МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ

Федеральное агенство по образованию

АМУРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

(ГОУВПО «АМГУ»)

Утвержден на заседании кафедры математического анализа и моделирования факультета математики и информатики

«___»_________ 2007 г.

(протокол № от)

Зав. кафедрой

______________________Т. В. Труфанова

ВВЕДЕНИЕ В СПЕЦИАЛЬНОСТЬ

Учебно-методический комплекс дисциплины для студентов АмГУ по направлению подготовки дипломированных специалистов по специальности 010101 – «Математика»

Составитель: **М. Г. Ляпунова**

ББК

Л

Печатается по решению редакционно-издательского совета факультета математики и информатики Амурского государственного университета

Ляпунова М. Г.

Введение в специальность. Учебно-методический комплекс дисциплин для студентов АмГУ очной формы обучения специальности 010101 «Математика». – Благовещенск: Амурский гос. ун-т, 2007.

Учебно-методический комплекс дисциплины «Введение в специальность» содержит рабочую программу дисциплины, краткий курс лекций, материалы итогового контроля, библиографический список.

СОДЕРЖАНИЕ

1. ЦЕЛИ И ЗАДАЧИ ДИСЦИПЛИНЫ, ЕЕ МЕСТО В УЧЕБНОМ ПРОЦЕССЕ

1.1 Цель и задачи учебной дисциплины

Учебная дисциплина «Введение в специальность имеет своей целью познакомить студентов с достижениями математической науки, ее важном значении при изучении других наук, огромной роли в решении сложных производственных проблем, в развитии и усовершенствовании производственных процессов.

В процессе изучения дисциплины познакомить с великими математиками всех времен и народов, их вкладом в математическую науку.

1.2 Перечень дисциплин, необходимых для изучения данной дисциплины

Для изучения дисциплины требуются знания таких дисциплин, как геометрия, астрономия, теория чисел, основы математического анализа, основания геометрии. С понятиями этих дисциплин студенты знакомятся в процессе изучения данной дисциплины.

2. СОДЕРЖАНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ

2.1 Наименование тем, их содержание и объем в часах лекционных занятий – 18 часов

Глава I. О роли математики в познании

§ 1. О месте математики в системе современных знаний

§ 2. Об определении математики

§ 3. Математика – язык науки

§ 4. О работе математика

Глава II. Несколько математических задач

§ 5. Проблема оптимальных решений в современной жизни

§ 6. Об одной задаче вариационного исчисления

§ 7. Теорема К. Вейерштрасса

§ 8. Полиномы, наименее отклоняющие от нуля

§ 9. Об одной задаче математической статистики

§ 10. Элементы теории множеств

Глава III. Математические модели в науке и на практике

§ 11. Математические модели

§ 12. О пропускной способности морских портов

§ 13. О статистических методах контроля качества массовой продукции

§ 14. Об управлении качеством массовой промышленной продукции

Глава IV. О математическом творчестве

§ 15. Творчество – фундамент общественного прогресса

§ 16. Математическое творчество

§ 17. Прикладные исследования математика

§ 18. Творчество в области истории и методологии математики

§ 19 Преподавание и творчество

§ 20. О Московском университете

2.2 Самостоятельная работа студентов

Для самостоятельной работы студентов, объемом 12 часов, предусматривается написание рефератов с последующей защитой по предложенным темам о великих математиках и о роли математики в различных областях.

2.3 Вопросы к зачету

1. Место математики в современном мире.
2. Математика – язык науки.
3. Проблема оптимальных решений в современной жизни.
4. Математические модели.
5. О статистических методах контроля качества массовой продукции.

6. Об управлении качеством промышленной продукции.
7. Творчество – фундамент общественного прогресса.
8. Математическое творчество.
9. Великие русские математики.
10. Исаак Ньютон и Готфрид Лейбниц – создатели интегрального и дифференциального исчислений.

2.4 Требования к знаниям студентов, предъявляемые на зачете

Прежде всего студенты должны прослушать полный курс лекций по дисциплине, написать реферат по избранной теме и осветить один из вопросов (1 – 8), предлагаемых на зачет.

3. КРАТКИЙ КУРС ЛЕКЦИЙ

Введение в специальность. Математика

> В последующие годы я не мог себе простить этот недостаток – выдержки, не позволившей мне одолеть математику, хотя бы настолько, чтобы разобраться в ее великих руководящих началах. У людей, усвоивших эти принципы, одним органом чувств больше, чем у простых смертных.
>
> Ч. Дарвин, собр. Соч. М – Л, 1925, т. 1, к. 1

Глава I. О роли математики в познании

§ 1. Место математики в системе современных знаний

Каждый специалист хочет выяснить место представляемой им отрасли науки в системе современных знаний и в какой-то мере прогнозировать изменение этой роли в предвидимом будущем. Математик желает определить роль своей науки в том огромном океане знаний, которые приобрело человечество за время своего существования. Слова “математика в современном мире играет огромную роль “ теперь уже никого не могут удовлетворить, поскольку так категорически высказанное утверждение не может убедить тех, кто знаком с возможностями современной математики. К тому же зачастую роль математики не видна, поскольку во многих случаях на первый план выдвигается не математика, а технические или естественно-научные дисциплины.

За последние три-четыре десятилетия человечество было поражено открытиями первостепенного значения. Достаточно вспомнить о первых шагах покорения космоса, изучении внутриатомных процессов и их использовании для получения управляемой энергии, создании электронных вычислительных машин, поразительных успехах медицины и молекулярной биологии. То, что было совсем недавно не доступно людям, находилось за пределами их представлений и возможностей, сегодня стало возможным, привычным и вошло в нашу обыденную жизнь.

Человеческая память сохранила нам гордые мечты о полете на другие планеты и к звездам. Легенды о Дедале и Икаре, сказки всех народов Земли возносили человеческую мысль к полетам на Луну, к Солнцу, на другие планеты. Но чтобы мечты стали действительностью, потребовался долгий путь научных поисков, гипотез, построения количественных теорий и инженерных изобретений. Первая математическая теория полета в космос была предложена скромным учителем гимназии в Калуге К. Э. Циолковским еще в конце XIX века. Его мысль создала твердую научную базу под давние мечты и привела ко многим существенным идеям, без которых полет в космос был бы попросту невозможен. Но для того чтобы наступило 4 октября 1957 года –

день запуска первого искуственного спутника Земли, потребовалось более пятидесяти лет поисков, напряженного научного и технического творчества.

Первый человек поднялся в космос 12 апреля 1961 года, и за полетом Юрия Гагарина с восхищением, тревогой и волнением следил весь мир. Многие люди в этот день чувствовали себя не только гражданами своего отечества, но одновременно и землянами. Это чувство не уменьшилось, когда 16-24 июля 1969 года с замиранием сердца следили за отважными американскими космонавтами Н. Армстронгом, Э. Олдрином и М. Коллинзом, впервые побывавшими на поверхности нашего вечного спутника Луны.

Электронные вычислительные машины существуют каких-нибудь сорок-пятьдесят лет, но за этот срок они претерпели колоссальные изменения. Первоначальные машины были громоздки и потребляли огромное количество электроэнергии. Современные машины при несравненно меньших размерах значительно более экономны в расходовании энергии и обладают поражающими воображение возможностями решения вычислительных и логических задач. Вычислительная техника не только использует последние достижения физики и инженерного дела, но и ставит перед всеми областями знания новые задачи, решение которых позволит увеличить быстродействие вычислительной техники и сделать машины более гибкими в работе.

Во всех перечисленных проблемах, решение которых относятся к крупнейшим достижениям, несомненна роль физики, химии и инженерного дела. Роль математики менее заметна, но, как оказывается, исключительно велика. Чтобы сделать реальностью полеты в космос, овладеть энергией атома, создать совершенные ЭВМ, потребовалась колоссальная работа мысли в разных направлениях и, в том числе, в области математики, и именно потому, что появилась потребность для решения сотен и тысяч разнообразных задач. Вначале вспомогательное средство расчета, математика превратилась в самого необходимого помощника всех исследований, наряду с экспериментом и анализом его результатов стала мощным орудием познания, а на определенных этапах развития знаний является единственным средством познания и, подобно скальпелю хирурга, помогает проникать во внутренние свойства изучаемых объектов.

