Федеральное агентство по образованию РФ
АМУРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
(ГОУВПО «АмГУ»)

УТВЕРЖДАЮ
Зав. кафедрой ИиУС

___________ А.В. Бушманов

«___» _________ 2007 г.

Учебно-методический комплекс дисциплины

Математический анализ

для специальности 230201

Информационные системы и технологии

Составитель: Ерёмина В.В.

2007 г.

Печатается по решению
редакционно-издательского совета
факультета математики и информатики
Амурского государственного
университета

Математический анализ для специальности 230201 «Информационные системы и технологии»: учебно-методический комплекс дисциплины. / Еремина В.В. – Благовещенск. Изд-во Амурского гос. ун-та, 2007. – 231 с.

Учебно-методическое пособие содержит: выписку из требований Государственного образовательного стандарта ВПО; рабочую программу преподавания дисциплины; методические указания и учебные задания для выполнения курса практических работ; тесты для проверки остаточного уровня знаний; изложение курса лекций.

Выписка из ГООСТ ВПО

ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫЙ СТАНДАРТ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ

Направление подготовки дипломированного специалиста
654600 – Информатика и вычислительная техника

Квалификация – инженер
4. Требования к обязательному минимуму содержания
основной образовательной программы
дипломированного специалиста по направлению подготовки
«Информационные системы»

Индекс	Наименование дисциплин и их основные разделы	Всего часов
ЕН.Ф.01	**Математика** Алгебра: основные алгебраические структуры, векторные пространства и линейные отображения, булевы алгебры. Геометрия: аналитическая геометрия, многомерная евклидова геометрия, дифференциальная геометрия кривых и поверхностей, элементы топологий. Дискретная математика: логические исчисления, графы, теория алгоритмов, языки и грамматики, автоматы, комбинаторика; логика высказываний; логическое следование, принцип дедукции; логика предикатов; синтаксис и семантика языка логики предикатов; принцип логического программирования; аксиоматические системы, формальный вывод; метатеория формальных систем; понятие алгоритмической систем; рекурсивные функции; машины Тьюринга; алгоритмически неразрешимые проблемы; меры сложности алгоритмов; легко и трудноразрешимые задач; основы нечеткой логики; элементы алгоритмической логики. Анализ: дифференциальное и интегральное исчисления, элементы теории функций и функционального анализа, теория функций комплексного переменного, дифференциальные уравнения. Вероятность и статистика: математические основы теории вероятностей, модели случайных процессов, проверка гипотез, статистические методы обработки экспериментальных данных.	782

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА

По дисциплине: Математический анализ
Для специальностей: 230201 – Информационные системы и технологии
Курс: 1 Семестр: 1

Лекции: 36 (час.) Экзамен: 1 семестр

Практические занятия: 54 (час.) Зачет: нет

Лабораторные занятия: нет

Самостоятельная работа: 90 (час.)

Всего часов: 180 (час.)

Составитель: Ерёмина В.В.

Факультет Математики и информатики

Кафедра Информационных и управляющих систем

1. Цели и задачи дисциплины, ее место в учебном процессе

1.1. Цель преподавания дисциплины
Изложение курса математического анализа и способов решения задач всех основных разделов данной дисциплины. Показать их важность для решения прикладных задач.

1.2. Задачи изучения дисциплины
По завершению курса «Математический анализ», обучаемые должны приобрести устойчивые навыки и умения по решению задач всех основных разделов математического анализа.

1.3. Перечень разделов (тем) необходимых дисциплин
1.3.1. начала математического анализа: понятие функции, дифференциальное и интегральное исчисление.
1.3.2. алгебра и геометрия: системы линейных уравнений, декартова прямоугольная система координат на плоскости и в пространстве.

2. Содержание дисциплины

2.1. Федеральный компонент

Обще математическая и естественнонаучная дисциплина
ГОС ВПО: 1898 ЕН – Ф.2

2.2. Лекционные занятия

2.2.1. Тема 1. Функции, пределы, непрерывность: определение и способы задания функции; обзор элементарных функций и их графиков; предел функции; бесконечно малые и бесконечно большие величины; основные теоремы о пределах; непрерывность функции; комплексные числа – 6 ч.

2.2.2. Тема 2. Дифференциальное исчисление: понятие производной и ее геометрический смысл; правила дифференцирования и производные элементарных функций; дифференциал функции; производные и дифференциалы высших порядков; параметрическое задание функции и ее дифференцирование; свойства дифференцируемых функций; возрастание и убывание функций; максимумы и минимумы; асимптоты; построение графиков функций; формула Тейлора – 6 ч.

2.2.3. Тема 3. Интегральное исчисление: первообразная функции и неопределенный интеграл; основные методы интегрирования; интегрирование дробно-рациональных, тригонометрических и иррациональных функций; понятие определенного интеграла и его свойства; несобственные интегралы; приложения определенного интеграла в геометрии и в физике – 6 ч.

2.2.4. Тема 4. Элементы теории функций и функционального анализа: элементы общей теории множеств; метрические пространства; множества в метрических пространствах; точечные множества на числовой прямой и на плоскости4 интегралы по абстрактным множествам; мера и интеграл на числовой прямой и на плоскости; пространство Лебега – 4 ч.

2.2.5. Тема 5. Теория функций комплексного переменного: функции комплексного переменного; простейшие трансцендентные функции; производная и дифференциал; конформные отображения; интегрирование функций комплексного переменного – 6 ч.

2.2.6. Тема 6. Дифференциальные уравнения: дифференциальные уравнения первого порядка, уравнения высших порядков; линейные уравнения второго порядка; дифференциальные уравнения в частных производных; уравнения и задачи математической физики – 8 ч.

2.3. Практические занятия

2.3.1. Практическая работа 1. Функция. Построение графика функции – 4 ч.

2.3.2. Практическая работа 2. Предел функции – 2 ч.

2.3.3. Практическая работа 3. Непрерывность функции – 4 ч.

2.3.4. Практическая работа 4. Производная функции – 2 ч.

2.3.5. Практическая работа 5. Дифференциал функции – 4 ч.

2.3.6. Практическая работа 6. Исследование функции – 2 ч.

2.3.7. Практическая работа 7. Непосредственное интегрирование. замена переменной в неопределенном интеграле – 4 ч.

2.3.8. Практическая работа 8. Интегрирование по частям – 2 ч.

2.3.9. Практическая работа 9. Интегрирование рациональных дробей – 4 ч.

2.3.10. Практическая работа 10. Интегрирование иррациональных функций – 2 ч.

2.3.11. Практическая работа 11. интегрирование тригонометрических функций – 4 ч.

2.3.12. Практическая работа 12. Вычисление определенного интеграла – 2 ч.

2.3.13. Практическая работа 13. Несобственные интегралы – 4 ч.

2.3.14. Практическая работа 14. вычисление площади фигуры, длины дуги, объема тела с помощью определенного интеграла – 2ч.

2.3.15. Практическая работа 15. Дифференциальные уравнения первого порядка – 4 ч.

2.3.16. Практическая работа 16. Дифференциальные уравнения высших порядков – 2 ч.

2.3.17. Практическая работа 17. Линейные уравнения высших порядков – 4 ч.

2.3.18. Практическая работа 18. Системы дифференциальных уравнений – 2 ч.

2.4. Самостоятельная работа студентов

2.4.1. Самостоятельное практическое решение задач: рассмотрение качественных вопросов, которые предлагаются на экзамене по данной дисциплине – 70 ч.

Рекомендуемая литература:

1. Лунгу К.Н., Письменный Д.Т., Федин С.Н., Шевченко Ю.А. Сборник задач по высшей математике. В 2-х ч. М.: Айрис-пресс, 2003. – 576 с.

2. Письменный Д.Т. Конспект лекций по высшей математике. В 2-х ч. М.: Айрис-пресс, 2003. – 488 с.

2.4.2. Расчетно-графическая работа 1. Функция. Предел. Непрерывность – 10 ч.

Задание: Найти:

1. область определения функции;
2. предел функции;
3. раскрыть неопределенности;
4. найти производную сложной функции;
5. найти производную неявно заданной функции;
6. найти производную параметрически заданной функции;
7. исследовать функцию

2.4.3. Расчетно-графическая работа 2. Функции нескольких переменных – 10 ч.

Задание: Найти:

1. область определения функции;
2. предел функции;
3. найти производную сложной функции;
4. найти производную неявно заданной функции;
5. найти производную параметрически заданной функции;
6. исследовать функцию
7. найти наибольшее и наименьшее функции

2.5. Вопросы к экзамену

2.5.1. Понятие элементарной функции. Элементарные функции и их свойства
2.5.2. Действительные числа
2.5.3. Функции и их свойства
2.5.4. Предел числовой последовательности
2.5.5. Число *e*. Второй замечательный предел
2.5.6. Предел функции в точке. Геометрический смысл
2.5.7. Предел функции на бесконечности. Геометрический смысл
2.5.8. Бесконечно-малые функции и их свойства
2.5.9. Бесконечно-большие функции и их свойства
2.5.10. Сравнение бесконечно-малых функций. Таблица эквивалентности
2.5.11. Основные теоремы о пределах и их применение
2.5.12. Первый замечательный предел
2.5.13. Непрерывность функции в точке и на множестве
2.5.14. Односторонние пределы
2.5.15. Односторонняя непрерывность. Точки разрыва и их классификация.
2.5.16. Свойства функции непрерывных точек
2.5.17. Свойства функции непрерывности на отрезке
2.5.18. Задачи приводимые к понятию производной
2.5.19. Понятие производной её геометрический и механический смысл
2.5.20. Основные правила вычисления производных (производная суммы, частного и произведения)

2.5.21. Производная сложной функции
2.5.22. Производная обратной функции
2.5.23. Производная основных элементарных функций
2.5.24. Производная показательно-степенной функции
2.5.25. Таблица производных
2.5.26. Производная неявно заданной функции
2.5.27. Понятие дифференциала. Геометрический смысл дифференциала
2.5.28. Дифференциал сложной функции
2.5.29. Применение дифференциала для приближенных вычислений
2.5.30. Производные высших порядков. Формула Лейбница. Физический смысл второй производной
2.5.31. Дифференциалы высших порядков. Инвариантность формы. Формула первого порядка
2.5.32. Параметрически заданные функции и их дифференцирование (первая и вторая производные)
2.5.33. Теорема Ферма и её геометрический смысл
2.5.34. Теорема Ролля и её геометрический смысл
2.5.35. Теорема Лагранжа и её геометрический смысл
2.5.36. Правила Лопиталя
2.5.37. Возрастающие и убывающие функции
2.5.38. Экстремум (первое и второе правило для нахождения экстремума)
2.5.39. Выпуклость, вогнутость и точки перегиба
2.5.40. Асимптоты
2.5.41. Исследование функции и построение графика функции
2.5.42. Формула Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа
2.5.43. Разложение элементарных функций по формуле Тейлора
2.5.44. Понятие первообразной функции и неопределённого интеграла
2.5.45. Свойства неопределённого интеграла
2.5.46. Таблица интегралов
2.5.47. Метод интегрирования по частям в неопределённом интеграле
2.5.48. Метод замены в неопределённом интеграле
2.5.49. Интегрирование простейших дробей (4 вида + рекуррентная формула)
2.5.50. Интегрирование дробно-рациональных функций (теорема Безу, теорема разложения дробно-рациональных функций на простейшие, метод частных значений, метод неопределённых коэффициентов)
2.5.51. Интегрирование иррациональных функций
2.5.52. Интегрирование тригонометрических функций
2.5.53. Определение и свойства определённого интеграла
2.5.54. Формула Ньютона-Лейбница
2.5.55. Интегрирование по частям в определённом интеграле

2.5.56. Замена переменных в определённом интеграле
2.5.57. Несобственные интегралы первого рода
2.5.58. Несобственные интегралы второго рода
2.5.59. Геометрические приложения определённого интеграла: площадь плоской фигуры, вычисление объёма тел, длина дуги и площадь поверхности вращения
2.5.60. Физические приложения определённого интеграла (статические монеты, центр тяжести, моменты инерции)

2.6. Оценочные критерии

При оценке знаний на экзамене учитывается: правильность и осознанность изложения содержания ответа на вопросы, полнота раскрытия понятий и закономерностей, точность употребления и трактовки общенаучных и специальных терминов; степень сформированности интеллектуальных и научных способностей экзаменуемого; самостоятельность ответа; речевая грамотность и логическая последовательность ответа.

Критерии оценок:

- отлично – полно раскрыто содержание вопросов в объеме программы и рекомендованной литературы; четко и правильно даны определения и раскрыто содержание концептуальных понятий, закономерностей, корректно использованы научные термины; для доказательства использованы различные теоретические знания, выводы из наблюдений и опытов; ответ самостоятельный, исчерпывающий, без наводящих дополнительных вопросов, с опорой на знания, приобретенные в процессе специализации по выбранному направлению информатики.
- хорошо – раскрыто основное содержание вопросов; в основном правильно даны определения понятий и использованы научные термины; ответ самостоятельный; определения понятий неполные, допущены нарушения последовательности изложения, небольшие неточности при использовании научных терминов или в выводах и обобщениях, исправляемые по дополнительным вопросам экзаменаторов.
- удовлетворительно – усвоено основное содержание учебного материала, но изложено фрагментарно, не всегда последовательно; определение понятий недостаточно четкое; не использованы в качестве доказательства выводы из наблюдений и опытов или допущены ошибки при их изложении; допущены ошибки и неточности в использовании научной терминологии, определении понятий.
- неудовлетворительно – ответ неправильный, не раскрыто основное содержание программного материала; не даны ответы на вспомогательные вопросы экзаменаторов; допущены грубые ошибки в определении понятий, при использовании терминологии.

3. Учебно-методические материалы по дисциплине

2.7. Используемая и рекомендуемая литература

Основная:

2.7.1. Кудрявцев Л.Д. Курс математического анализа. М.: Наука, 1999. – 231 с.
2.7.2. Фехтенгольц Д.В. Курс математического анализа. В 2-ч ч. М.: Наука, 1994. – 272 с.
2.7.3. Минорский В.П. Сборник задач по высшей математике. М.: Наука, 1994. – 264 с.
2.7.4. Бермант Д. Математический анализ. М.: Наука, 1997. – 288 с.
2.7.5. Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. высшая математика в упражнениях и задачах. В 2-х частях. М.: Высшая школа, 1997. – 240 с.
2.7.6. Лунгу К.Н., Письменный Д.Т., Федин С.Н., Шевченко Ю.А. Сборник задач по высшей математике. 1 курс. М.: Айрис-пресс, 2003. – 576 с.
2.7.7. Письменный Д.Т. Конспект лекций по высшей математике. 1 часть. М.: Айрис-пресс, 2003. – 288 с.

2.8. Учебные пособия:

2.8.1. Карточки с заданиями и методическими указаниями по выполнению практических работ.
2.8.2. Методические указания и индивидуальные варианты заданий для выполнения расчетно-графических работ.

3. Учебно-методическая (технологическая) карта дисциплины

Номер недели	Номер темы	Вопросы, изучаемые на лекции	Занятия		Используемые наглядные и методические пособия	Самостоятельная работа студентов		Форма контроля
			Практические	Лабораторные		Содержание	Часы	
1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1	2.2.1	2.3.1	-	2.8.1	2.4.1	70	ко[1]
2			2.3.2	-				
3			2.3.3	-				ко
4	2	2.2.2	2.3.4	-				
5			2.3.5	-				ко
6			2.3.6	-				
7	3	2.2.3	2.3.7	-				ко
8			2.3.8	-				
9			2.3.9	-				ко, сб.[2]
10	4	2.2.4	2.3.10	-				
11			2.3.11	-	2.8.1 2.8.2	2.4.2	10	ко
12	5	2.2.5	2.3.12	-				
13			2.3.13	-				ко, защ.[3]
14			2.3.14	-				
15	6	2.2.6	2.3.15	-		2.4.3	10	ко
16			2.3.16	-				
17			2.3.17	-				ко, защ.
18			2.3.18	-				

[1] Контрольный опрос знаний теоретического материала

[2] Собеседование по результатам самостоятельной работы студентов

[3] Защита расчетно-графической работы

Лекционный курс

Числовая последовательность.

Определение. Если каждому натуральному числу n поставлено в соответствие число x_n, то говорят, что задана **последовательность**

$$x_1, x_2, \ldots, x_n = \{x_n\}$$

Общий элемент последовательности является функцией от n.

$$x_n = f(n)$$

Таким образом последовательность может рассматриваться как функция.
Задать последовательность можно различными способами – главное, чтобы был указан способ получения любого члена последовательности.

Ограниченные и неограниченные последовательности.

Определение. Последовательность $\{x_n\}$ называется **ограниченной**, если существует такое число M>0, что для любого n верно неравенство:

$$|x_n| < M$$

т.е. все члены последовательности принадлежат промежутку (-M; M).

Определение. Последовательность $\{x_n\}$называется **ограниченной сверху**, если для любого n существует такое число M, что

$$x_n \le M.$$

Определение. Последовательность $\{x_n\}$называется **ограниченной снизу**, если для любого n существует такое число M, что

$$x_n \ge M$$

Определение. Число **a** называется **пределом** последовательности $\{x_n\}$, если для любого положительного ε>0 существует такой номер N, что для всех n > N выполняется условие:

$$|a - x_n| < \varepsilon.$$

Это записывается: $\lim x_n = a$.

В этом случае говорят, что последовательность $\{x_n\}$**сходится** к a при $n \to \infty$.

Свойство: Если отбросить какое- либо число членов последовательности, то получаются новые последовательности, при этом если сходится одна из них, то сходится и другая.

Теорема. *Последовательность не может иметь более одного предела.*

Доказательство. Предположим, что последовательность $\{x_n\}$имеет два предела a и b, не равные друг другу.

$$x_n \to a;\ x_n \to b;\quad a \ne b.$$

Тогда по определению существует такое число ε >0, что

$$|a - x_n| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$|b - x_n| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Запишем выражение: $|a - b| = |(a - x_n) + (x_n - b)| \le |a - x_n| + |x_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$

А т.к. ε- **любое** число, то $|a - b| = 0$, т.е. a = b. Теорема доказана.

Теорема. *Если* $x_n \to a$*, то* $|x_n| \to |a|$.

Доказательство. Из $x_n \to a$ следует, что $|x_n - a| < \varepsilon$. В то же время:

$||x_n| - |a|| \le |x_n - a|$, т.е. $||x_n| - |a|| < \varepsilon$, т.е. $|x_n| \to |a|$. Теорема доказана.

Теорема. *Если* $x_n \to a$*, то последовательность* $\{x_n\}$ *ограничена.*
Следует отметить, что обратное утверждение неверно, т.е. из ограниченности последовательности не следует ее сходимость.

Например, последовательность $x_n = \begin{cases} 1 + \dfrac{1}{n}, \text{при четном } n \\ 2 - \dfrac{1}{n}, \text{при нечетном } n \end{cases}$ не имеет предела, хотя $|x_n| \le 2$.

Монотонные последовательности.

Определение. 1) Если $x_{n+1} > x_n$ для всех n, то последовательность возрастающая.
2)Если $x_{n+1} \ge x_n$ для всех n, то последовательность неубывающая.
3)Если $x_{n+1} < x_n$ для всех n, то последовательность убывающая.
4)Если $x_{n+1} \le x_n$ для всех n, то последовательность невозрастающая
Все эти последовательности называются **монотонными.** Возрастающие и убывающие последовательности называются **строго монотонными**.

Теорема. *Монотонная ограниченная последовательность имеет предел.*

Доказательство. Рассмотрим монотонную неубывающую последовательность

$$x_1 \le x_2 \le x_3 \le \ldots \le x_n \le x_{n+1} \le \ldots$$

Эта последовательность ограничена сверху: $x_n \le M$, где M – некоторое число.

Т.к. любое, ограниченное сверху, числовое множество имеет четкую верхнюю грань, то для любого $\varepsilon>0$ существует такое число N, что $x_N > a - \varepsilon$, где a – некоторая верхняя грань множества.

Т.к. $\{x_n\}$- неубывающая последовательность, то при N > n $a - \varepsilon < x_N \le x_n$,
$x_n > a - \varepsilon$.
Отсюда $a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$
$-\varepsilon < x_n - a < \varepsilon$ или $|x_n - a| < \varepsilon$, т.е. $\lim x_n = a$.

Для остальных монотонных последовательностей доказательство аналогично.
Теорема доказана.

Число e.

Рассмотрим последовательность $\{x_n\} = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$.

Если последовательность $\{x_n\}$ монотонная и ограниченная, то она имеет конечный предел.
По формуле бинома Ньютона:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1+\frac{n}{1}\cdot\frac{1}{n}+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^2+\frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\left(\frac{1}{n}\right)^3+...+\frac{n(n-1)(n-2)...[n-(n-1)]}{1\cdot 2\cdot 3\cdots n}\left(\frac{1}{n}\right)^n$$ или, что то же самое

$$x_n = 1+1+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+...+\frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)...\left(1-\frac{k-1}{n}\right)+...+\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)...\left(1-\frac{n-1}{n}\right)$$

Покажем, что последовательность $\{x_n\}$ – возрастающая. Действительно, запишем выражение x_{n+1} и сравним его с выражением x_n:

$$x_{n+1} = 1+1+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)+...+\frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)...\left(1-\frac{k-1}{n+1}\right)+...+\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)...$$

$$...\left(1-\frac{n-1}{n+1}\right)+\frac{1}{(n+1)!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)...\left(1-\frac{n}{n+1}\right).$$

Каждое слагаемое в выражении x_{n+1} больше соответствующего значения x_n, и, кроме того, у x_{n+1} добавляется еще одно положительное слагаемое. Таким образом, последовательность $\{x_n\}$ возрастающая.

Докажем теперь, что при любом n ее члены не превосходят трех: $x_n < 3$.

$$x_n < 1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+...+\frac{1}{n!} < \underbrace{1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+...+\frac{1}{2^{n+1}}}_{\text{геометр. прогрессия}} = 1+\frac{1-\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2}} < 1+\frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 3$$

Итак, последовательность $\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}$ - монотонно возрастающая и ограниченная сверху, т.е. имеет конечный предел. Этот предел принято обозначать буквой e.

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$$

Из неравенства $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 3$ следует, что $e \le 3$. Отбрасывая в равенстве для $\{x_n\}$ все члены, начиная с четвертого, имеем:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n > 2+\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{n}\right)$$

переходя к пределу, получаем

$$e \ge 2+\frac{1}{2} = 2{,}5$$

Таким образом, число e заключено между числами 2,5 и 3. Если взять большее количество членов ряда, то можно получить более точную оценку значения числа e.

Можно показать, что число e иррациональное и его значение равно 2,71828…

Аналогично можно показать, что $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$, расширив требования к x до любого действительного числа:

Предположим: $n \le x \le n+1$

$$\frac{1}{n} \ge \frac{1}{x} \ge \frac{1}{n+1}$$

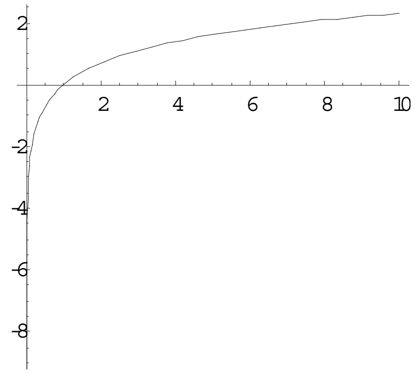
$$1+\frac{1}{n} \ge 1+\frac{1}{x} \ge 1+\frac{1}{n+1}$$

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} > \left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} > \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n}$$

Найдем $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = e\cdot 1 = e;\qquad \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n} = \frac{e}{1} = e;\quad \Rightarrow\quad \lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} = e$

Число е является основанием натурального логарифма.

$$\log_e x = \ln x = y,\quad т.е.\quad e^y = x.$$



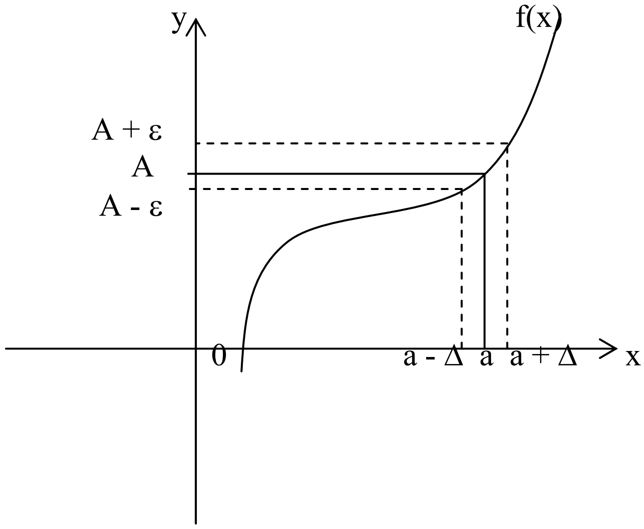
Выше представлен график функции y = lnx.

Связь натурального и десятичного логарифмов.

Пусть x = 10^y, тогда lnx = $\ln 10^y$, следовательно lnx = yln10

y = $\lg x = \frac{\ln x}{\ln 10} = M\ln x;\qquad \ln x = \frac{1}{M}\lg x$, где M = 1/ln10 ≈ 0,43429…- модуль перехода.

Предел функции в точке.



Пусть функция f(x) определена в некоторой окрестности точки x = a (т.е. в самой точке x = a функция может быть и не определена)

Определение. Число А называется **пределом** функции f(x) при x→a, если для любого ε>0 существует такое число Δ>0, что для всех х таких, что

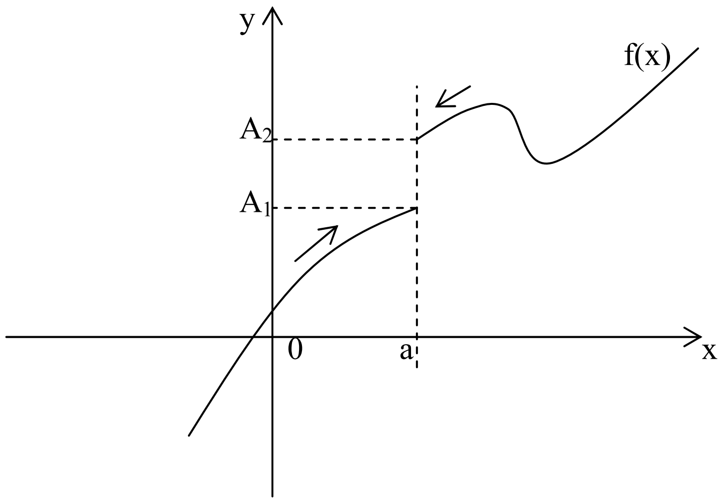
$$0 < |x - a| < \Delta$$

верно неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$.

То же определение может быть записано в другом виде:
Если $a - \Delta < x < a + \Delta$, $x \neq a$, то верно неравенство $A - \varepsilon < f(x) < A + \varepsilon$.

Запись предела функции в точке: $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$

Определение. Если $f(x) \to A_1$ при $x \to a$ только при $x < a$, то $\lim\limits_{x \to a-0} f(x) = A_1$ - называется **пределом** функции $f(x)$ в точке $x = a$ **слева**, а если $f(x) \to A_2$ при $x \to a$ только при $x > a$, то $\lim\limits_{x \to a+0} f(x) = A_2$ называется **пределом** функции $f(x)$ в точке $x = a$ **справа**.



Приведенное выше определение относится к случаю, когда функция $f(x)$ не определена в самой точке $x = a$, но определена в некоторой сколь угодно малой окрестности этой точки.

Пределы A_1 и A_2 называются также **односторонними пределами** функции $f(x)$ в точке $x = a$. Также говорят, что A – **конечный предел** функции $f(x)$.

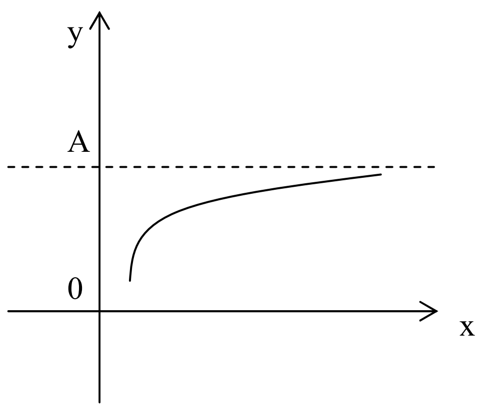
Предел функции при стремлении аргумента к бесконечности.

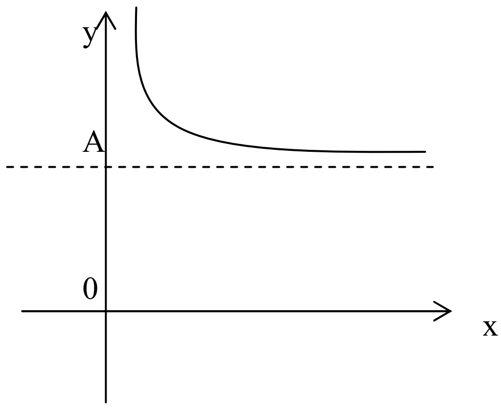
Определение. Число A называется **пределом** функции $f(x)$ при $x \to \infty$, если для любого числа $\varepsilon > 0$ существует такое число $M > 0$, что для всех x, $|x| > M$ выполняется неравенство

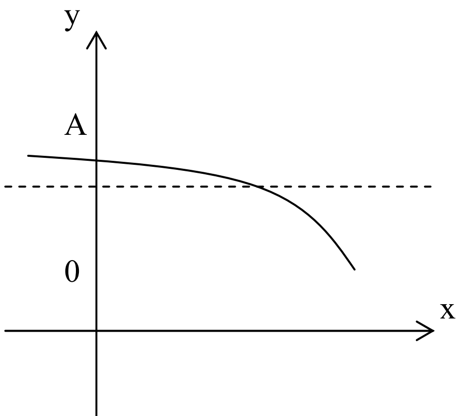
$$|A - f(x)| < \varepsilon$$

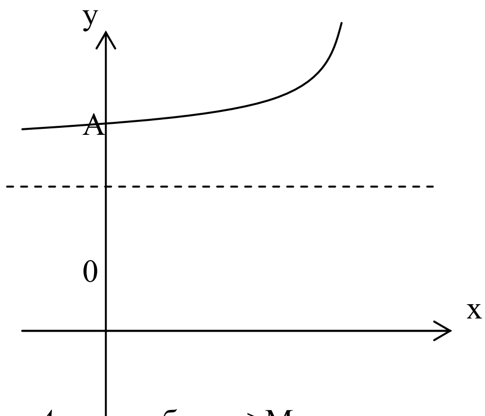
При этом предполагается, что функция $f(x)$ определена в окрестности бесконечности.
Записывают: $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = A$.

Графически можно представить:









Аналогично можно определить пределы $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = A$ для любого x>M и $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = A$ для любого x<M.

<u>Основные теоремы о пределах.</u>

<u>Теорема 1.</u> $\lim\limits_{x\to a} C = C$, где C = const.

Следующие теоремы справедливы при предположении, что функции f(x) и g(x) имеют конечные пределы при $x\to a$.

<u>Теорема 2.</u> $\lim\limits_{x\to a}(f(x) \pm g(x)) = \lim\limits_{x\to a} f(x) \pm \lim\limits_{x\to a} g(x)$

Доказательство этой теоремы будет приведено ниже.

<u>Теорема 3.</u> $\lim\limits_{x\to a}[f(x)\cdot g(x)] = \lim\limits_{x\to a} f(x)\cdot \lim\limits_{x\to a} g(x)$

<u>Следствие.</u> $\lim\limits_{x\to a} C\cdot f(x) = C\cdot \lim\limits_{x\to a} f(x)$

<u>Теорема 4.</u> $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}$ при $\lim\limits_{x\to a} g(x) \neq 0$

<u>Теорема 5.</u> *Если f(x)>0 вблизи точки x = a и* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$*, то A>0.*

Аналогично определяется знак предела при f(x) < 0, f(x) ≥ 0, f(x) ≤ 0.

<u>Теорема 6.</u> *Если g(x) ≤ f(x) ≤ u(x) вблизи точки x = a и* $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \lim\limits_{x\to a} u(x) = A$*, то и* $\lim\limits_{x\to a} = A$.

<u>Определение.</u> Функция f(x) называется **ограниченной** вблизи точки x = a, если существует такое число M>0, что $|f(x)|<M$ вблизи точки x = a.

<u>Теорема 7.</u> *Если функция f(x) имеет конечный предел при x→a, то она ограничена вблизи точки x = a.*

<u>Доказательство.</u> Пусть $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$, т.е. $|f(x) - A| < \varepsilon$, тогда

$$|f(x)| = |f(x) - A + A| \le |f(x) - A| + |A| \text{ или}$$

$$|f(x)| < \varepsilon + |A|, \text{ т.е.}$$

$$|f(x)| < M, \text{ где } M = \varepsilon + |A|$$

Теорема доказана.

<u>Бесконечно малые функции.</u>

<u>Определение.</u> Функция f(x) называется **бесконечно малой** при x→a, где а может быть числом или одной из величин ∞, +∞ или -∞, если $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$.

Бесконечно малой функция может быть только если указать к какому числу стремится аргумент x. При различных значениях а функция может быть бесконечно малой или нет.

<u>Теорема.</u> *Для того, чтобы функция f(x) при x→a имела предел, равный А, необходимо и достаточно, чтобы вблизи точки x = a выполнялось условие*

$$f(x) = A + \alpha(x),$$

где α(x) – бесконечно малая при x → a (α(x)→0 при x → a).

<u>Свойства бесконечно малых функций:</u>

1) Сумма фиксированного числа бесконечно малых функций при x→a тоже бесконечно малая функция при x→a.
2) Произведение фиксированного числа бесконечно малых функций при x→a тоже бесконечно малая функция при x→a.
3) Произведение бесконечно малой функции на функцию, ограниченную вблизи точки x = a является бесконечно малой функцией при x→a.
4) Частное от деления бесконечно малой функции на функцию, предел которой не равен нулю есть величина бесконечно малая.

Используя понятие бесконечно малых функций, приведем доказательство некоторых теорем о пределах, приведенных выше.

<u>Доказательство теоремы 2.</u> Представим f(x) = A + α(x), g(x) = B + β(x), где $A = \lim\limits_{x\to a} f(x), \quad B = \lim\limits_{x\to a} g(x)$, тогда

$$f(x) \pm g(x) = (A + B) + \alpha(x) + \beta(x)$$

A + B = const, α(x) + β(x) – бесконечно малая, значит

$$\lim_{x\to a}(f(x) \pm g(x)) = A + B = \lim_{x\to a} f(x) \pm \lim_{x\to a} g(x)$$

Теорема доказана.

<u>Доказательство теоремы 3.</u> Представим f(x) = A + α(x), g(x) = B + β(x), где $A = \lim\limits_{x\to a} f(x), \quad B = \lim\limits_{x\to a} g(x)$, тогда

$$f(x)\cdot g(x) = A\cdot B + A\beta(x) + \alpha(x)B + \alpha(x)\beta(x)$$

A·B = const, $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ – бесконечно малые, значит

$$\lim_{x\to a}[f(x)g(x)] = \lim_{x\to a} A\cdot B + 0 = A\cdot B = \lim_{x\to a} f(x)\cdot \lim_{x\to a} g(x)$$

Теорема доказана.

Бесконечно большие функции и их связь с

бесконечно малыми.

Определение. Предел функции f(x) при x→a, где a- число, **равен бесконечности**, если для любого числа M>0 существует такое число Δ>0, что неравенство

$$|f(x)|>M$$

выполняется при всех x, удовлетворяющих условию

$$0 < |x - a| < \Delta$$

Записывается $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$.

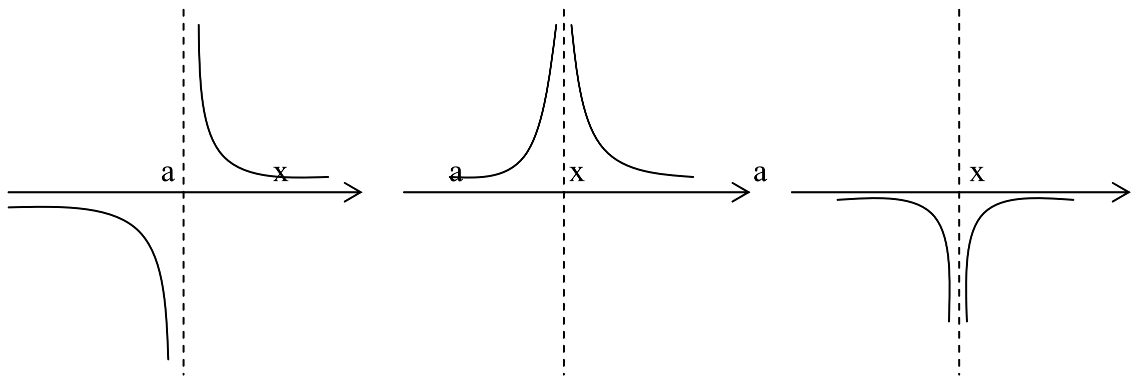
Собственно, если в приведенном выше определении заменить условие $|f(x)|>M$ на f(x)>M, то получим:

$$\lim_{x\to a} f(x) = +\infty,$$

а если заменить на f(x)<M, то:

$$\lim_{x\to a} f(x) = -\infty.$$

Графически приведенные выше случаи можно проиллюстрировать следующим образом:



Определение. Функция называется **бесконечно большой** при x→a, где a – чосли или одна из величин ∞, +∞ или -∞, если $\lim_{x\to a} f(x) = A$, где А – число или одна из величин ∞, +∞ или -∞.

Связь бесконечно больших и бесконечно малых функций осуществляется в соответствии со следующей теоремой.

Теорема. *Если f(x)→0 при x→a (если x→∞) и не обращается в ноль, то*

$$y = \frac{1}{f(x)} \to \infty$$

Сравнение бесконечно малых функций.

Пусть $\alpha(x)$, $\beta(x)$ и $\gamma(x)$ – бесконечно малые функции при $x \to a$. Будем обозначать эти функции α, β и γ соответственно. Эти бесконечно малые функции можно сравнивать по быстроте их убывания, т.е. по быстроте их стремления к нулю.

Например, функция $f(x) = x^{10}$ стремится к нулю быстрее, чем функция $f(x) = x$.

Определение. Если $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha}{\beta} = 0$, то функция α называется **бесконечно малой более высокого порядка**, чем функция β.

Определение. Если $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha}{\beta} = A, \quad A \neq 0, \quad A = const$, то α и β называются **бесконечно малыми одного порядка**.

Определение. Если $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha}{\beta} = 1,$ то функции α и β называются **эквивалентными бесконечно малыми**. Записывают $\alpha \sim \beta$.

Определение. Бесконечно малая функция α называется **бесконечно малой порядка k** относительно бесконечно малой функции β, если предел $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha}{\beta^k}$ конечен и отличен от нуля.

Однако следует отметить, что не все бесконечно малые функции можно сравнивать между собой. Например, если отношение $\dfrac{\alpha}{\beta}$ не имеет предела, то функции несравнимы.

Свойства эквивалентных бесконечно малых.

1) $\alpha \sim \alpha$, $\quad \left(\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha}{\alpha} = 1\right)$

2) Если $\alpha \sim \beta$ и $\beta \sim \gamma$, то $\alpha \sim \gamma$, $\quad \left(\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha}{\gamma} = \lim\limits_{x\to a}\left(\dfrac{\alpha}{\beta}\cdot\dfrac{\beta}{\gamma}\right) = 1\cdot 1 = 1\right)$

3) Если $\alpha \sim \beta$, то $\beta \sim \alpha$, $\quad \left(\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\beta}{\alpha} = \lim\limits_{x\to a}\dfrac{1}{\dfrac{\alpha}{\beta}} = 1\right)$

4) Если $\alpha \sim \alpha_1$ и $\beta \sim \beta_1$ и $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha}{\beta} = k$, то и $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha_1}{\beta_1} = k$ или $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha}{\beta} = \lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha_1}{\beta_1}$.

Следствие: а) если $\alpha \sim \alpha_1$ и $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha}{\beta} = k$, то и $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha}{\beta} = \lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha_1}{\beta}$

б) если β ~ β_1 и $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha}{\beta}=k$, то $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha}{\beta}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha}{\beta_1}$

Свойство 4 особенно важно на практике, т.к. оно фактически означает, что предел отношения бесконечно малых не меняется при замене их на эквивалентные бесконечно малые. Этот факт дает возможность при нахождении пределов заменять бесконечно малые на эквивалентные им функции, что может сильно упростить вычисление пределов.

Некоторые замечательные пределы.

Первый замечательный предел. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{P(x)}{Q(x)}$, где $P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} +\ldots+a_n$, $Q(x) = b_0x^m + b_1x_{m-1} +\ldots+b_m$ - многочлены.

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{x^n\left(a_0+\frac{a_1}{x}+\ldots+\frac{a_n}{x^n}\right)}{x^m\left(b_0+\frac{b_1}{x}+\ldots.+\frac{b_m}{x^m}\right)}=x^{n-m}\frac{a_0+\frac{a_1}{x}+\ldots+\frac{a_n}{x^n}}{b_0+\frac{b_1}{x}+\ldots+\frac{b_m}{x^m}}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a_0+\frac{a_1}{x}+\ldots+\frac{a_n}{x^n}}{b_0+\frac{b_1}{x}+\ldots+\frac{b_m}{x^m}}=\frac{a_0}{b_0}$$

Итого: $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{P(x)}{Q(x)}=\begin{cases}0, & при \quad n<m\\ \dfrac{a_0}{b_0}, & при \quad n=m\\ \infty, & при \quad n>m\end{cases}$

Второй замечательный предел. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$

Третий замечательный предел. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=e$

Часто если непосредственное нахождение предела какой – либо функции представляется сложным, то можно путем преобразования функции свести задачу к нахождению замечательных пределов.

Кроме трех, изложенных выше, пределов можно записать следующие полезные на практике соотношения:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1;\qquad \lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a;\qquad \lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^m-1}{x}=m.$$

Непрерывность функции в точке.

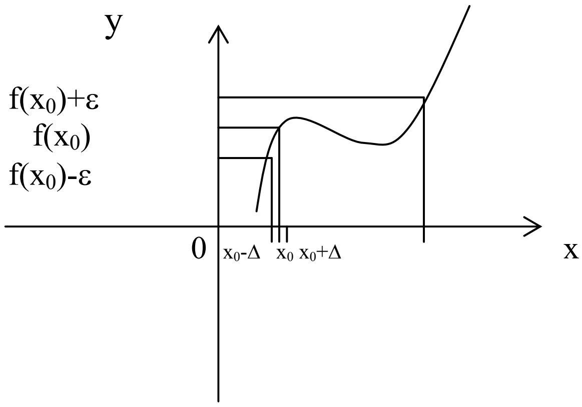
Определение. Функция f(x), определенная в окрестности некоторой точки x_0, называется **непрерывной в точке** x_0, если предел функции и ее значение в этой точке равны, т.е.

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$$

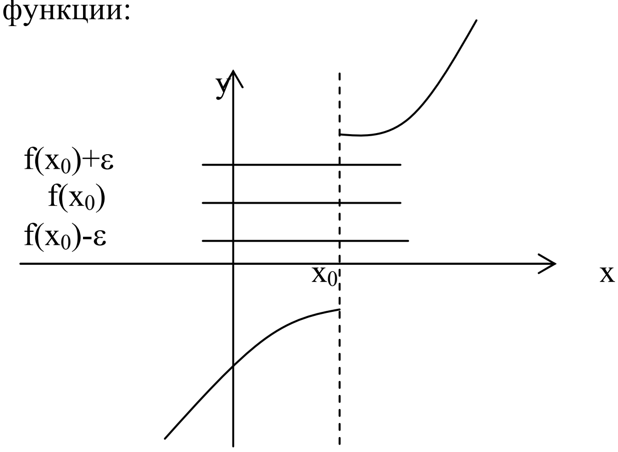
Тот же факт можно записать иначе: $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(\lim_{x\to x_0} x)$

<u>Определение.</u> Если функция f(x) определена в некоторой окрестности точки x_0, но не является непрерывной в самой точке x_0, то она называется **разрывной** функцией, а точка x_0 – точкой разрыва.

Пример непрерывной функции:



Пример разрывной функции:



<u>Определение.</u> Функция f(x) называется непрерывной в точке x_0, если для любого положительного числа ε>0 существует такое число Δ>0, что для любых x, удовлетворяющих условию

$$|x - x_0| < \Delta$$

верно неравенство $$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon .$$

<u>Определение.</u> Функция f(x) называется **непрерывной** в точке x = x_0, если приращение функции в точке x_0 является бесконечно малой величиной.

$$f(x) = f(x_0) + \alpha(x)$$

где $\alpha(x)$ – бесконечно малая при $x\to x_0$.

Свойства непрерывных функций.

1) Сумма, разность и произведение непрерывных в точке x_0 функций – есть функция, непрерывная в точке x_0.

2) Частное двух непрерывных функций $\frac{f(x)}{g(x)}$ – есть непрерывная функция при условии, что g(x) не равна нулю в точке x_0.

3) Суперпозиция непрерывных функций – есть непрерывная функция.
Это свойство может быть записано следующим образом:
Если u = f(x), v = g(x) – непрерывные функции в точке x = x_0, то функция v = g(f(x)) – тоже непрерывнаяфункция в этой точке.

Справедливость приведенных выше свойств можно легко доказать, используя теоремы о пределах.

Непрерывность некоторых элементарных функций.

1) Функция f(x) = C, C = const – непрерывная функция на всей области определения.

2) Рациональная функция $f(x) = \dfrac{a_0x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_n}{b_0x^m + b_1x^{m-1} + ... + b_m}$ непрерывна для всех значений x, кроме тех, при которых знаменатель обращается в ноль. Таким образом, функция этого вида непрерывна на всей области определения.

3) Тригонометрические функции непрерывны на своей области определения.

Докажем свойство 3 для функции y = sinx.

Запишем приращение функции Δy = sin(x + Δx) – sinx, или после преобразования:

$$\Delta y = 2\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)\sin\frac{\Delta x}{2}$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = 2\lim_{\Delta x \to 0}\left(\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)\sin\frac{\Delta x}{2}\right) = 0$$

Действительно, имеется предел произведения двух функций $\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)$ и $\sin\frac{\Delta x}{2}$. При этом функция косинус – ограниченная функция при Δx→0 $\left|\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)\right| \le 1$, а т.к. предел функции синус $\lim_{\Delta x \to 0}\sin\frac{\Delta x}{2} = 0$, то она является бесконечно малой при Δx→0.

Таким образом, имеется произведение ограниченной функции на бесконечно малую, следовательно это произведение, т.е. функция Δy – бесконечно малая. В соответствии с рассмотренными выше определениями, функция y = sinx – непрерывная функция для любого значения x = x_0 из области определения, т.к. ее приращение в этой точке – бесконечно малая величина.

Аналогично можно доказать непрерывность остальных тригонометрических функций на всей области определения.

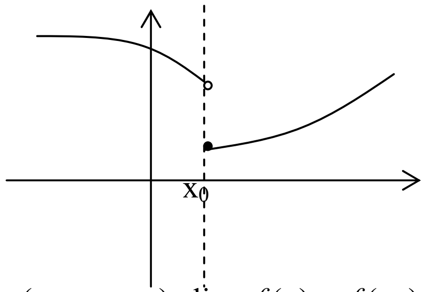
Вообще следует заметить, что все основные элементарные функции непрерывны на всей своей области определения.

Точки разрыва и их классификация.

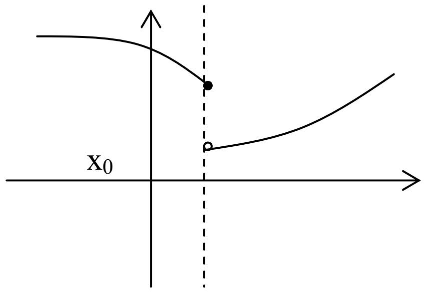
Рассмотрим некоторую функцию f(x), непрерывную в окрестности точки x_0, за исключением может быть самой этой точки. Из определения точки разрыва функции следует, что $x = x_0$ является точкой разрыва, если функция не определена в этой точке, или не является в ней непрерывной.

Следует отметить также, что непрерывность функции может быть односторонней. Поясним это следующим образом.

Если односторонний предел (см. выше) $\lim\limits_{x \to x+0} f(x) = f(x_0)$, то функция называется непрерывной справа.



Если односторонний предел (см. выше) $\lim\limits_{x \to x-0} f(x) = f(x_0)$, то функция называется непрерывной слева.



Определение. Точка x_0 называется **точкой разрыва** функции f(x), если f(x) не определена в точке x_0 или не является непрерывной в этой точке.

Определение. Точка x_0 называется **точкой разрыва 1- го рода**, если в этой точке функция f(x) имеет конечные, но не равные друг другу левый и правый пределы.

$$\lim_{x \to x_0+0} f(x) \neq \lim_{x \to x_0-0} f(x)$$

Для выполнения условий этого определения не требуется, чтобы функция была определена в точке $x = x_0$, достаточно того, что она определена слева и справа от нее.

Из определения можно сделать вывод, что в точке разрыва 1 – го рода функция может иметь только конечный скачок. В некоторых частных случаях точку разрыва 1 – го рода еще иногда называют **устранимой** точкой разрыва, но подробнее об этом поговорим ниже.

Определение. Точка x_0 называется **точкой разрыва 2 – го рода**, если в этой точке функция f(x) не имеет хотя бы одного из односторонних пределов или хотя бы один из них бесконечен.

Непрерывность функции на интервале и на отрезке.

Определение. Функция f(x) называется **непрерывной на интервале (отрезке)**, если она непрерывна в любой точке интервала (отрезка).

При этом не требуется непрерывность функции на концах отрезка или интервала, необходима только односторонняя непрерывность на концах отрезка или интервала.

Свойства функций, непрерывных на отрезке.

Свойство 1: (Первая теорема Вейерштрасса (Вейерштрасс Карл (1815-1897)- немецкий математик)). Функция, непрерывная на отрезке, ограничена на этом отрезке, т.е. на отрезке [a, b] выполняется условие $-M \le f(x) \le M$.

Доказательство этого свойства основано на том, что функция, непрерывная в точке x_0, ограничена в некоторой ее окрестности, а если разбивать отрезок [a, b] на бесконечное количество отрезков, которые "стягиваются" к точке x_0, то образуется некоторая окрестность точки x_0.

Свойство 2: Функция, непрерывная на отрезке [a, b], принимает на нем наибольшее и наименьшее значения.

Т.е. существуют такие значения x_1 и x_2, что $f(x_1) = m$, $f(x_2) = M$, причем

$$m \le f(x) \le M$$

Отметим эти наибольшие и наименьшие значения функция может принимать на отрезке и несколько раз (например – f(x) = sinx).

Разность между наибольшим и наименьшим значением функции на отрезке называется **колебанием** функции на отрезке.

Свойство 3: (Вторая теорема Больцано – Коши). Функция, непрерывная на отрезке [a, b], принимает на этом отрезке все значения между двумя произвольными величинами.

Свойство 4: Если функция f(x) непрерывна в точке $x = x_0$, то существует некоторая окрестность точки x_0, в которой функция сохраняет знак.

Свойство 5: (Первая теорема Больцано (1781-1848) – Коши). Если функция f(x)- непрерывная на отрезке [a, b] и имеет на концах отрезка значения противоположных знаков, то существует такая точка внутри этого отрезка, где f(x) = 0.

Т.е. если $\text{sign}(f(a)) \ne \text{sign}(f(b))$, то $\exists\ x_0: f(x_0) = 0$.

Определение. Функция f(x) называется **равномерно непрерывной** на отрезке [a, b], если для любого $\varepsilon>0$ существует $\Delta>0$ такое, что для любых точек $x_1\in[a,b]$ и $x_2\in[a,b]$ таких, что

$$|x_2 - x_1| < \Delta$$

верно неравенство

$$|f(x_2) - f(x_1)| < \varepsilon$$

Отличие равномерной непрерывности от "обычной" в том, что для любого ε существует свое Δ, не зависящее от x, а при "обычной" непрерывности Δ зависит от ε и x.

<u>Свойство 6:</u> Теорема Кантора (Кантор Георг (1845-1918)- немецкий математик). Функция, непрерывная на отрезке, равномерно непрерывна на нем.
(Это свойство справедливо только для отрезков, а не для интервалов и полуинтервалов.)

<u>Свойство 7:</u> Если функция f(x) определена, монотонна и непрерывна на некотором промежутке, то и обратная ей функция x = g(y) тоже однозначна, монотонна и непрерывна.

<u>Комплексные числа.</u>

<u>Определение.</u> **Комплексным числом *z*** называется выражение $z = a + ib$, где a и b – действительные числа, i – мнимая единица, которая определяется соотношением:

$$i^2 = -1; \qquad i = \sqrt{-1}.$$

При этом число a называется **действительной частью** числа z ($a = Re\, z$), а b- **мнимой частью** ($b = Im\, z$).

Если $a = Re\, z = 0$, то число z будет чисто мнимым, если $b = Im\, z = 0$, то число z будет действительным.

<u>Определение.</u> Числа $z = a + ib$ и $\bar{z} = a - ib$ называются **комплексно – сопряженными.**

<u>Определение.</u> Два комплексных числа $z_1 = a_1 + ib_1$ и $z_2 = a_2 + ib_2$ называются равными, если соответственно равны их действительные и мнимые части:

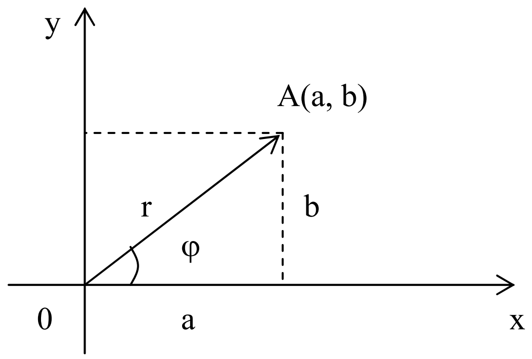
$$a_1 = a_2; \qquad b_1 = b_2;$$

<u>Определение.</u> Комплексное число равно нулю, если соответственно равны нулю действительная и мнимая части.

$$a = b = 0.$$

Понятие комплексного числа имеет геометрическое истолкование. Множество комплексных чисел является расширением множества действительных чисел за счет включения множества мнимых чисел. Комплексные числа включают в себя все множества чисел, которые изучались ранее. Так натуральные, целые, рациональные, иррациональные, действительные числа являются, вообще говоря, частными случаями комплексных чисел.

Если любое действительное число может быть геометрически представлено в виде точки на числовой прямой, то комплексное число представляется точкой на плоскости, координатами которой будут соответственно действительная и мнимая части комплексного числа. При этом горизонтальная ось будет являться действительной числовой осью, а вертикальная - мнимой осью.



Таким образом, на оси OX располагаются действительные числа, а на оси OY – чисто мнимые.

С помощью подобного геометрического представления можно представлять числа в так называемой тригонометрической форме.

Тригонометрическая форма числа.

Из геометрических соображений видно, что $a = r\cos\varphi;\quad b = r\sin\varphi$. Тогда комплексное число можно представить в виде:

$$z = a + ib = r\cos\varphi + ir\sin\varphi = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

Такая форма записи называется **тригонометрической формой записи комплексного числа.**

При этом величина r называется **модулем** комплексного числа, а угол наклона φ - **аргументом** комплексного числа.

$$r = |z|; \qquad \varphi = Arg\, z\,.$$

Из геометрических соображений видно:

$$r = |a + ib| = \sqrt{a^2 + b^2}; \quad \varphi = Arg\, z = arctg\frac{b}{a};$$

Очевидно, что комплексно – сопряженные числа имеют одинаковые модули и противоположные аргументы.

$$|z| = |\bar{z}|; \qquad Arg\, z = -Arg\, \bar{z}.$$

Действия с комплексными числами.

Основные действия с комплексными числами вытекают из действий с многочленами.

1) **Сложение и вычитание.**

$$z = z_1 \pm z_2 = (a_1 + ib_1) \pm (a_2 + ib_2) = (a_1 \pm a_2) + i(b_1 \pm b_2)$$

$$|z| = \sqrt{(a_1 \pm a_2)^2 + (b_1 \pm b_2)^2}$$

2) **Умножение.**

$$z = z_1 z_2 = (a_1 + ib_1)(a_2 + ib_2) = a_1a_2 + ia_1b_2 + ib_1a_2 + i^2 b_1b_2$$

$$z = z_1 z_2 = (a_1a_2 - b_1b_2) + i(a_1b_2 + b_1a_2)$$

В тригонометрической форме:

$$z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1),\ z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2).$$

$$z = z_1 z_2 = r_1 r_2(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2))$$

С случае комплексно – сопряженных чисел:

$$z\bar{z} = (a+ib)(a-ib) = a^2 + b^2 = |z|^2 = |\bar{z}|^2.$$

3) **Деление.**

$$z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1 + ib_1}{a_2 + ib_2} = x + iy$$

$$z = \frac{(a_1+ib_1)(a_2-ib_2)}{(a_2+ib_2)(a_2-ib_2)} = \frac{(a_1a_2+b_1b_2)+i(a_2b_1-a_1b_2)}{a_2^2+b_2^2}$$

$$z = \frac{a_1a_2+b_1b_2}{a_2^2+b_2^2} + i\frac{a_2b_1-a_1b_2}{a_2^2+b_2^2}$$

В тригонометрической форме:

$$z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1-\varphi_2) + i\sin(\varphi_1-\varphi_2))$$

4) **Возведение в степень.**

Из операции умножения комплексных чисел следует, что

$$z^2 = zz = r^2(\cos 2\varphi + i\sin 2\varphi)$$

В общем случае получим:

$$z^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi),$$

где n – целое положительное число.

Это выражение называется **формулой Муавра.**

(Абрахам де Муавр (1667 – 1754) – английский математик)

Формулу Муавра можно использовать для нахождения тригонометрических функций двойного, тройного и т.д. углов.

5) **Извлечение корня из комплексного числа.**

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)} = \rho(\cos\psi + i\sin\psi)$$

Возводя в степень, получим:

$$\rho^n(\cos n\psi + i\sin n\psi) = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

Отсюда: $\rho = \sqrt[n]{r}$; $n\psi = \varphi + 2\pi k$; $k \in Z$.

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi+2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi+2\pi k}{n}\right)$$

Таким образом, корень n – ой степени из комплексного числа имеет n различных значений.

Показательная форма комплексного числа.

Рассмотрим показательную функцию $w = e^z$; $z = x + iy.$

Можно показать, что функция w может быть записана в виде:

$$w = e^{x+iy} = e^x(\cos y + i\sin y)$$

Данное равенство называется **уравнением Эйлера.** Вывод этого уравнения будет рассмотрен позднее. (См.).

Для комплексных чисел будут справедливы следующие свойства:

1) $e^{z_1+z_2} = e^{z_1}e^{z_2}$;

2) $e^{z_1-z_2} = \dfrac{e^{z_1}}{e^{z_2}}$;

3) $(e^z)^m = e^{mz}$; где m – целое число.

Если в уравнении Эйлера показатель степени принять за чисто мнимое число ($x=0$), то получаем:

$$e^{iy} = \cos y + i\sin y$$

Для комплексно – сопряженного числа получаем:

$$e^{-iy} = \cos y - i\sin y$$

Из этих двух уравнений получаем:

$$\begin{cases} \cos y = \dfrac{e^{iy} + e^{-iy}}{2} \\ \sin y = \dfrac{e^{iy} - e^{-iy}}{2i} \end{cases}$$

Этими формулами пользуются для нахождения значений степеней тригонометрических функций через функции кратных углов.

Если представить комплексное число в тригонометрической форме:

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

и воспользуемся формулой Эйлера: $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$

$$z = re^{i\varphi}$$

Полученное равенство и есть **показательная форма комплексного числа.**

Разложение многочлена на множители.

Определение. Функция вида $f(x) = A_0x^n + A_1x^{n-1} + \ldots + A_n$ называется **целой рациональной** функцией от x.

Теорема Безу. (Этьенн Безу (1730 – 1783) – французский математик)

При делении многочлена f(x) на разность x – a получается остаток, равный f(a).

Доказательство. При делении многочлена *f(x)* на разность *x – a* частным будет многочлен $f_1(x)$ степени на единицу меньшей, чем *f(x),* а остатком – постоянное число *R*.

$$f(x) = f_1(x)(x-a) + R$$

Переходя к пределу при $x \to a$, получаем *f(a) = R*.

Следствие. *Если, a – корень многочлена, т.е. f(a) = 0, то многочлен f(x) делится на (x – a) без остатка.*

Определение. Если уравнение имеет вид *P(x)* = 0, где *P(x)* – многочлен степени *n*, то это уравнение называется **алгебраическим** уравнением степени *n*.

Теорема. (Основная теорема алгебры) *Всякая целая рациональная функция f(x) имеет, по крайней мере, один корень, действительный или комплексный.*

Теорема. *Всякий многочлен n – ой степени разлагается на n линейных множителей вида (x – a) и множитель, равный коэффициенту при* x^n.

Теорема. *Если два многочлена тождественно равны друг другу, то коэффициенты одного многочлена равны соответствующим коэффициентам другого.*

Если среди корней многочлена встречаются кратные корни, то разложение на множители имеет вид:

$$f(x) = A_0(x-a_1)^{k_1}(x-a_2)^{k_2}\dots(x-a_m)^{k_m}.$$

$$k_1 + k_2 + \dots + k_m = n$$

k_i - кратность соответствующего корня.

Отсюда следует, что *любой многочлен n – ой степени имеет ровно n корней (действительных или комплексных).*

Это свойство имеет большое значение для решения алгебраических уравнений, дифференциальных уравнений и играет важную роль в анализе функций.

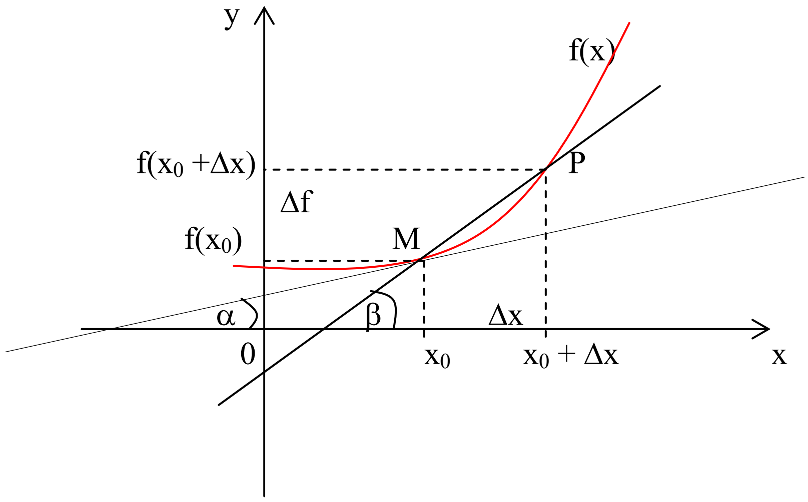
Рассмотрим несколько примеров действий с комплексными числами.

Дифференциальное исчисление функции одной переменной.

Производная функции, ее геометрический и физический смысл.

Определение. **Производной** функции *f(x)* в точке x = x_0 называется предел отношения приращения функции в этой точке к приращению аргумента, если он существует.

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$



Пусть *f(x)* определена на некотором промежутке (a, b). Тогда $tg\beta = \dfrac{\Delta f}{\Delta x}$ – тангенс угла наклона секущей MP к графику функции.

$$\lim_{\Delta x \to 0} tg\beta = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = f'(x_0) = tg\alpha\,,$$

где α - угол наклона касательной к графику функции *f(x)* в точке (x_0, $f(x_0)$).

