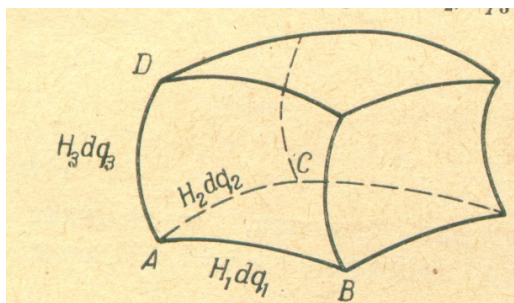


Рис. 1.

Вдоль ребра  $AB$   $q_2 = const$ ,  $q_3 = const$ , вдоль  $AD$   $q_1 = const$ ,  $q_2 = const$ ,  
вдоль  $AC$   $q_1 = const$ ,  $q_3 = const$ . Направляющие косинусы касательной к ребрам  
 $AB$ ,  $AD$ ,  $AC$  пропорциональны соответственно

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial q_1}, \frac{\partial \varphi_2}{\partial q_1}, \frac{\partial \varphi_3}{\partial q_1}$$

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial q_2}, \frac{\partial \varphi_2}{\partial q_2}, \frac{\partial \varphi_3}{\partial q_2}$$

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial q_3}, \frac{\partial \varphi_2}{\partial q_3}, \frac{\partial \varphi_3}{\partial q_3}.$$

Условие ортогональности ребер будет иметь вид

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial \varphi_1}{\partial q_k} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial \varphi_2}{\partial q_k} + \frac{\partial \varphi_3}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial \varphi_3}{\partial q_k} = 0 \quad (i \neq k) \quad (7)$$

Вычислим элемент длины в новых координатах

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = \left( \frac{\partial \varphi_1}{\partial q_1} dq_1 + \frac{\partial \varphi_1}{\partial q_2} dq_2 + \frac{\partial \varphi_1}{\partial q_3} dq_3 \right)^2 + \quad (8)$$

$$+ \left( \frac{\partial \varphi_2}{\partial q_1} dq_1 + \frac{\partial \varphi_2}{\partial q_2} dq_2 + \frac{\partial \varphi_2}{\partial q_3} dq_3 \right)^2 + \left( \frac{\partial \varphi_3}{\partial q_1} dq_1 + \frac{\partial \varphi_3}{\partial q_2} dq_2 + \frac{\partial \varphi_3}{\partial q_3} dq_3 \right)^2$$

Раскрывая скобки и учитывая условия ортогональности (6), получаем:

$$ds^2 = H_1^2 dq_1^2 + H_2^2 dq_2^2 + H_3^2 dq_3^2 \quad (9)$$

где

$$H_1^2 = \left( \frac{\partial \varphi_1}{\partial q_1} \right)^2 + \left( \frac{\partial \varphi_2}{\partial q_1} \right)^2 + \left( \frac{\partial \varphi_3}{\partial q_1} \right)^2$$

$$H_2^2 = \left( \frac{\partial \varphi_1}{\partial q_2} \right)^2 + \left( \frac{\partial \varphi_2}{\partial q_2} \right)^2 + \left( \frac{\partial \varphi_3}{\partial q_2} \right)^2$$

$$H_3^2 = \left( \frac{\partial \varphi_1}{\partial q_3} \right)^2 + \left( \frac{\partial \varphi_2}{\partial q_3} \right)^2 + \left( \frac{\partial \varphi_3}{\partial q_3} \right)^2 \quad (10)$$

Вдоль каждого из ребер элементарного объема меняется только одна координата, поэтому для длины этих ребер согласно формуле (8) будем иметь:

$$\begin{aligned}
ds_1 &= H_1 dq_1 \\
ds_2 &= H_2 dq_2 \\
ds_3 &= H_3 dq_3
\end{aligned} \tag{11}$$

так что элемент объема равен

$$d\vartheta = ds_1 \cdot ds_2 \cdot ds_3 = H_1 \cdot H_2 \cdot H_3 \cdot dq_1 \cdot dq_2 \cdot dq_3 \tag{12}$$

Рассмотрим теперь некоторое векторное поле  $A = (x, y, z)$ . Вычислим  $div A$ , определяемую известной формулой векторного анализа

$$div A = \lim_{\vartheta_M \rightarrow 0} \frac{\iint_S A_n dS}{\vartheta_M}, \tag{13}$$

где  $S$  - поверхность, ограничивающая некоторый объем  $\vartheta_M$ , содержащий рассматриваемую точку  $M$ . Применим эту формулу к элементу объема  $d\vartheta$ , изображенному на (рис.1).

Пользуясь теоремой о среднем, можно представить разность потоков  $A$  через противоположные грани, например через правую и левую грани, в виде

$$Q_1 = A_1 ds_2 ds_3 \Big|_{q_1 + dq_1} - A_1 ds_2 ds_3 \Big|_{q_1}$$

Принимая во внимание формулы (10), получаем:

$$\begin{aligned}
Q_1 &= [H_2 \cdot H_3 \cdot A_1 \Big|_{q_1 + dq_1} - H_2 \cdot H_3 \cdot A_1 \Big|_{q_1}] dq_2 dq_3 = \\
&= \frac{\partial}{\partial q_1} (H_2 \cdot H_3 \cdot A_1) dq_1 \cdot dq_2 \cdot dq_3
\end{aligned} \tag{14}$$

Аналогично вычисляются две другие разности потоков через противоположные грани

$$Q_2 = \frac{\partial}{\partial q_2} (H_3 \cdot H_1 \cdot A_2) dq_1 \cdot dq_2 \cdot dq_3 \tag{15}$$

$$Q_3 = \frac{\partial}{\partial q_3} (H_1 \cdot H_2 \cdot A_3) dq_1 \cdot dq_2 \cdot dq_3 \tag{16}$$

Подставляя в формулу (12) значение  $\iint_S A_n ds = Q_1 + Q_2 + Q_3$  и пользуясь формулой (11), получаем выражение дивергенции в криволинейных ортогональных координатах

$$\begin{aligned} \operatorname{div} A = & \frac{1}{H_1 \cdot H_2 \cdot H_3} \cdot \left[ \frac{\partial}{\partial q_1} (H_2 \cdot H_3 \cdot A_1) + \frac{\partial}{\partial q_2} (H_3 \cdot H_1 \cdot A_2) + \right. \\ & \left. + \frac{\partial}{\partial q_3} (H_1 \cdot H_2 \cdot A_3) \right] \end{aligned} \quad (17)$$

Предположим, что поле  $A$  потенциальное, т.е.

$$A = \operatorname{grad} u \quad (18)$$

Тогда

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{\partial u}{\partial s_1} = \frac{1}{H_1} \cdot \frac{\partial u}{\partial q_1} \\ A_2 &= \frac{\partial u}{\partial s_2} = \frac{1}{H_2} \cdot \frac{\partial u}{\partial q_2} \\ A_3 &= \frac{\partial u}{\partial s_3} = \frac{1}{H_3} \cdot \frac{\partial u}{\partial q_3} \end{aligned} \quad (19)$$

Подставляя в (16) выражение (18) для  $A_1, A_2, A_3$ , получим выражение для оператора Лапласа

$$\begin{aligned} \Delta u = \operatorname{div}(\operatorname{grad} u) &= \frac{1}{H_1 \cdot H_2 \cdot H_3} \cdot \left[ \frac{\partial}{\partial q_1} \left( \frac{H_2 \cdot H_3}{H_1} \cdot \frac{\partial u}{\partial q_1} \right) + \right. \\ & \left. + \frac{\partial}{\partial q_2} \left( \frac{H_3 \cdot H_1}{H_2} \cdot \frac{\partial u}{\partial q_2} \right) + \frac{\partial}{\partial q_3} \left( \frac{H_1 \cdot H_2}{H_3} \cdot \frac{\partial u}{\partial q_3} \right) \right] \end{aligned} \quad (20)$$

Таким образом, уравнение Лапласа  $\Delta u = 0$  в ортогональных криволинейных координатах  $q_1, q_2, q_3$  записывается следующим образом:



$$\Delta u = \frac{1}{H_1 \cdot H_2 \cdot H_3} \cdot \left\{ \frac{\partial}{\partial q_1} \left( \frac{H_2 \cdot H_3}{H_1} \cdot \frac{\partial u}{\partial q_1} \right) + \frac{\partial}{\partial q_2} \left( \frac{H_3 \cdot H_1}{H_2} \cdot \frac{\partial u}{\partial q_2} \right) + \frac{\partial}{\partial q_3} \left( \frac{H_1 \cdot H_2}{H_3} \cdot \frac{\partial u}{\partial q_3} \right) \right\} = 0 \quad (21)$$

Рассмотрим два частных случая.

А) *Сферические координаты*

В этом случае  $q_1 = r$ ,  $q_2 = \theta$ ,  $q_3 = \varphi$  и формулы преобразования (4) принимают вид

$$x = r \cdot \sin(\theta) \cdot \cos(\varphi)$$

$$y = r \cdot \sin(\theta) \cdot \sin(\varphi)$$

$$z = r \cdot \cos(\theta)$$

Вычислим  $ds^2$ :

$$ds^2 = (\sin(\theta) \cdot \cos(\varphi) dr + r \cdot \cos(\theta) \cdot \cos(\varphi) d\theta - r \cdot \sin(\theta) \cdot \sin(\varphi) d\varphi)^2 + (\sin(\theta) \cdot \sin(\varphi) dr + r \cdot \cos(\theta) \cdot \sin(\varphi) d\theta + r \cdot \sin(\theta) \cdot \cos(\varphi) d\varphi)^2 + (\cos(\theta) dr - r \cdot \sin(\theta) d\theta)^2$$

после раскрытия скобок и упрощений находим:

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \cdot \sin^2(\theta) d\varphi^2$$

т.е.

$$H_1 = 1$$

$$H_2 = r$$

$$H_3 = r \cdot \sin(\theta)$$

Подставляя значения  $H_1, H_2, H_3$ , в формулу (20), получим уравнение Лапласа в сферических координатах

$$\frac{1}{r^2 \cdot \sin(\theta)} \cdot \left[ \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \cdot \sin(\theta) \frac{\partial u}{\partial r}) + \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin(\theta) \frac{\partial u}{\partial \theta}) + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \frac{1}{\sin(\theta)} \frac{\partial u}{\partial \varphi} \right) \right] = 0$$

или окончательно

$$\Delta_{r,\theta,\varphi} = \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \cdot \sin(\theta)} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin(\theta) \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \cdot \sin^2(\theta)} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0 \quad (22)$$

Б) *Цилиндрические координаты*

В этом случае  $q_1 = \rho$ ,  $q_2 = \varphi$ ,  $q_3 = z$

$$x = \rho \cdot \cos(\varphi)$$

$$y = \rho \cdot \sin(\varphi)$$

$$z = z$$

так что

$$H_1 = 1$$

$$H_2 = \rho$$

$$H_3 = 1$$

Уравнение Лапласа в цилиндрических координатах принимает вид

$$\Delta_{\rho,\varphi,z} = \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial u}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0 \quad (23)$$

Если искомая функция  $u$  не зависит от  $z$ , то уравнение (22) упрощается:

$$\Delta_{\rho,\varphi} = \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial u}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0 \quad (24)$$

### 3. НЕКОТОРЫЕ ЧАСТНЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ЛАПЛАСА

Большой интерес представляют решения уравнения Лапласа, обладающие сферической или цилиндрической симметрией, т.е. зависящие только от одной переменной  $r$  или  $\rho$ .

Решение уравнения Лапласа  $u = U(r)$ , обладающее сферической симметрией, будет определяться из обыкновенного дифференциального уравнения

$$\frac{d}{dr}\left(r^2 \frac{dU}{dr}\right) = 0$$

Интегрируя это уравнение, находим:

$$U = \frac{C_1}{r} + C_2$$

где  $C_1, C_2$  - произвольные постоянные. Полагая, например,  $C_1 = 1$ ,  $C_2 = 0$ , получаем функцию

$$U_0 = \frac{1}{r} \quad (25)$$

которую часто называют фундаментальным решением уравнения Лапласа в пространстве.

Аналогично, полагая

$$u = U(\rho)$$

и пользуясь уравнениями (22) и (23), найдем решение, обладающее цилиндрической или круговой симметрией (в случае двух независимых переменных), в виде

$$U(\rho) = C_1 \cdot \ln(\rho) + C_2$$

Выбирая  $C_1 = -1$ ,  $C_2 = 0$ , будем иметь:

$$U_0 = \ln\left(\frac{1}{\rho}\right) \quad (26)$$

Функцию  $U_0(\rho)$  часто называют фундаментальным решением уравнения Лапласа на плоскости (для двух независимых переменных).

Функция  $U_0 = \frac{1}{r}$  удовлетворяет уравнению  $\Delta u = 0$  всюду, кроме точки  $r = 0$ , где она обращается в бесконечность. С точностью до множителя пропорциональности она совпадает с полем точечного заряда  $e$  помещенного в начале координат; потенциал этого поля равен

$$u = \frac{e}{r}.$$

Аналогично, функция  $\ln\left(\frac{1}{\rho}\right)$  удовлетворяет уравнению Лапласа всюду, кроме точки  $\rho = 0$ , где она обращается в (положительную) бесконечность, и с точностью до множителя совпадает с полем заряженной линии, потенциал которого равен

$$u = 2 \cdot e_1 \cdot \ln\left(\frac{1}{\rho}\right),$$

где  $e_1$ - плотность заряда, рассчитанная на единицу длины. Эти функции имеют большое значение в теории гармонических функций.

## 5.ГАРМОНИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ И АНАЛИТИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

Весьма общим методом решения двухмерных задач для уравнения Лапласа является метод, использующий функции комплексного переменного.

Пусть

$$\omega = f(z) = u(x, y) + i \cdot \vartheta(x, y)$$

- некоторая функция комплексного переменного  $z = x + i \cdot y$ , причем  $u$  и  $\vartheta$  являются вещественными функциями переменных  $x$  и  $y$ . Наибольший интерес представляют так называемые аналитические функции, для которых существует производная

$$\frac{d\omega}{dz} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta \omega}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z}$$

Приращение  $\Delta z = \Delta x + i \cdot \Delta y$ , очевидно, может стремиться к нулю многими способами. Для каждого из способов стремления  $\Delta z$  к нулю, вообще говоря, может получиться свое значение предела. Однако если функция  $\omega = f(z)$

аналитическая, то предел  $\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta z} = f'(z)$  не зависит от выбора пути.

Необходимыми и достаточными условиями аналитичности функции являются так называемые условия Коши-Римана

$$\begin{aligned} u_x &= v_y \\ u_y &= -v_x \end{aligned} \quad (27)$$

Эти условия можно получить, например, следующим образом.

Пусть  $\omega = u + i \cdot v = f(z)$  - аналитическая функция. Вычисляя производные

$$\omega_x = u_x + i \cdot v_x = \frac{\partial \omega(z)}{\partial z} \cdot z_x = \frac{\partial \omega}{\partial z}$$

$$\omega_y = u_y + i \cdot v_y = \frac{\partial \omega(z)}{\partial z} \cdot z_y = i \cdot \frac{\partial \omega}{\partial z}$$

и требуя равенства значения  $\frac{d\omega}{dz}$ , определяемых из этих соотношений, получаем:

$$u_x + i \cdot v_x = v_y - i \cdot u_y = \frac{d\omega}{dz}$$

откуда и следует условия Коши – Римана. На доказательстве достаточности этих условий мы не будем останавливаться.

В теории функции комплексного переменного доказывается, что функция, аналитическая в некоторой области  $G$  плоскости  $z = x + i \cdot y$ , имеет в этой области производные всех порядков и разлагается в степенной ряд. В частности, для такой функции  $u(x, y)$  и  $v(x, y)$  имеют непрерывные производные второго порядка по  $x$  и  $y$ .

Дифференцируя первое равенство формулы (26) по  $x$ , а второе по  $y$ , получаем:

$$u_{x,x} + u_{y,y} = 0$$

или

$$\Delta_2 u = 0$$

Подобным же образом, меняя порядок дифференцирования, находим:

$$\vartheta_{x,x} + \vartheta_{y,y} = 0$$

или

$$\Delta_2 \vartheta = 0$$

Таким образом, действительная и мнимая части аналитической функции удовлетворяют уравнению Лапласа. Обычно говорят, что  $u$  и  $\vartheta$ , удовлетворяющие условию Коши – Римана, являются сопряженными гармоническими функциями.

Рассмотрим преобразование

$$x = x(u, \vartheta)$$

$$y = y(u, \vartheta)$$

$$u = u(x, y)$$

$$\vartheta = \vartheta(x, y) \tag{28}$$

взаимно однозначно отображающее некоторую область  $G$  плоскости  $(x, y)$ , на область  $G'$  плоскости  $(u, \vartheta)$ , так что каждой точке области  $G$  соответствует определенная точка области  $G'$  и, наоборот, каждой точке области  $G'$  соответствует определенная точка области  $G$ .

Пусть

$$U = U(x, y)$$

- некоторая вещественная дважды непрерывно дифференцируемая функция, определенная внутри области  $G$ .

Выясним, как изменится при этом преобразовании оператора Лапласа функции  $U = U[x(u, \vartheta), y(u, \vartheta)] = \tilde{U}(u, \vartheta)$

Вычислим производные функции

$$U_x = \tilde{U}_u \cdot u_x + \tilde{U}_\vartheta \cdot \vartheta_x$$

$$U_y = \tilde{U}_u \cdot u_y + \tilde{U}_\vartheta \cdot \vartheta_y$$

$$\begin{aligned}
U_{xx} &= \tilde{U}_{uu} \cdot u_x^2 + \tilde{U}_{\vartheta\vartheta} \cdot \vartheta_x^2 + \tilde{U}_{u\vartheta} \cdot u_x \cdot \vartheta_x + \tilde{U}_u \cdot u_{xx} + \tilde{U}_\vartheta \cdot \vartheta_{xx} \\
U_{yy} &= \tilde{U}_{uu} \cdot u_y^2 + \tilde{U}_{\vartheta\vartheta} \cdot \vartheta_y^2 + \tilde{U}_{u\vartheta} \cdot u_y \cdot \vartheta_y + \tilde{U}_u \cdot u_{yy} + \tilde{U}_\vartheta \cdot \vartheta_{yy}
\end{aligned}$$

откуда получаем:

$$\begin{aligned}
U_{xx} + U_{yy} &= \tilde{U}_{uu} (u_x^2 + u_y^2) + \tilde{U}_{\vartheta\vartheta} (\vartheta_x^2 + \vartheta_y^2) + 2 \cdot \tilde{U}_{u\vartheta} (u_x \cdot \vartheta_x + u_y \cdot \vartheta_y) + \\
&+ \tilde{U}_u (u_{xx} + u_{yy}) + \tilde{U}_\vartheta (\vartheta_{xx} + \vartheta_{yy})
\end{aligned} \tag{29}$$

Если  $u$  и  $\vartheta$  являются сопряженными гармоническими функциями, то преобразование (27) эквивалентно преобразованию, осуществляемому аналитической функцией

$$\omega = f(z) = u + i \cdot \vartheta \quad (z = x + i \cdot y) \tag{30}$$

В этом случае в силу условия Коши – Римана (26) для функций  $u$  и  $\vartheta$  должны выполняться соотношения

$$u_x^2 + u_y^2 = u_x^2 + \vartheta_x^2 = \vartheta_y^2 + \vartheta_x^2 = |f'(z)|^2$$

$$u_x \cdot \vartheta_x + u_y \cdot \vartheta_y = 0$$

Формула (28) принимает вид

$$U_{xx} + U_{yy} = (\tilde{U}_{uu} + \tilde{U}_{\vartheta\vartheta}) \cdot |f'(z)|^2 \tag{31}$$

или

$$\Delta_{u\vartheta} \tilde{U} = \frac{1}{|f'(z)|^2} \cdot \Delta_{x,y} U \tag{32}$$

Отсюда следует, что в результате преобразования (29) гармоническая области  $G$  функция  $U(x,y)$  переходит в функцию  $\tilde{U} = U(u,\vartheta)$ , гармоническую в области  $G'$ , если только  $|f'(z)|^2 \neq 0$ .

#### 6.4.2 Общие свойства гармонических функций

Здесь дается интегральное представление гармонической функций, являющееся основным аппаратом для изучения общих свойств гармонических функций. Одним из важнейших следствий интегральной формулы является

принцип максимального значения, многократно используемый нами в дальнейшем при доказательстве теоремы единственности, так и при решении краевых задач. Здесь также дается математическая постановка внутренних и внешних краевых задач для уравнения Лапласа и доказывается единственность и устойчивость решения этих задач.

### 1. ФОРМУЛЫ ГРИНА. ИНТЕГРАЛЬНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ РЕШЕНИЯ.

При изучении уравнений эллиптического типа мы часто будем пользоваться формулами Грина, являющимися прямым следствием формулы Остроградского.

Формула Остроградского в простейшей форме имеет вид

$$\iiint_T \frac{\partial R}{\partial z} dx dy dz = \iint_{\Sigma} R \cdot \cos(\gamma) d\sigma \quad (1)$$

где  $T$  - некоторый объем, ограниченный достаточно гладкой поверхностью  $\Sigma$ ,  $R(x, y, z)$  - произвольная функция, непрерывная внутри  $T + \Sigma$  и имеющая непрерывные производные внутри  $T$ ,  $\gamma$  - угол между направлением оси  $z$  и внешней нормалью к  $\Sigma$ . В справедливости этой формулы нетрудно убедиться, выполняя интегрирование по  $z$ .

Формулу Остроградского обычно записывают в виде

$$\iiint_T \left( \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) d\tau = \iint_{\Sigma} \{ P \cdot \cos(\alpha) + Q \cdot \cos(\beta) + R \cdot \cos(\gamma) \} d\sigma \quad (2)$$

где  $d\tau = dx dy dz$  - элемент объема,  $\alpha = (\hat{n} \cdot x)$ ,  $\beta = (\hat{n} \cdot y)$ ,  $\gamma = (\hat{n} \cdot z)$  - углы внешней нормали  $\hat{n}$  к поверхности  $\Sigma$  с координатными осями,  $P, Q, R$  - произвольные дифференцируемые функции.

Если  $P, Q, R$  рассматривать как компоненты некоторого вектора  $A = P \cdot i + Q \cdot j + R \cdot k$ , то формулу Остроградского (2) можно записать следующим образом:



$$\iiint_T \operatorname{div} A d\tau = \iint_{\Sigma} A_n d\sigma \quad (3)$$

где

$$\operatorname{div} A = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$$

и

$$A_n = P \cdot \cos(\alpha) + Q \cdot \cos(\beta) + R \cdot \cos(\gamma)$$

- составляющая вектора  $A$  вдоль внешней нормали.

Перейдем теперь к выводу формулы Грина.

Пусть  $u = u(x, y, z)$  и  $\vartheta = \vartheta(x, y, z)$  - функции, непрерывные вместе со своими первыми производными внутри  $T + \Sigma$  и имеющие вторые непрерывные производные внутри  $T$ .

Полагая

$$P = u \frac{\partial \vartheta}{\partial x}$$

$$Q = u \frac{\partial \vartheta}{\partial y}$$

$$R = u \frac{\partial \vartheta}{\partial z}$$

и пользуясь формулой Остроградского (3), приходим к так называемой первой формуле Грина

$$\iiint_T u \cdot \Delta \vartheta d\tau = \iint_{\Sigma} u \frac{\partial \vartheta}{\partial n} d\sigma - \iiint_T \left( \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial \vartheta}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial \vartheta}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} \cdot \frac{\partial \vartheta}{\partial z} \right) d\tau \quad (4)$$

где  $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$  - оператор Лапласа,

$$\frac{\partial}{\partial n} = \cos(\alpha) \frac{\partial}{\partial x} + \cos(\beta) \frac{\partial}{\partial y} + \cos(\gamma) \frac{\partial}{\partial z}$$

- производная по направлению внешней нормали.

Если учесть соотношение

$$\text{grad}(u) \cdot \text{grad}(\vartheta) = \nabla u \cdot \nabla \vartheta = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial \vartheta}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial \vartheta}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} \cdot \frac{\partial \vartheta}{\partial z},$$

то формулу Грина можно представить в виде

$$\iiint_T u \cdot \Delta \vartheta d\tau = - \iiint_T \nabla u \cdot \nabla \vartheta d\tau + \iint_{\Sigma} u \cdot \frac{\partial \vartheta}{\partial n} d\sigma \quad (5)$$

Меняя местами функции  $u$  и  $\vartheta$ , будем иметь:

$$\iiint_T \vartheta \cdot \Delta u d\tau = - \iiint_T \nabla \vartheta \cdot \nabla u d\tau + \iint_{\Sigma} \vartheta \cdot \frac{\partial u}{\partial n} d\sigma \quad (6)$$

Вычитая из равенства (5) равенство (6), получаем вторую формулу Грина

$$\iiint_T (u \cdot \Delta \vartheta - \vartheta \cdot \Delta u) d\tau = \iint_{\Sigma} \left( u \cdot \frac{\partial \vartheta}{\partial n} - \vartheta \cdot \frac{\partial u}{\partial n} \right) d\sigma \quad (7)$$

Область  $T$  может быть ограничена несколькими поверхностями. Формулы Грина применимы и в этом случае, причем поверхностные интегралы следует брать по всем поверхностям, ограничивающим область  $T$ .

Для функции  $u = u(x, y, z)$  и  $\vartheta = \vartheta(x, y, z)$  двух переменных имеют место аналогичные формулы Грина. Вторая формула Грина в области  $S$  с границей  $C$  имеет вид

$$\iiint_S (u \cdot \Delta_2 \vartheta - \vartheta \cdot \Delta_2 u) dS = \iint_C \left( u \cdot \frac{\partial \vartheta}{\partial n} - \vartheta \cdot \frac{\partial u}{\partial n} \right) ds$$

где  $dS = dx \cdot dy$ ,  $ds$  - элемент дуги  $C$  вдоль нормали  $n$ .

Функция  $U_0(M) = \frac{1}{R}$ , где  $R = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}$  - расстояние между точками  $M(x, y, z)$  и  $M_0(x_0, y_0, z_0)$ , удовлетворяет уравнению Лапласа при  $M \neq M_0$ .

Пусть  $u(M)$  - гармоническая функция, непрерывная вместе с первыми производными в области  $T + \Sigma$  и имеющая вторые производные в  $T$ .

Рассмотрим функцию  $\vartheta = \frac{1}{R_{MM_0}}$ , где  $M_0$  - некоторая внутренняя точка области  $T$

. Поскольку эта функция имеет внутри  $T$  разрыв непрерывности в точке  $M_0(x_0, y_0, z_0)$ , то непосредственно применить вторую формулу Грина в области

$T$  к функциям  $u$  и  $\vartheta$  нельзя. Однако функция  $\vartheta = \frac{1}{R_{MM_0}}$  ограничена в области

$T - K_\varepsilon$  с границей  $\Sigma + \Sigma_\varepsilon$ , где  $K_\varepsilon$  - шар радиуса  $\varepsilon$  с центром в точке  $M_0$  и поверхностью  $\Sigma_\varepsilon$ . (рис.2)

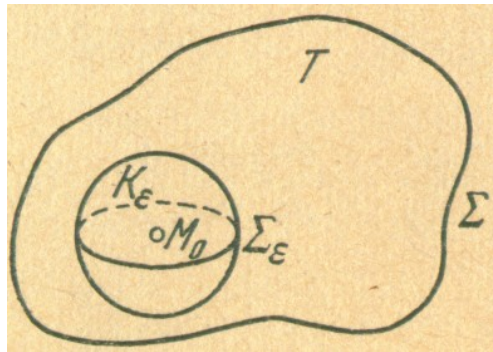


Рис. 2

Применяя вторую формулу Грина (7) к функциям  $u$  и  $\vartheta = \frac{1}{R}$  в области

$T - K_\varepsilon$ , получаем:

$$\begin{aligned} \iiint_{T-K_\varepsilon} (u\Delta \frac{1}{R} - \frac{1}{R}\Delta u)dt &= \iint_{\Sigma} (u \frac{\partial}{\partial n} \cdot (\frac{1}{R}) - \frac{1}{R} \cdot \frac{\partial}{\partial n})d\sigma + \\ &+ \iint_{\Sigma_\varepsilon} u \frac{\partial}{\partial n} \cdot (\frac{1}{R})d\sigma - \iint_{\Sigma_\varepsilon} \frac{1}{R} \cdot \frac{\partial}{\partial n} d\sigma \end{aligned} \quad (8)$$

В правой части этого равенства только последние два интеграла зависят от  $\varepsilon$ .