Проиллюстрируем эту мысль на проблеме телефонной связи. Сеть телефонной связи объединяет между собой десятки миллионов абонентов, позволяет людям общаться друг с другом, не пересекая государственных границ. При чем здесь математика? Прежде всего, чтобы приступить к строительству телефонной станции, ее нужно спроектировать и рассчитать – как долго придется абоненту ожидать начала разговора. Как заранее провести расчеты необходимого оборудования для того, чтобы время ожидания абонента в среднем не превосходило 5 – 10 секунд? Для проведения подобных подсчетов надо знать закономерности поступления вызовов абонентов и длительность разговоров. Поток вызовов обладает сложной структурой: очень много абонентов и каждый абонент прибегает к помощи телефона в случайные моменты времени. Можно предполагать, что вызовы одного абонента не сказываются на частоте вызовов других. Казалось бы, что в таких условиях нет и не может быть каких-либо строгих закономерностей потока суммарных вызовов. Однако это не так! В пятидесятые годы прошлого столетия известный русский математик Александр Яковлевич Хинчин сумел доказать, что если поток вызовов состоит из суммы очень большого числа вызовов от отдельных абонентов и каждый из этих частных потоков вносит небольшой вклад в суммарный поток, то этот суммарный поток обязательно будет близок к так называемому потоку Пуассона. Для математического результата безразлична конкретная интерпретация, существенны лишь общие условия, которые должны удовлетворять рассматриваемые явления. Поэтому безразлично – рассматривается ли поток вызовов абонентов телефонной связи, или частота прибытия в порт судов, или число требований скорой медицинской помощи. Математические закономерности будут одни и те же, если выполнены те условия, которые были перечислены.

Народное хозяйство представляет сложную систему взаимосвязанных отраслей. Развитие одной из них влечет за собой развитие других. Так, рост промышленного производства приводит к необходимости повышения товарного производства сельского хозяйства. Это, в свою очередь, предъявляет к промышленности новые требования на производство удобрений, сельскохозяйственной техники, постройки хранилищ продукции, развитие транспорта. Одновременно требования предъявляются к науке, в том числе и к математике. Возникают вопросы густоты посевов, оптимальных норм и сроков внесения удобрений, выведения новых сортов растений, обладающих лучшими качествами. Для этого требуется тщательное статистическое исследование. В настоящее время в математической статистике разработаны методы, позволяющие давать объективный ответ на подобного рода вопросы.

Интересные проблемы математического характера возникают в связи с проектированием сельскохозяйственной техники и ее эксплуатацией. Сельхозмашины работают в тяжелейших условиях и поэтому обеспечение их надежности является первоочередной задачей. Сделать это нужно без утяжеления конструкции. Вторая задача – расчет необходимого запаса деталей и узлов для бесперебойной работы парка машин, имеющихся в хозяйстве. Эта задача касается любых крупных хозяйств – автомобильных парков, подразделений гражданской авиации и пр.

По мере того как производство привлекает новейшие открытия физики и химии, неизбежно повышается роль математики. Использование в промышленности лазеров привело к необходимости привлечения к решению производственных задач квантовой физики, а вместе с ней и всего математического аппарата, связанного с ней. Появление авиации потребовало решения многих задач: расчета крыльев и фюзеляжа, подъемной силы крыла и множества других. Привычных методов арифметики, алгебры, геометрии оказалось недостаточно, потребовалось развитие и применение методов теории функций комплексного переменного. Переход к атомной энергетике привел к широкому использованию атомной физики и связанного с ней математического аппарата и к постановке совершенно новых вопросов, связанных с расчетом атомных реакторов, их надежности и безопасности.

Вообще, когда переходят к производству продукции, основанной на новых физических, химических или биологических принципах, требуются серьезные математические исследования и расчеты, они необходимы и при выпуске модернизированной продукции. Нарушение этого правила приводит к серьезным экономическим просчетам, к выпуску недоброкачественных изделий.

Для нормальной работы предприятия возникает необходимость получить максимальную эффективность от использования производственного оборудования и рабочей силы, уменьшить межцеховые перевозки, сократить рабочий цикл, который проходит изделие, исключить потери материалов, сохраняя высокое качество изделий. Возникла специальная дисциплина «Теория расписаний», которая исследует вопросы распределения работ между оборудованием. В 1939 году появились работы, посвященные решению задач оптимального раскроя материалов, приведшие к созданию новой математической теории – линейного и нелинейного программирования. С задачами на оптимизацию встречаемся уже в школьном курсе. В задаче о размерах консервной банки, которая при заданном объеме должна иметь наименьшую полную поверхность, усматривается экономический эффект: сколько потребуется пищевой жести для того чтобы вместить нужный объем продукции.

Астрономы, механики и физики раньше представителей других наук пришли к убеждению, что математические методы не только для вычислений, но и в качестве одного из основных инструментов проникновения в существо изучаемых ими закономерностей. С XVIII века математизация этих наук шла очень быстро, и в настоящее время работы по физике трудно отличить от собственно математических. Но физика не только нуждается в готовом математическом аппарате исследований, она постоянно участвует в создании новых направлений математических исследований. Молекулярная физика в XIX веке потребовала создания и разработки теории многомерных пространств, в XX веке привела к разработке теории случайных процессов, теории линейных и нелинейных операторов, теории обобщенных функций и пр.

Инженерное дело также широко использовало математические методы, особенно после создания основ математического анализа. В начале XVII века в Москве был издан «Устав ратных, пушечных и других дел, касающихся до воинской науки», значительная часть которого посвящена изложению геометрических задач, связанных с определением расстояния до недоступных точек. В 1696 году английский кораблестроитель Антони Дини при постройке корабля “Rupert” заранее, до постройки, подсчитал вес и расположение грузов, вычислил водоизмещение и на этом основании предсказал осадку судна до спуска на воду. Пользуясь подсчетами, он приказал прорезать отверстия в бортах для стрельбы из орудий еще на стапеле. Это вызвало в ту пору всеобщее удивление, так как кораблестроение в течение тысячелетий опиралось лишь на опыт и вековые традиции. Позднее такие предварительные расчеты вошли в повседневный обиход, поскольку они упрощали технологию постройки и удешевляли процесс строительства.

В наше время математизация знаний совершает своеобразный победный марш. Причина этого заключается не в преходящей моде, а в том, что чисто качественное исследование явлений природы, экономики, медицины, организации производства, как правило, оказывается недостаточным. Как можно автоматизировать процесс выплавки стали без точных количественных закономерностей этих процессов? Как заставить рационально работать линию связи, если не знать ни количественных закономерностей поступления требований от абонентов, ни длительности обслуживания этих требований? Поэтому автоматизация технологических процессов и управления ими неизбежно приводит к необходимости использования математики и, в свою очередь, заставляет математику ставить новые вопросы и разрабатывать новые методы.

При современных скоростях технологических процессов человеческая психика уже не способна своевременно принимать решение о дальнейшем их течении и на основании полученной информации осуществлять необходимое управление. Происходит запаздывание в управлении. Опоздание приносит огромные материальные потери, поскольку уменьшается производительность и ухудшается качество продукции. Так при ручном управлении производством бумаги только около 10% времени человек способен удержать производство вблизи желаемого уровня. Возникает необходимость передачи управления быстродействующим аппаратам. Но автоматическое устройство само по себе не в состоянии решить логические задачи и делать заключение о необходимых воздействиях – изменении температурного режима, скорости процесса, изменении состава и пр. Автомат не понимает указаний качественного характера – «делай лучше», «обработай точнее» – ему требуются строгие количественные указания: если температура колеблется в заданных пределах, химический состав соответствует запланированному, то скорость должна быть в пределах от v до $v+dv$, а если температура превысила некоторый уровень t_o , то срочно надо уменьшить нагрев. Чтобы уметь это высказать, нужно разработать количественную теорию этого процесса.

Такого рода задач возникает великое множество – от управления химическими процессами и прокатными станами до управления энергосистемами и выплавкой сверх чистых металлов. Важно научиться передавать автоматам управление самолетами, ракетами и другими движущимися объектами. Без решения подобных задач нельзя осуществлять сверхдальние перелеты, запуски космических станций, передачу информации со спутников и т. д. Встал вопрос о создании теории, которую можно было бы использовать во многих частных случаях, внося каждый раз необходимые уточнения, свойственные данному процессу. Принципиальные успехи в решении этого вопроса достигнуты Львом Семеновичем Понтрягиным и его учениками и в США – Ричардом Беллманом и его сотрудниками. Высказанные ими идеи и результаты легли в основу так называемой *теории оптимального управления*, которая привела к ускорению прогресса техники, а не только к прогрессу математического знания.