Угол между кривыми может быть определен как угол между касательными, проведенными к этим кривым в какой- либо точке.

Уравнение касательной к кривой: $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$

Уравнение нормали к кривой: $y - y_0 = -\dfrac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)$.

Фактически производная функции показывает как бы скорость изменения функции, как изменяется функция при изменении переменной.

Физический смысл производной функции f(t), где t- время, а f(t)- закон движения (изменения координат) – мгновенная скорость движения.

Соответственно, вторая производная функции- скорость изменения скорости, т.е. ускорение.

Односторонние производные функции в точке.

Определение. Правой (левой) производной функции *f(x)* в точке $x = x_0$ называется правое (левое) значение предела отношения $\dfrac{\Delta f}{\Delta x}$ при условии, что это отношение существует.

$$f'_+(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0+} \frac{\Delta f}{\Delta x} \qquad\qquad f'_-(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0-} \frac{\Delta f}{\Delta x}$$

Если функция *f(x)* имеет производную в некоторой точке x = x_0, то она имеет в этой точке односторонние производные. Однако, обратное утверждение неверно. Во- первых функция может иметь разрыв в точке x_0, а во- вторых, даже если функция непрерывна в точке x_0, она может быть в ней не дифференцируема.

<u>Например:</u> f(x) = $|x|$ - имеет в точке x = 0 и левую и правую производную, непрерывна в этой точке, однако, не имеет в ней производной.

<u>Теорема.</u> (Необходимое условие существования производной) *Если функция f(x) имеет производную в точке x_0, то она непрерывна в этой точке.*

Понятно, что это условие не является достаточным.

<u>Основные правила дифференцирования.</u>

Обозначим *f(x) = u, g(x) = v*- функции, дифференцируемые в точке x.

1) $(u \pm v)' = u' \pm v'$
2) $(u \cdot v)' = u \cdot v' + u' \cdot v$
3) $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - v'u}{v^2}$, если $v \neq 0$

Эти правила могут быть легко доказаны на основе теорем о пределах.

<u>Производные основных элементарных функций.</u>

1) $C' = 0$;
2) $(x^m)' = mx^{m-1}$;
3) $\left(\sqrt{x}\right)' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$
4) $\left(\dfrac{1}{x}\right)' = -\dfrac{1}{x^2}$
5) $\left(e^x\right)' = e^x$
6) $\left(a^x\right)' = a^x \ln a$
7) $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$
8) $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a}$
9) $(\sin x)' = \cos x$
10) $(\cos x)' = -\sin x$
11) $(tgx)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$
12) $(ctgx)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$
13) $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
14) $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
15) $(arctgx)' = \dfrac{1}{1+x^2}$
16) $(arcctgx)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$

<u>Производная сложной функции.</u>

<u>Теорема.</u> *Пусть y = f(x); u = g(x), причем область значений функции u входит в область определения функции f.*

Тогда $\quad y' = f'(u)\cdot u'$

<u>Доказательство.</u>

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta u}\cdot\frac{\Delta u}{\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta u\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta u}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}$$

(с учетом того, что если $\Delta x\to 0$, то $\Delta u\to 0$, т.к. u = g(x) – непрерывная функция)

Тогда $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{du}\cdot\dfrac{du}{dx}$

Теорема доказана.

<u>Логарифмическое дифференцирование.</u>

Рассмотрим функцию $y = \ln|x| = \begin{cases}\ln x, & при \quad x > 0\\ \ln(-x), & при \quad x < 0\end{cases}$.

Тогда $(\ln|x|)' = \dfrac{1}{x}$, т.к. $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$; $\quad (\ln(-x))' = \dfrac{(-x)'}{x} = \dfrac{1}{x}$.

Учитывая полученный результат, можно записать $(\ln|f(x)|)' = \dfrac{f'(x)}{f(x)}$.

Отношение $\dfrac{f'(x)}{f(x)}$ называется **логарифмической производной** функции f(x).

Способ **логарифмического дифференцирования** состоит в том, что сначала находят логарифмическую производную функции, а затем производную самой функции по формуле

$$f'(x) = (\ln|f(x)|)'\cdot f(x)$$

Способ логарифмического дифференцирования удобно применять для нахождения производных сложных, особенно показательных функций, для которых непосредственное вычисление производной с использованием правил дифференцирования представляется трудоемким.

<u>Производная показательно- степенной функции.</u>

Функция называется показательной, если независимая переменная входит в показатель степени, и степенной, если переменная является основанием. Если же и основание и показатель степени зависят от переменной, то такая функция будет показательно – степенной.

Пусть u = f(x) и v = g(x) – функции, имеющие производные в точке x, f(x)>0.
Найдем производную функции $y = u^v$. Логарифмируя, получим:

$$\ln y = v\ln u$$

$$\frac{y'}{y} = v'\ln u + v\frac{u'}{u}$$

$$y' = u^v\left(v\frac{u'}{u} + v'\ln u\right)$$

$$\left(u^v\right)' = vu^{v-1}u' + u^v v'\ln u$$

Производная обратных функций.

Пусть требуется найти производную функции *y = f(x)* при условии, что обратная ей функция *x = g(y)* имеет производную, отличную от нуля в соответствующей точке.

Для решения этой задачи дифференцируем функцию x = g(y) по x:

$$1 = g'(y)y'$$

т.к. $g'(y) \neq 0$

$$y' = \frac{1}{g'(y)}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}$$

т.е. производная обратной функции обратна по величине производной данной функции.

Дифференциал функции.

Пусть функция y = f(x) имеет производную в точке x:

$$\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x)$$

Тогда можно записать: $\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \alpha$, где $\alpha \to 0$, при $\Delta x \to 0$.

Следовательно: $\Delta y = f'(x)\cdot\Delta x + \alpha\cdot\Delta x$.

Величина $\alpha\Delta x$- бесконечно малая более высокого порядка, чем $f'(x)\Delta x$, т.е. $f'(x)\Delta x$- главная часть приращения Δy.

Определение. Дифференциалом функции f(x) в точке x называется главня линейная часть приращения функции.

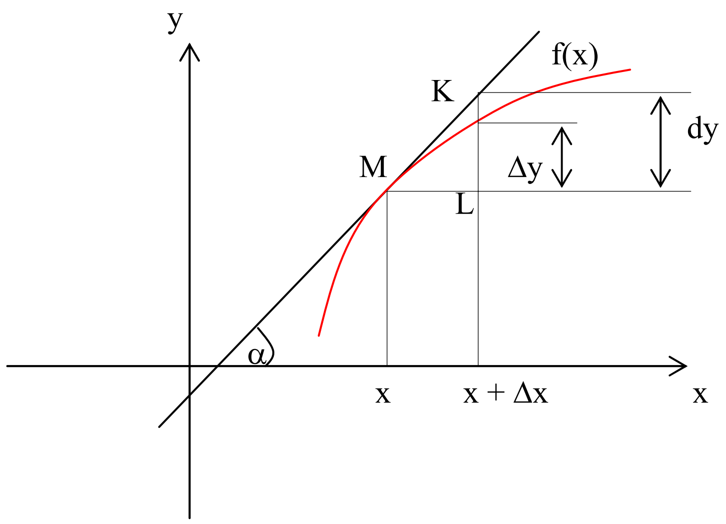
Обозначается dy или df(x).

Из определения следует, что $dy = f'(x)\Delta x$ или

$$dy = f'(x)dx.$$

Можно также записать: $f'(x) = \frac{dy}{dx}$

Геометрический смысл дифференциала.



Из треугольника ΔMKL: $KL = dy = tg\alpha \cdot \Delta x = y' \cdot \Delta x$

Таким образом, дифференциал функции $f(x)$ в точке х равен приращению ординаты касательной к графику этой функции в рассматриваемой точке.

Свойства дифференциала.

Если $u = f(x)$ и $v = g(x)$- функции, дифференцируемые в точке х, то непосредственно из определения дифференциала следуют следующие свойства:

1) $d(u \pm v) = (u \pm v)'dx = u'dx \pm v'dx = du \pm dv$

2) $d(uv) = (uv)'dx = (u'v + v'u)dx = vdu + udv$

3) $d(Cu) = Cdu$

4) $d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vdu - udv}{v^2}$

Дифференциал сложной функции.
Инвариантная форма записи дифференциала.

Пусть $y = f(x)$, $x = g(t)$, т.е у- сложная функция.

Тогда
$$dy = f'(x)g'(t)dt = f'(x)dx.$$

Видно, что форма записи дифференциала dy не зависит от того, будет ли х независимой переменной или функцией какой- то другой переменной, в связи с чем эта форма записи называется **инвариантной формой записи дифференциала**.

Однако, если х- независимая переменная, то dx = Δx, но

если x зависит от t, то $\Delta x \neq dx$.

Таким образом форма записи dy = f′(x)Δx не является инвариантной.

Формула Тейлора.

Теорема Тейлора. 1) *Пусть функция f(x) имеет в точке x = a и некоторой ее окрестности производные порядка до (n+1) включительно.{ Т.е. и все предыдущие до порядка n функции и их производные непрерывны и дифференцируемы в этой окрестности}.*

2) Пусть x- любое значение из этой окрестности, но $x \neq a$.

Тогда между точками x и a найдется такая точка ε, что справедлива формула:

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + ... + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \frac{f^{(n+1)}(\varepsilon)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

- это выражение называется **формулой Тейлора**, а выражение:

$$\frac{f^{(n+1)}(\varepsilon)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} = R_{n+1}(x)$$

называется **остаточным членом в форме Лагранжа**.

Доказательство. Представим функцию f(x) в виде некоторого многочлена $P_n(x)$, значение которого в точке x = a равно значению функции f(x), а значения его производных равно значениям соответствующих производных функции в точке x = a.

$$P_n(a) = f(a); \quad P_n'(a) = f'(a); \quad P_n''(a) = f''(a); \quad ... \quad P_n^{(n)}(a) = f^{(n)}(a) \qquad (1)$$

Многочлен $P_n(x)$ будет близок к функции f(x). Чем больше значение n, тем ближе значения многочлена к значениям функции, тем точнее он повторяет функцию.

Представим этот многочлен с неопределенными пока коэффициентами:

$$P_n(x) = C_0 + C_1(x-a) + C_2(x-a)^2 + ... + C_n(x-a)^n \qquad (2)$$

Для нахождения неопределенных коэффициентов вычисляем производные многочлена в точке x = a и составляем систему уравнений:

$$\begin{cases} P_n'(x) = C_1 + 2C_2(x-a) + 3C_3(x-a)^2 + ... + nC_n(x-a)^{n-1} \\ P_n''(x) = 2C_2 + 3\cdot 2C_3(x-a) + ... + n(n-1)C_n(x-a)^{n-2} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ P_n^{(n)}(x) = n(n-1)(n-2)...2\cdot 1C_n \end{cases} \qquad (3)$$

Решение этой системы при x = a не вызывает затруднений, получаем:

$$f(a) = C_0$$

$$f'(a) = C_1$$
$$f''(a) = 2 \cdot 1C_2$$
$$f'''(a) = 3 \cdot 2 \cdot 1C_3$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$f^{(n)}(a) = n(n-1)(n-2)\ldots 2 \cdot 1C_n$$

Подставляя полученные значения C_i в формулу (2), получаем:

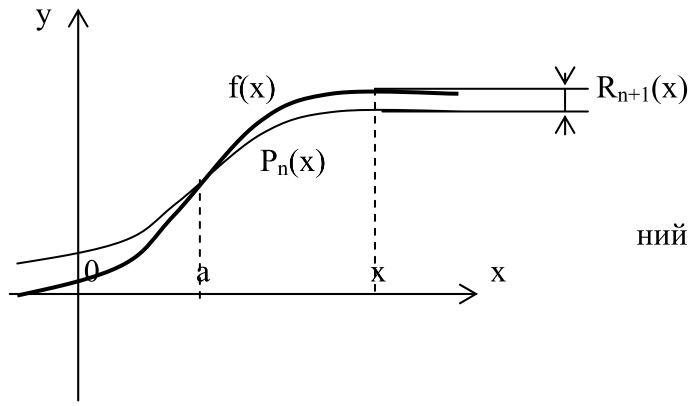
$$P_n(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1}(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

Как было замечено выше, многочлен не точно совпадает с функцией f(x), т.е. отличается от нее на некоторую величину. Обозначим эту величину $R_{n+1}(x)$. Тогда:

$$f(x) = P_n(x) + R_{n+1}(x)$$

Теорема доказана.

Рассмотрим подробнее величину $R_{n+1}(x)$.



Как видно на рисунке, в точке x = a значение многочлена в точности совпадает со значением функции. Однако, при удалении от точки x = a расхождение значений увеличивается.

Иногда используется другая запись для $R_{n+1}(x)$. Т.к. точка $\varepsilon \in (a, x)$, то найдется такое число θ из интервала $0 < \theta < 1$, что $\varepsilon = a + \theta(x - a)$.

Тогда можно записать:

$$R_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}[a + \theta(x-a)]}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

Тогда, если принять $a = x_0$, $x - a = \Delta x$, $x = x_0 + \Delta x$, формулу Тейлора можно записать в виде:

$$f(x_0 - \Delta x) - f(x_0) = \frac{f'(x)}{1!}\Delta x + \frac{f''(x)}{2!}(\Delta x)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(\Delta x)^n + \frac{f^{(n+1)}(x_0 + \theta\Delta x)}{(n+1)!}(\Delta x)^{n+1}$$

где $0 < \theta < 1$

Если принять n =0, получим: $\boldsymbol{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = f'(x_0 + \theta\Delta x)\cdot\Delta x}$ – это выражение называется **формулой Лагранжа**. (Жозеф Луи Лагранж (1736-1813) французский математик и механик).

Формула Тейлора имеет огромное значение для различных математических преобразований. С ее помощью можно находить значения различных функций, интегрировать, решать дифференциальные уравнения и т.д.

При рассмотрении будет более подробно описаны некоторые особенности и условия разложения функции по формуле Тейлора.

Формула Маклорена.

Формулой Маклорена называется формула Тейлора при а = 0:

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+...+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+R_n(x)$$

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1};\qquad 0<\theta<1$$

Мы получили так называемую формулу Маклорена с остаточным членом в форме Лагранжа.

Следует отметить, что при разложении функции в ряд применение формулы Маклорена предпочтительнее, чем применение непосредственно формулы Тейлора, т.к. вычисление значений производных в нуле проще, чем в какой- либо другой точке, естественно, при условии, что эти производные существуют.

Однако, выбор числа *a* очень важен для практического использования. Дело в том, что при вычислении значения функции в точке, расположенной относительно близко к точке *a*, значение, полученное по формуле Тейлора, даже при ограничении тремя – четырьмя первыми слагаемыми, совпадает с точным значением функции практически абсолютно. При удалении же рассматриваемой точки от точки *a* для получения точного значения надо брать все большее количество слагаемых формулы Тейлора, что неудобно.

Т.е. чем больше по модулю значение разности ($x-a$) тем более точное значение функции отличается от найденного по формуле Тейлора.

Кроме того, можно показать, что остаточный член $R_{n+1}(x)$ является бесконечно малой функцией при $x\to a$, причем долее высокого порядка, чем $(x-a)^m$, т.е.

$$R_{n+1}(x)=\alpha([x-a]^n)\,.$$

Таким образом, ряд Маклорена можно считать частным случаем ряда Тейлора.

Представление некоторых элементарных функций по формуле Тейлора.

Применение формулы Тейлора для разложения функций в степенной ряд широко используется и имеет огромное значение при проведении различных математических расчетов. Непосредственное вычисление интегралов некоторых функций может быть сопряжено со значительными трудностями, а замена функции степенным рядом позволяет значительно упростить задачу. Нахождение значений тригонометрических, обратных тригонометрических, логарифмических функций также может быть сведено к нахождению значений соответствующих многочленов.

Если при разложении в ряд взять достаточное количество слагаемых, то значение функции может быть найдено с любой наперед заданной точностью. Практически можно сказать, что для нахождения значения любой функции с разумной степенью точности (предполагается, что точность, превышающая 10 – 20 знаков после десятичной точки, необходима очень редко) достаточно 4-10 членов разложения в ряд.

Применение принципа разложения в ряд позволяет производить вычисления на ЭВМ в режиме реального времени, что немаловажно при решении конкретных технических задач.

Функция $f(x) = e^x$.

Находим:

$$f(x) = e^x, \quad f(0) = 1$$
$$f'(x) = e^x, \quad f'(0) = 1$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$f^{(n)}(x) = e^x, \quad f^{(n)}(0) = 1$$

Тогда: $$e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^{\theta x}, \qquad 0 < \theta < 1$$

Функция $f(x) = \sin x$.

Получаем $f(x) = \sin x$; $f(0) = 0$

$f'(x) = \cos x = \sin(x + \pi/2)$; $f'(0) = 1$;

$f''(x) = -\sin x = \sin(x + 2\pi/2)$; $f''(0) = 0$;

$f'''(x) = -\cos x = \sin(x + 3\pi/2)$; $f'''(0)=-1$;

……………………………………

$f^{(n)}(x) = \sin(x + \pi n/2)$; $f^{(n)}(0) = \sin(\pi n/2)$;

$f^{(n+1)}(x) = \sin(x + (n+1)\pi/2)$; $f^{(n+1)}(\varepsilon) = \sin(\varepsilon + (n+1)\pi/2)$;

Итого:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^{n+1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + R_{2n}(x)$$

$$R_{2n}(x) = \frac{f^{(2n+1)}(\varepsilon)}{(2n+1)!}x^{2n+1} = \pm\frac{\cos\varepsilon}{(2n+1)!}x^{2n+1}$$

Функция $f(x) = \cos x$.

Для функции cosx, применив аналогичные преобразования, получим:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + (-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} + R_{2n+1}(x)$$

$$R_{2n+1}(x) = \frac{f^{(2n+2)}(\varepsilon)}{(2n+2)!}x^{2n+2} = \pm\frac{\cos\varepsilon}{(2n+2)!}x^{2n+2}$$

Функция $f(x) = (1 + x)^\alpha$.

(α - действительное число)

$$f'(x) = \alpha(1+x)^{\alpha-1}; \quad f'(0) = \alpha;$$

$$f''(x)=\alpha(\alpha-1)(1+x)^{\alpha-2};\quad f''(0)=\alpha(\alpha-1);$$

……………………………………………………..

$$f^{(n)}(x)=\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)...(\alpha-(n-1))(1+x)^{\alpha-n};\quad f^{(n)}(0)=\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)...(\alpha-n+1)$$

Тогда:

$$(1+x)^{\alpha}=1+\frac{\alpha}{1}x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2\cdot 1}x^2+...+\frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-n+1)}{n!}x^n+R_{n+1}(x)$$

$$R_{n+1}(x)=\frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-n)}{(n+1)!}(1+\theta x)^{\alpha-(n+1)};\qquad 0<\theta<1$$

Если в полученной формуле принять $\alpha = n$, где n- натуральное число и $f^{(n+1)}(x)=0$, то $R_{n+1} = 0$, тогда

$$(1+x)^n=1+\frac{n}{1!}x+\frac{n(n-1)}{2!}x^2+...+x^n$$

Получилась формула, известная как **бином Ньютона**.

Функция f(x) = ln(1 + x).

Получаем: $f(x) = ln(1 + x);\qquad f(0) = 0;$

$$f'(x)=\frac{1}{1+x};\qquad f'(0)=1;$$

$$f''(x)=\frac{-1}{(1+x)^2};\qquad f''(0)=-1;$$

$$f'''(x)=\frac{-1\cdot(-2)}{(1+x)^3};\qquad f'''(0)=2;$$

………………………………………

$$f^{(n)}(x)=(-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{(1+x)^n};\qquad f^{(n)}(x)=(-1)^{n-1}(n-1)!;$$

Итого: $\ln(1+x)=x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1\cdot 2}{3!}x^3-...+\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{n!}x^n+R_{n+1}(x);$

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-...+\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n+R_{n+1}(x)$$

$$R_{n+1}(x)=\frac{(-1)^n n!}{(n+1)!}\left(\frac{x}{1+\varepsilon}\right)^{n+1};$$

Полученная формула позволяет находить значения любых логарифмов (не только натуральных) с любой степенью точности. Ниже представлен пример вычисления натурального логарифма ln1,5. Сначала получено точное значение, затем – расчет по полученной выше формуле, ограничившись пятью членами разложения. Точность достигает 0,0003.

ln1,5 = 0,405465108108164381

$$\ln 1{,}5 = \ln(1+0{,}5) \approx 0{,}5 - \frac{0{,}5^2}{2} + \frac{0{,}5^3}{3} - \frac{0{,}5^4}{4} + \frac{0{,}5^5}{5} - \frac{0{,}5^6}{6} + \frac{0{,}5^7}{7} = 0{,}4058035$$

Разложение различных функций по формулам Тейлора и Маклорена приводится в специальных таблицах, однако, формула Тейлора настолько удобна, что для подавляющего большинства функций разложение может быть легко найдено непосредственно.

Ниже будут рассмотрены различные применения формулы Тейлора не только к приближенным представлениям функций, но и к решению дифференциальных уравнений и к вычислению интегралов.

Применение дифференциала к приближенным вычислениям.

Дифференциал функции $y = f(x)$ зависит от Δx и является главной частью приращения Δx.

Также можно воспользоваться формулой

$$dy = f'(x)dx$$

Тогда абсолютная погрешность

$$|\Delta y - dy|$$

Относительная погрешность

$$\left|\frac{\Delta y - dy}{dy}\right|$$

Теоремы о среднем.

Если функция f(x) непрерывна на отрезке [a, b], дифференцируема на интервале (a, b) и значения функции на концах отрезка равны f(a) = f(b), то на интервале (a, b) существует точка ε, a < ε < b, в которой производная функция f(x) равная нулю,
$f'(\varepsilon) = 0$.

Геометрический смысл теоремы Ролля состоит в том, что при выполнении условий теоремы на интервале (a, b) существует точка ε такая, что в соответствующей точке кривой y = f(x) касательная параллельна оси Ox. Таких точек на интервале может быть и несколько, но теорема утверждает существование по крайней мере одной такой точки.

Доказательство. По свойству функций, непрерывных на отрезке функция f(x) на отрезке [a, b] принимает наибольшее и наименьшее значения. Обозначим эти значения M и m соответственно. Возможны два различных случая M = m и M ≠ m.

Пусть M = m. Тогда функция f(x) на отрезке [a, b] сохраняет постоянное значение и в любой точке интервала ее производная равна нулю. В этом случае за ε можно принять любую точку интервала.

Пусть M = m. Так значения на концах отрезка равны, то хотя бы одно из значений M или m функция принимает внутри отрезка [a, b]. Обозначим ε, a < ε < b точку, в которой f(ε)

= M. Так как M- наибольшее значение функции, то для любого Δx (будем считать, что точка ε + Δx находится внутри рассматриваемого интервала) верно неравенство:

$$\Delta f(\varepsilon) = f(\varepsilon + \Delta x) - f(\varepsilon) \le 0$$

При этом $\dfrac{\Delta f(\varepsilon)}{\Delta x} = \begin{cases} \le 0, & \text{если} \quad \Delta x > 0 \\ \ge 0, & \text{если} \quad \Delta x < 0 \end{cases}$

Но так как по условию производная в точке ε существует, то существует и предел $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta f(\varepsilon)}{\Delta x}$.

Т.к. $\lim\limits_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta x > 0}} \dfrac{\Delta f(\varepsilon)}{\Delta x} \le 0$ и $\lim\limits_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta x < 0}} \dfrac{\Delta f(\varepsilon)}{\Delta x} \ge 0$, то можно сделать вывод:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(\varepsilon)}{\Delta x} = 0, \quad \text{т.е.} \quad f'(\varepsilon) = 0.$$

Теорема доказана.

Теорема Ролля имеет несколько **следствий**:

1) Если функция f(x) на отрезке [a, b] удовлетворяет теореме Ролля, причем f(a) = f(b) = = 0, то существует по крайней мере одна точка ε, a < ε < b, такая, что f′(ε) = 0. Т.е. между двумя нулями функции найдется хотя бы одна точка, в которой производная функции равна нулю.

2) Если на рассматриваемом интервале (a, b) функция f(x) имеет производную (n-1)- го порядка и n раз обращается в нуль, то существует по крайней мере одна точка интервала, в котором производная (n – 1) – го порядка равна нулю.

Теорема Лагранжа.

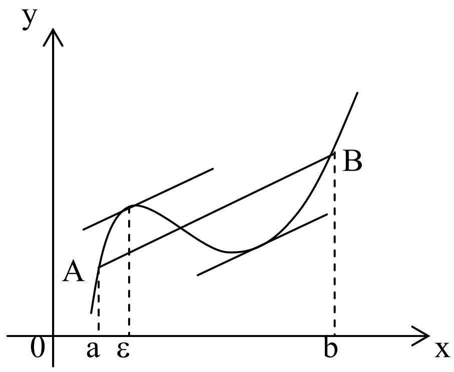
Если функция f(x) непрерывна на отрезке [a, b] и дифференцируема на интервале (a, b), то на этом интервале найдется по крайней мере одна точка ε

a < ε < b, такая, что $\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\varepsilon)$.

Это означает, что если на некотором промежутке выполняются условия теоремы, то отношение приращения функции к приращению аргумента на этом отрезке равно значению производной в некоторой промежуточной точке.

Рассмотренная выше теорема Ролля является частным случаем теоремы Лагранжа.

Отношение $\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$ равно угловому коэффициенту секущей AB.



Если функция f(x) удовлетворяет условиям теоремы, то на интервале (a, b) существует точка ε такая, что в соответствующей точке кривой y = f(x) касательная параллельна секущей, соединяющей точки А и В. Таких точек может быть и несколько, но одна существует точно.

<u>Доказательство.</u> Рассмотрим некоторую вспомогательную функцию

$$F(x) = f(x) - y_{сек\ AB}$$

Уравнение секущей АВ можно записать в виде:

$$y - f(a) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

$$F(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

Функция F(x) удовлетворяет теореме Ролля. Действительно, она непрерывна на отрезке [a, b] и дифференцируема на интервале (a, b). По теореме Ролля существует хотя бы одна точка ε, a < ε < b, такая что F′(ε) = 0.

Т.к. $F'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$, то $F'(\varepsilon) = f'(\varepsilon) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0$, следовательно

$$f'(\varepsilon) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Теорема доказана.

<u>Определение.</u> Выражение $f(a) - f(b) = f'(\varepsilon)(b - a)$ называется **формулой**

Лагранжа или **формулой конечных приращений.**

В дальнейшем эта формула будет очень часто применяться для доказательства самых разных теорем.

Иногда формулу Лагранжа записывают в несколько другом виде:

$$\Delta y = f'(x + \theta\Delta x)\Delta x,$$

где 0 < θ < 1, Δx = b – a, Δy = f(b) – f(a).

<u>Теорема Коши.</u>

Если функции f(x) и g(x) непрерывны на отрезке [a, b] и дифференцируемы на интервале (a, b) и g′(x) ≠ 0 на интервале (a, b), то существует по крайней мере одна точка ε, a < ε < b, такая, что

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\varepsilon)}{g'(\varepsilon)}.$$

Т.е. отношение приращений функций на данном отрезке равно отношению производных в точке ε.

Для доказательства этой теоремы на первый взгляд очень удобно воспользоваться теоремой Лагранжа. Записать формулу конечных разностей для каждой функции, а затем разделить их друг на друга. Однако, это представление ошибочно, т.к. точка ε для каждой из функции в общем случае различна. Конечно, в некоторых частных случаях эта точка интервала может оказаться одинаковой для обеих функций, но это- очень редкое совпадение, а не правило, поэтому не может быть использовано для доказательства теоремы.

Доказательство. Рассмотрим вспомогательную функцию

$$F(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}(g(x) - g(a)),$$

которая на интервале [a, b] удовлетворяет условиям теоремы Ролля. Легко видеть, что при x = a и x = b F(a) = F(b) = 0. Тогда по теореме Ролля существует такая точка ε, a < ε < b, такая, что F′(ε) = 0. Т.к.

$$F'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} g'(x), \text{ то}$$

$$F'(\varepsilon) = 0 = f'(\varepsilon) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} g'(\varepsilon)$$

А т.к. $g'(\varepsilon) \neq 0$, то $\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(x)}{g'(x)}$

Теорема доказана.

Следует отметить, что рассмотренная выше теорема Лагранжа является частным случаем (при g(x) = x) теоремы Коши. Доказанная нами теорема Коши очень широко используется для раскрытия так называемых неопределенностей. Применение полученных результатов позволяет существенно упростить процесс вычисления пределов функций, что будет подробно рассмотрено ниже.

Раскрытие неопределенностей.

Правило Лопиталя.

К разряду неопределенностей принято относить следующие соотношения:

$$\frac{0}{0}; \frac{\infty}{\infty}; \infty \cdot 0; \infty^0; 1^\infty; \infty - \infty$$

Теорема (правило Лопиталя). *Если функции f(x) и g(x) дифференцируемы в вблизи точки a, непрерывны в точке a, g′(x) отлична от нуля вблизи a и f(a) = g(a) = 0, то предел отношения функций при x→a равен пределу отношения их производных, если этот предел (конечный или бесконечный) существует.*

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Доказательство. Применив формулу Коши, получим:

$$\frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f'(\varepsilon)}{g'(\varepsilon)}$$

где ε - точка, находящаяся между a и x. Учитывая, что f(a) = g(a) = 0:

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(\varepsilon)}{g'(\varepsilon)}$$

Пусть при x→a отношение $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ стремится к некоторому пределу. Т.к. точка ε лежит между точками a и x, то при x→a получим ε→a, а следовательно и отношение $\frac{f'(\varepsilon)}{g'(\varepsilon)}$ стремится к тому же пределу. Таким образом, можно записать:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Теорема доказана.

Производные и дифференциалы высших порядков.

Пусть функция f(x)- дифференцируема на некотором интервале. Тогда, дифференцируя ее, получаем первую производную

$$y' = f'(x) = \frac{df(x)}{dx}$$

Если найти производную функции f′(x), получим **вторую производную** функции f(x).

$$y'' = f''(x) = \frac{d^2 f(x)}{dx^2}$$

т.е. $y'' = (y')'$ или $\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)$.

Этот процесс можно продолжить и далее, находя производные степени n.

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}}\right).$$

Общие правила нахождения высших производных.

Если функции u = f(x) и v = g(x) дифференцируемы, то

1) $(Cu)^{(n)} = Cu^{(n)}$;
2) $(u \pm v)^{(n)} = u^{(n)} \pm v^{(n)}$;
3) $(u\cdot v)^{(n)} = vu^{(n)} + nu^{(n-1)}v' + \frac{n(n-1)}{2!}u^{(n-2)}v'' + ... + \frac{n(n-1)...[n-(k-1)]}{k!}u^{(n-k)}v^{(k)} + ...$
$... + uv^{(n)}$.

Это выражение называется **формулой Лейбница.**

Также по формуле $d^n y = f^{(n)}(x)dx^n$ может быть найден дифференциал n- го порядка.

Исследование функций с помощью производной.

Возрастание и убывание функций.

Теорема. 1) *Если функция f(x) имеет производную на отрезке [a, b] и возрастает на этом отрезке, то ее производная на этом отрезке неотрицательна, т.е. f′(x) ≥ 0.*

2) *Если функция f(x) непрерывна на отрезке [a, b] и дифференцируема на промежутке (a, b), причем $f'(x) > 0$ для $a < x < b$, то эта функция возрастает на отрезке [a, b].*

Доказательство.

1) Если функция f(x) возрастает, то $f(x + \Delta x) > f(x)$ при $\Delta x>0$ и $f(x + \Delta x) < f(x)$ при $\Delta x<0$, тогда:

$$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} > 0, \qquad \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} \ge 0.$$

2) Пусть $f'(x)>0$ для любых точек x_1 и x_2, принадлежащих отрезку [a, b], причем $x_1<x_2$.

Тогда по теореме Лагранжа: $f(x_2) - f(x_1) = f'(\varepsilon)(x_2 - x_1)$, $\quad x_1 < \varepsilon < x_2$

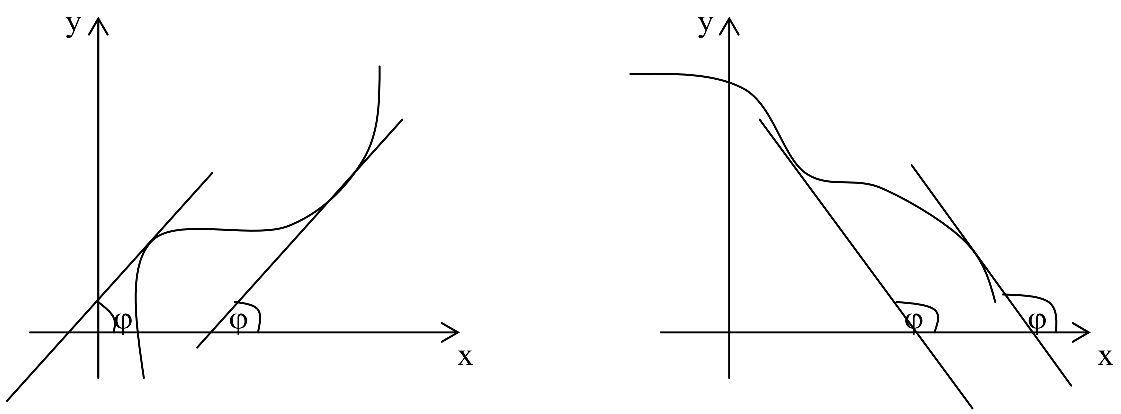
По условию $f'(\varepsilon)>0$, следовательно, $f(x_2) - f(x_1) >0$, т.е. функция f(x) возрастает.

Теорема доказана.

Аналогично можно сделать вывод о том, что если функция f(x) убывает на отрезке [a, b], то $f'(x)\le 0$ на этом отрезке. Если $f'(x)<0$ в промежутке (a, b), то f(x) убывает на отрезке [a, b].

Конечно, данное утверждение справедливо, если функция f(x) непрерывна на отрезке [a, b] и дифференцируема на интервале (a, b).

Доказанную выше теорему можно проиллюстрировать геометрически:



Точки экстремума.

Определение. Функция f(x) имеет в точке x_1 максимум, если ее значение в этой точке больше значений во всех точках некоторого интервала, содержащего точку x_1. Функция f(x) имеет в точке x_2 минимум, если $f(x_2 +\Delta x) > f(x_2)$ при любом Δx (Δx может быть и отрицательным).

Очевидно, что функция, определенная на отрезке может иметь максимум и минимум только в точках, находящихся внутри этого отрезка. Нельзя также путать максимум и минимум функции с ее наибольшим и наименьшим значением на отрезке – это понятия принципиально различные.

Определение. Точки максимума и минимума функции называются **точками экстремума.**

Теорема. (необходимое условие существования экстремума) *Если функция f(x) дифференцируема в точке $x = x_1$ и точка x_1 является точкой экстремума, то производная функции обращается в нуль в этой точке.*

Доказательство. Предположим, что функция f(x) имеет в точке $x = x_1$ максимум.
Тогда при достаточно малых положительных $\Delta x>0$ верно неравенство:

$$f(x_1 + \Delta x) < f(x_1)\text{, т.е.}$$

$$f(x_1 + \Delta x) - f(x_1) < 0$$

Тогда

$$\frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x} > 0 \qquad при \quad \Delta x < 0$$

$$\frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x} < 0 \qquad при \quad \Delta x > 0$$

По определению:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x} = f'(x_1)$$

Т.е. если $\Delta x \to 0$, но $\Delta x<0$, то $f'(x_1) \geq 0$, а если $\Delta x \to 0$, но $\Delta x>0$, то $f'(x_1) \leq 0$.

А возможно это только в том случае, если при $\Delta x \to 0$ $f'(x_1) = 0$.

Для случая, если функция f(x) имеет в точке x_2 минимум теорема доказывается аналогично.

Теорема доказана.

Следствие. Обратное утверждение неверно. Если производная функции в некоторой точке равна нулю, то это еще не значит, что в этой точке функция имеет экстремум. Красноречивый пример этого – функция $y = x^3$, производная которой в точке x = 0 равна нулю, однако в этой точке функция имеет только перегиб, а не максимум или минимум.

Определение. Критическими точками функции называются точки, в которых производная функции не существует или равна нулю.

Рассмотренная выше теорема дает нам необходимые условия существования экстремума, но этого недостаточно.

Теорема. (Достаточные условия существования экстремума)

Пусть функция f(x) непрерывна в интервале (a, b), который содержит критическую точку x_1, и дифференцируема во всех точках этого интервала (кроме, может быть, самой точки x_1).

Если при переходе через точку x_1 слева направо производная функции f′(x) меняет знак с "+" на "-", то в точке $x = x_1$ функция f(x) имеет максимум, а если производная меняет знак с "-" на "+"- то функция имеет минимум.

Доказательство.

Пусть $\begin{cases} f'(x) > 0 & при \quad x < x_1 \\ f'(x) < 0 & при \quad x > x_1 \end{cases}$

По теореме Лагранжа: $f(x) - f(x_1) = f'(\varepsilon)(x - x_1)$, где $x < \varepsilon < x_1$.

Тогда: 1) Если $x < x_1$, то $\varepsilon < x_1$; $f'(\varepsilon)>0$; $f'(\varepsilon)(x - x_1)<0$, следовательно

$$f(x) - f(x_1)<0 \text{ или } f(x) < f(x_1).$$

2) Если $x > x_1$, то $\varepsilon > x_1$ $f'(\varepsilon)<0$; $f'(\varepsilon)(x - x_1)<0$, следовательно

$$f(x) - f(x_1)<0 \text{ или } f(x) < f(x_1).$$

Т. к. ответы совпадают, то можно сказать, что $f(x) < f(x_1)$ в любых точках вблизи x_1, т.е. x_1 – точка максимума.

Доказательство теоремы для точки минимума производится аналогично.

Теорема доказана.

На основе вышесказанного можно выработать единый порядок действий при нахождении наибольшего и наименьшего значения функции на отрезке:

1) Найти критические точки функции.
2) Найти значения функции в критических точках.
3) Найти значения функции на концах отрезка.
4) Выбрать среди полученных значений наибольшее и наименьшее.

Исследование функции на экстремум с помощью производных высших порядков.

Пусть в точке $x = x_1$ $f'(x_1) = 0$ и $f''(x_1)$ существует и непрерывна в некоторой окрестности точки x_1.

Теорема. *Если $f'(x_1) = 0$, то функция $f(x)$ в точке $x = x_1$ имеет максимум, если $f''(x_1)<0$ и минимум, если $f''(x_1)>0$.*

Доказательство.

Пусть $f'(x_1) = 0$ и $f''(x_1)<0$. Т.к. функция $f(x)$ непрерывна, то $f''(x_1)$ будет отрицательной и в некоторой малой окрестности точки x_1.

Т.к. $f''(x) = (f'(x))' < 0$, то $f'(x)$ убывает на отрезке, содержащем точку x_1, но $f'(x_1)=0$, т.е. $f'(x) > 0$ при $x<x_1$ и $f'(x) < 0$ при $x>x_1$. Это и означает, что при переходе через точку $x = x_1$ производная $f'(x)$ меняет знак с “+” на “-“, т.е. в этой точке функция $f(x)$ имеет максимум.

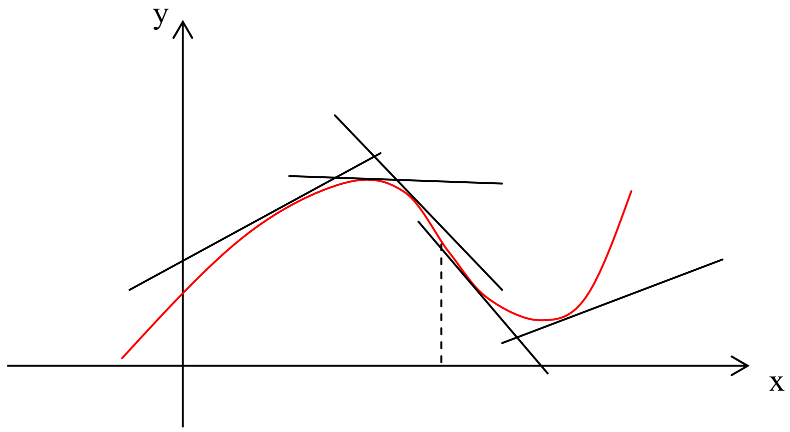
Для случая минимума функции теорема доказывается аналогично.

Если $f''(x) = 0$, то характер критической точки неизвестен. Для его определения требуется дальнейшее исследование.

Выпуклость и вогнутость кривой.

Точки перегиба.

Определение. Кривая обращена выпуклостью **вверх** на интервале (a, b), если все ее точки лежат ниже любой ее касательной на этом интервале. Кривая, обращенная выпуклостью вверх, называется **выпуклой**, а кривая, обращенная выпуклостью вниз – называется **вогнутой**.



На рисунке показана иллюстрация приведенного выше определения.

Теорема 1. *Если во всех точках интервала (a, b) вторая производная функции f(x) отрицательна, то кривая y = f(x) обращена выпуклостью вверх (выпукла).*

Доказательство. Пусть $x_0 \in (a, b)$. Проведем касательную к кривой в этой точке.

Уравнение кривой: y = f(x);

Уравнение касательной: $\overline{y} - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$.

Следует доказать, что $y - \overline{y} = f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)$.

По теореме Лагранжа для $f(x) – f(x_0)$: $y - \overline{y} = f'(c)(x - x_0) - f'(x_0)(x - x_0)$, $x_0 < c < x$.

$$y - \overline{y} = (x - x_0)[f'(c) - f'(x_0)]$$

По теореме Лагранжа для $f'(c) - f'(x_0)$: $y - \overline{y} = f''(c_1)(c - x_0)(x - x_0)$, $x_0 < c_1 < c$

Пусть $x > x_0$ тогда $x_0 < c_1 < c < x$. Т.к. $x – x_0 > 0$ и $c – x_0 > 0$, и кроме того по условию $f''(c_1) < 0$, следовательно, $y - \overline{y} < 0$.

Пусть $x < x_0$ тогда $x < c < c_1 < x_0$ и $x – x_0 < 0$, $c – x_0 < 0$, т.к. по условию $f''(c_1) < 0$, то $y - \overline{y} < 0$.

Аналогично доказывается, что если $f''(x) > 0$ на интервале (a, b), то кривая y=f(x) вогнута на интервале (a, b).

Теорема доказана.

<u>Определение.</u> Точка, отделяющая выпуклую часть кривой от вогнутой, называется **точкой перегиба**.

Очевидно, что в точке перегиба касательная пересекает кривую.

<u>Теорема 2.</u> *Пусть кривая определяется уравнением $y = f(x)$. Если вторая производная $f''(a) = 0$ или $f''(a)$ не существует и при переходе через точку $x = a$ $f''(x)$ меняет знак, то точка кривой с абсциссой $x = a$ является точкой перегиба.*

<u>Доказательство.</u> 1) Пусть $f''(x) < 0$ при $x < a$ и $f''(x) > 0$ при $x > a$. Тогда при $x < a$ кривая выпукла, а при $x > a$ кривая вогнута, т.е. точка $x = a$ – точка перегиба.

2) Пусть $f''(x) > 0$ при $x < b$ и $f''(x) < 0$ при $x < b$. Тогда при $x < b$ кривая обращена выпуклостью вниз, а при $x > b$ – выпуклостью вверх. Тогда $x = b$ – точка перегиба.

Теорема доказана.

<u>Асимптоты.</u>

При исследовании функций часто бывает, что при удалении координаты x точки кривой в бесконечность кривая неограниченно приближается к некоторой прямой.

<u>Определение.</u> Прямая называется **асимптотой** кривой, если расстояние от переменной точки кривой до этой прямой при удалении точки в бесконечность стремится к нулю.

Следует отметить, что не любая кривая имеет асимптоту. Асимптоты могут быть прямые и наклонные. Исследование функций на наличие асимптот имеет большое значение и позволяет более точно определить характер функции и поведение графика кривой.

Вообще говоря, кривая, неограниченно приближаясь к своей асимптоте, может и пересекать ее, причем не в одной точке, как показано на приведенном ниже графике функции $y = x + e^{-\frac{x}{3}}\sin x$. Ее наклонная асимптота $y = x$.

Рассмотрим подробнее методы нахождения асимптот кривых.

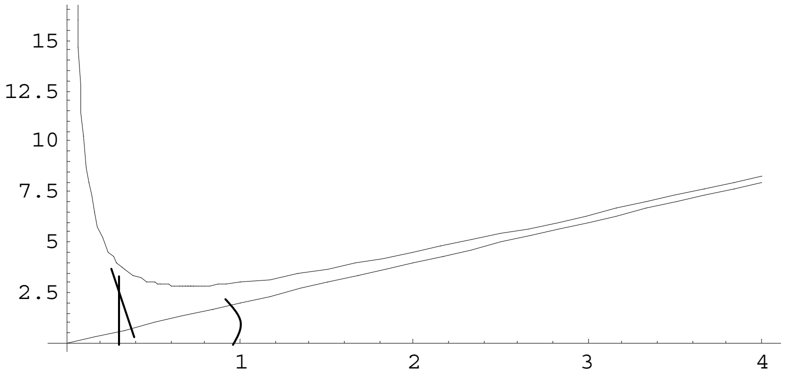
Вертикальные асимптоты.

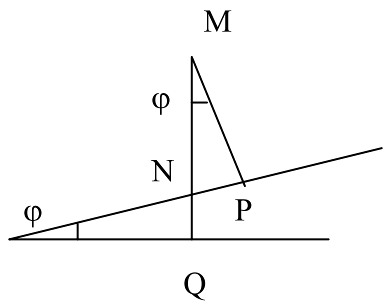
Из определения асимптоты следует, что если $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)=\infty$ или $\lim\limits_{x\to a-0} f(x)=\infty$ или $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty$, то прямая x = a – асимптота кривой y = f(x).

Например, для функции $f(x)=\dfrac{2}{x-5}$ прямая x = 5 является вертикальной асимптотой.

Наклонные асимптоты.

Предположим, что кривая y = f(x) имеет наклонную асимптоту y = kx + b.





Обозначим точку пересечения кривой и перпендикуляра к асимптоте – M, P – точка пересечения этого перпендикуляра с асимптотой. Угол между асимптотой и осью Ox обозначим φ. Перпендикуляр MQ к оси Ox пересекает асимптоту в точке N.

Тогда MQ = y – ордината точки кривой, NQ = $\bar{y}$ - ордината точки N на асимптоте.

По условию: $\lim\limits_{x\to\infty}|MP|=0$, $\angle$NMP = φ, $|NM|=\dfrac{|MP|}{\cos\varphi}$.

Угол φ - постоянный и не равный 90^0, тогда

$$\lim_{x\to\infty}|MP|=\lim_{x\to\infty}|NM|\cos\varphi=\lim_{x\to\infty}|NM|=0$$

$$|NM|=\big||MQ|-|QN|\big|=|y-\bar{y}|=|f(x)-(kx+b)|$$

Тогда $\lim\limits_{x\to\infty}[f(x)-(kx+b)]=0$.

Итак, прямая y = kx + b – асимптота кривой. Для точного определения этой прямой необходимо найти способ вычисления коэффициентов k и b.

В полученном выражении выносим за скобки x:

$$\lim_{x\to\infty} x\left[\frac{f(x)}{x} - k - \frac{b}{x}\right] = 0$$

Т.к. x→∞, то $\lim\limits_{x\to\infty}\left[\frac{f(x)}{x} - k - \frac{b}{x}\right] = 0$, т.к. b = const, то $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{b}{x} = 0$; $\lim\limits_{x\to\infty} k = k$.

Тогда $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} - k - 0 = 0$, следовательно,

$$k = \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}.$$

Т.к. $\lim\limits_{x\to\infty}\left[f(x) - (kx + b)\right] = 0$, то $\lim\limits_{x\to\infty}\left[f(x) - kx\right] - \lim\limits_{x\to\infty} b = 0$, следовательно,

$$b = \lim_{x\to\infty}\left[f(x) - kx\right]$$

Отметим, что горизонтальные асимптоты являются частным случаем наклонных асимптот при k =0.

Схема исследования функций

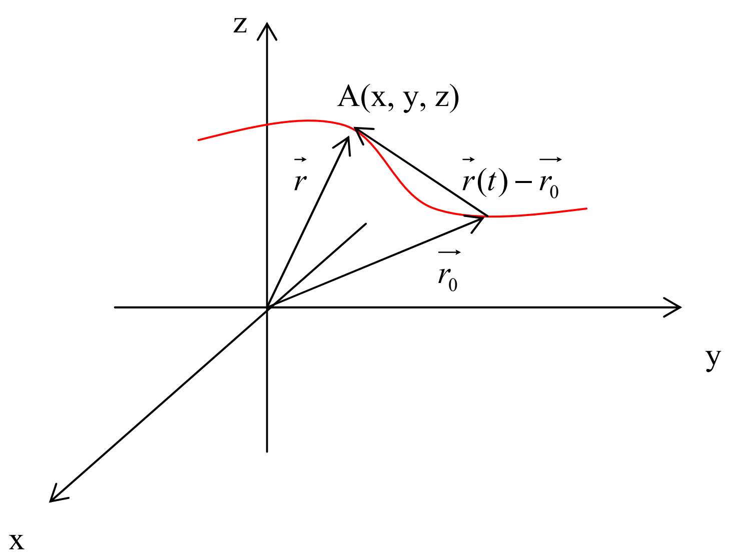
Процесс исследования функции состоит из нескольких этапов. Для наиболее полного представления о поведении функции и характере ее графика необходимо отыскать:

1) Область существования функции.

Это понятие включает в себя и область значений и область определения функции.

2) Точки разрыва. (Если они имеются).
3) Интервалы возрастания и убывания.
4) Точки максимума и минимума.
5) Максимальное и минимальное значение функции на ее области определения.
6) Области выпуклости и вогнутости.
7) Точки перегиба.(Если они имеются).
8) Асимптоты.(Если они имеются).
9) Построение графика.

Векторная функция скалярного аргумента.



Пусть некоторая кривая в пространстве задана параметрически:

$$x = \varphi(t); \quad y = \psi(t); \quad z = f(t);$$

Радиус- вектор произвольной точки кривой: $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} = \varphi(t)\vec{i} + \psi(t)\vec{j} + f(t)\vec{k}$.

Таким образом, радиус- вектор точки кривой может рассматриваться как некоторая векторная функция скалярного аргумента t. При изменении параметра t изменяется величина и направление вектора $\vec{r}$.

Запишем соотношения для некоторой точки t_0:

$$\lim_{t\to t_0}\varphi(t) = \varphi_0; \quad \lim_{t\to t_0}\psi(t) = \psi_0; \quad \lim_{t\to t_0} f(t) = f_0;$$

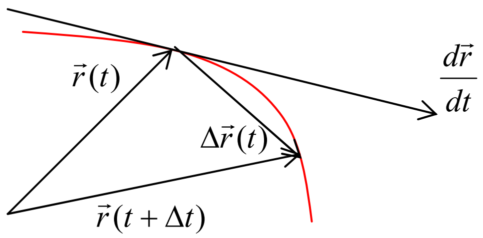
Тогда вектор $\vec{r}_0 = \varphi_0\vec{i} + \psi_0\vec{j} + f_0\vec{k}$ - предел функции $\vec{r}$ (t). $\lim\limits_{t\to t_0}\vec{r}(t) = \vec{r}_0$.

Очевидно, что

$$\lim_{t\to t_0}\left|\vec{r}(t) - \vec{r}_0\right| = \lim_{t\to t_0}\sqrt{\left(\varphi(t)-\varphi_0\right)^2 + \left(\psi(t)-\psi_0\right)^2 + \left(f(t)-f_0\right)^2} = 0 \text{, тогда}$$

$$\lim_{t\to t_0}\left|\vec{r}(t)\right| = \left|\vec{r}_0\right| .$$

Чтобы найти производную векторной функции скалярного аргумента, рассмотрим приращение радиус- вектора при некотором приращении параметра t.



$\vec{r}(t+\Delta t) = \varphi(t+\Delta t)\vec{i} + \psi(t+\Delta t)\vec{j} + f(t+\Delta t)\vec{k}$; $\qquad \Delta\vec{r} = \vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)$;

$$\Delta\vec{r} = (\varphi(t+\Delta t)-\varphi(t))\vec{i} + (\psi(t+\Delta t)-\psi(t))\vec{j} + (f(t+\Delta t)-f(t))\vec{k}$$

$$\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{\varphi(t+\Delta t)-\varphi(t)}{\Delta t}\vec{i} + \frac{\psi(t+\Delta t)-\psi(t)}{\Delta t}\vec{j} + \frac{f(t+\Delta t)-f(t)}{\Delta t}\vec{k}$$

или, если существуют производные $\varphi'(t)$, $\psi'(t)$, $f'(t)$, то

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \varphi'(t)\vec{i} + \psi'(t)\vec{j} + f'(t)\vec{k} = \vec{r}'$$

Это выражение – вектор производная вектора $\vec{r}$.

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k}$$

$$\left|\frac{d\vec{r}}{dt}\right| = \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2 + [f'(t)]^2}$$

Если имеется уравнение кривой:

$$x = \varphi(t); \quad y = \psi(t); \qquad z = f(t);$$

то в произвольной точке кривой $A(x_A, y_A, z_A)$ с радиус- вектором

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} = \varphi(t)\vec{i} + \psi(t)\vec{j} + f(t)\vec{k}$$

можно провести прямую с уравнением $\frac{x - x_A}{m} = \frac{y - y_A}{n} = \frac{z - z_A}{p}$

Т.к. производная $\frac{d\vec{r}}{dt}$ - вектор, направленный по касательной к кривой, то

$$\frac{x - x_A}{\frac{dx_A}{dt}} = \frac{y - y_A}{\frac{dy_A}{dt}} = \frac{z - z_A}{\frac{dz_A}{dt}}.$$

Свойства производной векторной функции скалярного аргумента.

1) $\frac{d}{dt}(\vec{r}_1 + \vec{r}_2 - \vec{r}_3) = \frac{d\vec{r}_1}{dt} + \frac{d\vec{r}_2}{dt} - \frac{d\vec{r}_3}{dt}$

2) $\frac{d(\lambda\vec{r})}{dt} = \lambda\frac{d\vec{r}}{dt}$, где $\lambda = \lambda(t)$ – скалярная функция

3) $\frac{d(\vec{r}_1 \cdot \vec{r}_2)}{dt} = \frac{d\vec{r}_1}{dt} \cdot \vec{r}_2 + \vec{r}_1 \cdot \frac{d\vec{r}_2}{dt}$

4) $\frac{d(\vec{r}_1 \times \vec{r}_2)}{dt} = \frac{d\vec{r}_1}{dt} \times \vec{r}_2 + \vec{r}_1 \times \frac{d\vec{r}_2}{dt}$

Уравнение нормальной плоскости к кривой будет иметь вид:

$$\frac{dx_A}{dt}(x - x_A) + \frac{dy_A}{dt}(y - y_A) + \frac{dz_A}{dt}(z - z_A) = 0$$

Параметрическое задание функции.

Исследование и построение графика кривой, которая задана системой уравнений вида:

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases},$$

производится в общем то аналогично исследованию функции вида $y = f(x)$.

Находим производные:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \varphi'(t) \\ \frac{dy}{dt} = \psi'(t) \end{cases}$$

Теперь можно найти производную $\frac{dy}{dx} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$. Далее находятся значения параметра t, при которых хотя бы одна из производных $\varphi'(t)$ или $\psi'(t)$ равна нулю или не существует. Такие значения параметра t называются **критическими**.

Для каждого интервала $(t_1, t_2), (t_2, t_3), \ldots, (t_{k-1}, t_k)$ находим соответствующий интервал $(x_1, x_2), (x_2, x_3), \ldots, (x_{k-1}, x_k)$ и определяем знак производной $\dfrac{dy}{dx}$ на каждом из полученных интервалов, тем самым определяя промежутки возрастания и убывания функции.

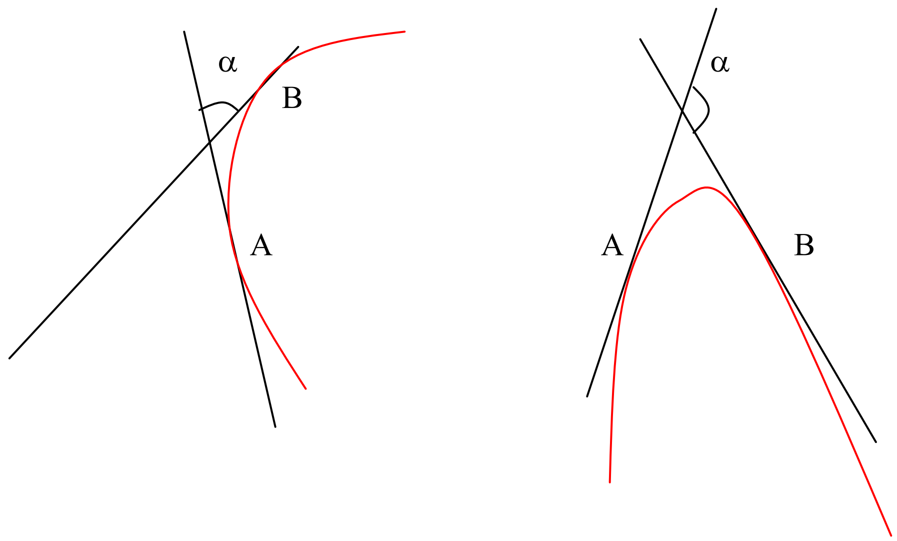
Далее находим вторую производную функции на каждом из интервалов и, определяя ее знак, находим направление выпуклости кривой в каждой точке.

Для нахождения асимптот находим такие значения t, при приближении к которым или x или y стремится к бесконечности, и такие значения t, при приближении к которым и x и y стремится к бесконечности.

В остальном исследование производится аналогичным также, как и исследование функции, заданной непосредственно.

На практике исследование параметрически заданных функций осуществляется, например, при нахождении траектории движущегося объекта, где роль параметра t выполняет время.

Кривизна плоской кривой.



Определение: Угол α поворота касательной к кривой при переходе от точки А к точке В называется **углом смежности**.

Соответственно, более изогнута та кривая, у которой при одинаковой длине больше угол смежности.

Определение: **Средней кривизной $K_{ср}$** дуги $\overset{\smile}{AB}$ называется отношение соответствующего угла смежности α к длине дуги $\overset{\smile}{AB}$.

$$K_{ср} = \frac{\alpha}{\overset{\smile}{AB}}$$

Отметим, что для одной кривой средняя кривизна ее различных частей может быть различной, т.е. данная величина характеризует не кривую целиком, а некоторый ее участок.

Определение: **Кривизной дуги в точке K_A** называется предел средней кривизны при стремлении длины дуги $\overset{\smile}{AB} \to 0$.

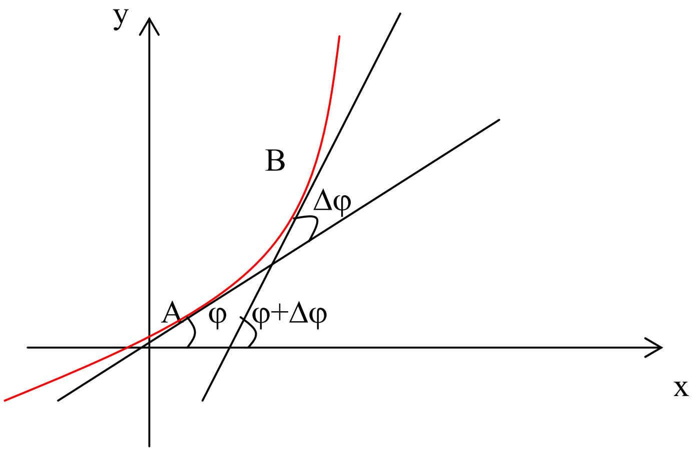
$$K_A = \lim_{A\to B} K_{cp} = \lim_{\overset{\cup}{AB}\to 0} \frac{\alpha}{\overset{\cup}{AB}}$$

Легко видеть, что если обозначить $\overset{\cup}{AB}$ = S, то при условии, что угол α - функция, которая зависит от S и дифференцируема, то

$$K_A = \frac{d\alpha}{dS}$$

<u>Определение:</u> Радиусом кривизны кривой называется величина $R = \left|\frac{1}{K_A}\right|$.

Пусть кривая задана уравнением y = f(x).



$$\text{K}_{\text{cp}} = \frac{\Delta\varphi}{\Delta S}; \qquad \lim_{\Delta S\to 0} K_{cp} = \frac{d\varphi}{dS};$$

Если φ = φ(x) и S = S(x), то $\dfrac{d\varphi}{dS} = \dfrac{\frac{d\varphi}{dx}}{\frac{dS}{dx}}$.

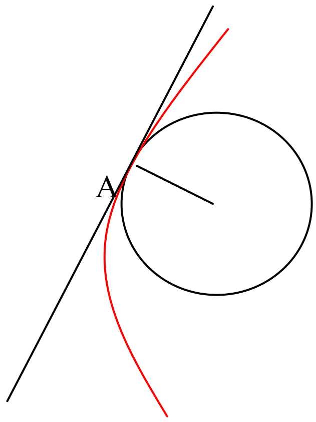
В то же время $\dfrac{dy}{dx} = tg\varphi; \quad \Rightarrow \quad \varphi = arctg\dfrac{dy}{dx} \quad \Rightarrow \quad \dfrac{d\varphi}{dx} = \dfrac{\frac{d^2y}{dx^2}}{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$.

Для дифференциала дуги: $\dfrac{dS}{dx} = \sqrt{1+\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2}$, тогда

$$\frac{d\varphi}{dS} = \frac{\frac{d\varphi}{dx}}{\frac{dS}{dx}} = \frac{\frac{d^2y/dx^2}{1+(dy/dx)^2}}{\sqrt{1+(dy/dx)^2}} = \frac{d^2y/dx^2}{\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2}}$$

Т.к. $|K_A| = \left|\frac{d\varphi}{dS}\right| = \frac{\left|\frac{d^2y}{dx^2}\right|}{\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2}}$. В других обозначениях: $|K_A| = \frac{y''}{\left[1+(y')^2\right]^{3/2}}$.

Рассмотрим кривую, заданную уравнением: y = f(x).



Если построить в точке А кривой нормаль, направленную в сторону выпуклости, то можно отложить отрезок АС = R, где R – радиус кривизны кривой в точке А. Тогда точка С(a, b) называется **центром кривизны** кривой в точке А.

Круг радиуса R с центром в точке С называется **кругом кривизны**.

Очевидно, что в точке А кривизна кривой и кривизна окружности равны.

Можно показать, что координаты центра кривизны могут быть найдены по формулам:

$$a = x - \frac{y'(1+y'^2)}{y''}; \qquad b = y + \frac{1+y'^2}{y''};$$

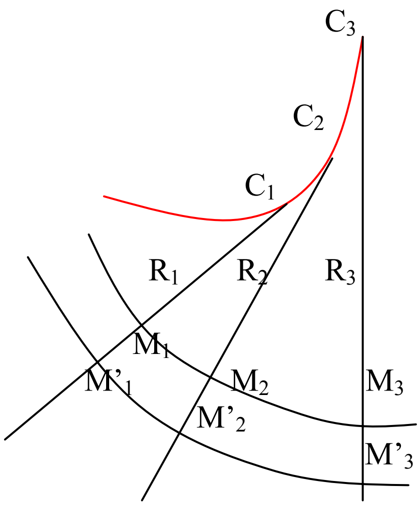
Определение: Совокупность всех центров кривизны кривой линии образуют новую линию, которая называется **эволютой** по отношению к данной кривой. По отношению к эволюте исходная кривая называется **эвольвентой**.