Вычисляя производную по внешней нормали к области  $T - K_\varepsilon$  на  $\Sigma_\varepsilon$ , найдем,

что

$$\frac{\partial}{\partial n} \cdot (\frac{1}{R}) \Big|_{\Sigma_\varepsilon} = - \frac{\partial}{\partial r} \cdot (\frac{1}{R}) \Big|_{r=\varepsilon} = \frac{1}{\varepsilon^2}$$

откуда

$$\iint_{\Sigma_\varepsilon} u \frac{\partial}{\partial n} \cdot \left(\frac{1}{R}\right) d\sigma = \frac{1}{\varepsilon} \cdot \iint_{\Sigma_\varepsilon} \frac{\partial u}{\partial n} d\sigma = \frac{1}{\varepsilon} \cdot 4 \cdot \pi \cdot \varepsilon^2 \cdot u^* = 4 \cdot \pi \cdot u^* \quad (9)$$

где  $u^*$  - среднее значение функции  $u(M)$  на поверхности  $\Sigma_\varepsilon$ . Преобразуем третий интеграл

$$\iint_{\Sigma_\varepsilon} \frac{1}{R} \cdot \frac{\partial}{\partial n} d\sigma = \frac{1}{\varepsilon} \cdot \iint_{\Sigma_\varepsilon} \frac{\partial u}{\partial n} d\sigma = \frac{1}{\varepsilon} \cdot 4 \cdot \pi \cdot \varepsilon^2 \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)^* = 4 \cdot \pi \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)^* \quad (10)$$

где  $\left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)^*$  - среднее значение нормальной производной  $\frac{\partial u}{\partial n}$  на сфере  $\Sigma_\varepsilon$ .

Подставляя (9) и (10) в формулу (8) и учитывая, что  $\Delta\left(\frac{1}{R}\right) = 0$  в  $T - K_\varepsilon$ , будем иметь:

$$\iiint_{T-K_\varepsilon} \left(-\frac{1}{R}\right) \cdot \Delta u d\tau = \iint_{\Sigma} \left[ u \cdot \frac{\partial}{\partial n} \cdot \left(\frac{1}{R}\right) - \left(\frac{1}{R}\right) \cdot \frac{\partial u}{\partial n} \right] d\sigma + 4 \cdot \pi \cdot u^* - 4 \pi \cdot \varepsilon \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)^* \quad (11)$$

Устремим теперь радиус  $\varepsilon$  к нулю. Тогда получим:

1.  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} u^* = u(M_0)$ , так как  $u(M)$  – непрерывная функция, а  $u^*$  – ее среднее значение по сфере радиуса  $\varepsilon$  с центром в точке  $M_0$
2.  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} 4 \cdot \pi \cdot \varepsilon \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)^* = 0$ , так как из непрерывности первых производных функции  $u(M)$  внутри  $T$  сразу же вытекает ограниченность нормальной производной

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \cos(\alpha) + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \cos(\beta) + \frac{\partial u}{\partial z} \cdot \cos(\gamma)$$

в окрестности точки  $M_0$ ;

3. по определению несобственного интеграла

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \iiint_{T-K_\varepsilon} \left(-\frac{1}{R}\right) \cdot \Delta u d\tau = \iiint_T \left(-\frac{1}{R}\right) \cdot \Delta u \frac{\partial u}{\partial n} d\tau$$

В результате указанного предельного перехода  $\varepsilon \rightarrow 0$  мы приходим к основной формуле Грина:

$$4 \cdot \pi \cdot u(M_0) = - \iint_{\Sigma} \left[ u(P) \cdot \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{1}{R_{M_0 P}} \right) - \frac{1}{R_{M_0 P}} \cdot \frac{\partial u}{\partial n} \right] d\sigma_P - \iiint_T \frac{\Delta u(P)}{R_{M_0 P}} d\tau \quad (12)$$

где  $P = P(\xi, \eta, \zeta)$  - точка с координатами  $\xi, \eta, \zeta$  лежащая на поверхности  $\Sigma$ .

Если точка  $M_0$  находится вне области  $T$ , то  $\vartheta = \frac{1}{R_{MP}}$  непрерывна и гармонична во всех точках области  $T$ . Поэтому слева в формуле (12) получим нуль.

Рассмотрим случай, когда  $M_0$  принадлежит поверхности  $\Sigma$ . Предположим, что  $\Sigma$  имеет в  $M_0$  касательную плоскость с непрерывными угловыми коэффициентами. Сфера  $\Sigma_\varepsilon$  радиуса  $\varepsilon$  с центром  $M_0$  пересекает поверхность  $\Sigma$  и делит ее две части  $\Sigma_1$  и  $\Sigma_2$ , часть  $\Sigma_1$  лежит внутри шара  $K_\varepsilon$ .

Формулу Грина (7) применим к  $u$  и  $\vartheta = \frac{1}{R}$  в области  $T - T_1$ , где  $T_1$  - область, ограниченная  $\Sigma_1$  и частью сферы  $\Sigma_\varepsilon'$ , лежащей внутри  $T$ . Общая схема рассуждений, приведших к (11), остается неизменной. При этом следует лишь учесть, что интеграл по  $\Sigma_1 + \Sigma_\varepsilon'$  стремится к  $2 \cdot \pi \cdot u(M_0)$ , и внести соответствующие изменения в (9), (10). В результате мы приходим к формуле, получающейся из (12) при замене  $4 \cdot \pi$  на  $2 \cdot \pi$ .

Объединяя все случаи, запишем основную формулу Грина в виде

$$\Omega \cdot u(M_0) = \iint_{\Sigma} \left[ \frac{1}{R_{M_0 P}} \cdot \frac{\partial u}{\partial n_p}(P) - u(P) \cdot \frac{\partial}{\partial n_p} \left( \frac{1}{R_{M_0 P}} \right) \right] d\sigma_P - \iiint_T \frac{\Delta u(P)}{R_{M_0 P}} d\tau_P \quad (13)$$

где  $\Omega$  принимает значение:

$\Omega = 4 \cdot \pi$ , если точка  $M_0$  лежит внутри  $T$ ;

$\Omega = 2 \cdot \pi$ , если точка  $M_0$  лежит на границе  $\Sigma$ ;

$\Omega = 0$ , если точка  $M_0$  лежит вне  $T$ .

Отметим, что если точка  $M_0$  является канонической вершиной поверхности  $\Sigma$ , то  $\Omega = \alpha$ , где  $\alpha$  - величина телесного угла, образуемого касательными к  $\Sigma$  в точке  $M_0$ .

Для гармонической функции  $\Delta u = 0$  и формулы (12) и принимает вид

$$u(M_0) = \frac{1}{4 \cdot \pi} \cdot \iint_{\Sigma} \left[ \frac{1}{R_{M_0 P}} \cdot \frac{\partial u}{\partial n_P}(P) - u(P) \cdot \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{1}{R_{M_0 P}} \right) \right] d\sigma_P \quad (14)$$

( $M_0$  - внутри  $T$ ).

Таким образом, значение гармонической функции в любой внутренней точке области выражается через значение этой функции и ее нормальной производной на поверхности области. При этом предполагается непрерывность функции  $u$  и ее первых производных вплоть до границы. Отметим сразу же, что каждый из интегралов

$$\iint_{\Sigma} \mu(P) \cdot \frac{1}{R_{MP}} d\sigma_P$$

и

$$\iint_{\Sigma} \frac{\partial}{\partial n_P} \left( \frac{1}{R_{MP}} \right) \cdot \nu(P) d\sigma_P \quad (15)$$

где  $\mu$  и  $\nu$  - непрерывные функции, являются гармонической функцией вне поверхности  $\Sigma$ . В самом деле, так как подынтегральные функции и все их производные непрерывны вне поверхности  $\Sigma$ , то производные функций (15) любого порядка можно вычислить при помощи дифференцирования под знаком интеграла. Так как, кроме того функции

$$\frac{1}{R_{MP}}$$

и

$$\frac{\partial}{\partial n_P} \left( \frac{1}{R_{MP}} \right) = \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{1}{R} \right) \cdot \cos(\alpha_P) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{1}{R} \right) \cdot \cos(\beta_P) + \frac{\partial}{\partial \zeta} \left( \frac{1}{R} \right) \cdot \cos(\gamma_P)$$

удовлетворяют уравнению Лапласа по переменным  $M(x, y, z)$ , то в силу обобщенного принципа суперпозиции функции (15) также удовлетворяют уравнению Лапласа по переменным  $x, y, z$ .

Отсюда вытекает важное следствие: всякая гармоническая функция внутри области гармоничности дифференцируема бесчисленное множество раз. Отметим также, что гармоническая функция аналитична (разлагается в степенной ряд) во всякой точке  $M_0$  области  $T$ . В этом случае можно убедиться с помощью рассуждений основанных на том же интегральном представлении (14).

Аналогичные формулы имеют место и для гармонических функций двух независимых переменных. Пусть  $S$  - некоторая область на плоскости  $(x, y)$ , ограниченная контуром  $C$ , а  $n$  - направление нормали к этому контуру, внешнее по отношению к области  $S$ .

Полагая во второй формуле Грина  $\vartheta = \ln \frac{1}{R_{M_0P}}$ , где

$R_{M_0P} = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$  - расстояние  $P(x, y)$  от фиксированной точки  $M_0(x_0, y_0)$ , и проводя рассуждения, подобные тем, которые были проведены для трехмерного случая, получим основную формулу Грина на плоскости

$$\Omega \cdot u(M_0) = \int_C \left[ \ln \frac{1}{R_{M_0P}} \cdot \frac{\partial u(P)}{\partial n_p} - u(P) \cdot \frac{\partial}{\partial n_p} \left( \ln \frac{1}{R_{M_0P}} \right) \right] ds_p - \iint_S \Delta u(P) \cdot \ln \frac{1}{R_{M_0P}} ds_p$$

где

$\Omega = 2 \cdot \pi$ , если точка  $M_0$  лежит внутри  $S$ ;

$\Omega = \pi$ , если точка  $M_0$  лежит на границе  $C$ ;

$\Omega = 0$ , если точка  $M_0$  лежит вне  $S$ .

Если  $u(M)$  - гармоническая внутри  $S$  функция и  $M_0$  лежит внутри  $S$ , то

$$u(M_0) = \frac{1}{2 \cdot \pi} \int_C \left[ \ln \frac{1}{R_{M_0 P}} \cdot \frac{\partial u(P)}{\partial n_p} - u(P) \cdot \frac{\partial u}{\partial n_p} \cdot \left( \ln \frac{1}{R_{M_0 P}} \right) \right] ds_P$$

## 2. НЕКОТОРЫЕ ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА ГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

1. если  $\vartheta$  - гармоническая в области  $T$ , ограниченной поверхности  $\Sigma$ , то

$$\iint_S \frac{\partial \vartheta}{\partial n} d\sigma = 0 \quad (16)$$

где  $S$  - любая замкнутая поверхность, целиком лежащая в области  $T$ .

В самом деле, подставляя в первую формулу Грина (4) какую-либо гармоническую функцию  $\vartheta$  ( $\Delta \vartheta = 0$ ) и функцию  $u = 1$ , сразу же получим формулу (16). Из формулы (16) следует, что вторая краевая задача ( $\Delta u = 0$  в  $T$ ,

$\frac{\partial u}{\partial n} = f|_{\Sigma}$ ) может иметь решение только при условии

$$\iint_{\Sigma} f d\sigma = 0$$

Это свойство гармонических функций можно интерпретировать как условие отсутствия источников внутри области  $T$ .

2. Если функция  $u(M)$  гармонична в некоторой области  $T$ , а  $M_0$  - какая -нибудь точка, лежащая внутри области  $T$ , то имеет место формула

$$u(M_0) = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \alpha^2} \cdot \iint_{\Sigma_\alpha} u d\sigma \quad (17)$$

где  $\Sigma_\alpha$  - сфера радиуса  $\alpha$  с центром в точке  $M_0$ , целиком лежащая в области  $T$  (теорема среднего значения).

Эта теорема утверждает, что значение гармонической функции в некоторой точке  $M_0$  равно среднему значению этой функции на любой сфере  $\Sigma_\alpha$  с



центром в  $M_0$ , если сфера  $\Sigma_\alpha$  не выходит из области гармонической функции  $u(M)$ .

Применив формулу (14) к шару  $K_\alpha$  с центром в точке  $M_0$  и поверхностью  $\Sigma_\alpha$ :

$$4 \cdot \pi \cdot u(M_0) = - \iint_{\Sigma_\alpha} \left[ u \cdot \frac{\partial u}{\partial n} \cdot \left(\frac{1}{R}\right) - \frac{1}{R} \cdot \frac{\partial u}{\partial n} \right] d\sigma$$

Принимая во внимание, что

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{\alpha} \text{ на } \Sigma_\alpha$$

и

$$\iint_{\Sigma_\alpha} \frac{\partial u}{\partial n} d\sigma = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial n} \cdot \left(\frac{1}{R}\right) \Big|_{\Sigma_\alpha} = \frac{\partial}{\partial R} \left(\frac{1}{R}\right) \Big|_{R=\alpha} = -\frac{1}{\alpha^2}$$

(направление внешней нормали к  $\Sigma_\alpha$  совпадает с направлением радиуса), сразу же получаем (17).

Записывая (17) в виде

$$4 \cdot \pi \cdot \rho^2 \cdot u(M_0) = - \iint_{\Sigma_\rho} u(P) \cdot d\sigma_\rho$$

и интегрируя по  $\rho$  от 0 до  $a$ , получаем:

$$u(M_0) = \frac{1}{V_a} \cdot \iiint_{K_a} u d\tau_\rho$$

$$V_a = \frac{4 \cdot \pi}{3} \cdot a^3$$

т.е.  $u(M_0)$  есть среднее по объему шара  $K_\alpha$  с границей  $\Sigma_\alpha$ .

Для случая двух независимых переменных имеет место аналогичная теорема о среднем значении:

$$u(M_0) = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot a} \cdot \iint_{C_a} u ds \quad (18)$$

где  $C_a$  - окружность радиуса  $a$  с центром в точке  $M_0$ , лежащая в области гармоничности  $u$ .

3. Если функция  $u(M)$ , определенная и непрерывная в замкнутой области  $T + \Sigma$ , удовлетворяет уравнению  $\Delta u = 0$  внутри  $T$ , то максимальные и минимальные значения функции  $u(M)$  достигаются на поверхности  $\Sigma$  (принцип максимального значения).

Допустим, что функция  $u(M)$  достигает максимального значения в некоторой внутренней точке  $M_0$  области  $T$ , так что  $u_0 = u(M_0) \geq u(M)$ , где  $M$  - любая точка области  $T$ . Окружим точку  $M_0$  сферой  $\Sigma_\rho$  радиуса  $\rho$ , целиком лежащей внутри области  $T$ . Поскольку, по предположению,  $u(M_0)$  есть наибольшее значение функции  $u(M)$  в  $T + \Sigma$ , то  $u|_{\Sigma} \leq u(M_0)$ . Пользуясь формулой среднего значения (17) и заменяя под интегралом всюду  $u(M)$  значения  $u(M_0)$ , получим:

$$u(M_0) = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \rho^2} \cdot \iint_{\Sigma_\rho} u(M) d\sigma_M \leq \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \rho^2} \cdot \iint_{\Sigma_\rho} u(M_0) d\sigma = u(M_0) \quad (19)$$

Если предположить, что хотя бы в одной точке  $M$  сферы  $\Sigma_\rho$   $u(M) < u(M_0)$ , то очевидно, что вместо знака  $\leq$  будем иметь знак  $<$ , что приводит к противоречию. Таким образом, на всей поверхности  $\Sigma_\rho$   $u(M) \equiv u(M_0)$ .

Если  $\rho_0^m$  - минимальное расстояние от  $M_0$  до поверхности  $\Sigma$ , то  $u(M) \equiv u(M_0)$  для всех точек, лежащих внутри  $\Sigma_{\rho_0^m}$ . Отсюда следует, что в точках  $M^*$ , принадлежащих общей части  $\Sigma_{\rho_0^m}$  и  $\Sigma$ , по непрерывности  $u(M^*) \equiv u(M_0)$ . Это доказывает теорему, поскольку мы убедились, что максимальное значение  $u(M_0)$ , достигается в точках границы  $M^*$ .

Нетрудно убедиться, что если область  $T$  связная и максимальное значение достигается хотя бы в одной внутренней точке  $M_0$ , то  $u(M) \equiv u(M_0)$  во всей области. Пусть  $M^{(0)}$  - какая – либо другая точка области  $T$ . Соединим точку  $M^{(0)}$  с точкой  $M_0$ , ломаной линией  $L$ , длину которой обозначим  $l$ . (рис.3)

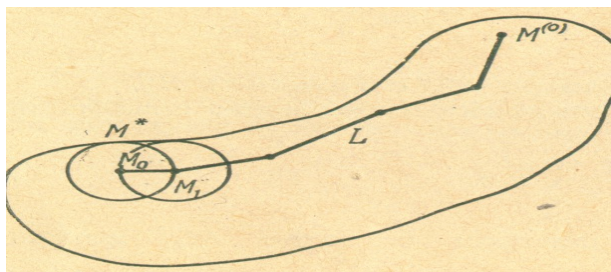


Рис. 3

Пусть  $M_1$  есть последняя точка выхода линии  $L$  из  $\Sigma_{\rho_0^m}$ . В этой точке  $u(M_1) \equiv u(M_0)$ . Опишем из этой точки сферу  $\Sigma_{\rho_0^m}$  радиуса  $\rho_1^m$ , касающуюся  $\Sigma$ , и пусть  $M_2$  - последняя точка выхода  $L$  из  $\Sigma_{\rho_0^m}$ ; в этой точке  $u(M_2) \equiv u(M_0)$ .

Продолжая этот процесс далее, получим, что не более чем через  $P = \frac{l}{\rho^{(m)}}$  шагов, где  $\rho^{(m)}$  - минимальное расстояние  $L$  до  $\Sigma$ , одна из этих сфер захватит точку  $M^{(0)}$ , откуда следует, что  $u(M^{(0)}) \equiv u(M_0)$ . В силу произвольности  $M^{(0)}$  и непрерывности  $u(M)$  в замкнутой области  $T + \Sigma$ , заключаем, что  $u(M) \equiv u(M_0)$  всюду, включая точки границы. Таким образом, из всех гармонических функций только постоянная может достигать своего максимального значения во внутренних точках области.

Аналогичную теорему можно доказать и относительно максимального значения.

Следствие 1

Если функции  $u$  и  $U$  непрерывны в области  $T + \Sigma$ , гармоничны в  $T$  и если

$$u \leq U \text{ на } \Sigma$$

то и

$$u \leq U \text{ всюду в } T.$$

В самом деле функция  $u - U$  непрерывна на  $T + \Sigma$ , гармонична в  $T$  и

$$u - U \geq 0 \text{ на } \Sigma$$

В силу принципа максимального значения

$$u - U \geq 0 \text{ всюду внутри } T$$

откуда и следует наше утверждение.

Следствие 2

Если функции  $u$  и  $U$  непрерывны в области  $T + \Sigma$ , гармоничны в  $T$  и если

$$|u| \leq U \text{ на } \Sigma$$

то

$$|u| \leq U \text{ всюду внутри } T.$$

Из условий теоремы следует, что три гармонические функции  $-U$ ,  $u$  и  $U$  удовлетворяют условиям

$$-U \leq u \leq U \text{ на } \Sigma$$

Применяя дважды следствие 1, получим, что

$$-U \leq u \leq U \text{ всюду внутри } T$$

или

$$|u| \leq U \text{ внутри } T.$$

Следствие 3

Для гармонической в  $T$  и непрерывной в  $T + \Sigma$  функции  $u(M)$  выполняется неравенство  $|u| \leq \max|u|_{\Sigma}$  всюду в  $T + \Sigma$ . Для доказательства положим  $U = \max|u|_{\Sigma}$  и воспользуемся следствием 2.

Хотя изложение проводилось для трех измерений, однако все результаты переносятся на случай гармонических функций любого числа переменных.

#### 4.ЕДИНСТВЕННОСТЬ И УСТОЙЧИВОСТЬ ПЕРВОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ

Пусть дана область  $T$ , ограниченная замкнутой поверхностью  $\Sigma$ , на которой задана некоторая функция  $f$ . В простейшем случае, когда граничная функция  $f$  непрерывна, первая внутренняя краевая задача (внутренняя задача Дирихле) для уравнения Лапласа обычно ставится следующим образом.

Требуется найти такую функцию  $u$ , которая:

А) определена и непрерывна в замкнутой области  $T + \Sigma$ , включая границу;

Б)удовлетворяет внутри области  $T$  уравнению  $\Delta u = 0$ ;

В)принимает на границы  $\Sigma$  заданные значения  $f$ .

В условии А предполагается гармоничность функции внутри области  $T$ . Требование гармоничности на границе является излишним, так как оно повлекло бы за собой дополнительные ограничения для граничных значений.

Условие непрерывности  $u$  в замкнутой области (или какое-либо другое условие, разъясняющее смысл того, что функция  $u$  принимает на границе заданные значения) необходимо для единственности. Если отказаться от этого условия, то любую функцию, равную постоянной  $C$  внутри  $T$  и заданной функции  $f$  на  $\Sigma$ , можно рассматривать как решение задачи, поскольку она удовлетворяет условиям Б, В.

Докажем теорему единственности:

**Теорема**

Первая внутренняя краевая задача для уравнения Лапласа не может иметь двух различных решений.

*Доказательство*

Допустим, что существуют две различные функции,  $u_1$  и  $u_2$ , являющиеся решением задачи, т.е. функции, непрерывные в замкнутой области  $T + \Sigma$ , удовлетворяющие внутри области уравнению Лапласа и на поверхности  $\Sigma$  принимающие одно и то же значение  $f$ . Разность этих функций  $u = u_1 - u_2$  обладает следующими свойствами:

- 1)  $\Delta u = 0$  внутри области  $T$ ;
- 2)  $u$  непрерывна в замкнутой области  $T + \Sigma$ ;
- 3)  $u|_{\Sigma} = 0$

Функция  $u(M)$ , таким образом, непрерывна и гармонична в области  $T$  и равна нулю на границе. Как известно, всякая непрерывная функция в замкнутой области достигает своего максимального значения. Убедимся в том, что

$$u \equiv 0$$

Перейдем к доказательству непрерывной зависимости решения первой краевой задачи от граничных данных. Напомним, что задача называется физически определенной, если малому изменению условий, определяющих решение задачи, в данном случае граничных условий, соответствует малое изменение самого решения.

Пусть  $u_1$  и  $u_2$  - непрерывные в  $T + \Sigma$  и гармонические внутри  $T$  функции, для которых  $|u_1 - u_2| \leq \varepsilon$  на  $\Sigma$ . Тогда это же неравенство выполняется всюду внутри  $T$ .

Таким образом, мы доказали непрерывную зависимость решения от граничных условий и единственность первой внутренней задачи.

## 5. ВНЕШНИЕ КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ. ЕДИНСТВЕННОСТЬ РЕШЕНИЯ ДЛЯ ДВУХ- И ТРЕХМЕРНЫХ ЗАДАЧ.

Внешние краевые задачи по-разному ставятся для трех и двух независимых переменных.

Рассмотрим сначала случай трех переменных. Пусть  $T$  - область, внешняя к некоторой замкнутой поверхности  $\Sigma$ .

Первая внешняя краевая задача (внешняя задача Дирихле) состоит в следующем: требуется найти функцию  $u(x, y, z)$ , удовлетворяющую условиям:

- 1)  $\Delta u = 0$  в неограниченной области  $T$ ;
- 2)  $u$  всюду непрерывна, включая  $\Sigma$ ;
- 3)  $u|_{\Sigma} = f(x, y, z)$ , где  $f$  - функция, заданная на поверхности  $\Sigma$ ;
- 4)  $u(M)$  равномерно стремится к 0 на бесконечности:  $u(M) \rightarrow 0$  при  $M \rightarrow \infty$ .

Последнее условие является существенным для единственности решения, в чем легко убедиться на простом примере. Пусть требуется решить внешнюю первую краевую задачу для сферы  $S_R$  радиуса  $R$  с постоянным граничным условием

$$u|_{S_R} = \text{const} = f_0$$

Опуская условие 4), видим, что решениями задачи могут служить функции

$$u_1 = f_0 \text{ и } u_2 = f_0 \cdot \frac{R}{r}, \text{ а также любая функция}$$

$$u = \alpha \cdot u_1 + \beta \cdot u_2$$

где

$$\alpha + \beta = 1.$$

Докажем, что внешняя краевая задача для гармонических функций с тремя независимыми переменными имеет единственное решение. Предполагая

существование двух решений  $u_1$  и  $u_2$ , удовлетворяющих условиям 1-4, видим, что их разность  $u = u_1 - u_2$  представляет собой решение задачи с нулевыми граничными условиями. Поскольку 4 выполнено также для функции  $u$ , то для произвольного  $\varepsilon > 0$  можно указать такое  $R^*$ , что

$$|u(M)| < \varepsilon$$

при

$$r \geq R^*$$

Если точка  $\bar{M}$  лежит внутри области  $T'$  (рис. 4), заключенной между поверхностью  $\Sigma$  и сферой  $S_r (r \geq R^*)$ , то  $u(\bar{M}) < \varepsilon$ .

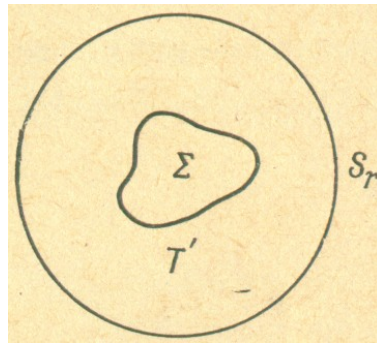


Рис. 4

В силу произвольности  $\varepsilon$  заключаем, что  $u \equiv 0$  в области  $T'$ , а также и во всей области  $T$ , что и доказывает единственность решения первой внешней краевой задачи в пространстве.

Первая внешняя задача на плоскости ставится следующим образом: требуется найти функцию  $u$ , удовлетворяющую условиям:

- 1)  $\Delta u = 0$  в рассматриваемой бесконечной области  $\Sigma$ , ограниченная контуром  $C$ ;
- 2) функция  $u$  всюду непрерывна, включая  $C$ ;
- 3)  $u|_C = f(x, y)$ , где  $f$  - функция, заданная на  $C$ ;
- 4)  $u(M)$  ограничена в бесконечности т.е. существует такое число  $N$ , что

$$|u(M)| \leq N.$$



Требование обращения решения в ноль на бесконечности и здесь оказывается достаточным, чтобы доказать, что двух разных решения быть не может, но оно является слишком сильным, так как при нем задача может оказаться вообще неразрешимой.

Докажем, что внешняя краевая задача для функций двух переменных имеет единственное решение.

Допуская существование двух различных решений  $u_1$  и  $u_2$ , рассматривая их разность  $u = u_1 - u_2$ , являющуюся решением первой краевой задачи с нулевыми граничными условиями, будем в силу 4) иметь

$$|u| \leq N = N_1 + N_2$$

где  $N_1$  и  $N_2$  таковы, что  $|u_1| \leq N_1$ ,  $|u_2| \leq N_2$ . Обозначим через  $\Sigma_1$  область, лежащую внутри  $C$  и являющуюся дополнением к области  $\Sigma$ , так что  $\Sigma + \Sigma_1$  есть вся плоскость. Возьмем точку  $M_0$  внутри  $\Sigma_1$  и окружность радиуса  $R$  с центром в точке  $M_0$ , лежащую внутри  $\Sigma_1$  (рис. 5).

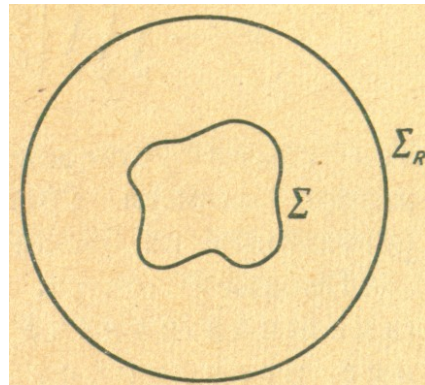


Рис. 5

Гармоническая функция

$$\ln \frac{1}{R_{MM_0}}$$

не имеет особенностей в области  $\Sigma$ ; функция

$$\ln \frac{R_{MM_0}}{R}$$

положительна во всей области  $\Sigma$ , включая  $C$ . Пусть  $C_{R_1}$  - окружность радиуса  $R_1$  с центром в  $M_0$ , содержащая целиком контур  $C$ , и  $\Sigma'$  - область, ограниченная кривыми  $C$  и  $C_{R_1}$ . Функция  $u_{R_1}$ , определяемая равенством

$$u_{R_1} = N \frac{\ln \frac{R_{MM_0}}{R}}{\ln \frac{R_1}{R}} \quad (20)$$

есть гармоническая функция, равная  $N$  на окружность радиуса  $R_1$ , положительная на  $C$ ; из принципа максимального значения следует, что  $u_{R_1}$  является мажорантой для модуля функции  $u(M)$  в области  $\Sigma$ ;

$$|u(M)| \leq u_{R_1}(M)$$

Фиксируем точку  $M$  и будем неограниченно увеличивать  $R_1$ . Очевидно, что  $u_{R_1}(M) \rightarrow 0$  при  $R_1 \rightarrow \infty$ . Отсюда следует, что

$$u(M) = 0$$

Тем самым, в силу произвольности  $M$ , единственность решения поставленной задачи доказана. Единственность решения этой задачи можно также доказать, пользуясь преобразованием обратных радиусов – векторов, переводящим область, внешнюю к контуру  $C$ , в область, внешнюю к контуру  $C'$ , в который переходит контур  $C$ .