Вариантов управления процессом можно предложить бесконечное множество. Однако для выбора самого лучшего, или, как принято говорить, оптимального управления остается единственная возможность – построить математическую теорию и найти искомое решение путем использования соответствующего математического формализма. Создавая математическую модель реального процесса, мы неизбежно его упрощаем, и изучаем лишь приближенную его схему. По мере уточнения знаний о процессе и выяснения роли ранее не учтенных фактов удается сделать более полным математическое описание процесса. При этом не исключаются из процесса познания наблюдение и эксперимент. С помощью развитой математической теории можно не только описывать установленные ранее опытные факты, но и предсказывать новые закономерности, прогнозировать течение явлений и тем самым иметь возможность управлять ими.

Математизация знаний состоит не только в использовании готовых математических методов и результатов, но и в поисках того специфического математического аппарата, позволяющего наиболее полно и точно описывать интересующий нас круг явлений, а также помогает из этого описания выводить новые следствия, пригодные на практике. Так случилось в период, когда изучение движения стало насущной необходимостью. Именно тогда английский физик, механик, астроном и математик, член Лондонского королевского общества (1672) и его президент, член Парижской АН (1699) Исаак Ньютон (1643 – 1727) и немецкий математик, физик и философ, организатор и первый президент Берлинской АН (1700), член Лондонского королевского общества (1673), член Парижской АН (1700) Готфрид Вильгельм Лейбниц (1646 – 1716) создали основы математического анализа, который до сих пор является основным орудием прикладной математики.

§ 2. Об определении математики

Современную математику с большим городом, в котором постоянно происходят изменения: строятся новые здания, перестраиваются старые, прокладываются новые улицы, проводятся дороги. Так и в математике возникают новые области исслндований, строятся новые теории, доказываются новые теоремы. Но прогресс математики не сводится только к созданию нового, приходится изменять и старое, привычное: подводить новый логический фундамент под прежние знания, включать старые теории в более современные, устанавливать связи между разными областями математического знания. Очень важна для развития математики тесная связь с практикой. Нередко математику требуется заметить, что либо имеющиеся знания позволяют решить проблемы практики, либо для этого нужно развитие самой математики.

Нередко математику уподобляют большому ветвистому дереву, которое системати-чески дает новые побеги. Каждая ветвь дерева – это та или иная область математики. Число ветвей не остается неизменным, поскольку вырастают новые области математики, срастаются воедино ветви, росшие раздельно, другие ветви засыхают. Питает это дерево мощная система корней, которая отождествляются с практикой и человеческой любознательностью.

Но приведенные сравнения не касаются самого важного: какова суть математики и каков предмет ее исследований?

Ответ на этот вопрос зависит от уровня математических знаний. Младший школьник ответит, что математика изучает правила счета предметов. И будет прав. В течение длительного времени эта важная часть математики составляла единственный предмет исследования. Школьник постарше к сказанному добавит изучение геометрических объектов – линий, фигур, геометрических преобразований. Старшеклассник добавит действие перехода к пределу, изучение функций, операции дифференцирования и интегрирования. Студенты технических ВУЗов знают, что в состав математики входят теория вероятностей, дифференциальные уравнения, программирование на ЭВМ с целью передачи информации, ее переработки, обработки опытных данных, моделирование производственных процессов. Однако и этим не исчерпывается содержание математики. В нее входят многие другие дисциплины: теория множеств, теория функций, теория случайных процессов, функци-ональный анализ, математическая статистика.

Однако перечисление дисциплин, входящих в математику, не отвечает на поставленные вопросы. Определяющим признаком всякой математической дисциплины всегда является некоторый формальный метод, потенциально допускающий самые различные материальные воплощения. Может ли быть явление реального мира исследуемо с помощью данного математического метода – этот вопрос решается не конкретной материальной природой явления, а исключительно его формальными структурными свойствами и прежде всего – теми количественными соотношениями и пространственнымит формами, в которых они протекают. Например, для применения метода дифференциальных уравнений в физике, химии, биологии достаточно наличия двух изменяющихся величин, изменения которых имеют определенную относительную скорость.

Математический результат обладает тем свойством, что он применим при изучении не только какого-то определенного явления или процесса, а может найти использование и во многих других, физическая природа которых принципиально отличается от рассматриваемого. Для его применимости нужно, чтобы весь круг явлений обладал одинаковыми структурными свойствами: количественными и логическими отношениями и пространственными формами. Так правила арифметики применимы и в задачах экономики, и в технических расчетах, и при решении вопросов сельского хозяйства. Арифметические правила выработаны человечеством много веков назад, их изучение имеет лишь педагогическое и прикладное значение, в научном же отношении о них сказать новое сейчас уже невозможно. Арифметика представляет собой составную часть математики, она находит и будет находить многочисленные применения практического характера, ее прикладная ценность сохранится навечно.

Но все же чем занимается математика, каков ее предмет исследования? Рассмотрим две точки зрения. Одна из них высказана Ф. Энгельсом в книге «Анти-Дюринг», согласно которой «чистая математика имеет своим объектом пространственные формы и количественные отношения действительного мира». Это представление о предмете математики принято подавляющим большинством советских математиков. Ряд ученых считает, что определение Энгельса не учитывает развитие математики в XX веке и его следует пополнить. Важно добавить логические структуры, позволяющие включить в математику и программирование. Вторая точка зрения принадлежит Н. Бурбаки (общий псевдоним группы французских математиков), изложенная в статье «Архитектура математики», согласно которой «единственными математическими объектами становятся, собственно говоря, математические структуры». Второе определение утверждает в сущности то, что объектами математики ее работы становится то, чем она занимается. Это, конечно, правильно, но глубины в этом определении нет, хотя оно все же рисует некоторую картину того, чем занимается математика.

Изучение понятий, введенных путем абстрагирования от явлений реального мира, тем самым является предметом, которым занимается математика.

В «Диалектике природы» Энгельс писал «…вся так называемая чистая математика занимается абстракциями… все ее величины суть, строго говоря, воображаемые величины…» Мы должны добавить к этому, что в математике рассматриваются абстракции, при абстрагировании от реальных вещей.

Как формируются математические структуры? Их источником может быть чистое мышление, а не материальный мир. Примером может быть возникновение комплексных чисел в алгебре. Комплексные числа прошли долгий путь развития в несколько веков – путь организации в структуру, но вплоть до начала XIX века они считались мнимыми, «воображаемыми», т. е.

не имеющими никакого отношения к действительности. Следует отметить, что комплексные числа стали рассматривать не потому, что «чистое мышление» предложило их изучать. Они стали объектом математического исследования в связи с тем, что встретились при решении алгебраических уравнений второй и высших степеней.

Абстрактное мышление не отрывает познание от действительного мира, а позволяет познавать его глубже и полнее. Создание абстрактных понятий и на их базе теории является необходимым шагом любого познания. Именно этим объясняется решающая роль теоретического мышления. Каждому новому предшествует идея. Когда идея созревает, она становится базой для практических поисков и применений. Математика по своей сути является концентрацией теоретической мысли. Опыт последних столетий наглядно показывает, сколь велика роль математики в развитии всего количественного естествознания, инженерного дела, организации производства. Если бы не были созданы в XVII – XVIII веках начала математического анализа, то мы бы не имели ни небесной механики, ни количественной теории машиностроения.

Вместе с тем правила математики не обладают абсолютной достоверностью – для них также имеется ограниченная область применения, где они господствуют безраздельно. Например, при смешении литра спирта и литра воды мы не получим двух литров смеси, молекулы этих двух жидкостей расположатся компактнее и объем смеси будет меньше двух литров. Правило сложения арифметики нарушится. В некоторых процессах сумма существенно зависит от порядка суммирования. Эти наблюдения заставили математику развивать новые разделы, что приводит к созданию новых ветвей математической науки. Это делает математику более гибкой в применениях, способной охватить своим воздействием большее число явлений природы и общественной жизни. Нельзя забывать, что человеческое познание является лишь приближенным отражением реального мира. Каждая эпоха приводит человечество к необходимости уточнения наших знаний, а следовательно, к развитию науки.

Математика не является исключением из всех областей познания, она тоже позволяет изучать явления лишь приближенно. Но следует отметить, что ее выводы логически абсолютно точны и строги. Ее приближенность имеет не внутренний характер, а лишь связанный с описанием реальных явлений.

§ 3. Математика – язык науки

Для общения и для выражения своих мыслей люди создали величайшее средство – живой разговорный язык и письменную его запись. Несмотря на всю многогранность и гибкость, в ряде случаев язык современного человека оказывается недостаточным и неудовлетворительным средством общения. Поэтому в различных областях деятельности вырабатываются как бы свои собственные языки, специально приспособленные для точного и краткого выражения мыслей, системы действий.