Приведенные выше уравнения, определяющие координаты центров кривизны кривой определяют уравнение эволюты.

Свойства эволюты.

Теорема 1: Нормаль к данной кривой является касательной к ее эволюте.

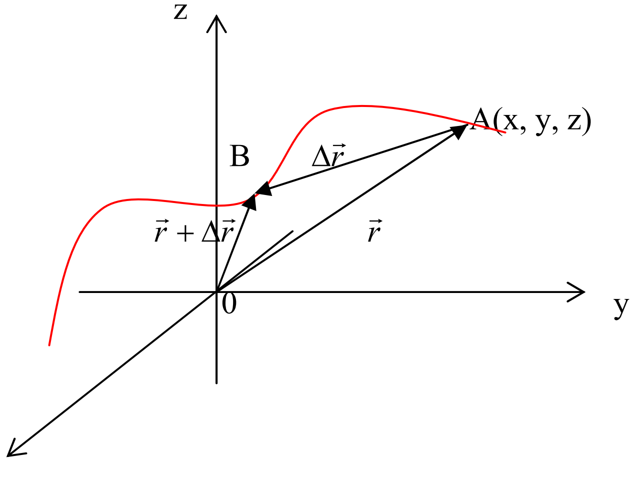
Теорема 2: Модуль разности радиусов кривизны в любых точках кривой равен модулю длины соответствующей эволюты.



$$|R_2 - R_1| = \overset{\cup}{C_1C_2}$$
$$|R_3 - R_2| = \overset{\cup}{C_2C_3}$$

Надо отметить, что какой – либо эволюте соответствует бесконечное число эвольвент. Указанные выше свойства можно проиллюстрировать следующим образом: если на эволюту натянута нить, то эвольвента получается как траекторная линия конца нити при ее сматывании или разматывании при условии, что нить находится в натянутом состоянии.

<u>Кривизна пространственной кривой.</u>



Для произвольной точки А, находящейся на пространственной кривой, координаты могут быть определены как функции некоторой длины дуги S.

$$x = \varphi(S); \qquad y = \psi(S); \qquad z = f(S);$$
$$\vec{r} = \vec{r}(S) = \varphi(S)\vec{i} + \psi(S)\vec{j} + f(S)\vec{k};$$

Приведенное выше уравнение называют **векторным уравнением линии в пространстве.**

<u>Определение:</u> Линия, которую опишет в пространстве переменный радиус – вектор $\vec{r}(S)$ при изменении параметра S, называется **годографом** этого вектора.

$\dfrac{\Delta\vec{r}}{\Delta S} = \dfrac{|\overrightarrow{AB}|}{\overset{\cup}{AB}}$, тогда $\dfrac{d\vec{r}}{dS} = \lim\limits_{\Delta S\to 0}\dfrac{\Delta\vec{r}}{\Delta S}$ - вектор, направленный по касательной к кривой в точке A(x, y, z).

Но т.к. $\lim\limits_{A\to B}\frac{\left|\overrightarrow{AB}\right|}{\overset{\smile}{AB}}=1$, то $\vec{a}=\frac{d\vec{r}}{dS}$ - единичный вектор, направленный по касательной.

Если принять $\vec{r}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$, то $\vec{a}=\frac{dx}{dS}\vec{i}+\frac{dy}{dS}\vec{j}+\frac{dz}{dS}\vec{k}$.

Причем $\sqrt{\left(\frac{dx}{dS}\right)^2+\left(\frac{dy}{dS}\right)^2+\left(\frac{dz}{dS}\right)^2}=1$.

Рассмотрим вторую производную $\frac{d^2\vec{r}}{dS^2}=\frac{d}{dS}\left[\frac{d\vec{r}}{dS}\right]=\frac{d\vec{a}}{dS}$;

Определение: Прямая, имеющая направление вектора $\frac{d\vec{a}}{dS}$ называется **главной нормалью** к кривой. Ее единичный вектор обозначается $\vec{n}$.

$$\frac{d\vec{a}}{dS}=K\cdot\vec{n}\text{, где К – кривизна кривой.}$$

$$\frac{d^2\vec{r}}{dS^2}=\frac{\vec{n}}{R};$$

Кривизна пространственной кривой может быть найдена по формуле:

$$K=\frac{\sqrt{(\vec{r}\,'\times\vec{r}\,'')^2}}{\sqrt{\left[(\vec{r}\,')^2\right]^3}}$$

Возможна и другая запись формулы для кривизны пространственной кривой (она получается из приведенной выше формулы):

$$K=\sqrt{\left(\frac{d^2\vec{r}}{dS^2}\right)^2}=\left|\frac{d^2\vec{r}}{dS^2}\right|=\sqrt{\left(\frac{d^2x}{dS^2}\right)^2+\left(\frac{d^2y}{dS^2}\right)^2+\left(\frac{d^2z}{dS^2}\right)^2}$$

Определение: Вектор $\frac{d^2\vec{r}}{dS^2}$ называется **вектором кривизны.** Величина $\rho=\frac{1}{K}$ называется **радиусом кривизны.**

О формулах Френе.

Формулами Френе называются соотношения:

$$\frac{d\vec{a}}{dS}=\frac{\vec{n}}{R};\qquad \frac{d\vec{b}}{dS}=\frac{\vec{n}}{T};\qquad \frac{d\vec{n}}{dS}=-\frac{\vec{a}}{R}-\frac{\vec{b}}{T};$$

$$\vec{n}=\vec{b}\times\vec{a};$$

Последняя формула получена из двух первых.

В этих формулах:

$\vec{n}$ - единичный вектор главной нормали к кривой,

$\vec{b}$ - единичный вектор бинормали,

R – радиус кривизны кривой $\left\{R = \frac{1}{K}\right\}$,

T – радиус кручения кривой.

Определение: Плоскость, проходящая через касательную и главную нормаль к кривой в точке А называется **соприкасающейся плоскостью.**

Определение: Нормаль к кривой, перпендикулярная к соприкасающейся плоскости, называется **бинормалью.** Ее единичный вектор- $\vec{b}$.

$$\left|\frac{d\vec{b}}{dS}\right| = \frac{1}{T}; \qquad \frac{d\vec{b}}{dS} = \frac{1}{T}\cdot\vec{n};$$

Величина $\frac{1}{T}$ называется **кручением кривой.**

Первообразная функция.

Определение: Функция F(x) называется **первообразной функцией** функции f(x) на отрезке [a, b], если в любой точке этого отрезка верно равенство:

$$F'(x) = f(x).$$

Надо отметить, что первообразных для одной и той же функции может быть бесконечно много. Они будут отличаться друг от друга на некоторое постоянное число.

$$F_1(x) = F_2(x) + C.$$

Неопределенный интеграл.

Определение: **Неопределенным интегралом** функции f(x) называется совокупность первообразных функций, которые определены соотношением:

$$F(x) + C.$$

Записывают: $\int f(x)dx = F(x) + C;$

Условием существования неопределенного интеграла на некотором отрезке является непрерывность функции на этом отрезке.

Свойства:

1. $\left(\int f(x)dx\right)' = (F(x) + C)' = f(x);$
2. $d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx;$
3. $\int dF(x) = F(x) + C;$
4. $\int (u + v - w)dx = \int udx + \int vdx - \int wdx;$ где u, v, w – некоторые функции от x.
1. $\int C\cdot f(x)dx = C\cdot\int f(x)dx;$

Пример: $\int (x^2 - 2\sin x + 1)dx = \int x^2 dx - 2\int \sin xdx + \int dx = \frac{1}{3}x^3 + 2\cos x + x + C;$

Нахождение значения неопределенного интеграла связано главным образом с нахождением первообразной функции. Для некоторых функций это достаточно сложная задача. Ниже будут рассмотрены способы нахождения неопределенных интегралов для основных классов функций – рациональных, иррациональных, тригонометрических, показательных и др.

Для удобства значения неопределенных интегралов большинства элементарных функций собраны в специальные таблицы интегралов, которые бывают иногда весьма объемными. В них включены различные наиболее часто встречающиеся комбинации функций. Но большинство представленных в этих таблицах формул являются следствиями друг друга, поэтому ниже приведем таблицу основных интегралов, с помощью которой можно получить значения неопределенных интегралов различных функций.

Интеграл		Значение	Интеграл		Значение
1	$\int tgx dx$	$-\ln\lvert\cos x\rvert + C$	9	$\int e^x dx$	$e^x + C$
2	$\int ctgx dx$	$\ln\lvert\sin x\rvert + C$	10	$\int \cos x dx$	$\sin x + C$
3	$\int a^x dx$	$\frac{a^x}{\ln a} + C$	11	$\int \sin x dx$	$-\cos x + C$
4	$\int \frac{dx}{a^2 + x^2}$	$\frac{1}{a} arctg \frac{x}{a} + C$	12	$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx$	$tgx + C$
5	$\int \frac{dx}{x^2 - a^2}$	$\frac{1}{2a} \ln\left\lvert\frac{x+a}{x-a}\right\rvert + C$	13	$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx$	$-ctgx + C$
6	$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}}$	$\ln\left\lvert x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right\rvert + C$	14	$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}$	$\arcsin \frac{x}{a} + C$
7	$\int x^\alpha dx$	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \alpha \neq -1$	15	$\int \frac{1}{\cos x} dx$	$\ln\left\lvert tg\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right\rvert + C$
8	$\int \frac{dx}{x}$	$\ln\lvert x\rvert + C$	16	$\int \frac{1}{\sin x} dx$	$\ln\left\lvert tg \frac{x}{2}\right\rvert + C$

Методы интегрирования.

Рассмотрим три основных метода интегрирования.

Непосредственное интегрирование.

Метод непосредственного интегрирования основан на предположении о возможном значении первообразной функции с дальнейшей проверкой этого значения дифференцированием. Вообще, заметим, что дифференцирование является мощным инструментом проверки результатов интегрирования.

Рассмотрим применение этого метода на примере:

Требуется найти значение интеграла $\int \frac{dx}{x}$. На основе известной формулы дифференцирования $(\ln x)' = \frac{1}{x}$ можно сделать вывод, что искомый интеграл равен $\ln x + C$, где С – некоторое постоянное число. Однако, с другой стороны $\left(\ln(-x)\right)' = -\frac{1}{x}\cdot(-1) = \frac{1}{x}$. Таким образом, окончательно можно сделать вывод:

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$$

Заметим, что в отличие от дифференцирования, где для нахождения производной использовались четкие приемы и методы, правила нахождения производной, наконец определение производной, для интегрирования такие методы недоступны. Если при нахождении производной мы пользовались, так сказать, конструктивными методами, которые, базируясь на определенных правилах, приводили к результату, то при нахождении первообразной приходится в основном опираться на знания таблиц производных и первообразных.

Что касается метода непосредственного интегрирования, то он применим только для некоторых весьма ограниченных классов функций. Функций, для которых можно с ходу найти первообразную очень мало. Поэтому в большинстве случаев применяются способы, описанные ниже.

Способ подстановки (замены переменных).

Теорема: Если требуется найти интеграл $\int f(x)dx$, но сложно отыскать первообразную, то с помощью замены x = φ(t) и dx = φ′(t)dt получается:

$$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$$

Доказательство: Продифференцируем предлагаемое равенство:

$$d\int f(x)dx = d\left(\int f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt\right)$$

По рассмотренному выше свойству №2 неопределенного интеграла:

$$f(x)dx = f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)dt$$

что с учетом введенных обозначений и является исходным предположением. Теорема доказана.

Интегрирование по частям.

Способ основан на известной формуле производной произведения:

$$(uv)' = u'v + v'u$$

где u и v – некоторые функции от x.
В дифференциальной форме: d(uv) = udv + vdu

Проинтегрировав, получаем: $\int d(uv) = \int udv + \int vdu$, а в соответствии с приведенными выше свойствами неопределенного интеграла:

$$uv = \int udv + \int vdu \qquad \text{или} \qquad \int udv = uv - \int vdu;$$

Получили формулу интегрирования по частям, которая позволяет находить интегралы многих элементарных функций.

Интегрирование элементарных дробей.

Определение: Элементарными называются дроби следующих четырех типов:

I. $\dfrac{1}{ax+b}$; III. $\dfrac{Mx+N}{ax^2+bx+c}$;

II. $\dfrac{1}{(ax+b)^m}$; IV. $\dfrac{Mx+N}{(ax^2+bx+c)^n}$

m, n – натуральные числа (m ≥ 2, n ≥ 2) и $b^2 - 4ac < 0$.

Первые два типа интегралов от элементарных дробей довольно просто приводятся к табличным подстановкой t = ax + b.

I. $$\int \frac{dx}{ax+b} = \frac{1}{a}\int \frac{dt}{t} = \frac{1}{a}\ln|t| + C = \frac{1}{a}\ln|ax+b| + C.$$

II. $$\int \frac{dx}{(ax+b)^m} = \frac{1}{a}\int \frac{dt}{t^m} = -\frac{1}{a(m-1)t^{m-1}} + C = -\frac{1}{a(m-1)(ax+b)^{m-1}} + C;$$

Рассмотрим метод интегрирования элементарных дробей вида III.
Интеграл дроби вида III может быть представлен в виде:

$$\int \frac{Ax+B}{x^2+px+q}dx = \int \frac{\frac{A}{2}(2x+p)+\left(B-\frac{Ap}{2}\right)}{x^2+px+q}dx = \frac{A}{2}\int \frac{2x+p}{x^2+px+q}dx + \left(B-\frac{Ap}{2}\right)\int \frac{dx}{x^2+px+q} =$$
$$= \frac{A}{2}\ln\left|x^2+px+q\right| + \left(B-\frac{Ap}{2}\right)\int \frac{dx}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+\left(q-\frac{p^2}{4}\right)} = \frac{A}{2}\ln\left|x^2+px+q\right| + \frac{2B-Ap}{\sqrt{4q-p^2}}\cdot$$
$$\cdot arctg\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}} + C$$

Здесь в общем виде показано приведение интеграла дроби вида III к двум табличным интегралам.

Рассмотрим теперь методы интегрирования простейших дробей IV типа.

Сначала рассмотрим частный случай при M = 0, N = 1.

Тогда интеграл вида $\int \frac{dx}{(ax^2+bx+c)^n}$ можно путем выделения в знаменателе полного квадрата представить в виде $\int \frac{du}{(u^2+s)^n}$. Сделаем следующее преобразование:

$$\int \frac{du}{(u^2+s)^n} = \frac{1}{s}\int \frac{s+u^2-u^2}{(u^2+s)^n}du = \frac{1}{s}\int \frac{du}{(u^2+s)^{n-1}} - \frac{1}{s}\int \frac{u^2du}{(u^2+s)^n}.$$

Второй интеграл, входящий в это равенство, будем брать по частям.

Обозначим: $$\left\{\begin{aligned} & dv_1 = \frac{udu}{(u^2+s)^n}; \quad u_1 = u; \quad du_1 = du; \\ & v_1 = \int \frac{udu}{(u^2+s)^n} = -\frac{1}{2(n-1)(u^2+s)^{n-1}}; \end{aligned}\right\}$$

$$\int \frac{u^2 du}{(u^2+s)^n} = -\frac{u}{(2n-2)(u^2+s)^{n-1}} + \frac{1}{2n-2}\int \frac{du}{(u^2+s)^{n-1}};$$

Для исходного интеграла получаем:

$$\int \frac{du}{(u^2+s)^n} = \frac{1}{s}\int \frac{du}{(u^2+s)^{n-1}} + \frac{u}{s(2n-2)(u^2+s)^{n-1}} - \frac{1}{s(2n-2)}\int \frac{du}{(u^2+s)^{n-1}}$$

$$\int \frac{du}{(u^2+s)^n} = \frac{u}{s(2n-2)(u^2+s)^{n-1}} + \frac{2n-3}{s(2n-2)}\int \frac{du}{(u^2+s)^{n-1}}.$$

Полученная формула называется **рекуррентной.** Если применить ее n-1 раз, то получится табличный интеграл $\int \frac{du}{u^2+s}$.

Вернемся теперь к интегралу от элементарной дроби вида IV в общем случае.

$$\int \frac{Mx+N}{(ax^2+bx+c)^n}dx = (4a)^n \int \frac{Mx+N}{\left[(2ax+b)^2+(4ac-b^2)\right]^n}dx = \left\{\begin{matrix} u = 2ax+b; & du = 2adx; \\ x = \frac{u-b}{2a}; & s = 4ac-b^2; \end{matrix}\right\} =$$

$$= \frac{(4a)^n}{2a}\int \frac{\frac{M(u-b)}{2a}+N}{(u^2+s)^n}du = \frac{(4a)^n}{2a}\left[\frac{M}{2a}\int \frac{udu}{(u^2+s)^n} + \frac{2aN-Mb}{2a}\int \frac{du}{(u^2+s)^n}\right]$$

В полученном равенстве первый интеграл с помощью подстановки $t = u^2 + s$ приводится к табличному $\int \frac{dt}{t^n}$, а ко второму интегралу применяется рассмотренная выше рекуррентная формула.

Интегрирование рациональных функций.

Интегрирование рациональных дробей.

Для того, чтобы проинтегрировать рациональную дробь необходимо разложить ее на элементарные дроби.

Теорема: Если $R(x) = \frac{Q(x)}{P(x)}$ - правильная рациональная дробь, знаменатель P(x) которой представлен в виде произведения линейных и квадратичных множителей (отметим, что любой многочлен с действительными коэффициентами может быть представлен в таком виде: $P(x) = (x-a)^{\alpha}\ldots(x-b)^{\beta}(x^2+px+q)^{\lambda}\ldots(x^2+rx+s)^{\mu}$), то эта дробь может быть разложена на элементарные по следующей схеме:

$$\frac{Q(x)}{P(x)} = \frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \ldots + \frac{A_\alpha}{(x-a)^\alpha} + \ldots + \frac{B_1}{(x-b)} + \frac{B_2}{(x-b)^2} + \ldots + \frac{B_\beta}{(x-b)^\beta} + \frac{M_1x+N_1}{x^2+px+q} +$$

$$+ \frac{M_2x+N_2}{(x^2+px+q)^2} + \ldots + \frac{M_\lambda x+N_\lambda}{(x^2+px+q)^\lambda} + \ldots + \frac{R_1x+S_1}{x^2+rx+s} + \frac{R_2x+S_2}{(x^2+rx+s)^2} + \ldots + \frac{R_\mu x+S_\mu}{(x^2+rx+s)^\mu}$$

где A_i, B_i, M_i, N_i, R_i, S_i – некоторые постоянные величины.

При интегрировании рациональных дробей прибегают к разложению исходной дроби на элементарные. Для нахождения величин A_i, B_i, M_i, N_i, R_i, S_i применяют так называемый **метод неопределенных коэффициентов**, суть которого состоит в том, что для того, чтобы два многочлена были тождественно равны, необходимо и достаточно, чтобы были равны коэффициенты при одинаковых степенях x.

Интегрирование некоторых тригонометрических функций.

Интегралов от тригонометрических функций может быть бесконечно много. Большинство из этих интегралов вообще нельзя вычислить аналитически, поэтому рассмотрим некоторые главнейшие типы функций, которые могут быть проинтегрированы всегда.

Интеграл вида $\int R(\sin x, \cos x)dx$.

Здесь R – обозначение некоторой рациональной функции от переменных sinx и cosx. Интегралы этого вида вычисляются с помощью подстановки $t = tg\dfrac{x}{2}$. Эта подстановка позволяет преобразовать тригонометрическую функцию в рациональную.

$$\sin x = \frac{2tg\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2}, \qquad \cos x = \frac{1-tg^2\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2};$$

Тогда $x = 2arctgt;$ $\quad dx = \dfrac{2dt}{1+t^2};$

Таким образом: $\int R(\sin x, \cos x)dx = \int R\left(\dfrac{2t}{1+t^2}, \dfrac{1-t^2}{1+t^2}\right)\dfrac{2}{1+t^2}dt = \int r(t)dt.$

Описанное выше преобразование называется **универсальной тригонометрической подстановкой.**

Несомненным достоинством этой подстановки является то, что с ее помощью всегда можно преобразовать тригонометрическую функцию в рациональную и вычислить соответствующий интеграл. К недостаткам можно отнести то, что при преобразовании может получиться достаточно сложная рациональная функция, интегрирование которой займет много времени и сил.

Однако при невозможности применить более рациональную замену переменной этот метод является единственно результативным.

Интеграл вида $\int R(\sin x, \cos x)dx$ *если функция R является нечетной относительно cosx.*

Несмотря на возможность вычисления такого интеграла с помощью универсальной тригонометрической подстановки, рациональнее применить подстановку $t = \sin x$.

$$\int R(\sin x, \cos x)dx = \int \frac{R(\sin x, \cos x)}{\cos x}\cos x dx$$

Функция $\dfrac{R(\sin x, \cos x)}{\cos x}$ может содержать cosx только в четных степенях, а следовательно, может быть преобразована в рациональную функцию относительно sinx.

$\int R(\sin x, \cos x)dx = \int r(\sin x)\cos x dx = \int r(t)dt.$

Вообще говоря, для применения этого метода необходима только нечетность функции относительно косинуса, а степень синуса, входящего в функцию может быть любой, как целой, так и дробной.

Интеграл вида $\int R(\sin x, \cos x)dx$ *если*

функция R является нечетной относительно sinx.

По аналогии с рассмотренным выше случаем делается подстановка *t = cosx.*

Тогда $\int R(\sin x, \cos x)dx = \int r(\cos x)\sin x dx = -\int r(t)dt.$

Интеграл вида $\int R(\sin x, \cos x)dx$

функция R четная относительно sinx и cosx.

Для преобразования функции R в рациональную используется подстановка *t = tgx.*

Тогда $\int R(\sin x, \cos x)dx = \int r(t)dt$

Интеграл произведения синусов и косинусов различных аргументов.

В зависимости от типа произведения применятся одна из трех формул:

$$\int \cos mx \cos nx dx = \int \frac{1}{2}[\cos(m+n)x + \cos(m-n)x]dx = \frac{1}{2}\left[\frac{\sin(m+n)x}{m+n} + \frac{\sin(m-n)x}{m-n}\right]$$

$$\int \sin mx \cos nx dx = \int \frac{1}{2}[\sin(m+n)x + \sin(m-n)x]dx = \frac{1}{2}\left[-\frac{\cos(m+n)x}{m+n} - \frac{\cos(m-n)x}{m-n}\right]$$

$$\int \sin mx \sin nx dx = \int \frac{1}{2}[-\cos(m+n)x + \cos(m-n)x]dx = \frac{1}{2}\left[-\frac{\sin(m+n)}{m+n} + \frac{\sin(m-n)}{m-n}\right]$$

Интегрирование некоторых иррациональных функций.

Далеко не каждая иррациональная функция может иметь интеграл, выраженный элементарными функциями. Для нахождения интеграла от иррациональной функции следует применить подстановку, которая позволит преобразовать функцию в рациональную, интеграл от которой может быть найден как известно всегда.

Рассмотрим некоторые приемы для интегрирования различных типов иррациональных функций.

Интеграл вида $\int R\left(x,\sqrt[n]{\dfrac{ax+b}{cx+d}}\right)dx$ *где n- натуральное число.*

С помощью подстановки $\sqrt[n]{\dfrac{ax+b}{cx+d}}=t$ функция рационализируется.

$$\frac{ax+b}{cx+d}=t^n; \qquad x=\frac{t^n-b}{a-ct^n}; \qquad dx=\left(\frac{t^n-b}{a-ct^n}\right)' dt;$$

Тогда $\int R\left(x,\sqrt[n]{\dfrac{ax+b}{cx+d}}\right)dx=\int R\left(\dfrac{t^n-b}{a-ct^n},t\right)\left(\dfrac{t^n-b}{a-ct^n}\right)' dt=\int r(t)dt.$

Если в состав иррациональной функции входят корни различных степеней, то в качестве новой переменной рационально взять корень степени, равной наименьшему общему кратному степеней корней, входящих в выражение.

Интегрирование биноминальных дифференциалов.

<u>Определение:</u> Биноминальным дифференциалом называется выражение

$$x^m(a+bx^n)^p dx$$

где *m, n,* и *p* – рациональные числа.

Как было доказано академиком Чебышевым П.Л. (1821-1894), интеграл от биноминального дифференциала может быть выражен через элементарные функции только в следующих трех случаях:

1) Если *p* – целое число, то интеграл рационализируется с помощью подстановки $t=\sqrt[\lambda]{x}$, где λ - общий знаменатель *m* и *n*.

2) Если $\dfrac{m+1}{n}$ - целое число, то интеграл рационализируется подстановкой $t=\sqrt[s]{a+bx^n}$, где *s* – знаменатель числа *p*.

3) Если $\dfrac{m+1}{n}+p$ - целое число, то используется подстановка $t=\sqrt[s]{\dfrac{a+bx^n}{x^n}}$, где *s* – знаменатель числа *p*.

Однако, наибольшее практическое значение имеют интегралы от функций, рациональных относительно аргумента и квадратного корня из квадратного трехчлена.

На рассмотрении этих интегралов остановимся более подробно.

Интегралы вида $\int R\left(x,\sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx$.

Существует несколько способов интегрирования такого рода функций. В зависимости от вида выражения, стоящего под знаком радикала, предпочтительно применять тот или иной способ.

Как известно, квадратный трехчлен путем выделения полного квадрата может быть приведен к виду:

$$\pm u^2 \pm m^2.$$

Таким образом, интеграл приводится к одному из трех типов:

1) $\int R(u, \sqrt{m^2 - u^2})du;$

2) $\int R(u, \sqrt{m^2 + u^2})du;$

3) $\int R(u, \sqrt{u^2 - m^2})du;$

1 способ. Тригонометрическая подстановка.

<u>Теорема:</u> Интеграл вида $\int R(u, \sqrt{m^2 - u^2})du$ подстановкой $u = m\sin t$ или $u = m\cos t$ сводится к интегралу от рациональной функции относительно sint или cost.

<u>Теорема:</u> Интеграл вида $\int R(u, \sqrt{m^2 + u^2})du$ подстановкой $u = mtgt$ или $u = mctgt$ сводится к интегралу от рациональной функции относительно sint и cost.

<u>Теорема:</u> Интеграл вида $\int R(u, \sqrt{u^2 - m^2})du$ подстановкой $u = \frac{1}{\sin t}$ или $u = \frac{1}{\cos t}$ сводится к интегралу от рациональной функции относительно sint или cost.

2 способ. Подстановки Эйлера. (1707-1783)

1) Если a>0, то интеграл вида $\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c})dx$ рационализируется подстановкой $\sqrt{ax^2 + bx + c} = t \pm x\sqrt{a}$.

2) Если a<0 и c>0, то интеграл вида $\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c})dx$ рационализируется подстановкой $\sqrt{ax^2 + bx + c} = tx \pm \sqrt{c}$.

3) Если a<0 , а подкоренное выражение раскладывается на действительные множители a(x – x_1)(x – x_2), то интеграл вида $\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c})dx$ рационализируется подстановкой $\sqrt{ax^2 + bx + c} = t(x - x_1)$.

Отметим, что подстановки Эйлера неудобны для практического использования, т.к. даже при несложных подынтегральных функциях приводят к весьма громоздким вычислениям. Эти подстановки представляют скорее теоретический интерес.

3 способ. Метод неопределенных коэффициентов.

Рассмотрим интегралы следующих трех типов:

$$I.\int\frac{P(x)dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}};\qquad II.\int P(x)\sqrt{ax^2+bx+c}dx;\qquad III.\int\frac{dx}{(x-\alpha)^n\sqrt{ax^2+bx+c}};$$

где P(x) – многочлен, n – натуральное число.

Причем интегралы II и III типов могут быть легко приведены к виду интеграла I типа.

Далее делается следующее преобразование:

$$\int\frac{P(x)dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}=Q(x)\sqrt{ax^2+bx+c}+\lambda\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}};$$

в этом выражении Q(x)- некоторый многочлен, степень которого ниже степени многочлена P(x), а λ - некоторая постоянная величина.

Для нахождения неопределенных коэффициентов многочлена Q(x), степень которого ниже степени многочлена P(x), дифференцируют обе части полученного выражения, затем умножают на $\sqrt{ax^2+bx+c}$ и, сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x, определяют λ и коэффициенты многочлена Q(x).

Данный метод выгодно применять, если степень многочлена P(x) больше единицы. В противном случае можно успешно использовать методы интегрирования рациональных дробей, рассмотренные выше, т.к. линейная функция является производной подкоренного выражения.

С учетом того, что функции arcsin и arccos связаны соотношением $\arcsin\frac{1}{x}=\frac{\pi}{2}-\arccos\frac{1}{x}$, а постоянная интегрирования С – произвольное число, ответы, полученные различными методами, совпадают.

Как видно, при интегрировании иррациональных функций возможно применять различные рассмотренные выше приемы. Выбор метода интегрирования обуславливается в основном наибольшим удобством, очевидностью применения того или иного метода, а также сложностью вычислений и преобразований.

Несколько примеров интегралов, не выражающихся через элементарные функции.

К таким интегралам относится интеграл вида $\int R(x,\sqrt{P(x)})dx$, где P(x)- многочлен степени выше второй. Эти интегралы называются **эллиптическими.**

Если степень многочлена P(x) выше четвертой, то интеграл называется **ультраэллиптическим.**

Если все – таки интеграл такого вида выражается через элементарные функции, то он называется **псевдоэллиптическим.**

Не могут быть выражены через элементарные функции следующие интегралы:

1) $\int e^{-x^2}dx$ - интеграл Пуассона (Симеон Дени Пуассон – французский математик (1781-1840))
2) $\int\sin x^2dx;\ \int\cos x^2dx$ - интегралы Френеля (Жан Огюстен Френель – французский ученый (1788-1827) - теория волновой оптики и др.)

3) $\int \frac{dx}{\ln x}$ - интегральный логарифм

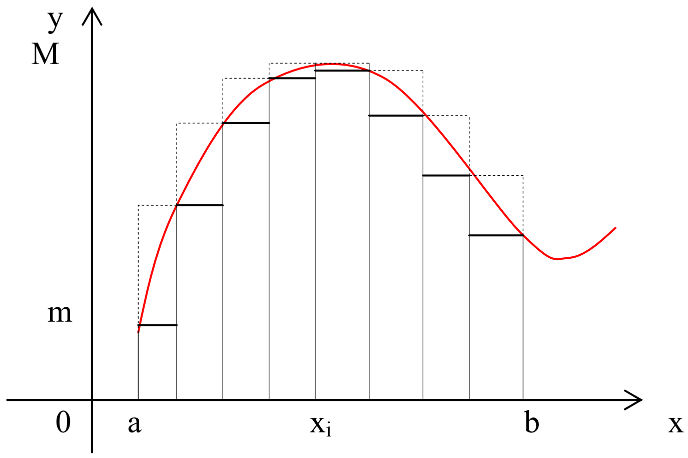
4) $\int \frac{e^x}{x} dx$ - приводится к интегральному логарифму

5) $\int \frac{\sin x}{x} dx$ - интегральный синус

6) $\int \frac{\cos x}{x} dx$ - интегральный косинус

Определенный интеграл.

Пусть на отрезке [a, b] задана непрерывная функция f(x).



Обозначим m и M наименьшее и наибольшее значение функции на отрезке [a, b]
Разобьем отрезок [a, b] на части (не обязательно одинаковые) n точками.

$$x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n$$

Тогда $x_1 - x_0 = \Delta x_1$, $x_2 - x_1 = \Delta x_2$, … ,$x_n - x_{n-1} = \Delta x_n$;
На каждом из полученных отрезков найдем наименьшее и наибольшее значение функции.

$[x_0, x_1] \to m_1, M_1$; $[x_1, x_2] \to m_2, M_2$; … $[x_{n-1}, x_n] \to m_n, M_n$.

Составим суммы:

$$\underline{S}_n = m_1\Delta x_1 + m_2\Delta x_2 + \ldots + m_n\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i$$

$$\overline{S}_n = M_1\Delta x_1 + M_2\Delta x_2 + \ldots + M_n\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i$$

Сумма $\underline{S}$ называется **нижней интегральной суммой**, а сумма $\overline{S}$ – **верхней интегральной суммой**.
Т.к. $m_i \le M_i$, то $\underline{S}_n \le \overline{S}_n$, а $m(b - a) \le \underline{S}_n \le \overline{S}_n \le M(b - a)$

Внутри каждого отрезка выберем некоторую точку ε.

$$x_0 < \varepsilon_1 < x_1, \quad x_1 < \varepsilon < x_2, \ \ldots \ , x_{n-1} < \varepsilon < x_n.$$

Найдем значения функции в этих точках и составим выражение, которое называется **интегральной суммой** для функции f(x) на отрезке [a, b].

$$S_n = f(\varepsilon_1)\Delta x_1 + f(\varepsilon_2)\Delta x_2 + \ldots + f(\varepsilon_n)\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} f(\varepsilon_i)\Delta x_i$$

Тогда можно записать: $m_i\Delta x_i \le f(\varepsilon_i)\Delta x_i \le M_i\Delta x_i$

Следовательно, $\sum_{i=1}^{n} m_i\Delta x_i \le \sum_{i=1}^{n} f(\varepsilon_i)\Delta x_i \le \sum_{i=1}^{n} M_i\Delta x_i$

$$\underline{S_n} \le S_n \le \overline{S_n}$$

Геометрически это представляется следующим образом: график функции f(x) ограничен сверху описанной ломаной линией, а снизу – вписанной ломаной.

Обозначим $\max\Delta x_i$ – наибольший отрезок разбиения, а $\min\Delta x_i$ – наименьший. Если $\max\Delta x_i \to 0$, то число отрезков разбиения отрезка [a, b] стремится к бесконечности.

Если $S_n = \sum_{i=1}^{n} f(\varepsilon_i)\Delta x_i$, то $\lim_{\max\Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\varepsilon_i)\Delta x_i = S.$

Определение: Если при любых разбиениях отрезка [a, b] таких, что $\max\Delta x_i \to 0$ и произвольном выборе точек ε_i интегральная сумма $S_n = \sum_{i=1}^{n} f(\varepsilon_i)\Delta x_i$ стремится к пределу S, который называется определенным интегралом от f(x) на отрезке [a, b].

Обозначение : $\int_a^b f(x)dx.$

a – нижний предел, b – верхний предел, x – переменная интегрирования, [a, b] – отрезок интегрирования.

Определение: Если для функции f(x) существует предел $\lim_{\max\Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\varepsilon_i)\Delta x_i = \int_a^b f(x)dx$, то функция называется **интегрируемой** на отрезке [a, b].

Также верны утверждения: $\lim_{\max\Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} m_i\Delta x_i = \int_a^b f(x)dx$

$$\lim_{\max\Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} M_i\Delta x_i = \int_a^b f(x)dx$$

Теорема: Если функция f(x) непрерывна на отрезке [a, b], то она интегрируема на этом отрезке.

Свойства определенного интеграла.

1) $\int\limits_a^b Af(x)dx = A\int\limits_a^b f(x)dx;$

2) $\int\limits_a^b (f_1(x) \pm f_2(x))dx = \int\limits_a^b f_1(x)dx \pm \int\limits_a^b f_2(x)dx$

3) $\int\limits_a^a f(x)dx = 0$

4) Если f(x) ≤ φ(x) на отрезке [a, b] a < b, то $\int\limits_a^b f(x)dx \le \int\limits_a^b \varphi(x)dx$

5) Если m и M – соответственно наименьшее и наибольшее значения функции f(x) на отрезке [a, b], то:

$$m(b-a) \le \int\limits_a^b f(x)dx \le M(b-a)$$

6) **Теорема о среднем.** Если функция f(x) непрерывна на отрезке [a, b], то на этом отрезке существует точка ε такая, что

$$\int\limits_a^b f(x)dx = (b-a)f(\varepsilon)$$

Доказательство: В соответствии со свойством 5:

$$m \le \frac{1}{b-a}\int\limits_a^b f(x)dx \le M$$

т.к. функция f(x) непрерывна на отрезке [a, b], то она принимает на этом отрезке все значения от m до M. Другими словами, существует такое число ε∈ [a, b], что если $\frac{1}{b-a}\int\limits_a^b f(x)dx = \mu$ и μ = f(ε), а a ≤ ε ≤ b, тогда $\int\limits_a^b f(x)dx = (b-a)f(\varepsilon)$. Теорема доказана.

7) Для произвольных чисел a, b, c справедливо равенство:

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^c f(x)dx + \int\limits_c^b f(x)dx$$

Разумеется, это равенство выполняется, если существует каждый из входящих в него интегралов.

8) $\int\limits_a^b f(x)dx = -\int\limits_b^a f(x)dx$

Обобщенная теорема о среднем. Если функции f(x) и φ(x) непрерывны на отрезке [a, b], и функция φ(x) знакопостоянна на нем, то на этом отрезке существует точка ε, такая, что

$$\int\limits_a^b f(x)\varphi(x)dx = f(\varepsilon)\int\limits_a^b \varphi(x)dx$$

Вычисление определенного интеграла.

Пусть в интеграле $\int_a^b f(x)dx$ нижний предел a = const, а верхний предел b изменяется. Очевидно, что если изменяется верхний предел, то изменяется и значение интеграла.

Обозначим $\int_a^x f(t)dt$ = Ф(x). Найдем производную функции Ф(x) по переменному верхнему пределу x.

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = f(x)$$

Аналогичную теорему можно доказать для случая переменного нижнего предела.

Теорема: Для всякой функции f(x), непрерывной на отрезке [a, b], существует на этом отрезке первообразная, а значит, существует неопределенный интеграл.

Теорема: (Теорема Ньютона – Лейбница)

Если функция F(x) – какая- либо первообразная от непрерывной функции f(x), то

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

это выражение известно под названием формулы Ньютона – Лейбница.

Доказательство: Пусть F(x) – первообразная функции f(x). Тогда в соответствии с приведенной выше теоремой, функция $\int_a^x f(t)dt$ - первообразная функция от f(x). Но т.к. функция может иметь бесконечно много первообразных, которые будут отличаться друг от друга только на какое – то постоянное число C, то

$$\int_a^x f(t)dt = F(x) + C$$

при соответствующем выборе C это равенство справедливо для любого x, т.е. при x = a:

$$\int_a^a f(t)dt = F(a) + C$$

$$0 = F(a) + C$$

$$C = -F(a)$$

Тогда $\int_a^x f(t)dt = F(x) - F(a)$.

А при x = b: $\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$

Заменив переменную t на переменную x, получаем формулу Ньютона – Лейбница:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Теорема доказана.

Иногда применяют обозначение $F(b) - F(a) = F(x)\Big|_a^b$.

Формула Ньютона – Лейбница представляет собой общий подход к нахождению определенных интегралов.

Что касается приемов вычисления определенных интегралов, то они практически ничем не отличаются от всех тех приемов и методов, которые были рассмотрены выше при нахождении неопределенных интегралов.

Точно так же применяются методы подстановки (замены переменной), метод интегрирования по частям, те же приемы нахождения первообразных для тригонометрических, иррациональных и трансцендентных функций. Особенностью является только то, что при применении этих приемов надо распространять преобразование не только на подинтегральную функцию, но и на пределы интегрирования. Заменяя переменную интегрирования, не забыть изменить соответственно пределы интегрирования.

Замена переменных.

Пусть задан интеграл $\int_a^b f(x)dx$, где f(x) – непрерывная функция на отрезке [a, b].

Введем новую переменную в соответствии с формулой $x = \varphi(t)$.

Тогда если

1) $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$
2) $\varphi(t)$ и $\varphi'(t)$ непрерывны на отрезке $[\alpha, \beta]$
3) $f(\varphi(t))$ определена на отрезке $[\alpha, \beta]$, то

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt$$

Тогда $\int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt = F[\varphi(t)]\Big|_\alpha^\beta = F[\varphi(\beta)] - F[\varphi(\alpha)] = F(b) - F(a)$

Интегрирование по частям.

Если функции $u = \varphi(x)$ и $v = \psi(x)$ непрерывны на отрезке [a, b], а также непрерывны на этом отрезке их производные, то справедлива формула интегрирования по частям:

$$\int_a^b udv = uv\Big|_a^b - \int_a^b vdu.$$

Вывод этой формулы абсолютно аналогичен выводу формулы интегрирования по частям для неопределенного интеграла, который был весьма подробно рассмотрен выше, поэтому здесь приводить его нет смысла.

Несобственные интегралы.

Пусть функция f(x) определена и непрерывна на интервале $[a, \infty)$. Тогда она непрерывна на любом отрезке [a, b].

Определение: Если существует конечный предел $\lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x)dx$, то этот предел называется **несобственным интегралом** от функции f(x) на интервале $[a, \infty)$.

Обозначение: $\lim\limits_{b\to\infty}\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^\infty f(x)dx$

Если этот предел **существует** и **конечен**, то говорят, что несобственный интеграл **сходится**.

Если предел не существует или бесконечен, то несобственный интеграл расходится.

Аналогичные рассуждения можно привести для несобственных интегралов вида:

$$\int\limits_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{a\to-\infty}\int\limits_a^b f(x)dx$$

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int\limits_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int\limits_c^\infty f(x)dx$$

Конечно, эти утверждения справедливы, если входящие в них интегралы существуют.

<u>Теорема:</u> Если для всех x (x ≥ a) выполняется условие $0 \le f(x) \le \varphi(x)$ и интеграл $\int\limits_a^\infty \varphi(x)dx$ сходится, то $\int\limits_a^\infty f(x)dx$ тоже сходится и $\int\limits_a^\infty \varphi(x)dx \ge \int\limits_a^\infty f(x)dx$.

<u>Теорема:</u> Если для всех x (x ≥ a) выполняется условие $0 \le \varphi(x) \le f(x)$ и интеграл $\int\limits_a^\infty \varphi(x)dx$ расходится, то $\int\limits_a^\infty f(x)dx$ тоже расходится.

<u>Теорема:</u> Если $\int\limits_a^\infty |f(x)|dx$ сходится, то сходится и интеграл $\int\limits_a^\infty f(x)dx$.

В этом случае интеграл $\int\limits_a^\infty f(x)dx$ называется **абсолютно сходящимся**.

<u>Интеграл от разрывной функции.</u>

Если в точке x = c функция либо неопределена, либо разрывна, то

$$\int\limits_a^c f(x)dx = \lim_{b\to c-0}\int\limits_a^b f(x)dx$$

Если интеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$ существует, то интеграл $\int\limits_a^c f(x)dx$ - сходится, если интеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$ не существует, то $\int\limits_a^c f(x)dx$ - расходится.

Если в точке x = a функция терпит разрыв, то $\int\limits_a^c f(x)dx = \lim\limits_{b\to a+0}\int\limits_b^c f(x)dx$.

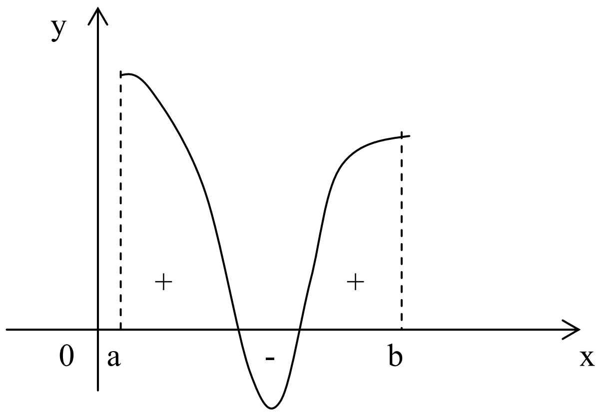
Если функция f(x) имеет разрыв в точке b на промежутке [a, c], то

$$\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx$$

Таких точек внутри отрезка может быть несколько.
Если сходятся все интегралы, входящие в сумму, то сходится и суммарный интеграл.

Геометрические приложения определенного интеграла.

Вычисление площадей плоских фигур.

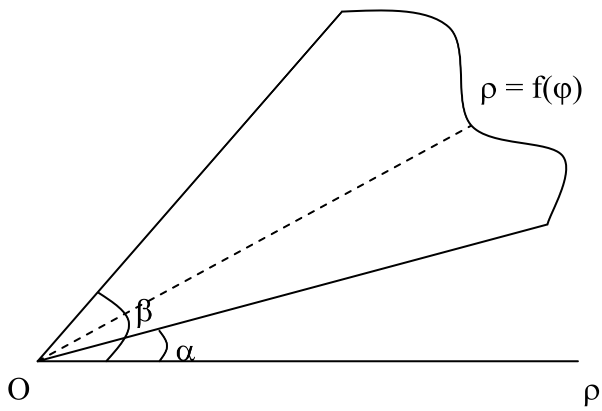


Известно, что определенный интеграл на отрезке представляет собой площадь криволинейной трапеции, ограниченной графиком функции f(x). Если график расположен ниже оси Ох, т.е. $f(x) < 0$, то площадь имеет знак "-", если график расположен выше оси Ох, т.е. $f(x) > 0$, то площадь имеет знак "+".

Для нахождения суммарной площади используется формула $S = \left|\int_a^b f(x)dx\right|$.

Площадь фигуры, ограниченной некоторыми линиями может быть найдена с помощью определенных интегралов, если известны уравнения этих линий.

Нахождение площади криволинейного сектора.

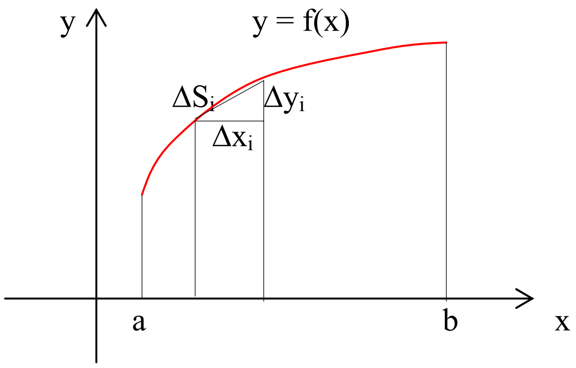


Для нахождения площади криволинейного сектора введем полярную систему координат. Уравнение кривой, ограничивающей сектор в этой системе координат, имеет вид $\rho = f(\varphi)$, где ρ - длина радиус – вектора, соединяющего полюс с произвольной точкой кривой, а φ - угол наклона этого радиус – вектора к полярной оси.

Площадь криволинейного сектора может быть найдена по формуле

$$S = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} f^2(\varphi)d\varphi$$

<u>Вычисление длины дуги кривой.</u>



Длина ломаной линии, которая соответствует дуге, может быть найдена как $S_n = \sum_{i=1}^{n} \Delta S_i$.

Тогда длина дуги равна $S = \lim_{\max \Delta S_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} \Delta S_i$.

Из геометрических соображений: $\Delta S_i = \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}\right)^2} \cdot \Delta x_i$

В то же время $\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i} = \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{\Delta x_i}$

Тогда можно показать, что

$$S = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} \Delta S_i = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx$$

Т.е. $S = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx$

Если уравнение кривой задано параметрически, то с учетом правил вычисления производной параметрически заданной функции, получаем

$$S = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2}\, dt,$$

где x = φ(t) и y = ψ(t).

Если задана **пространственная кривая**, и x = φ(t), y = ψ(t) и z = Z(t), то

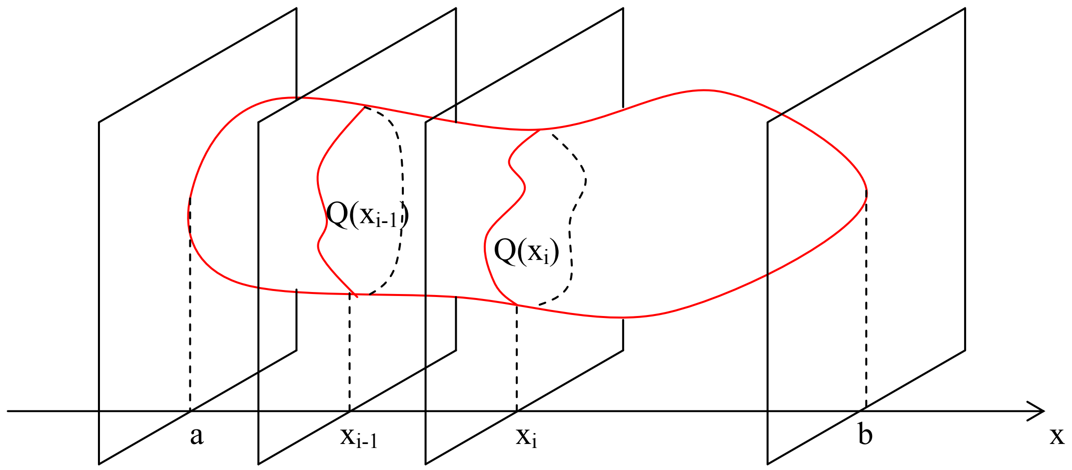
$$S = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2 + [Z'(t)]^2}\, dt$$

Если кривая задана в **полярных координатах**, то

$$S = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\rho'^2 + \rho^2}\, d\varphi, \quad \rho = f(\varphi).$$

Вычисление объемов тел.

Вычисление объема тела по известным площадям его параллельных сечений.



Пусть имеется тело объема V. Площадь любого поперечного сечения тела Q, известна как непрерывная функция Q = Q(x). Разобьем тело на "слои" поперечными сечениями, проходящими через точки x_i разбиения отрезка [a, b]. Т.к. на каком- либо промежуточном отрезке разбиения $[x_{i-1}, x_i]$ функция Q(x) непрерывна, то принимает на нем наибольшее и наименьшее значения. Обозначим их соответственно M_i и m_i.

Если на этих наибольшем и наименьшем сечениях построить цилиндры с образующими, параллельными оси x, то объемы этих цилиндров будут соответственно равны $M_i\Delta x_i$ и $m_i\Delta x_i$ здесь $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$.

Произведя такие построения для всех отрезков разбиения, получим цилиндры, объемы которых равны соответственно $\sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i$ и $\sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i$.

При стремлении к нулю шага разбиения λ, эти суммы имеют общий предел:

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} M_i\Delta x_i = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} m_i\Delta x_i = \int_a^b Q(x)dx$$

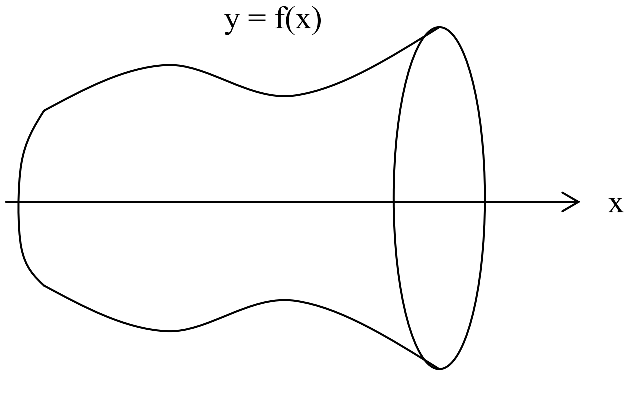
Таким образом, объем тела может быть найден по формуле:

$$V = \int_a^b Q(x)dx$$

Недостатком этой формулы является то, что для нахождения объема необходимо знать функцию Q(x), что весьма проблематично для сложных тел.

Объем тел вращения.

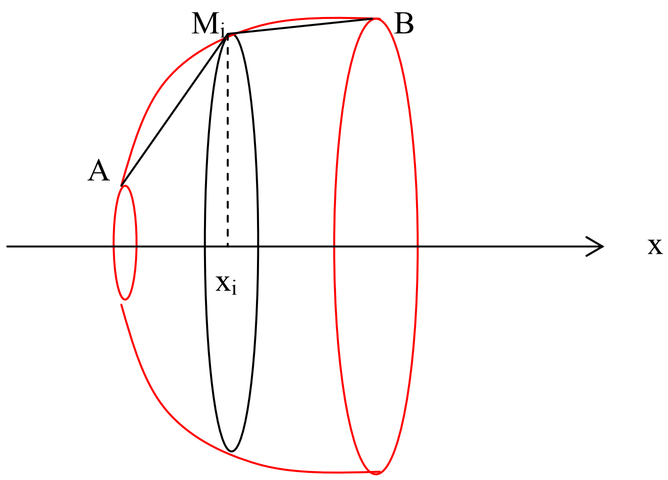
Рассмотрим кривую, заданную уравнением y = f(x). Предположим, что функция f(x) непрерывна на отрезке [a, b]. Если соответствующую ей криволинейную трапецию с основаниями a и b вращать вокруг оси Ох, то получим так называемое **тело вращения**.



Т.к. каждое сечение тела плоскостью x = const представляет собой круг радиуса $R = |f(x)|$, то объем тела вращения может быть легко найден по полученной выше формуле:

$$V = \pi \int_a^b f^2(x)dx$$

Площадь поверхности тела вращения.



Определение: Площадью поверхности вращения кривой АВ вокруг данной оси называют предел, к которому стремятся площади поверхностей вращения ломаных, вписанных в кривую АВ, при стремлении к нулю наибольших из длин звеньев этих ломаных.

Разобьем дугу АВ на n частей точками M_0, M_1, M_2, … , M_n. Координаты вершин полученной ломаной имеют координаты x_i и y_i. При вращении ломаной вокруг оси получим поверхность, состоящую из боковых поверхностей усеченных конусов, площадь которых равна ΔP_i. Эта площадь может быть найдена по формуле:

$$\Delta P_i = 2\pi \frac{y_{i-1} + y_i}{2} \Delta S_i$$

Здесь ΔS_i – длина каждой хорды.

$$\Delta S_i = \sqrt{\Delta x_i^2 + \Delta y_i^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}\right)^2} \Delta x_i$$

Применяем теорему Лагранжа к отношению $\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}$.

Получаем: $\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i} = \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}} = f(\varepsilon_i), \qquad x_{i-1} < \varepsilon < x_i$

Тогда $\Delta S_i = \sqrt{1 + f'^2(\varepsilon_i)} \Delta x_i$

$$\Delta P_i = 2\pi \frac{y_{i-1} + y_i}{2} \sqrt{1 + f'^2(\varepsilon_i)} \Delta x_i$$

Площадь поверхности, описанной ломаной равна:

$$P_n = \pi \sum_{i=1}^{n} \left(f(x_{i-1}) + f(x_i)\right) \sqrt{1 + f'^2(\varepsilon_i)} \Delta x_i$$

Эта сумма не является интегральной, но можно показать, что

$$P=\lim_{\max\Delta x_i\to 0}\pi\sum_{i=1}^{n}\left(f(x_{i-1})+f(x_i)\right)\sqrt{1+f'^2(\varepsilon_i)}\Delta x_i=\lim_{\max\Delta x_i\to 0}\pi\sum_{i=1}^{n}2f(\varepsilon_i)\sqrt{1+f'^2(\varepsilon_i)}\Delta x_i$$

Тогда $P=2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+f'^2(x)}dx$ - формула вычисления **площади поверхности тела вращения.**

Функции нескольких переменных

При рассмотрении функций нескольких переменных ограничимся подробным описанием функций двух переменных, т.к. все полученные результаты будут справедливы для функций произвольного числа переменных.

Определение: Если каждой паре независимых друг от друга чисел (x, y) из некоторого множества по какому - либо правилу ставится в соответствие одно или несколько значений переменной z, то переменная z называется **функцией двух переменных.**

$$z = f(x, y)$$

Определение: Если паре чисел (x, y) соответствует одно значение z, то функция называется **однозначной**, а если более одного, то – **многозначной**.

Определение: **Областью определения** функции z называется совокупность пар (x, y), при которых функция z существует.

Определение: **Окрестностью точки** $M_0(x_0, y_0)$ радиуса r называется совокупность всех точек (x, y), которые удовлетворяют условию $\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<r$.

Определение: Число А называется **пределом** функции f(x, y) при стремлении точки M(x, y) к точке $M_0(x_0, y_0)$, если для каждого числа $\varepsilon > 0$ найдется такое число $r > 0$, что для любой точки M(x, y), для которых верно условие

$$MM_0 < r$$

также верно и условие $|f(x,y)-A|<\varepsilon$.

Записывают: $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=A$

Определение: Пусть точка $M_0(x_0, y_0)$ принадлежит области определения функции f(x, y). Тогда функция z = f(x, y) называется **непрерывной** в точке $M_0(x_0, y_0)$, если

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=f(x_0,y_0) \qquad (1)$$

причем точка M(x, y) стремится к точке $M_0(x_0, y_0)$ произвольным образом.

Если в какой – либо точке условие (1) не выполняется, то эта точка называется **точкой разрыва** функции f(x, y). Это может быть в следующих случаях:

1) Функция z = f(x, y) не определена в точке $M_0(x_0, y_0)$.
2) Не существует предел $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)$.
3) Этот предел существует, но он не равен $f(x_0, y_0)$.

Свойство. Если функция f(x, y, …) определена и непрерывна в замкнутой и ограниченной области D, то в этой области найдется по крайней мере одна точка $N(x_0, y_0, \ldots)$, такая, что для остальных точек верно неравенство

$$f(x_0, y_0, \ldots) \geq f(x, y, \ldots)$$

а также точка $N_1(x_{01}, y_{01}, \ldots)$, такая, что для всех остальных точек верно неравенство

$$f(x_{01}, y_{01}, \ldots) \leq f(x, y, \ldots)$$

тогда $f(x_0, y_0, \ldots) = M$ – **наибольшее значение** функции, а $f(x_{01}, y_{01}, \ldots) = m$ – **наименьшее значение** функции f(x, y, …) в области D.

Непрерывная функция в замкнутой и ограниченной области D достигает по крайней мере один раз наибольшего значения и один раз наименьшего.

Свойство. Если функция f(x, y, …) определена и непрерывна в замкнутой ограниченной области D, а M и m – соответственно наибольшее и наименьшее значения функции в этой области, то для любой точки $\mu \in [m, M]$ существует точка $N_0(x_0, y_0, \ldots)$ такая, что $f(x_0, y_0, \ldots) = \mu$.

Проще говоря, непрерывная функция принимает в области D все промежуточные значения между M и m. Следствием этого свойства может служить заключение, что если числа M и m разных знаков, то в области D функция по крайней мере один раз обращается в ноль.

Свойство. Функция f(x, y, …), непрерывная в замкнутой ограниченной области D, **ограничена** в этой области, если существует такое число К, что для всех точек области верно неравенство $|f(x, y, ...)| < K$.

Свойство. Если функция f(x, y, …) определена и непрерывна в замкнутой ограниченной области D, то она **равномерно непрерывна** в этой области, т.е. для любого положительного числа ε существует такое число Δ > 0, что для любых двух точек (x_1, y_1) и (x_2, y_2) области, находящихся на расстоянии, меньшем Δ, выполнено неравенство

$$|f(x_1, y_1) - f(x_2, y_2)| < \varepsilon$$

Приведенные выше свойства аналогичны свойствам функций одной переменной, непрерывных на отрезке.

Производные и дифференциалы функций нескольких переменных.

Определение. Пусть в некоторой области задана функция z = f(x, y). Возьмем произвольную точку M(x, y) и зададим приращение Δx к переменной x. Тогда величина $\Delta_x z = f(x + \Delta x, y) - f(x, y)$ называется **частным приращением функции по x.**

Можно записать

$$\frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}.$$

Тогда $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta_x z}{\Delta x}$ называется **частной производной** функции z = f(x, y) по x.

Обозначение: $\frac{\partial z}{\partial x}$; z'_x; $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}$; $f'_x(x,y)$.

Аналогично определяется частная производная функции по у.

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x,y+\Delta y)-f(x,y)}{\Delta y}$$

Геометрическим смыслом частной производной (допустим $\frac{\partial z}{\partial x}$) является тангенс угла наклона касательной, проведенной в точке $N_0(x_0, y_0, z_0)$ к сечению поверхности плоскостью $y = y_0$.

Полное приращение и полный дифференциал.

Определение. Для функции f(x, y) выражение Δz = f(x + Δx, y + Δy) – f(x, y) называется **полным приращением**.

Если функция f(x, y) имеет непрерывные частные производные, то

$$\Delta z=f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x,y)+f(x,y+\Delta y)-f(x,y+\Delta y)=\left[f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x,y+\Delta y)\right]+$$
$$+\left[f(x,y+\Delta y)-f(x,y)\right]$$

Применим теорему Лагранжа к выражениям, стоящим в квадратных скобках.

$$f(x,y+\Delta y)-f(x,y)=\Delta y\frac{\partial f(x,\bar{y})}{\partial y}$$
$$f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x,y+\Delta y)=\Delta x\frac{\partial f(\bar{x},y+\Delta y)}{\partial x}$$

здесь $\bar{y}\in(y,y+\Delta y)$; $\bar{x}\in(x,x+\Delta x)$

Тогда получаем

$$\Delta z=\Delta x\frac{\partial f(\bar{x},y+\Delta y)}{\partial x}+\Delta y\frac{\partial f(x,\bar{y})}{\partial y}$$

Т.к. частные производные непрерывны, то можно записать равенства:

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{\partial f(\bar{x},y+\Delta y)}{\partial x}=\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}$$
$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{\partial f(x,\bar{y})}{\partial y}=\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$$

<u>Определение.</u> Выражение $\Delta z = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\Delta y + \alpha_1\Delta x + \alpha_2\Delta y$ называется **полным приращением** функции f(x, y) в некоторой точке (x, y), где α_1 и α_2 – бесконечно малые функции при $\Delta x \to 0$ и $\Delta y \to 0$ соответственно.

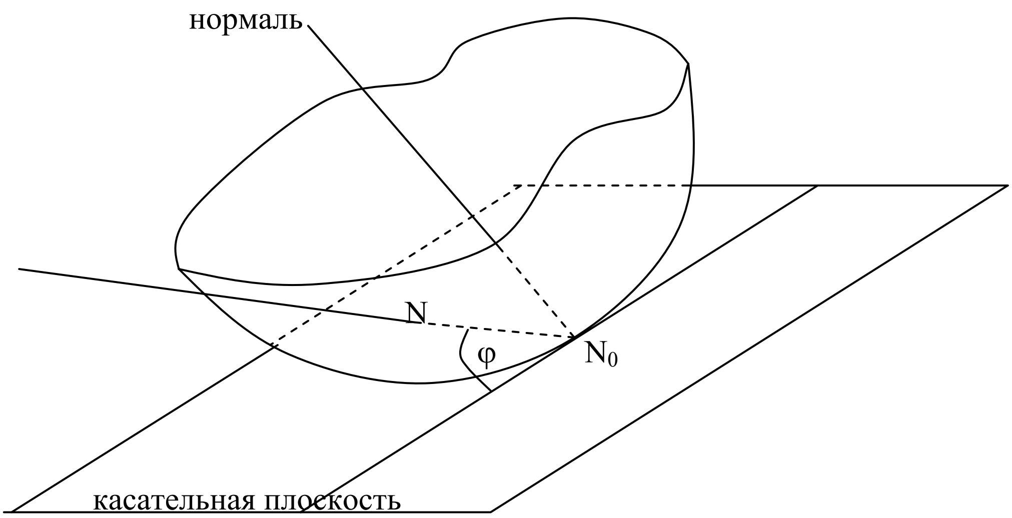
<u>Определение:</u> Полным дифференциалом функции z = f(x, y) называется главная линейная относительно Δx и Δy приращения функции Δz в точке (x, y).

$$dz = f'_x(x,y)dx + f'_y(x,y)dy$$

Для функции произвольного числа переменных:

$$df(x,y,z,...,t) = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + ... + \frac{\partial f}{\partial t}dt$$

<u>Геометрический смысл полного дифференциала.</u>
<u>Касательная плоскость и нормаль к поверхности.</u>



Пусть N и N_0 – точки данной поверхности. Проведем прямую NN_0. Плоскость, которая проходит через точку N_0, называется **касательной плоскостью** к поверхности, если угол между секущей NN_0 и этой плоскостью стремится к нулю, когда стремится к нулю расстояние NN_0.