При этом бесконечно удаленная точка перейдет в изолированную особую точку, в окрестности которой функция  $\vartheta$  ограничена. Из теоремы будет вытекать гармоничность функции  $\vartheta$  в начале координат, а тем самым и единственность решения.

Из приведенных рассуждений следует, что гармоническая функция двух переменных  $u(M)$ , ограниченная в бесконечности, стремится к определенному пределу при  $M$ , стремящейся к бесконечности.

Различие в постановке первой краевой внешней задачи для двух и трех переменных можно пояснить на следующем физическом примере. Пусть дан шар радиуса  $R$ , на поверхности которого поддерживается постоянная температура  $u_0$ , и требуется определить стационарное распределение температуры во внешнем пространстве. Функция  $u = u_0 \frac{R}{r}$  представляет решение этой краевой задачи, обращающееся в нуль на бесконечности.

Рассмотрим теперь двухмерную задачу, и пусть на границе окружности радиуса  $R$  задано постоянное граничное значение

$$u|_{\Sigma} = \text{const} = f_0$$

В этом случае  $u = f_0$  есть единственное ограниченное решение задачи и никакого решения, обращающегося в нуль на бесконечности, не существует. Мы уже встречались с существенно различным характером поведения гармонических функций в бесконечности для двух и трех независимых переменных (например, поведение  $\frac{1}{r}$  и  $\ln \frac{1}{r}$  на бесконечности).

Для пространственной и плоской неограниченных областей имеет место принцип максимального значения. В этом нетрудно убедиться с помощью рассуждений, аналогичных тем, которые были использованы при доказательстве теорем единственности. Отсюда, в свою очередь, вытекает непрерывная зависимость решения от граничных условий.

## 6.ВТОРАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА. ТЕОРЕМА ЕДИНСТВЕННОСТИ.

Решением второй краевой задачи будем называть функцию  $u$ , непрерывную в области  $T + \Sigma$  и удовлетворяющую на поверхности  $\Sigma$  условию

$$\frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{\Sigma} = f(M)$$

Докажем, что решение второй внутренней краевой задачи (внутренней задачи Неймана) определяется с точностью до произвольной постоянной.

Доказательство проведем при дополнительном предположении, что функция  $u$  имеет непрерывные первые производные в области  $T + \Sigma$ .

Пусть  $u_1$  и  $u_2$  - две непрерывно дифференцируемые в  $T + \Sigma$  функции, удовлетворяющие уравнению  $\Delta u = 0$  в  $T$  и условию  $\left. \frac{\partial u}{\partial n} \right|_{\Sigma} = f(M)$  на  $\Sigma$ . Для

функции  $u = u_1 - u_2$  будем иметь:

$$\left. \frac{\partial u}{\partial n} \right|_{\Sigma} = 0$$

Полагая в первой формуле Грина  $\vartheta = u$  и учитывая соотношения  $\Delta u = 0$  и

$\left. \frac{\partial u}{\partial n} \right|_{\Sigma} = 0$ , получаем:

$$\iiint_T \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 \right] d\tau = 0$$

Отсюда в силу непрерывности функции  $u$  и ее первых производных следует:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial z} \equiv 0$$

т.е.

$$u \equiv \text{const}$$

что и требовалось доказать.

Изложенный здесь метод доказательства применим и в случае неограниченной области для функции, удовлетворяющих требованиям регулярности на бесконечности.

Покажем, что в случае неограниченной области, внешней к замкнутой поверхности, формула Грина применима для функций, регулярных на бесконечности.

Рассмотрим область  $T$ , внешнюю к замкнутой поверхности. Проведем сферу  $\Sigma_R$  столь большого радиуса, чтобы  $\Sigma$  лежала внутри  $\Sigma_R$ . Обозначим  $T_R$  формулу Грина к двум функциям,  $u$  и  $v$ , регулярным в бесконечности, получим:

$$\begin{aligned} \iint_{T_R} u \Delta v \, d\tau &= - \iiint_{T_R} \left[ \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} \cdot \frac{\partial v}{\partial z} \right] d\tau + \\ &+ \iint_{\Sigma} u \cdot \frac{\partial v}{\partial n} \, d\sigma + \iint_{\Sigma_R} u \cdot \frac{\partial v}{\partial n} \, d\sigma \end{aligned} \quad (21)$$

Оценим интеграл по  $\Sigma_R$ , используя при этом свойство регулярности функции  $u$  и  $v$ :

$$\begin{aligned} \left| \iint_{\Sigma_R} u \cdot \frac{\partial v}{\partial n} \, d\sigma \right| &= \left| \iint_{\Sigma_R} u \cdot (v_x \cdot \cos(\alpha) + v_y \cdot \cos(\beta) + v_z \cdot \cos(\gamma)) \, d\sigma \right| \\ &\leq \left| \iint_{\Sigma_R} \frac{A}{R} \cdot \frac{3 \cdot A}{R^2} \, d\sigma \right| \leq \frac{3 \cdot A^2}{R^3} \cdot 4 \cdot \pi \cdot R^2 = \frac{12 \cdot \pi \cdot A^2}{R} \end{aligned}$$

Отсюда видно, что

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \iint_{\Sigma_R} u \cdot \frac{\partial v}{\partial n} \, d\sigma = 0$$

Стоящий справа в (21) интеграл по  $T_R$  стремится к интегралу по всей области  $T$  при  $R \rightarrow \infty$ . Этот интеграл существует, так как подинтегральное выражение

в силу регулярности  $u$  и  $v$  исчезает на бесконечности как  $\frac{1}{R^4}$ . Следовательно,

существует предел

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \iint_{T_R} u \cdot \Delta v \, d\tau = \iint_T u \cdot \Delta v \, d\tau$$

В результате мы приходим к формуле

$$\iint_T u \Delta \vartheta \, dr = - \iiint_T \left[ \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial \vartheta}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial \vartheta}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} \cdot \frac{\partial \vartheta}{\partial z} \right] d\tau +$$

$$+ \iint_\Sigma u \cdot \frac{\partial \vartheta}{\partial n} d\sigma \quad (22)$$

Тем самым установлена применимость первой, а следовательно, и второй формул Грина для неограниченных областей к функциям, регулярным на бесконечности.

Покажем теперь, что вторая внешняя краевая задача (внешняя задача Неймана) имеет единственное решение, регулярное на бесконечности.

Полагая в формуле (22)  $\vartheta = u = u_1 - u_2$  и учитывая что,  $\Delta u = 0$  и  $\frac{\partial u}{\partial n} \Big|_\Sigma = 0$ ,

получим:

$$\iiint_T (u_x^2 + u_y^2 + u_z^2) d\tau = 0$$

Отсюда в силу непрерывности производных функции  $u$  следует, что

$$u_x = 0$$

$$u_y = 0$$

$$u_z = 0$$

$$u \equiv \text{const}$$

Так как  $u = 0$  на бесконечности, то

$$u \equiv 0$$

т.е.

$$u_1 \equiv u_2$$

что и требовалось доказать.

Пусть  $u_1$  и  $u_2$  - различные решения первой краевой задачи (внутренней).

Применим формулу (4) к функциям  $u = u_1 - u_2$  и  $\vartheta = u$  в области  $T$ , ограниченной поверхностью  $\Sigma$  :

$$\iiint_T u \Delta \vartheta \, dr = - \iiint_T [u_x^2 + u_y^2 + u_z^2] d\tau + \iint_\Sigma u \cdot \frac{\partial \vartheta}{\partial n} d\sigma$$

Отсюда, принимая во внимание условия  $\Delta u = 0$  и  $\left. \frac{\partial u}{\partial n} \right|_\Sigma = 0$ ,

получаем

$$\iiint_T (u_x^2 + u_y^2 + u_z^2) d\tau = 0$$

и следовательно,

$$u_x = u_y = u_z = 0$$

и

$$u = const$$

На поверхности  $\Sigma$  функция  $u$  равна нулю, поэтому мы можем утверждать, что

$$u \equiv 0$$

и

$$u_1 \equiv u_2$$

Однако это доказательство некорректно, поскольку в процессе доказательства мы предполагали существование производных искомой функции на поверхности  $\Sigma$ , что самой постановкой задачи не предусматривается. Доказательство единственности, основанное на принципе максимального значения, свободно от этого недостатка.

### **6.4.3 Решение краевых задач для простейших областей методом разделения переменных**

Решение краевых задач для уравнения Лапласа может быть найдено методом разделения переменных в случае некоторых простейших областей (круг, прямоугольник, шар и цилиндр и др.). Получающийся при этом задачи на собственные значения (задачи Штурма-Лиувилля) приводят к различным классам специальных функций. В этом параграфе мы рассмотрим задачи

Дирихле (внутреннюю и внешнюю), при решении которых используются только тригонометрические функции. Позже, при изучении специальных функций, будут рассмотрены задачи Дирихле для сферы и цилиндра.

### 1. ПЕРВАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ КРУГА.

Решим первую краевую задачу для круга: найти функцию  $u$ , удовлетворяющую уравнению:

$$\Delta u = 0 \quad (1)$$

внутри круга и граничному условию

$$u = f \quad (2)$$

на границе круга, где  $f$  - заданная функция.

Мы предположим сначала, что функция  $f$  непрерывна и дифференцируема и решение  $u(M)$  непрерывно в замкнутой области; в дальнейшем мы освободимся от условия дифференцируемости и даже непрерывности функции  $f$ . Наряду с внутренней краевой задачей мы будем рассматривать также внешнюю краевую задачу.

Введем полярную систему координат  $(\rho, \varphi)$  с началом в центре круга. Уравнение (1) в полярных координатах имеет вид

$$\Delta u = \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial}{\partial \rho} \cdot \left( \rho \cdot \frac{\partial u}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0 \quad (3)$$

Будем решать задачу методом разделения переменных, т.е. будем искать частное решение уравнение (1) вида

$$\varphi(\rho, \varphi) = R(\rho) \cdot \Phi(\varphi) \neq 0$$

Подставляя предполагаемую форму решения (3), получим

$$\frac{\frac{d}{d\rho} \cdot \left( \rho \frac{dR}{d\rho} \right)}{\frac{R}{\rho}} = - \frac{\Phi''}{\Phi} = \lambda$$



где  $\lambda = const$ . Отсюда получаем два уравнения:

$$\begin{aligned}\Phi'' + \lambda \cdot \Phi &= 0 \\ \Phi &\neq 0\end{aligned}\tag{4}$$

$$\begin{aligned}\rho \cdot \frac{d}{d\rho} \cdot \left( \rho \cdot \frac{dR}{d\rho} \right) - \lambda \cdot R &= 0 \\ R &\neq 0\end{aligned}\tag{5}$$

Первое из этих уравнений дает:

$$\Phi(\varphi) = A \cdot \cos(\sqrt{\lambda} \cdot \varphi) + B \cdot \sin(\sqrt{\lambda} \cdot \varphi)$$

Заметим, что при изменении угла  $\varphi$  на величину  $2 \cdot \pi$  однозначная функция  $\varphi(\rho, \varphi)$  должна вернуться к исходному значению

$$\varphi(\rho, \varphi + 2 \cdot \pi) = u(\rho, \varphi)$$

(условие периодичности). Отсюда следует, что

$$\Phi(\varphi + 2 \cdot \pi) = \Phi(\varphi)$$

т.е.  $\Phi(\varphi)$  является периодической функцией угла  $\varphi$  с периодом  $2 \cdot \pi$ . Это возможно только, если  $\sqrt{\lambda} = n$ , где  $n$  - целое число, и

$$\Phi_n(\varphi) = A_n \cdot \cos(n \cdot \varphi) + B_n \cdot \sin(n \cdot \varphi)$$

Функцию  $R(\rho)$  будем искать в виде

$$R(\rho) = \rho^\mu$$

Подставляя в уравнение (5) и сокращая на  $\rho^\mu$ , найдем:

$$n^2 = \mu^2$$

или

$$\mu = \pm n \quad (n > 0)$$

Следовательно,

$$R(\rho) = C \cdot \rho^n + D \cdot \rho^{-n}$$

где  $C$  и  $D$  - постоянные.

Для решения внутренней задачи надо положить  $R(\rho) = C \cdot \rho^n$  ( $\mu = n$ ), так как, если  $D \neq 0$ , то функция  $u = R(\rho) \cdot \Phi(\varphi)$  обращается в бесконечности при  $\rho = 0$  и не является гармонической функцией внутри круга. Для решения внешней задачи, наоборот, надо брать  $R(\rho) = D \cdot \rho^{-n}$  ( $\mu = -n$ ), так как решение внешней задачи должно быть ограничено в бесконечности.

Итак, частные решения нашей задачи найдены

$$u_n(\rho, \varphi) = \rho^n \cdot (A_n \cdot \cos(n \cdot \varphi) + B_n \cdot \sin(n \cdot \varphi))$$

для  $\rho \leq a$

$$u_n(\rho, \varphi) = \frac{1}{\rho^n} \cdot (A_n \cdot \cos(n \cdot \varphi) + B_n \cdot \sin(n \cdot \varphi))$$

для  $\rho \geq a$

Суммы этих решений

$$u(\rho, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \rho^n \cdot (A_n \cdot \cos(n \cdot \varphi) + B_n \cdot \sin(n \cdot \varphi))$$

для внешней задачи,

$$u(\rho, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\rho^n} \cdot (A_n \cdot \cos(n \cdot \varphi) + B_n \cdot \sin(n \cdot \varphi))$$

для внутренней задачи при достаточно хорошей сходимости также будут гармоническими функциями.

Для определения коэффициентов  $A_n$  и  $B_n$  и используем гармоническое условие

$$u(a, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n \cdot (A_n \cdot \cos(n \cdot \varphi) + B_n \cdot \sin(n \cdot \varphi)) = f \quad (6)$$

Считая, что  $f$  задана как функция угла  $\varphi$ , возьмем ее разложение в ряд Фурье

$$f(\varphi) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_n \cdot \cos(n \cdot \varphi) + \beta_n \cdot \sin(n \cdot \varphi)) \quad (7)$$

где

$$\alpha_0 = \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} f(\varphi) d\varphi$$

$$\alpha_n = \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} f(\varphi) \cdot \cos(n \cdot \varphi) d\varphi$$

( $n = 1, 2, 3, \dots$ )

$$\beta_n = \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} f(\varphi) \cdot \sin(n \cdot \varphi) d\varphi$$

( $n = 1, 2, 3, \dots$ )

Сравнивая ряды (6) и (7), получаем:

$$A_0 = \frac{\alpha_0}{2}$$

$$A_n = \frac{\alpha_n}{a_n}$$

$$B_n = \frac{\beta_n}{a_n}$$

для внутренней задачи,

$$A_0 = \frac{\alpha_0}{2}$$

$$A_n = \alpha_n \cdot a_n$$

$$B_n = \beta_n \cdot a_n$$

для внешней задачи.

Таким образом, мы получили формальное решение первой внутренней задачи для круга в виде ряда

$$u(\rho, \varphi) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\rho}{a}\right)^n \cdot (\alpha_n \cdot \cos(n \cdot \varphi) + \beta_n \cdot \sin(n \cdot \varphi)) \quad (8)$$

а решение внешней задачи в виде

$$u(\rho, \varphi) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a}{\rho}\right)^n \cdot (\alpha_n \cdot \cos(n \cdot \varphi) + \beta_n \cdot \sin(n \cdot \varphi)) \quad (9)$$

Чтобы убедиться в том, что полученные функции действительно являются искомыми решениями, нужно убедиться в применимости принципа суперпозиции, для чего надо доказать сходимость рядов, возможность их почленного дифференцирования, а также доказать непрерывность этих функций на границе круга. Оба ряда можно представить одной формулой

$$u(\rho, \varphi) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} t^n \cdot (\alpha_n \cdot \cos(n \cdot \varphi) + \beta_n \cdot \sin(n \cdot \varphi)),$$

где

$$t = \frac{\rho}{a} \leq 1 \text{ при } \rho \leq a \text{ (внутренняя задача)}$$

$$t = \frac{a}{\rho} \leq 1 \text{ при } \rho \geq a \text{ (внешняя задача)}$$

$\alpha_n, \beta_n$  - коэффициенты Фурье функции  $f(\varphi)$ .

Докажем, что ряды (8), (9) можно дифференцировать при  $t < 1$  любое число раз. Пусть

$$u_m = t^n \cdot (\alpha_n \cdot \cos(n \cdot \varphi) + \beta_n \cdot \sin(n \cdot \varphi))$$

Вычислим  $k$ -ю производную функции  $u_n$  по  $\varphi$

$$\frac{\partial^k u_n}{\partial \varphi^k} = t^n \cdot n^k \cdot [\alpha_n \cdot \cos(n \cdot \varphi + k \cdot \frac{\pi}{2}) + \beta_n \cdot \sin(n \cdot \varphi + k \cdot \frac{\pi}{2})]$$

Отсюда получаем оценку

$$\left| \frac{\partial^k u_n}{\partial \varphi^k} \right| \leq t^n \cdot n^k \cdot 2 \cdot M$$

где через  $M$  обозначен максимум модуля коэффициентов Фурье  $\alpha_n, \beta_n$

$$\begin{aligned} |\alpha_n| &< M \\ |\beta_n| &< M \end{aligned} \tag{10}$$

Фиксируем некоторое значение  $\rho_0 < a$  (для внутренней задачи) или  $\rho_1 = \frac{a^2}{\rho_0} > a$

(для внутренней задачи), при этом  $t_0 = \frac{\rho_0}{a} < 1$ . Рассматривая ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} t^n \cdot n^k (|\alpha_n| + |\beta_n|) \leq 2 \cdot M \sum_{n=1}^{\infty} t_0^n \cdot n^k \quad (t \leq t_0)$$

видим, что он сходится равномерно при  $t \leq t_0 < 1$  при любом  $k$ . Поэтому ряды (8) и (9) можно дифференцировать по  $\varphi$  в любой точке внутри (вне) круга радиуса  $\rho_0 < a$  ( $\rho_1 > a$ ) сколько угодно раз.

В силу произвольности  $\rho_0$  заключаем, что ряды (8) и (9) получено дифференцируемы во всякой внутренней (внешней) точке круга. Из принципа суперпозиции. Таким образом доказано, что функции (8) и (9) удовлетворяют уравнению  $\Delta u = 0$ .

При этом доказательстве мы пользовались только тем свойством функции  $f(\varphi)$ , что ее коэффициенты Фурье ограничены (формула (10)). Это имеет место для любой ограниченной функции (и даже для любой абсолютно интегрируемой функции). Таким образом, ряды (8) и (9), соответствующие любой ограниченной функции, определяют функции, удовлетворяющие уравнению

$$\Delta u = 0$$

для  $t < 1$ . Этим замечанием мы воспользуемся позже при обобщении результатов, полученных в настоящем пункте.

Обратимся теперь к доказательству непрерывности функции в замкнутой области ( $t \leq 1$ ). Очевидно, что более детальных сведений относительно свойств функции  $f(\varphi)$  следует ее разложимость в ряд Фурье, а также ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} (|\alpha_n| + |\beta_n|) < \infty \quad (11)$$

С другой стороны, имеем:

$$|t^n \cdot \alpha_n \cdot \cos(n \cdot \varphi)| \leq |\alpha_n|$$

$$|t^n \cdot \beta_n \cdot \sin(n \cdot \varphi)| \leq |\beta_n|$$

Поэтому ряды (8) и (9) сходятся равномерно при ( $t \leq 1$ ) и, следовательно, представляемые ими функции непрерывны на границе круга. Из формулы (11) видно, что функция (8), полученная для внешней задачи, ограничена на бесконечности.

Таким образом установлено, что ряды (8) и (9) удовлетворяют всем условиям рассматриваемых задач.

## 2 ИНТЕГРАЛ ПУАССОНА

Преобразуем теперь формулы (8) и (9) к более простому виду. Для определенности рассмотрим внутреннюю задачу, а для внешней задачи запишем результат по аналогии.

Подставляя выражения для коэффициентов Фурье в формулу (8) и меняя порядок суммирования и интегрирования, будем иметь:

$$\begin{aligned} u(\rho, \varphi) &= \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} f(\psi) \cdot \left\{ \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\rho}{a}\right)^n \cdot (\cos(n \cdot \psi) \cdot \cos(n \cdot \varphi) + \sin(n \cdot \psi) \cdot \sin(n \cdot \varphi)) \right\} d\psi = \\ &= \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} f(\psi) \cdot \left\{ \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\rho}{a}\right)^n \cdot (\cos(n \cdot (\varphi - \psi))) \right\} d\psi \end{aligned}$$

(12)

Произведем следующие тождественные преобразования:

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} t^n \cdot \cos(n \cdot (\psi - \varphi)) &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} t^n \cdot [e^{i \cdot n \cdot (\psi - \varphi)} + e^{-i \cdot n \cdot (\psi - \varphi)}] = \\
 &= \frac{1}{2} \cdot \left\{ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} [(t \cdot e^{i(\psi - \varphi)})^n + (t \cdot e^{-i(\psi - \varphi)})^n] \right\} = \\
 &= \frac{1}{2} \cdot \left[ 1 + \frac{t \cdot e^{i(\psi - \varphi)}}{1 - t \cdot e^{i(\psi - \varphi)}} + \frac{t \cdot e^{-i(\psi - \varphi)}}{1 - t \cdot e^{-i(\psi - \varphi)}} \right] = \\
 &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1 - t^2}{1 - 2 \cdot t \cdot \cos(\varphi - \psi) + t^2}
 \end{aligned}$$

( $t = \frac{\rho}{a} < 1$ ) Подставляя полученные результаты в равенство (12), получаем:

$$u(\rho, \varphi) = \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} f(\psi) \cdot \frac{a^2 - \rho^2}{\rho^2 - 2 \cdot a \cdot \rho \cdot \cos(\varphi - \psi) + a^2} d\psi \quad (13)$$

Полученная формула, дающая решение первой краевой задачи внутри круга, называется интегралом Пуассона, а подинтегральное выражение

$$K(\rho, \varphi, a, \psi) = \frac{a^2 - \rho^2}{\rho^2 - 2 \cdot a \cdot \rho \cdot \cos(\varphi - \psi) + a^2}$$

-ядро Пуассона. Отметим, что  $K(\rho, \varphi, a, \psi) > 0$  при  $\rho < a$ , так как  $2 \cdot a \cdot \rho < a^2 + \rho^2$ , если  $\rho \neq a$ .

Интеграл Пуассона выведен в предположении  $\rho < a$ ; при  $\rho = a$  представление (11) теряет смысл. Однако

$$\lim_{\substack{\rho \rightarrow a \\ \varphi \rightarrow \varphi_0}} (\rho, \varphi) = f(\varphi_0)$$

так как ряд, из которого получен интеграл Пуассона, является непрерывной функцией в замкнутой области.

Функция, определенная формулой

$$u(\rho, \varphi) = \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} f(\psi) \cdot \frac{a^2 - \rho^2}{\rho^2 - 2 \cdot a \cdot \rho \cdot \cos(\varphi - \psi) + a^2} d\psi$$

при  $\rho < a$

$$u(\rho, \varphi) = f(\varphi) \quad (14)$$

при  $\rho = a$  удовлетворяет уравнению  $\Delta u = 0$  при  $\rho < a$ , непрерывна в замкнутой области, включая окружность  $\rho = a$ .

Решение внешней краевой задачи, очевидно, имеет вид

$$u(\rho, \varphi) = \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} f(\psi) \cdot \frac{\rho^2 - a^2}{\rho^2 - 2 \cdot a \cdot \rho \cdot \cos(\varphi - \psi) + a^2} d\psi$$

при  $\rho > a$

$$u(\rho, \varphi) = f(\varphi) \quad (15)$$

при  $\rho = a$ .

В самом начале мы предположили, что функция  $f(\varphi)$  непрерывна и дифференцируема, и, пользуясь этим, доказали, что решение задачи можно представить в виде бесконечного ряда. В дальнейшем с помощью тождественных преобразований мы перешли от ряда к интегралу Пуассона.

Докажем теперь, что интеграл Пуассона дает решение первой краевой и в том случае, когда функция  $f(\varphi)$  только непрерывна.

Интеграл Пуассона представляет решение уравнения Лапласа при  $\rho < a$  ( $t < 1$ ) для произвольной ограниченной функции  $f(\varphi)$ . В самом деле, при  $\rho < a$  ( $t < 1$ ) интеграл Пуассона тождественен ряду (8) и в силу замечания, удовлетворяет уравнению  $\Delta u = 0$  при произвольной ограниченной функции  $f(\varphi)$ .

Таким образом, нам остается доказать, что функция  $u$  в нашем случае непрерывно примыкает к граничным значениям. Выберем какую – либо последовательность непрерывных дифференцируемых функций

$$f_1(\varphi), f_2(\varphi), f_3(\varphi), f_4(\varphi), \dots,$$

равномерно сходящуюся к функции  $f(\varphi)$ :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f_k(\varphi) = f(\varphi)$$



последовательности граничных функций будет соответствовать последовательность гармонических функций  $u_k(\rho, \varphi)$ , определяемых по формуле (13) или (8). Равномерная сходимость последовательности  $\{f_k(\varphi)\}$  означает, что для любого  $\varepsilon > 0$  можно указать такое  $k_0(\varepsilon) > 0$ , что

$$|f_k(\varphi) - f_{k+l}(\varphi)| < \varepsilon$$

при  $k > k_0(\varepsilon)$ ,  $l > 0$ .

Для функции  $u_k(r, \varphi)$ , представляющих решения первой краевой задачи, в силу принципа максимального значения, будем иметь:

$$|u_k(\rho, \varphi) - u_{k+l}(\rho, \varphi)| < \varepsilon$$

при  $\rho \leq \rho_0$ , если  $k > k_0(\varepsilon)$ ,  $l > 0$ .

Таким образом, последовательность  $\{u_k\}$  сходится равномерно к некоторой функции  $u = \lim_{k \rightarrow \infty} u_k$ . Предельная функция  $u(\rho, \varphi)$  непрерывна в замкнутой области, поскольку все функции  $u_k$ , представляемые интегралами

$$u_k(\rho, \varphi) = \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} f_k(\psi) \cdot \frac{a^2 - \rho^2}{\rho^2 - 2 \cdot a \cdot \rho \cdot \cos(\varphi - \psi) + a^2} d\psi$$

непрерывны в замкнутой области. Очевидно, что

$$u(\rho, \varphi) = \lim_{k \rightarrow \infty} u_k(\rho, \varphi) = \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} f(\psi) \cdot \frac{a^2 - \rho^2}{\rho^2 - 2 \cdot a \cdot \rho \cdot \cos(\varphi - \psi) + a^2} d\psi$$

при  $\rho < a$

$$u(\rho, \varphi) = \lim_{k \rightarrow \infty} u_k(\rho, \varphi) = f(\varphi)$$

при  $\rho = a$ , так как последовательность  $\{f_k\}$  сходится равномерно к  $f$  и поэтому последовательный переход под знаком интеграла законен.

Таким образом функция

$$u(\rho, \varphi) = \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} f(\psi) \cdot \frac{a^2 - \rho^2}{\rho^2 - 2 \cdot a \cdot \rho \cdot \cos(\varphi - \psi) + a^2} d\psi$$

при произвольной непрерывной функции  $f(\varphi)$  является решением уравнения Лапласа, непрерывно примыкающим на границе круга к заданным значениям.

#### 6.4.4 Функция источника

Метод функции источника дает удобный аппарат для аналитического представления решения краевых задач.

В этом параграфе будут даны определения и основные свойства функции источника для уравнения Лапласа, а также будут построены функции для ряда простейших областей (круг, сфера, полупространство). Это построение проводится методом электростатических изображений.

### 1 ФУНКЦИЯ ИСТОЧНИКА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ $\Delta u = 0$ И ЕЕ ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА

Для всякой функции  $u$ , непрерывной вместе с первыми производными в замкнутой области  $T$ , ограниченной достаточно гладкой поверхностью  $\Sigma$ , и имеющей вторые производные внутри  $T$ , как было показано в §2, п.1, имеет место интегральное представление

$$u(M_0) = \frac{1}{4 \cdot \pi} \cdot \iint_{\Sigma} \left[ \frac{1}{R_{PM_0}} \cdot \frac{\partial u}{\partial n} - u(P) \cdot \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{1}{R_{PM_0}} \right) \right] d\sigma_P - \frac{1}{4 \cdot \pi} \cdot \iiint_T \frac{\Delta u}{R_{MM_0}} d\tau_M \quad (1)$$

Если функция  $u(M)$  гармоническая, то объемный интеграл равен нулю; если же  $u(M)$  удовлетворяет уравнению Пуассона, то объемный интеграл является известной функцией.

Пусть  $\vartheta(M)$  - некоторая гармоническая функция, непрерывная в  $T + \Sigma$  вместе с первыми производными, не имеющая нигде особенностей. Вторая формула Грина

$$\iiint_T (u \cdot \Delta \vartheta - \vartheta \cdot \Delta u) d\tau = \iint_{\Sigma} \left( u \cdot \frac{\partial \vartheta}{\partial n} - \vartheta \cdot \frac{\partial u}{\partial n} \right) d\sigma$$

дает:

$$0 = \iint_{\Sigma} \left( u \cdot \frac{\partial \vartheta}{\partial n} - \vartheta \cdot \frac{\partial u}{\partial n} \right) d\sigma - \iiint_{\Sigma} \vartheta \cdot \Delta u d\tau \quad (2)$$

Складывая (1) и (2), получаем:

$$u(M_0) = \iint_{\Sigma} \left[ G \cdot \frac{\partial u}{\partial n} - u \cdot \frac{\partial G}{\partial n} \right] d\sigma - \iiint_T \Delta u \cdot G d\tau \quad (3)$$

где

$$G(M, M_0) = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot R_{MM_0}} + \vartheta \quad (4)$$

— функция двух точек:  $M_0(x, y, z)$  и  $M(\xi, \eta, \zeta)$ . Точка  $M_0$  фиксирована, и поэтому  $x, y, z$  играют роль параметров.