Так при выдаче рабочего задания на изготовление изделия не ограничиваются только словесным описанием. Для уточнения формы, размеров и иных особенностей изделия служит чертеж. Чертеж является своеобразным языком для передачи информации конструктором исполнителю. Эта форма общения несравненно удобнее словесной, ее без труда прочтет любой специалист, даже не владеющий языком конструктора.

В науке особенно важны ясность и точность выражения мыслей. Язык науки не должен создавать дополнительных трудностей при восприятии сообщаемой информации, но должен доносить идеи и факты в однозначном, не допускающем различных толкований виде. Необходимо предусмотреть все возможные исходы и не пропустить каких-либо возможностей. Научное изложение должно быть кратким и исчерпывающим, сохранять полную определенность. Поэтому наука обязана разрабатывать собственный язык, способный максимально точно передавать свойственные ей особенности. Впервые четко и ярко о математике как языке науки сказал более 400 лет тому назад великий естествоиспытатель прошлого Галилео Галилей (1564 – 1642). «Философия написана в грандиозной книге – природе, которая открыта для всех и каждого, кто научился понимать ее язык и знаки, которыми она написана. Написана же она на математическом языке, а знаки ее – математические формулы». Французский физик-теоретик Луи де Бройль прекрасно сказал: «… где можно применить математический подход к проблемам, наука вынуждена пользоваться особым языком, символическим языком, своего рода стенографией абстрактной мысли, формулы которой, когда они правильно записаны, по-видимому, не оставляют места ни для какой неопределенности, ни для какого неточного истолкования». Немецкий физик нашего времени В. Гейзенберг так охарактеризовал место математики в современной теоретической физике: «Первичным языком, который вырабатывают в процессе научного усвоения фактов, является в теоретической физике обычно язык математики, а именно математическая схема, позволяющая физикам предсказывать результаты будущих экспериментов». Более того, датский физик Нильс Бор заявил, что «…математика является значительно большим, чем наука, поскольку она является языком науки».

Заметим, что математическая символика не оставляет места для неточности выражения мысли и позволяет автоматизировать проведение действий, необходимых для получения результата. Например, для многих вопросов геодезии, физики, строительной механики, экономики их математическая постановка приводит к необходимости решения систем линейных уравнений, для которых разработаны алгоритмы их решения. Применение набора стандартных правил позволяет без особых затруднений решать каждый из поставленных вопросов.

Математическая символика позволяет сжимать запись информации, делать ее легко обозримой и удобной для последующей обработки.

В последние годы появилась новая линия в развитии символических языков, связанная с развитием вычислительной техники, с использованием ЭВМ для управления производственными процессами, линиями связи, а также для решения экономических и организационных задач. При общении с машиной надо предоставить ей возможность в каждый момент самостоятельно выбирать правильное в данных условиях действие. Но машина не понимает обычную человеческую речь, с ней нужно проводить диалог на доступном ей языке. В настоящее время создан ряд формальных языков, с помощью которых машина однозначно воспринимает сообщаемую ей информацию. Процесс управления производится с широким использованием математической теории самого изучаемого явления. Оба эти момента и делают

ЭВМ исключительно гибким средством при выполнении как сложнейших вычислительных работ, так и последовательностей логических операций.

Возникает вопрос: не приведет ли использование формализованных языков, а также математизация научных знаний к отмиранию разговорного языка? Ответ отрицательный, так как формальные языки, как символический язык математики, так и наш повседневный язык имеют ограниченные возможности. Язык формул превосходно приспособлен к получению логических следствий, но он не может выразить эмоций, а также далеко идущих аналогий. Здесь ему на помощь приходит обычный неформализованный язык с его неисчерпаемым богатством оттенков и возможностей.

В чем же состоит познавательная сила математики? Почему наука, непосредственно не связанная с процессами природы, техническими и экономическими процессами, превращается в один из основных методов исследования, в язык, позволяющий точно формулировать присущие этим процессам закономерности?

Заметим, что развитие математики всегда было тесно связано с запросами практики. Вновь возникающие задачи не укладываются в уже разработанные схемы и методы решения, даже отсутствуют понятия и термины, на языке которых можно описать эти явления. В таком положении находилась теория надежности в 50-е годы прошлого столетия. Остро стоял вопрос о выработке понятий теории надежности и их количественной оценки. Совместными усилиями ученых СССР и США такие понятия были выработаны, поставлены и решены многие вопросы. Роль математики при этом оказалась решающей.

Очень часто понятие, введенное для решения частного примера, оказывается важным в ряде других проблем, резко отличающихся от первоначальной. Так понятие алгебраического уравнения появилось еще в Древнем Вавилоне, и потребовалось много сотен лет, прежде чем было замечено, что решение уравнений важно для множества различных областей знаний и что нужно создавать теорию нахождения их решений.

Математические методы, вполне достаточные на определенном этапе познания, оказываются недостаточными на новом его этапе. Например, в конце XIX века был изобретен самолет, и возникла задача изучения его движения в полете. Какие силы действуют на самолет в движении, откуда берется подъемная сила и как ее рассчитать, как зависит сопротивление воздуха от формы крыльев и фюзеляжа? Эта проблема увлекла Н. Е. Жуковского (1847 - 1921), что послужило развитию науки аэродинамики. Жуковский исходил из того, что воздух является идеальной жидкостью и при скоростях в пределах 200 – 300 км в час сжимаемость воздуха несущественна и ею можно пренебречь. При увеличении скоростей полета возникла необходимость строить новую аэродинамику, пришлось обновить используемый математический аппарат. Переход скоростей самолетов через звуковой барьер потребовал совершенствования теории и новых математических средств исследования. В частности, появилась возможность производить расчеты полета космических ракет и управления их полетом.

В чем же состоит познавательная мощь математики? Во-первых, математическое абстрагирование производится не произвольно, а по требованию практики. Новые, более общие понятия строятся на основе старых, которые включаются в качестве простейших случаев, понятия математики становятся способными охватить более широкий круг объектов.

Во-вторых, когда математические средства оказываются недостаточными для изучения явлений, наука ищет и находит новые средства, потому ее средства непрерывно совершенствуются и обновляются. Наше время, с его стремительным прогрессом физики и широким использованием средств математического исследования в технике и организации производством, приводит к быстрому развитию математики. Появляются новые ветви: математическая статистика, теория случайных процессов, теория операторов, теория обобщенных функций. В-третьих, те ветви, которые возникли не в результате требований практики, а в силу потребностей самой математики, не остаются изолированными от практики.

Прикладные возможности математики безграничны потому, что она не стоит на месте, а постоянно развивается, меняет свое содержание, включая в свой состав новые понятия, идеи, методы, объекты исследования. Активное участие в этом принимает практика.

§ 4. О работе математика

В наши дни профессия математика имеет многочисленных представителей и позволяет заняться весьма разнообразной деятельностью. Самой распространенной является должность преподавателя. Далее работа программиста, т. е. лица, составляющего программы для работы на ЭВМ с целью выполнения сложных вычислительных и информационных работ. По мере развития вычислительной техники эта специализация математиков будет играть все большую роль в жизни общества. Математики работают непосредственно на производствах, производя необходимые расчеты новых конструкций, принимая участие в постановке испытаний и обработке их результатов. Большой контингент математиков работает в научно-исследовательских институтах экономического, инженерного, медицинского, биологического, сельскохозяйственного профиля. Наконец, математики могут работать в качестве исследователей в учреждениях чисто математического характера.

Педагогической деятельностью занимаются сотни тысяч математиков, и многие из них находят в ней свое призвание, получают искреннее удовлетворение от сознания , что им удается приобщить молодежь к знаниям, показать важность математических знаний для всех видов практической деятельности, приучить своих учеников к строгому логическому мышлению, необходимому в наше время любому специалисту – врачу, инженеру, социологу, экономисту и т. д. Еще Симеон Дени Пуассон (1781 – 1840) отмечал: **«Жизнь украшается двумя вещами: занятием математикой и ее преподаванием».**

Специальность педагога – одна из самых гуманных, поскольку она позволяет новые поколения поднять в интеллектуальном смысле до уровня, соответствующего переживаемому времени. Именно педагог может и должен пробуждать веру учащихся в наличие способностей не только к познанию того, что уже познано, но и к познанию того, что еще неизвестно. Идеи, идеалы, увлечения учителя продолжают его ученики. Труд учителя прекрасен потому, что он формирует человека, его характер и его интересы, призывает к самоусовершенствованию, к познанию нового и не останавливаться на достигнутом. Каждый из вас с благодарностью вспоминает учителей, которые подсказали вам дальнейший путь в жизни. Если учитель вызывает у учеников потребность самостоятельно работать, изучать без принуждения новое и осмысливать полученные знания, то такому учителю нет цены.