<u>Определение.</u> Нормалью к поверхности в точке N_0 называется прямая, проходящая через точку N_0 перпендикулярно касательной плоскости к этой поверхности.

В какой – либо точке поверхность имеет, либо только одну касательную плоскость, либо не имеет ее вовсе.

Если поверхность задана уравнением z = f(x, y), где f(x, y) – функция, дифференцируемая в точке $M_0(x_0, y_0)$, касательная плоскость в точке $N_0(x_0,y_{0,}(x_0,y_0))$ существует и имеет уравнение:

$$z - f(x_0,y_0) = f'_x(x_0,y_0)(x-x_0) + f'_y(x_0,y_0)(y-y_0).$$

Уравнение нормали к поверхности в этой точке:

$$\frac{x-x_0}{f'_x(x_0 y_0)}=\frac{y-y_0}{f'_y(x_0,y_0)}=\frac{z-z_0}{-1}$$

Геометрическим смыслом полного дифференциала функции двух переменных f(x, y) в точке (x_0, y_0) является приращение аппликаты (координаты z) касательной плоскости к поверхности при переходе от точки (x_0, y_0) к точке (x_0+Δx, y_0+Δy).

Как видно, геометрический смысл полного дифференциала функции двух переменных является пространственным аналогом геометрического смысла дифференциала функции одной переменной.

Приближенные вычисления с помощью полного дифференциала.

Пусть функция f(x, y) дифференцируема в точке (x, y). Найдем полное приращение этой функции:

$$\Delta z = f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x,y)$$

$$f(x+\Delta x, y+\Delta y) = f(x,y) + \Delta z$$

Если подставить в эту формулу выражение

$$\Delta z \approx dz = \frac{\partial f}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\Delta y$$

то получим приближенную формулу:

$$f(x+\Delta x, y+\Delta y) \approx f(x,y) + \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\Delta y$$

Частные производные высших порядков.

Если функция f(x, y) определена в некоторой области D, то ее частные производные $f'_x(x,y)$ и $f'_y(x,y)$ тоже будут определены в той же области или ее части.

Будем называть эти производные **частными производными первого порядка.** Производные этих функций будут **частными производными второго порядка.**

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = f''_{xx}(x,y); \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = f''_{yy}(x,y);$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = f''_{xy}(x,y); \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = f''_{yx}(x,y);$$

Продолжая дифференцировать полученные равенства, получим частные производные более высоких порядков.

Определение. Частные производные вида $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y};\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x};\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y \partial x};\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y \partial y}$ и т.д. называются **смешанными производными.**

Теорема. Если функция f(x, y) и ее частные производные $f'_x, f'_y, f''_{xy}, f''_{yx}$ определены и непрерывны в точке M(x, y) и ее окрестности, то верно соотношение:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}.$$

Т.е. частные производные высших порядков не зависят от порядка дифференцирования.

Аналогично определяются дифференциалы высших порядков.

$$dz = f'_x(x,y)dx + f'_y(x,y)$$

$$d^2z = d\left[f'_x(x,y)dx + f'_y(x,y)dy\right] = f''_{x^2}(x,y)(dx)^2 + 2f''_{xy}(x,y)dxdy + f''_{y^2}(x,y)(dy)^2$$

$$d^3z = f'''_{x^3}(x,y)(dx)^3 + 3f'''_{x^2y}(x,y)(dx)^2dy + 3f'''_{xy^2}(x,y)dx(dy)^2 + f'''_{y^3}(x,y)(dy)^3$$

…………………

$$d^nz = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^n f(x,y)$$

Здесь n – символическая степень производной, на которую заменяется реальная степень после возведения в нее стоящего с скобках выражения.

Экстремум функции нескольких переменных.

Определение. Если для функции z = f(x, y), определенной в некоторой области, в некоторой окрестности точки $M_0(x_0, y_0)$ верно неравенство

$$f(x_0, y_0) > f(x,y)$$

то точка M_0 называется **точкой максимума.**

Определение. Если для функции z = f(x, y), определенной в некоторой области, в некоторой окрестности точки $M_0(x_0, y_0)$ верно неравенство

$$f(x_0, y_0) < f(x,y)$$

то точка M_0 называется **точкой минимума.**

Теорема. (Необходимые условия экстремума).

Если функция f(x,y) в точке (x_0, y_0) имеет экстремум, то в этой точке либо обе ее частные производные первого порядка равны нулю $f'_x(x_0,y_0)=0,\quad f'_y(x_0,y_0)=0$, либо хотя бы одна из них не существует.

Эту точку (x_0, y_0) будем называть **критической точкой.**

Теорема. (Достаточные условия экстремума).

Пусть в окрестности критической точки (x_0, y_0) функция f(x, y) имеет непрерывные частные производные до второго порядка включительно. Рассмотрим выражение:

$$D(x,y) = f''_{x^2}(x,y)\cdot f''_{y^2}(x,y) - \left[f''_{xy}(x,y)\right]^2$$

1) Если $D(x_0, y_0) > 0$, то в точке (x_0, y_0) функция f(x, y) имеет экстремум, если $f''_{x^2}(x_0,y_0) < 0$ - максимум, если $f''_{x^2}(x_0,y_0) > 0$ - минимум.

2) Если $D(x_0, y_0) < 0$, то в точке (x_0, y_0) функция f(x, y) не имеет экстремума

В случае, если D = 0, вывод о наличии экстремума сделать нельзя.

Условный экстремум.

Условный экстремум находится, когда переменные x и y, входящие в функцию u = f(x, y), не являются независимыми, т.е. существует некоторое соотношение
φ(x, y) = 0, которое называется **уравнением связи.**

Тогда из переменных x и y только одна будет независимой, т.к. другая может быть выражена через нее из уравнения связи.

Тогда u = f(x, y(x)).

$$\frac{du}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx}$$

В точках экстремума:

$$\frac{du}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx} = 0 \qquad (1)$$

Кроме того:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\frac{dy}{dx} = 0 \qquad (2)$$

Умножим равенство (2) на число λ и сложим с равенством (1).

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx}\right) + \lambda\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\frac{dy}{dx}\right) = 0$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x} + \lambda\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial f}{\partial y} + \lambda\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)\frac{dy}{dx} = 0$$

Для выполнения этого условия во всех точках найдем неопределенный коэффициент λ так, чтобы выполнялась система трех уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} + \lambda\dfrac{\partial \varphi}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} + \lambda\dfrac{\partial \varphi}{\partial y} = 0 \\ \varphi(x, y) = 0 \end{cases}$$

Полученная система уравнений является необходимыми условиями условного экстремума. Однако это условие не является достаточным. Поэтому при нахождении критических точек требуется их дополнительное исследование на экстремум.

Выражение $u = f(x, y) + \lambda\varphi(x, y)$ называется **функцией Лагранжа.**

Использование функции Лагранжа для нахождения точек экстремума функции называется также **методом множителей Лагранжа.**

Выше мы рассмотрели функцию двух переменных, однако, все рассуждения относительно условного экстремума могут быть распространены на функции большего числа переменных.

Производная по направлению.

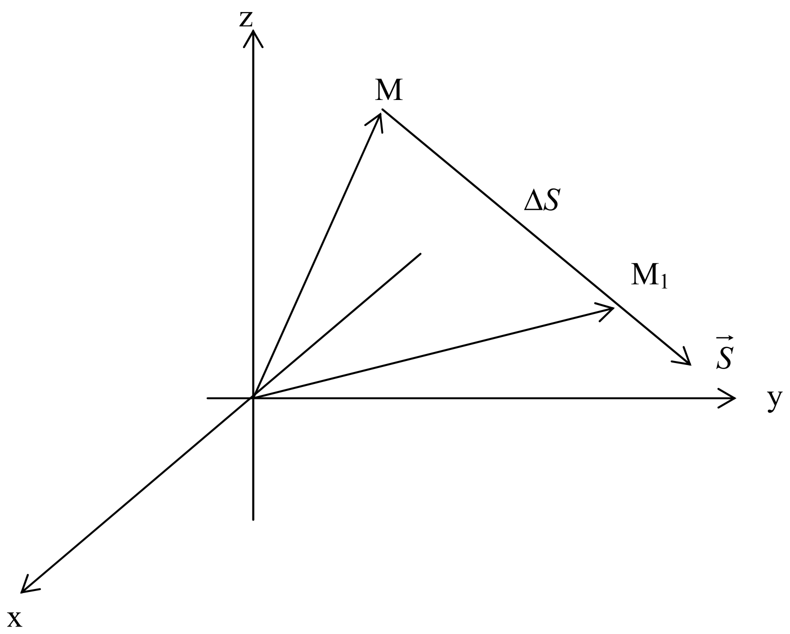
Рассмотрим функцию $u(x, y, z)$ в точке $M(x, y, z)$ и точке $M_1(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z)$.

Проведем через точки M и M_1 вектор $\vec{S}$. Углы наклона этого вектора к направлению координатных осей x, y, z обозначим соответственно α, β, γ. Косинусы этих углов называются **направляющими косинусами** вектора $\vec{S}$.

Расстояние между точками M и M_1 на векторе $\vec{S}$ обозначим ΔS.

$$\Delta S = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}$$

Высказанные выше предположения, проиллюстрируем на рисунке:



Далее предположим, что функция u(x, y, z) непрерывна и имеет непрерывные частные производные по переменным x, y и z. Тогда правомерно записать следующее выражение:

$$\Delta u = \frac{\partial u}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial u}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial u}{\partial z}\Delta z + \varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y + \varepsilon_3 \Delta z\ ,$$

где величины ε_1, ε_2, ε_3 – бесконечно малые при $\Delta S \to 0$.

Из геометрических соображений очевидно:

$$\frac{\Delta x}{\Delta S} = \cos\alpha; \qquad \frac{\Delta y}{\Delta S} = \cos\beta; \qquad \frac{\Delta z}{\Delta S} = \cos\gamma;$$

Таким образом, приведенные выше равенства могут быть представлены следующим образом:

$$\frac{\Delta u}{\Delta S} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma + \varepsilon_1 \cos\alpha + \varepsilon_2 \cos\beta + \varepsilon_2 \cos\gamma\ ;$$

$$\frac{\partial u}{\partial s} = \lim_{\Delta S \to 0}\frac{\Delta u}{\Delta S} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma$$

Заметим, что величина s является скалярной. Она лишь определяет направление вектора $\vec{S}$.

Из этого уравнения следует следующее определение:

<u>Определение:</u> Предел $\lim\limits_{\Delta S \to 0}\dfrac{\Delta u}{\Delta S}$ называется **производной функции u(x, y, z) по направлению вектора** $\vec{S}$ в точке с координатами (x, y, z).

Градиент.

Определение: Если в некоторой области D задана функция u = u(x, y, z) и некоторый вектор, проекции которого на координатные оси равны значениям функции u в соответствующей точке

$$\frac{\partial u}{\partial x}; \quad \frac{\partial u}{\partial y}; \quad \frac{\partial u}{\partial z},$$

то этот вектор называется **градиентом** функции u.

$$gradu = \frac{\partial u}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial u}{dy}\vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\vec{k}$$

При этом говорят, что в области D задано поле градиентов.

Связь градиента с производной по направлению.

Теорема: *Пусть задана функция u = u(x, y, z) и поле градиентов*

$$gradu = \frac{\partial u}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial u}{dy}\vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\vec{k}.$$

Тогда производная $\frac{\partial u}{\partial s}$ *по направлению некоторого вектора* $\vec{S}$ *равняется проекции вектора* $gradu$ *на вектор* $\vec{S}$.

Доказательство: Рассмотрим единичный вектор $\vec{S} = \vec{i}\cos\alpha + \vec{j}\cos\beta + \vec{k}\cos\gamma$ и некоторую функцию u = u(x, y, z) и найдем скалярное произведение векторов $\vec{S}$ и *gradu*.

$$gradu \cdot \vec{S} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma$$

Выражение, стоящее в правой части этого равенства является производной функции u по направлению s.

Т.е. $gradu \cdot \vec{S} = \frac{\partial u}{\partial s}$. Если угол между векторами *gradu* и $\vec{S}$ обозначить через φ, то скалярное произведение можно записать в виде произведения модулей этих векторов на косинус угла между ними. С учетом того, что вектор $\vec{S}$ единичный, т.е. его модуль равен единице, можно записать:

$$|gradu| \cdot \cos\varphi = \frac{\partial u}{\partial s}$$

Выражение, стоящее в правой части этого равенства и является проекцией вектора *gradu* на вектор $\vec{S}$.

Теорема доказана.

Для иллюстрации геометрического и физического смысла градиента скажем, что градиент – вектор, показывающий направление наискорейшего изменения некоторого скалярного поля u в какой- либо точке. В физике существуют такие понятия как градиент температуры, градиент давления и т.п. Т.е. направление градиента есть направление наиболее быстрого роста функции.

С точки зрения геометрического представления градиент перпендикулярен поверхности уровня функции.

Обыкновенные дифференциальные уравнения.

Решение различных геометрических, физических и инженерных задач часто приводят к уравнениям, которые связывают независимые переменные, характеризующие ту ил иную задачу, с какой – либо функцией этих переменных и производными этой функции различных порядков.

В качестве примера можно рассмотреть простейший случай равноускоренного движения материальной точки.

Известно, что перемещение материальной точки при равноускоренном движении является функцией времени и выражается по формуле:

$$S = V_0 t + \frac{at^2}{2}$$

В свою очередь ускорение *a* является производной по времени *t* от скорости *V,* которая также является производной по времени *t* от перемещения *S.* Т.е.

$$V = \frac{dS}{dt}; \qquad a = \frac{dV}{dt} = \frac{d^2S}{dt^2};$$

Тогда получаем: $S = f(t) = V_0 t + \frac{f''(t)\cdot t}{2}$ - уравнение связывает функцию f(t) с независимой переменной t и производной второго порядка функции f(t).

<u>Определение.</u> Дифференциальным уравнением называется уравнение, связывающее независимые переменные, их функции и производные (или дифференциалы) этой функции.

<u>Определение.</u> Если дифференциальное уравнение имеет одну независимую переменную, то оно называется **обыкновенным дифференциальным уравнением**, если же независимых переменных две или более, то такое дифференциальное уравнение называется **дифференциальным уравнением в частных производных.**

<u>Определение.</u> Наивысший порядок производных, входящих в уравнение, называется **порядком дифференциального уравнения.**

<u>Определение.</u> Общим решением дифференциального уравнения называется такая дифференцируемая функция y = φ(x, C), которая при подстановке в исходное уравнение вместо неизвестной функции обращает уравнение в тождество.

Свойства общего решения.

1) Т.к. постоянная С – произвольная величина, то вообще говоря дифференциальное уравнение имеет бесконечное множество решений.

2) При каких- либо начальных условиях $x = x_0$, $y(x_0) = y_0$ существует такое значение $C = C_0$, при котором решением дифференциального уравнения является функция $y = \varphi(x, C_0)$.

Определение. Решение вида $y = \varphi(x, C_0)$ называется **частным решением** дифференциального уравнения.

Определение. **Задачей Коши** (Огюстен Луи Коши (1789-1857)- французский математик) называется нахождение любого частного решения дифференциального уравнения вида $y = \varphi(x, C_0)$, удовлетворяющего начальным условиям $y(x_0) = y_0$.

Теорема Коши. (теорема о существовании и единственности решения дифференциального уравнения 1- го порядка)

Если функция f(x, y) непрерывна в некоторой области D в плоскости XOY и имеет в этой области непрерывную частную производную $y' = f(x, y)$, то какова бы не была точка (x_0, y_0) в области D, существует единственное решение $y = \varphi(x)$ уравнения $y' = f(x, y)$, определенное в некотором интервале, содержащем точку x_0, принимающее при $x = x_0$ значение $\varphi(x_0) = y_0$, т.е. существует единственное решение дифференциального уравнения.

Определение. **Интегралом** дифференциального уравнения называется любое уравнение, не содержащее производных, для которого данное дифференциальное уравнение является следствием.

Определение. **Интегральной кривой** называется график $y = \varphi(x)$ решения дифференциального уравнения на плоскости XOY.

Определение. **Особым решением** дифференциального уравнения называется такое решение, во всех точках которого условие единственности Коши не выполняется, т.е. в окрестности некоторой точки (x, y) существует не менее двух интегральных кривых.

Особые решения не зависят от постоянной С.

Особые решения нельзя получить из общего решения ни при каких значениях постоянной С. Если построить семейство интегральных кривых дифференциального уравнения, то особое решение будет изображаться линией, которая в каждой своей точке касается по крайней мере одной интегральной кривой.

Отметим, что не каждое дифференциальное уравнение имеет особые решения.

Далее рассмотрим подробнее приемы и методы, которые используются при решении дифференциальных уравнений различных типов.

Дифференциальные уравнения первого порядка.

Определение. **Дифференциальным уравнением первого порядка** называется соотношение, связывающее функцию, ее первую производную и независимую переменную, т.е. соотношение вида:

$$F(x, y, y') = 0$$

Если такое соотношение преобразовать к виду $y' = f(x, y)$ то это дифференциальное уравнение первого порядка будет называться уравнением, **разрешенным относительно производной.**

Преобразуем такое выражение далее:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y); \quad dy = f(x, y)dx; \quad f(x, y)dx - dy = 0;$$

Функцию f(x,y) представим в виде: $f(x,y) = -\dfrac{P(x,y)}{Q(x,y)}, \quad Q(x,y) \neq 0;$ тогда при подстановке в полученное выше уравнение имеем:

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$$

- это так называемая **дифференциальная форма** уравнения первого порядка.

Далее рассмотрим подробнее типы уравнений первого порядка и методы их решения.

Уравнения вида *y' = f(x).*

Пусть функция f(x) – определена и непрерывна на некотором интервале
a < x < b. В таком случае все решения данного дифференциального уравнения находятся как $y = \int f(x)dx + C$. Если заданы начальные условия x_0 и y_0, то можно определить постоянную C.

Уравнения с разделяющимися переменными

Определение. Дифференциальное уравнение $y' = f(x,y)$ называется **уравнением с разделяющимися переменными**, если его можно записать в виде

$$y' = \alpha(x)\beta(y).$$

Такое уравнение можно представить также в виде:

$$y' - \alpha(x)\beta(y) = 0; \quad dy - \alpha(x)\beta(y)dx = 0; \quad \frac{dy}{\beta(y)} - \alpha(x)dx = 0 \ \textit{при} \ \beta(y) \neq 0;$$

Перейдем к новым обозначениям $\alpha(x) = -X(x); \quad \dfrac{1}{\beta(y)} = Y(y);$

Получаем: $$X(x)dx + Y(y)dy = 0;$$

$$\int X(x)dx + \int Y(y)dy = C$$

После нахождения соответствующих интегралов получается общее решение дифференциального уравнения с разделяющимися переменными.

Если заданы начальные условия, то при их подстановке в общее решение находится постоянная величина C, а, соответственно, и частное решение.

Однородные уравнения.

Определение. Функция f(x, y) называется **однородной n – го измерения** относительно своих аргументов x и y, если для любого значения параметра t (кроме нуля) выполняется тождество:

$$f(tx,ty) = t^n f(x,y).$$

<u>Пример.</u> Является ли однородной функция $f(x,y) = x^3 + 3x^2 y$?

$$f(tx,ty) = (tx)^3 + 3(tx)^2 ty = t^3 x^3 + 3t^3 x^2 y = t^3 (x^3 + 3x^2 y) = t^3 f(x,y)$$

Таким образом, функция f(x, y) является однородной 3- го порядка.

<u>Определение.</u> Дифференциальное уравнение вида $y' = f(x,y)$ называется **однородным**, если его правая часть f(x, y) есть однородная функция нулевого измерения относительно своих аргументов.

Любое уравнение вида $P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$ является однородным, если функции *P(x, y)* и *Q(x, y)* – однородные функции одинакового измерения.

Решение любого однородного уравнения основано на приведении этого уравнения к уравнению с разделяющимися переменными.

Рассмотрим однородное уравнение $y' = f(x,y)$.
Т.к. функция f(x, y) – однородная нулевого измерения, то можно записать:

$$f(tx,ty) = f(x,y).$$

Т.к. параметр t вообще говоря произвольный, предположим, что $t = \frac{1}{x}$. Получаем:

$$f(x,y) = f\left(1, \frac{y}{x}\right)$$

Правая часть полученного равенства зависит фактически только от одного аргумента $u = \frac{y}{x}$, т.е.

$$f(x,y) = \varphi\left(\frac{y}{x}\right) = \varphi(u);$$

Исходное дифференциальное уравнение таким образом можно записать в виде:

$$y' = \varphi(u)$$

Далее заменяем $y = ux,\ y' = u'x + ux'$.

$$u'x + ux' = \varphi(u); \quad u'x + u = \varphi(u); \quad u' = \frac{\varphi(u) - u}{x};$$

таким образом, получили уравнение с разделяющимися переменными относительно неизвестной функции u.

$$\frac{du}{\varphi(u) - u} = \frac{dx}{x}; \quad \int \frac{du}{\varphi(u) - u} = \int \frac{dx}{x} + C;$$

Далее, заменив вспомогательную функцию u на ее выражение через x и y и найдя интегралы, получим общее решение однородного дифференциального уравнения.

<u>Уравнения, приводящиеся к однородным.</u>

Кроме уравнений, описанных выше, существует класс уравнений, которые с помощью определенных подстановок могут приведены к однородным.

Это уравнения вида $y' = f\left(\dfrac{ax+by+c}{a_1x+b_1y+c_1}\right)$.

Если определитель $\begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} \neq 0,$ то переменные могут быть разделены подстановкой

$$x = u + \alpha; \qquad y = v + \beta;$$

где α и β - решения системы уравнений $\begin{cases} ax+by+c=0 \\ a_1x+b_1y+c_1=0 \end{cases}$

Линейные уравнения.

Определение. Дифференциальное уравнение называется **линейным** относительно неизвестной функции и ее производной, если оно может быть записано в виде:

$$y' + P(x)y = Q(x),$$

при этом, если правая часть *Q(x)* равна нулю, то такое уравнение называется **линейным однородным** дифференциальным уравнением, если правая часть *Q(x)* не равна нулю, то такое уравнение называется **линейным неоднородным** дифференциальным уравнением.

P(x) и *Q(x)*- функции непрерывные на некотором промежутке a < x < b.

Линейные однородные дифференциальные уравнения.

Рассмотрим методы нахождения общего решения линейного однородного дифференциального уравнения первого порядка вида

$$y' + P(x)y = 0.$$

Для этого типа дифференциальных уравнений разделение переменных не представляет сложностей.

$$\frac{dy}{y} = -P(x)dx$$

$$\ln|y| = -\int P(x)dx + \ln|C|;$$

$$\ln\left|\frac{y}{C}\right| = -\int P(x)dx;$$

Общее решение: $y = Ce^{-\int P(x)dx}$

Линейные неоднородные дифференциальные уравнения.

Для интегрирования линейных неоднородных уравнений (*Q(x)≠0)* применяются в основном два метода: метод Бернулли и метод Лагранжа.

Метод Бернулли.

(Якоб Бернулли (1654-1705) – швейцарский математик.)

Суть метода заключается в том, что искомая функция представляется в виде произведения двух функций $y = uv$.

При этом очевидно, что $y' = u \cdot \frac{dv}{dx} + v \cdot \frac{du}{dx}$ - дифференцирование по частям.

Подставляя в исходное уравнение, получаем:

$$u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx} + P(x)uv = Q(x)$$

$$u\frac{dv}{dx} + v\left(\frac{du}{dx} + P(x)u\right) = Q(x)$$

Далее следует важное замечание – т.к. первоначальная функция была представлена нами в виде произведения, то каждый из сомножителей, входящих в это произведение, может быть произвольным, выбранным по нашему усмотрению.

Например, функция $y = 2x^2$ может быть представлена как $y = 1 \cdot 2x^2$; $y = 2 \cdot x^2$; $y = 2x \cdot x$; и т.п.

Таким образом, можно одну из составляющих произведение функций выбрать так, что выражение $\frac{du}{dx} + P(x)u = 0$.

Таким образом, возможно получить функцию *u*, проинтегрировав, полученное соотношение как однородное дифференциальное уравнение по описанной выше схеме:

$$\frac{du}{u} = -P(x)dx; \qquad \int\frac{du}{u} = -\int P(x)dx; \qquad \ln|u| = -\int P(x)dx;$$

$$\ln|C_1| + \ln|u| = -\int P(x)dx; \qquad u = Ce^{-\int P(x)dx}; \quad C = 1/C_1;$$

Для нахождения второй неизвестной функции *v* подставим поученное выражение для функции *u* в исходное уравнение $u\frac{dv}{dx} + v\left(\frac{du}{dx} + P(x)u\right) = Q(x)$ с учетом того, что выражение, стоящее в скобках, равно нулю.

$$Ce^{-\int P(x)dx}\frac{dv}{dx} = Q(x); \qquad Cdv = Q(x)e^{\int P(x)dx}dx;$$

Интегрируя, можем найти функцию *v*:

$$Cv = \int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx + C_1; \qquad v = \frac{1}{C}\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx + C_2;$$

Т.е. была получена вторая составляющая произведения $y = uv$, которое и определяет искомую функцию.

Подставляя полученные значения, получаем:

$$y = uv = Ce^{-\int P(x)dx} \cdot \frac{1}{C}\left(\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx + C_2\right)$$

Окончательно получаем формулу:

$y = e^{-\int P(x)dx} \cdot \left(\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx + C_2\right),$ C_2 - произвольный коэффициент.

Это соотношение может считаться решением неоднородного линейного дифференциального уравнения в общем виде по способу Бернулли.

Метод Лагранжа.

Метод Лагранжа решения неоднородных линейных дифференциальных уравнений еще называют методом **вариации произвольной постоянной**.

Вернемся к поставленной задаче:

$$y' + P(x)y = Q(x)$$

Первый шаг данного метода состоит в отбрасывании правой части уравнения и замене ее нулем.

$$y' + P(x)y = 0$$

Далее находится решение получившегося однородного дифференциального уравнения:

$$y = C_1 e^{-\int P(x)dx}.$$

Для того, чтобы найти соответствующее решение неоднородного дифференциального уравнения, будем считать постоянную C_1 некоторой функцией от x.

Тогда по правилам дифференцирования произведения функций получаем:

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dC_1(x)}{dx}e^{-\int P(x)dx} + C_1(x)e^{-\int P(x)dx} \cdot (-P(x));$$

Подставляем полученное соотношение в исходное уравнение

$$\frac{dC_1(x)}{dx}e^{-\int P(x)dx} - C_1(x)P(x)e^{-\int P(x)dx} + P(x)C_1(x)e^{-\int P(x)dx} = Q(x)$$

$$\frac{dC_1(x)}{dx}e^{-\int P(x)dx} = Q(x);$$

Из этого уравнения определим переменную функцию $C_1(x)$:

$$dC_1(x) = Q(x)e^{\int P(x)dx}dx;$$

Интегрируя, получаем:

$$C_1 = \int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx + C;$$

Подставляя это значение в исходное уравнение, получаем:

$$y = e^{-\int P(x)dx}\left(\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx + C\right).$$

Таким образом, мы получили результат, полностью совпадающий с результатом расчета по методу Бернулли.

При выборе метода решения линейных дифференциальных уравнений следует руководствоваться простотой интегрирования функций, входящих в исходный интеграл.

Далее рассмотрим примеры решения различных дифференциальных уравнений различными методами и сравним результаты.

Уравнение Бернулли.

Определение. Уравнением Бернулли называется уравнение вида

$$y' + Py = Q \cdot y^n,$$

где P и Q – функции от x или постоянные числа, а n – постоянное число, не равное 1.

Для решения уравнения Бернулли применяют подстановку $z = \frac{1}{y^{n-1}}$, с помощью которой, уравнение Бернулли приводится к линейному.

Для этого разделим исходное уравнение на y^n.

$$\frac{y'}{y^n} + P\frac{1}{y^{n-1}} = Q;$$

Применим подстановку, учтя, что $z' = -\frac{(n-1)y^{n-2}}{y^{2n-2}} \cdot y' = -\frac{(n-1)y'}{y^n}$.

$$-\frac{z'}{n-1} + Pz = Q$$

$$z' - (n-1)Pz = -(n-1)Q$$

Т.е. получилось линейное уравнение относительно неизвестной функции z.

Решение этого уравнения будем искать в виде:

$$z = e^{-\int P dx}\left(\int Q_1 e^{\int P_1 dx} dx + C\right)$$

$$Q_1 = -(n-1)Q; \qquad P_1 = -(n-1)P.$$

Уравнения в полных дифференциалах (тотальные).

Определение. Дифференциальное уравнение первого порядка вида:

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$$

называется **уравнением в полных дифференциалах**, если левая часть этого уравнения представляет собой полный дифференциал некоторой функции $u = F(x, y)$.

Интегрирование такого уравнения сводится к нахождению функции u, после чего решение легко находится в виде: $du = 0; \quad u = C$.

Таким образом, для решения надо определить:

1) в каком случае левая часть уравнения представляет собой полный дифференциал функции u;

2) как найти эту функцию.

Если дифференциальная форма $M(x, y)dx + N(x, y)dy$ является полным дифференциалом некоторой функции u, то можно записать:

$$du = M(x, y)dx + N(x, y)dy = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy.$$

Т.е. $\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = M(x, y) \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = N(x, y) \end{cases}$.

Найдем смешанные производные второго порядка, продифференцировав первое уравнение по y, а второе – по x:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial M(x, y)}{\partial y} \\ \dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial N(x, y)}{\partial x} \end{cases}$$

Приравнивая левые части уравнений, получаем **необходимое и достаточное условие** того, что левая часть дифференциального уравнения является полным дифференциалом. Это условие также называется **условием тотальности.**

$$\frac{\partial M(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x, y)}{\partial x}$$

Теперь рассмотрим вопрос о нахождении собственно функции u.

Проинтегрируем равенство $\dfrac{\partial u}{\partial x} = M(x, y)$:

$$u = \int M(x, y)dx + C(y).$$

Вследствие интегрирования получаем не постоянную величину С, а некоторую функцию С(у), т.к. при интегрировании переменная y полагается постоянным параметром.

Определим функцию С(у).

Продифференцируем полученное равенство по y.

$$\frac{\partial u}{\partial y} = N(x, y) = \frac{\partial}{\partial y}\int M(x, y)dx + C'(y).$$

Откуда получаем: $C'(y) = N(x, y) - \dfrac{\partial}{\partial y}\int M(x, y)dx.$

Для нахождения функции С(у) необходимо проинтегрировать приведенное выше равенство. Однако, перед интегрированием надо доказать, что функция С(у) не зависит от x. Это условие будет выполнено, если производная этой функции по x равна нулю.

$$[C'(y)]_x' = \frac{\partial N(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}\int M(x, y)dx = \frac{\partial N(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial x}\int M(x, y)dx\right) =$$
$$= \frac{\partial N(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial M(x, y)}{\partial y} = 0.$$

Теперь определяем функцию С(у):

$$C(y) = \int\left[N(x, y) - \frac{\partial}{\partial y}\int M(x, y)dx\right]dy + C$$

Подставляя этот результат в выражение для функции u, получаем:

$$u = \int M(x, y)dx + \int\left[N(x, y) - \frac{\partial}{\partial y}M(x, y)dx\right]dy + C.$$

Тогда общий интеграл исходного дифференциального уравнения будет иметь вид:

$$\int M(x,y)dx + \int\left[N(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)dx\right]dy = C.$$

Следует отметить, что при решении уравнений в полных дифференциалах не обязательно использовать полученную формулу. Решение может получиться более компактным, если просто следовать методу, которым формула была получена.

Уравнения вида *y = f(y')* и *x = f(y')*.

Решение уравнений, не содержащих в одном случае аргумента *x*, а в другом – функции *y*, ищем в параметрической форме, принимая за параметр производную неизвестной функции.

$$y' = p.$$

Для уравнения первого типа получаем: $y = f(p);\qquad y' = f'(p)\dfrac{dp}{dx}.$

Делая замену, получаем: $p = f'(p)\dfrac{dp}{dx};$

В результате этих преобразований имеем дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными.

$$dx = \frac{f'(p)}{p}dp;\qquad x = \int\frac{f'(p)}{p}dp + C.$$

Общий интеграл в параметрической форме представляется системой уравнений:

$$\begin{cases} x = \displaystyle\int\frac{f'(p)}{p}dp + C \\ y = f(p) \end{cases}$$

Исключив из этой системы параметр *p*, получим общий интеграл и не в параметрической форме.

Для дифференциального уравнения вида *x = f(y')* с помощью той же самой подстановки и аналогичных рассуждений получаем результат:

$$\begin{cases} y = \displaystyle\int pf'(p)dp + C \\ x = f(p) \end{cases}$$

Уравнения Лагранжа и Клеро.

Определение. **Уравнением Лагранжа** называется дифференциальное уравнение, линейное относительно *x* и *y*, коэффициенты которого являются функциями от *y'*.

$$P(y')x + Q(y')y + R(y') = 0$$

Для нахождения общего решение применяется подстановка *p = y'*.

$$y = xf(p) + \varphi(p),\quad f(p) = -\frac{P(y')}{Q(y')},\quad \varphi(p) = -\frac{R(y')}{Q(y')}.$$

Дифференцируя это уравнение,с учетом того, что $dy = pdx$, получаем:

$$pdx = f(p)dx + xf'(p)dp + \varphi'(p)dp.$$

Если решение этого (линейного относительно x) уравнения есть $x = F(p, C)$, то общее решение уравнения Лагранжа может быть записано в виде:

$$\begin{cases} x = F(p, C) \\ y = xf(p) + \varphi(p) = F(p, C)f(p) + \varphi(p) \end{cases}$$

<u>Определение.</u> Уравнением Клеро называется уравнение первой степени (т.е. линейное) относительно функции и аргумента вида:

$$y = xy' + \varphi(y').$$

Вообще говоря, уравнение Клеро является частным случаем уравнения Лагранжа.
С учетом замены $y' = p$, уравнение принимает вид:

$$y = xp + \varphi(p).$$

$$y' = p + x\frac{dp}{dx} + \varphi'(p)\frac{dp}{dx}; \qquad p = p + x\frac{dp}{dx} + \varphi'(p)\frac{dp}{dx};$$

$$[x + \varphi'(p)]\frac{dp}{dx} = 0;$$

Это уравнение имеет два возможных решения:

$$dp = 0 \text{ или } x + \varphi'(p) = 0.$$

В первом случае: $p = c$;

$$y = cx + \varphi(c)$$

Видно, что общий интеграл уравнения Клеро представляет собой семейство прямых линий.
Во втором случае решение в параметрической форме выражается системой уравнений:

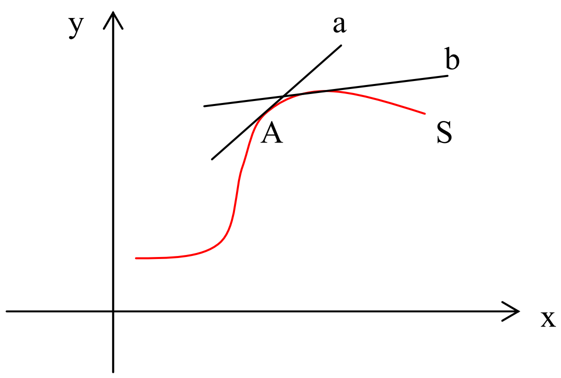
$$\begin{cases} y = xp + \varphi(p) \\ x + \varphi'(p) = 0 \end{cases}$$

Исключая параметр p, получаем второе решение F(x, y) = 0. Это решение не содержит произвольной постоянной и не получено из общего решения, следовательно, не является частным решением.

Это решение будет являться особым интегралом.

Далее рассмотрим примеры решения различных типов дифференциальных уравнений первого порядка.

<u>Геометрическая интерпретация решений дифференциальных уравнений первого порядка.</u>



Как уже говорилось выше, линия S, которая задается функцией, являющейся каким-либо решением дифференциального уравнения, называется интегральной кривой уравнения $y' = f(x, y)$.

Производная *y'* является **угловым коэффициентом касательной к интегральной кривой.**

В любой точке A(x, y) интегральной кривой этот угловой коэффициент касательной может быть найден еще до решения дифференциального уравнения.
Т.к. касательная указывает направление интегральной кривой еще до ее непосредственного построения, то при условии непрерывности функции f(x, y) и непрерывного перемещения точки A можно наглядно изобразить **поле направлений** кривых, которые получаются в результате интегрирования дифференциального уравнения, т.е. представляют собой его общее решение.

Определение. Множество касательных в каждой точке рассматриваемой области называется **полем направлений.**

С учетом сказанного выше можно привести следующее геометрическое истолкование дифференциального уравнения:

1) Задать дифференциальное уравнение первого порядка – это значит задать поле направлений.

2) Решить или проинтегрировать дифференциальное уравнение – это значит найти всевозможные кривые, у которых направление касательных в каждой точке совпадает с полем направлений.

Определение. Линии равного наклона в поле направлений называются **изоклинами**.

Дифференциальные уравнения высших порядков.

Определение. Дифференциальным уравнением порядка *n* называется уравнение вида:

$$F(x, y, y', ..., y^{(n)}) = 0$$

В некоторых случаях это уравнение можно разрешить относительно $y^{(n)}$:

$$y^{(n)} = f(x, y, y', ..., y^{(n-1)}).$$

Так же как и уравнение первого порядка, уравнения высших порядков имеют бесконечное количество решений.

Определение. Решение $y = \varphi(x)$ удовлетворяет начальным условиям $x_0, y_0, y_0', ..., y_0^{(n-1)}$, если $\varphi(x_0) = y_0$, $\varphi'(x_0) = y_0'$, ... , $\varphi^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}$.

Определение. Нахождение решения уравнения $F(x, y, y', ..., y^{(n)}) = 0$, удовлетворяющего начальным условиям $x_0, y_0, y_0', ..., y_0^{(n-1)}$, называется **решением задачи Коши.**

Теорема Коши. (Теорема о необходимых и достаточных условиях существования решения задачи Коши).

Если функция (n-1) –й переменных вида $f(x, y, y', ..., y^{(n-1)})$ *в некоторой области D (n-1)- мерного пространства непрерывна и имеет непрерывные частные производные по* $y, y', ..., y^{(n-1)}$, *то какова бы не была точка (*$x_0, y_0, y_0', ..., y_0^{(n-1)}$*) в этой области, существует единственное решение* $y = \varphi(x)$ *уравнения* $y^{(n)} = f(x, y, y', ..., y^{(n-1)})$, *определенного в неко-*

тором интервале, содержащем точку x$_0$, *удовлетворяющее начальным условиям* $x_0, y_0, y'_0, ..., y_0^{(n-1)}$.

Дифференциальные уравнения высших порядков, решение которых может быть найдено аналитически, можно разделить на несколько основных типов.

Рассмотрим подробнее методы нахождения решений этих уравнений.

Уравнения, допускающие понижение порядка.

Понижение порядка дифференциального уравнения – основной метод решения уравнений высших порядков. Этот метод дает возможность сравнительно легко находить решение, однако, он применим далеко не ко всем уравнениям. Рассмотрим случаи, когда возможно понижение порядка.

Уравнения вида $y^{(n)} = f(x)$.

Если f(x) – функция непрерывная на некотором промежутке a < x < b, то решение может быть найдено последовательным интегрированием.

$$y^{(n-1)} = \int f(x)dx + C_1;$$

$$y^{(n-2)} = \int\left(\int f(x)dx + C_1\right)dx + C_2 = \int dx\int f(x)dx + C_1x + C_2;$$

…………………………………………………………………….

$$y = \int dx\int dx....\int f(x)dx + C_1\frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + C_2\frac{x^{n-2}}{(n-2)!} + ... + C_n;$$

Уравнения, не содержащие явно искомой функции и ее производных до порядка *k – 1* включительно.

Это уравнения вида: $\boxed{F(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, ..., y^{(n)}) = 0.}$

В уравнениях такого типа возможно понижение порядка на *k* единиц. Для этого производят замену переменной:

$$y^{(k)} = z; \quad y^{(k+1)} = z'; \quad ... \quad y^{(n)} = z^{(n-k)}.$$

Тогда получаем: $F(x, z, z', ..., z^{(n-k)}) = 0.$

Теперь допустим, что полученное дифференциальное уравнение проинтегрировано и совокупность его решений выражается соотношением:

$$z = \psi(x, C_1, C_2, ..., C_{n-k}).$$

Делая обратную подстановку, имеем:

$$y^{(k)} = \psi(x, C_1, C_2, ..., C_{n-k})$$

Интегрируя полученное соотношение последовательно *k* раз, получаем окончательный ответ:

$$y = \varphi(x, C_1, C_2, ..., C_n).$$

Уравнения, не содержащие явно независимой переменной.

Это уравнения вида $F(y, y', ..., y^{(n)}) = 0$.

Порядок таких уравнений может быть понижен на единицу с помощью замены переменных $y' = p$.

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{dy'}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{dp}{dy} p;$$

$$y''' = \frac{dy''}{dx} = \frac{dy''}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{dy''}{dy} p = \frac{d\left(\frac{dp}{dy} p\right)}{dy} p = \frac{d^2 p}{dy^2} p^2 + \left(\frac{dp}{dy}\right)^2 p; \text{ и т.д.}$$

Подставляя эти значения в исходное дифференциальное уравнение, получаем:

$$F_1\left(y, p, \frac{dp}{dy}, ..., \frac{d^{n-1} p}{dy^{n-1}}\right) = 0$$

Если это уравнение проинтегрировать, и $\Phi(y, p, C_1, C_2, ..., C_{n-1}) = 0$ - совокупность его решений, то для решения данного дифференциального уравнения остается решить уравнение первого порядка:

$$\Phi(y, y', C_1, C_2, ..., C_{n-1}) = 0.$$

Линейные дифференциальные уравнения высших порядков.

Определение. Линейным дифференциальным уравнением *n* – го порядка называется любое уравнение первой степени относительно функции *y* и ее производных $y', y'', ..., y^{(n)}$ вида:

$$\boxed{p_0 y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + p_2 y^{(n-2)} + ... + p_{n-1} y' + p_n y = f(x)};$$

где $p_0, p_1, ..., p_n$ – функции от *x* или постоянные величины, причем $p_0 \neq 0$.

Левую часть этого уравнения обозначим *L(y)*.

$$p_0 y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + p_2 y^{(n-2)} + ... + p_{n-1} y' + p_n y = L(y);$$

Определение. Если $f(x) = 0$, то уравнение $L(y) = 0$ называется **линейным однородным** уравнением, если $f(x) \neq 0$, то уравнение $L(y) = f(x)$ называется **линейным неоднородным** уравнением, если все коэффициенты $p_0, p_1, p_2, ... p_n$ – постоянные числа, то уравнение $L(y) = f(x)$ называется **линейным дифференциальным уравнением высшего порядка с постоянными коэффициентами**.

Отметим одно важное свойство линейных уравнений высших порядков, которое отличает их от нелинейных. Для нелинейных уравнений частный интеграл находится из общего, а для линейных – наоборот, общий интеграл составляется из частных. Линейные уравнения представляют собой наиболее изученный класс дифференциальных уравнений высших порядков. Это объясняется сравнительной простотой нахождения решения. Если при решении каких – либо практических задач требуется решить нелинейное дифференциальное уравнение, то часто применяются приближенные методы, позволяющие заменить такое уравнение “близким” к нему линейным.

Рассмотрим способы интегрирования некоторых типов линейных дифференциальных уравнений высших порядков.

Линейные однородные дифференциальные уравнения с произвольными коэффициентами.

Рассмотрим уравнение вида $p_0 y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + p_2 y^{(n-2)} + ... + p_{n-1} y' + p_n y = 0$

Определение. Выражение $p_0 y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + p_2 y^{(n-2)} + ... + p_{n-1} y' + p_n y = L(y)$ называется **линейным дифференциальным оператором**.

Линейный дифференциальный оператор обладает следующими свойствами:

1) $L(Cy) = CL(y)$;
2) $L(y_1 + y_2) = L(y_1) + L(y_2)$;

Решения линейного однородного уравнения обладают следующими свойствами:

1) Если функция y_1 является решением уравнения, то функция Cy_1, где C – постоянное число, также является его решением.

2) Если функции y_1 и y_2 являются решениями уравнения, то $y_1 + y_2$ также является его решением.

Структура общего решения.

Определение. **Фундаментальной системой решений** линейного однородного дифференциального уравнения *n* –го порядка на интервале (a, b) называется всякая система *n* линейно независимых на этом интервале решений уравнения.

Определение. Если из функций y_i составить определитель *n* – го порядка

$$W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & ... & y_n \\ y_1' & y_2' & ... & y_n' \\ ... & ... & ... & ... \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & ... & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix},$$

то этот определитель называется **определителем Вронского.**

(Юзеф Вроньский (1776 – 1853) – польский математик и философ - мистик)

Теорема. *Если функции $y_1, y_2, ..., y_n$ линейно зависимы, то составленный для них определитель Вронского равен нулю.*

Теорема. *Если функции $y_1, y_2, ..., y_n$ линейно независимы, то составленный для них определитель Вронского не равен нулю ни в одной точке рассматриваемого интервала.*

Теорема. *Для того, чтобы система решений линейного однородного дифференциального уравнения $y_1, y_2, ..., y_n$ была фундаментальной необходимо и достаточно, чтобы составленный для них определитель Вронского был не равен нулю.*

Теорема. *Если* $y_1, y_2, ..., y_n$ *- фундаментальная система решений на интервале (a, b), то общее решение линейного однородного дифференциального уравнения является линейной комбинацией этих решений.*

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + ... + C_n y_n ,$$

где C_i –постоянные коэффициенты.

Применение приведенных выше свойств и теорем рассмотрим на примере линейных однородных дифференциальных уравнений второго порядка.

Общее решение линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка.

Из вышеизложенного видно, что отыскание общего решения линейного однородного дифференциального уравнения сводится к нахождению его фундаментальной системы решений.

Однако, даже для уравнения второго порядка, если коэффициенты *p* зависят от *x*, эта задача не может быть решена в общем виде.

Тем не менее, если известно одно ненулевое частное решение, то задача может быть решена.

Теорема. *Если задано уравнение вида* $y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = 0$ *и известно одно ненулевое решение* $y = y_1$*, то общее решение может быть найдено по формуле*:

$$y = C_2 y_1 \int \frac{1}{y_1^2} e^{-\int p_1(x)dx} dx + C_1 y_1 .$$

Таким образом, для получения общего решения надо подобрать какое – либо частное решение дифференциального уравнения, хотя это бывает часто довольно сложно.

Линейные однородные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами.

Решение дифференциального уравнения вида $y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + ... + a_n y = 0$ или, короче, $L(y) = 0$ будем искать в виде $y = e^{kx}$, где $k = const.$

Т.к. $y' = ke^{kx}$; $\quad y'' = k^2 e^{kx}$; $\quad ...\quad y^{(n)} = k^n e^{kx}$, то

$$L(e^{kx}) = e^{kx}(k^n + a_1 k^{n-1} + ... + a_n).$$

При этом многочлен $F(k) = k^n + a_1 k^{n-1} + ... + a_n$ называется **характеристическим многочленом** дифференциального уравнения.

Для того, чтобы функция $y = e^{kx}$ являлась решением исходного дифференциального уравнения, необходимо и достаточно, чтобы

$$L(e^{kx}) = 0; \text{ т.е. } e^{kx} F(k) = 0.$$

Т.к. $e^{kx} \neq 0$, то $F(k) = 0$ - это уравнение называется **характеристическим уравнением**.

Как и любое алгебраическое уравнение степени *n*, характеристическое уравнение $k^n + a_1 k^{n-1} + ... + a_n = 0$ имеет *n* корней. Каждому корню характеристического уравнения k_i соответствует решение дифференциального уравнения.

В зависимости от коэффициентов *k* характеристическое уравнение может иметь либо *n* различных действительных корней, либо среди действительных корней могут быть кратные корни, могут быть комплексно – сопряженные корни, как различные, так и кратные.

Не будем подробно рассматривать каждый случай, а сформулируем общее правило нахождения решения линейного однородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами.

1) Составляем характеристическое уравнение и находим его корни.

2) Находим частные решения дифференциального уравнения, причем:

а) каждому действительному корню соответствует решение e^{kx};

б) каждому действительному корню кратности *m* ставится в соответствие *m* решений:

$$e^{kx};\quad xe^{kx};\quad ...\quad x^{m-1}e^{kx}.$$

в) каждой паре комплексно – сопряженных корней $\alpha \pm i\beta$ характеристического уравнение ставится в соответствие два решения:

$$e^{\alpha x}\cos\beta x \quad \text{и} \quad e^{\alpha x}\sin\beta x.$$

г) каждой паре *m* – кратных комплексно – сопряженных корней $\alpha \pm i\beta$ характеристического уравнения ставится в соответствие $2m$ решений:

$$e^{\alpha x}\cos\beta x,\quad xe^{\alpha x}\cos\beta x,\quad ...\quad x^{m-1}e^{\alpha x}\cos\beta x,$$

$$e^{\alpha x}\sin\beta x,\quad xe^{\alpha x}\sin\beta x,\quad ...x^{m-1}e^{\alpha x}\sin\beta x.$$

3) Составляем линейную комбинацию найденных решений.

Эта линейная комбинация и будет являться общим решением исходного линейного однородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами.

Линейные неоднородные дифференциальные уравнения с произвольными коэффициентами.

Рассмотрим уравнение вида $y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + ... + p_n(x)y = f(x)$.

С учетом обозначения $y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + ... + p_n(x)y = L(x)$ можно записать:

$$L(x) = f(x).$$

При этом будем полагать, что коэффициенты и правая часть этого уравнения непрерывны на некотором интервале (конечном или бесконечном).

Теорема. *Общее решение линейного неоднородного дифференциального уравнения* $y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + ... + p_n(x)y = f(x)$ *в некоторой области есть сумма* ***любого*** *его решения и общего решения соответствующего линейного однородного дифференциального уравнения.*

Доказательство. Пусть Y – некоторое решение неоднородного уравнения.
Тогда при подстановке этого решения в исходное уравнение получаем тождество:

$$L(Y) \equiv f(x).$$

Пусть $y_1, y_2,..., y_n$ - фундаментальная система решений линейного однородного уравнения $L(y) = 0$. Тогда общее решение однородного уравнения можно записать в виде:

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + ... + C_n y_n; \quad C_i = const.$$

Далее покажем, что сумма $Y + C_1 y_1 + C_2 y_2 + ... + C_n y_n$ является общим решением неоднородного уравнения.

$$L(Y + C_1 y_1 + C_2 y_2 + ... + C_n y_n) = L(Y) + L(C_1 y_1) + L(C_2 y_2) + ... + L(C_n y_n) = L(Y) = f(x)$$

Вообще говоря, решение Y может быть получено из общего решения, т.к. является частным решением.

Таким образом, в соответствии с доказанной теоремой, для решения линейного неоднородного дифференциального уравнения необходимо найти общее решение соответствующего однородного уравнения и каким- то образом отыскать одно частное решение неоднородного уравнения. Обычно оно находится подбором.

На практике удобно применять метод **вариации произвольных постоянных**. Для этого сначала находят общее решение соответствующего однородного уравнения в виде:

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + ... + C_n y_n = \sum_{i=1}^{n} C_i y_i;$$

Затем, полагая коэффициенты C_i функциями от x, ищется решение неоднородного уравнения:

$$y = \sum_{i=1}^{n} C_i(x) y_i;$$

Можно доказать, что для нахождения функций $C_i(x)$ надо решить систему уравнений:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} C_i'(x) y_i = 0 \\ \sum_{i=1}^{n} C_i'(x) y_i' = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \sum_{i=1}^{n} C_i'(x) y_i^{(n-1)} = f(x) \end{cases}$$

Таким образом, удалось избежать нахождения частного решения неоднородного уравнения методом подбора.

Вообще говоря, метод вариации произвольных постоянных пригоден для нахождения решений любого линейного неоднородного уравнения. Но т.к. нахождение фундаментальной системы решений соответствующего однородного уравнения может быть достаточно сложной задачей, этот метод в основном применяется для неоднородных уравнений с постоянными коэффициентами.

Линейные неоднородные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами.

Уравнения с правой частью специального вида.

Представляется возможным представить вид частного решения в зависимости от вида правой части неоднородного уравнения.

Различают следующие случаи:

I. Правая часть линейного неоднородного дифференциального уравнения имеет вид:

$$f(x) = P(x)e^{\alpha x},$$

где $P(x) = A_0x^m + A_1x^{m-1} + ... + A_m$ - многочлен степени m.

Тогда частное решение ищется в виде:

$$y = x^r e^{\alpha x} Q(x)$$

Здесь $Q(x)$- многочлен той же степени, что и $P(x)$, но с неопределенными коэффициентами, а r – число, показывающее сколько раз число α является корнем характеристического уравнения для соответствующего линейного однородного дифференциального уравнения.

II. Правая часть линейного неоднородного дифференциального уравнения имеет вид:

$$f(x) = e^{\alpha x}\left[P_1(x)\cos\beta x + P_2(x)\sin\beta x\right]$$

Здесь $P_1(x)$ и $P_2(x)$ – многочлены степени m_1 и m_2 соответственно.
Тогда частное решение неоднородного уравнения будет иметь вид:

$$y = x^r e^{\alpha x}\left[Q_1(x)\cos\beta x + Q_2(x)\sin\beta x\right]$$

где число r показывает сколько раз число $\alpha + i\beta$ является корнем характеристического уравнения для соответствующего однородного уравнения, а $Q_1(x)$ и $Q_2(x)$ – многочлены степени не выше m, где m- большая из степеней m_1 и m_2.

Заметим, что если правая часть уравнения является комбинацией выражений рассмотренного выше вида, то решение находится как комбинация решений вспомогательных уравнений, каждое из которых имеет правую часть, соответствующую выражению, входящему в комбинацию.

Т.е. если уравнение имеет вид: $L(y) = f_1(x) + f_2(x)$, то частное решение этого уравнения будет $y = y_1 + y_2$, где y_1 и y_2 – частные решения вспомогательных уравнений

$$L(y) = f_1(x) \text{ и } L(y) = f_2(x)$$

<u>Нормальные системы обыкновенных дифференциальных уравнений.</u>

<u>Определение.</u> Совокупность соотношений вида:

$$\begin{cases} F_1(x, y_1, y_2, ..., y_n, y_1', y_2', ..., y_n') = 0 \\ F_2(x, y_1, y_2, ..., y_n, y_1', y_2', ..., y_n') = 0 \\ .... \\ F_n(x, y_1, y_2, ..., y_n, y_1', y_2', ..., y_n') = 0 \end{cases}$$

где x- независимая переменная, $y_1, y_2, ..., y_n$ – искомые функции, называется **системой дифференциальных уравнений первого порядка**.

<u>Определение.</u> Система дифференциальных уравнений первого порядка, разрешенных относительно производных от неизвестных функций называется **нормальной системой дифференциальных уравнений**.

Такая система имеет вид:

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = f_1(x, y_1, y_2, ..., y_n) \\ \dfrac{dy_2}{dx} = f_2(x, y_1, y_2, ..., y_n) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dfrac{dy_n}{dx} = f_n(x, y_1, y_2, ..., y_n) \end{cases} \qquad (1)$$

Для примера можно сказать, что график решения системы двух дифференциальных уравнений представляет собой интегральную кривую в трехмерном пространстве.

<u>Теорема.</u> (Теорема Коши). *Если в некоторой области (n-1) –мерного пространства функции* $f_1(x, y_1, y_2, ..., y_n)$, $f_2(x, y_1, y_2, ..., y_n)$, ... $f_n(x, y_1, y_2, ..., y_n)$ *непрерывны и имеют непрерывные частные производные по* $y_1, y_2, ..., y_n$, *то для любой точки* $(x_0 . y_{10}, y_{20}, ..., y_{n0})$ *этой области существует единственное решение*

$$y_1 = \varphi_1(x), \quad y_2 = \varphi_2(x), \quad ... \quad y_n = \varphi_n(x)$$

системы дифференциальных уравнений вида (1), определенное в некоторой окрестности точки x_0 *и удовлетворяющее начальным условиям* $x_0 . y_{10}, y_{20}, ..., y_{n0}$.

<u>Определение.</u> **Общим решением** системы дифференциальных уравнений вида (1) будет совокупность функций $y_1 = \varphi_1(x, C_1, C_2, ..., C_n)$, $y_2 = \varphi_2(x, C_1, C_2, ..., C_n)$, … $y_n = \varphi_n(x, C_1, C_2, ..., C_n)$, которые при подстановке в систему (1) обращают ее в тождество.

<u>Нормальные системы линейных однородных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.</u>

При рассмотрении систем дифференциальных уравнений ограничимся случаем системы трех уравнений (n = 3). Все нижесказанное справедливо для систем произвольного порядка.

<u>Определение.</u> Нормальная система дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами называется **линейной однородной**, если ее можно записать в виде:

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = a_{11}y + a_{12}z + a_{13}u \\ \dfrac{dz}{dx} = a_{21}y + a_{22}z + a_{23}u \\ \dfrac{du}{dx} = a_{31}y + a_{32}z + a_{33}u \end{cases} \qquad (2)$$

Решения системы (2) обладают следующими свойствами:

1) Если *y, z, u* – решения системы, то *Cy, Cz, Cu* , где *C = const* – тоже являются решениями этой системы.

2) Если y_1, z_1, u_1 и y_2, z_2, u_2 – решения системы, то $y_1 + y_2, z_1 + z_2, u_1 + u_2$ – тоже являются решениями системы.

Решения системы ищутся в виде: $y = \alpha e^{kx}; \quad z = \beta e^{kx}; \quad u = \gamma e^{kx}, \quad \alpha, \beta, \gamma, k = const$

Подставляя эти значения в систему (2) и перенеся все члены в одну сторону и сократив на e^{kx}, получаем:

$$\begin{cases} (a_{11} - k)\alpha + a_{12}\beta + a_{13}\gamma = 0 \\ a_{21}\alpha + (a_{22} - k)\beta + a_{23}\gamma = 0 \\ a_{31}\alpha + a_{32}\beta + (a_{33} - k)\gamma = 0 \end{cases}$$

Для того, чтобы полученная система имела ненулевое решение необходимо и достаточно, чтобы определитель системы был равен нулю, т.е.:

$$\begin{vmatrix} a_{11} - k & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} - k & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - k \end{vmatrix} = 0$$

В результате вычисления определителя получаем уравнение третьей степени относительно k. Это уравнение называется **характеристическим уравнением** и имеет три корня k_1, k_2, k_3. Каждому из этих корней соответствует ненулевое решение системы (2):

$$\begin{aligned} y_1 &= \alpha_1 e^{k_1 x}, & z_1 &= \beta_1 e^{k_1 x}, & u_1 &= \gamma_1 e^{k_1 x}, \\ y_2 &= \alpha_2 e^{k_2 x}, & z_2 &= \beta_2 e^{k_2 x}, & u_2 &= \gamma_2 e^{k_2 x}, \\ y_3 &= \alpha_3 e^{k_3 x}, & z_3 &= \beta_3 e^{k_3 x}, & u_3 &= \gamma_3 e^{k_3 x}. \end{aligned}$$

Линейная комбинация этих решений с произвольными коэффициентами будет решением системы (2):

$$\begin{aligned} y &= C_1\alpha_1 e^{k_1 x} + C_2\alpha_2 e^{k_2 x} + C_3\alpha_3 e^{k_3 x}; \\ z &= C_1\beta_1 e^{k_1 x} + C_2\beta_2 e^{k_2 x} + C_3\beta_3 e^{k_3 x}; \\ u &= C_1\gamma_1 e^{k_1 x} + C_2\gamma_2 e^{k_2 x} + C_3\gamma_3 e^{k_3 x}. \end{aligned}$$

Линейные однородные дифференциальные уравнения в частных производных первого порядка.

Дифференциальное уравнение в частных производных первого порядка от функции $u = u(x_1, x_2, ..., x_n)$ можно в общем виде записать как

$$F\left(x_1, x_2, ..., x_n, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, ..., \frac{\partial u}{\partial x_n} \right) = 0$$

Линейное уравнение в частных производных имеет вид:

$$X_1(x_1, x_2, ..., x_n)\frac{\partial u}{\partial x_1} + X_2(x_1, x_2, ..., x_n)\frac{\partial u}{\partial x_2} + ... + X_n(x_1, x_2, ..., x_n)\frac{\partial u}{\partial x_n} = 0, \qquad (1)$$

где X_i – некоторые заданные функции.

Очевидно, что одним из решений такого уравнения будет функция $u = C$.

Рассмотрим систему уравнений:

$$\frac{dx_1}{X_1} = \frac{dx_2}{X_2} = ... = \frac{dx_n}{X_n}; \qquad (2)$$

или $\frac{dx_1}{dx_n} = \frac{X_1}{X_n}$; $\frac{dx_2}{dx_n} = \frac{X_2}{X_n}$; ... $\frac{dx_{n-1}}{dx_n} = \frac{X_{n-1}}{X_n}$ - такая система называется **нормальной**.

Общее решение этой системы имеет вид:

$$\begin{cases} x_1 = f_1(x_n, C_1, C_2, ..., C_{n-1}) \\ x_2 = f_2(x_n, C_1, C_2, ..., C_{n-1}) \\ .... \\ x_{n-1} = f_{n-1}(x_n, C_1, C_2, ..., C_{n-1}) \end{cases}$$

Если разрешить эти уравнения относительно постоянных *C*, получим:

$$\begin{cases} \varphi_1(x_1, x_2, ..., x_n) = C_1 \\ \varphi_2(x_1, x_2, ..., x_n) = C_2 \\ .... \\ \varphi_{n-1}(x_1, x_2, ..., x_n) = C_{n-1} \end{cases}$$

Каждая из функций φ является интегралом системы (2).

Теорема. *Если* $\varphi(x_1, x_2, ..., x_n)$ *- интеграл системы (2), то функция* $u = \varphi(x_1, x_2, ..., x_n)$ *- решение уравнения (1).*

Ряды.

Основные определения.

Определение. Сумма членов бесконечной числовой последовательности $u_1, u_2, ..., u_n, ...$ называется **числовым рядом**.

$$u_1 + u_2 + ... + u_n + ... = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$$

При этом числа $u_1, u_2, ...$ будем называть членами ряда, а u_n – общим членом ряда.

Определение. Суммы $S_n = u_1 + u_2 + ... + u_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$, $n = 1, 2, ...$ называются **частными (частичными) суммами** ряда.

Таким образом, возможно рассматривать последовательности частичных сумм ряда $S_1, S_2, ..., S_n, ...$

Определение. Ряд $u_1 + u_2 + ... + u_n + ... = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$ называется **сходящимся**, если сходится последовательность его частных сумм. **Сумма сходящегося ряда** – предел последовательности его частных сумм.

$$\lim S_n = S, \qquad S = \sum_{n=1}^{\infty} u_n.$$

Определение. Если последовательность частных сумм ряда расходится, т.е. не имеет предела, или имеет бесконечный предел, то ряд называется **расходящимся** и ему не ставят в соответствие никакой суммы.

Элементы теории функций комплексного переменного.