Формула (3) содержит  $u|_{\Sigma}$  и  $\frac{\partial u}{\partial n}|_{\Sigma}$ . Между тем, при решении первой краевой задачи задается лишь  $u|_{\Sigma}$ , а при решении второй краевой задачи — значение  $\frac{\partial u}{\partial n}|_{\Sigma}$ . Функция  $\vartheta$  выбирается таким образом, чтобы  $G|_{\Sigma} = 0$  для первой

краевой задачи ( $\frac{\partial G}{\partial n}|_{\Sigma} = 0$  для второй краевой задачи). Определим функцию

$G(M, P)$  при помощи условий:

1.  $G(M, P)$  как функция точки  $P(\xi, \eta, \zeta)$  при фиксированной точке

$M(x, y, z)$  удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\Delta G = G_{\xi\xi} + G_{\eta\eta} + G_{\zeta\zeta} = 0$$

$P \neq M$  во всех точках  $P$  области  $T$ , кроме точки  $P = M$ .

2.  $G(M, P)$  при совпадении аргументов  $P = M$  обращается в

бесконечность и представима в виде (4), где  $\vartheta = \vartheta(M, P)$  — гармоническая всюду в  $T$  функция.

3.  $G(M, P)$  на границе обращается в нуль:

$$G(M, P) = 0$$

если  $P \in \Sigma$

Этому условию можно удовлетворить, потребовав, чтобы

$$\vartheta|_{\Sigma} = -\frac{1}{4 \cdot \pi \cdot R}$$

Функцию  $G$ , определенную таким образом, будем называть функцией точечного источника первой краевой задачи для уравнения  $\Delta u = 0$ . Функция источника позволяет дать явное представление для решения первой задачи для уравнения  $\Delta u = 0$ . В самом деле, формула (3) дает:

$$u(M_0) = - \iint_{\Sigma} u \cdot \frac{\partial G}{\partial n} d\sigma = - \iint_{\Sigma} f \cdot \frac{\partial G}{\partial n} d\sigma \quad (5)$$

$$(f = u|_{\Sigma})$$

Следует иметь в виду, что формула (5) получена с помощью формула Грина, предполагающей выполнение определенных условий в отношении

функций  $u$ ,  $G$  и поверхности  $\Sigma$ . В формулу (5) входит выражение  $\frac{\partial G}{\partial n}$ , существование которого на поверхности  $\Sigma$  не следует непосредственно из определения функции  $G$ .

При получении формулы (5) мы исходим из того, что существует гармоническая функция  $u$ , принимающая на поверхности  $\Sigma$  значение  $f$ . Тем самым даже для тех областей, для которых существует функция источника, удовлетворяющая условиям применимости формулы Грина, формула (5) дает явное представление лишь тех решений  $u$  первой краевой задачи, которое удовлетворяют условиям применимости формулы Грина.

Остановимся еще раз на определении функции  $G$ . Функция  $G$  определяется при помощи функции  $\vartheta$ , являющейся решением первой краевой задачи для уравнения

$$\Delta \vartheta = 0$$

с граничными условиями

$$\vartheta|_{\Sigma} = -\frac{1}{4 \cdot \pi \cdot R}$$

Может создать впечатление, что имеет место порочной круг. Для нахождения функции  $u$  - решение первой краевой задачи – надо найти функцию  $\vartheta$  - решение этой же задачи. На самом деле порочного круга нет, так как знание функции источника позволяет решить первую краевую задачу с произвольными граничными значениями  $u|_{\Sigma} = f$ , в то время как для нахождения самой функции  $G$  достаточно решить краевой задачу со специальными граничными

значениями  $\vartheta|_{\Sigma} = -\frac{1}{4 \cdot \pi \cdot R}$ , что, как мы видим на ряде примеров, значительно проще.

При электростатической интерпретации функция источника

$$G(M, M_0) = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot R} + \vartheta$$

представляет потенциал в точке  $M$  точечного заряда, помещенного в точку  $M_0$

внутри заземленной проводящей поверхности  $\Sigma$ . Первое слагаемое  $\frac{1}{4 \cdot \pi \cdot R}$  есть, очевидно, потенциал точечного заряда в свободном пространстве, а второе слагаемое  $\vartheta$  обозначает потенциал поля зарядов, индуцированных на проводящей поверхности  $\Sigma$ . Таким образом, построение функции источника сводится к определению индуцированного поля.

Остановимся на некоторых свойствах функции источника. При этом мы будем предполагать, что рассматриваемые области таковы, что для них существуют функции источника, обладающие нормальными производными на поверхности  $\Sigma$  и удовлетворяющие условиям применимости формулы Грина.

1. Функция источника всюду положительна внутри  $T$ . В самом деле, функция  $G$  обращается в нуль на границе области  $\Sigma$  и положительна на поверхности достаточно малой сферы, описанной вокруг полюса. Отсюда следует, в силу принципа максимального значения, ее положительность во всей области. Заметим также, что

$$\left. \frac{dG}{dn} \right|_{\Sigma} \leq 0,$$

что непосредственно следует из доказательства положительности и условия  $G|_{\Sigma} = 0$ .

Функция источника симметрична относительно своих аргументов  $M_0(x, y, z)$  и  $M(\xi, \eta, \zeta)$ :

$$G(M, M_0) = G(M_0, M)$$

Пусть  $M_0'$  и  $M_0''$  - некоторые фиксированные точки области  $T$ . Проведем сферы  $\Sigma_1$  и  $\Sigma_2$  радиуса  $\varepsilon$  с центрами в точках  $M_0'$  и  $M_0''$  (рис.6)

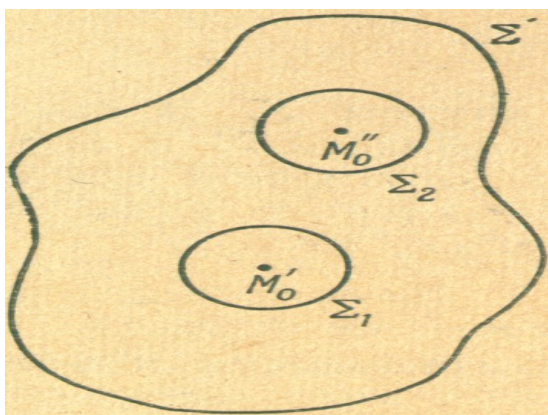


Рис.6

Полагая

$$u(M) = G(M, M_0')$$

$$\vartheta(M) = G(M, M_0'')$$

и применяя формулу Грина

$$\iiint_{T_\varepsilon} (u \cdot \Delta \vartheta - \vartheta \cdot \Delta u) d\tau = \iint_{\Sigma_1 + \Sigma_2 + \Sigma_3} \left( u \cdot \frac{\partial \vartheta}{\partial n} - \vartheta \cdot \frac{\partial u}{\partial n} \right) d\sigma \quad (6)$$

к области  $T_\varepsilon$ , ограниченной поверхностями  $\Sigma$ ,  $\Sigma_1$  и  $\Sigma_2$ , будем иметь:

$$\begin{aligned} & \iint_{\Sigma_1} \left[ G(M, M_0') \cdot \frac{\partial G(M, M_0'')}{\partial n} - G(M, M_0'') \cdot \frac{\partial G(M, M_0')}{\partial n} \right] d\sigma_M + \\ & + \iint_{\Sigma_2} \left[ G(M, M_0') \cdot \frac{\partial G(M, M_0'')}{\partial n} - G(M, M_0'') \cdot \frac{\partial G(M, M_0')}{\partial n} \right] d\sigma_M = 0 \end{aligned}$$

так как левая часть уравнения (6) равна 0, поскольку  $\Delta G = 0$ , а интеграл по поверхности  $\Sigma$  равен нулю в силу граничных условий.

Переходя затем к пределу при  $\varepsilon \rightarrow 0$  и используя особенность функции источника, получим:

$$G(M_0', M_0'') = G(M_0'', M_0')$$

или

$$G(M, M_0) = G(M_0, M)$$

Доказанная симметрия функции источника является математическим выражением принципа взаимности в физике: источник, помещенный в точку  $M_0$ , производит в точку  $M$  такое же действие, какое производит в точке  $M_0$  источник, помещенный в точку  $M$ . Принцип взаимности носит весьма общий характер и относится к различным физическим полям (электромагнитным, упругим и т.д.).

Отмети, в частности, что из свойств симметрии следует, что при фиксированном  $M$   $u(M_0) = G(M, M_0)$ , как функция переменных  $x, y, z$  точки  $M_0$ , обладает тем же свойством, что и функция  $\vartheta(M_0) = G(M, M_0)$  переменных

$\xi, \eta, \zeta$  точки  $M$  при фиксированном  $M_0$ , т.е.  $\Delta_{M_0} G = 0$  при  $M \neq M_0$ ,  $G = 0$  при  $M_0 \in \Sigma$ .

Функция источника  $G(M, M_0)$  для случая двух измерений, очевидно, будет определяться условиями:

$\Delta G = 0$  всюду в рассматриваемой области  $S$ , кроме точки  $M = M_0$

В точке  $M = M_0$  функция  $G$  имеет особенность вида

$$\frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \ln \frac{1}{R_{MM_0}}$$

$G|_C = 0$ , где  $C$  – граница области  $S$ . Функция источника в этом случае имеет вид

$$G(M, M_0) = \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \ln \frac{1}{R_{MM_0}} + \vartheta(M, M_0),$$

где  $\vartheta$  – всюду непрерывная гармоническая функция, удовлетворяющая на границе условию

$$\vartheta|_C = -\frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \ln \frac{1}{R_{MM_0}}$$

Решение первой краевой задачи  $\Delta u = 0$  при этом задается формулой

$$u(M_0) = - \int_C f \cdot \frac{\partial G}{\partial n} ds$$

$$f = u|_C.$$

## 2 МЕТОД ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКИХ ИЗОБРАЖЕНИЙ И ФУНКЦИЯ ИСТОЧНИКА ДЛЯ СФЕРЫ

Наиболее распространенным методом построения функции источника является метод электростатических изображений. Идея его состоит в том, что при построении функции источника



$$G(M, M_0) = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot R_{MM_0}} + \vartheta$$

индуцированное поле  $\vartheta$  представляется как поле зарядов, расположенных вне поверхности  $\Sigma$  и выбираемых таким образом, чтобы выполнялось условие

$$\vartheta \Big|_{\Sigma} = - \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot R}$$

Эти заряды называются электростатическим изображениями единичного заряда, помещенного в точку  $M_0$  и задающего в соответствии поверхности  $\Sigma$

потенциал  $\frac{1}{4 \cdot \pi \cdot R}$ . Во многих случаях выбор таких зарядов не представляет труда. Ниже мы приведем примеры построения функции источника методом электростатических изображений.

Из представления функции источника, полученных во всех этих примерах, непосредственно видна непрерывность первых производных функции  $G$  на поверхности  $\Sigma$ .

В качестве первого примера рассмотрим функцию источника для сферы.

Пусть дана сфера радиуса  $R$  с центром в точке  $O$  и требуется найти для нее функцию источника.

Поместим в точку  $M_0$  единичный заряд и отложим на радиусе, проходящем через точку  $M_0$ , такой отрезок  $OM_1$ , что

$$\rho_0 \cdot \rho_1 = R^2 \tag{7}$$

где  $\rho_1 = OM_1$  и  $\rho_0 = OM_0$  (рис.7)

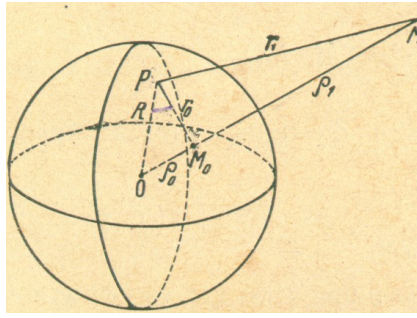


Рис.7

Преобразование (7), ставящее в соответствии точке  $M_0$  определенную точку  $M_1$ , является преобразованием обратных радиусов, а сама точка  $M_1$  называется сопряженной с точкой  $M_0$ . Это преобразование является взаимным, и точку  $M_0$  можно рассматривать как сопряженную с точкой  $M_1$ .

Докажем, что для всех точек  $P$ , расположенных на сфере, расстояния до  $M_0$  и  $M_1$  пропорциональны. Для этого рассмотрим треугольники  $OPM_0$  и  $OPM_1$  они подобны, так как угол при  $O$  общий, а прилежащие к нему стороны пропорциональны:

$$\frac{\rho_0}{R} = \frac{R}{\rho_1}$$

или

$$\frac{OM_0}{R} = \frac{R}{OM_1}.$$

Из подобия треугольников следует:

$$\frac{r_0}{r_1} = \frac{\rho_0}{R} = \frac{R}{\rho_1}, \quad (8)$$

где  $r_0 = \left| \vec{M_0P} \right|$ ,  $r_1 = \left| \vec{M_1P} \right|$ . Из пропорции (8) получаем:

$$r_0 = \frac{\rho_0}{R} \cdot r_1$$

для всех точек сферы. Поэтому гармоническая функция  $\vartheta = -\frac{R}{\rho_0} \cdot \frac{1}{r_0}$  на

сфере принимает то же значение, что и функция  $\frac{1}{r_0}$ . Она представляет,

очевидно, потенциал заряда величины  $-\frac{R}{\rho_0}$ , помещенного в точку  $M_1$ .

Таким образом, функция

$$G(M, M_0) = \frac{1}{4 \cdot \pi} \cdot \left( \frac{1}{r_0} - \frac{R}{\rho_0} \cdot \frac{1}{r_0} \right) \quad (9)$$

и является искомой функцией источника для сферы, так как это –

гармоническая функция, имеющая в  $M_0$  особенность  $\frac{1}{4 \cdot \pi} \cdot \frac{1}{r_0}$  и обращается в

нуль на сфере.

Решение первой краевой задачи дается формулой (5).

Вычислим производную

$$\frac{\partial G}{\partial n} = \frac{1}{4 \cdot \pi} \cdot \left[ \frac{\partial G}{\partial n} \cdot \left( \frac{1}{r_0} \right) - \frac{R}{\rho_0} \cdot \frac{\partial G}{\partial n} \cdot \left( \frac{1}{r_0} \right) \right] \quad (10)$$

где  $n$  - внешняя нормаль,  $r_1 = \left| \vec{M_1 M} \right|$  ( $M$ , вообще говоря, не лежит на сфере).

Производные от  $\frac{1}{r_0}$  и  $\frac{1}{r_1}$  по направлению  $n$  равны

$$\frac{\partial}{\partial n} \cdot \left( \frac{1}{r_0} \right) = \frac{\partial}{\partial r_0} \cdot \left( \frac{1}{r_0} \right) \cdot \frac{\partial r_0}{\partial n} = -\frac{1}{r_0^2} \cdot \cos(\hat{r_0, n})$$

$$\frac{\partial}{\partial n} \cdot \left(\frac{1}{r_1}\right) = \frac{\partial}{\partial r_1} \cdot \left(\frac{1}{r_1}\right) \cdot \frac{\partial r_1}{\partial n} = -\frac{1}{r_1^2} \cdot \cos(\hat{r}_1, n), \quad (11)$$

так как

$$\begin{aligned} \frac{\partial r_0}{\partial n} &= \cos(\hat{r}_0, n) \\ \frac{\partial r_1}{\partial n} &= \cos(\hat{r}_1, n) \end{aligned} \quad (12)$$

Нетрудно найти величины  $\cos(\hat{r}_0, n)$  и  $\cos(\hat{r}_1, n)$ :

$$\cos(\hat{r}_0, n) = \frac{R^2 + r_0^2 - \rho_0^2}{2 \cdot R \cdot r_0} \quad (13)$$

$$\cos(\hat{r}_1, n) = \frac{R^2 + r_1^2 - \rho_1^2}{2 \cdot R \cdot r_1} \quad (14)$$

так как  $\rho_1 = \frac{R^2}{\rho_0}$ , по определению точки  $M_1$  и  $r_1 = \frac{R}{\rho_0} \cdot r_0$  на сфере  $\Sigma$ . Пользуясь

формулами (11), а также выражениями (10), (13), (14), найдем:

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial G}{\partial n} \right|_{\Sigma} &= \frac{1}{4 \cdot \pi} \cdot \left[ -\frac{1}{r_0^2} \cdot \frac{R^2 + r_0^2 - \rho_0^2}{2 \cdot R \cdot r_0} + \frac{\rho_0^2}{R^2 \cdot r_0^2} \cdot \frac{R}{\rho_0} \cdot \frac{\rho_0^2 + r_0^2 - R^2}{2 \cdot \rho_0 \cdot r_0} \right] = \\ &= -\frac{1}{4 \cdot \pi} \cdot \frac{R^2 - \rho_0^2}{r_0^2} \end{aligned}$$

Таким образом, функция  $u(M_0)$  в соответствии с формулой (5) равна

$$u(M_0) = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot R} \cdot \iint_{\Sigma} f(P) \cdot \frac{R^2 - \rho_0^2}{r_0^2} d\sigma_P \quad (15)$$

Введем сферическую систему координат с началом в центре сферы. Пусть  $(R, \theta, \varphi)$  – координаты точки  $P$ , а  $(\rho_0, \theta_0, \varphi_0)$  – координаты точки  $M_0$ ;  $\gamma$  – угол

между радиусами – векторами  $\vec{OP}$  и  $\vec{OM}_0$ . Тогда формула (15) можно переписать в виде

$$u(\rho_0, \theta_0, \varphi_0) = \frac{R}{4 \cdot \pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi f(\theta, \varphi) \cdot \frac{R^2 - \rho_0^2}{(R^2 - 2 \cdot R \cdot \rho_0 \cdot \cos(\gamma) + \rho_0^2)^{3/2}} \cdot \sin(\theta) d\theta d\varphi, \quad (16)$$

где

$$\cos(\gamma) = \cos(\theta) \cdot \cos(\theta_0) + \sin(\theta) \cdot \sin(\theta_0) \cdot \cos(\varphi - \varphi_0) \quad (17)$$

Эта формула называется интегралом Пуассона для сферы.

Тем же методом может быть построена функция источника для области, внешней к сфере,

$$G(M, M_0) = \frac{1}{4 \cdot \pi} \cdot \left( \frac{1}{r_0} - \frac{R}{\rho_0} \cdot \frac{1}{r_0} \right) \quad (18)$$

где  $r_1 = MM_1$  - расстояние от фиксированной точки  $M_1$ , лежащей вне сферы,  $r_0 = MM_0$  - расстояние от точки  $M_0$ , сопряженной с точкой  $M_1$ ,  $\rho_1$  - расстояние  $M_1$  от начала координат, а  $R$  - радиус сферы.

Учитывая различие направлений нормалей для внутренней и внешней задач, получим:

$$u(\rho_0, \theta_0, \varphi_0) = \frac{R}{4 \cdot \pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi f(\theta, \varphi) \cdot \frac{\rho_1^2 - R^2}{(R^2 - 2 \cdot R \cdot \rho_1 \cdot \cos(\gamma) + \rho_1^2)^{3/2}} \cdot \sin(\theta) d\theta d\varphi$$

где  $\cos(\gamma)$  задается формулой (17) (индекс 0 надо заменить на 1).

### 3 ФУНКЦИЯ ИСТОЧНИКА КРУГА

Функция источника для круга может быть получена таким же способом, как и функция для сферы. В этом случае функцию следует искать в виде

$$G(M, M_0) = \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \ln \frac{1}{r} + \vartheta \quad (19)$$

Повторяя рассуждения предыдущего пункта от формулы (7) до формулы (9), мы найдем функцию  $G$  в виде

$$G(P, M_0) = \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \left[ \ln \frac{1}{r_0} - \ln \frac{R}{\rho_0} \cdot \frac{1}{r_1} \right] \quad (20)$$

где  $\rho_0 = OM_0$ ,  $r_1 = M_1P$ ,  $r_0 = M_0P$ ,  $R = OP$  - радиус круга (рис.8)

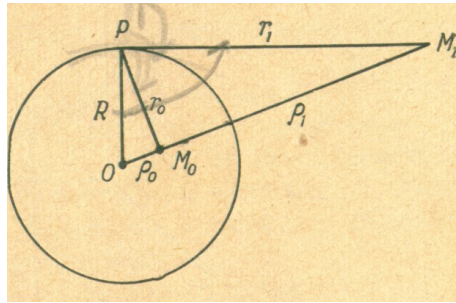


Рис.8

Нетрудно убедиться в том, что определенная таким образом гармоническая функция обращается в нуль на границе

$$G|_C = 0$$

Для решения первой краевой задачи надо вычислить значение  $\frac{\partial G}{\partial n}$  на окружности  $C$ . Вычисления проходят аналогично случаю сферы и дают:

$$\frac{\partial G}{\partial n} \Big|_C = - \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot R} \cdot \frac{R^2 - \rho_0^2}{r_0^2}$$

Пусть  $(\rho, \theta)$  - полярные координаты точки  $P$ , лежащей на окружности, а  $(\rho_0, \theta_0)$  - координаты точки  $M_0$ , тогда

$$r_0^2 = R^2 + \rho_0^2 - 2 \cdot R \cdot \rho_0 \cdot \cos(\theta - \theta_0)$$

Подставляя в формулу

$$u(\rho_0, \theta_0) = \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \int_C u(P) \cdot \frac{R^2 - \rho_0^2}{r_0^2} \frac{ds}{R}$$

это выражение для  $r_0$  и принимая во внимание, что

$$u(P)|_c = f(\theta)$$

и

$$ds = R d\theta$$

приходим для функции  $u(M_0)$  к выражению

$$u(\rho_0, \theta_0) = \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \int_0^{2\pi} \frac{R^2 - \rho_0^2}{R^2 + \rho_0^2 - 2 \cdot R \cdot \rho_0 \cdot \cos(\theta - \theta_0)} f(\theta) d\theta \quad (21)$$

#### 6.4.5 Теория потенциала

Функция  $\frac{1}{R} = \frac{1}{\sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + (z - \zeta)^2}}$ , представляющая потенциал поля единичной массы (заряда), помещенной в точке  $M_0(\xi, \eta, \zeta)$ , является решением уравнения Лапласа, зависящее от параметра  $(\xi, \eta, \zeta)$ . Интегралы от этой функции по параметрам называются потенциалами и имеют существенное значение с точки зрения непосредственных приложений в физике, а также и с точки зрения развития методов решения краевых задач.

#### 1 ОБЪЕМНЫЙ ПОТЕНЦИАЛ

Пусть в некоторой точке  $M_0(\xi, \eta, \zeta)$  помещена масса  $m_0$ . По закону всемирного тяготения на массу  $m$ , помещенную в точке  $M(x, y, z)$ , действует сила притяжения

$$F = -\gamma \cdot \frac{m \cdot m_0}{R^2} \cdot r, \quad (1)$$

где  $r = \frac{R}{R}$  - единичный вектор в направлении  $\vec{MM}_0$  ( $R = \vec{MM}_0$ ), а  $\gamma$  - гравитационная постоянная. Выбирая систему единиц так, чтобы  $\gamma = 1$ , и полагая  $m = 1$ , получим:

$$F = - \frac{m_0}{R^2} \cdot r$$

Проекции этой силы на координатные оси будут:

$$X = F \cos(\alpha) = - \frac{m_0}{R^3} (x - \xi),$$

$$Y = F \cos(\beta) = - \frac{m_0}{R^3} (y - \eta),$$

$$Z = F \cos(\gamma) = - \frac{m_0}{R^3} (z - \zeta), \quad (2)$$

где  $\alpha, \beta, \gamma$  - углы образованные вектором  $F$  с координатными осями.

Ведем функцию  $u$ , называемую потенциалом силового поля и определяемую равенством

$$F = \text{grad}(u)$$

или

$$X = \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$Y = \frac{\partial u}{\partial y}$$

$$Z = \frac{\partial u}{\partial z}$$

В нашем случае

$$u = \frac{m_0}{R}$$

Потенциал поля  $n$  материальных точек вследствие суперпозиции силовых полей будет выражаться формулой

$$u = \sum_{i=1}^n u_i = \sum_{i=1}^n \frac{m_i}{R_i}$$

Перейдем к случаю непрерывного распространения массы. Пусть дано тело  $T$  с плотностью  $\rho(\xi, \eta, \zeta)$ . Определим потенциал этого тела в точке



$M(x, y, z)$ . Для этого разобьем тело  $T$  на достаточно мелкие части  $\Delta \tau$ . Сделаем естественное предположение, что действие элемента  $\Delta \tau$  эквивалентно действию этой массы, сосредоточенной в некоторой «средней» точке объема  $\Delta \tau$ ; тогда для компоненты силы, действующей на точку  $M$ , получим следующее выражение:

$$\Delta X = - \frac{\rho \cdot \Delta \tau}{R^3} (x - \xi),$$

где

$$R^2 = (x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + (z - \zeta)^2$$

Интегрирование по всему объему  $T$  дает компоненту всей силы притяжения точки  $M$  телом  $T$

$$X = - \iiint_T \frac{\rho \cdot (x - \xi)}{R^3} d\tau \quad (3)$$

Потенциал в точке  $M$  будет определяться следующей формулой

$$u(M) = \iiint_T \frac{\rho}{R} d\tau \quad (4)$$

Если точка  $M$  лежит вне тела, то в этом можно убедиться непосредственно дифференцированием под знаком интеграла. Аналогично вычисляется и производные высших порядков. Очевидно, что потенциал  $u(M)$  вне тела  $T$  удовлетворяет уравнению Лапласа. В дальнейшем, не стремясь к построению теории в наиболее общих условиях, мы будем пользоваться указанными выше свойствами потенциалов и сформулируем ряд теорем при условии, что  $\rho$  - ограниченная функция (подразумеваемая ее интегрируемость). Если точка  $M$  лежит внутри области  $T$ , нельзя утверждать, что  $X = \frac{\partial u}{\partial x}$  без дополнительного исследования, которое и будет дано ниже.

## 2 ПЛОСКАЯ ЗАДАЧА. ЛОГАРИФМИЧЕСКИЙ ПОТЕНЦИАЛ

Рассмотрим распределение масс в пространстве, зависящее лишь от двух координат  $(x, y)$ . В любой плоскости  $z = const$  потенциал, очевидно, принимает одно и то же значение, поэтому достаточно исследовать потенциал точки  $(x, y)$ , лежащей в плоскости  $z = 0$ .

Определим потенциал однородной бесконечной прямой  $L$ . Направим ось  $z$  вдоль этой прямой. Пусть погонная плотность (т.е. масса единицы длины) равна  $\mu$ . Сила притяжения элементом  $\Delta z$  точки  $P(x, 0)$  (рис.9) и ее составляющая по оси  $x$  равны, соответственно,

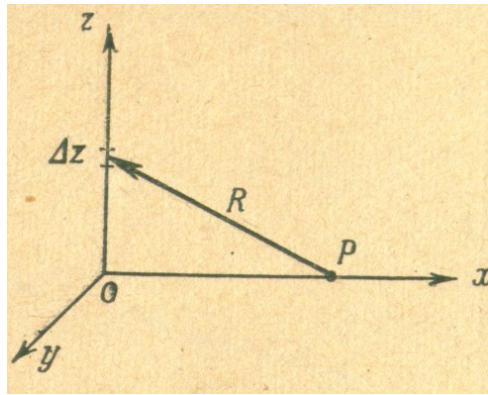


Рис.9

$$\Delta F = -\frac{\mu \cdot \Delta z}{R^2} = -\frac{\mu \cdot \Delta z}{(x^2 + z^2)}$$

$$\Delta X = \Delta F \cdot \cos(\alpha) = -\mu \cdot \Delta z \cdot \frac{x}{\sqrt{(x^2 + z^2)^2}}$$

Отсюда

$$X = -\int_{-\infty}^{\infty} \mu \cdot x \cdot \frac{dz}{(x^2 + z^2)^{3/2}} = -\mu \cdot x^2 \cdot \frac{1}{x^3} \cdot \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(\alpha) d\alpha = -\frac{2 \cdot \mu}{x}$$

$$\left(\frac{z}{x} = \operatorname{tg}(\alpha)\right)$$

Если  $P(x, y)$ - произвольная точка, то сила притяжения точки линией  $L$  будет, очевидно, направлена вдоль  $\vec{OP}$  и равна по величине

$$F = - \frac{2 \cdot \mu}{\rho}$$

где

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Потенциал этой силы называется логарифмическим потенциалом и равен

$$V = 2 \cdot \mu \cdot \ln\left(\frac{1}{\rho}\right) \quad (5)$$

в чем легко убедиться непосредственным дифференцированием.