Компетентность, доброжелательность, разумная требовательность, увлеченность – главные качества хорошего педагога. Педагог по призванию редко прибегает к мерам прямого наказания, поскольку он находит другие пути воздействия на психику учащегося. Учитель, любящий свое дело, не остается безразличным к судьбе своего предмета. Предмет заслуживает уважения лишь тогда, когда на его изучение затрачен собственный труд. Педагог должен развивать инициативу у своих учеников, так как интеллектуальные способности, увлеченность познанием, инициатива, стремление к поиску нового, неизведанного является ценнейшим общественным капиталом. Необходимо, чтобы учащиеся попадали в атмосферу, которая способствовала бы развитию их способностей, приближала к творчеству.

Талант учителя может проявляться различными путями. Одни увлекают учащихся содержанием и глубиной изложения, другие обладают талантом рассказчика. В их изложении любая сложная тема становится простой, понятной, увлекательной. Предмет как бы оживает и начинает сверкать всеми красками. Еще Блез Паскаль говорил: «Нет сложных теорий, есть сложные изложения». Третьи умело приводят сведения из истории науки, мастерски связывают общую теорию с практическими применениями и показывают свою науку как орудие познания природы, экономических явлений, процессов техники. Четвертые блестяще решают задачи и вызывают восхищение учащихся идеями, с которыми их знакомят на базе рассмотрения частных примеров.

У каждого преподавателя бывают моменты, когда он видит, как удачно прошло занятие. Что сопутствовало удаче? Ответ на этот вопрос приходится все время искать. И это одна из самых привлекательных черт профессии учителя: в ней без творчества, без поисков новых решений на каждом занятии обойтись невозможно.

Глава II. Несколько математических задач

§ 5. Проблемы оптимальных решений в современной жизни

Слова великого русского математика П. Л. Чебышева, сказанные 8 февраля 1856 г. на торжественном заседании в Петербургском университете, не потеряли своей актуальности и в наши дни: «Практическая деятельность человека представляет чрезвычайное разнообразие, и для удовлетворения всех ее требований, разумеется, недостает науке многих и различных метод. Но из них особенную важность имеют те, которые необходимы для решений различных видоизменений одной и той же задачи, общей для всей практической деятельности человека: как располагать средствами своими для достижения по возможности большей выгоды?»

В настоящее время экономия материалов, энергетических ресурсов, рабочего времени станков и рабочего превратилась в государственную проблему огромной важности. Среди многих специалистов различных отраслей народного хозяйства принято ставить задачу оптимизации: «при минимальных расходах добиться максимальной прибыли». Так сформулированная задача бессмысленная, поскольку минимальные расходы – нулевые. Если ничего не вносить, то о максимальной прибыли не может быть речи. Правильная постановка такая: «при заданных затратах найти способ получения максимума прибыли» или «при заданной прибыли добиться ее получения при минимальных расходах».

Задачи на отыскание максимальных и минимальных значений функции возникли давно, и буквально в первые годы возникновения дифференциального и интегрального исчислений были разработаны правила их нахождения. Эти правила теперь излагаются в курсах математики средней школы: если непрерывная функция имеет непрерывные производные первого и второго порядков, то максимальные и минимальные значения функции находятся в тех точках, где первая производная равна нулю, а вторая производная отлична от нуля. В тех точках из найденных, в которых вторая производная положительна, функция имеет минимум; в тех же, где она отрицательна – максимум.

Проиллюстрируем правила на примерах.

Пример 1. Найти размеры консервной банки, которая при заданном объеме имеет наименьшую полную поверхность (на изготовление потребуется наименьшее количество жести).

Обозначим через R – радиус основания, H – высоту банки. Объем банки равен $V=\pi R^2H$, полная поверхность равна $S = 2\pi R^2 + 2\pi RH$. Поскольку $H = \dfrac{V}{\pi R^2}$, то $S = \dfrac{2\pi R^3 + 2V}{R}$.

Находим производную $S' = \dfrac{2(2\pi R^3 - V)}{R^2}$, она обращается в ноль при $R = \sqrt[3]{\dfrac{V}{2\pi}}$.

Вторая производная $S'' = \dfrac{4(\pi R^3 + V)}{R^3} > 0$ для найденного значения R.

Найдем теперь высоту банки: $H = \dfrac{V}{\pi R^2} = 2\sqrt[3]{\dfrac{V}{2\pi}} = 2R$. Следовательно, минимальный расход материала пойдет на банку, высота которой в 2 раза меньше длины стороны основания.

Пример 2. Некий предмет движется прямолинейно с постоянной скоростью v_1; он должен
из точки A попасть в точку B с заходом к прямой α. Как следует выбрать точку C захода к прямой α, чтобы путь ACB пройти в кратчайшее время?

В предположениях задачи нам нужно найти кратчайший путь.

Опустим из точек A и B перпендикуляры на прямую α, которую примем за ось абсцисс, перпендикуляр к ней OA примем за ось ординат. Пусть абсцисса точки C равна x, абсцисса точки B равна a, а ординаты точек A и B соответственно равны y_1 и y_2. Длина пути ACB равна $d = \sqrt{x^2 + y_1^2} + \sqrt{(a-x)^2 + y_2^2}$.

Производная $d' = x : \sqrt{x^2 + y_1^2} + (a-x) : \sqrt{(a-x)^2 + y_2^2}$.

Приравняв ее нулю, убеждаемся, что абсцисса точки C должна удовлетворять равенству

$$\frac{x}{\sqrt{x^2 + y_1^2}} = \frac{a-x}{\sqrt{(a-x)^2 + y_2^2}}.$$

Это равенство означает, что косинусы углов ACO и $BCД$ должны быть равны, а отсюда следует, что и сами углы должны быть равны.

Полученный результат характеризует закон отражения света: кратчайший путь ACB достигается тогда, когда «угол падения равен углу отражения».

Принято считать, что автором рассмотренной задачи является знаменитый древнегреческий ученый Герон Александрийский. Сам труд его «О зеркалах», в котором была помещена эта задача, не сохранился; о его содержании известно от комментаторов. Имя Герона известно из курса школьной геометрии: формула Герона позволяет вычислять площадь треугольника по его сторонам.

Задача Герона может быть решена совсем просто, без использования понятия производной посредством следующего построения. Пусть ломаная ACB дает искомое решение. Построим зеркальное отражение относительно прямой α отрезка CB. Пусть это будет отрезок CB_1. Так как эти отрезки равны, то ACB_1 должно быть кратчайшим расстоянием между A и B_1. Это возможно только тогда, когда ACB_1 является отрезком прямой, что, очевидно, решает задачу. Таким образом, Герону первому удалось доказать, что имеет место закон отражения света, исходя из гипотезы минимальной потери времени на прохождение ломаного пути.

Позднее, уже в XVII веке, этот результат был повторен великими французскими учеными Р. Декартом (1596 – 1650) и П. Ферма (1601 – 1665).

Вопросы, связанные с разысканием наилучших решений, волнуют представителей всех отраслей знания и деятельности. Как организовать работу станков, настроенных на определенные операции, чтобы выпустить максимум необходимой продукции? Как организовать раскрой материала, чтобы добиться минимума расходов? Как следует выбрать маршрут полета ракеты с Земли, чтобы затратить минимальное количество горючего? Такие задачи возникают повсюду, и их разнообразие велико.

§ 6. Элементы теории множеств

Теория множеств в 20-е и 30-е годы прошлого столетия была основным увлечением московских математиков и явилась источником большого числа выдающихся научных результатов, а также базой для построения математики как единого целого. Ее идеи вышли далеко за пределы собственно математики и нашли применение при построении основ комплексной инженерной дисциплины – теории надежности.

Под *множеством* понимают объединение отдельных вещей, понятий, состояний – элементов множества. При рассмотрении множеств заметим, что их можно разбить на два резко отличающихся друг от друга типа: множества, состоящие из конечного числа элементов, и множества, состоящие из бесконечного количества элементов.

Первое систематическое изучение свойств бесконечных множеств было предпринято уроженцем Петербурга, позднее профессором Кенингсбергского университета математиком Георгом Кантором (1845 – 1918). Не побоявшись борьбы с традиционным мышлением, предубеждением философов и крупных математиков, Кантор развил теорию множеств, вскоре сделавшуюся основой всей математики и выдвинувшей множество как математических, так и философских вопросов.