Определение. Если каждому комплексному числу z из некоторого множества D по некоторому закону поставлено в соответствие определенное комплексное число w из множества G, то на этой области задана **однозначная функция комплексного переменного**, отображающая множество D на множество G.

$$w = f(z)$$

Множество D называется **областью определения**, множество G – **областью значений функции.**

Комплексную функцию можно записать в виде:

$$w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$$
$$u(x, y) = \operatorname{Re} f(z)$$
$$v(x, y) = \operatorname{Im} f(z)$$

u, v – действительные функции от переменных x и y.

Если каждому $z \in$ D соответствует несколько различных значений w, то функция $w=f(z)$ называется **многозначной.**

Определение. Функция $w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ имеет **предел** в точке z_0, равный числу $A = a + ib$, если $\lim\limits_{|z-z_0|\to 0}\left|f(z) - A\right| = 0$

$$\lim_{z\to z_0} f(z) = A.$$

Свойства функций комплексного переменного.

Для функций комплексного переменного $f(z)$ и $g(z)$ справедливы следующие свойства:

1) $\lim\limits_{z\to z_0}\left[f(z) \pm g(z)\right] = \lim\limits_{z\to z_0} f(z) \pm \lim\limits_{z\to z_0} g(z)$
2) $\lim\limits_{z\to z_0}\left[f(z) \cdot g(z)\right] = \lim\limits_{z\to z_0} f(z) \cdot \lim\limits_{z\to z_0} g(z)$
3) $\lim\limits_{z\to z_0}\dfrac{f(z)}{g(z)} = \dfrac{\lim\limits_{z\to z_0} f(z)}{\lim\limits_{z\to z_0} g(z)}; \qquad \lim\limits_{z\to z_0} g(z) \neq 0.$

Определение. Функция $w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ называется **непрерывной** в точке z_0, если выполняется равенство

$$\lim_{z\to z_0} f(z) = f(z_0)$$

Основные трансцендентные функции.

Определение. **Трансцендентными** называются аналитические функции, которые не являются алгебраическими.

Если аргументом показательной или тригонометрических функций является комплексное число, то определение этих функций, вводимое в элементарной алгебре теряет смысл.

Рассмотрим разложение в степенной ряд следующих функций:

$$e^z = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \ldots + \frac{z^n}{n!} + \ldots$$

$$\sin z = \frac{z}{1!} - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \ldots + (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots$$

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \ldots + (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} + \ldots$$

Функции e^z, cosz, sinz связаны между собой формулой Эйлера. Эта формула может быть очень легко получена сложением соотвествующих рядов.

$$e^{-iz} = \cos z + i \sin z$$

Также справедливы равенства:

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

$$e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x(\cos y + i \sin y)$$

$$e^{z_1+z_2} = e^{z_1} e^{z_2}; \qquad \left(e^z\right)^m = e^{zm}; \qquad e^{z+2\pi i} = e^z;$$

$$tgz = \frac{\sin z}{\cos z} = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{i(e^{iz} + e^{-iz})};$$

$$ctgz = \frac{\cos z}{\sin z} = \frac{i(e^{iz} + e^{-iz})}{e^{iz} - e^{-iz}};$$

Для тригонометрических функций комплексного аргумента справедливы основные тригонометрические тождества (синус и косинус суммы, разности и т.д.), которые справедливы для функций действительного аргумента.

__Определение.__ **Гиперболическим синусом, косинусом, тангенсом и котангенсом** называются соответственно функции:

$$sh\,z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}; \quad ch\,z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}; \quad th\,z = \frac{sh\,z}{ch\,z} = \frac{e^z - e^{-z}}{e^z + e^{-z}}; \quad cth\,z = \frac{ch\,z}{sh\,z} = \frac{e^z + e^{-z}}{e^z - e^{-z}};$$

Гиперболические функции могут быть выражены через тригонометрические:

$$sh\,z = -i \sin iz; \qquad ch\,z = \cos iz;$$

$$th\,z = -itg\,iz; \qquad cth\,z = ictg\,iz;$$

Гиперболические функции *sh z* и *ch z* имеют период $2\pi i$, а функции *th z* и *cth z* – период πi.

<u>Определение.</u> Логарифмическая функция комплексного аргумента определяется как функция, обратная показательной.

$$e^w = z; \qquad w = Lnz.$$

Если $w = u + iv$, то $\left|e^w\right| = e^u$ и $Arg\, e^w = \arg z + 2\pi k = v$.

Тогда $e^u = |z|; \qquad u = \ln|z|$.

Итого: $w = Lnz = \ln|z| + i\arg z + 2\pi ik; \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, ...$

Для комплексного числа $z = a + ib \qquad \arg z = arctg\dfrac{b}{a};$

<u>Определение.</u> Выражение $\ln z = \ln|z| + i\arg z$ называется **главным значением логарифма.**

Логарифмическая функция комплексного аргумента обладает следующими свойствами:

1) $\ln(z_1 z_2) = \ln z_1 + \ln z_2;$

2) $\ln\dfrac{z_1}{z_2} = \ln z_1 - \ln z_2;$

3) $\ln(z)^n = n\ln z;$

4) $\ln\sqrt[n]{z} = \dfrac{1}{n}\ln z;$

Обратные тригонометрические функции комплексного переменного имеют вид:

$$Arc\cos z = -i\left[\ln\left|z \pm \sqrt{z^2 - 1}\right| + i\left[\arg(z \pm \sqrt{z^2 - 1}) + 2\pi k\right]\right] = \frac{1}{i}Ln\left(z + \sqrt{z^2 - 1}\right)$$

$$Arc\sin z = -i\left[\ln\left|iz \pm \sqrt{1 - z^2}\right| + i\left[\arg(iz \pm \sqrt{1 - z^2}) + 2\pi k\right]\right] = \frac{1}{i}Ln\left(iz + \sqrt{1 - z^2}\right)$$

$$Arctgz = -i\left[\ln\left|\frac{1 + zi}{1 - zi}\right| + i\left(\arg\frac{1 + zi}{1 - zi} + 2\pi k\right)\right] = \frac{1}{2i}Ln\frac{i - z}{i + z}$$

$$Arshz = \ln\left|z \pm \sqrt{z^2 + 1}\right| + i\left[\arg(z \pm \sqrt{z^2 + 1}) + 2\pi k\right] = Ln\left(z \pm \sqrt{z^2 + 1}\right)$$

$$Archz = \ln\left|z \pm \sqrt{z^2 - 1}\right| + i\left[\arg(z \pm \sqrt{z^2 - 1}) + 2\pi k\right] = Ln\left(z \pm \sqrt{z^2 - 1}\right)$$

$$Arcthz = \frac{1}{2}Ln\frac{1 + z}{1 - z}$$

<u>Производная функций комплексного переменного.</u>

<u>Определение.</u> Производной от однозначной функции $w = f(z)$ в точке z называется предел:

$$\lim_{\Delta z \to 0}\frac{\Delta w}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0}\frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} = f'(z) = \frac{dw}{dz}$$

<u>Определение.</u> Функция *f(z)*, имеющая непрерывную производную в любой точке области D называется **аналитической** функцией на этой области.

Правила дифференцирования функций комплексного аргумента не отличаются от правил дифференцирования функций действительной переменной.

Аналогично определяются производные основных функций таких как синус, косинус, тангенс и котангенс, степенная функция и т.д.

Производные гиперболических функций определяются по формулам:

$$(shz)' = chz; \qquad (chz)' = shz;$$

$$(thz)' = \frac{1}{ch^2 z};$$

Вывод правил интегрирования, значений производных основных функций ничем не отличается от аналогичных операций с функциями действительного аргумента, поэтому подробно рассматривать их не будем.

<u>Условия Коши – Римана.</u>

Рассмотрим функцию комплексной переменной $w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, определенную на некоторой области и имеющую в какой – либо точке этой области производную

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z}$$

Стремление к нулю $\Delta z \to 0$ может осуществляться в следующих случаях:

1) $\Delta z = \Delta x + i0 = \Delta x; \qquad \Delta x \to 0;$
2) $\Delta z = 0 + i\Delta y; \qquad \Delta y \to 0;$

В первом случае:

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = \lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{u(x + \Delta x, y) - u(x, y)}{\Delta x} + i \frac{v(x + \Delta x, y) - v(x, y)}{\Delta x} \right] =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x + \Delta x, y) - u(x, y)}{\Delta x} + i \lim_{\Delta x \to 0} \frac{v(x + \Delta x, y) - v(x, y)}{\Delta x} = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x}.$$

Во втором случае:

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = \lim_{\Delta y \to 0} \left[\frac{u(x, y + \Delta y) - u(x, y)}{i\Delta y} + i \frac{v(x, y + \Delta y) - v(x, y)}{\Delta y} \right] =$$

$$= -i \lim_{\Delta y \to 0} \frac{u(x, y + \Delta y) - u(x, y)}{\Delta y} + \lim_{\Delta y \to 0} \frac{v(x, y + \Delta y) - v(x, y)}{\Delta y} = -i \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y}.$$

Тогда должны выполняться равенства:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}; \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x};$$

Эти равенства называются условиями Коши – Римана, хотя еще раньше они были получены Эйлером и Даламбером.

<u>Теорема.</u> *Если функция* $w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ *имеет производную в точке z = x + iy, то ее действительные компоненты u и v имеют в точке (x, y) частные производные первого порядка, удовлетворяющие условию Коши – Римана.*

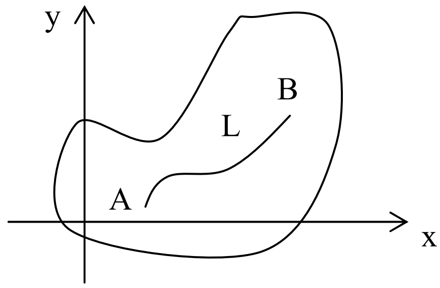
Также справедлива и обратная теорема.

На основании этих теорем можно сделать вывод, что из существования производной следует непрерывность функции.

<u>Теорема.</u> *Для того, чтобы функция* $w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ *была аналитической на некоторой области необходимо и достаточно, чтобы частные производные первого прядка функций u и v были непрерывны на этой области и выполнялись условия Коши – Римана.*

<u>Интегрирование функций комплексной переменной.</u>

Пусть $w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ - непрерывная функция комплексного переменного z, определенная в некоторой области и L – кривая, лежащая в этой области.



Кривая L задана уравнением $z = z(t) = x(t) + iy(t); \qquad \alpha \le t \le \beta$

<u>Определение.</u> **Интеграл** от функции f(z) вдоль кривой L определяется следующим образом:

$$\int_L f(z)dz = \int_L (u + iv)(dx + idy) = \int_L (udx - vdy) + i\int_L (vdx + udy) =$$

$$= \int_\alpha^\beta [u(x(t), y(t))x'(t) - v(x(t), y(t))y'(t)]dt + i\int_\alpha^\beta [v(x(t), y(t))x'(t) + u(x(t), y(t))y'(t)]dt$$

Если учесть, что $z'(t) = x'(t) + iy'(t); \qquad u(x(t), y(t)) = u(z(t))$, то

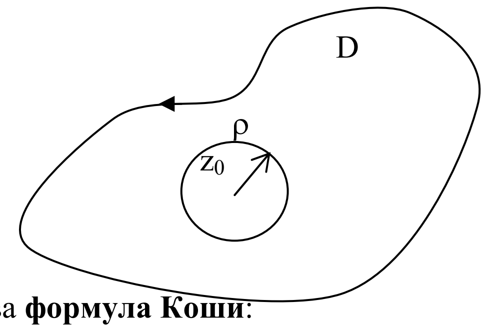
$$\int_L f(z)dz = \int_\alpha^\beta f[z(t)]z'(t)dt$$

<u>Теорема.</u> (Теорема Коши) *Если f(z) - аналитическая функция на некоторой области, то интеграл от f(z) по любому кусочно – гладкому контуру, принадлежащему этой области равен нулю.*

$$\int_L f(z)dz = 0$$

Интегральная формула Коши.

Если функция *f(z)* – аналитическая в односвязной замкнутой области с кусочно – гладкой границей L.



Тогда справедлива **формула Коши**:

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{f(z)}{z - z_0}dz$$

где z_0 – любая точка внутри контура L, интегрирование по контуру производится в положительном направлении (против часовой стрелки).

Эта формула также называется **интегралом Коши.**

Ряды Тейлора и Лорана.

(Пьер Альфонс Лоран (1813 – 1854) – французский математик)

Функция f(z), аналитическая в круге $|z - z_0| < R$, разлагается в сходящийся к ней степенной ряд по степеням $(z – z_0)$.

Коэффициенты ряда вычисляются по формулам:

$$c_k = \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{f(z)dz}{(z - z_0)^{k+1}}; \qquad k = 0,1,2,...$$

Степенной ряд с коэффициентами такого вида называется **рядом Тейлора.**

Рассмотрим теперь функцию f(z), аналитическую в кольце $r < |z - z_0| < R$. Эта функция может быть представлена в виде сходящегося ряда:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{(z - z_0)^n}$$

$$c_n = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(t)dt}{(t - z_0)^{n+1}}; \qquad n = 0,\pm 1,\pm 2,...$$

Ряд такого вида называется **рядом Лорана**. При этом функция f(z) может быть представлена в виде суммы:

$$f(z) = f_1(z) + f_2(z); \qquad f_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n; \quad f_2(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{(z - z_0)^n};$$

Ряд, определяющий функцию $f_1(x)$, называется **правильной частью** ряда Лорана, а ряд, определяющий функцию $f_2(x)$, называется **главной частью** ряда Лорана.

Если предположить, что $r = 0$, то можно считать, что функция аналитична в открытом круге $0 < |z - z_0| < R$ за исключением центральной точки z_0. Как правило, в этой точке функция бывает не определена.

Тогда точка z_0 называется **изолированной особой точкой** функции *f*.

Рассмотрим следующие частные случаи:

1) Функция f(x) имеет вид: $f(z) = f_1(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z - z_0)^k$. Т.к. степенной ряд сходится во всех точках внутри круга, то его сумма $f_1(x)$ определена и непрерывно дифференцируема во всех точках круга, а, следовательно, и в центре круга z_0.

В этом случае говорят, что **особенность функции f в точке z_0 устранима.** Для устранения особой точки достаточно доопределить функцию в центре круга ($f(z_0) = c_0$) и функция будет аналитической не только в окрестности центра круга, но и в самом центре.

В этом случае $\int_L f(z)dz = 0$ для любого контура L, содержащего точку z_0 и принадлежащего к кругу $|z - z_0| < R$.

2) Функция f(x) имеет вид: $f(z) = f_1(z) + \sum_{k=1}^{m} \frac{c_{-k}}{(z - z_0)^k} = \sum_{k=-m}^{\infty} c_k (z - z_0)^k$.

В этом случае точка z_0 называется **полюсом функции f(z) порядка (кратности) m.** При m = 1 точку z_0 называют еще **простым полюсом.**

Порядок полюса может быть определен по формуле:

$$\lim_{z \to z_0} (z - z_0)^m f(z) = c \neq 0$$

z_0 – полюс порядка *m*.

3) Функция f(z) имеет вид $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z - z_0)^k + \sum_{k=1}^{m} \frac{c_{-k}}{(z - z_0)^k} = f_1(z) + f_2(z)$, где в ряду $f_2(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_{-k}}{(z - z_0)^k}$ не равно нулю бесконечное количество коэффициентов c_{-k}.

В этом случае говорят, что функция f(z) имеет в точке z_0 **существенно особую точку.**

Определение. Пусть z_0 – изолированная особая точка функция f(z), т.е. пусть функция f(z) – аналитическая в некотором круге $|z - z_0| < R$ из которого исключена точка z_0. Тогда интеграл

$$\frac{1}{2\pi i} \int_L f(z)dz = \underset{z=z_0}{Выч} f(z)$$

называется **вычетом** функции f(z) в точке z_0, где L – контур в круге $|z - z_0| < R$, ориентированный против часовой стрелки и содержащей в себе точку z_0.

Вычет также обозначают иногда $\operatorname*{Res}_{z_0} f(z)$.

Если $f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k (z - z_0)^k$; $\quad 0 < |z - z_0| < R$; есть ряд Лорана функции f в точке z_0, то $\underset{z=z_0}{Выч} f(z) = c_{-1}$.

Таким образом, если известно разложение функции в ряд Лорана, то вычет легко может быть найден в случае любой особой точки.

В частных случаях вычет может быть найден и без разложения в ряд Лорана.

Например, если функция $f(z) = \dfrac{\varphi(z)}{\psi(z)}$, $\varphi(z_0) \neq 0$, а $\psi(z)$ имеет простой нуль при $z = z_0$ $(\psi(z_0) = 0, \quad \psi'(z_0) \neq 0)$, то $z = z_0$ является простым полюсом функции f(z).

Тогда можно показать, что вычет находится по формуле

$$\underset{z=z_0}{Выч} = c_{-1} = \frac{\varphi(z_0)}{\psi'(z_0)}$$

Если $z = z_0$ – полюс порядка $m \geq 1$, то вычет может быть найден по формуле:

$$\underset{z=z_0}{Выч} f(z) = c_{-1} = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \to z_0} \frac{d^{m-1}[(z - z_0)^m f(z)]}{dz^{m-1}}$$

Практические работы

Практическая работа 1

Функция. Построение графика функции

1. Понятие функции

Пусть даны два множества X и Y.

Опр. Говорят, что задано отображение множества X во множество Y, или, что то же самое, задана функция на X со значениями в Y, если всякому $x \in X$ по некоторому правилу f поставлен элемент $y \in Y$.

Пишут $f\colon X \to Y,\ x \xrightarrow{f} y$.

Элемент $y = f(x)$ называют *образом* элемента x при отображении f. Элемент x также называют *аргументом* функции $f(x)$. Множество X называется *областью определения* функции f, множество $\hat{Y} \subseteq Y$ всех тех y, которым соответствует хотя бы одно значение x, называется *областью значений* функции f.

«Золотые правила» для нахождения области определения функции:

1) $\dfrac{1}{u}$, где $u \neq 0$;
2) $\dfrac{1}{\sqrt{u}}$, где $u > 0$;
3) $\sqrt[2n]{u}$, где $n \in Z$, $u \geq 0$;
4) $log\, u$, где $u > 0$;
5) $\begin{cases} \arcsin u \\ \arccos u \end{cases}$, где $|u| \leq 1$.

Замечание. Если в определении функции $f\colon X \to Y$ каждому $x \in X$ ставится в соответствие *единственный* элемент $y \in Y$, то такая функция называется *однозначной* или *однолистной*. В математике изучают и многозначные отображения, когда каждому элементу х может соответствовать несколько значений у (и даже бесконечно много). Мы в нашем курсе будем изучать лишь однозначные функции.

Пр. Функция $y = \sqrt{1 - x^2}$ - однозначная функция; функция $x^2 + y^2 = 1$ - многозначная функция.

2. Свойства функции

Опр. Функция называется четной (нечетной), если выполняются два условия:

1) область определения функции $D(f)$ симметрична относительно начала координат;
2) для любого $x \in D(f)$ справедливо равенство $f(-x) = f(x)$ ($f(-x) = -f(x)$).

График четной функции симметричен относительно оси Oy. График нечетной функции симметричен относительно начала координат. Функция, не являющаяся ни четной, ни нечетной, называется функцией общего вида.

Опр. Функция f называется монотонно возрастающей или неубывающей (монотонно убывающей или не возрастающей) на множестве X, если для любых двух точек x_1 и x_2 из X, удовлетворяющих неравенству $x_1 < x_2$, выполняется неравенство $f(x_1) \le f(x_2)$ ($f(x_1) \ge f(x_2)$). И называется строго монотонно возрастающей (строго монотонно убывающей), если из условия $x_1 < x_2$ следует $f(x_1) < f(x_2)$ ($f(x_1) > f(x_2)$).

Опр. Функция называется периодической, если существует число $T \neq 0$, что для любого $x \in D(f)$ справедливы условия:

$x + T \in D(f)$;

$f(x + T) = f(x)$.

Число T называется периодом функции $f(x)$.

3. Основные элементарные функции

Опр. Элементарной называется функция, полученная из основных элементарных функций конечным числом их композиций и арифметических операций.

К основным элементарным функциям относятся:

Степенная функция

a)

Вид функции	$y = x^n$, $n \in \mathbf{N}$	
	n - четно	n - нечетно
Область определения	R	R
Множество значений	$[0; \infty)$	R
Четность, нечетность	четная	нечетная
Монотонность	↓ на $(-\infty; 0)$; ↑ на $(0; \infty)$	↑ на $D(y)$
Периодичность	–	–
График функции		

b)

Вид функции	$y = x^{-n}$, $n \in \mathbf{N}$	
	n - четно	n - нечетно
Область определения	$(-\infty; 0)$U$(0; \infty)$	$(-\infty; 0)$U$(0; \infty)$
Множество значений	$(0; \infty)$	$(-\infty; 0)$U$(0; \infty)$
Четность, нечетность	четная	нечетная
Монотонность	↓ на $(-\infty; 0)$; ↑ на $(0; \infty)$	↑ на $D(y)$
Периодичность	–	–
График функции		

c)

Вид функции	$y = \sqrt[n]{x}$, $n \in \mathbf{N}$, $n \neq 1$	
	n - четно	n - нечетно
Область определения	$[0; \infty)$	R
Множество значений	$[0; \infty)$	R
Четность, нечетность	общего вида	нечетная
Монотонность	↑ на $D(y)$	↑ на $D(y)$
Периодичность	–	–
График функции		

Показательная функция

Вид функции	$y = a^x$, $a>0$, $a \neq 1$	
	$0<a<1$	$a>1$
Область определения	R	R
Множество значений	$(0; \infty)$	***(0; ∞)***
Четность, нечетность	общего вида	общего вида
Монотонность	↓ на $D(y)$	↑ на $D(y)$

Периодичность	–	–
График функции		

Логарифмическая функция

Вид функции	$y = \log_a x$, a>0, a≠1	
	0<a<1	a>1
Область определения	(0; ∞)	***(0; ∞)***
Множество значений	R	R
Четность, нечетность	общего вида	общего вида
Монотонность	↓ на $D(y)$	↑ на $D(y)$
Периодичность	–	–
График функции		

Тригонометрические функции

a)

Вид функции	$y=sinx$,
Область определения	R
Множество значений	[-1; 1]
Четность, нечетность	нечетная
Монотонность	↓ на $\left(\frac{\pi}{2}+2\pi n;\frac{3\pi}{2}+2\pi n\right)$ ↑ на $\left(-\frac{\pi}{2}+2\pi n;\frac{\pi}{2}+2\pi n\right)$, $n \in \boldsymbol{Z}$
Периодичность	Период T=2π
График функции	

b)

Вид функции	$y=cosx$,
Область определения	R
Множество значений	[-1; 1]
Четность, нечетность	четная
Монотонность	↓ на $\left(2\pi n;\pi+2\pi n\right)$ ↑ на $\left(-\pi+2\pi n;2\pi n\right)$, $n \in \boldsymbol{Z}$
Периодичность	Период T=2π
График функции	

c)

Вид функции	$y=tgx$,
Область определения	$\left(-\frac{\pi}{2}+\pi n;\frac{\pi}{2}+\pi n\right)$, $\mathbf{n} \in Z$
Множество значений	R
Четность, нечетность	нечетная
Монотонность	↑ на $D(y)$
Периодичность	Период T=π
График функции	

d)

Вид функции	$y=ctgx$,
Область определения	$\left(\pi n;\pi+\pi n\right)$, $\mathbf{n} \in Z$
Множество значений	R

Четность, нечетность	четная
Монотонность	↓ на $D(y)$
Периодичность	Период $T=\pi$
График функции	

Обратные тригонометрические функции

a)

Вид функции	$y=arcsinx$,
Область определения	[-1; 1]
Множество значений	$\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$
Четность, нечетность	нечетная
Монотонность	↑ на $D(y)$
Периодичность	-
График функции	

b)

Вид функции	$y=arccosx$,
Область определения	[-1; 1]
Множество значений	$[0;\pi]$
Четность, нечетность	общего вида
Монотонность	↓ на $D(y)$
Периодичность	-
График функции	

c)

Вид функции	$y=arctgx$,
Область определения	R
Множество значений	$\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$
Четность, нечетность	нечетная
Монотонность	↑ на $D(y)$
Периодичность	-
График функции	

d)

Вид функции	$y=arcctgx$,
Область определения	R
Множество значений	$(0;\pi)$
Четность, нечетность	общего вида
Монотонность	↓ на $D(y)$
Периодичность	-
График функции	

Гиперболические функции

a)

Вид функции	$y=shx$, где $shx=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$
Область определения	R
Множество значений	R
Четность, нечетность	нечетная

Монотонность	↑ на $D(y)$
Периодичность	-
График функции	

b)

Вид функции	$y=chx$, где $shx=\dfrac{e^{x}+e^{-x}}{2}$
Область определения	R
Множество значений	[1; ∞)
Четность, нечетность	четная
Монотонность	↓ на (-∞; 0); ↑ на (0; ∞)
Периодичность	-
График функции	

c)

Вид функции	$y=thx$, где $thx=\dfrac{shx}{chx}=\dfrac{e^{x}-e^{-x}}{e^{x}+e^{-x}}$
Область определения	R
Множество значений	(-1; 1)
Четность, нечетность	нечетная
Монотонность	↑ на $D(y)$
Периодичность	-
График функции	

d)

Вид функции	$y=cthx$, где $thx=\dfrac{chx}{shx}=\dfrac{e^{x}+e^{-x}}{e^{x}-e^{-x}}$
Область определения	(-∞; 0)U(0; ∞)
Множество значений	(-∞; -1)U(1; ∞)
Четность, нечетность	нечетная
Монотонность	↓ на $D(y)$
Периодичность	-
График функции	

4. Суперпозиция (композиция) отображений. Сложная и обратная функции

Опр. Пусть область значений функции $y = f(x)$ содержится в области определения функции $g(y)$. Тогда функция $z = g(f(x))$, $x \in D(f)$ называется сложной функцией или композицией функций f и g и обозначается $f \circ g$.

Опр. Пусть для любых различных значений $x_1, x_2 \in D(f)$ справедливо, что $f(x_1) \neq f(x_2)$. Тогда для любого $y \in E(f)$ найдется только одно значение $x = g(x) \in D(f)$, такое, что $y = f(x)$. Функция $x = g(x)$, определенная на $E(f)$, называется обратной для функции $f(x)$, причем $E(g) = D(f)$.

График функции $g(x)$, обратной для функции $f(x)$, симметричен графику $f(x)$ относительно прямой $y = x$.

5. График функции

Опр. Пусть заданы прямоугольная система координат Oxy и функция $y= f(x)$. Графиком функции $f(x)$ называется множество всех точек плоскости с координатами $(x; f(x))$, где $x \in D(f)$.

Множество точек на координатной плоскости является графиком некоторой функции в том и только в том случае, когда каждая вертикальная прямая (т. е. параллельная оси *Oy*) пересекает его не более чем в одной точке.

График функции $y = f(x)$ зачастую можно построить с помощью преобразований графика уже известной функции $y = f(x)$.

Функция	Преобразование
$f(x)+A$, $A\neq 0$	Сдвиг вверх по оси *Oy* графика функции $y = f(x)$ на A единиц, если $A>0$, «вниз» на $\lvert A\rvert$ единиц, если $A<0$.
$f(x-a)$, $a\neq 0$	Сдвиг вправо по оси *Ox* графика функции $y = f(x)$ на a единиц, если $a>0$, «вниз» на $\lvert a\rvert$ единиц, если $a<0$.
$kf(x)$, $k>0$, $k\neq 1$	Растяжение вдоль оси *Oy* относительно оси *Ox* в k раз, если $k>1$, сжатие вдоль оси *Oy* в $1/k$ раз, если $0<k<1$
$f(kx)$, $k>0$, $k\neq 1$	Сжатие вдоль оси *Ox* относительно оси *Oy* в k раз, если $k>1$, растяжение в $1/k$ раз, если $0<k<1$
$-f(x)$	Симметричное отображение графика относительно оси *Ox*.
$f(-x)$	Симметричное отображение графика относительно оси *Oy*.
$\lvert f(x)\rvert$	Часть графика, расположенная ниже оси *Ox*, симметрично отображается относительно этой оси, остальная часть остается без изменения
$f(\lvert x\rvert)$	Стереть часть графика функции $y = f(x)$, лежащую слева от оси *Oy*; оставить часть графика $y = f(x)$, лежащую справа от оси *Oy* и на ней; часть графика функции $y = f(x)$, расположенную в области $x \geq 0$, симметрично отобразить относительно оси *Oy* в область $x < 0$.

Выполнить следующие задания:

1. *Найти области определения функций:*

1.1 $y=\sqrt{x+2}$

1.2 $y=\sqrt{9-x^2}$

1.3 $y=\sqrt{4x-x^2}$

1.4 $y=\sqrt{-x}+\sqrt{4+x}$

1.5 $y=-\dfrac{x\sqrt{16-x^2}}{2}$

1.6 $y=\dfrac{2}{\sqrt{25-x^2}}$

1.7 $y=\dfrac{5-\sqrt{x-2}}{\sqrt{5-x}}$

1.8 $y=\sqrt[3]{1-x}+\sqrt[5]{x-3}$

1.9 $y=2^x$

1.10 $y=\arcsin\dfrac{x-1}{2}$

1.11 $y=\dfrac{x\left(2\pm\sqrt{x}\right)}{4}$

1.12 $y=\pm x\sqrt{4-x}$

1.13 $y=-\sqrt{2\sin x}$

1.14 $y=\sqrt{3+x}+\sqrt[4]{7-x}$

1.15 $y=x\arcsin x$

1.16 $y=\dfrac{1+x}{1-x}$

1.17 $y=\sqrt{4-x^2}+\dfrac{1}{x}$

1.18 $y=\arccos\left(\dfrac{x}{2}-1\right)$

1.19 $y=\dfrac{1}{xe^x}$

1.20 $y=\dfrac{x-2}{\cos 2x}$

1.21 $y=\dfrac{2x^2+3}{x-\sqrt{x^2-4}}$

1.22 $y=\lg(3x-1)+2\lg(x+1)$

1.23 $y=\sqrt{\dfrac{x}{2-x}}-\sqrt{\sin x}$

2. *Найти множества значений функций:*

2.1 $y=|x|+1$

2.2 $y=\dfrac{5}{x}$

2.3 $y=\sqrt{16-x^2}$

2.4 $y=-x^2+8x-13$

2.5 $y=1-3\cos x$

2.5 $y=4^{-x^2}$

3. *Установить четность или нечетность функций:*

3.1 $y=x^4\sin 7x$

3.2 $y=5|x|-3\sqrt[3]{x^2}$

3.3 $y=x^4-3x^2+x$

3.4 $y=|x|+2$

3.5 $y=|x+2|$

3.6 $y=\lg\cos x$

3.7 $y=\dfrac{16^x-1}{4^x}$

4. *Найти основные периоды функций:*

4.1 $y=\sin 5x$

4.2 $y=-2\cos\dfrac{x}{3}+1$

4.3 $y=\lg\cos 2x$

4.4 $y=tg3x+\cos 4x$

5. *Построить эскизы графиков следующих функций:*

5.1 $y=-x^2$

5.2 $y=-\dfrac{1}{x}$

5.3 $y=3\log_2 x$

5.4 $y=-\dfrac{1}{3}\cdot 5^x$

5.5 $y=\sin(-x)$

5.6 $y=\sqrt{-x}$

5.7 $y=\sin 2x$

5.8 $y=\cos\dfrac{1}{2}x$

5.9 $y=(x-2)^2$

5.10 $y=(x+1)^3$

5.11 $y=2-3\cos x$

5.12 $y=\dfrac{1}{2}\sin\left(3x+\dfrac{\pi}{4}\right)$

5.13 $y=\left|x^2+3x\right|$

5.14 $y=\cos|x|$

6. *Построить график следующих функций:*

6.1 $y=\begin{cases}-x^2, x<0,\\ 3x, x\geq 0.\end{cases}$

6.2 $y=\begin{cases}x, x\leq -\dfrac{\pi}{2},\\ tgx, -\dfrac{\pi}{2}<x<\dfrac{\pi}{2},\\ \sin\dfrac{1}{2}x, x\geq\dfrac{\pi}{2}.\end{cases}$

6.3 $y=\begin{cases}4-x, x<-1,\\ 5, -1\leq x\leq 0,\\ x^2+5, x>0.\end{cases}$

6.4 $y=\begin{cases}-5x-15, x\leq -3,\\ 3, -3<x\leq 0,\\ \dfrac{1}{x}, 0<x\leq 2,\\ \log_2 x, x>2.\end{cases}$

Практическая работа 2

Предел функции

Выполнить следующие задания:

1. *Изобразите точками на плоскости следующие последовательности, заданные общими членами:*

1.1 $a_n=\dfrac{1}{n+1}$

1.2 $a_n=\dfrac{1+(-1)^n}{n}$

1.3 $a_n=\dfrac{1}{n^2}$

1.4 $a_n=\dfrac{n+1}{2n}$

1.5 $a_n=\dfrac{3n+1}{n}$

2. *Показать, что при* $n\to\infty$ *по определению:*

2.1 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(2+\dfrac{1}{n}\right)=2$

2.2 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{3n+4}{2n+1}\right)=\dfrac{3}{2}$

2.3 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{4n-3}{n+1}\right)=4$

2.4 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n-1}{2-5n}\right)=-\dfrac{1}{5}$

3. *Найти пределы:*

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2+2x+4}{3x+1}$

2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{8x^2+4x+1}{2x+1}$

3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5x^2+4x-2}{2x^2+x}$

4. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{2x^2+4x+5}{x^2-4}$

5. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^2-4x+2}{3x^3+2}$

6. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{2x^2+2x-4}{x^2+3x-2}$

7. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^3-2x}{2x^2-x}$

8. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4x^2-x}{2x^2-x}$

9. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-9}{x-3}$

10. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-16}{x+4}$

11. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2+4x+16}{x^3-64}$

12. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^3+8}{x+2}$

13. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3x^2-5x-24}{2x^2-x-6}$

14. $\lim\limits_{x\to -5}\dfrac{2x^2+15x+25}{5-4x-x^2}$

15. $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{2-\sqrt{x-3}}{49-x^2}$

16. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-16}{1-\sqrt{5-x}}$

17. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$

18. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x+3}-2}{x^3-1}$

19. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{7x^3+2x-1}{3x^3-2x-5}$

20. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{6x^7-3x^2+x}{4x^6-6+4x^7}$

21. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{5x^3+3x-6}{4x+16-x^3}$

22. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{4x^5+7x^3-3}{2x^4-5x^2+3}$

23. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{x}$

24. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{\sin 4x}$

25. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 3x}{x^2}$

26. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4x^2}{\sin^2 2x}$

27. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$

28. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos^2 x}{x^2}$

29. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg^2 3x}{2x^2}$

30. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-\cos^3 x}{x^2\cos x}$

31. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+2x)}{\arcsin 3x}$

32. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-1}{\ln(1-6x)}$

33. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2^{\sin x}-1}{x}$

34. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1+x^2}-1}{1-\cos x}$

Практическая работа 3

Непрерывность функции

Исследовать на непрерывность и построить графики функций

1. $y=\dfrac{x}{x^2-4}$

2. $y=3^{\frac{1}{1-x^2}}$

3. $y=2^{\frac{1}{x-1}}$

4. $y=arctg\dfrac{3}{x-3}$

5. $y = \arccos\dfrac{1}{2x-3}$

6. $y = \dfrac{x^2}{x^2-9}$

7. $y = 6^{\frac{x}{x^2-9}}$

8. $y = 5^{\frac{4}{x^2-1}}$

9. $y = 4^{-\frac{1}{x-2}}$

10. $y = 3^{\frac{x}{4-x^2}}$

11. $y = arcctg\dfrac{1}{x-1}$

12. $y = \arcsin\dfrac{1}{|x|}$

13. $y = \dfrac{1}{\ln^2|x|}$

14. $y = x\sin\dfrac{\pi}{x}$

15. $y = \dfrac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}}$

16. $y = 2^{-2^{\frac{1}{1-x}}}$

17. $y = \left[\dfrac{1}{x}\right]$

18. $y = (-1)^{[\sqrt{x}]}$

19. $y = (-1)^{[x]}$

20. $y = x^{\operatorname{sgn}(x^2-1)}$

21. $y = x + \dfrac{x+2}{|x+2|}$

22. $y = \dfrac{|x-1|}{x^2-x^3}$

23. $y = \begin{cases} x+3, & \text{если } x \le -1 \\ \dfrac{1}{x}, & \text{если } x > -1 \end{cases}$

24. $y = \begin{cases} -x, & \text{если } x \le 0 \\ \dfrac{1}{x-1}, & \text{если } x > 0 \end{cases}$

25. $y = \dfrac{x^2-x-2}{1-x}$

26. $y = \dfrac{x^2+\sin x}{x}$

27. $y = \sin\dfrac{\pi}{2x}$

28. $y = \dfrac{x^2+2x}{x+1}$

29. $y = x\cdot\operatorname{sgn}(\sin\pi x)$

30. $y = \dfrac{1}{\ln x}$

В задачах найти точки разрыва и устранить разрыв, если это возможно.

31. $y = \dfrac{(1+x)^n-1}{x}$

32. $y = \dfrac{2^x-1}{x}$

33. $y = \dfrac{1}{x}\ln\dfrac{1+x}{1-x}$

34. $y = \dfrac{\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x+1}}{\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{x}}$

35. $y = \frac{\ln(2+x)}{1+x}$

36. $y = \frac{1-\cos x}{x^2}$

37. $y = \frac{e^{3x} - e^3}{x-1}$

38. $y = x \cdot arctg\frac{1}{x}$

39. $y = \{\sin x\}$

40. $y = 1 - e^{-\frac{1}{(x-2)^2}}$

В задачах подобрать параметры так, чтобы функция была непрерывной.

41. $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 2x - 8}{x+2}, & \text{если } x \neq -2 \\ a, & \text{если } x = -2 \end{cases}$

42. $f(x) = \begin{cases} x-1, & \text{при } x \leq 1 \\ ax^2 - 2 & \text{при } x > 1 \end{cases}$

43. $f(x) = \begin{cases} ax+b, & \text{если } x < -1 \\ x^2+1, & \text{если } -1 \leq x \leq 2 \\ ax+bx^3, & \text{если } x > 2 \end{cases}$

44. $f(x) = \begin{cases} -2\sin x, & \text{если } x \leq -\frac{\pi}{2} \\ a\sin x + b, & \text{если } -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \\ \cos x, & \text{если } x \geq \frac{\pi}{2} \end{cases}$

45. $f(x) = \begin{cases} 2^{ax}, & \text{если } x < 1 \\ 5x+3, & \text{если } 1 \leq x \leq 3 \\ \log_b x^9, & \text{если } x > 3 \end{cases}$

46. $f(x) = \begin{cases} ax^2 + x, & \text{если } x < -1 \\ bx - x^4, & \text{если } -1 \leq x \leq 1 \\ ax^3 + bx^2 & \text{если } x > 1 \end{cases}$

Практическая работа 4

Производная функции

Найти производные $y'(x)$:

1. $y = x^{\sin x}$
2. $y = x^x$
3. $y = x^{\ln x}$
4. $y = (tgx)^{\cos x}$

5. $e^{xy} - \cos\left(x^2 + y^2\right) = 0$

6. $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$

7. $x^2 + y^2 = \ln\dfrac{y}{x} + 7$

8. $x\sin y + y\sin x = 0$

9. $x^4 - y^4 = x^2 y^2$

10. $e^y = e - xy$

11. $\begin{cases} x = t^3 + t; \\ y = t^2 + t + 1. \end{cases}$

12. $\begin{cases} x = t - \sin t; \\ y = 1 - \cos t. \end{cases}$

13. $\begin{cases} x = e^t \sin t; \\ y = e^t \cos t. \end{cases}$

14. $\begin{cases} x = \sin^2 t; \\ y = \cos^2 t. \end{cases}$

15. $y = tg3x, y'' = ?$

16. $y = -x\cos x, y'' = ?$

17. $y = \ln^2 x, y'' = ?$

18. $y = x\ln x, y''' = ?$

19. $y = e^{2x}, y^{(V)} = ?$

20. $y = \ln(1 + x), y^{(n)} = ?$

21. $\begin{cases} x = t^3; \\ y = t^2. \end{cases}$

$y''_{xx} = ?$

22. $\begin{cases} x = \cos t; \\ y = \sin t. \end{cases}$

$y''_{xx} = ?$

Найти уравнения касательной к данной кривой в точке x_0:

1. $y = e^x, x_0 = 0$
2. $y = \sin x, x_0 = \dfrac{\pi}{3}$

В какой точке касательная к кривой $y = \ln x$ *параллельна прямой*:

1. $y = 2x + 5.$
2. $y = x + \sqrt{3}$.

Найти углы, под которыми пересекаются кривые $y^2 = 2x$ *и* $x^2 + y^2 = 8$.

Практическая работа 5

Дифференциал функции

Найти дифференциалы функций:

1. $y = 2^{\cos x}$;
2. $y = \ln^3 \sin x$;
3. $f(x) = \sqrt[3]{x^5 - 1}$;
4. $S(t) = \dfrac{\sqrt{t}}{t - 1}$.

Найти приращение и дифференциал функции y в общем виде, а также в точке x_0*, если известно* Δx:

1. $y = 4x^2 + 1, x_0 = 1, \Delta x = 0{,}02$.
2. $y = |x|, x_0 = 10, \Delta x = -0{,}1$.

Вычислить приближенно:

1. $\sin 29^\circ$
2. $arctg 1{,}05$
3. $(0{,}99)^4$

Найти dy *и* $d^2 y$:

1. $y = \dfrac{x-1}{x+1}$
2. $y = x(\ln x - 1)$

Найти dy, $d^2 y$ *и* $d^3 y$, *где* $y = x^n$.

Практическая работа 6

Исследование функции

Лабораторная работа

Варианты:

Исследовать функции по общей схеме и построить график:

1. $y = \dfrac{x^2 - x - 6}{x - 2}$
2. $y = \dfrac{x^3}{9(x-2)}$
3. $y = \dfrac{3 - x^2}{x + 2}$

$y = \dfrac{x^3}{x^2 - 4}$

5. $y = \dfrac{x}{2} + \dfrac{2}{x}$
6. $y = \dfrac{2x - 1}{(x-1)^2}$
7. $y = \dfrac{1}{1 - x^2}$
8. $y = \dfrac{x^2 - 1}{x^4}$
9. $y = \dfrac{x^3}{9 - x^2}$
10. $y = 3\sqrt[3]{x^2} - 2x$
11. $y = 3x^5 - 5x^4$
12. $y = (x+1)e^{-x}$
13. $y = \dfrac{x^2 - 6x + 13}{x - 3}$
14. $y = \dfrac{x^4}{(1+x)^3}$
15. $y = \dfrac{4x}{1 + x^2}$
16. $y = \dfrac{x^2}{1 + x^2}$
17. $y = \dfrac{1}{x^2 - x}$
18. $y = x^2 + \dfrac{2}{x}$
19. $y = \dfrac{4x^3 - x^4}{5}$
20. $y = x^2 + \dfrac{1}{x^2}$

21. $y=\ln\frac{1+x}{1-x}$

22. $y=36x(x-1)^3$

23. $y=\sqrt[3]{x^3-3x}$

24. $y=\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^2$

25. $y=\frac{3\ln x}{\sqrt{x}}$

26. $y=x^3+\frac{x^4}{4}$

27. $y=\frac{(x-1)^2}{x^2+1}$

28. $y=x+\frac{1}{x^2}$

29. $y=\frac{x}{x^2-1}$

30. $y=\frac{x^3}{(x-2)^2}$

Практическая работа 7 – 8
Непосредственное интегрирование.
Замена переменной в неопределенном интеграле
Интегрирование по частям

Найти интегралы:

1. $\int\frac{x^4+x^2-6x}{x^3}dx$

2. $\int\left(\frac{5}{x}-\frac{10}{\sqrt[4]{x^3}}-\frac{3}{x^2+7}\right)dx$

3. $\int\sqrt{x}\left(x^2+1\right)dx$

4. $\int\frac{3+\sqrt{4-x^2}}{\sqrt{4-x^2}}dx$

5. $\int\frac{\left(x^3+2\right)^2}{\sqrt{x}}dx$

6. $\int\left(4\sin x+8x^3-\frac{11}{\cos^2 x}\right)dx$

7. $\int\cos 2xdx$

8. $\int(9x+2)^{17}dx$

9. $\int\frac{dx}{8x-1}$

10. $\int 4^{3-5x}dx$

11. $\int\sqrt{3x+4}dx$

12. $\int\frac{dx}{3x^2-25}$

13. $\int\cos^2 xdx$

14. $\int\frac{x-2}{x+3}dx$

15. $\int\frac{x^2}{x^2-9}dx$

16. $\int\frac{5+\sin^3 x}{\sin^2 x}dx$

17. $\int \frac{\sqrt{tg\,x}}{\cos^2 x}dx$

18. $\int \frac{e^x}{e^{2x}+9}dx$

19. $\int \frac{x^5}{\sqrt{x^6+7}}dx$

20. $\int \frac{dx}{\arccos x \cdot \sqrt{1-x^2}}$

21. $\int \frac{2x+3}{\left(x^2+3x-1\right)^4}dx$

22. $\int \cos^{11} 2x \cdot \sin 2x dx$

23. $\int \frac{7^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx$

24. $\int \frac{e^{1/x}}{x^2}dx$

25. $\int \frac{\ln 5x}{x}dx$

26. $\int ctg\, x dx$

27. $\int \frac{\cos x}{\sin^2 x}dx$

28. $\int 4x \cdot \sqrt[3]{x^2+8}dx$

29. $\int \frac{x}{x^4+1}dx$

30. $\int tg\, x dx$

31. $\int \frac{x^2}{\sqrt{x^6-4}}dx$

32. $\int e^{-x^3} \cdot x^2 dx$

33. $\int \frac{x\cos x}{\sin^3 x}dx$

34. $\int x^2 \ln x dx$

35. $\int x^3 e^x dx$

36. $\int \frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}dx$

37. $\int \cos \ln x dx$

38. $\int (2x+3)\cdot \cos x dx$

39. $\int \left(x^2-4x+1\right)e^{-x}dx$

40. $\int \frac{\arccos x}{\sqrt{1+x}}dx$

41. $\int \frac{x^2}{\left(x^2-1\right)^2}dx$

42. $\int e^{3x} \cdot \cos^2 x dx$

43. $\int e^{\sqrt{x}}dx$

44. $\int \frac{x}{\cos^2 x}dx$

45. $\int x^3 \cdot e^{x^2} dx$

46. $\int \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right) dx$

47. $\int \sin 2x \cdot \ln \sin x dx$

48. $\int x^2 \arccos 3x dx$

49. $\int x \cdot \sin \sqrt{x} dx$

50. $\int \arcsin^2 x dx$

51. $\int \frac{\cos \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx$

52. $\int arctg \sqrt{x} dx$

53. $\int \frac{dx}{\sin x}$

54. $\int \frac{\ln^2 x}{x \cdot \sqrt{3 - \ln x}} dx$

55. $\int \frac{e^{arctg\, x} + 8}{1 + x^2} dx$

56. $\int \frac{3x + 5\sin\left(\frac{1}{e^x}\right)}{e^x} dx$

Практическая работа 9

Интегрирование рациональных дробей

Найти интегралы:

1. $\int \frac{4dx}{x+3}$

2. $\int \frac{dx}{(x-1)^5}$

3. $\int \frac{11dx}{(x+2)^3}$

4. $\int \frac{dx}{x^2 + 10x + 29}$

5. $\int \frac{(x+6)dx}{x^2 - 2x + 17}$

6. $\int \frac{(4x-1)dx}{x^2 + x + 1}$

7. $\int \frac{dx}{\left(x^2+1\right)^3}$

8. $\int \frac{dx}{\left(x^2 - 4x + 29\right)^2}$

9. $\int \frac{3x-2}{\left(x^2 + 6x + 10\right)^2} dx$

10. $\int \frac{2x-3}{(x-5)(x+2)} dx$

11. $\int \frac{x+2}{x^2 - 6x + 5} dx$

12. $\int \frac{dx}{x^4 + x^2}$

13. $\int \frac{x^5 + x^4 - 8}{x^3 - 4x} dx$

14. $\int \frac{dx}{x^3 - 8}$

15. $\int \frac{7x^3 - 10x^2 + 50x - 77}{(x^2+9)(x^2+x-2)}dx$

Практическая работа 10

Интегрирование иррациональных функций

Найти интегралы:

1. $\int \frac{\sqrt[3]{x}dx}{\sqrt[3]{x^2} - \sqrt{x}}$
2. $\int \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt[4]{x}}$
3. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(2x+1)^2} - \sqrt{2x+1}}$
4. $\int \frac{dx}{1 + \sqrt[3]{x+1}}$
5. $\int \sqrt{x}\left(1 + \sqrt[3]{x}\right)^4 dx$
6. $\int \frac{dx}{x^4\sqrt{x^2+1}}$
7. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-2x-x^2}}$
8. $\int \frac{(x-2)dx}{\sqrt{x^2-10x+29}}$
9. $\int \frac{3x-5}{\sqrt{x^2-4x+5}}dx$
10. $\int \frac{x+1}{\sqrt{2x-x^2}}dx$
11. $\int \sqrt{4-x^2}dx$
12. $\int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}dx$

Практическая работа 11

Интегрирование тригонометрических функций

Найти интегралы:

1. $\int \frac{dx}{\cos x}$
2. $\int \frac{2-\sin x}{2+\cos x}dx$
3. $\int \frac{dx}{5\sin^2 x - 3\cos^2 x + 4}$
4. $\int \frac{dx}{4\sin^2 x + 9\cos^2 x}$
5. $\int \sin^5 x dx$
6. $\int \sin^4 x \cdot \cos^5 x dx$
7. $\int \frac{\sin 2x dx}{\cos^7 x}$
8. $\int \frac{\sin^4 x dx}{\cos x}$

9. $\int \sin^6 x dx$

10. $\int \sin^2 x \cdot \cos^4 x dx$

11. $\int \sin^4 x \cdot \cos^4 x dx$

12. $\int \sin x \cdot \sin 3x dx$

13. $\int \sin \frac{x}{12} \cdot \cos \frac{x}{3} dx$

14. $\int \cos x \cdot \cos 3x dx$

15. $\int ctg^6 x dx$

16. $\int tg^7 x dx$

Практическая работа 12

Вычисление определенного интеграла

Вычислить следующие интегралы:

1. $\int_1^{e^2} \frac{\ln^3 x}{3x} dx$;

2. $\int_0^1 \frac{4arctg\, x - x}{1 + x^2} dx$;

3. $\int_{-1}^0 \frac{3^x - 2^x}{6^x} dx$;

4. $\int_0^{\pi/4} tg^3 x dx$;

5. $\int \frac{xdx}{\sqrt{x+2} + \sqrt{3x+2}}$;

6. $\int_\pi^{2\pi} \frac{x + \cos x}{x^2 + 2\sin x} dx$;

7. $\int_1^e \frac{\sin \ln x}{x} dx$;

8. $\int_0^1 \frac{xdx}{\sqrt{x^4 + x^2 + 1}}$;

9. $\int\limits_{0}^{\pi/3} tg\,x \cdot \ln\cos x dx$.

Практическая работа 13

Несобственные интегралы

Вычислить интегралы или доказать их расходимость:

1. $\int\limits_{0}^{1} x^3 \ln x dx$

2. $\int\limits_{e^2}^{+\infty} \frac{dx}{x\ln^4 x}$

3. $\int\limits_{-\infty}^{0} xe^x dx$

4. $\int\limits_{1}^{3} \frac{dx}{(x-2)^2}$

5. $\int\limits_{2}^{+\infty} \frac{xdx}{\sqrt{(x^2-3)^3}}$

6. $\int\limits_{-3}^{1} \frac{xdx}{x^2-4}$

7. $\int\limits_{-1}^{2} \frac{dx}{x^2-x-2}$

8. $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{xdx}{(1+x^2)^2}$

9. $\int\limits_{-1}^{2} \frac{dx}{\sqrt[3]{x-1}}$

10. $\int\limits_{1}^{e} \frac{dx}{x\sqrt[4]{\ln x}}$

Практическая работа 14

Вычисление площади фигуры, длины дуги,
объема тела с помощью определенного интеграла

Вычислить площадь, ограниченную линиями:

1. $y^2 = 2x + 4$; $x = 0$.
2. $y = x^2$; $y = 2 - x^2$.
3. $y = x^3$; $y = 8$ и осью Ox.
4. $y = 0$; $x = 0$; $x = 4$; $y = x^2 + 2$.
5. $4y = 8x - x^2$; $4y = x + 6$.
6. $y = 2x – x^2$; $y = -x$.
7. $y = x^2 + 4x + 5$; $x = 0$; $y = 0$ и минимальной ординатой.
8. Вычислить площадь, ограниченную эллипсом: $\begin{cases} x = a\cos t, \\ y = a\sin t. \end{cases}$
9. Вычислить площадь, ограниченную первой аркой циклоиды $\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$ и осью *Ox*.
10. Вычислить площадь, ограниченную кривой $r = a\sin 2\varphi$.
11. Вычислить площадь, ограниченную окружностями $r = 2\sqrt{3}a\cos\phi$, $r = 2a\sin\phi$.

12.Вычислить площадь внутри лемнискаты Бернулли $r^2 = a^2 \cos 2\varphi$.

13.Вычислить объем тела, образованного вращением фигуры, ограниченной линиями: $y=x^3$; $x = 2$; $y = 0$ вокруг оси Ox.

14.Вычислить объем тела, образованного вращением одной аркой циклоиды: $\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$ вокруг оси Ox.

15.Скорость тела, брошенного вертикально вверх с начальной скоростью v_0, без учета сопротивления воздуха, дается формулой $v = v_0 - gt$, где t – протекшее время, g – ускорение силы тяжести. На какое расстояние от начального положения будет находиться тело через t секунд от момента бросания?

16.Вычислить давление воды на вертикальную плотину, имеющую форму трапеции, верхнее основание 20 метров, нижнее основание 10 метров и высотой 6 метров.

17.Вычислить работу, которую надо затратить, чтобы выкачать воду из котла полусферической формы, имеющего радиус R =10 м.

18.Вычислить момент инерции трапеции ABCD относительно ее основания AD, если AD = a, BC = b, а высота трапеции равна h.

19.Найти координаты центра тяжести дуги астроиды $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$, лежащей в первом квадранте.

20.Найти центр тяжести однородной фигуры, ограниченной эллипсом $4x^2 + 9y^2 = 36$ и окружностью $x^2 + y^2 = 9$ и расположенной в первом квадранте.

21.Скорость точки дается формулой $v = \sqrt{1+t}$ м / сек. Найти путь, пройденный телом за первые 10 сек. после начала движения.

22.вертикальный треугольник с основанием b и высотой h погружен в воду вершиной вниз так, что его основание находится на поверхности воды. Найти силу давления воды.

23.Вычислить работу, которую необходимо затратить, чтобы выключить воду из конического сосуда, обращенного вершиной вниз, радиус основания которого равен R и высота H.

24.Вычислить момент инерции относительно оси Ox параболического сегмента, ограниченного параболой $y = 4 - x^2$ и прямой $y = 3$.

25.Найти центр тяжести однородной дуги астроиды $\begin{cases} x = a\cos^3 t, \\ y = a\sin^3 t, \end{cases}$ расположенной правее оси Oy.

26. Найти центр тяжести фигуры, ограниченной первой аркой циклоиды $\begin{cases} x = a(1 - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t), \end{cases}$ и осью Ox.

27.Вычислить объем шара радиуса R.

28.Вычислить объем тела, образованного вращением фигуры вокруг оси Ох, ограниченной линиями у = x^3; х = 2; у = 0.
29.Вычислить объем тела, образованного вращением фигуры вокруг оси Оу, ограниченной линиями у = x^2; 8х = y^2.
30.Вычислить объем тела, образованного вращением фигуры вокруг оси Ох, ограниченной одной аркой циклоиды $\begin{cases} x = a(1-\sin t), \\ y = a(1-\cos t). \end{cases}$
31.Вычислить объем треугольной пирамиды с основанием S и высотой H.
32.Вычислить объем тела, образованного вращением фигуры вокруг оси Ох и оси Оу, ограниченной линиями у = x^2; у = 1; х = 0.
33.Вычислить объем тела, образованного вращением фигуры вокруг оси Оу, ограниченной $\begin{cases} x = a\cos^3 t, \\ y = a\sin^3 t. \end{cases}$
34.Вычислить объем тела, образованного вращением фигуры вокруг оси Ох, ограниченной $\begin{cases} x = a\cos t, \\ y = a\sin t. \end{cases}$
35.Вычислить длину дуги полукубической параболы y^2 = $(x+1)^3$, отсеченной прямой х = 4.
36.Вычислить длину астроиды $\begin{cases} x = a\cos^3 t, \\ y = a\sin^3 t. \end{cases}$
37.Вычислить длину кардиоиды $r = a$ (1 - cosφ).
38.Найти площадь поверхности, образованной вращением вокруг оси Ох дуги кубической параболы у = x^3, заключенной между прямыми х = - 2/3 и х = 2/3.
39.Определить длину всей кривой $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$.
40.Вычислить длину петли кривой $\begin{cases} x = \sqrt{3}t^2, \\ y = t - t^3. \end{cases}$
41.Вычислить длину первого завитка спирали Архимеда r = аφ.
42.Найти площадь поверхности, образованной вращением вокруг оси Ох петли кривой $9y^2=x(3-x^2)$.

Практическая работа 15

Дифференциальные уравнения первого порядка

Определить тип дифференциального уравнения и решить его:

Вариант № 1

1. $(xy^2 + x)dx + (y - x^2 y)dy = 0$;
2. $y' = \dfrac{y^2}{x^2} - 2$;
3. $y' + 2xy = 2x^3 y^3$;

Вариант № 2

1. $xyy' = 1 - x^2$;
2. $(y^2 - 3x^2)dy + 2xydx = 0; y(0) = 1$;
3. $y' + \dfrac{y}{x+1} + y^2 = 0$;

4. $y' + y = \cos x$.

Вариант № 3

1. $yy' = \dfrac{1-2x}{y}$;

2. $y' = \dfrac{x+y}{x-y}$;

3. $xy' + y = y^2 \ln x$;

4. $y' - \dfrac{y}{1-x^2} = 1 + x; y(0) = 1$.

4. $2ydx + (y^2 - 6x)dy = 0$.

Вариант № 4

1. $y'tgx - y = a$;

2. $xdy - ydx = ydy$;

3. $xdx = \left(\dfrac{x^2}{y} - y^3\right)dy$;

4. $(1+x^2)y' - 2xy = (1+x^2)^2$.

Вариант № 5

1. $xy' + y = y^2$;

2. $y' = \dfrac{2xy}{x^2 - y^2}$;

3. $y' + \dfrac{2y}{x} = \dfrac{2\sqrt{y}}{\cos^2 x}$;

4. $xy' + y - e^x = 0; y(a) = b$.

Вариант № 6

1. $y' + \sqrt{\dfrac{1-y^2}{1-x^2}} = 0$;

2. $y' = \dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x}$;

3. $y' - ytgx + y^2 \cos x = 0$;

4. $xy' - \dfrac{y}{x+1} = x; y(1) = 0$.

Вариант № 7

1. $\sqrt{1-y^2}dx + y\sqrt{1-x^2}dy = 0$;

2. $xy' - y = \sqrt{x^2 + y^2}$;

3. $xy' - 4y - x^2\sqrt{y} = 0$;

4. $y' - ytgx = \sec x; y(0) = 0$.

Вариант № 8

1. $y'\sin x = y \ln y; y(\pi/2) = e$;

2. $y^2 + x^2 y' = xyy'$;

3.

4. $y' + 2y = 4x$.

Вариант № 9

1. $y' = \dfrac{1+y^2}{1+x^2}, \quad y(0) = 1$;

2. $y' = e^{\frac{y}{x}} + \dfrac{y}{x}$;

3. $y' + \dfrac{2y}{x} = 3x^2 y^{4/3}$;

4. $y' + 2xy = xe^{-x^2}$.

Вариант № 10

1. $\sin y \cos x dy = \cos y \sin x dx,$
$y(0) = \pi/4$;

2. $xy' = y \ln \dfrac{y}{x}$;

3. $y' - \dfrac{y}{x-1} = \dfrac{y^2}{x-1}$;

4. $y' + \dfrac{1-2x}{x^2} y = 1$.

Практическая работа 16

Дифференциальные уравнения высших порядков

Определить тип дифференциального уравнения и решить его:

Вариант № 1

1. $\left(xy^2 + x\right)dx + \left(y - x^2 y\right)dy = 0$;

2. $y' = \dfrac{y^2}{x^2} - 2$;

3. $y' + 2xy = 2x^3 y^3$;

4. $y' + y = \cos x.$

Вариант № 2

1. $xyy' = 1 - x^2$;

2. $\left(y^2 - 3x^2\right)dy + 2xydx = 0; y(0) = 1$;

3. $y' + \dfrac{y}{x+1} + y^2 = 0$;

4. $2ydx + \left(y^2 - 6x\right)dy = 0.$

Вариант № 3

1. $yy' = \dfrac{1-2x}{y}$;

2. $y' = \dfrac{x+y}{x-y}$;

3. $xy' + y = y^2 \ln x$;

4. $y' - \dfrac{y}{1-x^2} = 1 + x; y(0) = 1.$

Вариант № 4

1. $y' tgx - y = a$;

2. $xdy - ydx = ydy$;

3. $xdx = \left(\dfrac{x^2}{y} - y^3\right)dy$;

4. $\left(1 + x^2\right)y' - 2xy = \left(1 + x^2\right)^2.$

Вариант № 5

1. $xy' + y = y^2$;

2. $y' = \dfrac{2xy}{x^2 - y^2}$;

3. $y' + \dfrac{2y}{x} = \dfrac{2\sqrt{y}}{\cos^2 x}$;

4. $xy' + y - e^x = 0; y(a) = b.$

Вариант № 6

1. $y' + \sqrt{\dfrac{1-y^2}{1-x^2}} = 0$;

2. $y' = \dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x}$;

3. $y' - ytgx + y^2 \cos x = 0$;

4. $xy' - \dfrac{y}{x+1} = x; y(1) = 0.$

Вариант № 7

1. $\sqrt{1-y^2}dx + y\sqrt{1-x^2}dy = 0$;

2. $xy' - y = \sqrt{x^2 + y^2}$;

3. $xy' - 4y - x^2\sqrt{y} = 0$;

4. $y' - ytgx = \sec x; y(0) = 0.$

Вариант № 8

1. $y' \sin x = y \ln y; y(\pi/2) = e$;

2. $y^2 + x^2 y' = xyy'$;

3.