Логарифмический потенциал является решением уравнения Лапласа с двумя независимыми переменными, обладающим круговой симметрией вокруг полюса в точке  $\rho = 0$ , в которой он обращается в бесконечность.

Таким образом потенциал однородной прямой дает плоское поле и выражается формулой (5). Представление потенциала в виде интеграла было получено нами лишь для ограниченных объектов. Отметим, что в отличие от объемного потенциала логарифмический потенциал не обращается в нуль на бесконечности, а имеет там логарифмическую особенность.

Вычислим теперь компоненты силы притяжения точки  $P$  (рис.10)

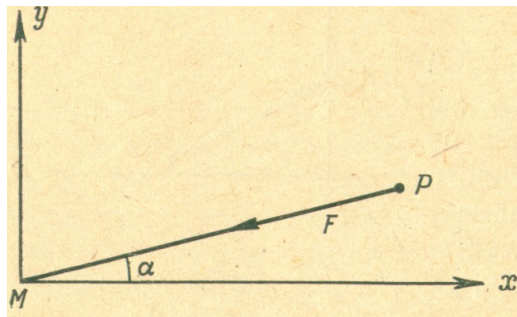


рис.10

$$X = F \cdot \cos(\alpha) = -2 \cdot \mu \cdot \frac{x}{\rho^2}$$

$$\left( \cos(\alpha) = \frac{x}{\rho} \right)$$

$$Y = F \cdot \sin(\alpha) = -2 \cdot \mu \cdot \frac{y}{\rho^2}$$

$$\left( \cos(\alpha) = \frac{y}{\rho} \right)$$

Если имеется несколько точек (бесконечных прямых с распределенной вдоль них массой), то в силу принципа суперпозиции силовых полей потенциалы точек (линий) будут складываться.

В случае области  $S$  с непрерывно- распределенной плотностью  $\mu(\xi, \eta)$  (рис.11)

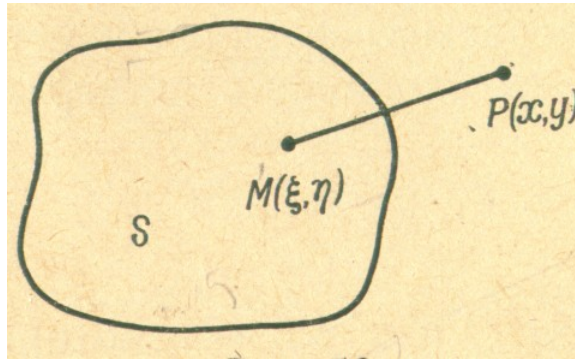


Рис.11

компоненты силы притяжения точки  $P$  выразятся двойными интегралами:

$$X = -2 \cdot \iint_S \mu(\xi, \eta) \cdot \frac{x - \xi}{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2} d\xi d\eta$$

$$Y = -2 \cdot \iint_S \mu(\xi, \eta) \cdot \frac{y - \eta}{(y - \eta)^2 + (x - \xi)^2} d\xi d\eta \quad (6)$$

и потенциал будет равен

$$u(x, y) = -2 \cdot \iint_S \mu(\xi, \eta) \cdot \frac{1}{\sqrt{(y - \eta)^2 + (x - \xi)^2}} d\xi d\eta \quad (7)$$

что нетрудно проверить дифференцированием для точек, лежащих вне  $S$ . Если же точка  $P$  лежит в области  $S$ , то необходимо провести дополнительное исследование.

### 3 ПОВЕРХНОСТНЫЕ ПОТЕНЦИАЛЫ

Как показывает основная формула Грина

$$u(M) = \frac{1}{4 \cdot \pi} \cdot \iint_{\Sigma} \left[ \frac{1}{R_{MP}} \cdot \frac{\partial u}{\partial n} - u \cdot \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{1}{R_{MP}} \right) \right] d\sigma_P$$

любая гармоническая функция может быть представлена с помощью интегралов, являющихся поверхностными потенциалами.

Рассмотрим, создаваемое массами, распределенными на поверхности, и определим потенциал этого поля. Поверхностной плотностью  $\mu(P)$  в точке  $P$  поверхности  $\Sigma$  называют предел отношения массы, находящейся на некотором элементе  $d\sigma$  поверхности  $\Sigma$ , содержащей точку  $P$ , к его площади при стягивании  $d\sigma$  к точке  $P$ . Потенциал этих масс представляется поверхностным потенциалом

$$V(M) = \iint_{\Sigma} \frac{\mu(P)}{R_{MP}} d\sigma_P \quad (8)$$

называемым потенциалом простого слоя.

Другим типом поверхностного потенциала является потенциал двойного слоя. Перейдем к его определению.

Рассмотрим диполь, образованный двумя массами  $-m$  и  $+m$ , расположенными в точках  $P_1$  и  $P_2$  на расстоянии  $\Delta l$  (рис.12).

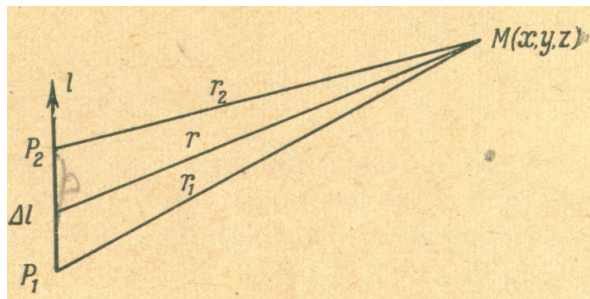


Рис.12

Произведение  $m \cdot \Delta l = N$  называется моментом диполя. Потенциал диполя в некоторой точке  $M(x, y, z)$  равен

$$V = \frac{m}{r_2} - \frac{m}{r_1} = m \cdot \left( \frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right) = N \cdot \frac{1}{\Delta l} \cdot \left( \frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right)$$

где  $r_1$  и  $r_2$  - расстояния точки  $M$  от точек  $P_1$  и  $P_2$ .

Если  $\Delta l$  мало по сравнению с расстоянием до точки  $M$  ( $\frac{\Delta l}{r_1} \ll 1$ ), то, пользуясь

теоремой о конечных приращениях, можно написать:

$$V = N \cdot \frac{d}{dl} \cdot \left( \frac{1}{R} \right)$$

$$R = \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + (z - \zeta)^2}$$

где производная берется по направлению от отталкивающей массы к притягивающей и  $R$  - расстояние от точки  $M(x, y, z)$  до некоторой средней точки  $P(\xi, \eta, \zeta)$  отрезка  $\Delta l$ .

Вычислим производную по направлению  $l$

$$\frac{d}{dl} \cdot \left( \frac{1}{R} \right) = \frac{1}{R^2} \cdot \cos(r, l) = \frac{\cos(\varphi)}{R^2}$$

где вектор  $r$  направлен от диполя к фиксированной точке  $M$ , а  $\varphi$  есть угол между вектором  $l$  и вектором  $r$ . Таким образом, потенциал диполя равен

$$V = N \cdot \frac{\cos(\varphi)}{R^2} \tag{9}$$

где  $N$  - момент диполя.

Пусть на двух поверхностях  $\Sigma$  и  $\Sigma'$  (рис.13), находящихся друг от друга на малом расстоянии  $\delta$ , распределены массы таким образом, что масса каждого элемента поверхности  $\Sigma'$  равна по величине и противоположна по знаку массе соответствующего элемента поверхности  $\Sigma$ . Обозначим через  $n$  общую нормаль к поверхностям  $\Sigma$  и  $\Sigma'$ , направленную от отталкивающих масс к притягивающим. Переходя к пределу при  $\delta \rightarrow 0$ , получим двойной слой как совокупность двух простых слоев с взаимно противоположными плотностями,

находящимися друг от друга на малом расстоянии. Если  $v$  - поверхностная плотность момента, то момент элемента поверхности  $d\sigma_P$  будет равен

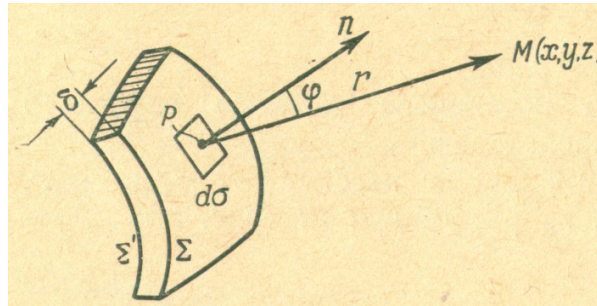


Рис.14

$$dN = v \cdot d\sigma_P$$

для потенциала элемента  $d\sigma$  в точке  $M(x,y,z)$  мы будем иметь:

$$v \cdot \frac{d}{dn_P} \left( \frac{1}{R_{MP}} \right) d\sigma_P = v(P) \cdot \frac{\cos(\varphi_1)}{R_{MP}^2} d\sigma_P$$

где  $\varphi_1 = \angle(n, PM)$

Назовем потенциалом двойного слоя интеграл

$$W(M) = - \iint_{\Sigma} \frac{d}{dn_P} \left( \frac{1}{R_{MP}} \right) \cdot v(P) d\sigma_P \quad (10)$$

Это определение, очевидно, соответствует такому случаю, когда внешняя сторона поверхности является отталкивающей, а внутренняя - притягивающей.

Очевидно, что

$$W = \iint_{\Sigma} v(P) \cdot \frac{\cos(\varphi)}{R_{MP}^2} d\sigma_P$$

где  $\varphi$  - угол между внутренней нормалью и направлением из точки поверхности  $P$  на фиксированную точку  $M$ . Если поверхность незамкнута, то мы должны считать ее двусторонней, так как потенциал двойного слоя определяется только таких поверхностей.

Потенциалы простого и двойного слоев в случае двух независимых переменных имеют вид

$$V = - \int_C \ln\left(\frac{1}{R_{MP}}\right) \cdot \mu(P) ds \quad (11)$$

$$W = \int_C v(P) \cdot \frac{d}{dn_P} \cdot \left(\ln\left(\frac{1}{R_{MP}}\right)\right) = \int_C v(P) \cdot \frac{\cos(\varphi)}{R_{MP}} ds \quad (12)$$

где  $C$  - некоторая кривая,  $\mu$  - линейная плотность простого слоя,  $v$  - плотность момента линейного двойного слоя,  $\varphi$  - угол между внутренней нормалью к линии  $C$  и направлением на фиксированную точку.

Если точка наблюдения  $M(x, y, z)$  находится вне поверхности (вне притягивающих масс), то подинтегральные функции и их производные по  $x, y, z$  любого порядка в формулах

$$V(M) = \iint_{\Sigma} \frac{1}{R_{MP}} \cdot \mu(P) d\sigma_P$$

$$W(M) = - \iint_{\Sigma} v(P) \cdot \frac{d}{dn_P} \cdot \left(\frac{1}{R_{MP}}\right) d\sigma_P$$

непрерывны по переменным  $x, y, z$ . Поэтому в точках, лежащих вне поверхности  $\Sigma$ , производные поверхностных потенциалов можно вычислить при помощи дифференцирования под знаком интеграла. Отсюда в силу принципа суперпозиции следует, что поверхностные потенциалы удовлетворяют уравнению Лапласа всюду вне притягивающих масс. Функции (11) и (12), очевидно, удовлетворяют уравнению Лапласа с двумя независимыми переменными.

Поверхностные потенциалы в точках поверхности  $\Sigma$  представляются несобственными интегралами. Покажем, что если поверхность имеет непрерывную кривизну, то потенциал двойного слоя в точках этой поверхности существует. Проведем доказательство для двух независимых переменных:

$$W = \int_C v \cdot \frac{\cos(\varphi)}{R} ds$$



Рассмотрим кривую на плоскости  $(x, y)$  и выберем начало координат в точке  $P$ , ось  $x$  направим по касательной, а ось  $y$  - по нормали в этой точке (рис15).

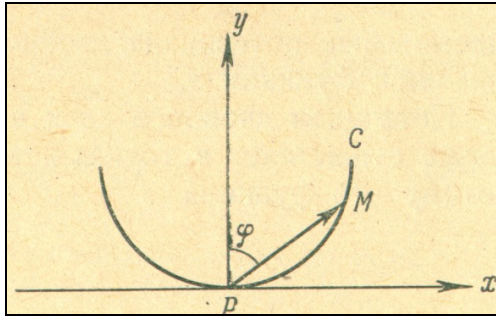


Рис.15

Уравнение кривой в некоторой окрестности точки  $P$  запишется в виде

$$y = y(x)$$

Кривая имеет, по предположению, непрерывную кривизну, т.е.  $y(x)$  имеет непрерывную вторую производную. Поэтому

$$y(x) = y(0) + x \cdot y'(0) + \frac{x^2}{2} \cdot y''(\vartheta \cdot x)$$

( $0 \leq \vartheta \leq 1$ ) откуда вследствие выбора координатных осей

$$y(x) = \frac{x^2}{2} \cdot y''(\vartheta \cdot x)$$

Отсюда будем иметь:

$$R = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{x^2 + x^4 \cdot \left[\frac{y'' \cdot (\vartheta \cdot x)}{2}\right]^2} = x \cdot \sqrt{1 + x^2 \cdot \left[\frac{y'' \cdot (\vartheta \cdot x)}{2}\right]^2}$$

$$\cos(\varphi) = \frac{y}{R} = \frac{x \cdot y'' \cdot (\vartheta \cdot x)}{2 \cdot \sqrt{1 + x^2 \cdot \left[\frac{y'' \cdot (\vartheta \cdot x)}{2}\right]^2}}$$

и

$$\frac{\cos(\varphi)}{R} = \frac{y'' \cdot (\vartheta \cdot x)}{2 \cdot \{1 + x^2 \cdot \left[\frac{y'' \cdot (\vartheta \cdot x)}{2}\right]^2\}}$$

Из выражения кривизны

$$K = \frac{y''}{(1 + y'^2)^{3/2}}$$

следует

$$y''(0) = K(P)$$

Поэтому

$$\lim_{MP \rightarrow 0} \frac{\cos(\varphi)}{R} = \frac{1}{2} \cdot K(P),$$

что доказывает непрерывность  $\frac{\cos(\varphi)}{R}$  вдоль дуги, а тем самым и существование потенциала двойного слоя в точках кривой  $C$  для ограниченной функции  $v$ .

Потенциал двойного слоя в случае трех независимых переменных также существует в точках поверхности, имеющей конечную кривизну, потому что функция

$$\frac{\cos(\varphi)}{R^2}$$

имеет интегрируемую особенность порядка  $\frac{1}{R}$ . Существование потенциала простого слоя сомнений.

ленного дифференцирования, а также доказать непрерывность этих функций на границе круга. Оба ряда можно представить одной формулой

$$u(\rho, \varphi) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} t^n \cdot (\alpha_n \cdot \cos(n \cdot \varphi) + \beta_n \cdot \sin(n \cdot \varphi))$$

где

$$t = \frac{\rho}{a} \leq 1 \text{ при } \rho \leq a \text{ (внешняя задача)}$$

$$t = \frac{a}{\rho} \leq 1 \text{ при } \rho \geq a \text{ (внутренняя задача)}$$

$\alpha_n, \beta_n$  - коэффициенты Фурье функции  $f(\varphi)$ .

Докажем, что ряды (11), (12) можно дифференцировать при  $t < 1$  любое число раз. Пусть

$$u_n = t^n \cdot (\alpha_n \cdot \cos(n \cdot \varphi) + \beta_n \cdot \sin(n \cdot \varphi))$$

Вычислим  $k$ -ю производную функции  $u_n$  по  $\varphi$

$$\frac{\partial^k u_n}{\partial \varphi^k} = t^n \cdot n^k \cdot [\alpha_n \cdot \cos(n \cdot \varphi + k \cdot \frac{\pi}{2}) + \beta_n \cdot \sin(n \cdot \varphi + k \cdot \frac{\pi}{2})]$$

Отсюда получаем оценку

$$\left| \frac{\partial^k u_n}{\partial \varphi^k} \right| \leq t^n \cdot n^k \cdot 2 \cdot M$$

где через  $M$  обозначен максимум модуля коэффициентов Фурье  $\alpha_n, \beta_n$

$$|\alpha_n| < M$$

$$|\beta_n| < M$$

(13)

Фиксируем некоторое значение  $\rho_0 < a$  (для внутренней задачи) или  $\rho_1 = \frac{a^2}{\rho_0} > a$

(для внутренней задачи), при этом  $t_0 = \frac{\rho_0}{a} < 1$ . Рассматривая ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} t^n \cdot n^k (|\alpha_n| + |\beta_n|) \leq 2 \cdot M \sum_{n=1}^{\infty} t_0^n \cdot n^k \quad (t \leq t_0)$$

видим, что он сходится равномерно при  $t \leq t_0 < 1$  при любом  $k$ . Поэтому ряды (12) и (11) можно дифференцировать по  $\varphi$  в любой точке внутри (вне) круга радиуса  $\rho_0 < a$  ( $\rho_1 > a$ ) сколько угодно раз.

В силу произвольности  $\rho_0$  заключаем, что ряды (12) и (11) получено дифференцируемы во всякой внутренней (внешней) точке круга. Из принципа

суперпозиции. Таким образом доказано, что функции (12) и (11) удовлетворяют уравнению  $\Delta u = 0$ .

При этом доказательстве мы пользовались только тем свойством функции  $f(\varphi)$ , что ее коэффициенты Фурье ограничены (формула (13)). Это имеет место для любой ограниченной функции (и даже для любой абсолютно интегрируемой функции). Таким образом, ряды (11) и (12), соответствующие любой ограниченной функции, определяют функции, удовлетворяющие уравнению

$$\Delta u = 0$$

для  $t < 1$ . Этим замечание мы воспользуемся позже при обобщении результатов, полученных в настоящем пункте.

Обратимся теперь к доказательству непрерывности функции в замкнутой области ( $t \leq 1$ ). Очевидно, что более детальных сведений относительно свойств функции  $f(\varphi)$  следует ее разложимость в ряд Фурье, а также ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} (|\alpha_n| + |\beta_n|) < \infty \quad (14)$$

С другой стороны, имеем:

$$\left| t^n \cdot \alpha_n \cdot \cos(n \cdot \varphi) \right| \leq |\alpha_n|$$

$$\left| t^n \cdot \beta_n \cdot \sin(n \cdot \varphi) \right| \leq |\beta_n|$$

Поэтому ряды (11) и (12) сходятся равномерно при ( $t \leq 1$ ) и, следовательно, представляемые ими функции непрерывны на границе круга. Из формулы (14) видно, что функция (11), полученная для внешней задачи, ограничена на бесконечности.

Таким образом установлено, что ряды (11) и (12) удовлетворяют всем условиям рассматриваемых задач.



## 7 МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ПО ВЫПОЛНЕНИЮ ИНДИВИДУАЛЬНЫХ ЗАДАНИЙ И КОМПЛЕКТ ЗАДАНИЙ

Методические указания по выполнению индивидуальных заданий содержатся в методическом пособии Труфанова Т.В., Сельвинский В.В., Масловская А.Г. Метод разделения переменных для решения уравнений математической физики. Учеб.-метод. пособие: Благовещенск, изд-во АмГУ, 2005.-87 с.

### 7.1 Уравнения гиперболического типа

7.1.1 Примеры решения смешанной задачи для неоднородного волнового уравнения

1) Найти решение уравнения

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + xt, \quad 0 < x < 1, \quad t > 0,$$

удовлетворяющее условиям

$$\begin{aligned} u|_{x=0} &= t, \quad u_x|_{x=1} = 0; \\ u|_{t=0} &= 0, \quad u_t|_{t=0} = x + 1. \end{aligned}$$

Решение. Подберем функцию  $U(x, t)$ , удовлетворяющую граничным условиям (см. б)), можно взять  $U(x, t) = t$ . Решение исходной задачи ищем в виде

$$u(x, t) = v(x, t) + t.$$

Тогда функция  $v(x, t)$  удовлетворяет уравнению

$$v_{tt} = a^2 v_{xx} + xt,$$

однородным граничным условиям  $v|_{x=0} = 0, \quad v_x|_{x=1} = 0$  и начальным условиям

$$\begin{aligned} v|_{t=0} &= u|_{t=0} - U|_{t=0} = 0, \\ v_t|_{t=0} &= u_t|_{t=0} - U_t|_{t=0} = x. \end{aligned}$$

Далее будем искать  $v(x, t)$  в виде

$$v(x, t) = W(x, t) + \tilde{W}(x, t),$$

где  $W$  и  $\tilde{W}$  являются соответственно решениями задач

$$\begin{aligned} 1) \quad W_{tt} &= a^2 W_{xx}, & 2) \quad \tilde{W}_{tt} &= a^2 \tilde{W}_{xx} + xt, \\ W|_{x=0} &= W_x|_{x=1} = 0, & \tilde{W}|_{x=0} &= \tilde{W}_x|_{x=1} = 0, \\ W|_{t=0} &= 0; W_t|_{t=0} = x, & \tilde{W}|_{t=0} &= W_t|_{t=0} = 0. \end{aligned}$$

Применим метод разделения переменных для решения однородной задачи

1), положим

$$W(x, t) = X(x)T(t),$$

$$\frac{T''(t)}{a^2 T} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda^2.$$

Таким образом, приходим к следующей задаче Штурма-Лиувилля

$$X''(x) + \lambda^2 X = 0, \quad X(0) = X'(1) = 0.$$

Решаем эту задачу, получим

$$X(x) = A \cos \lambda x + B \sin \lambda x.$$

Из краевых условий находим собственные значения  $\lambda_k = \frac{\pi}{2} + \pi k$ ,

$k=0, 1, 2, \dots$  и соответствующие им собственные функции

$$X_k(x) = \sin \lambda_k x.$$

Решая уравнение

$$T_k''(t) + a^2 \lambda_k^2 T_k(t) = 0,$$

найдем временные собственные функции

$$T_k(t) = A_k \cos a \lambda_k t + B_k \sin a \lambda_k t.$$

Решение  $W(x, t)$  имеет вид

$$W(x, t) = \sum_{k=0}^{\infty} (A_k \cos a \lambda_k t + B_k \sin a \lambda_k t) \sin \lambda_k x.$$

Из начальных условий найдем коэффициенты  $A_k$  и  $B_k$

$$0 = \sum_{k=0}^{\infty} A_k \sin \lambda_k x, \quad x = \sum_{k=0}^{\infty} B_k a \lambda_k \sin \lambda_k x.$$

Откуда следует, что  $A_k = 0, k=0,1,\dots$

$$B_k = \frac{2}{a \lambda_k} \int_0^1 x \sin \lambda_k x dx = \frac{4}{a \pi (2k+1)} \int_0^1 x \sin \frac{(2k+1)\pi x}{2} dx = -\frac{8}{a \pi^2 (2k+1)^2} x.$$

$$\cos \frac{(2k+1)\pi x}{2} \Big|_0^1 + \frac{8}{a \pi^2 (2k+1)^2} \int_0^1 \cos \frac{(2k+1)\pi x}{2} dx = \frac{16(-1)^k}{a \pi^3 (2k+1)^3}.$$

Итак,

$$W(x, t) = \frac{16}{a \pi^3} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^3} \cdot \sin \frac{a \pi (2k+1)t}{2} \sin \frac{\pi (2k+1)x}{2}.$$

Решение задачи ищем в виде ряда по собственным функциям однородной задачи, т.е.

$$\tilde{W}(x, t) = \sum_{k=0}^{\infty} T_k(t) \sin \lambda_k x,$$

где

$$T_k(0) = 0, \quad T_k'(0) = 0.$$

Разложим функцию  $x$  в ряд Фурье по системе функций

$$x = \sum_{k=0}^{\infty} D_k \sin \lambda_k x, \quad D_k = 2 \int_0^1 x \sin \lambda_k x = \frac{8(-1)^k}{\pi^2 (2k+1)^2}.$$

Подставляя это разложение в представление для  $\tilde{W}$  в уравнение, получим

$$T_k'' + \lambda_k^2 a^2 T_k(t) = D_k t.$$

Общее решение этого уравнения имеет вид

$$T_k(t) = A \cos \lambda_k t + B \sin \lambda_k t + \frac{D_k t}{\lambda_k^2 a^2}.$$



Найдем  $A = 0$ ,  $B = -\frac{D_k}{\lambda_k^3 a^3}$ .

Подставляя  $T_k = \frac{D_k}{\lambda_k^3 a^3} (\lambda_k a t - \sin \lambda_k t)$  в (4.9), получим

$$\tilde{W}(x, t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{8(-1)^k}{\pi^2 (2k+1)^2 \lambda_k^3 a^3} \cdot (\lambda_k a t - \sin \lambda_k t) \sin \lambda_k x.$$

Используя выражение для  $U(x, t)$ ,  $W(x, t)$ ,  $\tilde{W}(x, t)$ , окончательно получим

$$u(x, t) = t + \frac{16}{a\pi^3} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^3} \left[ \frac{2t}{a(2k+1)\pi} + \left( 1 - \frac{4}{a^2(2k+1)^2 \pi^2} \right) \sin \frac{a(2k+1)\pi t}{2} \right] * \sin \frac{(2k+1)\pi x}{2}.$$

2) Найти решение неоднородной смешанной задачи:

$$u_{tt} + 2u_t = u_{xx} + 4x + 8e^t \cos x, \quad 0 < x < \frac{\pi}{2},$$

$$u_x|_{x=0} = 2t, \quad u|_{x=\frac{\pi}{2}} = \pi t,$$

$$u|_{t=0} = \cos x, \quad u_t|_{t=0} = 2x.$$

Решение. Подберем функцию  $u(x, t)$ , удовлетворяющую граничным условиям (см. е), п. 4), можно взять  $u(x, t) = 2xt$ . Решение исходной задачи ищем в виде:

$$u(x, t) = v(x, t) + 2xt.$$

Тогда функция  $v(x, t)$  удовлетворяет уравнению

$$v_{tt} + 2v_t = v_{xx} + 8e^t \cos x;$$

однородным граничным условиям и начальным условиям:

$$v_x|_{x=0} = 0, \quad v|_{x=\frac{\pi}{2}} = 0,$$

$$v|_{t=0} = \cos x, \quad v_t|_{t=0} = 0.$$

Далее будем искать  $v(x, t)$  в виде:

$$v(x, t) = W(x, t) + \tilde{W}(x, t),$$

где  $W$  и  $\tilde{W}$  являются решениями задач:

а)

$$\tilde{W}_{tt} + 2\tilde{W}_t = W_{xx};$$

$$\tilde{W}_x|_{x=0} = \tilde{W}|_{x=\frac{\pi}{2}} = 0, \quad \tilde{W}|_{t=0} = \cos x, \quad \tilde{W}_t|_{t=0} = 0.$$

б)

$$W_{tt} + 2W_t = W_{xx} + 8e^t \cos x;$$

$$W_x|_{x=0} = W|_{x=\frac{\pi}{2}} = 0, \quad W|_{t=0} = W_t|_{t=0} = 0.$$

Задачу а) решаем методом разделения переменных. Полагая:

$$\tilde{W}(x, t) = T(t)X(x),$$

получим

$$T''X + 2T'X = TX',$$

отсюда

$$\frac{T'' + 2T'}{T} = \frac{X''}{X} = -\lambda^2.$$

Приходим к следующей задаче Штурма-Лиувилля:

$$X'' + \lambda^2 X = 0, \quad X'(0) = X\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

имеет собственные значения

$$\lambda_k^2 = (2k + 1)^2 \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

и собственные функции

$$X_k(x) = \cos(2k + 1)x.$$

Решая уравнение:

$$T_k'' + 2T_k' + (2k + 1)^2 T_k = 0,$$

получим

$$T_0 = A_0 e^{-t} + B_0 t e^{-t},$$

$$T_k = A_k e^{-t} \cos 2\sqrt{k^2 + k} \cdot t + B_k e^{-t} \sin 2\sqrt{k^2 + k} \cdot t \quad (k = 0, 1, 2, 3, \dots).$$

Решение  $\tilde{W}(x, t)$  имеет вид:

$$\tilde{W}(x, t) = (A_0 + B_0 t) e^{-t} \cos x + \sum_{k=1}^{\infty} \left( A_k \cos 2\sqrt{k^2 + k} \cdot t + B_k \sin 2\sqrt{k^2 + k} \cdot t \right) * e^{-t} \cos(2k + 1)x.$$

Из начальных условий найдем коэффициенты  $A_0, B_0, A_k, B_k$

$$\tilde{W}(x, 0) = \cos x = A_0 \cos x + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos(2k + 1)x \Rightarrow A_0 = 1, A_k = 0, \quad k = 1, 2, \dots$$

$$W_t(x, 0) = 0 = (-A_0 + B_0) \cos x + \sum_{k=1}^{\infty} B_k 2\sqrt{k^2 + k} \cdot \cos(2k + 1)x$$

отсюда следует, что  $B_0 = 1, B_k = 0 \quad (k = 1, 2, 3, \dots)$

Решение задачи а) будет:

$$\tilde{W}(x, t) = (1 + t) e^{-t} \cos x.$$

Решение задачи б) ищем в виде:

$$W(x, t) = \sum_{k=0}^{\infty} T_k(t) \cos(2k + 1)x.$$

Подставляя в уравнение, получим:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left[ T_k'' + 2T_k' + (2k + 1)^2 T_k \right] \cos(2k + 1)x = 8e^t \cos x,$$