Для бесконечных множеств в первую очередь возникает вопрос в количественном отно-шении: все ли бесконечные множества одинаковы или имеются множества более насы-щенные элементами, чем другие? Чтобы не смешивать количественные отношения для бесконечных множеств с понятием числа для конечных множеств, вводится понятие *мощности* множества. Множества имеют одинаковую мощность, если между их элементами можно установить взаимно однозначное соответствие.

Простейшее бесконечное множество – это множество натуральных чисел. Его мощность называется счетной. Бесконечная его часть 1, 4, 9, 16, имеет также счетную мощность.

Без труда можно убедиться в том, что счетными являются множества: всех простых чи-сел; чисел, кратных трем (пяти, семи и т. д.); всех нечетных чисел; всех четных чисел и т. д.

Более того, множесто всех рациональных чисел имеет счетную мощность, так как все рациональные числа можно записать в виде следующей последовательности:

$$\frac{0}{1},-\frac{1}{1},\frac{1}{1},-\frac{2}{1},\frac{2}{1},-\frac{1}{2},\frac{1}{2},-\frac{3}{1},\frac{3}{1},-\frac{1}{3},\frac{1}{3},-\frac{4}{1},\frac{4}{1},-\frac{1}{4},\frac{1}{4},-\frac{2}{3},\frac{2}{3},-\frac{3}{2},\frac{3}{2},-\frac{1}{5},\ldots$$

Множесто всех алгебраических чисел имеет счетную мощность. Если собрать все рациональные числа, все корни из них, все конечные комбинации рациональных чисел и их корней, все корни из этих комбинаций, то окажется, что их можно перенумеровать, т. е. в некотором смысле их имеется “ столько же, сколько имеется натуральных чисел”.

Счетную мощность обозначают буквой *a.* Конечную мощность – числами: *1, 2, … , n, …*

Арифметика счетной мощности: 1. $a + n = a$;

2. $a + a + \ldots + a = na = a$;

3. $a - n = a$;

4. $a + a + \ldots + a + \ldots = aa = a^2 = a$.

5. $n + n + n + \ldots + n + \ldots = na = a$.

Все неалгебраические числа называются трансцендентными. Оказывается, что их подавляющее большинство, и, собственно, трансцендентные числа, а не алгебраические сле-дует считать нормой, алгебраические же – ничтожным исключением.

Бесконечные множества, не являющиеся счетными, называются несчетными. Множество точек отрезка [0;1] является несчетным множеством. Мощность точек отрезка [0;1] называется мощностью континуума и обозначается буквой *c*. Множество точек числовой оси, множество всех действительных чисел имеет мощность *c*. Арифметика мощности континуума аналогична арифметике счетной мощности:

1. $c + n = c$; 2. $c + a = c$;

3. $cn = c$; 4. $ca = c$;

5. $cc = c^2 = c$;

Существует ли множество еще более мощное, чем континуум? Конечно. Доказывается, что мощность множества всевозможных подмножеств любого непустого множества имеет мощность большую мощности самого множества. Следовательно, шкала мощностей не ограничена сверху.

Однако, проблема оставалась на левом конце шкалы: существует ли множество с мощностью промежуточной между мощностями счетного множества и континуума? Примера такого множества в математике не было, но это не означало, что проблема решена.

Создатель теории бесконечных множеств Кантор интуитивно высказал гипотезу о том, что промежуточного множества не существует, с этим предположением была построена вся теория, на базе которой построен весь математический анализ и другие науки. Эту гипотезу сокращенно назвали гипотезой континуума. Многие математики-любители и профессионалы пытались доказать эту догадку, чтобы превратить ее в математический факт, но лишь немецкий математик Гёдель в 30-х годах прошлого века доказал, что никаким логическим рассуждением нельзя опровергнуть предположение о том, что не существует промежуточного множества.

Гипотеза континуума была решена американским математиком П. Дж. Коэном, о чем он сделал сообщение на Московском Всемирном конгрессе математиков в 1966 году. Коэн доказал, что никакими принятыми в математике способами нельзя и опровергнуть предположение о том, что существует промежуточное множество. Гипотезу континуума нельзя ни опровергнуть, ни доказать! Это обстоятельство на первый взгляд напоминает ситуацию с параллельными линиями в геометрии. Нужен новый Лобачевский в теории множеств, чтобы построить “некanторовскую “ теорию множеств.

Парадоксальное свойство бесконечных множеств: целое может быть эквивалентно своей части противоречит известному правилу для конечных множеств: целое больше своей части. Но не будем забывать, что бесконечные множества представляют совершенно новый объект исследования, наделенный своими особыми свойствами; новый мир, который позволил открыть новые факты и полнее осмыслить старые, принадлежащие классической математике.

Глава III. Математические модели в науке и практике

§ 6. Математические модели

Прежде чем подвергнуть математическому изучению какое-нибудь явление природы или технический, экономический социальный (или какой-либо) иной процесс, необходимо составить его математическую модель. Это означает, что из всего многообразия свойств, присущих явлению, отбираются лишь те, которые станут учитываться: делаются допущения о действующих силах и имеющихся связях.

Модель явления не тождественна самому явлению, она только дает некоторое представление для его понимания, некоторое приближение к действительности. Но в модели перечислены все предположения, которые кладутся в основу модели. Эти предположения могут быть весьма грубыми и тем не менее давать вполне удовлетворительное приближение к реальности. Вспомним, что небесная механика со времен Лапласа исходит из такой модели Солнечной системы:

1. Солнце и планеты представляют собой материальные точки, расположенные в центрах тяжести соответствующих тел, и с массами, равными массам соответствующих небесных тел.

2. Между каждыми двумя небесными телами с массами m_1 и m_2, и расстоянием между ними, равным r, действует сила тяготения, равная $F_{1,2} = f \cdot \dfrac{m_1 m_2}{r^2}$, где константа f есть постоянная тяготения, причем $f = 6{,}67 \cdot 10^{-3} см^3 г^{-1} с^{-1}$.

Как ни груба такая модель на первый взгляд, она вполне удовлетворительно описывает движение планет и дает возможность прогнозировать взаимное их положение на небосводе на сколь угодно большой срок. Исходя из неправильностей движения крайних планет в Солнечной системе путем сравнения фактического отклонения с теми, которые получались из предположения существования еще одной планеты, удалось открыть в 1846 году планету Нептун, вычислить ее массу и расстояние до Солнца. Вычисления выполнили независимо друг от друга У. Леверье и Дж. Адамс. Подобные же вычисления, выполненные П. Лоуэллом, привели к открытию в 1930 году девятой планеты Солнечной системы, получившей название Плутон.

Эта модель продолжает превосходно служить и теперь, в период космических исследований. Однако отсюда совсем не следует, что она будет достаточна во все времена и для всех случаев, которые могут возникнуть перед наукой. Уже сейчас имеются задачи, в которых эта первичная модель Солнечной системы не достаточна и требует или модернизации, или полной перестройки. Так, уже в начале XX века ньютоновская модель небесной механики не смогла объяснить возмущений в движении планеты Меркурий. Эти объяснения позволила найти молодая тогда специальная теория относительности А. Эйнштейна.

Конечно, для одного и того же явления можно предложить не одну, а много моделей. Скажем, в оптике рассматривалось несколько моделей света: корпускулярная, волновая, электромагнитная. Для них были выведены многочисленные закономерности количественного характера. Каждая из них требовала своего математического подхода и соответствующих математических средств. Корпускулярная оптика пользовалась средствами евклидовой геометрии и пришла к выводу законов отражения и преломления света. Волновая модель теории света потребовала новых математических идей как для получения уже известных результатов, так и для вывода новых. Чисто вычислительным путем были открыты новые факты, относящиеся к явлениям дифракции и интерференции света, которые ранее не наблюдались. Геометрическая оптика, связанная с корпускулярной моделью, здесь оказалась бессильной.

Вполне может случиться, что несколько моделей, исходящих из различных первичных предположений, могут одинаково хорошо описывать явление. Обычно это наблюдается до определенных пределов, начиная с которых, одна из них оказывается более предпочтительной, хотя и другая до этих пределов имеет право на существование. Так корпускулярная модель распространения света сохраняется в физике, и в ограниченных пределах оказывается очень полезной.

Создание математической модели – важный этап познания, поскольку он позволяет четко формулировать наши представления о ходе интересующих нас явлений и о действующих в них связях, позволяет исследовать влияние каждого из сделанных предположений о процессе.