4. $y' + 2y = 4x.$

Вариант № 9

1. $y' = \dfrac{1+y^2}{1+x^2}, \quad y(0) = 1$;

2. $y' = e^{\frac{y}{x}} + \dfrac{y}{x}$;

3. $y' + \dfrac{2y}{x} = 3x^2 y^{4/3}$;

4. $y' + 2xy = xe^{-x^2}.$

Вариант № 10

1. $\sin y \cos x dy = \cos y \sin x dx,$
$y(0) = \pi/4;$

2. $xy' = y \ln \dfrac{y}{x}$;

3. $y' - \dfrac{y}{x-1} = \dfrac{y^2}{x-1}$;

4. $y' + \frac{1-2x}{x^2} y = 1.$

Практическая работа 17

Линейные уравнения высших порядков

Найти решение дифференциальных уравнений:

1. $y'' - 5y' + y = 0$

2. $2y'' + 5y' - 7y = 0$

3. $y'' + 4y' - 3y = 0$

4. $3y'' + y' - 2y = 0$

5. $y'' + 25y' = 0$

6. $4y'' - 9y' = 0$

7. $y'' - 6y' + 9y = 0$

8. $y'' - 4y' + 4y = 0$

9. $4y'' - 12y' + 9y = 0$

10. $9y'' + 12y' + 4y = 0$

11. $y'' + y' + y = 0$

12. $y'' + 4y = 0$

13. $4y'' + 9y = 0$

14. $y'' - y' + 6y = 0$

15. $y'' - 4y' + 3y = 0$, $y(0) = 6, y'(0) = 10$

16. $4y'' + 4y' + y = 0$, $y(0) = 2, y'(0) = 0$

17. $2y'' - y' - y = 4xe^{2x}$

18. $y'' + 4y' + 4y = (1 - 4x)e^{-2x}$

19. $y'' - 2y = 2x(\cos x - \sin x)e^x$

20. $y'' + 5y' + 6y = (x - 2)e^{-3x} + x^2 + 2x - 3$

Практическая работа 18

Системы дифференциальных уравнений

Решить данные системы уравнений:

1. $\begin{cases} x' = y + z, \\ y' = 3x + z, \\ z' = 3x + y. \end{cases}$

2. $\begin{cases} x' = 3x - 2y, \\ y' = 2x - y. \quad x(0) = 1, y(0) = 2. \end{cases}$

3. $\begin{cases} x' + 5x + y = t, \\ y' - x - 3y = e^{2t}. \end{cases}$

4. $\begin{cases} x' = -x + y + z, \\ y' = x - y + z, \\ z' = x + y - z. \end{cases}$

5. $\begin{cases} 4x' - y' = \sin t - 3x, \\ x' = \cos t - y. \end{cases}$

6. $\begin{cases} x' = 2x + y, \\ y' = 3x + 4y. \end{cases}$

7. $\begin{cases} x' = x - 2y - z, \\ y' = -x + y + z, \\ z' = x - z. \end{cases}$

Контрольные работы

Контрольная работа №1

ВАРИАНТ №1

Найти пределы:

1. $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x^3 + x^2 - 3x + 1}{x^3 - 1}$
2. $\lim\limits_{x \to 3} \frac{\sqrt{x+1} - 2}{\sqrt{x-2} - 21}$
3. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{tg\, x - \sin x}{x \sin^2 x}$
4. $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\frac{x+2}{x-3} \right)^{5x}$
5. Для данной функции $f(x)$ требуется:

а) найти точки разрыва;
б) найти скачок функции в каждой точке разрыва;
в) построить чертеж.

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < -\pi \\ \sin x, & -\pi < x < 0 \\ \pi, & x \ge 0 \end{cases}$$

ВАРИАНТ №2

Найти пределы:

1. $\lim\limits_{x \to -2} \frac{x^3 + 8}{x^3 - x^2 - 8x - 4}$
2. $\lim\limits_{x \to 2} \frac{\sqrt{x+7} - 3}{1 - \sqrt{3-x}}$
3. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{tg\, x - \sin x}{x^3}$
4. $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\frac{1-x^2}{3+x^2} \right)^{4x^2}$
5. Для данной функции $f(x)$ требуется:

а) найти точки разрыва;
б) найти скачок функции в каждой точке разрыва;
в) построить чертеж.

$$f(x) = \begin{cases} x+1, & x < 0 \\ (x+1)^2, & 0 < x \le 2 \\ -x, & x > 2 \end{cases}$$

ВАРИАНТ №3

Найти пределы:

1. $\lim\limits_{x \to 1} \frac{2x^3 - 2x^2 + x - 1}{x^3 - x^2 + 3x - 3}$
2. $\lim\limits_{x \to \infty} (x - \sqrt{x^2 - x + 1})$
3. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{tg\, x + \sin x}{2x}$
4. $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\frac{2x-5}{2x+3} \right)^{7x}$
5. Для данной функции $f(x)$ требуется:

а) найти точки разрыва;
б) найти скачок функции в каждой точке разрыва;
в) построить чертеж.

$$f(x) = \begin{cases} -x, & x < 0 \\ x^3, & 0 \le x < 2 \\ 3, & x > 2 \end{cases}$$

ВАРИАНТ №4

Найти пределы:

1. $\lim\limits_{x \to 2} \left[\frac{3x^2 + x}{(x-2)(x^2+x+1)} - \frac{2}{x-2} \right]$
2. $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{5x^3 - x^2 + 4}{-7x^3 + x}$
3. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin 3x}{\sqrt{x+2} - \sqrt{2}}$
4. $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\frac{3x^2+1}{3x^2-2} \right)^{5x^2}$
5. Для данной функции $f(x)$ требуется:

а) найти точки разрыва;
б) найти скачок функции в каждой точке разрыва;
в) построить чертеж.

$$f(x) = \begin{cases} -2, & x < -\frac{\pi}{2} \\ 2\sin x, & -\frac{\pi}{2} < x \le \frac{\pi}{2} \\ 1, & x > \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

Контрольная работа №2

Вариант 1

1. Найти производную функции
$$y = arctg^3 \ln \frac{\sqrt{x}}{x+2};$$
2. Найти производную функции
$$y = \left(\sqrt{x}\right)^{\arcsin x};$$
3. Найти производную $y'(x)$ функции
$$\sin(x-2y) + \frac{x^3}{y} = 7x;$$
4. Найти $\frac{dy}{dx}$, если $\begin{cases} x = e^{-t} \cdot \cos t, \\ y = e^{t} \cdot \cos t. \end{cases}$;
5. Найти предел, используя правило Лопиталя
$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2}{e^x};$$
6. Провести полное исследование функции
$f(x) = x^2 + \frac{1}{x^2}$ и построить ее график.

Вариант 2

1. Найти производную функции
$$y = \sqrt[5]{\sin^4\left(\frac{x-3}{x}\right)};$$
2. Найти производную функции $y = x^{arctg 7x}$;
3. Найти производную $y'(x)$ функции
$$e^{xy} + \frac{y}{x} = \cos 3x;$$
4. Найти $\frac{dy}{dx}$, если $\begin{cases} x = \cos t + \sin t, \\ y = \sin t + t \cdot \cos t. \end{cases}$;
5. Найти предел, используя правило Лопиталя
$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{tg 3x}{tg x};$$
6. Провести полное исследование функции
$f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 4}$ и построить ее график.

Вариант 3

1. Найти производную функции
$$y = 2^{tg^7\left(\frac{x^2+4}{\sqrt{x}}\right)};$$
2. Найти производную функции
$$y = \left(x^2 + 3\right)^{tgx};$$
3. Найти производную $y'(x)$ функции
$$x^3 y^2 - \frac{x+1}{y} = \arcsin 4x;$$
4. Найти $\frac{dy}{dx}$, если $\begin{cases} x = \frac{t+1}{t}, \\ y = \frac{t-1}{t}. \end{cases}$;
5. Найти предел, используя правило Лопиталя
$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln \cos x}{x};$$
6. Провести полное исследование функции
$f(x) = e^{\frac{1}{x-2}}$ и построить ее график.

Вариант 4

1. Найти производную функции
$$y = \log_3 \arcsin\left(\frac{\sqrt{x}}{x-5}\right);$$
2. Найти производную функции $y = (\cos x)^{\frac{2}{x}}$;
3. Найти производную $y'(x)$ функции
$$\frac{y-2}{x^3} - tg(x+5y) = 7^x;$$
4. Найти $\frac{dy}{dx}$, если $\begin{cases} x = e^{t} \cdot \sin t, \\ y = e^{t} \cdot \cos t. \end{cases}$;
5. Найти предел, используя правило Лопиталя
$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{tgx};$$
6. Провести полное исследование функции
$f(x) = x^2 e^{-x}$ и построить ее график.

Контрольная работа №3

Найти интегралы:

Вариант 1 1. $\int \frac{xdx}{(5-3x^2)^7}$; 2. $\int \frac{2x+5}{x^3-x^2+2x-2}dx$; 3. $\int \frac{dx}{2\cos^2 x+3\sin^2 x}$; 4. $\int (x^3+5x)\ln xdx$; 5. $\int \frac{dx}{1+\sqrt{2x+1}}$; 6. $\int x\arcsin 2xdx$.	Вариант 2 1. $\int \frac{x^2dx}{\sqrt[6]{7-x^3}}$; 2. $\int \frac{3x^2-4}{(x+7)(x^2-2x+1)}dx$; 3. $\int tg^4 2xdx$; 4. $\int \frac{7+5x}{4^x}dx$; 5. $\int \frac{8-x}{\sqrt{x^2+4x+8}}dx$; 6. $\int arctg\sqrt{\frac{x}{2}}dx$.
Вариант 3 1. $\int \frac{\sqrt[5]{arctg3x-4}}{9x^2+1}dx$; 2. $\int \frac{x^4-1}{x^3+4x}dx$; 3. $\int \sin^3 2xdx$; 4. $\int (8x-1)\cdot\sin 2xdx$; 5. $\int \frac{\sqrt{x-1}}{x}dx$; 6. $\int \arccos(3-x)dx$.	Вариант 4 1. $\int \sqrt[7]{\sin 2x+1}\cos 2xdx$; 2. $\int \frac{x^2-2x}{x^3+6x^2+9x}dx$; 3. $\int \frac{dx}{2+\cos x}$; 4. $\int (x^2-4x)\cdot\log_3 xdx$; 5. $\int \frac{4x-1}{\sqrt{x^2+2x+5}}dx$; 6. $\int (x+2)\cdot arctg\, xdx$.

Контрольная работа №4

Вариант №1 Решить уравнения: 1. $x^2dy + ydx = 0, y(1) = e$; 2. $y' = \dfrac{1}{1+\sqrt{x}}$; 3. $y'(2x - y) = x + 2y$; 4. $(x + y)y' - 1 = 0$; 5. $\left(y^3 + \cos x\right)dx + \left(e^y + 3xy^2\right)dy =$ 6. $\left(1 + x^2\right)y'' + 2xy' = 7x^3$; 7. $y'' \cdot y^3 = 4y^4 - 0{,}25$; 8. $y'' - 3y' + 2y = (4x + 9)e^{2x}$.	Вариант №2 Решить уравнения: 1. $y^2y' + 2x - 1 = 0$; 2. $y' = \dfrac{1+y^2}{1+x^2}, y(0) = 1$; 3. $xy' - y = \sqrt{x^2 + y^2}$; 4. $3y' - 2y = x^3y^{-2}$; 5. $\left(5xy^2 + x^3\right)dx + \left(5x^2y - y\right)dy = 0$; 6. $x^4y'' + x^3y' = 10$; 7. $y'' \cdot y^3 + 4 = 0, y(1) = 2, y'(1) = 2$; **8.** $y'' + 3y' + 2y = (1 - 2x)e^{-x}$.
Вариант №3 Решить уравнения: 1. $ydx + ctgxdy = 0, y\left(\dfrac{2\pi}{3}\right) = -2$; 2. $y'2^{x-y} + 3^{2x-y} = 0$; 3. $ydx = \left(x - \sqrt{xy}\right)dy$; 4. $y' - \dfrac{y}{x+1} = e^x(x+1)$; 5. $\left(\dfrac{1}{x^2} + \dfrac{3y^2}{x^4}\right)dx = \dfrac{2y}{x^3}dy$; 6. $\left(1 + x^2\right)y'' + 2xy' = x\left(x^2 + 1\right)$; 7. $y'' = 8\sin^3 y\cos y, y(1) = \dfrac{\pi}{2}, y'(1)$; 8. $y'' - 2y' - 3y = (8x + 4)e^{2x}$.	Вариант №4 Решить уравнения: 1. $\left(1 + y^2\right)dx - \sqrt{x}dy = 0$; 2. $y' + y\cos x = \cos x, y(0) = 2$; 3. $3x^2y' = y^2 + 8xy + 4x^2$; 4. $xy' + y = xy^2$; 5. $(\sin 2x - 2\cos(x + y))dx - 2\cos(x + y)dy$; 6. $x^4y'' + x^3y' = 5$; 7. $y'' = 50\sin^3 y\cos y, y(1) = \dfrac{\pi}{2}, y'(1) = 5$; 8. $y'' + 2y' - 3y = \left(x^2 + 2x - 3\right)e^x$.

Расчетно - графические работы

Расчетно-графическая работа№1

Задание 1. Найти область определения функции

1.1 $y = \frac{2}{\sqrt{x+2}}$

1.2 $y = \frac{2x}{3x-4}$

1.3 $y = \lg(1-2x)$

1.4 $y = \frac{x}{x+3}$

1.5 $y = \frac{x+3}{x^2+3x}$

1.6 $y = \lg(3x+4)$

1.7 $y = \arcsin\frac{x}{2}$

1.8 $y = \lg\frac{x-2}{4}$

1.9 $y = \sqrt{2x+3} + \sqrt{5-2x}$

1.10 $y = \frac{1}{\sqrt{2x+8}}$

1.11 $y = \arccos\frac{x}{3}$

1.12 $y = \sqrt[3]{2-3x} + 3\sqrt{x+1}$

1.13 $y = 2\sqrt{6-3x}$

1.14 $y = \frac{1}{x-10}$

1.15 $y = \lg(2-5x)$

1.16 $y = \arccos\frac{1-2x}{3}$

1.17 $y = \frac{1}{\sqrt{3x+4}}$

1.18 $y = \lg(2x-3)$

1.19 $y = \sqrt{2x-7} + \sqrt{3-2x}$

1.20 $y = \arcsin\frac{4x}{3}$

1.21 $y = \lg(2x-7)$

1.22 $y = \arcsin\frac{4x}{5}$

1.23 $y = \lg(15-2x)$

1.24 $y = \frac{\sqrt{2-x}}{x-3}$

1.25 $y=\dfrac{1}{2x-3}$

1.26 $y=\dfrac{2x}{1+x}$

1.27 $y=\arccos 2x$

1.28 $y=\sqrt{x+3}+\sqrt{2x}$

1.29 $y=\dfrac{x}{\sqrt{7x+3}}$

1.30 $y=\lg(x+7)$

Задание 2. Изобразить эскиз графика:

2.1. $f(x)=(x-2)^3+3$

2.2. $f(x)=\dfrac{4x-5}{x-1}+3$

2.3. $f(x)=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{x-3}+1$

2.4. $f(x)=\log_{\frac{1}{2}}(x+1)-2$

2.5. $f(x)=x^2+2|x|+1$

2.6. $f(x)=3-x^2+2|x|$

2.7. $f(x)=-\log_2(x+3)-1$

2.8. $f(x)=-2^{x-2}+3$

2.9. $f(x)=(1-x)^2+3$

2.10. $f(x)=-\dfrac{1}{x-2}+3$

2.11. $f(x)=(x-2)^3+1$

2.12. $f(x)=\dfrac{3x-2}{x+1}-3$

2.13. $f(x)=\sin(x-3)+2$

2.14. $f(x)=\cos(x-2)+1$

2.15. $f(x)=3\cos\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)+1$

2.16. $f(x)=5^{x-3}+1$

Задание 3. Вычислить пределы функций.

3.1. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{(x^3-2x-1)(x+1)}{x^4+4x^2-5}$

3.2. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3-3x-2}{x+x^2}$

3.3. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\left(x^2+3x+2\right)^2}{x^3+2x^2-x-2}$ 3.4. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\left(2x^2-x-1\right)^2}{x^3+2x^2-x-2}$

3.5. $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{\left(x^2+2x-3\right)^2}{x^3+4x^2+3x}$ 3.6. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\left(x^3-2x-1\right)^2}{x^4+2x+1}$

3.7. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^3-(1+3x)}{x^5+x}$ 3.8. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-2x+1}{2x^2-x-1}$

3.9. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3-3x-2}{x^2-x-2}$ 3.10. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3+5x^2+7x+2}{x^3+4x^2+5x+2}$

3.11. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-3x+2}{x^3-x^2-x+1}$ 3.12. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3+x^2-5x+3}{x^3-x^2-x+1}$

3.13. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3+4x^2+5x+2}{x^3-3x-2}$ 3.14. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^4-1}{2x^4-x^2-1}$

3.15. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^3+5x^2+8x+4}{x^3+3x^2-4}$ 3.16. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-5x^2+8x-4}{x^3-3x^2+4}$

3.17. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-6x^2+12x-8}{x^3-3x^2+4}$ 3.18. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^3+5x^2+8x+4}{x^3+7x^2+16x+12}$

3.19. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3-3x-2}{\left(x^2-x-2\right)^2}$ 3.20. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-3x-2}{x-1}$

3.21. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3-3x-2}{x^2+2x+1}$ 3.22. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-2x+1}{x^3-x^2-x+1}$

3.23. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^4-1}{2x^4-x^2-1}$ 3.24. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2+3x+2}{x^3+2x^2-x-2}$

3.25. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^2-x-1}{x^3+2x^2-x-2}$ 3.26. $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x^2+2x-3}{x^3+4x^2+3x}$

3.27. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3-2x-1}{x^4+2x+1}$ 3.28. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^3-(1+3x)}{x^5+x^2}$

3.29. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{2x^2-x-1}$ 3.30. $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x^3+7x^2+15x+9}{x^3+8x^2+21x+18}$

Задание 4. Вычислить пределы функций.

4.1. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x}-2}$ 4.2. $\lim\limits_{x\to -8}\dfrac{\sqrt{1-x}-3}{2+\sqrt[3]{x}}$

4.3. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x-1}}{\sqrt[3]{x^2-1}}$ 4.4. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x+13}-2\sqrt{x+1}}{x^2-9}$

4.5. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{\sqrt[3]{x-6}+2}{x^3+8}$ 4.6. $\lim\limits_{x\to 16}\dfrac{\sqrt[4]{x}-2}{\sqrt{x}-4}$

4.7. $\lim\limits_{x\to 8}\dfrac{\sqrt{9+2x}-5}{\sqrt[3]{x}-2}$

4.8. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1-2x+x^2}-(1+x)}{x}$

4.9. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{8+3x+x^2}-2}{x+x^2}$

4.10. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{27+x}-\sqrt[3]{27-x}}{x+2\sqrt[3]{x^4}}$

4.11. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{1+x}-\sqrt{2x}}$

4.12. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}}$

4.13. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt[3]{4x}-2}{\sqrt{2+x}-\sqrt{2x}}$

4.14. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x}-1}{x^2-1}$

4.15. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt[3]{9x}-3}{\sqrt{3+x}-\sqrt{2x}}$

4.16. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{\sqrt[3]{x-6}+2}{x+2}$

4.17. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt[3]{16x}-4}{\sqrt{4+x}-\sqrt{2x}}$

4.18. $\lim\limits_{x\to 8}\dfrac{\sqrt{9+2x}-5}{\sqrt[3]{x^2}-4}$

4.19. $\lim\limits_{x\to 1/2}\dfrac{\sqrt[3]{x/4}-1/2}{\sqrt{1/2+x}-\sqrt{2x}}$

4.20. $\lim\limits_{x\to 1/3}\dfrac{\sqrt[3]{x/9}-1/3}{\sqrt{1/3+x}-\sqrt{2x}}$

4.21. $\lim\limits_{x\to 1/4}\dfrac{\sqrt[3]{x/16}-1/4}{\sqrt{1/4+x}-\sqrt{2x}}$

4.22. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt[7]{x}}$

4.23. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{27+x}-\sqrt[3]{27-x}}{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[5]{x}}$

4.24. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{8+3x-x^2}-2}{\sqrt[3]{x^3+x^2}}$

4.25. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1-2x+3x^2}-(1+x)}{\sqrt[3]{x}}$

4.26. $\lim\limits_{x\to 8}\dfrac{\sqrt{9+2x}-5}{\sqrt[3]{x}-2}$

4.27. $\lim\limits_{x\to 16}\dfrac{\sqrt[4]{x}-2}{\sqrt[3]{\left(\sqrt{x}-4\right)^2}}$

4.28. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{\sqrt[3]{x-6}+2}{\sqrt[3]{x^3+8}}$

4.29. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{x}-2}{\sqrt[3]{x^2-16}}$

4.30. $\lim\limits_{x\to -8}\dfrac{10-x-6\sqrt{1-x}}{2+\sqrt[3]{x}}$

Задание 5. Вычислить пределы функций.

5.1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+\sin x)}{\sin 4x}$

5.2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 10x}{e^{x^2}-1}$

5.3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x^2-5x}{\sin 3x}$

5.4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x}{\cos 7x-\cos 3x}$

5.5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4x}{tg(\pi(2+x))}$

5.6. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x}{tg(2\pi(x+1/2))}$

5.7. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos^3 x}{4x^2}$

5.8. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 3x}{\sqrt{2+x}-\sqrt{2}}$

5.9. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2^x-1}{\ln(1+2x)}$

5.10. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{arctg 2x}{\sin(2\pi(x+10))}$

5.11. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1-7x)}{\sin(\pi(x+7))}$

5.12. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos(x+5\pi/2)tgx}{\arcsin 2x^2}$

5.13. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{9\ln(1-2x)}{4arctg 3x}$

5.14. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt{3x+1}}{\cos[\pi(x+1)/2]}$

5.15. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 7x}{x^2+\pi x}$

5.16. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{4+x}-2}{3arctgx}$

5.17. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin[\pi(x+1)]}{\ln(1+2x)}$

5.18. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 2x-\cos x}{1-\cos x}$

5.19. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{\sin[\pi(x+2)]}$

5.20. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin[5(x+\pi)]}{e^{3x}-1}$

5.21. $\lim\limits_{x\to 1/4}\dfrac{\sqrt[3]{x/16}-1/4}{\sqrt{1/4+x}-\sqrt{2x}}$

5.22. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt[7]{x}}$

5.23. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{27+x}-\sqrt[3]{27-x}}{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[5]{x}}$

5.24. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{8+3x-x^2}-2}{\sqrt[3]{x^3+x^2}}$

5.25. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1-2x+3x^2}-(1+x)}{\sqrt[3]{x}}$

5.26. $\lim\limits_{x\to 8}\dfrac{\sqrt{9+2x}-5}{\sqrt[3]{x}-2}$

5.27. $\lim\limits_{x\to 16}\dfrac{\sqrt[4]{x}-2}{\sqrt[3]{\left(\sqrt{x}-4\right)^2}}$

5.28. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{\sqrt[3]{x-6}+2}{\sqrt[3]{x^3+8}}$

5.29. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{x}-2}{\sqrt[3]{x^2-16}}$

5.30. $\lim\limits_{x\to -8}\dfrac{10-x-6\sqrt{1-x}}{2+\sqrt[3]{x}}$

Расчетно-графическая работа№2

Задание 1. Найти область определения функции

1.31 $f(x)=5^{\arccos\frac{x}{2}}-\dfrac{\sqrt[3]{x+2}}{\lg(x+1)}$

1.32 $f(t)=\dfrac{4t}{\lg(t+2)}-\sqrt{16-t^2}+8^{\sqrt[3]{t+4}}$

1.33 $f(z)=\arcsin\dfrac{z}{4}-5^{\lg(6-z)}+\dfrac{\sqrt[7]{z^2-1}}{3z}$

1.34 $f(x)=2^{\sqrt{x^2-25}}-\lg(x+7)-\sin\sqrt[3]{x}$

1.35 $f(z)=5^{\sqrt[3]{z+4}}-\lg(3+z)+\dfrac{4z}{\sqrt{z^2-4}}$

1.36 $f(t)=\dfrac{4t}{\lg(t+2)}-\sqrt{16-t^2}+7\sqrt[3]{t+4}$

1.37 $f(x)=5^{\arccos\frac{x}{2}}-\dfrac{\sqrt[3]{x+2}}{\lg(x+1)}$

1.38 $f(t)=\sqrt[8]{16-t^2}-\lg(t+2)+3^{\frac{1}{t}}$

1.39 $f(t)=2^{\sqrt{x^2-25}}-\lg(x+7)-\sin\sqrt[3]{x}$

1.40 $z=5^{\sqrt[3]{z+4}}-\lg(3+z)+\dfrac{4z}{\sqrt{z^2-4}}$

1.41 $f(t)=\dfrac{4t}{\lg(t+2)}-\sqrt{16-t^2}+7^{\sqrt[3]{t+4}}$

1.42 $f(t)=\sqrt[10]{16-t^2}-\lg(t+2)+3^{\frac{4}{t}}$

1.43 $f(t)=\sqrt[10]{16-t^2}-\lg(t+2)+3^{\frac{4}{t}}$

1.44 $f(t)=6^{\sqrt{x^2-25}}-\log_2(x+7)-\cos\sqrt[3]{x}$

1.45 $f(x)=7^{\sqrt{x^2-25}}-\lg(x+9)-\cos\sqrt[3]{x}$

1.46 $f(z)=\ln(4-z^2)+\arcsin\dfrac{5}{x}$

1.47 $z=\ln(y^2-x^2)$

1.48 $z=\sqrt{x^2+4y+3}$

1.49 $z=\arccos(x+2y)$

1.50 $z=\ln(x^2-y^2-4)$

1.51 $z=\ln(9-x^2-y^2)$

1.52 $z=\sqrt{x^2+y^2-9}$

1.53 $z=\dfrac{1}{x^2+y^2}$

1.54 $z=2\sqrt{xy}+\sqrt{x-y}$

1.55 $z=\dfrac{\sqrt{3x-2y}}{x^2+y^2+4}$

1.56 $z=\ln x+\ln\cos y$

1.57 $z=\dfrac{5}{4-x^2-y^2}$

1.58 $z=\dfrac{3xy}{2x-5y}$

1.59 $z=\ln(2x-y)$

1.60 $z=\dfrac{2}{6-x^2-y^2}$

<u>Задание 2.</u> Найти частные производные $\dfrac{\partial z}{\partial x}, \dfrac{\partial z}{\partial y}, \dfrac{\partial u}{\partial x}, \dfrac{\partial u}{\partial y}, \dfrac{\partial u}{\partial z}$

2.17. $z=\arcsin\dfrac{y}{x}$ $\qquad u=(x^3+y^3-xy^2)^3$

2.18. $z=x\sqrt{y}+\dfrac{y}{\sqrt{x}}$ $\qquad u=arctg\left(\dfrac{xy}{z}\right)$

2.19. $z=\dfrac{xy}{x+y}$ $\qquad u=x\ln y+ye^{2z}-arctgx$

2.20. $z=\ln\left(x^2+xy+y^2\right)$ $\quad u=x^3+y^3+z^3-3xyz$

2.21. $z=x^3y^2-2xy^4+3x^2y^3$ $\quad u=\sin\dfrac{x+y}{z}$

2.22. $z=xy+xe^{\frac{1}{x}}$ $\quad u=\ln\left(x^3+y^3+z^3-3xyz\right)$

2.23. $z=\left(x^2+y^2\right)tg\dfrac{x}{y}$ $\quad u=4x^2yz+xy+y^2+4zx$

2.24. $z=x^2\ln y+5x-arctgy$ $\quad u=-\dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}$

2.25. $z=\sin^2\left(x\cos^2 y+y\sin^2 x\right)$ $\quad u=\dfrac{y}{x}+\dfrac{z}{x}-\dfrac{x}{z}$

2.26. $z=xy^4-3x^2y+1$ $\quad u=zarctg\dfrac{x}{y}$

2.27. $z=\arcsin\dfrac{x+y}{x}$ $\quad u=ze^{-xy}$

2.28. $z=y^2-3xy-x^4$ $\quad u=\ln^2\left(x^2+y^2-z^2\right)$

2.29. $z=\sqrt{x^2+y^2+3}$ $\quad u=\ln\left(x^3+\sqrt[3]{y}-z\right)$

2.30. $z=\ln\left(e^x-e^y\right)$ $\quad u=\dfrac{z}{x^4+y^2}$

2.31. $z=\dfrac{y}{\left(x^2-y^2\right)^5}$ $\quad u=8\sqrt[5]{x^3+y^2+z}$

2.32. $z=\dfrac{y^2}{3x+\arcsin(xy)}$ $\quad u=\ln\left(\sqrt[5]{x}+\sqrt[4]{y}-z\right)$

2.33. $z=e^{-\sqrt[3]{x^2+5y^2}}$ $\quad u=\sqrt{xy}\cos z$

2.34. $z=arctg\sqrt{\dfrac{x}{y}}$ $\quad u=\sqrt{z(2-z)}+\ln\left(4-x^2\right)-3y$

2.35. $z=\cos y+(y-x)\sin y$ $\quad u=x^2+y^2+z^2$

2.36. $z=\ln\left(y^2-e^{-x}\right)$ $\quad u=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2-z^2}}$

2.37. $z=arcctg\left(x^2+y^2\right)$ $\quad u=\dfrac{z}{\sqrt{x^2-y^2}}$

2.38. $z=ctg(3x-2y)$ $\quad u=\dfrac{z}{x^4+y^2}$

2.39. $z=\cos\left(x^3-2xy\right)$ $\quad u=8\sqrt[3]{x^3+y^3+z}$

2.40. $z = \arcsin 2x^3 y$ $\quad u = -\dfrac{2x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$

2.41. $z = 2x^3 y - 4xy^5$ $\quad u = \dfrac{\sin(x - y)}{z}$

2.42. $z = arctgx + \sqrt{y}$ $\quad u = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 - z^2}}$

2.43. $z = yx - x^3 y^2 + y^4$ $\quad u = \ln(x + y^2) - \sqrt{x^2 y^2}$

2.44. $z = \arcsin 2xy$ $\quad u = 27\sqrt[3]{x + y^2 + z^3}$

2.45. $z = \dfrac{6}{4 - x^3 - y^3}$ $\quad u = arctg(xy^2 + z)$

2.46. $z = 4x + \dfrac{y}{2x - 5y}$ $\quad u = \arcsin \dfrac{x^2}{y - z}$

<u>Задание 3.</u> Найти полные дифференциалы указанных функций.

3.31. $z = 2x^3 y - 4xy^5$

3.32. $z = arctgx + \sqrt{y}$

3.33. $z = 5xy^4 + 2x^2 y^7$

3.34. $z = \ln(3x^2 - 2y^2)$

3.35. $z = \arcsin(x + y)$

3.36. $z = 7x^3 y - \sqrt{xy}$

3.37. $z = e^{x+y-4}$

3.38. $z = tg\dfrac{x + y}{x - y}$

3.39. $z = ctg\dfrac{y}{x}$

3.40. $z = xy^4 - 3x^2 y + 1$

3.41. $z = 2x^2 y^2 + x^3 - y^3$

3.42. $z = \arcsin \dfrac{x + y}{x}$

3.43. $z = arctg(x - y)$

3.44. $z = \sqrt{3x^2 - y^2 + x}$

3.45. $z = \arccos(x + y)$

3.46. $z = 2 - x^3 - y^3 + 5x$

3.47. $z = 7x - x^3 y^2 + y^4$

3.48. $z = e^{y-x}$

3.49. $z = x^2 y \sin x - 3y$

3.50. $z = \arcsin(xy) - 3xy^2$

3.51. $z = \cos(x^2 - y^2) + x^2$

3.52. $z = 5xy^2 - 3x^3 y^4$

3.53. $z = arctg(2x - y)$

3.54. $z = \sqrt{x^2 + y^2 - 2xy}$

3.55. $z = \cos(3x + y) - x^2$

3.56. $z = \ln(x + xy - y^2)$

3.57. $z = y^2 - 3xy - x^4$

3.58. $z = \ln(y^2 - x^2 + 3)$

3.59. $z = arctg(4x - y)$

3.60. $z = \sqrt{3x^2 - 2y^2 + 5}$

<u>Задание 4.</u> Дана функция z=f(x; y) и точки $P_1(x_1,y_1)$, $P_2(x_2,y_2)$. Найти приближенное значение данной функции в точке $P_2(x_2,y_2)$, исходя из ее точного значения в точке $P_1(x_1,y_1)$.

4.1.	$z = arctg\,\frac{x}{y}$	$P_1(2; 2)$	$P_2(1{,}92; 2{,}12)$
4.2.	$z = \sqrt[3]{2x^2 - y^2 + 1}$	$P_1(6; 3)$	$P_2(6{,}14; 3{,}16)$
4.3.	$z = \ln\sqrt{5x^2 - y^2}$	$P_1(1; 2)$	$P_2(1{,}02; 1{,}85)$
4.4.	$z = x^{\sqrt{x}}$	$P_1(1; 4)$	$P_2(1{,}05; 3{,}94)$
4.5.	$z = \sqrt[4]{4x^2 - y^2 + 4y}$	$P_1(2; 4)$	$P_2(1{,}96; 4{,}16)$
4.6.	$z = x^2 + xy + y^2$	$P_1(1; 2)$	$P_2(1{,}02; 1{,}96)$
4.7.	$z = 3x^2 - xy + x + y$	$P_1(1; 3)$	$P_2(1{,}06; 2{,}92)$
4.8.	$z = x^2 + 3xy - 6y$	$P_1(4; 1)$	$P_2(3{,}96; 1{,}03)$
4.9.	$z = x^2 + 2xy + 3y^2$	$P_1(2; 1)$	$P_2(1{,}96; 1{,}04)$
4.10.	$z = x^2 + y^2 + 2x + y - 1$	$P_1(2; 4)$	$P_2(1{,}98; 3{,}91)$
4.11.	$z = 3x^2 - xy + 2y^2$	$P_1(-1; 3)$	$P_2(-0{,}98; 2{,}97)$
4.12.	$z = x^2 - y^2 + 5x + 4y$	$P_1(3; 3)$	$P_2(3{,}02; 2{,}98)$
4.13.	$z = 2xy + 3y^2 - 5x$	$P_1(3; 4)$	$P_2(3{,}04; 3{,}95)$
4.14.	$z = xy + 2y^2 - 2x$	$P_1(1; 2)$	$P_2(0{,}97; 2{,}03)$
4.15.	$z = \sqrt[3]{x^2 + y^2}$	$P_1(1; 0)$	$P_2(1{,}02; 0{,}05)$
4.16.	$z = \sqrt{5e^x + y^2}$	$P_1(0; 2)$	$P_2(0{,}02; 2{,}03)$
4.17.	$z = \ln\left(x^3 + y^3\right)$	$P_1(1; 0)$	$P_2(1{,}02; 0{,}05)$
4.18.	$z = x^y$	$P_1(1; 4)$	$P_2(1{,}02; 4{,}05)$
4.19.	$z = \sqrt{\sin^2 x + 8e^y}$	$P_1(\pi/2; 0)$	$P_2(1{,}55; 0{,}015)$
4.20.	$z = arctg\,\frac{y}{x}$	$P_1(1; 1)$	$P_2(0{,}95; 1{,}02)$
4.21.	$z = x^y$	$P_1(1; 2)$	$P_2(1{,}03; 2{,}04)$
4.22.	$z = \ln\left(x^2 - 6\sqrt[3]{y - 2}\right)$	$P_1(3; 1)$	$P_2(3{,}02; 0{,}96)$
4.23.	$z = xy + 2y^2 - 2x$	$P_1(1; 2)$	$P_2(0{,}97; 2{,}03)$
4.24.	$z = 2xy + 3y^2 - 5x$	$P_1(3; 4)$	$P_2(3{,}04; 3{,}95)$
4.25.	$z = x^2 - y^2 + 5x + 4y$	$P_1(3; 3)$	$P_2(3{,}02; 2{,}98)$
4.26.	$z = 3x^2 - xy + 2y^2$	$P_1(-1; 3)$	$P_2(-0{,}98; 2{,}97)$
4.27.	$z = x^2 + xy + y^2$	$P_1(1; 3)$	$P_2(1{,}06; 2{,}92)$
4.28.	$z = 3x^2 - xy + x + y$	$P_1(4; 1)$	$P_2(3{,}96; 1{,}03)$
4.29.	$z = x^2 + 3xy - 6y$	$P_1(2; 2)$	$P_2(1{,}92; 2{,}12)$
4.30.	$z = x^2 - y^2 + 6x + 3y$	$P_1(2; 3)$	$P_2(2{,}02; 2{,}97)$

Задание 5. Вычислить значение производной сложной функции u=u(x; y), где $\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t). \end{cases}$

5.1.	$u = e^{x-2y}$	$x = \sin t$	$y = t^3$
5.2.	$u = \ln\left(e^x + e^{-y}\right)$	$x = t^2$	$y = t^3$
5.3.	$u = y^x$	$x = \ln(t-1)$	$y = e^{t/2}$
5.4.	$u = e^{y-2x+2}$	$x = \sin t$	$y = \cos t$
5.5.	$u = x^2 e^y$	$x = \cos t$	$y = \sin t$
5.6.	$u = \ln\left(e^x + e^y\right)$	$x = t^2$	$y = t^3$
5.7.	$u = x^y$	$x = e^t$	$y = \ln t$
5.8.	$u = e^{y-2x}$	$x = \sin t$	$y = t^3$
5.9.	$u = x^2 e^{-y}$	$x = \sin t$	$y = \sin^2 t$
5.10.	$u = \ln\left(e^{-x} + e^y\right)$	$x = t^2$	$y = t^3$
5.11.	$u = e^{y-2x-1}$	$x = \cos t$	$y = \sin t$
5.12.	$u = \arcsin\dfrac{x}{y}$	$x = \sin t$	$y = \cos t$
5.13.	$u = \arccos\dfrac{2x}{y}$	$x = \sin t$	$y = \cos t$
5.14.	$u = \dfrac{x^2}{y+1}$	$x = 1-2t$	$y = arctgt$
5.15.	$u = \dfrac{x}{y}$	$x = e^t$	$y = 2 - e^{2t}$
5.16.	$u = \ln\left(e^{-x} + e^{-2y}\right)$	$x = t^2$	$y = \dfrac{1}{3}t^3$
5.17.	$u = \sqrt{x + y^2 + 3}$	$x = \ln t$	$y = t^2$
5.18.	$u = \arcsin\dfrac{x^2}{y}$	$x = \sin t$	$y = \cos t$
5.19.	$u = \dfrac{y^2}{x}$	$x = 1-2t$	$y = 1 + arctgt$
5.20.	$u = \dfrac{y}{x} - \dfrac{x}{y}$	$x = \sin t$	$y = \cos t$
5.21.	$u = \sqrt{x^2 + y + 3}$	$x = \ln t$	$y = t^2$
5.22.	$u = \arcsin\dfrac{x}{2y}$	$x = \sin t$	$y = \cos t$

5.23. $u=\frac{x}{y}-\frac{y}{x}$	$x=\sin 2t$	$y=tg^2 t$
5.24. $u=\sqrt{x+y+3}$	$x=\ln t$	$y=t^2$
5.25. $u=\frac{y}{x}$	$x=e^t$	$y=1-e^{2t}$
5.26. $u=\arcsin\frac{2x}{y}$	$x=\sin t$	$y=\cos t$
5.27. $u=\ln\left(e^{2x}+e^y\right)$	$x=t^2$	$y=t^4$
5.28. $u=arctg(x+y)$	$x=t^2+2$	$y=4-t^2$
5.29. $u=\sqrt{x^2+y^2+3}$	$x=\ln t$	$y=t^3$
5.30. $u=arctg(xy)$	$x=t+3$	$y=e^t$

<u>Задание 6.</u> Найти вторые частные производные указанных функций.

6.1. $z=x^3y^2+x\sin y$

6.2. $z=x^3y+\cos y$

6.3. $z=e^{x^2-y^2}$

6.4. $z=tg\frac{x}{y}$

6.5. $z=\sin\left(x^2-y\right)$

6.6. $z=\arcsin(x-y)$

6.7. $z=arcctg(x-3y)$

6.8. $z=e^{2x^2+y^2}$

6.9. $z=e^{4x^2+y^2}$

6.10. $z=tg\sqrt{xy}$

6.11. $z=\sin\sqrt{x^3y}$

6.12. $z=\arccos(4x-y)$

6.13. $z=arctg(2x-y)$

6.14. $z=e^{\sqrt{x+y}}$

6.15. $z=\arccos(x-5y)$

6.16. $z=\cos\left(3x^2-y^3\right)$

6.17. $z=\ln\left(5x^2-3y^4\right)$

6.18. $z=\ln(3xy-4)$

6.19. $z=ctg(x+y)$

6.20. $z=\cos\left(xy^2\right)$

6.21. $z=arctg(x+y)$

6.22. $z=\arccos(2x+y)$

6.23. $z=\ln\left(3x^2-2y^4\right)$

6.24. $z=ctg\frac{y}{x}$

6.25. $z=\cos\left(x^2y^2-5\right)$

6.26. $z=\arcsin(x-2y)$

6.27. $z=arctg(5x+2y)$

6.28. $z=\ln\left(4x^2-5y^3\right)$

6.29. $z=\arcsin(4x+y)$

6.30. $z=\sin\sqrt{xy}$

Задание 7. Проверить, удовлетворяет ли указанному уравнению данная функция.

7.1.	$x^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2xy\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+y^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$	$u=\dfrac{x}{y}$
7.2.	$x\dfrac{\partial u}{\partial x}+y\dfrac{\partial u}{\partial y}=3\left(x^3-y^3\right)$	$u=\ln\dfrac{x}{y}+x^3-y^3$
7.3.	$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$	$u=\ln\left(x^2+(y+1)^2\right)$
7.4.	$y\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=(1+y\ln x)\dfrac{\partial u}{\partial x}$	$u=x^y$
7.5.	$x\dfrac{\partial u}{\partial x}+y\dfrac{\partial u}{\partial y}=2u$	$u=\dfrac{xy}{x+y}$
7.6.	$x^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+y^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$	$u=e^{xy}$
7.7.	$a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$	$u=\sin^2(x-ay)$
7.8.	$x^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}-y^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$	$u=y\sqrt{\dfrac{y}{x}}$
7.9.	$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0$	$u=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$
7.10.	$a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$	$u=e^{-\cos(x+ay)}$
7.11.	$\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial u}{\partial y}+\dfrac{\partial u}{\partial z}=0$	$u=(x-y)(y-z)(z-x)$
7.12.	$x\dfrac{\partial u}{\partial x}+y\dfrac{\partial u}{\partial y}=u$	$u=x\ln\dfrac{y}{x}$
7.13.	$y\dfrac{\partial u}{\partial x}-x\dfrac{\partial u}{\partial y}=0$	$u=\ln\left(x^2+y^2\right)$
7.14.	$x^2\dfrac{\partial u}{\partial x}-xy\dfrac{\partial u}{\partial y}+y^2=0$	$u=\dfrac{y^2}{3x}+\arcsin(xy)$
7.15.	$x^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}-2xy\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+y^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}+2xy=0$	$u=e^{xy}$
7.16.	$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=0$	$u=arctg\dfrac{x+y}{1-xy}$
7.17.	$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$	$u=\ln\left(x^2+y^2+2x+1\right)$

7.18.	$x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}+u=0$	$u=\frac{2x+3y}{x^2+y^2}$
7.19.	$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2=1$	$u=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$
7.20.	$x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}=2u$	$u=\left(x^2+y^2\right)tg\frac{x}{y}$
7.21.	$9\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$	$u=e^{-(x+3y)}\sin(x+3y)$
7.22.	$x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2xy\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$	$u=xe^{\frac{y}{x}}$
7.23.	$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$	$u=arctg\frac{y}{x}$
7.24.	$x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}=0$	$u=arctg\frac{x}{y}$
7.25.	$\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}$	$u=\ln\left(x+e^{-y}\right)$
7.26.	$x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}=0$	$u=\arcsin\frac{x}{x+y}$
7.27.	$\frac{1}{x}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{1}{y}\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{u}{y^2}$	$u=\frac{y}{\left(x^2-y^2\right)^5}$
7.28.	$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{x+y}{x-y}$	$u=\frac{x^2+y^2}{x-y}$
7.29.	$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{2y}{u}$	$u=\sqrt{2xy+y^2}$
7.30.	$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$	$u=\ln\left(x^2-y^2\right)$

Задание 8. 1. Даны функция z=z(x, y), точка A(x_0, y_0) и вектор $\vec{l}$. Найти:

1) grad z в точке A,
2) производную в точке A по направлению вектора $\vec{l}$.

8.1.	$z=x^2+xy+y^2$	A (1, 1)	$\vec{l}=2\vec{i}-\vec{j}$
8.2.	$z=2x^2+3xy+y^2$	A (2, 1)	$\vec{l}=3\vec{i}-4\vec{j}$
8.3.	$z=\ln(5x^2+3y^2)$	A (1, 1)	$\vec{l}=3\vec{i}+2\vec{j}$
8.4.	$z=\ln(5x^2+4y^2)$	A(1, 1)	$\vec{l}=2\vec{i}-\vec{j}$

8.5. $z = 5x^2 + 6xy$	A (2, 1)	$\vec{l} = \vec{i} + 2\vec{j}$
8.6. $z = arctg\left(xy^2\right)$	A (2, 3)	$\vec{l} = 4\vec{i} - 3\vec{j}$
8.7. $z = \arcsin\dfrac{x^2}{y}$	A (1, 2)	$\vec{l} = 5\vec{i} - 12\vec{j}$
8.8. $z = \ln(3x^2 + 4y^2)$	A (1, 3)	$\vec{l} = 2\vec{i} - \vec{j}$
8.9. $z = 3x^4 + 2x^2y^3$	A (-1, 2)	$\vec{l} = 4\vec{i} - 3\vec{j}$
8.10. $z = 3x^2y^2 + 5xy^2$	A (1, 1)	$\vec{l} = 2\vec{i} + \vec{j}$
8.11. $z = x^2 + xy + y^2$	A (1, 1)	$\vec{l} = 2\vec{i} - \vec{j}$
8.12. $z = 2x^2 + 3xy + y^2$	A (2, 1)	$\vec{l} = 3\vec{i} - 4\vec{j}$
8.13. $z = \ln(5x^2 + 3y^2)$	A (1, 1)	$\vec{l} = 3\vec{i} + 2\vec{j}$
8.14. $z = \ln(5x^2 + 4y^2)$	A(1, 1)	$\vec{l} = 2\vec{i} - \vec{j}$
8.15. $z = 5x^2 + 6xy$	A (2, 1)	$\vec{l} = \vec{i} + 2\vec{j}$
8.16. $z = arctg\left(xy^2\right)$	A (2, 3)	$\vec{l} = 4\vec{i} - 3\vec{j}$
8.17. $z = \arcsin\dfrac{x^2}{y}$	A (1, 2)	$\vec{l} = 5\vec{i} - 12\vec{j}$
8.18. $z = \ln(3x^2 + 4y^2)$	A (1, 3)	$\vec{l} = 2\vec{i} - \vec{j}$
8.19. $z = 3x^4 + 2x^2y^3$	A (-1, 2)	$\vec{l} = 4\vec{i} - 3\vec{j}$
8.20. $z = 3x^2y^2 + 5xy^2$	A (1, 1)	$\vec{l} = 2\vec{i} + \vec{j}$

2. Найти градиент и производную функции z=z(x, y) в заданной точке A(x_0, y_0) в направлении вектора $\vec{l}$, составляющего угол α с положительным направлением оси Ox.

8.21. $z = \dfrac{1}{3}x^2 + \dfrac{1}{4}xy^3$	A (1, -1)	$\alpha = \dfrac{\pi}{4}$
8.22. $z = tgx + x - 2\sin y$	A $\left(\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{3}\right)$	$\alpha = \dfrac{\pi}{4}$
8.23. $z = 3x^2y + \sqrt{xy}$	A (2, 2)	$\alpha = \dfrac{\pi}{6}$
8.24. $z = 2\cos(x + y) + 2x$	A $\left(\dfrac{\pi}{6}, \dfrac{\pi}{6}\right)$	$\alpha = \dfrac{\pi}{3}$
8.25. $z = x\sin(x + y) - 1$	A $\left(\dfrac{\pi}{6}, \dfrac{\pi}{6}\right)$	$\alpha = \dfrac{\pi}{4}$
8.26. $z = \ln(x^2 + y^2)$	A (3, 4)	$\alpha = \dfrac{\pi}{6}$

8.27. $z=\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{4}y^4$	A (1, -2)	$\alpha=\frac{\pi}{4}$
8.28. $z=xtgy+\cos x$	A $\left(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{4}\right)$	$\alpha=\frac{\pi}{4}$
8.29. $z=\ln(x+2y)-xy$	A (1, 1)	$\alpha=\frac{\pi}{3}$
8.30. $z=e^{x^2-y^2}$	A (2, 2)	$\alpha=\frac{\pi}{6}$

Задание 9. Найти уравнения касательной плоскости и нормали к заданной поверхности S в точке M_0 (x_0, y_0, z_0).

9.1. $S: x^2+y^2+z^2+6z-4x+8=0$	M_0 (2, 1, -1)
9.2. $S: x^2-4y^2+z^2+2xy=0$	M_0 (-2, 1, 2)
9.3. $S: x^2+y^2+z^2-xy+3z-7=0$	M_0 (1, 2, 1)
9.4. $S: x^2+y^2+z^2+6y+4x-8=0$	M_0 (-1, 1, 2)
9.5. $S: 2x^2-y^2+z^2-4z++y-13=0$	M_0 (2, 1, -1)
9.6. $S: x^2+y^2+z^2-6y+4z+4=0$	M_0 (2, 1, -1)
9.7. $S: x^2+z^2-5yz+3y-46=0$	M_0 (1, 2, -3)
9.8. $S: x^2+y^2-xz-yz=0$	M_0 (0, 2, 2)
9.9. $S: x^2+y^2+2yz-z^2+y-2z-2=0$	M_0 (1, 1, 1)
9.10. $S: x^2+y^2-z^2-2xz+2x-z=0$	M_0 (1, 1, 1)
9.11. $S: x^2+y^2-2xy+2x-y-z=0$	M_0 (-1, -1, 1)
9.12. $S: x^2-y^2-2xy+3y+z=0$	M_0 (1, -1, 1)
9.13. $S: x^2-y^2-2xy-x-2y-z=0$	M_0 (-1, 1, 1)
9.14. $S: x^2-2y^2+z^2+xz-4y-13=0$	M_0 (3, 1, 2)
9.15. $S: 4y^2-z^2+4xy-xz+3z-9=0$	M_0 (1, -2, 1)
9.16. $S: x^2+y^2-3xy-x+y-z+2=0$	M_0 (2, 1, 0)
9.17. $S: 2x^2-y^2+2z^2+xy+xz-3=0$	M_0 (1, 2, 1)
9.18. $S: x^2+y^2-z^2+xz+4x-8=0$	M_0 (1, 1, 2)
9.19. $S: x^2-y^2+z^2-4x+2y-14=0$	M_0 (3, 1, 4)
9.20. $S: x^2-y^2-z^2+2z+4x+5=0$	M_0 (-2, 1, 0)
9.21. $S: x^2+y^2-xz+yz-3x-11=0$	M_0 (1, 4, -1)
9.22. $S: x^2+2y^2+z^2-4xz-8=0$	M_0 (0, 2, 0)
9.23. $S: x^2-y^2-2z^2-2y=0$	M_0 (-1, -1, 1)

9.24. $S: x^2+y^2-3z^2+xy+2z=0$ M$_0$ (1, 0, 1)
9.25. $S: 2x^2-y^2+z^2-6x+2y+6=0$ M$_0$ (1, -1, 1)
9.26. $S: x^2+y^2-z^2+6xy-z-8=0$ M$_0$ (1, 1, 0)
9.27. $S: 2x^2-3y^2+4x-2y-z+10=0$ M$_0$ (-1, 1, 3)
9.28. $S: x^2+y^2-4xy+3x-z-15=0$ M$_0$ (-1, 3, 4)
9.29. $S: x^2+2y^2+4xy-5y-z-10=0$ M$_0$ (-7, 1, 8)
9.30. $S: 2x^2-3y^2+xy+3x-z+1=0$ M$_0$ (1, -1, 2)

Задание 10. Исследовать на экстремум следующие функции:

10.1. $z=x^3+y^3-6xy$
10.2. $z=2x^3+xy^2+5x^2+y^2+1$
10.3. $z=4x-4y-x^2-y^2$
10.4. $z=x^2-xy+y^2+9x-6y+20$
10.5. $z=3x+6y-x^2-y^2-xy$
10.6. $z=x^3+8y^3-6xy+1$
10.7. $z=x^3+y^3-3xy$
10.8. $z=x^3+3xy^2-15x-12y$
10.9. $z=x^3+8y^3-6xy+5$
10.10. $z=1+15x-2x^2-xy-2y^2$
10.11. $z=1+6x-x^2-y^2-xy$
10.12. $z=x^3+y^2-6xy-39x+18y+20$
10.13. $z=2x^3+2y^3-6xy+5$
10.14. $z=3x^3+3y^3-9xy+10$
10.15. $z=x^2+xy+y^2+x-y+1$
10.16. $z=4(x-y)-x^2-y^2$
10.17. $z=6(x-y)-3x^2-3y^2$
10.18. $z=x^2+xy+y^2-6x-9y$
10.19. $z=(x-2)^2+2y^2-10$
10.20. $z=(x-5)^2+y^2+1$
10.21. $z=x^3+y^3-3xy$
10.22. $z=2xy-2x^2-4y^2$
10.23. $z=2xy-5x^2-3y^2+2$
10.24. $z=xy(12-x-y)$

10.25. $z = xy - x^2 - y^2 + 9$

10.26. $z = 2xy - 3x^2 - 2y^2 + 10$

10.27. $z = x^3 + 8y^3 - 6xy + 1$

10.28. $z = x^2 - xy + y^2 + 9x - 6y + 20$

10.29. $z = x^2 + y^2 - xy + x + y$

10.30. $z = (x-1)^2 + 2y^2$

<u>Задание 11.</u> Найти наибольшее или наименьшее значение функции z=f(x, y) в области D, ограниченной заданными линиями:

11.1. $z = 3x + y - xy$	$D: y = x, y = 4, x = 0$
11.2. $z = xy - x - 2y$	$D: x = 3, y = x, y = 0$
11.3. $z = x^2 + 2xy - 4x + 8y$	$D: y = 0, x = 1, x = 0$
11.4. $z = 5x^2 - 3xy + y^2$	$D: y = 0, x = 1, x = 0, y = 1$
11.5. $z = x^2 + 2xy - y^2 - 4x$	$D: x - y + 1 = 0,\ x = 3$
11.6. $z = x^2 + y^2 - 2x - 2y + 8$	$D: x = 0, y = 0, x + y - 1 = 0$
11.7. $z = 2x^3 - xy^2 + y$	$D: x = 0,\ x = 1, y = 0, y = 6$
11.8. $z = 3x + 6y - x^2 - xy - y^2$	$D: x = 0,\ x = 1, y = 0$
11.9. $z = x^2 - 2y^2 + 4xy - 6x - 1$	$D: x = 0, y = 0, x + y - 3 = 0$
11.10. $z = x^2 + 2xy - 10$	$D: y = 0, y = x^2 - 4$
11.11. $z = xy - 2x - y$	$D: x = 0,\ x = 3, y = 0, y = 4$
11.12. $z = \frac{1}{2}x^2 - xy$	$D: y = 8, y = 2x^2$
11.13. $z = 3x^2 + 3y^2 - 2x - 2y + 2$	$D: x = 0, y = 0, x + y - 1 = 0$
11.14. $z = 2x^2 + 3y^2 + 1$	$D: y = \sqrt{9 - \frac{9}{4}x^2}, y = 0$
11.15. $z = x^2 - y^2 - 2xy + 4x + 1$	$D: x = -3, y = 0, x + y + 1 = 0$
11.16. $z = 3x^2 + 3y^2 - x - y + 1$	$D: x = 5, y = 0, x - y - 1 = 0$
11.17. $z = 2x^2 + 2xy - \frac{1}{2}y^2 - 4x$	$D: y = 2x, y = 2, x = 0$
11.18. $z = x^2 - 2xy + \frac{5}{2}y^2 - 2x$	$D: x = 0,\ x = 2, y = 0, y = 2$
11.19. $z = xy - 3x - 2y$	$D: x = 0,\ x = 4, y = 0, y = 4$
11.20. $z = x^2 + xy - 2$	$D: y = 4x^2 - 4, y = 0$
11.21. $z = x^2 y(4 - x - y) + y - xy$	$D: y = 6 - x, y = 0, x = 0$
11.22. $z = x^3 + y^3 - 3xy$	$D: x = 0,\ x = 2, y = -1, y = 2$

11.23. $z = 4(x - y) - x^2 - y^2$	$D: x + 2y = 4, x - 2y = 4, x = 0$
11.24. $z = x^2 - y^2 + 2xy - 4x$	$D: x = 3, y = 0, x - y + 1 = 0$
11.25. $z = 6xy - 9x^2 - 9y^2 + 4x + 4y$	$D: x = 0,\ x = 1, y = 0, y = 2$
11.26. $z = x^2 + 2xy - y^2 - 2x + 2y$	$D: x = 2, y = 0, x - y + 2 = 0$
11.27. $z = 4 - 2x^2 - y^2$	$D:\ y = 0, y = \sqrt{1 - x^2}$
11.28. $z = 5x^2 - 3xy + y^2 + 4$	$D: x = -2,\ x = 1, y = -1, y = 1$
11.29. $z = x^2 + 2xy + 4x - y^2$	$D: x = 0, y = 0, x + y + 2 = 0$
11.30. $z = 2x^2 y - x^3 y - x^2 y^2$	$D: x = 0, y = 0, x + y - 6 = 0$

Методические рекомендации

Функция. Предел. Непрерывность.

Пример. $\{x_n\} = \{(-1)^n\}$ или $\{x_n\} = -1; 1; -1; 1; \ldots$

$\{x_n\} = \{\sin\pi n/2\}$ или $\{x_n\} = 1; 0; 1; 0; \ldots$

Пример. $\{x_n\} = n$ – ограничена снизу $\{1, 2, 3, \ldots\}$.

Пример. Доказать, что предел последовательности $\lim \frac{(-1)^n}{n} = 0$.

Пусть при n > N верно $\left|0 - \frac{(-1)^n}{n}\right| < \varepsilon$, т.е. $\frac{1}{n} < \varepsilon$. Это верно при $n > \frac{1}{\varepsilon}$, таким образом, если за N взять целую часть от $\frac{1}{\varepsilon}$, то утверждение, приведенное выше, выполняется.

Пример. Показать, что при $n\to\infty$ последовательность 3, $2\frac{1}{2}, 2\frac{1}{3}, 2\frac{1}{4}, \ldots, 2 + \frac{1}{n}$ имеет пределом число 2.

Итого: $\{x_n\} = 2 + 1/n$; $1/n = x_n - 2$

Очевидно, что существует такое число n, что $|x_n - 2| = \left|\frac{1}{n}\right| < \varepsilon$, т.е. $\lim \{x_n\} = 2$.

Пример. $\{x_n\} = 1/n$ – убывающая и ограниченная

$\{x_n\} = n$ – возрастающая и неограниченная.

Пример. Доказать, что последовательность $\{x_n\} = \frac{n}{2n+1}$ монотонная возрастающая.

Найдем член последовательности $\{x_{n+1}\} = \frac{n+1}{2n+2+1} = \frac{n+1}{2n+3}$

Найдем знак разности: $\{x_n\} - \{x_{n+1}\} = \frac{n}{2n+1} - \frac{n+1}{2n+3} = \frac{2n^2 + 3n - 2n^2 - 2n - n - 1}{(2n+1)(2n+3)} =$

$= \frac{-1}{(2n+1)(2n+3)} < 0$, т.к. $n\in N$, то знаменатель положительный при любом n.

Таким образом, $x_{n+1} > x_n$. Последовательность возрастающая, что и следовало доказать.

Пример. Выяснить является возрастающей или убывающей последовательность $\{x_n\} = \frac{n}{5^n}$.

Найдем $x_{n+1} = \frac{n+1}{5^{n+1}}$. Найдем разность $x_{n+1} - x_n = \frac{n+1}{5\cdot 5^n} - \frac{n}{5^n} = \frac{n+1-5n}{5\cdot 5^n} =$

$= \frac{1-4n}{5\cdot 5^n}$, т.к. $n\in N$, то $1 - 4n < 0$, т.е. $x_{n+1} < x_n$. Последовательность монотонно убывает.

Следует отметить, что монотонные последовательности ограничены по крайней мере с одной стороны.

Пример. Найти предел $\lim\limits_{x\to 0}\frac{tg5x}{\sin 7x}$

Так как tg5x ~ 5x и sin7x ~ 7x при x → 0, то, заменив функции эквивалентными бесконечно малыми, получим:

$$\lim_{x\to 0}\frac{tg5x}{\sin 7x}=\lim_{x\to 0}\frac{5x}{7x}=\frac{5}{7}$$

Пример. Найти предел $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^3}{1-\cos x}$.

Так как 1 – cosx = $2\sin^2\frac{x}{2}\sim 2\left(\frac{x}{2}\right)^2$ при x→0, то $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^3}{1-\cos x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^3}{\frac{x^2}{2}}=\lim\limits_{x\to 0}2x=0$.

Пример. Найти предел $\lim\limits_{x\to 0}\frac{tgx}{\sin x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{x^2}=\infty$.

Если α и β - бесконечно малые при x→a, причем β - бесконечно малая более высокого порядка, чем α, то γ = α + β - бесконечно малая, эквивалентная α. Это можно доказать следующим равенством $\lim\limits_{x\to a}\frac{\gamma}{\alpha}=\lim\limits_{x\to a}\left(1+\frac{\beta}{\alpha}\right)=1$.

Тогда говорят, что α - **главная часть** бесконечно малой функции γ.

Пример. Функция x^2 +x – бесконечно малая при x→0, x – главная часть этой функции. Чтобы показать это, запишем α = x^2, β = x, тогда

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x}=0,\quad \lim_{x\to 0}\frac{x^2+x}{x}=\lim_{x\to 0}(x+1)=1.$$

Пример. Найти предел.

$$\lim_{x\to 0}\frac{tgmx}{\sin nx}=\lim_{x\to 0}\frac{mx}{nx}=\frac{m}{n}$$

Пример. Найти предел.

$$\lim_{x\to x_0}\frac{tgx-tgx_0}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{\sin(x-x_0)}{(x-x_0)\cos x\cos x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{\sin(x-x_0)}{x-x_0}\cdot\lim_{x\to x_0}\frac{1}{\cos x\cos x_0}=1\cdot\frac{1}{\cos^2 x_0}=\frac{1}{\cos^2 x_0}$$

Пример. Найти предел.

$$\lim_{x\to\pi/4}\frac{\sin x-\cos x}{\pi-4x}=\lim_{x\to\pi/4}\frac{-\frac{2}{\sqrt{2}}\sin(\pi/4-x)}{\pi-4x}=\lim_{x\to\pi/4}\frac{-\sin(\pi/4-x)}{2\sqrt{2}(\pi/4-x)}=-\frac{1}{2\sqrt{2}}$$

Пример. Найти предел.

$$\lim_{x\to\pi/2}\frac{\cos x}{\pi-2x}=\left\{\begin{array}{l}y=\pi/2-x\\ x=\pi/2-y\\ \pi-2x=\pi-\pi+2y\end{array}\right\}=\lim_{y\to 0}\frac{\cos(\pi/2-y)}{2y}=\lim_{y\to 0}\frac{\sin y}{y}=\frac{1}{2}$$

<u>Пример.</u> Найти предел.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+3}{x-1}\right)^{x+3}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-1+4}{x-1}\right)^{x+3}=\left\{\begin{matrix}y=x-1\\x\to\infty\\y\to\infty\end{matrix}\right\}=\lim_{y\to\infty}\left(\frac{y+4}{y}\right)^{y+4}=\lim_{y\to\infty}\left(1+\frac{4}{y}\right)^{y}\cdot\lim_{y\to\infty}\left(1+\frac{4}{y}\right)^{4}=$$

$$=\left\{z=\frac{y}{4}\right\}=\lim_{z\to\infty}\left(1+\frac{1}{z}\right)^{4z}=\left(\lim_{z\to\infty}\left(1+\frac{1}{z}\right)^{z}\right)^{4}=e^{4}$$

<u>Пример.</u> Найти предел $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-6x+8}{x^2-8x+12}$.