отсюда

$$T_0'' + 2T_0' + T_0 = 8e^t; \quad T_k'' + 2T_k' + (2k + 1)^2 T_k = 0, \quad (k = 1, 2, \dots)$$

Кроме того, из начальных условий для  $W(x, t)$  имеем:

$$T_k(0) = T_k'(0) = 0 \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

Решая задачу Коши, найдем:

$$T_0 = -2e^{-t} - 4te^{-t} + 2e^t; \quad T_k \equiv 0, \quad (k = 1, 2, \dots)$$

Таким образом

$$W(x, t) = (-2e^{-t} - 4te^{-t} + 2e^t) \cos x,$$

$$W + \tilde{W} = (-e^{-t} - 3te^{-t} + 2e^t) \cos x$$

и решение исходной смешанной задачи запишется в виде:

$$u = (2e^t - e^{-t} - 3te^{-t}) \cos x + 2xt.$$

3) Решить уравнение:

$$u_{tt} = 4u_{xx} + 5(u - 2) + (1 + x)(7 - 5t^2) - (t + 8) \sin 2t \cdot \sin \frac{3}{2}x,$$

удовлетворяющее условиям:

$$u|_{x=0} = t^2 + 1 \qquad u_x|_{x=\pi} = t^2 - 1 \qquad 0 < t < \infty$$

$$u|_{t=0} = \sin \frac{3}{2}x + 1 - x \qquad u_t|_{t=0} = 0 \qquad 0 < x < \pi$$

Решение. Подберем функцию  $U(x, t)$ , удовлетворяющую граничным условиям (см. б))

$$U(x, t) = t^2 + 1 + x(t^2 - 1)$$

Решение исходной задачи ищем в виде:

$$u(x, t) = v(x, t) + t^2 + 1 + x(t^2 - 1)$$

Вычислим:

$$u_t = v_t + 2t + 2xt \qquad u_x = v_x + t^2 - 1$$

$$u_{tt} = v_{tt} + 2 + 2x \qquad u_{xx} = v_{xx}$$

Тогда функция  $v(x, t)$  удовлетворяет уравнению:

$$v_{tt} = 4v_{xx} + 5v - (t + 8) \sin 2t \cdot \sin \frac{3}{2}x,$$

однородным граничным:

$$v|_{x=0} = 0 \qquad v_x|_{x=\pi} = 0$$

и начальным условиям:

$$v|_{t=0} = \sin \frac{3}{2}x \quad v_t|_{t=0} = 0$$

Далее будем искать  $v(x, t)$  в виде:

$$v(x, t) = W(x, t) + \tilde{W}(x, t),$$

где  $\tilde{W}$  и  $W$  являются соответственно решениями задач:

$$a) \quad \tilde{W}_{tt} = 4\tilde{W}_{xx} + 5\tilde{W}$$

$$\tilde{W}|_{x=0} = 0, \quad \tilde{W}_x|_{x=\pi} = 0$$

$$\tilde{W}|_{t=0} = \sin \frac{3}{2}x, \quad \tilde{W}_t|_{t=0} = 0$$

$$б) \quad W_{tt} = 4W_{xx} + 5W - (t + 8)\sin 2t \cdot \sin \frac{3}{2}x$$

$$W|_{x=0} = 0, \quad W_x|_{x=\pi} = 0$$

$$W|_{t=0} = 0, \quad W_t|_{t=0} = 0$$

Применяем метод разделения переменных для решения задачи *a)*

$$\tilde{W}(x, t) = X(x)T(t)$$

получаем:

$$\frac{T'' - 5T}{4T} = \frac{X''}{X} = -\lambda^2$$

Решаем задачу Штурма-Лиувилля:

$$X'' + \lambda^2 X = 0, \quad X(0) = X'(\pi) = 0$$

получаем:

$$X = A \cos \lambda x + B \sin \lambda x$$

$$X'(x) = -\lambda A \sin \lambda x + \lambda B \cos \lambda x$$

отсюда:

$$A = 0, \quad \cos \lambda \pi = 0, \quad \lambda_k = k - \frac{1}{2}$$

$$X_k(x) = \sin\left(k - \frac{1}{2}\right)x, \quad k = 1, 2, \dots$$

Решая уравнение

$$T'' + (4\lambda_k^2 - 5)T = 0$$

или

$$T'' + 4(k^2 - k - 1)T = 0,$$

получим:

$$\text{при } k = 1 \quad T_1(t) = C_1 e^{2t} + D_1 e^{-2t},$$

$$\text{при } k = 2, 3, \dots \quad T_k = C_k \cos \tilde{\lambda}_k t + D_k \sin \tilde{\lambda}_k t,$$

$$\text{где } \tilde{\lambda}_k = 2\sqrt{k^2 - k - 1}$$

Решение  $\tilde{W}(x, t)$  имеет вид:

$$\tilde{W}(x, t) = C_1 e^{2t} + D_1 e^{-2t} + \sum_{k=3}^{\infty} (C_k \cos \tilde{\lambda}_k t + D_k \sin \tilde{\lambda}_k t) \sin\left(k - \frac{1}{2}\right)x$$

используя начальные условия, получим:

$$C_1 = 0, \quad D_1 = 0$$

$$C_2 = 1, \quad D_2 = 0$$

Итак,

$$\tilde{W}(x, t) = \cos 2t \cdot \sin \frac{3}{2}x$$

Решение задачи б) ищем в виде:

$$W(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} T_k(t) \sin \lambda_k x \quad \lambda_k = k - \frac{1}{2}$$

Подставляя предполагаемую форму решения в уравнение, получаем:

$$\sum_{k=1}^{\infty} (T_k'' + (4\lambda_k^2 - 5)T_k) \sin \lambda_k x = -(t + 8) \sin 2t \cdot \sin \frac{3}{2}x$$

отсюда следует, что

$$T_k(t) \equiv 0 \quad \text{при } k = 1, 3, 4, \dots,$$

а при  $k = 2$

$$T_2'' + 4T_2 = -(t + 8) \sin 2t$$

Решая это уравнение, получаем с учетом начальных значений:

$$T_2(t) = -\sin 2t + \frac{t}{16} [2(t + 16) \cos 2t - \sin 2t]$$

Итак,

$$W(x, t) = T_2 \cdot \sin \frac{3}{2} x = -\sin 2t \cdot \sin \frac{3}{2} x + \frac{t}{16} [2(t + 16) \cos 2t - \sin 2t] \sin \frac{3}{2} x$$

Решение исходной задачи:

$$u(x, t) = U(x, t) + \tilde{W}(x, t) + W(x, t)$$

окончательно получаем:

$$u(x, t) = \frac{1}{16} [2(t^2 + 16t + 8) \cos 2t - (t + 16) \sin 2t] \sin \frac{3}{2} x + t^2 + 1 + x(t^2 - 1)$$

4) Решить уравнение

$$u_{tt} + 6u_t = 9u_{xx} - 2(\pi - 2x)(1 + 6t) + 18 + 4e^{-t} \cos 3x \quad \begin{array}{l} 0 < x < \frac{\pi}{2}, \\ t > 0 \end{array}$$

удовлетворяющее условиям:

$$u_x|_{x=0} = 2t^2, \quad u|_{x=\frac{\pi}{2}} = 3t \quad 0 < t < \infty$$

$$u|_{t=0} = 0, \quad u_t|_{t=0} = 3 + \cos x \quad 0 < x < \frac{\pi}{2}$$

Решение. Подберем функцию  $U(x, t)$ , удовлетворяющую граничным условиям

$$U(x, t) = 3t + 2xt^2 - \pi t^2$$

Решением исходной задачи ищем в виде:

$$u(x, t) = v(x, t) + 3t + 2xt^2 - \pi t^2.$$

Вычислим

$$u_t = v_t + 3 - 2\pi t + 4xt,$$

$$u_x = v_x + 2t^2,$$

$$u_{tt} = v_{tt} - 2t + 4x,$$

$$u_{xx} = v_{xx}.$$

Тогда функция  $v(x, t)$  удовлетворяет уравнению:

$$v_{tt} + 6v_t = 9v_{xx} + 4e^{-t} \cos 3x,$$

однородным граничным условиям:

$$v_x|_{x=0} = 0, \quad v|_{x=\frac{\pi}{2}} = 0$$

и начальным условиям:

$$v|_{t=0} = 0 \quad v_t|_{t=0} = \cos x$$

Далее будем искать  $v(x, t)$  в виде:

$$v(x, t) = W(x, t) + \tilde{W}(x, t),$$

где  $\tilde{W}$  и  $W$  являются соответственно решениями задач:

$$a) \quad \tilde{W}_{tt} + 6\tilde{W}_t = 9\tilde{W}_{xx}$$

$$\tilde{W}_x|_{x=0} = 0, \quad \tilde{W}|_{x=\frac{\pi}{2}} = 0$$

$$\tilde{W}|_{t=0} = 0, \quad \tilde{W}_t|_{t=0} = \cos x$$

$$б) \quad W_{tt} + 6W_t = 9W_{xx} + 4e^{-t} \cos 3x$$

$$W_x|_{x=0} = 0, \quad W|_{x=\frac{\pi}{2}} = 0$$

$$W|_{t=0} = 0, \quad W_t|_{t=0} = 0$$

Применяем метод разделения переменных для решения задачи *a)*

$$\tilde{W}(x, t) = X(x)\Gamma(t)$$

$$\frac{\Gamma'' + 6\Gamma'}{9\Gamma} = \frac{X''}{X} = -\lambda^2$$

Решаем задачу Штурма-Лиувилля:



$$X'' + \lambda^2 X = 0, \quad X'(0) = X\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0.$$

Получаем:

$$X = A \cos \lambda x + B \sin \lambda x.$$

Из краевых условий находим, что  $B = 0$ ,  $A = 1$

$$\lambda_k = 2k - 1 \quad k = 1, 2, \dots,$$

$$X_k(\lambda) = \cos(2k - 1)x$$

Решая уравнение:

$$T'' + 6T' + 9\lambda_k^2 T = 0,$$

получаем:

$$T_k(t) = e^{-3t} (C_k \cos \tilde{\lambda}_k t + D_k \sin \tilde{\lambda}_k t),$$

где

$$\tilde{\lambda}_k = \sqrt{9\lambda_k^2 - 9} = 3\sqrt{(2k-1)^2 - 1} = 6\sqrt{k(k-1)}, \quad \text{при } k \neq 1$$

если  $k = 1$ , то  $T_1 = e^{-3t} (C_1 t + D_1)$ .

Решение  $\tilde{W}(x, t)$  имеет вид:

$$\tilde{W}(x, t) = e^{-3t} (C_1 t + D_1) + \sum_{k=2}^{\infty} e^{-3t} (C_k \cos \tilde{\lambda}_k t + D_k \sin \tilde{\lambda}_k t) \cos(2k-1)x$$

Используя начальные условия

$$\tilde{W}|_{t=0} = 0, \quad W_t|_{t=0} = \cos x$$

найдем  $C_1, D_1, C_k, D_k$

$$C_1 = 0, \quad D_1 = 0$$

$$C_k = 0, \quad D_k = 0$$

Итак

$$\tilde{W}(x, t) = te^{-3t} \cdot \cos x$$

Решение задачи б) ищем в виде:

$$W(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \bar{T}_k(t) \cos(2k-1)x$$

где

$$\bar{T}_k(0) = 0,$$

$$\bar{T}'_k(0) = 0$$

Подставляя предполагаемую форму решения в уравнение, получаем:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left( \bar{T}''_k + 6\bar{T}'_k + 9(2k-1)^2 \bar{T}_k \right) \cos(2k-1)x = 4e^{-t} \cos 3x,$$

отсюда следует, что

$$\bar{T}''_2 + 6\bar{T}'_2 + 81\bar{T}_2 = 4e^{-t}.$$

Решая неоднородное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами, получаем:

$$\bar{T}_2 = e^{-3t} \left( C_1 \cos 6\sqrt{2}t + D_1 \sin 6\sqrt{2}t \right) + \frac{1}{19} e^{-t}.$$

Используя начальные условия

$$\bar{T}_2(0) = 0, \quad \bar{T}'_2(0) = 0,$$

найдем  $C_1$  и  $D_1$ :

$$C_1 = -\frac{1}{19}; \quad D_1 = -\frac{\sqrt{2}}{114}.$$

Итак,

$$W(x, t) = -\frac{1}{114} \left[ e^{-3t} \left( 6 \cos 6\sqrt{2}t + \sqrt{2} \sin 6\sqrt{2}t \right) - 6e^{-t} \right] \cos 3x.$$

Решение исходной задачи

$$u(x, t) = U(x, t) + \tilde{W}(x, t) + W(x, t),$$

окончательно получаем:

$$u(x, t) = 3t - (\pi - 2x)t^2 + te^{-3t} \cos x - \frac{1}{114} \left[ e^{-3t} (6 \cos 6\sqrt{2}t + \sqrt{2} \sin 6\sqrt{2}t) - 6e^{-t} \right] \cos 3x.$$

### 7.1.2 Варианты индивидуальных заданий и ответы к ним

Решить следующие смешанные задачи:

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad 0 < x < l, \quad t > 0;$$

$$u(0, t) = 0, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=l} = \frac{A}{E\rho} t^3, \quad t > 0$$

$$u(x, 0) = 0, \quad u_t(x, 0) = 0, \quad 0 < x < l.$$

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + \frac{1}{\rho} x^3 \sin \omega t, \quad 0 < x < l, \quad t > 0,$$

$$u(x, 0) = 0, \quad u_t(x, 0) = 0, \quad 0 < x < l,$$

$$u(0, t) = 0, \quad u(l, t) = 0, \quad t > 0.$$

$$u_{tt} + 2u_t = u_{xx} + 4x + 8e^t \cos x, \quad 0 < x < \frac{\pi}{2};$$

$$u_x|_{x=0} = 2t, \quad u|_{x=\frac{\pi}{2}} = \pi t;$$

$$u|_{t=0} = \cos x, \quad u_t|_{t=0} = 2x.$$

$$u_{tt} = u_{xx} + 10u + 2 \sin 2x \cos x - 10 - 20x, \quad 0 < x < \frac{\pi}{2};$$

$$u|_{x=0} = 1, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=\frac{\pi}{2}} = 2;$$

$$u|_{t=0} = 2x + 1, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = 0.$$

$$u_{tt} = u_{xx} + 2t, \quad x \in [0, 1], \quad t > 0;$$

$$u|_{x=0} = u|_{x=1} = 0,$$

$$u|_{t=0} = 8 \sin \pi x \cos \pi x, \quad u_t|_{t=0} = 3\pi(3 \sin \pi x - 4 \sin^3 \pi x) + (x - x^2).$$

$$u_{tt} = 4u_{xx} - 24x, \quad x \in [0,1], \quad t > 0;$$

$$u|_{x=0} = 0, \quad u_x|_{x=1} = 3,$$

$$u|_{t=0} = \sin \frac{\pi x}{2} + x^3, \quad u_t|_{t=0} = 5\pi \sin \frac{5\pi x}{2}.$$

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + \cos 3x, \quad x \in [0, \pi], \quad t > 0;$$

$$u_x|_{x=0} = u_x|_{x=\pi} = 0,$$

$$u|_{t=0} = \cos x + 3 \cos 3x, \quad u_t|_{t=0} = \cos 2x.$$

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + 4 \cos \frac{3\pi x}{2}, \quad x \in [0,1], \quad t > 0;$$

$$u_x|_{x=0} = u|_{x=1} = 0,$$

$$u|_{t=0} = \cos \frac{3\pi}{2} x + \cos \frac{\pi}{2} x, \quad u_t|_{t=0} = 2 \cos \frac{3\pi}{2} x.$$

$$u_{tt} + 3\pi^2 u = u_{xx} + (x - x^2) \sin 2\pi t, \quad x \in [0,1], \quad t > 0;$$

$$u|_{x=0} = u|_{x=1} = 0,$$

$$u|_{t=0} = 0, \quad u_t|_{t=0} = 0.$$

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + \sin 2t,$$

$$u_x(0, t) = 0, \quad u_x(l, t) = \frac{2}{a} \sin \frac{2lx}{a} \sin 2t,$$

$$u(x, 0) = 0, \quad u_t(x, 0) = -2 \cos \frac{2x}{a}, \quad 0 < x < l, \quad t > 0;$$

$$u_{tt} = u_{xx},$$

$$u(0, t) = t, \quad u_x(\pi, t) = 1,$$

$$u(x, 0) = \sin \frac{x}{2}, \quad u_t(x, 0) = 1, \quad 0 < x < \pi, \quad t > 0.$$

$$u_{tt} = u_{xx},$$

$$u(0, t) = t^2, \quad u(\pi, t) = t^3,$$

$$u(x, 0) = \sin x, \quad u_t(x, 0) = 0, \quad 0 < x < \pi, \quad t > 0.$$

$$u_{tt} = u_{xx},$$

$$u(0, t) = e^{-t}, \quad u(\pi, t) = t,$$

$$u(x, 0) = \sin x \cos x, \quad u_t(x, 0) = 1, \quad 0 < x < \pi, \quad t > 0.$$

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} - e^{-t}, \quad 0 < x < l, \quad t > 0,$$

$$\begin{cases} u(0, t) = 0 & u(x, 0) = x \\ u_x(l, t) = e^{-t} & u_t(x, 0) = 1 \end{cases}$$

$$u_{tt} - u_{xx} + 2u_t = 4x + 8e^t \cos x, \quad 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}, \quad 0 \leq t < \infty,$$

$$u_x|_{x=0} = 2t, \quad u|_{x=\frac{\pi}{2}} = \pi t$$

$$u|_{t=0} = \cos x, \quad u_t|_{t=0} = 2x$$

$$u_{tt} = 4u_{xx} + 5u - \frac{4}{\pi} e^{-t} (\pi + x(2 \sin 2t + \cos 2t - 1)) - (t^2 + 1) \sin x$$

$$u|_{x=0} = e^{-t}, \quad u|_{x=\pi} = e^{-t} \sin 2t$$

$$u|_{t=0} = \sin x - \frac{x}{\pi} + 1, \quad u_t|_{t=0} = \frac{3x}{\pi} - 1$$

$$u_{tt} - u_{xx} - 2u_t = 4t(\sin x - x) \quad 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$$

$$u|_{x=0} = 3, \quad u_x|_{x=\frac{\pi}{2}} = t^2 + t$$

$$u|_{t=0} = 3, \quad u_t|_{t=0} = x + \sin x$$

$$u_{tt} = 25u_{xx} + 2x - e^{-3t} \left( \frac{9x^2}{\pi} - 9x - \frac{50}{\pi} \right) + \sin 20t \cos 4x$$

$$u_x|_{x=0} = e^{-3t} + t^2, \quad u_x|_{x=\frac{\pi}{2}} = t^2$$

$$u|_{t=0} = x(1 - \frac{x}{\pi}), \quad u_t|_{t=0} = \cos 2x - 3x(1 - \frac{x}{\pi})$$

$$u_{tt} = 16u_{xx} - 2u_t + 2\cos t - \sin t + e^{-t} \sin \frac{3}{4}x$$

$$u|_{x=0} = \sin t, \quad u_x|_{x=2\pi} = e^{-2t}$$

$$u|_{t=0} = \sin \frac{x}{4} + x, \quad u_t|_{t=0} = 1 - 2x$$

$$u_{tt} = \frac{1}{4}u_{xx} - u_t - 4\cos 2t - 2\sin 2t + e^{-2t} \cos \frac{5}{2}x$$

$$u_x|_{x=0} = e^{-t}, \quad u|_{x=\pi} = \cos 2t$$

$$u|_{t=0} = 1 - \pi + x, \quad u_t|_{t=0} = \pi - x + \cos \frac{x}{2}$$

$$21. u_{tt}(x, t) - u_{xx}(x, t) = (\pi - x)xt, \quad x \in (0, \pi),$$

$$u(x, 0) = 0, \quad u_t(x, 0) = \sin^2 x,$$

$$u(0, t) = u(\pi, t) = 0.$$

$$22. u_{tt} + 4u = u_{xx} + 4t^2x + 8t, \quad x \in (0, 1), \quad t > 0,$$

$$u(x, 0) = 0, \quad u_t(x, 0) = 2,$$

$$u_x(0, t) = u_x(1, t) = t^2.$$

$$23. u_{tt} = 9u_{xx}(x, t), \quad 0 < x < 4, \quad t > 0,$$

$$u_x(0, t) = 0, \quad u(u, t) = 0,$$

$$u(x, 0) = 0, \quad u_t(x, 0) = 16 - x^2.$$

$$24. u_{tt} - u_{xx} + 2u_t = 4x + 8e^t \cos x, \quad 0 < x < \frac{\pi}{2},$$

$$u_x|_{x=0} = 2t, \quad u|_{x=\frac{\pi}{2}} = \pi t,$$

$$u|_{t=0} = \cos x, \quad u_t|_{t=0} = 2x.$$

$$25. u_{tt} - u_{xx} - 2u_t = ut(\sin x - x), \quad 0 < x < \frac{\pi}{2},$$

$$u|_{x=0} = 3, \quad u_x|_{x=\frac{\pi}{2}} = t^2 + t,$$

$$u|_{t=0} = 3, \quad u_t|_{t=0} = x + \sin x.$$

### ОТВЕТЫ

$$u(x, t) = \frac{A}{E\rho} xt^3 + \frac{4l^2}{\pi^2 a^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta_n \left( t - \frac{2l}{\pi a(2n-1)} \right)}{(2n-1)^2} \sin \frac{\pi a(2n-1)}{2l} t * \\ * \sin \frac{\pi(2n-1)}{2l} x$$

$$\beta_n = (-1)^n \frac{48Al^2}{ES\pi^2(2n-1)^2}$$

$$u(x, t) = \frac{2}{\rho \pi^4 a} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{l^5 (n^2 \pi^2 l - 6) \left( n\pi a \sin \omega t - \omega l \sin \frac{n\pi a}{l} t \right)}{n^4 (n^2 \pi^2 a^2 - \omega^2 l^2)} \sin \frac{\pi n}{l} x.$$

$$u(x, t) = (2e^t - e^{-t} - 3te^{-t}) \cos x + 2xt.$$

$$u(x, t) = (1 + 2x) + \frac{1}{18} (e^{3t} + e^{-3t} - 2) \sin x + \frac{1}{2} (e^t + e^{-t} - 2) \sin 3x.$$

$$u(x, t) = (x - x^2)t + 4 \cos 2\pi t \sin 2\pi x + \sin 3\pi x \sin 3\pi t.$$

$$u(x, t) = x^3 + \sin \frac{\pi x}{2} \cos \pi t + \sin \frac{5\pi x}{2} \sin 5\pi t.$$

$$u(x, t) = \cos x \cos at + \frac{1}{2a} \cos 2x \sin 2at + \left\{ \left( 3 - \frac{1}{(3a)^2} \right) \cos 3at + \frac{1}{(3a)^2} \right\} \cos 3x.$$

$$u(x, t) = \cos \frac{a\pi t}{2} \cos \frac{\pi x}{2} + \left\{ \left( 1 - \frac{16}{(3\pi a)^2} \right) \cos \frac{3a\pi t}{2} + \frac{4}{3a\pi} \sin \frac{3a\pi t}{2} + \frac{16}{(3\pi a)^2} \right\} * \\ * \cos \frac{3\pi x}{2}$$

$$u(x, t) = \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{\pi^5 (2p+1)^3 p(p+1)} \left( \sin 2\pi t - \frac{\sin 2\pi \sqrt{p^2 + p + 1} t}{\sqrt{p^2 + p + 1}} \right) * \\ * \sin(2p+1)\pi x + \frac{1}{\pi^4} \left( \frac{1}{2\pi} \sin 2\pi t - t \cos 2\pi t \right)$$

$$10. u(x, t) = \frac{t}{2} - \left( \frac{1}{4} + \cos \frac{2}{a} x \right) \sin 2t.$$

Решение искать в виде:  $u(x, t) = v(x, t) + f(x) \sin 2t$ .

$$11. u(x, t) = x + t + \cos \frac{t}{2} \sin \frac{x}{2} - \frac{8}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^2} \cos \frac{(2k+1)t}{2} \sin \frac{(2k+1)x}{2}.$$

$$12. u(x, t) = \left( 1 - \frac{x}{\pi} \right) t^2 + \frac{x}{\pi} t^3 + \sin x \cos t + \\ + \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3} \left[ (-1)^k 3t - 1 + \cos kt - \frac{(-1)^k 3}{k} \sin kt \right] \sin kx.$$

$$13. u(x, t) = \left( 1 - \frac{x}{\pi} \right) e^{-t} + \frac{xt}{\pi} + \frac{1}{2} \cos 2t \sin 2x - \\ - \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(1+k^2)} \left[ e^{-t} + k^2 \cos kt - \left( 2k + \frac{1}{k} \right) \sin kt \right] \sin kx.$$

$$14. u(x, t) = x e^{-t} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4}{\pi (2n+1)} \left( 1 + \frac{a^2 \pi^2 (2n+1)^2}{4l^2} \right) \left( 1 + (-1)^n \frac{2l}{\pi (2n-1)} \right) \\ \cdot \left[ -e^{-t} + \cos \frac{a\pi (2n+1)}{2l} t - \frac{a\pi (2n+1)}{2l} \sin \frac{a\pi (2n+1)}{2l} t \right] \sin \frac{\pi (2n+1)}{2l} x.$$



$$15. u(x, t) = 2xt + (2e^t - e^{-t} - 3te^{-t}) \cos x$$

$$16. u(x, t) = (-2cht + t^2 + 3) \sin x + e^{-t} \left(1 + \frac{x}{\pi} (\sin 2t - 1)\right).$$

$$17. u(x, t) = 3 + x(t + t^2) + (5te^t - 8e^t + 4t + 8) \sin x.$$

18.

$$u(x, t) = \frac{1}{10} \sin 10t \cos 2x + \frac{1}{800} (\sin 20t - 20t \cos 20t) \cos 4x + t^2 x + e^{-3t} \left(1 - \frac{x}{\pi}\right) x.$$

$$19. u(x, t) = e^{-t} (1 + t) \sin \frac{x}{4} + \frac{1}{8} e^{-t} (1 - \cos 2\sqrt{2}t) \sin \frac{3}{4} x + \sin t + x e^{-2t}.$$

$$20. u(x, t) = \frac{4\sqrt{3}}{3} e^{-\frac{t}{2}} \operatorname{sh} \frac{\sqrt{3}}{4} t \cos \frac{x}{2} - \frac{16}{57} e^{-\frac{t}{2}} \left(\cos \frac{\sqrt{21}}{4} t - 2\sqrt{\frac{3}{7}} \sin \frac{\sqrt{21}}{4} t - e^{-\frac{3t}{2}}\right) \cos \frac{5}{2} x + \cos 2t + (x - \pi) e^{-t}.$$

$$21. u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8}{\pi (2n-1)^2} - \frac{\sin(2n-1)t}{(2n-1)^2 - u} + \frac{t}{(2n-1)^3} - \frac{\sin(2n-1)t}{(2n-1)^4} \sin(2n-1)x.$$

$$22. u(x, t) = xt^2 + \frac{1}{4} \cos 2t + 2t - \frac{1}{4} + \frac{8}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - \cos \alpha_n t}{(2n-1)^2 \alpha_n^2} \cos \pi (2n-1)x,$$

$$\text{где } \alpha_n^2 = 4 + \pi^2 (2n-1)^2.$$

$$23. u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{256(-1)^k}{3 \left(\left(k + \frac{1}{2}\right)\pi\right)^4} \sin \frac{3 \left(k + \frac{1}{2}\right)\pi t}{4} \cos \frac{\left(k + \frac{1}{2}\right)\pi x}{4}.$$

$$24. u(x, t) = 2xt + (2e^t - e^{-t} - 3te^{-t}) \cos x.$$

$$25. 3 + x(t + t^2) + (5te^t - 8e^t + 4t + 8) \sin x.$$

## 7.2 Уравнения параболического типа

### 7.2.1 Примеры решения неоднородного уравнения теплопроводности

1) Решить смешанную задачу для неоднородного уравнения теплопроводности

$$u_t = u_{xx} + x(t^2 + 1), \quad 0 < x < 1, \quad t > 0,$$

$$u_x|_{x=0} = t, \quad u|_{x=1} = t, \quad u|_{t=0} = 0.$$

Решение. Подберем функцию  $U(x, t)$ , удовлетворяющую граничным условиям  $U(x, t) = xt$ .

Поэтому, если искать решение в виде  $u = v + xt$ , то для функции  $v$  получим следующую задачу:

$$v_t = v_{xx} + xt^2,$$

$$v_x|_{x=0} = v|_{x=1} = 0,$$

$$v|_{t=0} = 0.$$

Применяя метод разделения переменных для решения однородного уравнения  $v_t - v_{xx} = 0$ , положим  $v(x, t) = X(x)T(t)$ .