Рассмотрим пример, связанный с решением несложной инженерной задачи. В связи со значительной ролью технических систем в жизни общества все большее значение придается увеличению надежности технических изделий. Один из путей достижения надежности является резервирование. В изделие вводятся дополнительные элементы с той целью, чтобы они вступали в работу в тот момент, когда основной элемент откажет. Запасное колесо автомобиля является таким резервным элементом. На железнодорожных станциях имеются резервные тепловозы или электровозы, чтобы подхватить состав, у которого вышел из рабочего состояния локомотив. Этим приемом удается ускорить перевозки. Если вдобавок отказавший элемент направляется на ремонт, а после ремонта возвращается в резерв, то такие системы называются резервированными с восстановлением. Математическая задача, которая при этом возникает состоит в следующем: определить, насколько резервирование и восстановление увеличивают длительность безотказной работы системы.

Необходимо построить математическую модель задачи. Модель должна быть основана на данных опыта, наблюдений и инженерной интуиции. В результате длительных обсуждений приняты следующие основные положения модели:

1. Длительности безотказной работы элементов системы – независимые случайные величины

с некоторым распределением вероятностей *F(x)*.

2. Отказ элемента обнаруживается мгновенно.

3. Отказавший элемент немедленно направляется в ремонт.

4. Длительность ремонта – случайная величина с распределением вероятностей G(x).

5. Отремонтированный элемент немедленно направляется в резерв.

6. Если имеется хотя бы один исправный элемент, замена отказавшего элемента на исправный происходит мгновенно.

7. Длительность ремонта не зависит от продолжительности рабочего периода элемента.

8. Ремонт полностью восстанавливает свойства элемента.

К сказанному нужно добавить еще, сколько рабочих и резервных элементов имеет система и сколько имеется восстанавливающих устройств. В случае если рабочих устройств - 1, резервных устройств – 1, ремонтных единиц – 1, то средняя длительность безотказной работы системы T связана со средней длительностью a безотказной работы элемента формулой:

$$T = a\left(1 + \frac{1}{1-\gamma}\right), \qquad \gamma = \int_0^\infty G(x)dF(x).$$

Реальный смысл величины γ прост – это вероятность того, что длительность восстановления окажется меньше длительности безотказной работы элемента. Практика заинтересована, чтобы T было возможно большим. Этого можно добиться или увеличением средней длительности безотказной работы элемента, либо ускорением ремонта. Однако в большинстве случаев сделанные нами предположения дают удовлетворительное приближение к действительности. При необходимости можно заменить не удовлетворяющие нас пункты на новые, лучше передающие фактическое положение вещей.

Вообще говоря, все естественные науки, использующие математику, можно считать математическими моделями явлений. Например, гидродинамика является моделью движения жидкости, математическая экономика – моделью процессов экономики и т. д. До появления ЭВМ математическое моделирование сводилось к построению аналитической теории явления. Не всегда математическую теорию удавалось доводить до возможности вывода формул. Приходилось вносить упрощения в модель явления, а тем самым обеднять выводы.

С появлением ЭВМ стало возможным моделирование сложных систем. Попрежнему составляется логико-математическая модель, а по ней – программа работы машины. Но теперь исследователь не занимается выводом расчетной формулы, он стремится вычислять те или иные параметры, характеризующие явление. Таким путем были исследованы вопросы, связанные с термоядерными реакциями, поведением самолетов в критических ситуациях, влиянием различных факторов на экологичесие системы, распространением эпидемий и пр. Теперь этот метод исследования вошел в широкую практику в инженерном деле, естествозна-
нии, медицине, экономике, социальных проблемах и др. Математик должен владеть этим методом, чтобы находиться на передовых позициях современной науки.

В настоящее время широко используется математическое моделирование и тогда, когда о физической структуре явления известно крайне мало. В этом случае строится гипотетическая модель и на ее основе выводятся следствия, уже доступные наблюдению. Ценность гипоте-тических моделей неоспорима: они активизируют работу мысли, наводят на новые экспери-менты, позволяют продвигаться в познании окружающего нас мира. История науки пока-зывает, сколь большую роль сыграли научные гипотезы и построенные на их основе математические модели явлений. Примерами могут служить гипотеза строения Солнечной системы Коперника, модель строения атома, предложенная Резерфордом. Эта модель исходила из мысли, что атом построен примерно так, как Солнечная система: вокруг ядра атома вращаются электроны. Сама модель Резерфорда оказалась не достаточной, развитие науки от нее отказалось, но она вызвала к жизни многие исследования, приведшие к современной ядерной физике.

В XVII, XVIII и первой половине XIX века математические модели реальных явлений строились, исходя из принципа полной детерминированности их протекания (т. е. из предположения, что каждое состояние в данный момент времени приводит к одному определенному состоянию в каждый заданный последующий момент). Таковы модели классической механики, гидродинамики, оптики и многих других областей знаний. Однако уже с середины XVII века сначала несмело, затем все настойчивее в науке стали пробиваться идеи статистических моделей. Сначала были изучены демографические явления, такие как рождаемость, выздоровление от заразных болезней и пр. Здесь уже представление о полной детерминированности явлений не находило подтверждений, и для их количественного изучения необходимо было разработать новые математические методы исследования. Это были методы теории вероятностей и зарождающейся математической статистики. В середине XVIII века в связи с успехами астрономии возник вопрос о закономерностях, с которыми приходится иметь дело при рассмотрении погрешностей наблюдений. Этой задачей занимались многие крупнейшие математики того времени; решение было найдено почти одновременно французским математиком Анриен Мари Лежандром (1752 – 1833) и немецким ученым К. Ф. Гауссом (1777 – 1855) в 1809 г. В середине XIX века русский математик М. В. Остроградский (1801 – 1862) рассмотрел задачу приемочного контроля. Эта задача играет в наши дни большую роль в организации приема больших партий какой-либо продукции по тщательному изучению лишь небольшой их доли. Особенно быстро пошло развитие статистических методов в естествознании со второй половины XX века, когда Максвеллом, Больцманом и другими исследователями была построена кинетическая теория газов, основанная на гипотезе, что любой газ из большого числа молекул, находящихся в непрестанном движении. Оказалось, что из очень общих предпосылок о характере движения и связях между молекулами удается построить содержательную и богатую результатами теорию, которая к тому же превосходно согласуется с экспериментами. С десятых годов прошлого столетия началось применение теории вероятностей к задачам телефонии. Это направление исследований выросло в большую область современного знания. В физике, геофизике, организации производства теоретико-вероятностные модели находят широкое применение. Ряд крупных современных физиков даже утверждают, что теории вероятностей нельзя получить достаточно точное представление о содержании и концепциях современной физики.

§ 8. О пропускной способности морских портов

Известно, что морские порты предназначены для того, чтобы принимать прибывающие в них суда и быстро, по возможности без простоев, организовать их погрузку и выгрузку, или, как принято говорить, обработку судов. Простой судна в порту – это не только задержка с выполнением заданий, но и штраф за простой. Сутки простоя зафрахтованного за рубежом судна обходится стране в сотни тысяч рублей**.**

Развитие экономики и экономических связей как внутри страны, так и с другими государст-
вами неизбежно приводит к росту грузопотоков, увеличению числа судов и значительному росту интенсивности движения. Но, как оказывается, этот процесс сопровождается резким увеличением простоев в ожидании обработки. Случается, что при росте грузооборота на 25% простой судов возрастает на 300%. Не является ли это нарушением простых законов арифметики?

Пусть плановое задание по обработке судов в порту на год равняется P тоннам, а средний тоннаж судов, принимаемых портом, равен p тоннам. Тогда для выполнения плана порт в течении года должен принять P/p судов. Если на обработку одного судна затрачивается a суток, то на выполнение плана порт затратит aP/p суток. Наконец, пусть порт находится в условиях, когда пригодных для работ в порту дней в среднем будет к, а остальные дни для погрузо-разгрузочных работ непригодны из-за шторма, ливней, ледостава и пр. Тогда порт должен ежедневно принимать по aP/pк судов в среднем, чтобы справиться с планом. Таким образом в порту должно быть п=aP/pк причалов.

По поводу проведенных рассуждений должны сделать два замечания.

1. В рассуждении предполагается, что судно в порту или полностью загружается, или полностью разгружается. Чаще всего распространен случай, когда судно доставляет же загружает часть груза. формулы было принято недостаточно удовлетворительное в данный порт лишь часть груза, или положение. Следовательно, при выводе расчетной

2. Рассуждение исходит из того, что причалы должны работать непрерывно, иначе не сойдется баланс времени. А это означает, что после обработки судна к причалу немедленно должно пришвартоваться очередное судно для начала погрузочно-разгрузочных работ.