Для нахождения этого предела разложим на множители числитель и знаменатель данной дроби.

$x^2 - 6x + 8 = 0;$	$x^2 - 8x + 12 = 0;$
$D = 36 - 32 = 4;$	$D = 64 - 48 = 16;$
$x_1 = (6 + 2)/2 = 4;$	$x_1 = (8 + 4)/2 = 6;$
$x_2 = (6 - 2)/2 = 2\ ;$	$x_2 = (8 - 4)/2 = 2;$

Тогда $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x-2)(x-4)}{(x-2)(x-6)}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-4}{x-6}=\dfrac{2}{4}=\dfrac{1}{2}$

<u>Пример.</u> Найти предел.

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x+x^2}-\sqrt{1-x+x^2}}{x^2-x}$ домножим числитель и знаменатель дроби на сопряженное выражение: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1+x+x^2-1+x-x^2}{x(x-1)(\sqrt{1+x+x^2}+\sqrt{1-x+x^2})}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x}{x(x-1)(\sqrt{1+x+x^2}+\sqrt{1-x+x^2})}=$

$=\dfrac{2}{-1\cdot(1+1)}=-1$.

<u>Пример.</u> Найти предел.

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-5x+6}{x^2-9}=\left\{x^2-5x+6=(x-2)(x-3)\right\}=\lim_{x\to 3}\frac{(x-2)(x-3)}{(x-3)(x+3)}=\frac{3-2}{3+3}=\frac{1}{6}$$

<u>Пример.</u> Найти предел $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-6x^2+11x-6}{x^2-3x+2}$.

Разложим числитель и знаменатель на множители.

$$x^2 - 3x + 2 = (x - 1)(x - 2)$$

$x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = (x - 1)(x - 2)(x - 3)$, т.к.

$$\begin{array}{l|l} x^3 - 6x^2 + 11x - 6 & x - 1 \\ \underline{x^3 - x^2} & x^2 - 5x + 6 \\ \quad -5x^2 + 11x & \\ \quad \underline{-5x^2 + 5x} & \\ \qquad\quad 6x - 6 & \\ \qquad\quad \underline{6x - 6} & \\ \qquad\qquad 0 & \end{array}$$

$$x^2 - 5x + 6 = (x - 2)(x - 3)$$

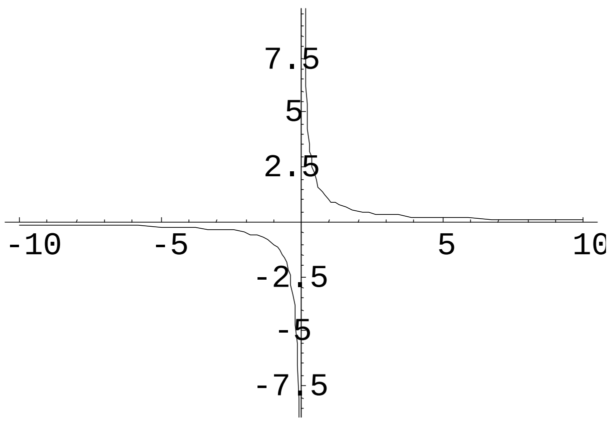
Тогда $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)(x-2)(x-3)}{(x-1)(x-2)} = -2$

Пример. Найти предел.

$$\lim_{h\to 0}\frac{\sin(a+2h) - 2\sin(a+h) + \sin a}{h^2} = \lim_{h\to 0}\frac{2\sin\frac{2a+2h}{2}\cos\frac{2h}{2} - 2\sin(a+h)}{h^2} = \lim_{h\to 0}\frac{2\sin(a+h)(\cos h - 1)}{h^2} =$$

$$= 2\lim_{h\to 0}\sin(a+h)\cdot\lim_{h\to 0}\frac{-2\sin^2(h/2)}{4(h/2)^2} = 2\sin a\cdot(-1/2) = -\sin a$$

Пример. Функция f(x) = $\dfrac{1}{x}$ имеет в точке $x_0 = 0$ точку разрыва 2 – го рода, т.к. $\lim\limits_{x\to 0+0} f(x) = +\infty;\quad \lim\limits_{x\to 0-0} f(x) = -\infty$.

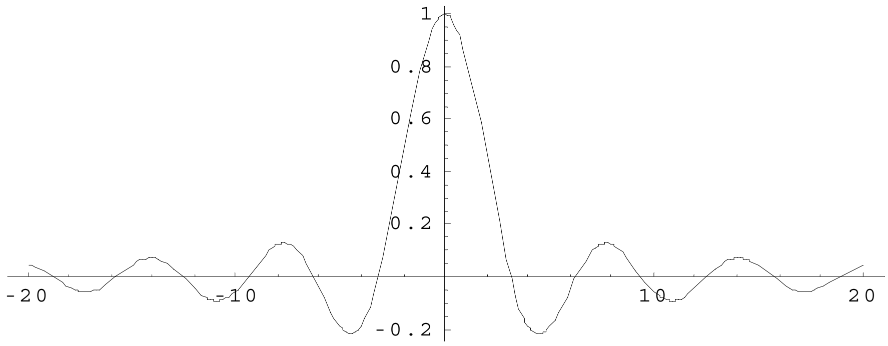


Пример. f(x) = $\dfrac{\sin x}{x}$

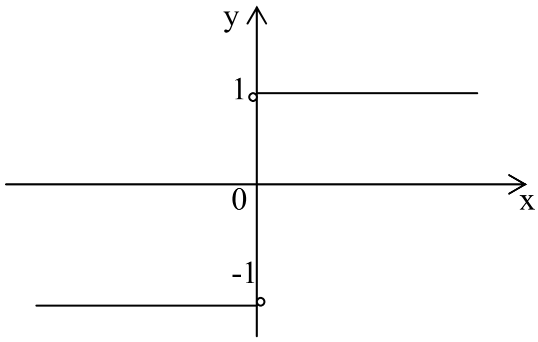
Функция не определена в точке x = 0, но имеет в ней конечный предел $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 1$, т.е. в точке x = 0 функция имеет точку разрыва 1 – го рода. Это – устранимая точка разрыва, т.к. если доопределить функцию:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x}, & при \quad x \neq 0 \\ 1, \quad при & x = 0 \end{cases}$$

График этой функции:



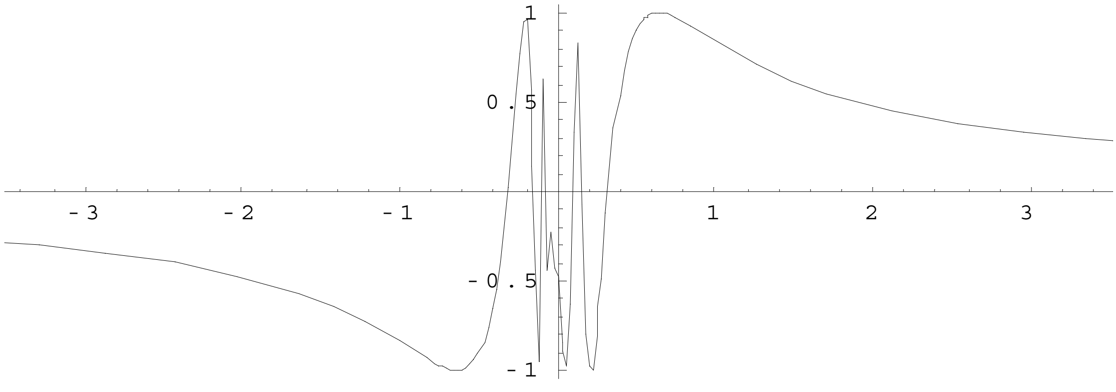
Пример. $f(x) = \dfrac{x}{|x|} = \begin{cases} 1, & при \quad x > 0 \\ -1, & при \quad x < 0 \end{cases}$



Эта функция также обозначается sign(x) – знак x. В точке x = 0 функция не определена. Т.к. левый и правый пределы функции различны, то точка разрыва – 1 – го рода. Если доопределить функцию в точке x = 0, положив f(0) = 1, то функция будет непрерывна справа, если положить f(0) = -1, то функция будет непрерывной слева, если положить f(x) равное какому- либо числу, отличному от 1 или –1, то функция не будет непрерывна ни слева, ни справа, но во всех случаях тем не менее будет иметь в точке x = 0 разрыв 1 – го рода. В этом примере точка разрыва 1 – го рода не является устранимой.

Таким образом, для того, чтобы точка разрыва 1 – го рода была устранимой, необходимо, чтобы односторонние пределы справа и слева были конечны и равны, а функция была бы в этой точке не определена.

Пример. $y = \sin\dfrac{1}{x}$



Функция $y = \sin\frac{1}{x}$ непрерывна на интервале (0, а), но не является на нем равномерно непрерывной, т.к. существует такое число $\Delta>0$ такое, что существуют значения x_1 и x_2 такие, что $|f(x_1) - f(x_2)|>\varepsilon$, ε - любое число при условии, что x_1 и x_2 близки к нулю.

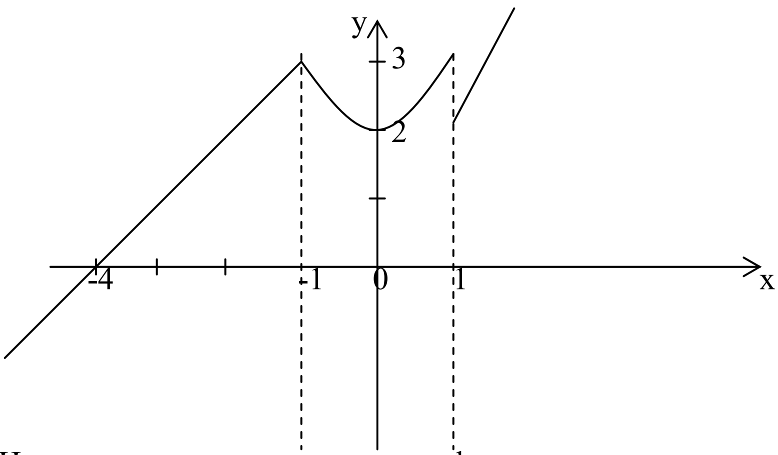
Пример. Исследовать на непрерывность функцию и определить тип точек разрыва, если они есть.

$$f(x) = \begin{cases} x+4, & x < -1 \\ x^2 + 2, & -1 \le x \le 1 \\ 2x, & x \ge 1 \end{cases}$$

$$\lim_{x\to -1-0} f(x) = 3 \qquad \lim_{x\to 1-0} f(x) = 3$$

$$\lim_{x\to -1+0} f(x) = 3 \qquad \lim_{x\to 1+0} f(x) = 2$$

в точке x = -1 функция непрерывна   в точке x = 1 точка разрыва 1 – го рода



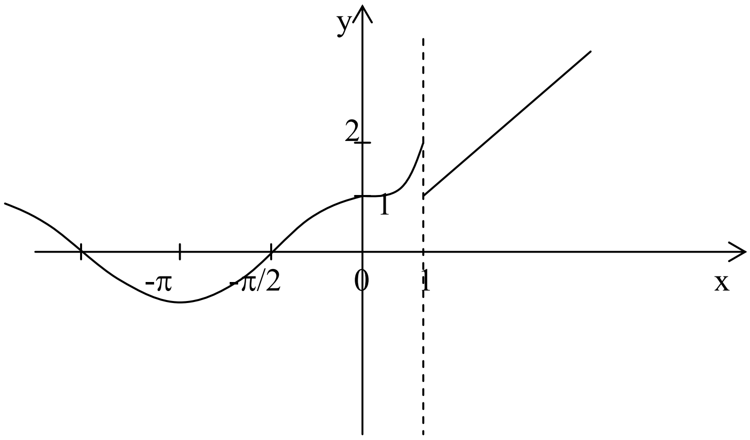
Пример. Исследовать на непрерывность функцию и определить тип точек разрыва, если они есть.

$$f(x) = \begin{cases} \cos x, & x \le 0 \\ x^2 + 1, & 0 < x < 1 \\ x, & x \ge 1 \end{cases}$$

$$\lim_{x\to 0-0} f(x) = 1 \qquad \lim_{x\to 1-0} f(x) = 2$$

$$\lim_{x\to 0+0} f(x) = 1 \qquad \lim_{x\to 1+0} f(x) = 1$$

в точке x = 0 функция непрерывна   в точке x = 1 точка разрыва 1 – го рода



Комплексные числа.

Пример. Даны два комплексных числа $z_1 = 1 - \frac{7}{2}i;\quad z_2 = -7 - 2i$. Требуется а) найти значение выражения $\left(\frac{1 - \frac{7}{2}i}{-7 - 2i}\right)^{-4}$ в алгебраической форме, б) для числа $z = 2 - 2\sqrt{3}i$ найти тригонометрическую форму, найти z^{20}, найти корни уравнения $w^3 + z = 0$.

а) Очевидно, справедливо следующее преобразование:

$$\left(\frac{1 - \frac{7}{2}i}{-7 - 2i}\right)^{-4} = \left(\frac{2 - 7i}{-14 - 4i}\right)^{-4} = \left(\frac{-14 - 4i}{2 - 7i}\right)^{4} = 16\left(\frac{-7 - 2i}{2 - 7i}\right)^{4}$$

Далее производим деление двух комплексных чисел:

$$\frac{-7 - 2i}{2 - 7i} = \frac{(-7 - 2i)(2 + 7i)}{(2 - 7i)(2 + 7i)} = \frac{-14 - 49i - 4i + 14}{4 + 49} = \frac{-53i}{53} = -i.$$

Получаем значение заданного выражения: $16(-i)^4 = 16i^4 = 16$.

б) Число $z = 2 - 2\sqrt{3}i$ представим в виде $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, где

$$r = |z| = \sqrt{4 + 12} = 4; \qquad \varphi = arctg\,\frac{b}{a} = arctg\left(-\sqrt{3}\right) = -60^0$$

Тогда $z = 4(\cos 60^0 - i\sin 60^0)$.

Для нахождения z^{20} воспользуемся формулой Муавра.

$$z^{20} = 4^{20}(\cos 1200^0 - i\sin 1200^0) = 4^{20}(\cos(3\cdot 2\pi + 120^0) - i\sin(3\cdot 2\pi + 120^0)) =$$
$$= 4^{20}(\cos 120^0 - i\sin 120^0) = -4^{20}\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right).$$

Если $w^3 + z = 0$, то $w = \sqrt[3]{z}$

$$\sqrt[3]{z} = \sqrt[3]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{3} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{3}\right) = \sqrt[3]{4}\left(\cos\frac{-60^0 + 2\pi k}{3} + i\sin\frac{-60^0 + 2\pi k}{3}\right); \quad k \in Z.$$

Дифференциальное исчисление функции одной переменной.

Пример. Найти производную функции $y = x\cos x\sin x + \frac{1}{2}\cos^2 x$.

Сначала преобразуем данную функцию: $y = \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{2}\cos^2 x$

$$y' = \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{2}x2\cos 2x + \frac{1}{2}2\cos x(-\sin x) = \frac{1}{2}\sin 2x + x\cos 2x - \sin x\cos x = x\cos 2x.$$

Пример. Найти производную функции $y = \frac{x^2 e^{x^2}}{x^2+1}$.

$$y' = \frac{(2xe^{x^2} + x^2 2xe^{x^2})(x^2+1) - (2x)x^2 e^{x^2}}{(x^2+1)^2} = \frac{2x^3 e^{x^2} + 2x^5 e^{x^2} + 2xe^{x^2} + 2x^3 e^{x^2} - 2x^3 e^{x^2}}{(x^2+1)^2} =$$

$$= \frac{2xe^{x^2}(x^4+1+x^2)}{(x^2+1)^2}$$

Пример. Найти производную функции $y = \ln tg\frac{x}{2} - \frac{x}{\sin x}$

$$y' = \frac{1}{tg\frac{x}{2}} \cdot \frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}} \cdot \frac{1}{2} - \frac{\sin x - x\cos x}{\sin^2 x} = \frac{1}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}} - \frac{\sin x - x\cos x}{\sin^2 x} = \frac{\sin x - \sin x + x\cos x}{\sin^2 x} =$$

$$= \frac{x\cos x}{\sin^2 x}$$

Пример. Найти производную функции $y = arctg\frac{2x^4}{1-x^8}$

$$y' = \frac{1}{\left(1 + \frac{4x^8}{(1-x^8)^2}\right)} \cdot \frac{8x^3(1-x^8) - (-8x^7)2x^4}{(1-x^8)^2} = \frac{(1-x^8)^2(8x^3 - 8x^{11} + 16x^{11})}{(1+x^8)^2(1-x^8)^2} = \frac{8x^3 + 8x^{11}}{(1+x^8)^2} =$$

$$= \frac{8x^3(1+x^8)}{(1+x^8)^2} = \frac{8x^3}{1+x^8}$$

Пример. Найти производную функции $y = x^2 e^{x^2}\ln x$

$$y' = \left(x^2 e^{x^2}\right)'\ln x + x^2 e^{x^2}\frac{1}{x} = \left(2xe^{x^2} + x^2 e^{x^2}2x\right)\ln x + xe^{x^2} = 2xe^{x^2}(1+x^2)\ln x + xe^{x^2} =$$

$$= xe^{x^2}(1 + 2\ln x + 2x^2\ln x)$$

Формула Тейлора.

Пример: Вычислить $\sin 28^0 13'15''$.

Для того, чтобы представить заданный угол в радианах, воспользуемся соотношениями:

$$1^0 = \frac{\pi}{180}; \qquad 28^0 = \frac{28\pi}{180};$$

$$1' = \frac{\pi}{60\cdot 180}; \qquad 13' = \frac{13\pi}{60\cdot 180};$$

$$1'' = \frac{\pi}{60\cdot 60\cdot 180}; \qquad 15'' = \frac{15\pi}{60\cdot 60\cdot 180};$$

$$28^0 13' 15'' = \frac{28\pi}{180} + \frac{13\pi}{60\cdot 180} + \frac{15\pi}{60\cdot 60\cdot 180} = \frac{\pi}{180}\left(\frac{28\cdot 60\cdot 60 + 60\cdot 13 + 15}{60\cdot 60}\right) = 0{,}492544\,рад$$

Если при разложении по формуле Тейлора ограничиться тремя первыми членами, получим:
sinx = $x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} = 0{,}492544 - 0{,}019915 + 0{,}000242 = 0{,}472871$.
Сравнивая полученный результат с точным значением синуса этого угла,

$$\sin 28^0 13' 15'' = 0{,}472869017612759812,$$

видим, что даже при ограничении всего тремя членами разложения, точность составила 0,000002, что более чем достаточно для большинства практических технических задач.

Раскрытие неопределенностей.

Правило Лопиталя.

Пример: Найти предел $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2 - 1 + \ln x}{e^x - e}$.

Как видно, при попытке непосредственного вычисления предела получается неопределенность вида $\frac{0}{0}$. Функции, входящие в числитель и знаменатель дроби удовлетворяют требованиям теоремы Лопиталя.

$f'(x) = 2x + \frac{1}{x}$; $\qquad g'(x) = e^x$;

$$\lim_{x\to 1}\frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{2x + \frac{1}{x}}{e^x} = \frac{2+1}{e} = \frac{3}{e};$$

Пример: Найти предел $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\pi - 2arctgx}{e^{\frac{3}{x}} - 1}$.

$$f'(x) = -\frac{2}{1+x^2}; \qquad g'(x) = e^{\frac{3}{x}}\cdot\frac{-3}{x^2};$$

$$\lim_{x\to\infty}\left[-\frac{2x^2}{(1+x^2)e^{\frac{3}{x}}(-3)}\right]=\frac{-2}{(0+1)\cdot 1\cdot(-3)}=\frac{2}{3}.$$

Если при решении примера после применения правила Лопиталя попытка вычислить предел опять приводит к неопределенности, то правило Лопиталя может быть применено второй раз, третий и т.д. пока не будет получен результат. Естественно, это возможно только в том случае, если вновь полученные функции в свою очередь удовлетворяют требованиям теоремы Лопиталя.

Пример: Найти предел $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{xe^{\frac{x}{2}}}{x+e^x}$.

$$f'(x)=e^{\frac{x}{2}}(1+\frac{1}{2}x); \qquad g'(x)=1+e^x;$$

$$f''(x)=\frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}}+\frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}}+\frac{x}{4}e^{\frac{x}{2}}=\frac{1}{4}e^{\frac{x}{2}}(4+x); \qquad g''(x)=e^x;$$

$$\lim_{x\to\infty}=\frac{\frac{1}{4}e^{\frac{x}{2}}(4+x)}{e^x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{4}(4+x)}{e^{\frac{x}{2}}}$$

$$f'''(x)=\frac{1}{4}; \qquad g'''(x)=\frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}}; \qquad \lim_{x\to\infty}\frac{1}{2e^{\frac{x}{2}}}=0;$$

Следует отметить, что правило Лопиталя – всего лишь один из способов вычисления пределов. Часто в конкретном примере наряду с правилом Лопиталя может быть использован и какой – либо другой метод (замена переменных, домножение и др.).

Пример: Найти предел $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}-2x}{x-\sin x}$.

$f'(x)=e^x+e^{-x}-2; \qquad g'(x)=1-\cos x;$

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x+e^{-x}-2}{1-\cos x}=\dfrac{1+1-2}{1-1}=\dfrac{0}{0}$ - опять получилась неопределенность. Применим правило Лопиталя еще раз.

$f''(x)=e^x-e^{-x}; \qquad g''(x)=\sin x;$

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}}{\sin x}=\dfrac{1-1}{0}=\dfrac{0}{0}$ - применяем правило Лопиталя еще раз.

$f'''(x)=e^x+e^{-x}; \qquad g'''(x)=\cos x;$

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x+e^{-x}}{\cos x}=\dfrac{2}{1}=2;$

Неопределенности вида 0^0; 1^∞; ∞^0 можно раскрыть с помощью логарифмирования. Такие неопределенности встречаются при нахождении пределов функций вида $y = \left[f(x)\right]^{g(x)}$, f(x)>0 вблизи точки а при x→a. Для нахождения предела такой функции достаточно найти предел функции lny = g(x)lnf(x).

Пример: Найти предел $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x^x$.

Здесь y = x^x, lny = xlnx.

Тогда $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \ln y = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x\ln x = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \left\{\begin{matrix}\text{правило}\\ \text{Лопиталя}\end{matrix}\right\} = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{1/x}{-1/x^2} = -\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x = 0;$. Следовательно

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \ln y = \ln \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} y = 0; \quad \Rightarrow \quad \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} y = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x^x = 1$

Пример: Найти предел $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^2}{e^{2x}}$.

$f'(x) = 2x; \qquad g'(x) = 2e^{2x};$ $\qquad \lim\limits_{x\to\infty} \frac{x}{e^{2x}} = \frac{\infty}{\infty};$- получили неопределенность. Применяем правило Лопиталя еще раз.

$f''(x) = 2; \qquad g'(x) = 4e^{2x}; \qquad \lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{2e^{2x}} = \frac{1}{\infty} = 0;$

Исследование функций с помощью производной.

Пример. Найти асимптоты и построить график функции $y = \frac{x^2 + 2x - 1}{x}$.

1) Вертикальные асимптоты: y→+∞ x→0-0: y→-∞ x→0+0, следовательно, x = 0- вертикальная асимптота.

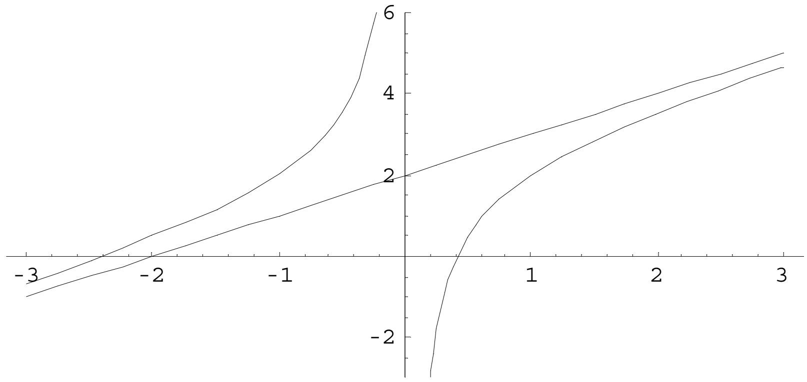
2) Наклонные асимптоты:

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2 + 2x - 1}{x^2} = \lim_{x\to\infty}\left(1 + \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2}\right) = 1$$

$$b = \lim_{x\to\infty}(f(x) - x) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2 + 2x - 1}{x} - x\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2 + 2x - 1 - x^2}{x}\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x-1}{x}\right) = \lim_{x\to\infty}\left(2 - \frac{1}{x}\right) = 2$$

Таким образом, прямая y = x + 2 является наклонной асимптотой.

Построим график функции:



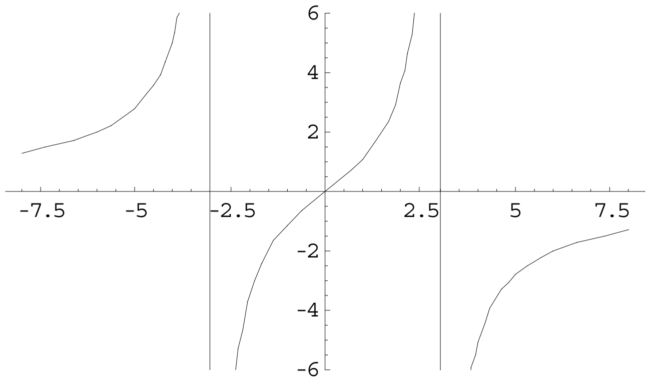
<u>Пример.</u> Найти асимптоты и построить график функции $y = \dfrac{9x}{9 - x^2}$.

Прямые x = 3 и x = -3 являются вертикальными асимптотами кривой.

Найдем наклонные асимптоты: $k = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{9}{9 - x^2} = 0$

$$b = \lim_{x\to\infty} \frac{9x}{9 - x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{9}{x}}{\frac{9}{x^2} - 1} = 0$$

y = 0 – горизонтальная асимптота.



<u>Пример.</u> Найти асимптоты и построить график функции $y = \dfrac{x^2 - 2x + 3}{x + 2}$.

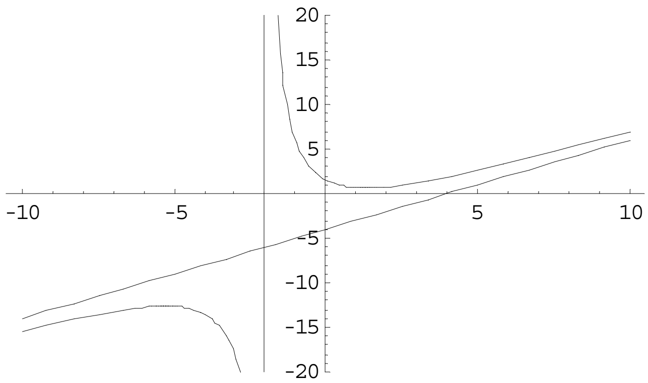
Прямая x = -2 является вертикальной асимптотой кривой.

Найдем наклонные асимптоты.

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2 - 2x + 3}{x(x + 2)} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2 - 2x + 3}{x^2 + 2x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1 - \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2}}{1 + \frac{2}{x}} = 1.$$

$$b=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-2x+3}{x+2}-x\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-2x+3-x^2-2x}{x+2}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{-4x+3}{x+2}=\lim_{x\to\infty}\frac{-4+\frac{3}{x}}{1+\frac{2}{x}}=-4$$

Итого, прямая y = x – 4 является наклонной асимптотой.



Пример. Исследовать функцию $y=\dfrac{x^3}{x^2-1}$ и построить ее график.

Находим область существования функции. Очевидно, что *областью определения* функции является область (-∞; -1) ∪ (-1; 1) ∪ (1; ∞).

В свою очередь, видно, что прямые x = 1, x = -1 являются *вертикальными асимптотами* кривой.

Областью значений данной функции является интервал (-∞; ∞).

Точками разрыва функции являются точки x = 1, x = -1.

Находим *критические точки*.

Найдем производную функции

$$y'=\frac{3x^2(x^2-1)-2x\cdot x^3}{(x^2-1)^2}=\frac{3x^4-3x^2-2x^4}{(x^2-1)^2}=\frac{x^4-3x^2}{(x^2-1)^2}$$

Критические точки: x = 0; x = -$\sqrt{3}$; x = $\sqrt{3}$; x = -1; x = 1.

Найдем вторую производную функции

$$y''=\frac{(4x^3-6x)(x^2-1)^2-(x^4-3x^2)4x(x^2-1)}{(x^2-1)^4}=$$

$$=\frac{(4x^3-6x)(x^4-2x^2+1)-(x^4-3x^2)(4x^3-4x)}{(x^2-1)^4}=$$

$$=\frac{4x^7-8x^5+4x^3-6x^5+12x^3-6x-4x^7+4x^5+12x^5-12x^3}{(x^2-1)^4}=$$

$$=\frac{2x^5+4x^3-6x}{(x^2-1)^4}=\frac{2x(x^4+2x^2-3)}{(x^2-1)^4}=\frac{2x(x^2+3)(x^2-1)}{(x^2-1)^4}=\frac{2x(x^2+3)}{(x^2-1)^3}.$$

Определим выпуклость и вогнутость кривой на промежутках.

$-\infty < x < -\sqrt{3}$, $y'' < 0$, кривая выпуклая
$-\sqrt{3} < x < -1$, $y'' < 0$, кривая выпуклая
$-1 < x < 0$, $y'' > 0$, кривая вогнутая
$0 < x < 1$, $y'' < 0$, кривая выпуклая
$1 < x < \sqrt{3}$, $y'' > 0$, кривая вогнутая
$\sqrt{3} < x < \infty$, $y'' > 0$, кривая вогнутая

Находим промежутки *возрастания* и *убывания* функции. Для этого определяем знаки производной функции на промежутках.

$-\infty < x < -\sqrt{3}$, $y' > 0$, функция возрастает
$-\sqrt{3} < x < -1$, $y' < 0$, функция убывает
$-1 < x < 0$, $y' < 0$, функция убывает
$0 < x < 1$, $y' < 0$, функция убывает
$1 < x < \sqrt{3}$, $y' < 0$, функция убывает
$\sqrt{3} < x < \infty$, $y'' > 0$, функция возрастает

Видно, что точка $x = -\sqrt{3}$ является точкой *максимума*, а точка $x = \sqrt{3}$ является точкой *минимума*. Значения функции в этих точках равны соответственно $3\sqrt{3}/2$ и $-3\sqrt{3}/2$.

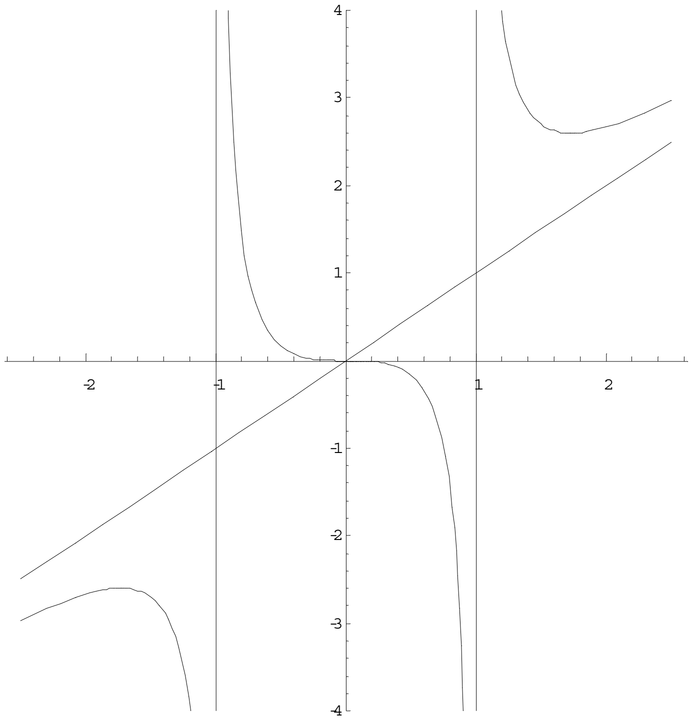
Про вертикальные *асимптоты* было уже сказано выше. Теперь найдем *наклонные асимптоты*.

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{x^2-1} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{1-\frac{1}{x^2}} = 1;$$

$$b = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3}{x^2-1} - x\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3 - x^3 + x}{x^2-1}\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{x}{x^2-1} = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{x^2}} = 0$$

Итого, уравнение наклонной асимптоты – $y = x$.

Построим *график* функции:



Пример: Методами дифференциального исчисления исследовать функцию $y = \sqrt[3]{1 - x^3}$ и построить ее график.

1. Областью определения данной функции являются все действительные числа (-∞; ∞).
2. Функция является функцией общего вида в смысле четности и нечетности.
3. Точки пересечения с координатными осями: с осью Oy: x = 0; y = 1;
с осью Ox: y = 0; x = 1;
4. Точки разрыва и асимптоты: Вертикальных асимптот нет.

Наклонные асимптоты: общее уравнение y = kx + b;

$$k = \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt[3]{1-x^3}}{x} = \lim_{x\to\infty}\sqrt[3]{\frac{1-x^3}{x^3}} = \lim_{x\to\infty}\sqrt[3]{\frac{1}{x^3}-1} = -1;$$

$$b = \lim_{x\to\infty}(f(x) - kx) = \lim_{x\to\infty}(\sqrt[3]{1-x^3} + x) = \lim_{x\leftarrow\infty}\frac{(1 - x^3 + x^3)}{\left[\left(\sqrt[3]{1-x^3}\right)^2 - x\cdot\sqrt[3]{1-x^3} + x^2\right]} = 0;$$

Итого: y = -x – наклонная асимптота.

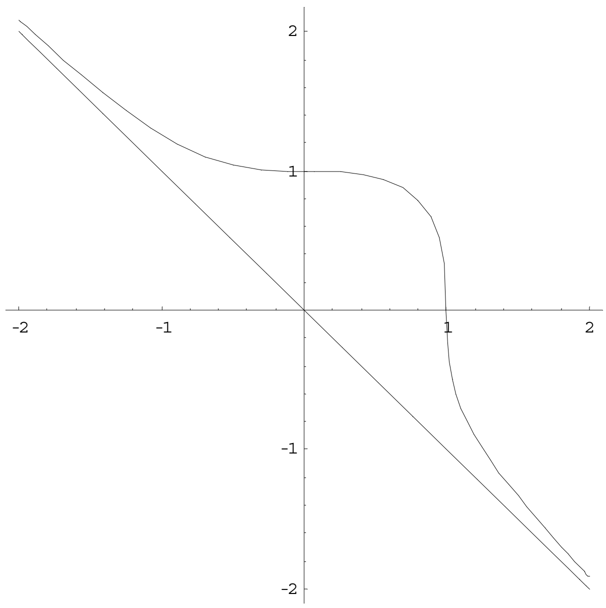
5. Возрастание и убывание функции, точки экстремума.

$y' = \frac{1}{3}(1 - x^3)^{2/3}\cdot\left(-3x^2\right)$. Видно, что $y' < 0$ при любом $x \neq 0$, следовательно, функция убывает на всей области определения и не имеет экстремумов. В точке x = 0 первая производная функции равна нулю, однако в этой точке убывание не сменяется на возрастание, следовательно, в точке x = 0 функция скорее всего имеет перегиб. Для нахождения точек перегиба, находим вторую производную функции.

$y'' = \frac{-2x}{\sqrt[3]{(1-x^3)^5}}$ $\quad y'' = 0$ при x =0 и $y'' = \infty$ при x = 1.

Точки (0,1) и (1,0) являются точками перегиба, т.к. $y''(1-h) < 0$; $y''(1+h) > 0$; $y''(-h) > 0$; $y''(h) < 0$ для любого $h > 0$.

6. Построим график функции.



Пример: Исследовать функцию $y = \frac{x^3+4}{x^2}$ и построить ее график.

1. Областью определения функции являются все значения x, кроме x = 0.
2. Функция является функцией общего вида в смысле четности и нечетности.
3. Точки пересечения с координатными осями: с осью Ox: y = 0; x = $-\sqrt[3]{4}$
с осью Oy: x = 0; y – не существует.
4. Точка x = 0 является точкой разрыва $\lim\limits_{x\to 0} y = \infty$, следовательно, прямая x = 0 является вертикальной асимптотой.
Наклонные асимптоты ищем в виде: y = kx + b.

$$k = \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{x^3+4}{x^3} = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{4}{x^3}\right) = 1$$

$$b = \lim_{x\to\infty}(f(x)-kx) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3+4}{x^2}-x\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{4}{x^3} = 0.$$

Наклонная асимптота y = x.

5. Находим точки экстремума функции.

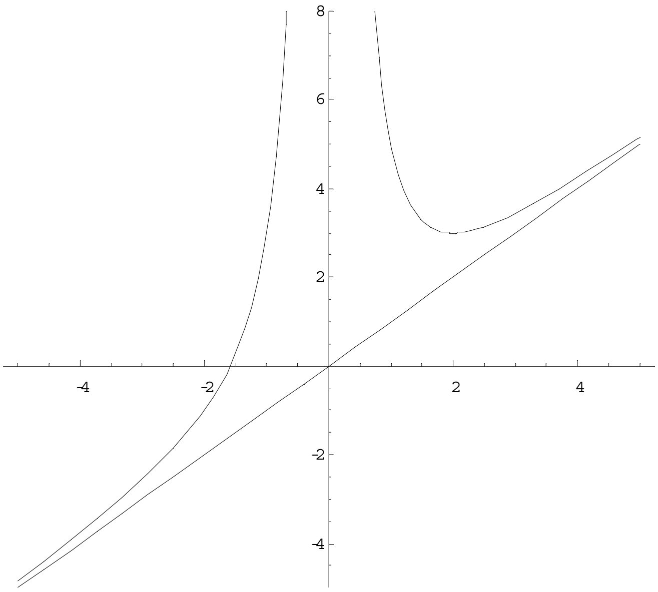
$y' = 1-\frac{8}{x^3}$; y′ = 0 при x = 2, y′ = ∞ при x = 0.

y′ > 0 при x ∈ (-∞, 0) – функция возрастает,
y′ < 0 при x ∈ (0, 2) – функция убывает,
y′ > 0 при x ∈ (2, ∞) – функция возрастает.
Таким образом, точка (2, 3) является точкой минимума.

Для определения характера выпуклости/вогнутости функции находим вторую производную.

$y'' = \frac{24}{x^4} > 0$ при любом x ≠ 0, следовательно, функция вогнутая на всей области определения.

6. Построим график функции.



Пример: Исследовать функцию $y = x(x-1)^3$ и построить ее график.

2. Областью определения данной функции является промежуток x ∈ (-∞, ∞).
3. В смысле четности и нечетности функция является функцией общего вида.
4. Точки пересечения с осями координат: с осью Oy: x = 0, y = 0;
   с осью Ox: y = 0, x = 0, x = 1.
5. Асимптоты кривой.

Вертикальных асимптот нет.
Попробуем найти наклонные асимптоты в виде y = kx + b.

$$k = \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{x(x-1)^3}{x} = \infty$$ - наклонных асимптот не существует.

6. Находим точки экстремума.

$$y' = \left[x(x^3 - 3x^2 + 3x - 1)\right]' = \left[x^4 - 3x^3 + 3x^2 - x\right]' = 4x^3 - 9x^2 + 6x - 1$$

Для нахождения критических точек следует решить уравнение $4x^3 - 9x^2 + 6x - 1 = 0$.
Для этого разложим данный многочлен третьей степени на множители.
Подбором можно определить, что одним из корней этого уравнения является число x = 1. Тогда:

$$\begin{array}{rl|l}
- & 4x^3 - 9x^2 + 6x - 1 & x - 1 \\ \cline{3-3}
 & \underline{4x^3 - 4x^2} & 4x^2 - 5x + 1 \\
- & -5x^2 + 6x & \\
 & \underline{-5x^2 + 5x} & \\
- & x - 1 & \\
 & \underline{x - 1} & \\
 & 0 &
\end{array}$$

Тогда можно записать $(x-1)(4x^2 - 5x + 1) = 0$. Окончательно получаем две критические точки: x = 1 и x = ¼.

Примечание. Операции деления многочленов можно было избежать, если при нахождении производной воспользоваться формулой производной произведения:

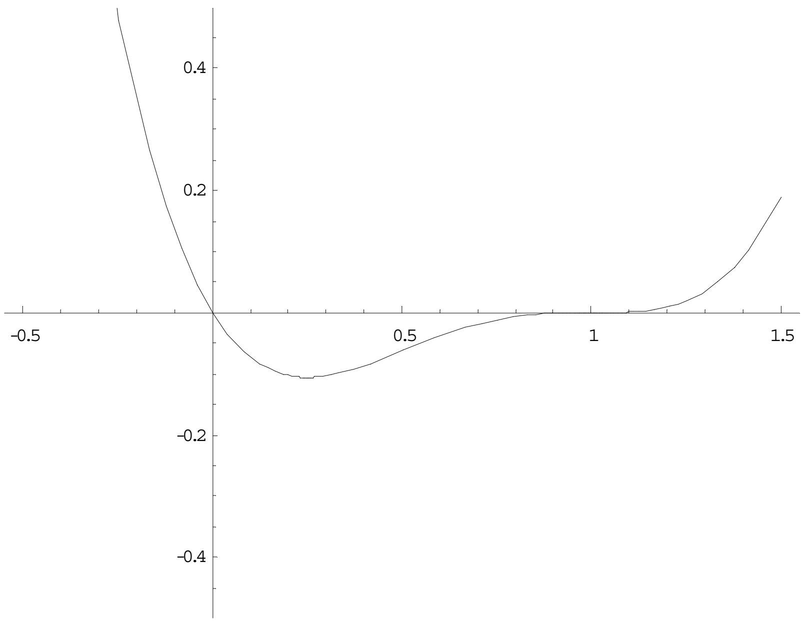
$$y' = \left[x(x-1)^3\right]' = (x-1)^3 + 3x(x-1)^2 = (x-1)^2(x-1+3x) = (x-1)^2(4x-1)$$

Найдем вторую производную функции: $12x^2 - 18x + 6$. Приравнивая к нулю, находим: $x = 1$, $x = ½$.

Систематизируем полученную информацию в таблице:

	(-∞ ; ¼)	1/4	(¼ ; ½)	1/2	(½ ; 1)	1	(1 ; ∞)
f″(x)	+	+	+	0	-	0	+
f′(x)	-	0	+	+	+	0	+
f(x)	убывает вып.вниз	min	возрастает вып.вниз	пере гиб	возрастает вып.вверх	пере гиб	возрастает вып. вниз

6. Построим график функции.



Интегральное исчисление.

Пример. Найти неопределенный интеграл $\int \sqrt{\sin x}\cos x dx$.

Сделаем замену $t = \sin x$, $dt = \cos x dt$.

$$\int \sqrt{t}dt = \int t^{1/2}dt = \frac{2}{3}t^{3/2} + C = \frac{2}{3}\sin^{3/2}x + C.$$

Пример. $\int x(x^2+1)^{3/2}dx.$

Замена $t = x^2 + 1;\quad dt = 2xdx;\quad dx = \dfrac{dt}{2x};$ Получаем:

$$\int t^{3/2}\frac{dt}{2} = \frac{1}{2}\int t^{3/2}dt = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{5}t^{5/2} + C = \frac{t^{5/2}}{5} + C = \frac{(x^2+1)^{5/2}}{5} + C;$$

Пример. $\int x^2\sin xdx = \begin{cases} u = x^2; & dv = \sin xdx; \\ du = 2xdx; & v = -\cos x \end{cases} = -x^2\cos x + \int \cos x\cdot 2xdx =$

$= \begin{cases} u = x; & dv = \cos xdx; \\ du = dx; & v = \sin x \end{cases} = -x^2\cos x + 2\left[x\sin x - \int \sin xdx\right] = -x^2\cos x + 2x\sin x + 2\cos x + C.$

Как видно, последовательное применение формулы интегрирования по частям позволяет постепенно упростить функцию и привести интеграл к табличному.

Пример. $\int e^{2x}\cos xdx = \begin{cases} u = e^{2x}; & du = 2e^{2x}dx; \\ dv = \cos xdx; & v = \sin x \end{cases} = e^{2x}\sin x - \int \sin x\cdot 2e^{2x}dx =$

$= \begin{cases} u = e^{2x}; & du = 2e^{2x}dx; \\ dv = \sin xdx; & v = -\cos x; \end{cases} = e^{2x}\sin x - 2\left[-e^{2x}\cos x - \int -\cos x\cdot 2e^{2x}dx\right] = e^{2x}\sin x +$

$+ 2e^{2x}\cos x - 4\int \cos x e^{2x}dx$

Видно, что в результате повторного применения интегрирования по частям функцию не удалось упростить к табличному виду. Однако, последний полученный интеграл ничем не отличается от исходного. Поэтому перенесем его в левую часть равенства.

$$5\int e^{2x}\cos xdx = e^{2x}(\sin x + 2\cos x)$$

$$\int e^{2x}\cos xdx = \frac{e^{2x}}{5}(\sin x + 2\cos x) + C.$$

Пример.

$\int (2x+1)^{20}dx = \{2x+1 = t; \quad dt = 2dx;\} = \int t^{20}\cdot\frac{1}{2}dt = \frac{1}{21}t^{21}\cdot\frac{1}{2} + C = \frac{t^{21}}{42} + C = \frac{(2x+1)^{21}}{42} + C$

Пример.

$\int \frac{\sqrt{2-x^2}+\sqrt{2+x^2}}{\sqrt{4-x^4}}dx = \int \frac{\sqrt{2-x^2}+\sqrt{2+x^2}}{\sqrt{2-x^2}\sqrt{2+x^2}}dx = \int \frac{dx}{\sqrt{2+x^2}} + \int \frac{dx}{\sqrt{2-x^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2+2}\right| +$

$+ \arcsin\frac{x}{\sqrt{2}} + C.$

Пример.

$\int \frac{\cos x}{\sqrt{\sin^3 x}}dx = \int \sin^{-3/2} x\cos xdx = \{\sin x = t; \quad dt = \cos xdx\} = \int t^{-3/2}dt = -2t^{-1/2} + C =$

$= -2\sin^{-1/2} x + C = -\frac{2}{\sqrt{\sin x}} + C.$

Пример.

$$\int x^2e^{5x}dx = \left\{\begin{matrix} u = x^2; & dv = e^{5x}dx; \\ du = 2xdx; & v = \dfrac{e^{5x}}{5}; \end{matrix}\right\} = \frac{1}{5}e^{5x}x^2 - \int \frac{1}{5}e^{5x}2xdx = \frac{x^2e^{5x}}{5} - \frac{2}{5}\int xe^{5x}dx =$$

$$= \left\{\begin{matrix} u = x; & dv = e^{5x}dx; \\ du = dx; & v = \dfrac{1}{5}e^{5x}; \end{matrix}\right\} = \frac{x^2e^{5x}}{5} - \frac{2}{5}\left[\frac{xe^{5x}}{5} - \int \frac{1}{5}e^{5x}dx\right] = \frac{x^2e^{5x}}{5} - \frac{2xe^{5x}}{25} + \frac{2}{25}\int e^{5x}dx =$$

$$= \frac{x^2e^{5x}}{5} - \frac{2xe^{5x}}{25} + \frac{2e^{5x}}{125} = \frac{e^{5x}}{5}\left(x^2 - \frac{2x}{5} + \frac{2}{25}\right).$$

Пример.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{-x^2-2x+8}} = \int \frac{dx}{\sqrt{-x^2-2x-1+9}} = \{dx = d(x+1)\} = \int \frac{d(x+1)}{\sqrt{9-(x+1)^2}} = \{x+1 = t\} =$$

$$= \int \frac{dt}{\sqrt{3^2-t^2}} = \arcsin\frac{t}{3} + C = \arcsin\frac{x+1}{3} + C.$$

Пример.

$$\int \frac{\ln x}{x^3}dx = \left\{\begin{matrix} u = \ln x; & dv = \dfrac{1}{x^3}dx; \\ du = \dfrac{1}{x}dx; & v = -\dfrac{1}{2x^2}; \end{matrix}\right\} = -\frac{\ln x}{2x^2} - \int -\frac{1}{2x^2}\cdot\frac{1}{x}dx = -\frac{\ln x}{2x^2} + \frac{1}{2}\int\frac{dx}{x^3} = -\frac{\ln x}{2x^2} +$$

$$+\frac{1}{2}\left[-\frac{1}{2}x^{-2}\right] + C = -\frac{\ln x}{2x^2} - \frac{1}{4x^2} + C.$$

Пример.

$$\int x\ln xdx = \left\{\begin{matrix} u = \ln x; & dv = xdx; \\ du = \dfrac{1}{x}dx; & v = \dfrac{x^2}{2}; \end{matrix}\right\} = \frac{x^2}{2}\ln x - \int\frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{x}dx = \frac{x^2\ln x}{2} - \frac{1}{2}\int xdx = \frac{x^2\ln x}{2} - \frac{x^2}{4} + C =$$

$$= \frac{x^2}{4}(2\ln x - 1) + C.$$

Пример.

$$\int e^{\cos^2 x}\sin 2xdx = \{t = e^{\cos^2 x}; \quad dt = -e^{\cos^2 x}\cdot 2\cos x\sin x = -\sin 2x\cdot e^{\cos^2 x}dx;\} = -\int dt = -t + C =$$

$$= -e^{\cos^2 x} + C.$$

Пример.

$$\int\frac{dx}{(x+1)\sqrt{x}} = \left\{\sqrt{x} = t; \quad \frac{dt}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2t}\right\} = \int\frac{2tdt}{(t^2+1)t} = 2\int\frac{dt}{t^2+1} = 2arctgt + C = 2arctg\sqrt{x} + C.$$

Пример.

$$\int\frac{dx}{x^2-6x+25}=\int\frac{dx}{(x-3)^2+16}=\frac{1}{16}\int\frac{dx}{\left(\frac{x-3}{4}\right)^2+1}=\frac{1}{16}arctg\left(\frac{x-3}{4}\right)+C.$$

Пример.

$$\int\frac{7x-2}{3x^2-5x+4}dx=\int\frac{84x-24}{36x^2-60x+48}dx=\int\frac{84x-24}{(6x-5)^2+23}dx=\left\{\begin{matrix}u=6x-5; & du=6dx;\\ x=\frac{u+5}{6}; & \end{matrix}\right\}=$$

$$=\frac{1}{6}\int\frac{14u+70-24}{u^2+23}du=\frac{7}{3}\int\frac{udu}{u^2+23}+\frac{23}{3}\int\frac{du}{u^2+23}=\frac{7}{6}\ln(u^2+23)+\frac{23}{3\sqrt{23}}arctg\frac{u}{\sqrt{23}}+C=$$

$$=\frac{7}{6}\ln\left|36x^2-60x+48\right|+\frac{\sqrt{23}}{3}arctg\frac{6x-5}{\sqrt{23}}+C.$$

Вообще говоря, если у трехчлена $ax^2 + bx + c$ выражение $b^2 – 4ac >0$, то дробь по определению не является элементарной, однако, тем не менее ее можно интегрировать указанным выше способом.

Пример.

$$\int\frac{5x-3}{x^2+6x-40}dx=\int\frac{5x-3}{(x+3)^2-49}dx=\left\{\begin{matrix}u=x+3; & du=dx;\\ x=u-3; & \end{matrix}\right\}=\int\frac{5u-15-3}{u^2-49}du=5\int\frac{udu}{u^2-49}-$$

$$-18\int\frac{du}{u^2-49}=\frac{5}{2}\ln\left|u^2-49\right|-\frac{18}{14}\ln\left|\frac{u-7}{u+7}\right|+C=\frac{5}{2}\ln\left|x^2+6x-40\right|-\frac{9}{7}\ln\left|\frac{x-4}{x+10}\right|+C.$$

Пример.

$$\int\frac{3x+4}{\sqrt{7-x^2+6x}}dx=\int\frac{3x+4}{\sqrt{16-(x-3)^2}}dx=\left\{\begin{matrix}u=x-3; & du=dx;\\ x=u+3; & \end{matrix}\right\}=\int\frac{3u+9+4}{\sqrt{16-u^2}}du=3\int\frac{udu}{\sqrt{16-u^2}}+$$

$$+13\int\frac{du}{\sqrt{16-u^2}}=-3\sqrt{16-u^2}+13\arcsin\frac{u}{4}+C=-3\sqrt{7-x^2-6x}+13\arcsin\frac{x-3}{4}+C.$$

Пример:

$$\int\frac{3x+5}{(x^2-4x+7)^2}dx=\int\frac{3x+5}{((x-2)^2+3)^2}dx=\left\{\begin{matrix}u=x-2; & du=dx;\\ x=u+2; & \end{matrix}\right\}=\int\frac{3u+6+5}{(u^2+3)^2}du=$$

$$=3\int\frac{udu}{(u^2+3)^2}+11\int\frac{du}{(u^2+3)^2}=\left\{\begin{matrix}t=u^2+3;\\ dt=2udu;\end{matrix}\right\}=\frac{3}{2}\int\frac{dt}{t^2}+11\left[\frac{u}{3\cdot 2(u^2+3)}+\frac{1}{3\cdot 2}\int\frac{du}{u^2+3}\right]=$$

$$=-\frac{3}{2t}+\frac{11u}{6(u^2+3)}+\frac{11}{6\sqrt{3}}arctg\frac{u}{\sqrt{3}}+C=-\frac{3}{2(x^2-4x+7)}+\frac{11(x-2)}{6(x^2-4x+7)}+\frac{11}{6\sqrt{3}}arctg\frac{x-2}{\sqrt{3}}+C.$$

Пример.

$$\int \frac{9x^3-30x^2+28x-88}{(x^2-6x+8)(x^2+4)}dx$$

Т.к. $(x^2-6x+8)(x^2+4)=(x-2)(x-4)(x^2+4)$, то

$$\frac{9x^3-30x^2+28x-88}{(x-2)(x-4)(x^2+4)}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x-4}+\frac{Cx+D}{x^2+4}$$

Приводя к общему знаменателю и приравнивая соответствующие числители, получаем:

$$A(x-4)(x^2+4)+B(x-2)(x^2+4)+(Cx+D)(x^2-6x+8)=9x^3-30x^2+28x-88$$

$$(A+B+C)x^3+(-4A-2B-6C+D)x^2+(4A+4B+8C-6D)x+(-16A-8B+8D)=$$
$$=9x^3-30x^2+28x-88.$$

$$\begin{cases}A+B+C=9\\-4A-2B-6C+D=-30\\4A+4B+8C-6D=28\\-16A-8B+8D=-88\end{cases}\qquad\begin{cases}C=9-A-B\\D=-30+4A+2B+54-6A-6B\\2A+2B+4C-3D=14\\2A+B-D=11\end{cases}$$

$$\begin{cases}C=9-A-B\\D=24-2A-4B\\2A+2B+36-4A-4B-72+6A+12B=14\\2A+B-24+2A+4B=11\end{cases}\qquad\begin{cases}C=9-A-B\\D=24-2A-4B\\4A+10B=50\\4A+5B=35\end{cases}$$

$$\begin{cases}C=9-A-B\\D=24-2A-4B\\4A+10B=50\\50-10B+5B=35\end{cases}\qquad\begin{cases}C=9-A-B\\D=24-2A-4B\\4A+10B=50\\B=3\end{cases}\qquad\begin{cases}A=5\\B=3\\C=1\\D=2\end{cases}$$

Итого:

$$\int\frac{5}{x-2}dx+\int\frac{3}{x-4}dx+\int\frac{x+2}{x^2+4}dx=5\ln|x-2|+3\ln|x-4|+\int\frac{x}{x^2+4}dx+\int\frac{2}{x^2+4}dx=$$
$$=5\ln|x-2|+3\ln|x-4|+\frac{1}{2}\ln(x^2+4)+arctg\frac{x}{2}+C.$$

Пример.

$$\int\frac{6x^5-8x^4-25x^3+20x^2-76x-7}{3x^3-4x^2-17x+6}dx$$

Т.к. дробь неправильная, то предварительно следует выделить у нее целую часть:

$$\begin{array}{r|l}
-\;6x^5-8x^4-25x^3+20x^2-76x-7 & 3x^3-4x^2-17x+6 \\ \cline{2-2}
\underline{6x^5-8x^4-34x^3+12x^2} \qquad\qquad & 2x^2+3 \\
-\;9x^3+8x^2-76x-7 & \\
\underline{9x^3-12x^2-51x+18} & \\
20x^2-25x-25 &
\end{array}$$

$$\int\left[2x^2+3+\frac{20x^2-25x-25}{3x^3-4x^2-17x+6}\right]dx=\int 2x^2dx+\int 3dx+5\int\frac{4x^2-5x-5}{3x^3-4x^2-17x+6}dx=\frac{2}{3}x^3+3x+$$

$$+5\int\frac{4x^2-5x-5}{3x^3-4x^2-17x+6}dx$$

Разложим знаменатель полученной дроби на множители. Видно, что при x = 3 знаменатель дроби превращается в ноль. Тогда:

$$\begin{array}{r|l}
3x^3-4x^2-17x+6 & x-3 \\ \cline{2-2}
\underline{3x^3-9x^2} & 3x^2+5x-2 \\
5x^2-17x & \\
\underline{5x^2-15x} & \\
-2x+6 & \\
\underline{-2x+6} & \\
0 &
\end{array}$$

Таким образом $3x^3-4x^2-17x+6=(x-3)(3x^2+5x-2)=(x-3)(x+2)(3x-1)$. Тогда:

$$\frac{4x^2-5x-5}{(x-3)(x+2)(3x-1)}=\frac{A}{x-3}+\frac{B}{x+2}+\frac{C}{3x-1}$$

$$A(x+2)(3x-1)+B(x-3)(3x-1)+C(x-3)(x+2)=4x^2-5x-5$$

Для того, чтобы избежать при нахождении неопределенных коэффициентов раскрытия скобок, группировки и решения системы уравнений (которая в некоторых случаях может оказаться достаточно большой) применяют так называемый **метод произвольных значений**. Суть метода состоит в том, что в полученное выше выражение подставляются поочередно несколько (по числу неопределенных коэффициентов) произвольных значений x. Для упрощения вычислений принято в качестве произвольных значений принимать точки, при которых знаменатель дроби равен нулю, т.е. в нашем случае – 3, -2, 1/3. Получаем:

$$\begin{cases}40A=16\\35B=21\\C=1\end{cases}\qquad\begin{cases}A=2/5\\B=3/5\\C=1\end{cases}$$

Окончательно получаем:

$$\int\frac{6x^5-8x^4-25x^3+20x^2-76x-7}{3x^3-4x^2-17x+6}dx=\frac{2}{3}x^3+3x+3\int\frac{dx}{x+2}+2\int\frac{dx}{x-3}+5\int\frac{dx}{3x-1}=$$

$$=\frac{2}{3}x^3+3x+3\ln|x+2|+2\ln|x-3|+\frac{5}{3}\ln|3x-1|+C.$$

Пример.

$$\int\frac{3x^4+14x^2+7x+15}{(x+3)(x^2+2)^2}dx=\int\frac{A}{x+3}dx+\int\frac{Bx+C}{(x^2+2)^2}dx+\int\frac{Dx+E}{x^2+2}dx$$

Найдем неопределенные коэффициенты:

$$A(x^2+2)^2+(Bx+C)(x+3)+(Dx+E)(x+3)(x^2+2)=3x^4+14x^2+7x+15$$

$$Ax^4+4Ax^2+4A+Bx^2+3Bx+Cx+3C+Dx^4+2Dx^2+3Dx^3+6Dx+Ex^3+2Ex+3Ex^2+6E=$$
$$=(D+A)x^4+(3D+E)x^3+(A+B+2D+3E+4A)x^2+(3B+C+6D+2E)x+(2A+3C+6E+4A)$$

$$\begin{cases} D+A=3 \\ 3D+E=0 \\ B+2D+3E+4A=14 \\ 3B+C+6D+2E=7 \\ 3C+6E+4A=15 \end{cases} \qquad \begin{cases} D=3-A \\ E=-9+3A \\ B+6-2A-27+9A+4A=14 \\ 3B+C+18-6A-18+6A=7 \\ 3C-54+18A+4A=15 \end{cases}$$

$$\begin{cases} D=3-A \\ E=-9+3A \\ B+11A=35 \\ 3B+C=7 \\ 3C+22A=69 \end{cases} \qquad \begin{cases} D=3-A \\ E=-9+3A \\ 11A=35-B \\ C=7-3B \\ 21-9B+70-2B=69 \end{cases} \qquad \begin{cases} A=3 \\ B=2 \\ C=1 \\ D=0 \\ E=0 \end{cases}$$

Тогда значение заданного интеграла:

$$3\int\frac{dx}{x+3}+\int\frac{2x+1}{(x^2+2)^2}dx=3\int\frac{dx}{x+3}+2\int\frac{x}{(x^2+2)^2}dx+\int\frac{dx}{(x^2+2)^2}=3\ln|x+3|-\frac{1}{x^2+2}+$$
$$+\frac{x}{4(x^2+2)}+\frac{1}{4\sqrt{2}}arctg\frac{x}{\sqrt{2}}+C.$$

Пример.

$$\int\frac{dx}{4\sin x+3\cos x+5}=\int\frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{4\frac{2t}{1+t^2}+3\frac{1-t^2}{1+t^2}+5}=2\int\frac{dt}{8t+3-3t^2+5+5t^2}=2\int\frac{dt}{2t^2+8t+8}=$$
$$=\int\frac{dt}{t^2+4t+4}=\int\frac{dt}{(t+2)^2}=-\frac{1}{t+2}+C=-\frac{1}{tg\frac{x}{2}+2}+C.$$

Несомненным достоинством этой подстановки является то, что с ее помощью всегда можно преобразовать тригонометрическую функцию в рациональную и вычислить соответствующий интеграл. К недостаткам можно отнести то, что при преобразовании может получиться достаточно сложная рациональная функция, интегрирование которой займет много времени и сил.

Однако при невозможности применить более рациональную замену переменной этот метод является единственно результативным.