Получим задачу Штурма-Лиувилля

$$X''(x) + \lambda^2 X(x) = 0, \quad X'(0) = 0, \quad X(1) = 0,$$

из решения которой найдем систему собственных значений и собственных функций:

$$\lambda_k = \frac{(2k+1)\pi}{2}, \quad X_k(x) = \cos \lambda_k x.$$

Решение задачи ищем в виде

$$v(x, t) = \sum_{k=0}^{\infty} T_k(t) \cos \lambda_k x$$

Разложим функцию  $x$  в ряд Фурье по системе функций

$$x = \sum_{k=0}^{\infty} D_k \cos \lambda_k x,$$

$$D_k = 2 \int_0^1 x \cos \frac{(2k+1)\pi x}{2} dx = \frac{4}{\pi(2k+1)} - x \sin \frac{(2k+1)\pi x}{2} \Big|_0^1 - \frac{4}{\pi(2k+1)} *$$

$$* \int_0^1 \sin \frac{(2k+1)\pi x}{2} dx = \frac{4(-1)^k}{\pi(2k+1)} - \frac{8}{\pi^2(2k+1)^2}.$$

Подставляя выражения в исходное уравнение, получим

$$T'_k + \lambda_k^2 T_k = D_k t^2 \text{ и начальное условие } T_k(0) = 0.$$

$$\text{Решение этой задачи будет } T_k = A_k e^{-\lambda_k^2 t} + \tilde{T}_k.$$

Здесь  $\tilde{T}_k$  частное решение неоднородного уравнения, его можно искать в виде

$$\tilde{T}_k = b_k t^2 + c_k t + d_k; \text{ найдя } b_k, c_k, d_k, \text{ получим}$$

$$\tilde{T}_k(t) = A_k e^{a^2 \lambda_k^2 t} + \frac{D_k}{\lambda_k^2} \left( t^2 - \frac{2t}{\lambda_k^2} + \frac{2}{\lambda_k^4} \right). \text{ А из начального условия следует, что}$$

$$A_k = -\frac{2D_k}{\lambda_k^6}. \text{ Следовательно, } T_k = \frac{D_k}{\lambda_k^2} \left( t^2 - \frac{2t}{\lambda_k^2} + \frac{2}{\lambda_k^4} (e^{-\lambda_k^2 t} - 1) \right).$$

Решение исходной задачи имеет вид

$$u(x, t) = tx + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{D_k}{\lambda_k^2} \left( t^2 - \frac{2t}{\lambda_k^2} + \frac{2}{\lambda_k^4} (e^{-\lambda_k^2 t} - 1) \right) \cos \lambda_k x,$$

$$\text{где } \lambda_k = \frac{\pi(2k+1)}{2}, D_k = \frac{4}{\pi(2k+1)} \left( (-1)^k - \frac{2}{\pi(2k+1)} \right).$$

2) Найти решение смешанной неоднородной задачи

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - u = xt(2-t) + 2 \cos t, \quad 0 < x < \pi$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=0} = t^2, \quad \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=\pi} = t^2; \quad u(x, 0) = \cos 2x.$$

Решение. Подберем функцию  $U(x, t)$ , удовлетворяющую граничным условиям

$$U(x, t) = t^2 \cdot x + \frac{t^2 - t^2}{2} x^2 = t^2 \cdot x.$$

Поэтому, если искать решение в виде  $u = v + t^2 \cdot x$ , то для функции  $v$  получим следующую задачу:

$$\frac{\partial v}{\partial t} - \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - v = 2 \cos t,$$

$$\left. \frac{\partial v}{\partial x} \right|_{x=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial v}{\partial x} \right|_{x=\pi} = 0; \quad v(x,0) = \cos 2x.$$

Решение ищем в виде:

$$v = \tilde{W} + W,$$

где

$$\frac{\partial \tilde{W}}{\partial t} - \frac{\partial^2 \tilde{W}}{\partial x^2} - \tilde{W} = 0,$$

$$\left. \frac{\partial \tilde{W}}{\partial x} \right|_{x=0} = \left. \frac{\partial \tilde{W}}{\partial x} \right|_{x=\pi} = 0, \quad \tilde{W}(x,0) = \cos 2x.$$

$$\frac{\partial W}{\partial t} - \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} - W = 2 \cos t,$$

$$\left. \frac{\partial W}{\partial x} \right|_{x=0} = \left. \frac{\partial W}{\partial x} \right|_{x=\pi} = 0, \quad W(x,0) = 0.$$

Для построения функции  $\tilde{W}(x, t)$  применим метод Фурье:

$$\tilde{W}(x, t) = T(t)X(x).$$

Подставляя в уравнение  $\tilde{W}(x, t)$  и в граничные условия, получим:

$$T'X - TX'' - TX = 0, \quad \frac{T'}{T} - 1 = \frac{X''}{X} = -\lambda^2;$$

$$T' + (\lambda^2 - 1)T = 0$$

отсюда

$$T = e^{-(\lambda^2 - 1)t}.$$

Задача Штурма-Лиувилля:

$$\left. \begin{aligned} X'' + \lambda^2 X &= 0 \\ X'(0) = X'(\pi) &= 0 \end{aligned} \right\}$$

отсюда

$$X_k(x) = \cos kx,$$

$$\lambda_k^2 = k^2 \quad (k^2 = 0, 1, 2, \dots)$$

Применяя принцип суперпозиции, запишем

$$\tilde{W}(x, t) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k e^{-(k^2-1)t} \cos kx$$

Удовлетворим начальному условию

$$\tilde{W}(x, 0) = \cos 2x = \sum_{k=0}^{\infty} A_k \cos kx$$

отсюда

$$A_2 = 1, \quad A_k = 0, \quad (k = 0, 1, 3, 4, \dots)$$

$$\tilde{W}(x, t) = e^{-3t} \cos 2x.$$

Решение  $W(x, t)$  ищем в виде ряда по собственным функциям соответствующей однородной задачи:

$$W(x, t) = \sum_{k=0}^{\infty} T_k(t) \cos kx, \quad T_k(0) = 0.$$

Подставляя  $W(x, t)$  в уравнение, получим:

$$\sum_{k=0}^{\infty} [T_k' t' + (k^2 - 1)T_k] \cos kx = 2 \cos t, \quad T_k(0) = 0.$$

Разлагая правую часть в ряд Фурье:

$$2 \cos t = \sum_{k=0}^{\infty} f_k(t) \cos kx$$

получим:

$$f_0(t) = 2 \cos t, \quad f_k(t) \equiv 0, \quad (k = 1, 2, 3, \dots)$$

можем задачу для  $T_k$  записать в виде:

$$\sum_{k=0}^{\infty} [T_k' + (k^2 - 1)T_k - f_k(t)] \cos kx = 0, \quad T_k(0) = 0$$

отсюда

$$T_0' - T_0 - 2 \cos t = 0, \quad T_0(0) = 0$$

решая получим:

$$T_0(t) = e^t + \sin t - \cos t;$$

$$T_k' - T_k = 0, \quad T_k(0) = 0,$$

отсюда

$$T_k(t) = 0 \quad (k = 1, 2, \dots)$$

Таким образом, имеем:

$$W(x, t) = (e^t + \sin t - \cos t) \cos(0x).$$

Подставляя в выражение

$$u(x, t) = v(x, t) + t^2 x$$

значение  $v(x, t) = \tilde{W}(x, t) + W(x, t)$  получим решение исходной неоднородной задачи:

$$u(x, t) = e^{-3t} \cos 2x + (e^t + \sin t - \cos t) \cdot 1 + t^2 x.$$

3) Найти решение смешанной неоднородной задачи

$$u_t = a^2 u_{xx}$$

$$\begin{cases} u(0, t) = T & 0 \leq x \leq l \\ u_x(l, t) + hu(l, t) = A & h > 0, t > 0 \end{cases}$$

$$u(x, 0) = 0.$$

Решение ищем в виде:

$$u(x, t) = v(x, t) + U(x, t),$$

где

$$U(x, t) = \mu_1 + \frac{\mu_2 - h\mu_1}{1 + lh} x.$$

или

$$U(x, t) = T + \frac{A - hT}{1 + lh} x$$

$$u(x, t) = v(x, t) + \left[ T + \frac{A - hT}{1 + lh} x \right].$$

Для функции  $v(x, t)$  получим задачу:

$$v_t = a^2 v_{xx}$$

$$\begin{cases} v(0, t) = 0, \\ v_x(l, t) + hv(l, t) = 0 \end{cases}$$

$$v(x, 0) = - \left( T + \frac{A - hT}{1 + lh} x \right).$$

Решение ищем в виде:

$$v(x, t) = X(x)T(t)$$

$$T'(t)X(x) = a^2 X''(x)T(t)$$

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T'(t)}{a^2 T(t)} = -\lambda^2$$

отсюда

$$T'(t) + a^2 \lambda^2 T(t) = 0$$

и задача Штурма-Лиувилля

$$X''(x) + \lambda^2 X(x) = 0$$

$$\begin{cases} X(0) = 0 \\ X'(l) + hX(l) = 0 \end{cases}$$

Решая задачу Штурма-Лиувилля, находим

$$X(x) = c_1 \cos \lambda x + c_2 \sin \lambda x$$

$$X(0) = c_1 = 0 \Rightarrow c_1 = 0.$$

$$X'(x) = -\lambda c_1 \sin \lambda x + \lambda c_2 \cos \lambda x,$$

$$\lambda c_2 \cos \lambda l + c_2 h \sin \lambda l = 0;$$

отсюда

$$c_2(\lambda \cos \lambda l + h \sin \lambda l) = 0,$$

полагая  $c_2 \neq 0$ ,

для определения  $\lambda$  получим трансцендентное уравнение:

$$\lambda \cos \lambda l + h \sin \lambda l = 0$$

или

$$\operatorname{tg} \lambda l = -\frac{\lambda}{h}.$$

Собственная функция нашей задачи

$$X_k(x) = \sin \lambda_k x.$$

Найдем норму собственных функций:

$$\begin{aligned} \|X_k(x)\|^2 &= \int_0^l \sin^2 \lambda_k x dx = \int_0^l \frac{1 - \cos 2\lambda_k x}{2} dx = \left( \frac{x}{2} - \frac{1}{4\lambda_k} \sin 2\lambda_k x \right) \Big|_0^l = \\ &= \frac{l}{2} - \frac{1}{4\lambda_k} \sin 2\lambda_k l = \frac{l}{2} - \frac{1}{2\lambda_k} \frac{\operatorname{tg} \lambda_k l}{1 + \operatorname{tg}^2 \lambda_k l} = \frac{l}{2} + \frac{1}{2} \frac{h}{h^2 + \lambda_k^2} = \frac{lh^2 + l\lambda_k^2 + h}{2(h^2 + \lambda_k^2)} \end{aligned}$$

при  $\lambda = \lambda_k$  общее решение уравнения

$$T'(t) + a^2 \lambda^2 T(t) = 0$$

имеет вид:

$$T_k(t) = A_k e^{-a^2 \lambda_k^2 t}$$

Таким образом

$$v(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k e^{-a^2 \lambda_k^2 t} \sin \lambda_k x.$$

Найдем  $A_k$ , используя начальное условие

$$v(x, 0) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin \lambda_k x = - \left( T + \frac{A - hT}{1 + lh} x \right)$$



$$\begin{aligned}
A_k &= \frac{1}{\|x_k\|^2} \int_0^l \left( -T - \frac{A - hT}{1 + lh} x \right) \sin \lambda_k x dx = \\
&= \frac{2(h^2 + \lambda_k^2)}{lh^2 + l\lambda_k^2 + h} \left( \frac{T}{\lambda_k} \cos \lambda_k x \Big|_0^l - \frac{A - hT}{1 + lh} \int_0^l x \sin \lambda_k x dx \right) = \\
&= \frac{2(h^2 + \lambda_k^2)}{lh^2 + l\lambda_k^2 + h} \left( \frac{T}{\lambda_k} (\cos \lambda_k l - 1) - \frac{A - hT}{1 + lh} \left( -\frac{l \cos \lambda_k l}{\lambda_k} + \frac{1}{\lambda_k^2} \sin \lambda_k l \right) \right) = \\
&= \frac{2(h^2 + \lambda_k^2)}{\lambda_k (lh^2 + l\lambda_k^2 + h)} \left( T(\cos \lambda_k l - 1) - \frac{A - hT}{1 + lh} l \cos \lambda_k l \left( 1 - \frac{1}{\lambda_k l} \operatorname{tg} \lambda_k l \right) \right) = \\
&= \frac{2(h^2 + \lambda_k^2)}{\lambda_k (lh^2 + l\lambda_k^2 + h)} \left( T - \frac{A \cos \lambda_k l}{h} \right) = -\frac{2(h^2 + \lambda_k^2)}{\lambda_k (lh^2 + l\lambda_k^2 + h)} \left( T - \frac{A}{\sqrt{h^2 + \lambda_k^2}} \right)
\end{aligned}$$

Таким образом, решение исходной задачи имеет вид:

$$\begin{aligned}
u(x, t) &= T + \frac{A - hT}{1 + lh} x - 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{h^2 + \lambda_k^2}{\lambda_k (lh^2 + l\lambda_k^2 + h)} \cdot \\
&\cdot \left( T - \frac{A}{\sqrt{h^2 + \lambda_k^2}} \right) e^{-a^2 \lambda_k^2 t} \sin \lambda_k x.
\end{aligned}$$

### 7.2.2 Контрольные задания и ответы к ним

Решить следующие смешанные задачи для уравнения теплопроводности.

1.  $u_t = u_{xx}$ ,  $x \in [0, 1]$ ,  $t > 0$ ,  
 $u|_{x=0} = u|_{x=1} = 0$ ,  $u|_{t=0} = \sin 2\pi x$ .
2.  $u_t = u_{xx} + 2u_x + u$ ,  $x \in [0, 1]$ ,  $t > 0$ ,  
 $u|_{x=0} = u|_{x=1} = 0$ ,  $u|_{t=0} = e^{-x} \sin \pi x$ .
3.  $u_t = u_{xx} + 1$ ,  $x \in [0, 1]$ ,  $t > 0$ ,  
 $u_x|_{x=0} = 0$ ,  $u_x|_{x=1} = 0$ ,  $u|_{t=0} = \cos \pi x$ .
4.  $u_t = u_{xx} - u + \cos 2x$ ,  $x \in [0, \pi]$ ,  $t > 0$ ,

- $$u_x|_{x=0} = 0, u_x|_{x=\pi} = 0, u|_{t=0} = \cos 2x + \cos 3x.$$
5.  $u_t = u_{xx} - 2u + \sin \frac{x}{2}, \quad x \in [0, \pi], t > 0,$
- $$u|_{x=0} = 0, u_x|_{x=\pi} = 0, u|_{t=0} = \sin \frac{3x}{2} + \sin \frac{x}{2}.$$
6.  $u_t = u_{xx} + u + xt(2-t) + 2 \cos t, \quad x \in [0, \pi], t > 0,$
- $$u_x|_{x=0} = t^2, u_x|_{x=\pi} = t^2, u|_{t=0} = \cos 2x.$$
7.  $u_t = u_{xx} - 2u_x + u + e^x \sin x - t, \quad x \in [0, \pi], t > 0,$
- $$u|_{x=0} = 1 + t, u|_{x=\pi} = 1 + t, u|_{t=0} = 1 + e^x \sin 2x.$$
8.  $u_t = a^2 u_{xx}, \quad x \in [0, l], t > 0,$
- $$u|_{x=0} = 0, u|_{x=l} = Ae^{-t}, A = \text{const}, u(x,0) = \frac{Ax}{l}.$$
9.  $u_t = a^2 u_{xx}, \quad x \in [0, l], t > 0,$
- $$u(0,t) = T, u_x(l,t) + hu(l,t) = U, u(x,0) = 0, h > 0.$$
10.  $u_t = a^2 u_{xx} - \beta u + \sin \frac{\pi x}{l}, \quad x \in [0, l], t > 0,$
- $$u(0,t) = u(l,t) = 0, u(x,0) = 0.$$
11.  $u_t = a^2 u_{xx}, \quad x \in [0, l], t > 0,$
- $$u(0,t) = 0, u_x(l,t) = Ae^{-t}, u(x,0) = T.$$
12.  $u_t = a^2 u_{xx}, \quad x \in [0, l], t > 0,$
- $$u_x(0,t) = At, u_x(l,t) = T, u(x,0) = 0.$$
13.  $u_t = a^2 u_{xx}, \quad x \in [0, l], t > 0,$
- $$u_x(0,t) = u_x(l,t) = q, u(x,0) = Ax.$$
14.  $u_t = a^2 u_{xx}, \quad x \in [0, l], t > 0,$
- $$u_x(0,t) - hu(0,t) = u(l,t) = 0, u(x,0) = U, h > 0.$$

$$15. u_t = a^2 u_{xx}, \quad x \in [0, l], t > 0,$$

$$u(0, t) = 0, \quad u(l, t) = Ae^{-t}, \quad u(x, 0) = \frac{Ax}{l}.$$

$$16. u_t = a^2 u_{xx}, \quad x \in [0, l], t > 0,$$

$$u|_{x=0} = A(1 - e^{-\alpha t}), \quad \frac{\partial u}{\partial x} + Hu|_{x=l} = 0, \quad \text{где } A, H > 0, \alpha - \text{ постоянные.}$$

$$17. u_t = a^2 u_{xx}, \quad x \in [0, l], t > 0,$$

$$u|_{x=0} = At, \quad u|_{x=l} = 0, \quad u(x, 0) = 0, \quad \text{где } A = \text{const.}$$

$$18. u_t = a^2 u_{xx}, \quad x \in [0, l], t > 0,$$

$$u(0, t) = A \sin \omega t, \quad u(l, t) = 0, \quad u(x, 0) = 0.$$

$$19. u_t - 4u_{xx} = \sin^2 \frac{x}{2}, \quad x \in (0, 2\pi), \quad t \in (0, T),$$

$$u(x, 0) = \pi - |x - \pi|,$$

$$u(0, t) = u(2\pi, t) = 0.$$

$$20. u_t(x, t) - u_{xx} = xe^t + 2t, \quad x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right), \quad t > 0,$$

$$u(x, 0) = x + 2 \sin 2x \cdot \cos 3x,$$

$$u(0, t) = t^2, \quad u_x \left( \frac{\pi}{2}, t \right) = 1.$$

$$21. u_t = 16u_{xx} + 2, \quad 0 < x < 7, \quad t > 0,$$

$$u(x, 0) = 0,$$

$$u_x(0, t) = u(7, t) = 0.$$

$$22. u_t - u_{xx} - u = xt(2-t) + 2 \cos t, \quad 0 < x < \pi,$$

$$u_x|_{x=0} = t^2, \quad u_x|_{x=\pi} = t^2, \quad u|_{t=0} = \cos 2x.$$

$$23. u_t - u_{xx} - 9u = 4 \sin^2 t \cdot \cos 3x - 9x^2 - 2, \quad 0 < x < \pi,$$

$$u_x|_{x=0} = 0, \quad u_x|_{x=\pi} = 2\pi, \quad u|_{t=0} = x^2 + 2.$$

$$24. u_t = u_{xx} + 6u + 2t(1 - 3t) - 6x + 2\cos x \cdot \cos 2x, \quad 0 < x < \frac{\pi}{2},$$

$$u_x|_{x=0} = 1, \quad u|_{x=\frac{\pi}{2}} = t^2 + \frac{\pi}{2}, \quad u|_{t=0} = x.$$

$$25. u_t = u_{xx} + 6u + x^2(1 - 6t) - 2(t + 3x) + \sin 2x, \quad 0 < x < 1,$$

$$u_x|_{x=0} = 1, \quad u_x|_{x=\pi} = 2\pi t + 1, \quad u|_{t=0} = x.$$

### Ответы

$$1. u(x, t) = e^{-4\pi^2 t} \sin 2\pi x$$

$$2. u(x, t) = e^{-(\pi^2 t + x)} \sin \pi x$$

$$3. u(x, t) = e^{-\pi^2 t} \cos \pi x + tx$$

$$4. u(x, t) = \frac{4}{5} e^{-5t} \cos 2x + e^{-10t} \cos 3x + \frac{1}{2} \cos 2x$$

$$5. u(x, t) = \left( \frac{5}{9} e^{-\frac{9}{4}t} + \frac{4}{9} \right) \sin \frac{x}{2} + e^{-\frac{17}{4}t} \sin \frac{3x}{2}.$$

$$6. u(x, t) = e^{-3t} \cos 2x + (e^t + \sin t - \cos t) + t^2 x.$$

$$7. u(x, t) = (-e^{x-t} \sin x + e^{x-4t} \sin 2x) + e^x \sin x + (1 + t).$$

$$8. u(x, t) = \frac{Ax}{l} e^{-t} + \frac{2Al^2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n e^{-\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 a^2 t} - e^{-t}}{n(n^2 \pi^2 a^2 - l^2)} \sin \frac{\pi nx}{l}.$$

$$9. u(x, t) = \frac{U - hT}{1 + lh} x + T - 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{h^2 + \lambda_k^2}{\lambda_k [l(h^2 + \lambda_k^2) + h]} *$$

$$* \left[ T - \frac{(-1)^k U}{\sqrt{h^2 + \lambda_k^2}} \right] e^{-a^2 \lambda_k^2 t} \sin \lambda_k x$$

$\lambda_k$  - положительные корни уравнения  $htg \lambda l = -\lambda$ .

$$10. u(x, t) = \frac{1}{\chi} [1 - e^{-\chi t}] \sin \frac{\pi x}{l}, \quad \text{где } \chi = \beta + \left( \frac{a\pi}{l} \right)^2$$

$$11. u(x, t) = \frac{aA}{\cos \frac{l}{a}} e^{-t} \sin \frac{x}{a} + \frac{2}{l} \sum_{k=0}^{\infty} \left[ \frac{T}{\omega_k} + \frac{(-1)^k A a^2}{1 - a^2 \omega_k^2} \right] e^{-a^2 \omega_k^2 t} \sin \omega_k x,$$

$$\omega_k = \frac{(2k+1)\pi}{2l}, \quad \omega_k \neq \frac{1}{a}, \quad k = 0, 1, \dots$$

$$12. u(x, t) = -\frac{a^2 A}{2l} t^2 - \left( \frac{A}{2l} x^2 - Ax + \frac{Al}{3} - \frac{a^2 T}{l} \right) t + \frac{T}{2l} x^2 - \frac{lT}{6} + \frac{2l}{a^2 \pi^4} -$$

$$- \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4} \left\{ Al^2 - [Al^2 + (-1)^k T (ak\pi)^2] e^{-\left(\frac{ak\pi}{l}\right)^2 t} \right\} \cos \frac{k\pi x}{l}.$$

$$13. u(x, t) = qx + \frac{(A - q)l}{2} - \frac{4l(A - q)}{\pi^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} e^{-\frac{(2k+1)^2 a^2 \pi^2}{l^2} t} \times \cos \frac{(2k+1)\pi}{l} x.$$

$$14. u(x, t) = 2U \sum_{k=1}^{\infty} \frac{h - (-1)^k \sqrt{h^2 + \lambda_k^2}}{\lambda_k [l(h^2 + \lambda_k^2) + h]} e^{-a^2 \lambda_k^2 t} \times (\lambda_k \cos \lambda_k x + h \sin \lambda_k x),$$

$\lambda_k$  - положительные корни уравнения  $htg \lambda l = -\lambda$ .

$$15. u(x, t) = \frac{Ax}{l} e^{-t} + \frac{2Al^2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n e^{-\left[\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 + 1\right] t}}{n(n^2 \pi^2 - l^2)} \sin \frac{\pi n x}{l}.$$

$$16. u(x, t) = A(1 - e^{-\alpha t}) \left( 1 - \frac{Hx}{1+p} \right) + 2A\alpha \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\mu_n} \frac{p^2 + \mu_n^2}{(p(p+1) + \mu_n^2)} \frac{l^2}{a^2 \mu_n^2 - \alpha l^2} *$$

$$\left[ e^{-\left(\frac{a\mu_n}{l}\right)^2 t} - e^{-\alpha t} \right], \text{ где}$$

$\mu_1, \mu_2, \mu_3 \dots$  - положительные корни уравнения  $tg \mu = -\frac{\mu}{p}$  ( $p = Hl > 0$ )

$$17. u(x, t) = At \left( 1 - \frac{x}{l} \right) - \frac{l^2 A}{6a^2} \left[ \left( \frac{x}{l} \right)^3 - 3 \left( \frac{x}{l} \right)^2 + 2 \left( \frac{x}{l} \right) \right] + \left( \frac{2l^2 A}{\pi^3 a^2} \right) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\frac{n^2 \pi^2 a^2}{l^2} t}}{n^3} \sin \frac{\pi n x}{l}$$

$$18. u(x, t) = A \left( 1 - \frac{x}{l} \right) \sin \omega t - \frac{2\omega A}{x} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2 t}}{n} \sin \frac{\pi n x}{l} \int_0^t e^{\left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2 \tau} \cos \omega \tau d\tau$$

$$19. u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{8}{\pi (2\pi - 1)^2} (-1)^{n+1} \exp(- (2n - 1)^2 t) + \frac{8}{\pi (2\pi - 1)^3 (4 - (2n - 1)^2)} [1 - \exp(- (2n - 1)^2 t)] \right\} \sin \frac{(2n - 1)x}{2}$$

$$20. u(x, t) = t^2 + x + 2e^t \sin 2x \cdot \cos 3x + \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{(2k - 1)^2 (2k^2 - 2k + 1)} [e^t - e^{-(2k-1)^2 t}] \sin(2k - 1)x.$$

$$21. u(x, t) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{49}{4 \left( \left( k + \frac{1}{2} \right) \pi \right)^3} \left[ - e^{-\left( \frac{4 \left( k + \frac{1}{2} \right) \pi}{7} \right)^2 t} + 1 \right] \cos \frac{\left( k + \frac{1}{2} \right) \pi x}{7}.$$

$$22. u(x, t) = xt^2 + e^t + \sin t - \cos t + e^{-3t} \cos 2x.$$

$$23. u(x, t) = x^2 + 2e^{9t} + (2t - \sin 2t) \cos 3x.$$

$$24. u(x, t) = x + t^2 + \frac{1}{5} (e^{5t} - 1) \cos x + \frac{1}{3} (1 - e^{-3t}) \cos 3x.$$

$$25. u(x, t) = x^2 t + x + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_{2k-1}}{(2k - 1)^2 - 6} \left\{ 1 - e^{-6(2k-1)^2 t} \right\} \sin(2k - 1)x,$$

$$\text{где } c_{2k-1} = \frac{2}{\pi} \left( \frac{1}{2k + 1} - \frac{1}{2k - 3} \right).$$

### 7.3 Уравнения эллиптического типа

#### 7.3.1 Примеры решения уравнений эллиптического типа

1) Найти функцию, гармоническую в кольце  $1 < r < 2$  и такую, что

$$u|_{r=1} = 2, \quad u|_{r=2} = \sin 2\varphi .$$

Решение. Как было показано выше, решение задачи можно искать в виде ряда

$$u(r, \varphi) = a_0 \ln r + b_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n r^n + \frac{c_n}{r^n} \right) \cos n\varphi + \sum_{n=1}^{\infty} \left( b_n r^n + \frac{d_n}{r^n} \right) \sin n\varphi .$$

Используя граничные условия, получаем следующие соотношения для нахождения неизвестных коэффициентов

$$2 = b_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + c_n) \cos n\varphi + \sum_{n=1}^{\infty} (b_n + d_n) \sin n\varphi ,$$

$$\sin 2\varphi = a_0 \ln 2 + b_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n 2^n + \frac{c_n}{2^n} \right) \cos n\varphi + \sum_{n=1}^{\infty} \left( b_n 2^n + \frac{d_n}{2^n} \right) \sin n\varphi .$$

Интегрируя первое и второе уравнения по  $\varphi$  от 0 до  $2\pi$ , получим следующую систему для определения коэффициентов  $a_0$  и  $b_0$

$$\begin{cases} 2 = b_0, \\ 0 = a_0 \ln 2 + b_0, \end{cases}$$

откуда  $a_0 = -\frac{2}{\ln 2}$ ,  $b_0 = 2$ .

Для определения коэффициентов  $a_n, c_n, b_n, d_n$  будем последовательно домножать уравнения на  $\cos m\varphi$ ,  $m = 1, 2, \dots$  или на  $\sin m\varphi$ ,  $m = 1, 2, \dots$  и интегрировать от 0 до  $2\pi$ . Легко заметить, что невырожденная система получится только для коэффициентов  $b_2, d_2$ , остальные коэффициенты  $a_n = c_n = 0, b_n = d_n = 0$  ( $n \neq 2$ ). А для  $b_2$  и  $d_2$  система будет иметь вид:

$$\begin{cases} 0 = b_2 + d_2, \\ 1 = 4b_2 + \frac{d_2}{4}. \end{cases}$$

Откуда находим  $b_2 = \frac{4}{15}$ ,  $d_2 = -\frac{4}{15}$ . А общее решение задачи имеет вид:

$$u(r, \varphi) = 2 \left( 1 - \frac{\ln r}{\ln 2} \right) + \frac{4}{15} \left( r^2 - \frac{1}{r^2} \right) \sin 2\varphi.$$

2) Найти функцию, гармоническую внутри круга радиуса  $R$  с центром в начале координат такую, что:

$$u(R, \varphi) = \varphi(2\pi - \varphi).$$

Решение. Решение будем искать в виде (8.9):

$$u(r, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} r^n (A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Используя граничные условия, найдем  $A_n$  и  $B_n$ .

$$\varphi(2\pi - \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} R^n (A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi).$$

Отсюда:

$$\frac{A_0}{2} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(2\pi - \varphi) d\varphi = \frac{1}{2\pi} \left[ \int_0^{2\pi} 2\pi\varphi d\varphi - \int_0^{2\pi} \varphi^2 d\varphi \right] = \frac{1}{2\pi} \left[ \pi\varphi^2 \Big|_0^{2\pi} - \frac{\varphi^3}{3} \Big|_0^{2\pi} \right],$$

или

$$\frac{A_0}{2} = \frac{2\pi^2}{3}.$$

$$B_0 = 0$$

Найдем  $A_n$ ,  $n = 1, 2, \dots$

$$A_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(2\pi - \varphi) \cos n\varphi d\varphi = \frac{1}{\pi} \left[ \int_0^{2\pi} 2\pi\varphi \cos n\varphi d\varphi - \int_0^{2\pi} \varphi^2 \cos n\varphi d\varphi \right].$$

Беря эти интегралы по частям, находим, что



$$\int_0^{2\pi} \varphi \cos n\varphi \, d\varphi = 0,$$

$$\int_0^{2\pi} \varphi^2 \cos n\varphi \, d\varphi = \frac{4\pi}{n^2}.$$

Таким образом  $A_n = -\frac{4}{n^2}$ ,  $B_n = 0$ .