Статистические данные, собранные в портах Дальнего Востока, Черного, Балтийского и северных морей, показали, что с большой точностью выполняется одна и та же закономерность, которая формулируется в терминах теории вероятностей: вероятность того, что за период t в порт прибудут к судов (к = 0,1,2,…) вычисляется по формуле

$$P_k(t) = (\lambda t)^k e^{-\lambda t} / k!, \quad \text{где } \lambda > 0 \text{ - постоянная.} \qquad (1)$$

Сравнение вычислений по формуле (1) с фактическим прибытием судов оказалось настолько хорошим, что возможно делать прогноз: зная необходимые исходные данные по ряду портов, можно дать прогноз начальникам портов на два – три месяца вперед.

Впервые формула (1) была получена профессором Московского университета А. Я. Хинчиным при решении задачи, возникающей в телефонной связи. В частности, он поставил перед собой задачу определения вероятности того, что за промежуток t на станцию поступят к вызовов от абонентов. Он предположил, что 1) абонентов много, 2) они производят вызовы, независимо друг от друга, 3) нет абонентов, которые являются источниками подавляющего большинства вызовов, 4) вызовы поступают так, что почти одновременно два и больше вызовов могут поступить за короткий промежуток времени с вероятностью бесконечно малой. Эти предположения есть не что иное, чем математическая модель поступления вызовов на телефонную станцию. Оказалось, что в высказанных предположениях имеет место формула (1).

С судами дальнего плавания происходит нечто подобное: в данный порт они поступают из многих портов мира, независимо одно от другого, хотя разные порты посылают разное число судов, но из каждого порта поступает незначительная часть судов по сравнению с общим числом поступающих в него судов. Здесь была построена новая теория и новая модель, основные положения которой следующие:

1. Прибытие судов в порт подчинено пуассоновскому процессу, определяемому формулой (1).

2. Если имеется свободный причал и нет очереди, то вновь прибывающее судно занимает место у свободного причала и немедленно начинается его обработка.

3. Длительность обработки судна является случайной величиной с функцией распределения, приближенно равной $F(x) = 1 - e^{-\nu x}$, где ν положительная постоянная.

4. Каждое судно, находящееся в очереди, дожидается обслуживания, и обработка проводится в необходимом объеме.

В сделанных предположениях удалось построить математическую модель и из нее получить необходимые расчеты. Особое значение имеет формула для вычисления среднего значения времени ожидания судном начала обслуживания. Для этой величины (обозначим ее a) имеет место формула $a = \pi_n / \nu(n - \rho)$, где $\rho = \lambda / \nu$, π_n - вероятность того, что заняты все причалы. Обратим внимание, что величина a возрастает очень быстро по мере приближения n к p. Величина p носит название *нагрузки.* Чем ближе нагрузка к числу причалов, тем быстрее растет время ожидания начала обработки. Это обстоятельство объясняет на практике непропорционально быстрое возрастание ожидания начала обработки с возрастанием загрузки порта. Потребитель сразу ощущает возрастание длительности ожидания начала обслуживания. Это обстоятельство обязательно следует учитывать при расчете производительности оборудования не только в морских портах, но и в любой другой системе, в которой требования на обслуживание прибывают в случайные моменты времени и длительности их обслуживания также случайны.

Возникает естественный вопрос: как следует проектировать порты? Ответ таков. Содержание каждого причала обходится в единицу времени в некоторую сумму C. Точно также простои судов в ожидании причалов обходятся в некоторую сумму c (за каждое судно). Таким образом, средние общие расходы, которые несет общество за содержание причалов (nC) и за простой судов λaC в единицу времени, будут $nC + \lambda ac$. Число причалов следует выбирать таким, чтобы эта сумма была минимальной.

Ясно, что совершенствование разгрузки приводит к изменению p (его уменьшению) и тем самым – к уменьшению среднего времени ожидания. Это позволяет уменьшить число необходимых причалов.

§ 9. О статистических методах контроля качества массовой продукции

Задача повышения качества промышленной продукции для народного хозяйства является одной из важнейших. От нее зависит прогресс производства, с ней связано наиболее полное удовлетворение потребности граждан в изделиях техники. Оборудование высокого качества работает дольше и успешнее без потери дорогого станочного времени. От того, насколько промышленности удастся повысить качество изделий, зависит эффективность промышленного производства, конкурентоспособность на рынке, экономия затрат.

Проверка качества продукции приводит либо к порче изделия (фотопленка или фотобумага), либо к уменьшению срока эксплуатации изделия (электролампочка), а, во-вторых, современные объемы производства так велики, что сплошная проверка изделий потребует много времени и средств. Нужно искать надежные методы проверки качества изделий всей партии по ее малой доли. Такие методы получили название *статистических методов приемочного контроля.* Впервые идеи этого метода высказал английский математик Томас Симпсон, в России начал работать по этому вопросу М. В. Остроградский, позднее в этом направлении работали В. И. Романовский и А. Н. Колмогоров, а также ряд их учеников.

Для организации приемочного контроля прежде всего требуется выработать систему правил или, как принято говорить, *разработать план контроля.* В плане контроля следует указать, как выбирать изделия для контроля, сколько изделий нужно проверять.

Что является математической моделью процесса статистического контроля качества? Прежде всего, это предположение об однородности исходных материалов и технологического процесса во время изготовления партии. Предполагается, что изготовление дефектного изделия маловероятно и зависит от случайных исходных данных. Эта вероятность не известна, но стремятся ее сделать по возможности наименьшей. Разумными управляющими действиями можно добиться этого, а тем самым улучшить качество продукции. Эти действия касаются строгого отбора сырья, ужесточение требований к наладке оборудования. Главное же – постоянно искать неиспользованные резервы увеличения качества продукции.

Статистическим методам контроля принадлежит большое будущее, поскольку массовое производство всегда будет играть основную роль в жизни человечества. Быть может, удастся автоматизировать контрольные операции, но для этой цели знание точных правил является базой для передачи их соответствующим автоматам.

4. УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКИЕ МАТЕРИАЛЫ ПО ДИСЦИПЛИНЕ

4.1 Список тем для рефератов (докладов)

1.Современная мысль древних.

2. Декарт – дворянин, солдат, математик.

3. Король любителей (Ферма).

5. Величие и ничтожность человека (Паскаль).

6. На берегу океана (Ньютон).

7. Мастер на все руки (Лейбниц).

8. Семейство Бернулли.

9. Воплощенный анализ (Эйлер).

10.Величественная пирамида (Лагранж).

11. От крестьянина до сноба (Лаплас).

12.Друзья императора (Монж, Фурье).

13.День славы (Понселе).

14.Король математиков (Гаусс).

15. Коперник геометрии (Лобачевский).

16.Великий алгоритмист (Якоби).

17.Звезды Востока.

18. Создатели дифференциального и интегрального исчислений.

19. Софья Ковалевская.

20. А. Н. Колмогоров.

4.2 Перечень обязательной (основной) литературы

1. Гнеденко Б. В. Введение в специальность математика. – М.: Наука – Главная редакция физ.-мат. литературы, 1991.
2. Колмогоров А.Н. О профессии математика. – М.: Физматгиз, 1960.
3. Реньи А. Трилогия о математике. – М.: Мир, 1980.

4.3 Дополнительная литература

1. Гнеденко Б. В. Математика и научное познание. – М.: Знание, 1983.–

(Математика и кибернетика).

2. Лапко А. Ф., Люстерник Л. А. Из истории современной математики //УМН. – 1967. – Т. 22, вып. 2. – С. 199 – 230; вып. 4. – С. 147 – 185.
3. Белл Э. Т. Творцы математики. – М.: Просвещение, 1979.
4. Бородин А. И., Бугай А. С. Биографический сдоварь деятелей в области математики. – Киев: Радянська школа, 1979.
5. Хрестоматия по истории математики. Под редакцией А. П. Юшкевича. – М.: Просвещение, 1977.

6. НЕОБХОДИМОЕ ТЕХНИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ

Лекции читаются в стандартных аудиториях, оборудованными в соответствии с требованиями преподавания теоретических дисциплин.

7. КАРТА ОБЕСПЕЧЕННОСТИ ДИСЦИПЛИНЫ КАДРАМИ

Лекции по дисциплине «Введение в специальность» читает доцент кафедры МА и М Ляпунова Марта Георгиевна.