Решение имеет вид:

$$U(r, \varphi) = \frac{2\pi^2}{3} - 4 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2} \left( \frac{r}{R} \right)^n \cdot \cos \varphi$$

3) Решение уравнения Лапласа в прямоугольнике.

Найти в прямоугольнике D:

$$0 < x < a$$

$$0 < y < b$$

решение уравнения Лапласа:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,$$

удовлетворяющее краевым условиям

$$\begin{aligned} u(0, y) &= \varphi_0(y), & \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=a} &= \varphi_1(y), & (0 \leq y \leq b) \\ u(x, 0) &= \psi_0(x), & \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{y=b} &= \psi_1(x), & (0 \leq x \leq a) \end{aligned}$$

причем  $\varphi_0(0) = \psi_0(0)$

Решение. Решение задачи будем искать в виде  $u = v + W$ . Потребуем, чтобы функция  $v$  удовлетворяла условиям:

$$\begin{aligned} a) \quad \Delta v &= 0, & v(x, 0) &= 0, & \left. \frac{\partial v}{\partial y} \right|_{y=b} &= 0; \\ v(0, y) &= \varphi_0(y), & \left. \frac{\partial v}{\partial x} \right|_{x=a} &= \varphi_1(y). \end{aligned}$$

Тогда для  $W$  получаем:

$$\begin{aligned} \text{б) } \Delta W = 0, \quad W(0, y) = 0, \quad \left. \frac{\partial W}{\partial x} \right|_{x=a} &= 0; \\ W(x, 0) = \psi_0(x), \quad \left. \frac{\partial W}{\partial y} \right|_{y=b} &= \psi_1(x). \end{aligned}$$

Решаем задачу  $a)$  методом Фурье. Полагаем

$$v = X(x)Y(y),$$

получаем

$$X''Y + XY'' = 0. \quad X(x)Y(0) = X(x)Y'(b) = 0.$$

Разделяя переменные, получим

$$\frac{X''}{X} = -\frac{Y''}{Y} = \lambda^2.$$

Таким образом, приходим к задаче Штурма-Лиувилля (независимая переменная  $y \in [0, b]$ ).

$$\left. \begin{aligned} Y'' + \lambda^2 Y &= 0 \\ Y(0) = Y'(b) &= 0 \end{aligned} \right\},$$

отсюда находим:

$$\lambda_k = \frac{(2k+1)\pi}{2b} \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

$$Y_k(y) = \frac{\sin(2k+1)\pi y}{2b}$$

и к уравнению

$$X'' - \lambda_k^2 X = 0,$$

отсюда

$$X_k(x) = A_k \operatorname{ch} \frac{(2k+1)\pi x}{2b} + B_k \operatorname{sh} \frac{(2k+1)\pi x}{2b}.$$

Воспользуемся принципом суперпозиции, запишем решение задачи  $a)$ :

$$\begin{aligned}
v(x, y) &= \sum_{k=0}^{\infty} X_k(x) Y_k(y) = \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \left( A_k \operatorname{Ch} \frac{(2k+1)\pi x}{2b} + B_k \operatorname{Sh} \frac{(2k+1)\pi x}{2b} \right) \sin \frac{(2k+1)\pi y}{2b}.
\end{aligned}$$

Потребуем, чтобы эта функция удовлетворяла условиям

$$\begin{aligned}
v(0, y) &= \varphi_0(y) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k \sin \frac{(2k+1)\pi y}{2b}, \\
\left. \frac{\partial v}{\partial x} \right|_{x=a} &= \varphi_1(y) = \sum_{k=0}^{\infty} \left( A_k \operatorname{Sh} \frac{(2k+1)\pi a}{2b} + B_k \operatorname{Ch} \frac{(2k+1)\pi a}{2b} \right) \cdot \\
&\cdot \frac{(2k+1)\pi}{2b} \sin \frac{(2k+1)\pi y}{2b}.
\end{aligned}$$

Рассмотрим полученные равенства как разложение функций  $\varphi_0(y)$  и  $\varphi_1(y)$  в ряд по собственным функциям краевой задачи, это разложение будет иметь вид:

$$\begin{aligned}
A_k &= \frac{2}{b} \int_0^b \varphi_0(y) \sin \frac{(2k+1)\pi y}{2b} dy, \\
\left( A_k \operatorname{sh} \frac{(2k+1)\pi a}{2b} + B_k \operatorname{ch} \frac{(2k+1)\pi a}{2b} \right) \frac{(2k+1)\pi}{2b} &= \frac{2}{b} \int_0^b \varphi_1(y) \sin \frac{(2k+1)\pi y}{2b} dy.
\end{aligned}$$

Вычислив  $A_k$  и  $B_k$ , подставив их значения в ряд для  $v(x, y)$  и приведя подобные члены, получим решение задачи *a*):

$$\begin{aligned}
v(x, y) &= \frac{2}{b} \sum_{k=0}^{\infty} \left( \operatorname{ch} \frac{(2k+1)\pi(x-a)}{2b} \int_0^b \varphi_0(y) \sin \frac{(2k+1)\pi y}{2b} dy + \right. \\
&+ \left. \frac{2b}{(2k+1)\pi} \operatorname{sh} \frac{(2k+1)\pi x}{2b} \int_0^b \varphi_1(y) \sin \frac{(2k+1)\pi y}{2b} dy \right) \frac{\sin \frac{(2k+1)\pi y}{2b}}{\operatorname{ch} \frac{(2k+1)\pi a}{2b}}.
\end{aligned}$$

Теперь решим задачу *б*). Ее отличие от задачи *a*) состоит в том, что независимой переменной задачи Штурма-Лиувилля будет  $x \in [0, a]$ , а

дополнительные условия будут по переменной  $Y$ . Отсюда заключаем, что решение  $W(x, y)$  задачи б) может быть получено из решения  $v(x, y)$  задачи а) путем замены  $x$  на  $y$ ,  $a$  на  $b$ , а  $\varphi_0(y)$  и  $\varphi_1(y)$  на  $\psi_0(x)$  и  $\psi_1(x)$ :

$$W(x, y) = \frac{2}{a} \sum_{k=0}^{\infty} \left( \operatorname{ch} \frac{(2k+1)\pi}{2a} \int_0^a \psi_0(x) \sin \frac{(2k+1)\pi x}{2a} dx + \frac{2a}{(2k+1)\pi} \operatorname{sh} \frac{(2k+1)\pi y}{2a} \int_0^a \psi_1(x) \sin \frac{(2k+1)\pi x}{2a} dx \right) \frac{\sin \frac{(2k+1)\pi x}{2a}}{\operatorname{Sh} \frac{(2k+1)\pi b}{2a}}.$$

Подставляя в равенство  $u = v + W$  выражения  $v$  и  $W$ , получим решение исходной задачи.

### 7.3.2 Контрольные задания для уравнений эллиптического типа и ответы к ним

1. Найти функцию, гармоническую в кольце  $R_1 < r < R_2$ , такую, что  $(A, B, Q, T, U, a, b, g, h, p, q$  – некоторые постоянные)

$$u(R_1, \varphi) = A, \quad u(R_2, \varphi) = B \sin 2\varphi, \quad R_1 = a, \quad R_2 = b;$$

$$u_r(R_1, \varphi) = g \cos \varphi, \quad u(R_2, \varphi) = Q + T \sin 2\varphi, \quad R_1 = a, \quad R_2 = b;$$

$$u(R_1, \varphi) = T + U \cos \varphi, \quad u_r(R_2, \varphi) + hu(R_2, \varphi) = 0, \quad R_1 = a, \quad R_2 = b;$$

$$u|_{r=R_1} = \cos^2 \varphi, \quad u|_{r=R_2} = 1, \quad R_1 = 1, \quad R_2 = 2;$$

$$u|_{r=R_1} = \sin \varphi, \quad u|_{r=R_2} = \cos \varphi, \quad R_1 = 2, \quad R_2 = 4;$$

$$u|_{r=R_1} = \sin^3 \varphi, \quad u|_{r=R_2} = \cos \varphi, \quad R_1 = 1, \quad R_2 = 2;$$

$$u|_{r=R_1} = 0, \quad u|_{r=R_2} = 1 + \cos \varphi, \quad R_1 = a, \quad R_2 = b.$$

8.  $u_r(R_1, \varphi) = 2 + 2 \cos 2\varphi,$

$$u_r(R_2, \varphi) = \sin \varphi, \quad R_1 = \frac{1}{2}; \quad R_2 = 1.$$

$$9. u_r(R_1, \varphi) = 1 - \cos 2\varphi,$$

$$u_r(R_2, \varphi) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2\varphi, \quad R_1 = \frac{1}{2}; \quad R_2 = 1.$$

2. Найти функцию, гармоническую внутри круга радиуса  $R$  с центром в начале координат, такую, что

$$10. \left. \frac{\partial u}{\partial r} \right|_{r=R} = \sin 2\varphi + \cos^2 \varphi - \frac{1}{2}, \quad R = 1;$$

$$11. \left. \frac{\partial u}{\partial r} \right|_{r=R} = 2 \sin 2\varphi + 3 \cos 3\varphi, \quad R = 2;$$

$$12. \left. \frac{\partial u}{\partial r} \right|_{r=R} = \sin \varphi + \cos^3 \varphi, \quad R = a;$$

$$13. u|_{r=R} = \varphi \sin \varphi;$$

$$14. u|_{r=R} = 2 \sin^2 \varphi + \sin 2\varphi, \quad R = a;$$

$$15. \left( \frac{\partial u}{\partial r} + u \right) \Big|_{r=a} = \frac{1}{\pi^2} \varphi (2\pi - \varphi).$$

$$16. u|_{r=R} = \sin^3 \varphi, \quad R = 1.$$

$$17. u|_{r=R} = \sin^6 \varphi + \cos^6 \varphi, \quad R = 1.$$

3. Найти решение уравнения Лапласа в прямоугольнике

$0 < x < a, 0 < y < b$ , если на границе  $u(x, y)$  удовлетворяет условиям:

$$18. u|_{x=0} = 0; \quad u|_{x=a} = 0; \quad u|_{y=0} = 0; \quad u|_{y=b} = \sin \frac{2\pi x}{a}$$

$$19. u|_{x=0} = 0; \quad u|_{x=a} = 0; \quad u|_{y=0} = \cos \frac{2\pi x}{a}; \quad u|_{y=b} = 0$$

$$20. u_x(0, y) = u(a, y) = 0; \quad u(x, 0) = 0, \quad u_y(x, b) = Bx.$$

$$21. u(0, y) = B, \quad u_x(a, y) = 0; \quad u_y(x, 0) = T \sin \frac{\pi x}{2p}, \quad u(x, b) = 0$$

$$22. u(0, y) = 0, \quad u_x(a, y) = q; \quad u(x, 0) = 0, \quad u(x, b) = B$$

$$23. u|_{x=0} = A \sin \frac{\pi y}{b}, \quad u|_{x=a} = 0,$$

$$u|_{y=0} = B \sin \frac{\pi x}{a}, \quad u|_{y=b} = 0.$$

4. Вне круга  $0 \leq r \leq R$  найти решения  $u = u(r, \varphi)$  следующих краевых задач для уравнения Лапласа:

$$24. u_r(R, \varphi) = \frac{1}{2} + \varphi \sin 2\varphi;$$

$$25. u(R, \varphi) = \sin \frac{\varphi}{2}.$$

## **8. МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ОРГАНИЗАЦИИ МЕЖСЕССИОННОГО КОНТРОЛЯ ЗНАНИЙ СТУДЕНТОВ**

Целью текущего контроля самостоятельной работы студентов является стремление упорядочить работу студентов в течение семестра, сделать ее более регулярной, организованной, ритмичной, чтобы разгрузить предэкзаменационный период, нормализовать получение зачетов, улучшить в конечном итоге качество знаний и экзаменационные показатели успеваемости.

В связи с этим подход к оценке на контрольных точках и на экзаменах должен в принципе отличаться: на экзаменах необходимо учитывать только объем и уровень знаний студентов, а на контрольных точках должны оценивать в первую очередь не качество знаний и способности студента, а объем и тщательность выполненной им работы, ее регулярность и даже посещаемость учебных занятий. Именно такой подход позволит организовать работу студентов в течение семестра должным образом.

**9 ФОНД ТЕСТОВЫХ И КОНТРОЛЬНЫХ ЗАДАНИЙ ДЛЯ ОЦЕНКИ  
КАЧЕСТВА ЗНАНИЙ ПО ДИСЦИПЛИНЕ**

**9.1 Вариант тестового задания по проверке остаточных знаний**

АМУРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Тестовые задания по проверке остаточных знаний по  
дисциплине «МЕТОДЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ  
ФИЗИКИ»

для специальности 010701

20 заданий

время тестирования – 80 минут

ВАРИАНТ 1

1 Дифференциальное уравнение  $U_y U_{xx} + 3x^2 U U_{xy} - 2U_x + x = 0$  является

- 1) линейным однородным;
- 2) квазилинейным;
- 3) линейным неоднородным;
- 4) нелинейным.

2 Общее решение дифференциального уравнения  $\frac{\partial^3 U}{\partial x \partial y^2} = 3y$  имеет вид

- 1)  $\frac{y^3 x}{2} + f_1(x)y + f_2(x) + f_3(y)$ ;
- 2)  $\frac{y^3 x}{3} + f_1(x)x + f_2(y) + f_3(x)$ ;
- 3)  $\frac{y^3 x}{6} + f_1(y)x + f_2(x)$ ;
- 4)  $\frac{y^2 x^2}{4} + f_1(x) + f_2(y)$ ;

3 Тип дифференциального уравнения  $U_{xx} + 6U_{xy} + 8U_{yy} = 0$  является

- 1) эллиптическим;
- 2) параболическим;
- 3) смешанным;
- 4) гиперболическим.

4 Канонический вид дифференциальных уравнений параболического типа ...

- 1)  $U_{\xi\eta} = 0$ ;
- 2)  $U_{\xi\xi} - U_{\eta\eta} = 0$ ;





11 Решение задачи Штурма – Лиувилля для уравнения  $y'' + \lambda y = 0$  при условиях  $y'(0) = y(l) = 0$  имеет вид

$$1) y_n(x) = C_n \sin \frac{(2n+1)\pi x}{l};$$

$$2) y_n(x) = C_n \cos \frac{n\pi x}{l};$$

$$3) y_n(x) = C_n \sin \frac{n\pi x}{l};$$

$$4) y_n(x) = C_n \cos \frac{(2n+1)\pi x}{2l}.$$

12 Собственные функции и собственные значения для уравнения  $y'' + \lambda y = 0$  при условиях  $y'(0) = y(l) = 0$  имеет вид

$$1) y_n(x) = C_n \cos \frac{n\pi x}{l}$$

$$2) y_n(x) = C_n \sin \frac{n\pi x}{l}$$

$$\lambda_n = \left( \frac{n\pi}{l} \right)^2;$$

$$\lambda_n = \frac{n\pi}{l};$$

$$3) y_n(x) = C_n \sin \frac{(2n+1)\pi x}{2l}$$

$$4) y_n(x) = C_n \cos \frac{(2n+1)\pi x}{l}$$

$$\lambda_n = \frac{(2n+1)^2 \pi^2}{4l^2};$$

$$\lambda_n = \frac{(2n+1)\pi}{l}.$$

13 Вычисление интеграла  $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta \left( x + \frac{\pi}{2} \right) \sin \left( x - \frac{\pi}{2} \right) dx$  дает ответ

$$1) 1; \quad 2) -1; \quad 3) 0; \quad 4) \pi.$$

14 Метод Фурье для уравнения  $U_{tt} = a^2 U_{xx}$  при начальных краевых условиях  $U(0,t) = U(l,t) = 0; U(x,0) = Ax$  в полуполосе  $0 < x < l, t > 0$  дает ответ

$$1) U(x,t) = \frac{2l}{A} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} e^{\left(-\frac{ak\pi}{l}\right)^2 t} \sin \frac{k\pi x}{l};$$

$$2) U(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} e^{\left(-\frac{ak\pi}{l}\right)^2 t} \cos \frac{k\pi x}{l};$$

$$3) U(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} e^{\frac{ak\pi}{l} t} \sin \frac{(2k+1)\pi x}{l};$$

$$4) U(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k} e^{\frac{ak\pi}{l} t} \cos \frac{k\pi x}{2l}.$$

15 Внутренняя задача Дирихле для уравнения Лапласа в круге при  $U(a,\varphi) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2\varphi$  имеет решение

$$1) r^2 \cos 2\varphi;$$

$$2) ra \cos 2\varphi;$$

$$3) 1 + r^2 \cos 2\varphi ;$$

$$4) \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \left( \frac{r}{a} \right)^2 \cos 2\varphi .$$

16 Внутренняя задача Неймана для уравнения Лапласа в круге при  $U_r(a, \varphi) = 2 \cos 3\varphi$  имеет решение

$$1) C + \frac{2}{3} \left( \frac{r^3}{a^2} \right) \cos 3\varphi ;$$

$$2) \frac{2}{3} \left( \frac{r}{a} \right)^2 \cos 3\varphi ;$$

$$3) C + \frac{r}{a} \cos 3\varphi ;$$

$$4) C + \frac{2}{3} \cos 3\varphi .$$

17 Внутренняя задача Дирихле для уравнения Лапласа в кольце при  $U|_{r=1} = 7$ ,  $U|_{r=2} = 3 + \cos 2\varphi$  дает ответ

$$1) 7 + 3 \cos 2\varphi ;$$

$$2) 7 + \frac{4 \ln r}{\ln 2} + \cos 2\varphi ;$$

$$3) 7 - \frac{4 \ln r}{\ln 2} + \frac{4}{15} \left( r^2 - \frac{1}{r} \right) \cos 2\varphi ;$$

$$4) 7 - 3 \cos 2\varphi .$$

18 Внутренняя задача Дирихле для уравнения Лапласа в шаре при  $U(a, \theta) = 1 + \cos \theta$  дает ответ

$$1) U(r, \theta) = r \cos \theta ;$$

$$2) U(r, \theta) = 1 + ra \cos \theta ;$$

$$3) U(r, \theta) = ar \cos \theta ;$$

$$4) U(r, \theta) = 1 + \frac{r}{a} \cos \theta .$$

19 Внутренняя задача Неймана для уравнения Лапласа в шаре при  $U_r(a, \theta) = 7 \cos \theta$  дает ответ

$$1) C + 7 \frac{r}{a} \cos \theta ;$$

$$2) C + 7r \cos \theta ;$$

$$3) 7ar \cos \theta ;$$

$$4) 7r \cos \theta .$$

20 Внутренняя задача Дирихле для уравнения Лапласа в шаровом слое при  $U(1, \theta) = 2$ ,  $U(2, \theta) = 1 + \cos \theta$  дает ответ

$$1) U = \frac{1}{7} \left( r^2 - \frac{1}{r^2} \cos \theta \right) ;$$

$$2) U = 2r + \frac{4}{7} \left( r^2 + \frac{1}{r^2} \right) \cos \theta ;$$

$$3) U = 2r + \cos \theta ;$$

$$4) U = \frac{2}{r} + \frac{4}{7} \left( r^2 - \frac{1}{r^2} \right) \cos \theta .$$

## 9.2 Варианты контрольных заданий

Вариант 1

Решить задачу Коши:

$$3U_{xx} - 4U_{xy} + U_{yy} - 3U_x + U_y = 0,$$

$$U(x, y)|_{y=0} = \varphi(x),$$

$$U_y(x, y)|_{y=0} = \phi(x)$$

### Вариант 2

Решить задачу Коши:

$$e^y U_{xy} - U_{yy} + U_y = 0,$$

$$U(x, y)|_{y=0} = -\frac{x^2}{2},$$

$$U_y(x, y)|_{y=0} = -\sin x$$

### Вариант 3

Решить задачу Коши:

$$U_{xx} - 2 \sin x U_{xy} - (3 + \cos^2 x) U_{yy} - \cos x U_y = 0,$$

$$U(x, y)|_{y=\cos x} = \sin x,$$

$$U_y(x, y)|_{y=\cos x} = e^{\frac{x}{2}}$$

### Вариант 4

Решить задачу Коши:

$$U_{xx} - 2 \sin x U_{xy} - (3 + \cos^2 x) U_{yy} + U_x + (2 - \sin x - \cos x) U_y = 0,$$

$$U(x, y)|_{y=\cos x} = 0,$$

$$U_y(x, y)|_{y=\cos x} = e^{\frac{-x}{2}} \cos x$$

### Вариант 5

Решить задачу Коши:

$$U_{xx} + 2 \sin x U_{xy} - \cos^2 x U_{yy} + U_x + (\sin x + \cos x + 1) U_y = 0,$$

$$U(x, y)|_{y=-\cos x} = 1 + 2 \sin x,$$

$$U_y(x, y)|_{y=-\cos x} = \sin x$$

### Вариант 6

Решить задачу Коши:

$$U_{xx} + 2 \cos x U_{xy} - \sin^2 x U_{yy} + U_x + (-\sin x + \cos x + 1)U_y = 0,$$

$$U(x, y)|_{y=\sin x} = \cos x,$$

$$U_y(x, y)|_{y=-\sin x} = \sin x$$

Вариант 7

Решить задачу Коши:

$$e^y U_{xy} - U_{yy} + U_y = x e^{2y},$$

$$U(x, y)|_{y=0} = \sin x,$$

$$U_y(x, y)|_{y=0} = \frac{1}{1+x^2}$$

Вариант 8

Решить задачу Коши:

$$3U_{xx} - 5U_{xy} + 2U_{yy} = 0,$$

$$U(x, y)|_{y=x} = \frac{x}{1+x^2},$$

$$U_y(x, y)|_{y=x} = \sin x$$

Вариант 9

Решить задачу Коши:

$$U_{xx} - 6U_{xy} + 5U_{yy} = 0,$$

$$U(x, y)|_{y=x} = \sin x,$$

$$U_y(x, y)|_{y=x} = \cos x$$

Вариант 10

Решить задачу Коши:

$$U_{xx} - U_{xy} + 5U_x + 3U_y + 4U = 0,$$

$$U(x, y)|_{y=0} = x e^{-\frac{5}{2}x-x^2},$$

$$U_y(x, y)|_{y=0} = e^{-\frac{5}{2}x}$$

Вариант 12

Решить задачу Коши:

$$U_{tt} = U_{xx} + axt,$$

$$U(x, 0) = x,$$

$$U_t(x, 0) = \sin x$$

#### Вариант 14

Решить задачу Коши:

$$U_{tt} = U_{xx} + a \sin bt,$$

$$U(x,0) = \cos x,$$

$$U_t(x,0) = \sin x$$

#### Вариант 15

Решить задачу Коши:

$$U_{tt} = U_{xx} + x \sin t,$$

$$U(x,0) = \sin x,$$

$$U_t(x,0) = \cos x$$

#### Вариант 16

Решить задачу Коши:

$$U_{tt} - 2U_{tx} - 3U_{xx} + U_x - \frac{1}{16}U = 0,$$

$$U(x,0) = 2xe^{\frac{x}{8}},$$

$$U_t(x,0) = (2 + \frac{1}{4}x)e^{\frac{x}{8}}, -\infty < x < \infty, t \geq 0$$

#### Вариант 18

Решить задачу Коши. Найти решение уравнения

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} - 3\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0,$$

$$U(x,0) = 3x^2,$$

$$\frac{\partial U}{\partial y} \Big|_{y=0} = 0$$

#### Вариант 19

1. Решить задачу Коши. Найти решение уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - 3\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,$$

удовлетворяющее начальным условиям  $u(x,0) = 3x^2$ ,  $\frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{y=0} = 0$ .

#### Вариант 20

1. Решить задачу Коши. Найти решение уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\cos x \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \sin^2 x \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \sin x \frac{\partial u}{\partial y} = 0,$$

удовлетворяющее начальным условиям  $u|_{y=\sin x} = \varphi(x)$ ,  $\frac{\partial u}{\partial y}|_{y=\sin x} = \psi(x)$ .

### Вариант 21

1. Вдоль решения  $u = \sqrt{3}x^3$  определить тип следующего уравнения:

$$u_{xx}^2 + 5u_{xy}^2 + 6u_{yy}^2 = 12,$$

2. Определить тип следующей системы уравнений:

$$\begin{cases} 2u_x + v_x + 12u_y - 2u = 0 \\ v_x + 4u_y + v_y + xy = 0 \end{cases}.$$

### Вариант 22

1. Решить одномерную задачу Коши:

$$u_{tt} = u_{xx} + bx^2,$$

$$u_t(x,0) = 0, \quad u(x,0) = e^{-x}.$$

### Вариант 23

1. Решить задачу Коши:

$$u_{tt} = u_{xx} + ax^t,$$

$$u(x,0) = x, \quad u_t(x,0) = \sin x.$$

### Вариант 24

1. Решить задачу Коши:

$$u_{tt} = u_{xx} + ae^{-t},$$

$$u(x,0) = b \sin x, \quad u_t(x,0) = c \cos x.$$

### Вариант 25

1. Решить задачу:

$$u_{xx} - 2 \sin x u_{xy} - (3 + \cos^2 x) \cdot u_{yy} - \cos x u_y = 0,$$

$$u(x,y)|_{y=\cos x} = \sin x, \quad u_y(x,y)|_{y=\cos x} = \frac{e^x}{2}.$$

## 10 ПРИМЕРЫ СОСТАВЛЕНИЯ ЭКЗАМЕНАЦИОННЫХ БИЛЕТОВ

### Экзаменационный билет № 1

4. Понятие дифференциальных уравнений в частных производных и их решения.
5. Неоднородное уравнение теплопроводности и его решение.
6. Решить уравнение

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}; \quad 0 < x < l, \quad t > 0,$$

$$u(0, t) = u(l, t) = 0,$$

$$u(x, 0) = 0, \quad u_t(x, 0) = \sin^2 \frac{2\pi}{l} x.$$

### Экзаменационный билет № 2

4. Приведение к каноническому виду уравнения второго порядка с двумя независимыми переменными.
5. Решение неоднородного уравнения гиперболического типа. (Метод Фурье)
6. Найти ограниченное решение внешней задачи Дирихле

$$\Delta u = 0; \quad \begin{cases} 0 < r < \infty, & 0 \leq \varphi \leq 2\pi; \\ u(0, \varphi) = \sin \frac{\varphi}{2}, & 0 \leq \varphi \leq 2\pi. \end{cases}$$

### Экзаменационный билет № 3

- 4) Понятие характеристической формы. Классификация линейных уравнений второго порядка (гиперболические, параболические, эллиптические).
- 5) Общая первая краевая задача для уравнения параболического типа.
- 6) Привести уравнение к каноническому виду

$$u_{xx} + u_{xy} - 2u_{yy} - 3u_x - 15u_y + 27x = 0.$$

### Экзаменационный билет № 4

- 5) Уравнения продольных колебаний струны. Энергия колебания струны.
- 6) Метод распространения волн. Формула Даламбера.
- 7) Дан однородный тонкий стержень длины  $l$  с теплоизолированной боковой поверхностью. Найти нестационарное распределение температуры, если

$$u(x, 0) = Ax/l, \quad 0 < x < l,$$

$$u(0, t) = 0, \quad u(l, t) = Ae^{-t}; \quad A = \text{const}.$$

### Экзаменационный билет № 5

Энергия колебания струны. Теорема единственности для уравнений гиперболического типа.

Неоднородное уравнение теплопроводности и его решение.

Дан однородный тонкий стержень длины  $l$  с теплоизолированной боковой поверхностью. Найти нестационарное распределение температуры, если

$$u(x,0) = Ax/l, \quad 0 < x < l,$$

$$u(0,t) = 0, \quad u(l,t) = Ae^{-t}; \quad A = \text{const}.$$



## **11 КАРТА КАДРОВОЙ ОБЕСПЕЧЕННОСТИ ДИСЦИПЛИНЫ**

Лекционные и практические занятия по дисциплине «Методы математической физики» для студентов специальности 010701 «Физика» проводит доцент кафедры МАиМ Нейман В.П.