Пример.

$$\int\frac{dx}{9+8\cos x+\sin x}=\int\frac{2dt}{(1+t^2)\left[9+\frac{8(1-t^2)}{1+t^2}+\frac{2t}{1+t^2}\right]}=2\int\frac{dt}{t^2+2t+17}=2\int\frac{dt}{(t+1)^2+16}=$$

$$=\frac{1}{2}arctg\frac{t+1}{4}+C=\frac{1}{2}arctg\frac{tg\frac{x}{2}+1}{4}+C.$$

$$\int\frac{\cos^7 xdx}{\sin^4 x}=\begin{cases}\sin x=t\\ dt=\cos xdx\\ \cos^2 x=1-\sin^2 x\end{cases}=\int\frac{(1-t^2)^3}{t^4}dt=\int\frac{1-3t^2+3t^4-t^6}{t^4}dt=\int\frac{dt}{t^4}-3\int\frac{dt}{t^2}+$$

$$+3\int dt-\int t^2dt=-\frac{1}{3t^3}+\frac{3}{t}+3t-\frac{1}{3}t^3=-\frac{1}{3\sin^3 x}+\frac{3}{\sin x}+3\sin x-\frac{\sin^3 x}{3}+C.$$

Пример.

$$\int\frac{\sin^3 x}{2+\cos x}dx=\begin{cases}\cos x=t\\ dt=-\sin xdx\end{cases}=-\int\frac{1-t^2}{2+t}dt=\int\frac{t^2+4t+4-4t-5}{t+2}dt=\int\left[\frac{(t+2)^2-4t-5}{t+2}\right]dt=$$

$$=\int\left[t+2-\frac{4t}{t+2}-\frac{5}{t+2}\right]dt=\int tdt+\int 2dt-4\int\frac{tdt}{t+2}-5\int\frac{dt}{t+2}=\frac{t^2}{2}+2t-5\ln|t+2|-4\int\frac{t}{t+2}dt=$$

$$=\begin{cases}\frac{t}{t+2}=\frac{A}{t+2}+B\\ A+Bt+2=t\\ B=1,\quad A=-2\\ \frac{t}{t+2}=\frac{-2}{t+2}+1\end{cases}=\frac{t^2}{2}+2t-5\ln|t+2|+8\int\frac{dt}{t+2}-4\int dt=\frac{t^2}{2}+2t-5\ln|t+2|+8\ln|t+2|-4t=$$

$$=\frac{t^2}{2}-2t+3\ln|t+2|+C=\frac{\cos^2 x}{2}-2\cos x+3\ln(\cos x+2)+C.$$

Пример.

$$\int\frac{dx}{\sin^2 x+6\sin x\cos x-16\cos^2 x}=\int\frac{\frac{1}{\cos^2 x}}{tg^2x+6tgx-16}dx=\begin{cases}tgx=t;\\ \frac{1}{\cos^2 x}dx=d(tgx)=dt\end{cases}=$$

$$=\int\frac{dt}{t^2+6t-16}=\int\frac{dt}{(t+3)^2-25}=\frac{1}{10}\ln\left|\frac{tgx+3-5}{tgx+3+5}\right|+C=\frac{1}{10}\ln\left|\frac{tgx-2}{tgx+8}\right|+C.$$

Пример.

$$\int\sin 7x\sin 2xdx=\frac{1}{2}\int\cos 5xdx-\frac{1}{2}\int\cos 9xdx=\frac{1}{10}\sin 5x-\frac{1}{18}\sin 9x+C.$$

Пример.

$$\int \sin 10x \cos 7x \cos 4x dx = \int \sin 10x[\cos 7x \cos 4x]dx = \frac{1}{2}\int \sin 10x \cos 11x dx + \frac{1}{2}\int \sin 10x \cos 3x dx =$$
$$= \frac{1}{4}\int \sin 21x dx - \frac{1}{4}\int \sin x dx + \frac{1}{4}\int \sin 13x dx + \frac{1}{4}\int \sin 7x dx = -\frac{1}{84}\cos 21x - \frac{1}{4}\cos x - \frac{1}{52}\cos 13x -$$
$$-\frac{1}{28}\cos 7x + C.$$

Иногда при интегрировании тригонометрических функций удобно использовать общеизвестные тригонометрические формулы для понижения порядка функций.

Пример.

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x} = \int \frac{4dx}{\sin^2 2x} = \left\{ \frac{dctg2x}{dx} = \frac{-2}{\sin^2 x} \right\} = -2ctg2x + C$$

Пример.

$$\int \sin^4 x dx = \int \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x \right)^2 dx = \frac{1}{4}\int (1-\cos 2x)^2 dx = \frac{1}{4}\int (1 - 2\cos 2x + \cos^2 2x)dx =$$
$$= \frac{1}{4}\int dx - \frac{1}{2}\int \cos 2x dx + \frac{1}{4}\int \cos^2 2x dx = \frac{x}{4} - \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{4}\int \frac{1}{2}(1+\cos 4x)dx = \frac{x}{4} - \frac{\sin 2x}{4} +$$
$$+ \frac{1}{8}\left[\int dx + \int \cos 4x dx\right] = \frac{x}{4} - \frac{\sin 2x}{4} + \frac{x}{8} + \frac{\sin 4x}{32} = \frac{1}{4}\left[\frac{3x}{2} - \sin 2x + \frac{\sin 4x}{8}\right] + C.$$

Иногда применяются некоторые нестандартные приемы.

Пример.

$$\int \cos(\ln x)dx = \left\{ \begin{matrix} u = \ln x; & du = \frac{1}{x}dx; \\ x = e^u; & dx = e^u du; \end{matrix} \right\} = \int e^u \cos u du = \left\{ \begin{matrix} p = \cos u; & dq = e^u du; \\ dp = -\sin u du; & q = e^u; \end{matrix} \right\} = e^u \cos u +$$
$$+ \int e^u \sin u du = \left\{ \begin{matrix} p = \sin u; & dq = e^u du; \\ dp = \cos u du; & q = e^u; \end{matrix} \right\} = e^u \cos u + e^u \sin u - \int e^u \cos u du;$$

Итого $\int e^u \cos u du = e^u(\cos u + \sin u) - \int e^u \cos u du$

$$\int e^u \cos u du = \frac{e^u}{2}(\cos u + \sin u) + C$$
$$\int x \cos(\ln x)\frac{1}{x}dx = \frac{x}{2}(\cos(\ln x) + \sin(\ln x)) + C$$
$$\int \cos(\ln x)dx = \frac{x}{\sqrt{2}}\cos\left(\frac{\pi}{4} - \ln x\right) + C;$$

Пример.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-2x}-\sqrt[4]{1-2x}} = \left\{ \sqrt[4]{1-2x} = t; \quad dt = \frac{-2dx}{4\left(\sqrt[4]{1-2x}\right)^3} = \frac{-dx}{2t^3}; \right\} = \int \frac{-2t^3 dt}{t^2 - t} = -2\int \frac{t^2 dt}{t-1} =$$

$$= -2\int \left(t + \frac{t}{t-1} \right) dt = -2\int tdt - 2\int \frac{t}{t-1} dt = -t^2 - 2\int \left(1 + \frac{1}{t-1} \right) dt = -t^2 - 2t - 2\ln|t-1| + C =$$

$$= -\sqrt{1-2x} - 2\sqrt[4]{1-2x} - 2\ln\left|\sqrt[4]{1-2x} - 1\right| + C.$$

Если в состав иррациональной функции входят корни различных степеней, то в качестве новой переменной рационально взять корень степени, равной наименьшему общему кратному степеней корней, входящих в выражение.

Проиллюстрируем это на примере.

Пример.

$$\int \frac{\sqrt[3]{x-1}+\sqrt[4]{x-1}}{(x-1)\left(1+\sqrt[6]{x-1}\right)} dx = \left\{ \begin{array}{l} \sqrt[12]{x-1} = t; \quad x-1 = t^{12}; \\ dx = 12t^{11}dt; \end{array} \right\} = \int \frac{(t^4+t^3)12t^{11}dt}{t^{12}(1+t^2)} = 12\int \frac{t^3+t^2}{t^2+1} dt =$$

$$= 12\left(\int \frac{t^3}{t^2+1} dt + \int \frac{t^2}{t^2+1} dt \right) = 12\left(\int \left(t - \frac{t}{t^2+1} \right) dt + \int \left(1 - \frac{1}{t^2+1} \right) dt \right) = 12\int tdt - 12\int \frac{tdt}{t^2+1} + 12\int dt -$$

$$-12\int \frac{dt}{1+t^2} = 6t^2 + 12t - 6\ln(t^2+1) - 12arctgt + C = 6\sqrt[6]{x-1} + 12\sqrt[12]{x-1} - 6\ln(\sqrt[6]{x-1}+1) -$$

$$-12arctg\sqrt[12]{x-1} + C.$$

Пример:

$$\int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \left\{ \begin{array}{l} x = a\sin t; \\ dx = a\cos tdt \end{array} \right\} = \int \sqrt{a^2 - a^2\sin^2 t}\, a\cos tdt = \int a^2\cos^2 tdt = \frac{a^2}{2}\int (1+\cos 2t)dt =$$

$$= \frac{a^2 t}{2} + \frac{a^2}{4}\sin 2t + C = \frac{a^2 t}{2} + \frac{a^2}{2}\sin t\cos t + C = \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + \frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + C.$$

Пример:

$$\int \frac{dx}{x^4\sqrt{a^2+x^2}} = \left\{ \begin{array}{l} x = atgt; dx = \dfrac{a}{\cos^2 t} dt; \\ \sqrt{a^2+x^2} = \dfrac{a}{\cos t}; \end{array} \right\} = \int \frac{a\cos tdt}{\cos^2 t a^4 tg^4 t a} = \int \frac{\cos^3 tdt}{a^4 \sin^4 t} = \frac{1}{a^4}\int \frac{(1-\sin^2 t)d\sin t}{\sin^4 t} =$$

$$= -\frac{1}{3a^4\sin^3 t} + \frac{1}{a^4\sin t} + C = \left\{ \sin t = \sqrt{1 - \frac{a^2}{a^2+x^2}} = \frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}} \right\} = -\frac{(a^2+x^2)^{3/2}}{3a^4x^3} + \frac{\sqrt{a^2+x^2}}{a^4 x} + C.$$

Пример:

$$\int\frac{dx}{x(x^2-4)^{5/2}}=\left\{\begin{aligned}&x=\frac{2}{\cos t};dx=\frac{2\sin t}{\cos^2 t}dt;\\&\sqrt{x^2-4}=2tgt;\end{aligned}\right\}=\int\frac{2\sin t\cos tdt}{\cos^2 t\cdot 2\cdot 2^5 tg^5 t}=\frac{1}{32}\int ctg^4 tdt=$$

$$=\frac{1}{32}\int ctg^2 t\left(\frac{1}{\sin^2 t}-1\right)dt=-\frac{1}{32}\int ctg^2 td(ctgt)-\frac{1}{32}\int ctg^2 tdt=-\frac{1}{96}ctg^3 t-\frac{1}{32}\int\left(\frac{1}{\sin^2 t}-1\right)dt=$$

$$=-\frac{1}{96}ctg^3 t+\frac{1}{32}ctgt+\frac{t}{32}+C=\left\{ctgt=\frac{2}{\sqrt{x^2-4}}\right\}=-\frac{1}{12(x^2-4)^{3/2}}+\frac{1}{16\sqrt{x^2-4}}+$$

$$+\frac{1}{32}\arccos\frac{2}{x}+C.$$

Пример.

$$\int\frac{3x^3-7x^2+1}{\sqrt{x^2-2x+5}}dx=(Ax^2+Bx+C)\sqrt{x^2-2x+5}+\lambda\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-2x+5}}.$$

Теперь продифференцируем полученное выражение, умножим на $\sqrt{ax^2+bx+c}$ и сгруппируем коэффициенты при одинаковых степенях х.

$$\frac{3x^3-7x^2+1}{\sqrt{x^2-2x+5}}=(2Ax+B)\sqrt{x^2-2x+5}+\frac{Ax^2+Bx+C}{\sqrt{x^2-2x+5}}(x-1)+\frac{\lambda}{\sqrt{x^2-2x+5}}$$

$$(2Ax+B)(x^2-2x+5)+(Ax^2+Bx+C)(x-1)+\lambda=3x^3-7x^2+1$$

$$2Ax^3-4Ax^2+10Ax+Bx^2-2Bx+5B+Ax^3+Bx^2+Cx-Ax^2-Bx-C+\lambda=3x^3-7x^2+1$$

$$3Ax^3-(5A-2B)x^2+(10A-3B+C)x+5B-C+\lambda=3x^3-7x^2+1$$

$$\begin{cases}A=1\\5A-2B=7\\10A-3B+C=0\\5B-C+\lambda=1\end{cases}\qquad\begin{cases}A=1\\B=-1\\C=-13\\\lambda=-7\end{cases}$$

Итого $\displaystyle\int\frac{3x^3-7x^2+1}{\sqrt{x^2-2x+5}}dx=(x^2-x-13)\sqrt{x^2-2x+5}-7\int\frac{dx}{\sqrt{(x-1)^2+4}}=$

$$=(x^2-x-13)\sqrt{x^2-2x+5}-7\ln(x-1+\sqrt{x^2-2x+5})+C.$$

Пример.

$$\int(4x^2-6x)\sqrt{x^2+3}dx=\int\frac{(4x^2-6x)(x^2+3)}{\sqrt{x^2+3}}dx=(Ax^3+Bx^2+Cx+D)\sqrt{x^2+3}+\lambda\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+3}}$$

$$\frac{4x^4-6x^3+12x^2-18x}{\sqrt{x^2+3}}=(3Ax^2+2Bx+C)\sqrt{x^2+3}+\frac{(Ax^3+Bx^2+Cx+D)x}{\sqrt{x^2+3}}+\frac{\lambda}{\sqrt{x^2+3}}$$

$$4x^4-6x^3+12x^2-18x=(3Ax^2+2Bx+C)(x^2+3)+Ax^4+Bx^3+Cx^2+Dx+\lambda$$

$$4x^4-6x^3+12x^2-18x=3Ax^4+2Bx^3+Cx^2+9Ax^2+6Bx+3C+Ax^4+Bx^3+Cx^2+Dx+\lambda$$

$$4x^4-6x^3+12x^2-18x=4Ax^4+3Bx^3+(2C+9A)x^2+(6B+D)x+3C+\lambda$$
$$A=1;\quad B=-2;\quad C=3/2;\quad D=-6;\quad \lambda=-9/2;$$
$$\int(4x^2-6x)\sqrt{x^2+3}dx=\left(x^3-2x^2+\frac{3}{2}x-6\right)\sqrt{x^2+3}-\frac{9}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2+3}\right|+C.$$

Пример.

$$\int\frac{dx}{x^3\sqrt{x^2-1}}=\left\{\begin{aligned}&x=\frac{1}{v};\\&dx=-\frac{dv}{v^2}\end{aligned}\right\}=-\int\frac{v^3dv}{v^2\sqrt{\frac{1}{v^2}-1}}=-\int\frac{v^2dv}{\sqrt{1-v^2}}=(Av+B)\sqrt{1-v^2}+\lambda\int\frac{dv}{\sqrt{1-v^2}}$$

$$-\frac{v^2}{\sqrt{1-v^2}}=A\sqrt{1-v^2}-\frac{(Av+B)v}{\sqrt{1-v^2}}+\frac{\lambda}{\sqrt{1-v^2}}$$
$$-v^2=A-Av^2-Av^2-Bv+\lambda$$
$$-v^2=-2Av^2-Bv+A+\lambda$$
$$A=1/2;\quad B=0;\quad \lambda=-1/2;$$
$$-\int\frac{v^2dv}{\sqrt{1-v^2}}=\frac{v\sqrt{1-v^2}}{2}-\frac{1}{2}\arcsin v=\frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{x^2-1}}{x^2}-\arcsin\frac{1}{x}\right)+C$$

Второй способ решения того же самого примера.

$$\int\frac{dx}{x^3\sqrt{x^2-1}}=\left\{\begin{aligned}&x=\frac{1}{\cos t};dx=\frac{tgt}{\cos t}dt;\\&\sqrt{x^2-1}=tgt;\end{aligned}\right\}=\int\frac{\frac{\sin t}{\cos^2 t}}{\frac{1}{\cos^3 t}\cdot tgt}dt=\int\frac{\sin t\cos^4 t}{\cos^2 t\sin t}dt=\int\cos^2 tdt=$$
$$=\int\frac{1}{2}(1+\cos 2t)dt=\frac{1}{2}t+\frac{1}{4}\sin 2t=\left\{\sin 2t=2\sin t\cos t=2\cdot\frac{1}{x}\cdot\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}\right\}=$$
$$=\frac{1}{2}\left(\arccos\frac{1}{x}+\frac{\sqrt{x^2-1}}{x^2}\right)+C.$$

С учетом того, что функции arcsin и arccos связаны соотношением $\arcsin\frac{1}{x}=\frac{\pi}{2}-\arccos\frac{1}{x}$, а постоянная интегрирования С – произвольное число, ответы, полученные различными методами, совпадают.

Как видно, при интегрировании иррациональных функций возможно применять различные рассмотренные выше приемы. Выбор метода интегрирования обуславливается в основном наибольшим удобством, очевидностью применения того или иного метода, а также сложностью вычислений и преобразований.

Пример.

$$\int \frac{dx}{(1-x^2)^{3/2}} = \left\{ \begin{aligned} & x = \sin t; \\ & dx = \cos t dt; \\ & \cos t = \sqrt{1-x^2} \end{aligned} \right\} = \int \frac{\cos t dt}{\cos^3 t} = \int \frac{dt}{\cos^2 t} = tgt + C = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} + C.$$

Вычисление определенного интеграла.

Пример.

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx = \left\{ \begin{aligned} & x = \sin t; \\ & \alpha = 0; \beta = \pi/2 \end{aligned} \right\} = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1-\sin^2 t}\cos t dt = \int_0^{\pi/2} \cos^2 t dt = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}(1+\cos 2t)dt =$$

$$= \frac{1}{2}\left(t + \frac{1}{2}\sin 2t \right)\Big|_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{4}\sin\pi = \frac{\pi}{4}.$$

При замене переменной в определенном интеграле следует помнить о том, что вводимая функция (в рассмотренном примере это функция sin) должна быть непрерывна на отрезке интегрирования. В противном случае формальное применение формулы приводит к абсурду.

Пример.

$\int_0^\pi dx = x\Big|_0^\pi = \pi$, с другой стороны, если применить тригонометрическую подстановку,

$$\int_0^\pi dx = \int_0^\pi \frac{dx}{\sin^2 x + \cos^2 x} = \int_0^\pi \frac{dx}{\cos^2 x(1+tg^2 x)} = \{tgx = t\} = \int_0^0 \frac{dt}{1+t^2} = 0$$

Т.е. два способа нахождения интеграла дают различные результаты. Это произошло из-за того, что не был учтен тот факт, что введенная переменная tgx имеет на отрезке интегрирования разрыв (в точке x = π/2). Поэтому в данном случае такая подстановка неприменима. При замене переменной в определенном интеграле следует внимательно следить за выполнением перечисленных выше условий.

Несобственные интегралы.

Пример.

$\int_0^\infty \cos x dx = \lim_{b\to\infty}\int_0^b \cos x dx = \lim_{b\to\infty}\sin x\Big|_0^b = \lim_{b\to\infty}(\sin b - \sin 0) = \lim_{b\to\infty}\sin b$ - не существует.

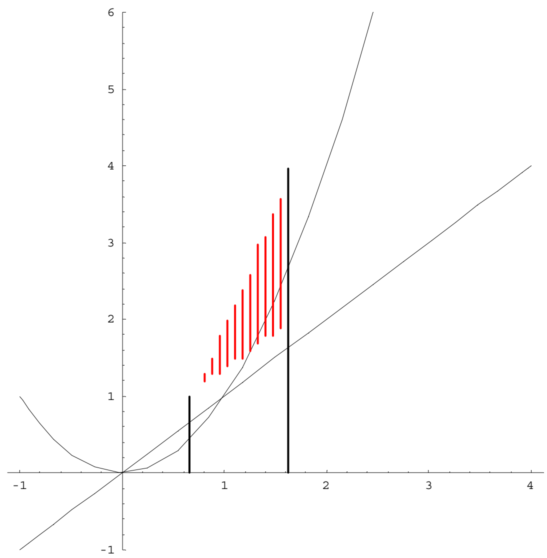
Несобственный интеграл расходится.

Пример.

$\int_{-\infty}^{-1} \frac{dx}{x^2} = \lim_{b\to-\infty}\int_b^{-1}\frac{dx}{x^2} = \lim_{b\to-\infty}\left[-\frac{1}{x}\right]\Big|_b^{-1} = \lim_{b\to-\infty}\left(1 + \frac{1}{b}\right) = 1$ - интеграл сходится

Геометрические приложения определенного интеграла.

Пример. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями y = x, $y = x^2$, x = 2.



Искомая площадь (заштрихована на рисунке) может быть найдена по формуле:

$$S = \int_1^2 x^2 dx - \int_1^2 x dx = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}\right]\Big|_1^2 = \frac{8}{3} - \frac{4}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{5}{6}(\text{ед}^2)$$

Пример: Найти длину окружности, заданной уравнением $x^2 + y^2 = r^2$.

1 способ. Выразим из уравнения переменную y. $y = \sqrt{r^2 - x^2}$

Найдем производную $y' = -\dfrac{x}{\sqrt{r^2 - x^2}}$

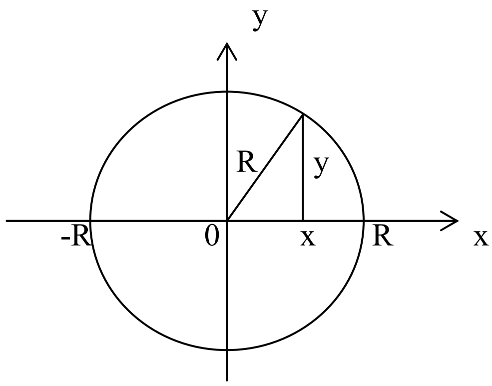
Тогда $\dfrac{1}{4}S = \displaystyle\int_0^r \sqrt{1 + \frac{x^2}{r^2 - x^2}}dx = \int_0^r \frac{r}{\sqrt{r^2 - x^2}}dx = r \cdot \arcsin\frac{x}{r}\Big|_0^r = r\frac{\pi}{2}$

Тогда S = 2πr. Получили общеизвестную формулу длины окружности.

2 способ. Если представить заданное уравнение в полярной системе координат, то получим: $r^2\cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi = r^2$, т.е. функция ρ = f(φ) = r, $\rho' = \dfrac{df(\varphi)}{d\varphi} = 0$ тогда

$$S = \int_0^{2\pi} \sqrt{0 + r^2}d\varphi = r\int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi r$$

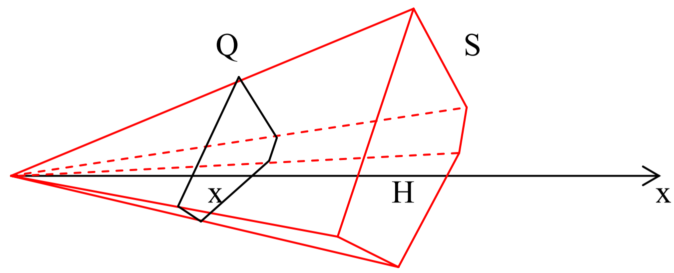
Пример: Найти объем шара радиуса R.



В поперечных сечениях шара получаются окружности переменного радиуса у. В зависимости от текущей координаты х этот радиус выражается по формуле $\sqrt{R^2 - x^2}$.
Тогда функция площадей сечений имеет вид: Q(x) = $\pi\left(R^2 - x^2\right)$.
Получаем объем шара:

$$V = \int_{-R}^{R} \pi(R^2 - x^2)dx = \pi(R^2 x - \frac{x^3}{3})\Big|_{-R}^{R} = \pi\left(R^3 - \frac{R^3}{3}\right) - \pi\left(-R^3 + \frac{R^3}{3}\right) = \frac{4\pi R^3}{3}.$$

<u>Пример:</u> Найти объем произвольной пирамиды с высотой Н и площадью основания S.



При пересечении пирамиды плоскостями, перпендикулярными высоте, в сечении получаем фигуры, подобные основанию. Коэффициент подобия этих фигур равен отношению x/H, где х – расстояние от плоскости сечения до вершины пирамиды.

Из геометрии известно, что отношение площадей подобных фигур равно коэффициенту подобия в квадрате, т.е.

$$\frac{Q}{S} = \left(\frac{x}{H}\right)^2$$

Отсюда получаем функцию площадей сечений: $Q(x) = \frac{S}{H^2}x^2$.

Находим объем пирамиды: $V = \int_0^H \frac{S}{H^2}x^2 dx = \frac{Sx^3}{3H^2}\Big|_0^H = \frac{1}{3}SH$

<u>Функции нескольких переменных</u>

<u>Пример</u>. Найти полный дифференциал функции $u = x^{y^2 z}$.

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy + \frac{\partial u}{\partial z}dz$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = y^2 z x^{y^2 z - 1}; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = x^{y^2 z}\ln x \cdot 2yz; \quad \frac{\partial u}{\partial z} = x^{y^2 z}\ln x \cdot y^2;$$

$$du = y^2 z x^{y^2 z - 1}dx + 2x^{y^2 z} yz\ln x dy + y^2 x^{y^2 z}\ln x dz$$

<u>Пример.</u> Найти полный дифференциал функции $z = \frac{y}{x^2 - y^2}$.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{-2yx}{(x^2 - y^2)^2}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{y'(x^2 - y^2) - y(-2y)}{(x^2 - y^2)^2} = \frac{x^2 - y^2 + 2y^2}{(x^2 - y^2)^2} = \frac{x^2 + y^2}{(x^2 - y^2)^2}$$

$$dz = -\frac{2xy}{(x^2 - y^2)}dx + \frac{x^2 + y^2}{(x^2 - y^2)^2}dy$$

Пример. Найти уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности

$$z = x^2 - 2xy + y^2 - x + 2y$$

в точке M(1, 1, 1).

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x - 2y - 1; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -2x + 2y + 2$$

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_M = -1; \quad \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_M = 2;$$

Уравнение касательной плоскости:

$$z - 1 = -(x - 1) + 2(y - 1); \qquad x - 2y + z = 0;$$

Уравнение нормали:

$$\frac{x-1}{-1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-1}{-1};$$

Пример. Найти уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности

$$z = x^2 - 2xy + y^2 - x + 2y$$

в точке M(1, 1, 1).

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x - 2y - 1; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -2x + 2y + 2$$

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_M = -1; \quad \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_M = 2;$$

Уравнение касательной плоскости:

$$z - 1 = -(x - 1) + 2(y - 1); \qquad x - 2y + z = 0;$$

Уравнение нормали:

$$\frac{x-1}{-1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-1}{-1};$$

Пример. Вычислить приближенно значение $\sqrt{1{,}04^{1{,}99} + \ln 1{,}02}$, исходя из значения функции $u = \sqrt{x^y + \ln z}$ при x = 1, y = 2, z = 1.

Из заданного выражения определим Δx = 1,04 – 1 = 0,04, Δy = 1,99 – 2 = -0,01, Δz = 1,02 – 1 = 0,02.

Найдем значение функции u(x, y, z) = $\sqrt{1^2 + \ln 1} = 1$

Находим частные производные:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{y \cdot x^{y-1}}{2\sqrt{x^y + \ln z}} = \frac{2 \cdot 1}{2\sqrt{1}} = 1$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{x^y \ln x}{2\sqrt{x^y + \ln z}} = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\frac{1}{z}}{2\sqrt{x^y + \ln z}} = \frac{1}{2}$$

Полный дифференциал функции u равен:

$$du = 0{,}04 \cdot \frac{\partial u}{\partial x} - 0{,}01 \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + 0{,}02 \cdot \frac{\partial u}{\partial z} = 1 \cdot 0{,}04 - 0 \cdot 0{,}01 + \frac{1}{2} \cdot 0{,}02 = 0{,}04 + 0{,}01 = 0{,}05$$

$$\sqrt{1{,}04^{1{,}99} + \ln 1{,}02} \approx u(1{,}2{,}1) + du = 1 + 0{,}05 = 1{,}05$$

Точное значение этого выражения: 1,049275225687319176.

Пример. Найти экстремум функции f(x, y) = xy, если уравнение связи:

$$2x + 3y - 5 = 0$$

$$u = xy + \lambda(2x + 3y - 5)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = y + 2\lambda; \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = x + 3\lambda;$$

$$\begin{cases} y + 2\lambda = 0 \\ x + 3\lambda = 0 \\ 2x + 3y - 5 = 0 \end{cases}$$

$$\lambda = -\frac{5}{12}; \qquad x = \frac{5}{4}; \qquad y = \frac{5}{6};$$

Таким образом, функция имеет экстремум в точке $\left(\frac{5}{4}; \frac{5}{6}\right)$.

Пример. Вычислить производную функции $z = x^2 + y^2x$ в точке A(1, 2) по направлению вектора $\overrightarrow{AB}$. B (3, 0).

Решение. Прежде всего необходимо определить координаты вектора $\overrightarrow{AB}$.

$$\overrightarrow{AB} = (3\text{-}1;\ 0\text{-}2) = (2;\ \text{-}2) = 2\vec{i} - 2\vec{j}\ .$$

Далее определяем модуль этого вектора:

$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

Находим частные производные функции z в общем виде:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x + y^2; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 2yx;$$

Значения этих величин в точке А : $\frac{\partial z}{\partial x} = 6; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 4;$

Для нахождения направляющих косинусов вектора $\overrightarrow{AB}$ производим следующие преобразования:

$$\vec{S} = \frac{\overrightarrow{AB}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|} = \vec{i}\cos\alpha + \vec{j}\cos\beta = \frac{2}{2\sqrt{2}}\vec{i} - \frac{2}{2\sqrt{2}}\vec{j}$$

За величину $\vec{S}$ принимается произвольный вектор, направленный вдоль заданного вектора, т.е. определяющего направление дифференцирования.
Отсюда получаем значения направляющих косинусов вектора $\overrightarrow{AB}$:

$$\cos\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}; \qquad \cos\beta = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Окончательно получаем: $\frac{\partial z}{\partial s} = 6\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} - 4\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$ - значение производной заданной функции по направлению вектора $\overrightarrow{AB}$.

<u>Обыкновенные дифференциальные уравнения.</u>

<u>Пример.</u> Найти общее решение дифференциального уравнения $xy' + y = 0$.

Общее решение дифференциального уравнения ищется с помощью интегрирования левой и правой частей уравнения, которое предварительно преобразовано следующим образом:

$$x\frac{dy}{dx} + y = 0$$

$$xdy = -ydx$$

$$\frac{dy}{y} = -\frac{dx}{x}$$

Теперь интегрируем: $$\int\frac{dy}{y} = -\int\frac{dx}{x}$$

$$\ln y = -\ln x + C_0$$

$$\ln y + \ln x = C_0$$

$$\ln xy = C_0$$

$$xy = e^{C_0} = C$$

$y = \frac{C}{x}$ - это общее решение исходного дифференциального уравнения.

Допустим, заданы некоторые начальные условия: $x_0 = 1$; $y_0 = 2$, тогда имеем

$$2 = \frac{C}{1}; \quad C = 2;$$

При подстановке полученного значения постоянной в общее решение получаем частное решение при заданных начальных условиях (решение задачи Коши).

$$y = \frac{2}{x}$$

<u>Пример.</u> Найти общее решение дифференциального уравнения: $y' + y = 0$. Найти особое решение, если оно существует.

$$\frac{dy}{dx} = -y$$
$$\frac{dy}{y} = -dx$$
$$\int \frac{dy}{y} = -\int dx$$
$$\ln y = -x + C$$
$$y = e^{-x} \cdot e^{C}$$
$$y = C_1 \cdot e^{-x}$$

Данное дифференциальное уравнение имеет также особое решение $y = 0$. Это решение невозможно получить из общего, однако при подстановке в исходное уравнение получаем тождество. Мнение, что решение $y = 0$ можно получить из общего решения при $C_1 = 0$ ошибочно, ведь $C_1 = e^C \neq 0$.

<u>Пример.</u> Найти общее решение дифференциального уравнения: $yy' = \frac{-2x}{\cos y}$

$$y\cos y \cdot \frac{dy}{dx} = -2x$$
$$y\cos y dy = -2xdx$$
$$\int y\cos y dy = -2\int xdx$$

Интеграл, стоящий в левой части, берется по частям:

$$\int y\cos y dy = \left\{\begin{matrix} u = y; & dv = \cos y dy; \\ du = dy; & v = \sin y \end{matrix}\right\} = y\sin y - \int \sin y dy = y\sin y + \cos y$$

$$y\sin y + \cos y = -x^2 + C$$
$$y\sin y + \cos y + x^2 + C = 0$$

- это есть общий интеграл исходного дифференциального уравнения, т.к. искомая функция и не выражена через независимую переменную. В этом и заключается **отличие** общего (частного) **интеграла** от общего (частного) **решения.**

Чтобы проверить правильность полученного ответа продифференцируем его по переменной х.

$$y'\sin y + yy'\cos y - y'\sin y + 2x = 0$$
$$yy' = -\frac{2x}{\cos y} \text{ - верно}$$

<u>Пример.</u> Найти решение дифференциального уравнения $\frac{y}{y'} = \ln y$ при условии у(2) = 1.

$$\frac{ydx}{dy} = \ln y$$

$$dx = \frac{\ln ydy}{y}$$

$$\int dx = \int \frac{\ln ydy}{y}$$

$$x + C = \int \ln yd(\ln y)$$

$$x + C = \frac{\ln^2 y}{2}$$

при y(2) = 1 получаем $2 + C = \frac{\ln^2 1}{2}; \quad \Rightarrow \quad 2 + C = 0; \quad \Rightarrow \quad C = -2;$

Итого: $2(x-2) = \ln^2 y;$ или $y = e^{\pm\sqrt{2x-4}}$ - частное решение;

<u>Проверка:</u> $y' = e^{\pm\sqrt{2x-4}} \cdot \frac{2}{\pm 2\sqrt{2x-4}}$, итого

$$\frac{y}{y'} = \frac{e^{\pm\sqrt{2x-4}}(\pm\sqrt{2x-4})}{e^{\pm\sqrt{2x-4}}} = \pm\sqrt{2x-4} = \ln y \text{ - верно.}$$

<u>Пример.</u> Решить уравнение $y' = y^{2/3}$.

$$\frac{dy}{dx} = y^{2/3}$$

$$y^{-2/3}dy = dx$$

$$\int y^{-2/3}dy = \int dx$$

$$3y^{1/3} = x + C$$

$$27y = (x + C)^3 \text{ - общий интеграл}$$

$$y = \frac{1}{27}(x + C)^3 \text{ - общее решение}$$

<u>Пример.</u> Решить уравнение $y' = x(y^2 + 1)$.

$$\frac{dy}{y^2 + 1} = dx; \qquad \int \frac{dy}{y^2 + 1} = \int dx;$$

$$arctgy = \frac{x^2}{2} + C; \qquad y = tg\left(\frac{x^2}{2} + C\right);$$

<u>Пример.</u> Решить уравнение $\frac{yy'}{x} + e^y = 0$ при условии y(1) = 0.

$$\frac{ydy}{dx} + xe^y = 0$$

$$ydy + xe^y dx = 0; \qquad \frac{y}{e^y}dy = -xdx;$$

$$\int \frac{y}{e^y}dy = -\int xdx;$$

Интеграл, стоящий в левой части будем брать по частям.

$$\int ye^{-y}dy = \left\{ \begin{matrix} u = y; & e^{-y}dy = dv; \\ du = dy; & v = -e^y; \end{matrix} \right\} = -e^y y - \int -e^y dy = -e^{-y}y - e^{-y} = -e^{-y}(y+1);$$

$$e^{-y}(y+1) = \frac{x^2}{2} + C_0;$$

$$2e^{-y}(y+1) = x^2 + C$$

Если y(1) = 0, то $2e^0(0+1) = 1 + C; \quad \Rightarrow \quad 2 = 1 + C; \quad \Rightarrow \quad C = 1;$

Итого, частный интеграл: $2e^{-y}(y+1) = x^2 + 1$.

Пример. Решить уравнение $y' + \sin(x+y) = \sin(x-y)$.

$$y' + \sin(x+y) - \sin(x-y) = 0$$

$$y' - 2\sin\frac{x-y-x-y}{2}\cos\frac{x-y+x+y}{2} = 0$$

$$y' - 2\sin(-y)\cos x = 0$$

$$y' + 2\sin y \cos x = 0$$

$$\frac{dy}{\sin y} = -2\cos xdx; \qquad \int \frac{dy}{\sin y} = -2\int \cos xdx;$$

Для нахождения интеграла, стоящего в левой части уравнения. Получаем общий интеграл:

$$\ln\left|tg\frac{y}{2}\right| = -2\sin x + C$$

Пример. Решить уравнение $2xe^{-x^2} + \frac{y'}{y} = 0$

Преобразуем заданное уравнение:

$$2xe^{-x^2} + \frac{dy}{ydx} = 0$$

$$2xe^{-x^2}dx + \frac{dy}{y} = 0$$

$$\int 2xe^{-x^2}dx + \int \frac{dy}{y} = C$$

$$-e^{-x^2} + \ln|y| = C$$

Получили общий интеграл данного дифференциального уравнения. Если из этого соотношения выразить искомую функцию y, то получим общее решение.

Пример. Решить уравнение $y' = x(y^2+1)$.

$$\frac{dy}{dx} = x(y^2+1)$$

$$\frac{dy}{y^2+1} = xdx$$

$$\int \frac{dy}{y^2+1} = \int xdx; \qquad arctgy = \frac{x^2}{2} + C;$$

$$y = tg\left(\frac{x^2}{2} + C\right)$$

Допустим, заданы некоторые начальные условия x_0 и y_0. Тогда:

$$arctgy_0 = \frac{x_0^2}{2} + C_0; \quad \Rightarrow \quad C_0 = arctgy_0 - \frac{x_0^2}{2};$$

Получаем частное решение $y = tg\left(\frac{x^2}{2} + arctgy_0 - \frac{x_0^2}{2}\right)$.

Пример. Решить уравнение $y' = \frac{y}{x}\left(\ln\frac{y}{x} + 1\right)$.

Введем вспомогательную функцию *u*.

$$u = \frac{y}{x}; \quad y = ux; \quad y' = u'x + u.$$

Отметим, что введенная нами функция *u* всегда положительна, т.к. в противном случае теряет смысл исходное дифференциальное уравнение, содержащее $\ln u = \ln\frac{y}{x}$.

Подставляем в исходное уравнение:

$$u'x + u = u(\ln u + 1); \quad u'x + u = u\ln u + u; \quad u'x = u\ln u;$$

Разделяем переменные: $\frac{du}{u\ln u} = \frac{dx}{x}; \quad \int \frac{du}{u\ln u} = \int \frac{dx}{x};$

Интегрируя, получаем: $\ln|\ln u| = \ln|x| + C; \quad \ln u = Cx; \quad u = e^{Cx};$

Переходя от вспомогательной функции обратно к функции y, получаем общее решение:

$$y = xe^{Cx}.$$

Пример. Решить уравнение $(x-2y+3)dy + (2x+y-1)dx = 0.$

Получаем $(x-2y+3)\frac{dy}{dx} = -2x - y + 1; \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{-2x-y+1}{x-2y+3};$

Находим значение определителя $\begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 4+1 = 5 \neq 0$.

Решаем систему уравнений $\begin{cases} -2x - y + 1 = 0 \\ x - 2y + 3 = 0 \end{cases}$; $\begin{cases} y = 1 - 2x \\ x - 2 + 4x + 3 = 0 \end{cases}$; $\begin{cases} x = -1/5 \\ y = 7/5 \end{cases}$;

Применяем подстановку $x = u - 1/5; \quad y = v + 7/5;$ в исходное уравнение:

$$(u - 1/5 - 2v - 14/5 + 3)dv + (2u - 2/5 + v + 7/5 - 1)du = 0;$$
$$(u - 2v)dv + (2u + v)du = 0;$$
$$\frac{dv}{du} = \frac{2u + v}{2v - u} = \frac{2 + v/u}{2v/u - 1};$$

Заменяем переменную $\frac{v}{u} = t; \quad v = ut; \quad v' = t'u + t;$ при подстановке в выражение, записанное выше, имеем:

$$t'u + t = \frac{2+t}{2t-1}$$

Разделяем переменные: $\frac{dt}{du}u = \frac{2+t}{2t-1} - t = \frac{2 + t - 2t^2 + t}{2t-1} = \frac{2(1 + t - t^2)}{2t-1};$

$$\frac{du}{u} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1-2t}{1+t-t^2}dt; \qquad \int \frac{du}{u} = -\frac{1}{2}\int \frac{(1-2t)dt}{1+t-t^2};$$

$$-\frac{1}{2}\ln\left|1 + t - t^2\right| = \ln|u| + \ln C_1$$
$$\ln\left|1 + t - t^2\right| = -2\ln|C_1 u|$$
$$\ln\left|1 + t - t^2\right| = \ln\left|\frac{C_2}{u^2}\right|; \quad 1 + t - t^2 = \frac{C_2}{u^2};$$

Переходим теперь к первоначальной функции y и переменной x.

$$t = \frac{v}{u} = \frac{y - 7/5}{x + 1/5} = \frac{5y - 7}{5x + 1}; \quad u = x + 1/5;$$

$$1 + \frac{5y-7}{5x+1} - \left(\frac{5y-7}{5x+1}\right)^2 = \frac{25C_2}{(5x+1)^2};$$
$$(5x+1)^2 + (5y-7)(5x+1) - (5y-7)^2 = 25C_2$$
$$25x^2 + 10x + 1 + 25xy + 5y - 35x - 7 - 25y^2 + 70y - 49 = 25C_2$$
$$25x^2 - 25x + 25xy + 75y - 25y^2 = 25C_2 + 49 - 1 + 7$$
$$x^2 - x + xy + 3y - y^2 = C_2 + \frac{55}{25} = C;$$

Итого, выражение $x^2 - x + xy + 3y - y^2 = C$ является общим интегралом исходного дифференциального уравнения.

В случае если в исходном уравнении вида $y' = f\left(\dfrac{ax+by+c}{a_1x+b_1y+c_1}\right)$ определитель $\begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} = 0,$ то переменные могут быть разделены подстановкой

$$ax + by = t.$$

Пример. Решить уравнение $2(x+y)dy + (3x+3y-1)dx = 0.$

Получаем $2(x+y)\dfrac{dy}{dx} = -3x-3y+1;\qquad \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{-3x-3y+1}{2x+2y} = -\dfrac{3x+3y-1}{2x+2y};$

Находим значение определителя $\begin{vmatrix} -3 & -3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = -6+6 = 0;$

Применяем подстановку $3x+3y = t.$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{t'}{3} - 1;$$

Подставляем это выражение в исходное уравнение:

$$\frac{t'}{3} - 1 = -\frac{3(t-1)}{2t};\quad 2t(t'-3) = -9t+9;\quad 2tt' = 6t-9t+9;\quad 2tt' = -3t+9;$$

Разделяем переменные: $\dfrac{2t}{-3t+9}dt = dx;\qquad \dfrac{t}{t-3}dt = -\dfrac{3}{2}dx;$

$$\int\left(1+\frac{3}{t-3}\right)dt = -\frac{3}{2}\int dx;$$

$$t + 3\ln|t-3| = -\frac{3}{2}x + C_1$$

Далее возвращаемся к первоначальной функции y и переменной x.

$$2x + 2y + 2\ln|3(x+y-1)| = -x + C_2;$$

$$3x + 2y + 2\ln 3 + 2\ln|x+y-1| = C_2;$$

$$3x + 2y + 2\ln|x+y-1| = C;$$

таким образом, мы получили общий интеграл исходного дифференциального уравнения.

Пример. Решить уравнение $x^2y' + y = ax^2e^{\frac{1}{x}}.$

Сначала приведем данное уравнение к стандартному виду: $y' + \dfrac{1}{x^2}y = ae^{\frac{1}{x}}.$

Применим полученную выше формулу: $P = \dfrac{1}{x^2};\quad Q = ae^{\frac{1}{x}};$

$$y = e^{-\int\frac{1}{x^2}dx}\left(\int ae^{\frac{1}{x}}e^{\int\frac{1}{x^2}dx}dx + C\right)$$

$$y = e^{\frac{1}{x}}\left(\int ae^{\frac{1}{x}}e^{-\frac{1}{x}}dx + C\right) = e^{\frac{1}{x}}\left(\int adx + C\right)$$

$$y = e^{\frac{1}{x}}(ax + C).$$

<u>Пример.</u> Решить уравнение $xy' + y = xy^2 \ln x.$

Разделим уравнение на xy^2: $\dfrac{y'}{y^2} + \dfrac{1}{x} \cdot \dfrac{1}{y} = \ln x.$

Полагаем $z = \dfrac{1}{y}; \quad z' = -\dfrac{y'}{y^2}.$

$$-z' + \frac{1}{x} z = \ln x; \qquad z' - \frac{1}{x} z = -\ln x .$$

Полагаем $P = -\dfrac{1}{x}, \quad Q = -\ln x.$

$$z = e^{\int \frac{dx}{x}} \left(\int -\ln x e^{-\int \frac{dx}{x}} dx + C \right); \qquad z = e^{\ln x} \left(\int -\ln x e^{-\ln x} dx + C \right);$$

$$z = x\left(\int -\ln x \cdot \frac{dx}{x} + C \right); \qquad z = x\left(-\int \ln x d(\ln x) + C \right);$$

$$z = x\left(-\frac{\ln^2 x}{2} + C \right)$$

Произведя обратную подстановку, получаем:

$$\frac{1}{y} = x\left(-\frac{\ln^2 x}{2} + C \right).$$

<u>Пример.</u> Решить уравнение $xy' - 4y = x^2\sqrt{y}.$

Разделим обе части уравнения на $x\sqrt{y}.$

$$\frac{1}{\sqrt{y}} \frac{dy}{dx} - \frac{4}{x}\sqrt{y} = x.$$

Полагаем $z = \sqrt{y}; \quad z' = \dfrac{1}{2\sqrt{y}} y'; \quad y' = 2\sqrt{y} z';$

$$\frac{1}{\sqrt{y}} 2\sqrt{y} z' - \frac{4}{x} z = x; \quad \frac{dz}{dx} - \frac{2z}{x} = \frac{x}{2};$$

Получили линейное неоднородное дифференциальное уравнение. Рассмотрим соответствующее ему линейное однородное уравнение:

$$\frac{dz}{dx} - \frac{2z}{x} = 0; \quad \frac{dz}{dx} = \frac{2z}{x}; \quad \frac{dz}{z} = \frac{2dx}{x};$$

$$\int \frac{dz}{z} = 2\int \frac{dx}{x} + C_1; \quad \ln z = 2\ln x + \ln C; \quad z = Cx^2;$$

Полагаем C = C(x) и подставляем полученный результат в линейное неоднородное уравнение, с учетом того, что:

$$\frac{dz}{dx} = 2xC(x) + x^2\frac{dC(x)}{dx};$$

$$2xC(x) + x^2\frac{dC(x)}{dx} - \frac{2x^2C(x)}{x} = \frac{x}{2};$$

$$\frac{dC(x)}{dx} = \frac{1}{2x}; \qquad C(x) = \frac{1}{2}\ln x + C_2;$$

Получаем: $z = x^2\left(C_2 + \frac{1}{2}\ln x\right);$

Применяя обратную подстановку, получаем окончательный ответ:

$$y = x^4\left(C_2 + \frac{1}{2}\ln x\right)^2;$$

Пример. Решить уравнение $(3x^2 + 10xy)dx + (5x^2 - 1)dy = 0$

Проверим условие тотальности: $\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial(3x^2+10xy)}{\partial y} = 10x;$

$$\frac{\partial N(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial(5x^2-1)}{\partial x} = 10x.$$

Условие тотальности выполняется, следовательно, исходное дифференциальное уравнение является уравнением в полных дифференциалах.

Определим функцию u.

$$u = \int M(x,y)dx + C(y) = \int(3x^2 + 10xy)dx + C(y) = x^3 + 5x^2y + C(y);$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 5x^2 + C'(y) = N(x,y) = 5x^2 - 1;$$

$$C'(y) = -1; \quad C(y) = \int(-1)dy = -y + C_1;$$

Итого, $u = x^3 + 5x^2y - y + C_1$.

Находим общий интеграл исходного дифференциального уравнения:

$$u = x^3 + 5x^2y - y + C_1 = C_2;.$$

$$x^3 + 5x^2y - y = C.$$

Пример. Решить уравнение с заданными начальными условиями.

$$y' - \frac{y}{x} = x + 1; \quad y(1) = 0.$$

Это линейное неоднородное дифференциальное уравнение первого порядка.

Решим соответствующее ему однородное уравнение.

$$y' - \frac{y}{x} = 0; \qquad y' = \frac{y}{x}; \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}; \qquad \frac{dy}{y} = \frac{dx}{x};$$

$$\int\frac{dy}{y} = \int\frac{dx}{x}; \qquad \ln y = \ln x + \ln C;$$

$$y = Cx;$$

Для неоднородного уравнения общее решение имеет вид:

$$y = C(x)x;$$

Дифференцируя, получаем: $y' = C'(x)x + C(x);$

Для нахождения функции C(x) подставляем полученное значение в исходное дифференциальное уравнение:

$$C'(x)x + C(x) - C(x) = x + 1$$
$$xC'(x) = x + 1$$
$$C'(x) = 1 + \frac{1}{x}; \qquad C(x) = \int \left(1 + \frac{1}{x}\right)dx + C;$$
$$C(x) = x + \ln x + C;$$

Итого, общее решение: $y = x(x + \ln x + C)$.

С учетом начального условия $y(1) = 0$ определяем постоянный коэффициент C.

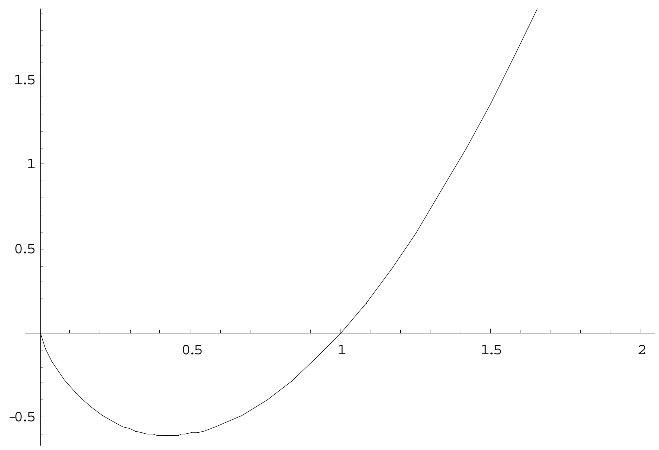
$$0 = 1 + \ln 1 + C; \qquad C = -1.$$

Окончательно получаем: $y = x^2 + x\ln x - x$.

Для проверки подставим полученный результат в исходное дифференциальное уравнение:

$2x + \ln x + x \cdot \frac{1}{x} - 1 - x - \ln x + 1 = x + 1;$ верно

Ниже показан график интегральной кривой уравнения.



Пример. Найти общий интеграл уравнения $x(y^2 - 1)dx + y(x^2 - 1)dy = 0$.

Это уравнение с разделяющимися переменными.

$$\frac{xdx}{x^2 - 1} + \frac{ydy}{y^2 - 1} = 0; \qquad \int \frac{xdx}{x^2 - 1} = -\int \frac{ydy}{y^2 - 1};$$
$$\ln\left|x^2 - 1\right| + \ln\left|y^2 - 1\right| = \ln C;$$

Общий интеграл имеет вид: $(x^2 - 1)(y^2 - 1) = C.$

Пример. Найти решение дифференциального уравнения, удовлетворяющее заданным начальным условиям.

$$y' \cos x = (y + 1)\sin x; \qquad y(0) = 0.$$

Это уравнение с разделяющимися переменными.

$$\frac{y'}{y+1} = \frac{\sin x}{\cos x}; \quad \frac{dy}{y+1} = tgxdx;$$

$$\int \frac{dy}{y+1} = \int tgxdx; \qquad \ln|y+1| = -\ln|\cos x| + \ln C;$$

$$\ln|(y+1)\cos x| = \ln C; \qquad (y+1)\cos x = C;$$

Общее решение имеет вид: $y = \dfrac{C}{\cos x} - 1$.

Найдем частное решение при заданном начальном условии *y(0) = 0.*

$$0 = \frac{C}{1} - 1; \qquad C = 1.$$

Окончательно получаем: $y = \dfrac{1}{\cos x} - 1$.

Пример. Решить предыдущий пример другим способом.

Действительно, уравнение $y'\cos x = (y+1)\sin x$ может быть рассмотрено как линейное неоднородное дифференциальное уравнение.

$$y'\cos x - y\sin x = \sin x.$$

Решим соответствующее ему линейное однородное уравнение.

$$y'\cos x - y\sin x = 0; \qquad y'\cos x = y\sin x; \qquad \frac{dy}{y} = tgxdx;$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int tgxdx + \ln C; \qquad \ln|y| = -\ln|\cos x| + \ln C; \qquad y\cos x = C;$$

$$y = \frac{C}{\cos x}.$$

Решение неоднородного уравнения будет иметь вид: $y = \dfrac{C(x)}{\cos x}$.

Тогда $y' = \dfrac{C'(x)\cos x + C(x)\sin x}{\cos^2 x}$.

Подставляя в исходное уравнение, получаем:

$$\frac{[C'(x)\cos x + C(x)\sin x]\cdot\cos x}{\cos^2 x} - \frac{C(x)\sin x}{\cos x} = \sin x;$$

$$\frac{C'(x)\cos x}{\cos x} = \sin x; \qquad C'x) = \sin x; \qquad C(x) = \int \sin xdx = -\cos x + C;$$

Итого $y = \dfrac{-\cos x + C}{\cos x}$; $\qquad y = \dfrac{C}{\cos x} - 1$;

С учетом начального условия y(0) = 0 получаем $y = \dfrac{1}{\cos x} - 1$;

Как видно результаты, полученные при решении данного дифференциального уравнения различными способами, совпадают.

При решении дифференциальных уравнений бывает возможно выбирать метод решения, исходя из сложности преобразований.

Пример. Решить уравнение $y' + y\cos x = \frac{1}{2}\sin 2x$ с начальным условием y(0) = 0.

Это линейное неоднородное уравнение. Решим соответствующее ему однородное уравнение.

$$y' + y\cos x = 0; \qquad \frac{dy}{y} = -\cos x dx; \qquad \ln|y| = -\sin x + C_1;$$

$$y = e^{-\sin x} \cdot e^{C_1}; \qquad y = Ce^{-\sin x};$$

Для линейного неоднородного уравнения общее решение будет иметь вид:

$$y = C(x)e^{-\sin x};$$

Для определения функции C(x) найдем производную функции y и подставим ее в исходное дифференциальное уравнение.

$$y' = C'(x)e^{-\sin x} - C(x)e^{-\sin x}\cos x;$$

$$C'(x)e^{-\sin x} - C(x)e^{-\sin x}\cos x + C(x)e^{-\sin x}\cos x = \sin x\cos x;$$

$$C'(x)e^{-\sin x} = \sin x\cos x; \qquad C'(x) = e^{\sin x}\sin x\cos x;$$

$$C(x) = \int e^{\sin x}\sin x\cos x dx = \left\{\begin{matrix} V = e^{\sin x}; & dU = \cos x dx; \\ dV = e^{\sin x}\cos x dx; & U = \sin x; \end{matrix}\right\} = e^{\sin x}\sin x - \int e^{\sin x}\cos x dx =$$

$$= e^{\sin x}\sin x - e^{\sin x} + C.$$

Итого $y = e^{-\sin x}\left(e^{\sin x}\sin x - e^{\sin x} + C\right);$ $\qquad y = \sin x - 1 + Ce^{-\sin x};$

Проверим полученное общее решение подстановкой в исходное дифференциальное уравнение.

$$\cos x + Ce^{-\sin x}(-\cos x) + \sin x\cos x - \cos x + Ce^{-\sin x}\cos x = \sin x\cos x; \text{ (верно)}$$

Найдем частное решение при y(0) = 0.

$$0 = \sin 0 - 1 + Ce^0; \qquad C = 1.$$

Окончательно $y = \sin x + e^{-\sin x} - 1.$

Пример. Найти решение дифференциального уравнения

$$20xdx - 3ydy = 3x^2ydy - 5xy^2dx$$

с начальным условием y(1) = 1.

Это уравнение может быть преобразовано и представлено как уравнение с разделенными переменными.

$$20x - 3yy' = 3x^2yy' - 5xy^2; \qquad 3yy'(x^2 + 1) = 5x(y^2 + 4);$$

$$y'\frac{3y}{y^2+4}=\frac{5x}{x^2+1}; \qquad \frac{3y}{y^2+4}dy=\frac{5x}{x^2+1}dx;$$

$$\int\frac{3y}{y^2+4}dy=\int\frac{5x}{x^2+1}dx;$$

$$\frac{3}{2}\ln(y^2+4)=\frac{5}{2}\ln(x^2+1)+\ln C_1$$

$$(y^2+4)^3=C\cdot(x^2+1)^5; \qquad y^2+4=C\cdot\sqrt[3]{(x^2+1)^2};$$

$$y^2=C(x^2+1)^{\frac{5}{3}}-4;$$

$$y=\sqrt{C(x^2+1)^{\frac{5}{3}}-4};$$

С учетом начального условия:

$$1=\sqrt{C\cdot 2^{\frac{5}{3}}-4}=\sqrt{C\sqrt[3]{32}-4}; \qquad 1=2C\sqrt[3]{4}-4; \qquad 5=2C\sqrt[3]{4}; \qquad 125=8C^3\cdot 4; \quad C^3=\frac{125}{32};$$

$$C=\frac{5}{2\sqrt[3]{4}}.$$

Окончательно $\quad y=\sqrt{5\left(\frac{x^2+1}{2}\right)^{\frac{5}{3}}-4}.$

Пример. Решить дифференциальное уравнение $xy'+y=x+1$ с начальным условием y(1) = 0.

Это линейное неоднородное уравнение.
Решим соответствующее ему однородное уравнение.

$$xy'+y=0; \qquad \frac{xdy}{dx}=-y; \qquad \frac{dy}{y}=-\frac{dx}{x}; \qquad \ln|y|=-\ln|x|+\ln C;$$

$$xy=C; \qquad y=\frac{C}{x};$$

Решение неоднородного уравнения будет иметь вид:

$$y=\frac{C(x)}{x};$$

Подставим в исходное уравнение:

$$x\frac{C'(x)x-C(x)}{x^2}+\frac{C(x)}{x}=x+1; \qquad \frac{C'(x)x}{x}=x+1; \qquad C'(x)=x+1;$$

$$C(x)=\frac{x^2}{2}+x+C;$$

Общее решение будет иметь вид: $\quad y=\frac{x}{2}+1+\frac{C}{x};$

С учетом начального условия y(1) = 0: $0 = \frac{1}{2} + 1 + C; \qquad C = -\frac{3}{2};$

Частное решение: $y = \frac{x}{2} - \frac{3}{2x} + 1;$

<u>Пример.</u> Найти решение дифференциального уравнения $xy' = y\ln\left(\frac{y}{x}\right)$ с начальным условием y(1) = e.

Это уравнение может быть приведено к виду уравнения с разделяющимися переменными с помощью замены переменных.

Обозначим: $\ln\left(\frac{y}{x}\right) = u; \qquad \frac{y}{x} = e^u; \qquad y = xe^u; \qquad y' = xu'e^u + e^u;$

Уравнение принимает вид:

$$xu'e^u + e^u = e^u u; \qquad xu' + 1 = u; \qquad xu' = u - 1;$$

Получили уравнение с разделяющимися переменными.

$$x\frac{du}{dx} = u - 1; \qquad \frac{du}{u-1} = \frac{dx}{x};$$

$$\int \frac{du}{u-1} = \int \frac{dx}{x}; \qquad \ln|u-1| = \ln|x| + \ln C; \qquad u - 1 = Cx;$$

Сделаем обратную замену: $Cx = \ln\left(\frac{y}{x}\right) - 1; \qquad \ln\left(\frac{y}{x}\right) = Cx + 1; \qquad \frac{y}{x} = e^{Cx+1};$

Общее решение: $y = xe^{Cx+1};$

С учетом начального условия y(1) = e: $e = e^{C+1}; \qquad C = 0;$

Частное решение: $y = ex;$

<u>Второй способ решения.</u>

$$xy' = y\ln\frac{y}{x};$$

$$xy' = y\ln y - y\ln x;$$

$$y' - \frac{y}{x}\ln y = -\frac{y}{x}\ln x;$$

Получили линейное неоднородное дифференциальное уравнение. Соответствующее однородное:

$$y' - \frac{y}{x}\ln y = 0;$$

$$y' = \frac{y}{x}\ln y; \qquad \frac{dy}{y\ln y} = \frac{dx}{x}; \qquad \int \frac{d(\ln y)}{\ln y} = \int \frac{dx}{x};$$

$$\ln|\ln y| = \ln|x| + \ln C; \qquad \ln y = Cx; \qquad y = e^{Cx};$$

Решение исходного уравнения ищем в виде: $y = e^{C(x)x};$

Тогда $y' = e^{C(x)x}\left(C'(x)x + C(x)\right);$

Подставим полученные результаты в исходное уравнение:

$$xe^{C(x)x}\left(C'(x)x + C(x)\right) = e^{C(x)x}\ln\frac{e^{C(x)x}}{x};$$

$$x^2C'(x) + xC(x) = C(x)x - \ln x;$$

$$x^2C'(x) = -\ln x; \qquad C'(x) = -\frac{\ln x}{x^2};$$

$$C(x) = -\int\frac{\ln x}{x^2}dx = \left\{\begin{matrix} u = \ln x; & dv = \dfrac{dx}{x^2}; \\ du = \dfrac{dx}{x}; & v = -\dfrac{1}{x}; \end{matrix}\right\} = -\left[-\frac{\ln x}{x} - \int\frac{-dx}{x^2}\right] = \frac{\ln x}{x} + \frac{1}{x} + C;$$

$$y = e^{C(x)x} = e^{\ln x + 1 + Cx} = xe^{Cx+1};$$

Получаем общее решение: $y = xe^{Cx+1};$

Пример. Решить дифференциальное уравнение $y' + e^{\frac{y}{x}} - \frac{y}{x} = 0$ с начальным условием y(1)=0.

В этом уравнении также удобно применить замену переменных.

$$e^{\frac{y}{x}} = u; \qquad \frac{y}{x} = \ln u; \qquad y = x\ln u; \qquad y' = \ln u + \frac{xu'}{u};$$

Уравнение принимает вид: $\ln u + \frac{xu'}{u} + u - \ln u = 0; \qquad xu' + u^2 = 0;$

$$xu' = -u^2; \qquad \frac{du}{u^2} = -\frac{dx}{x}; \qquad \int\frac{du}{u^2} = -\int\frac{dx}{x};$$

$$\frac{1}{u} = \ln|x| + \ln C; \qquad \frac{1}{u} = \ln Cx;$$

Делаем обратную подстановку: $e^{-\frac{y}{x}} = \ln Cx; \qquad -\frac{y}{x} = \ln(\ln Cx);$

Общее решение: $y = -x\ln(\ln Cx);$

С учетом начального условия y(1) = 0: $0 = -\ln(\ln C); \qquad C = e;$

Частное решение: $y = -x\ln(\ln ex);$

Второй способ решения.

$$y' + e^{\frac{y}{x}} - \frac{y}{x} = 0$$

Замена переменной: $u = \frac{y}{x}; \quad y = ux; \quad y' = u'x + u;$

$$u'x + u + e^u - u = 0$$
$$u'x + e^u = 0$$
$$\frac{du}{dx}x = -e^u$$
$$-e^{-u}du = \frac{dx}{x}$$
$$-\int e^{-u}du = \int \frac{dx}{x};$$
$$e^{-u} = \ln|x| + \ln C; \qquad e^{-u} = \ln|Cx|;$$
$$-u = \ln(\ln|Cx|); \qquad u = -\ln(\ln|Cx|);$$

Общее решение: $y = -x\ln(\ln Cx)$;

Пример. Решить уравнение $y''' - y = 0$.

Составим характеристическое уравнение: $k^3 - 1 = 0$;

$$(k-1)(k^2 + k + 1) = 0; \qquad k_1 = 1; \qquad k^2 + k + 1 = 0;$$
$$D = 1 - 4 = -3; \qquad k_2 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i; \qquad k_3 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i;$$

Общее решение имеет вид: $y = C_1e^x + e^{-\frac{x}{2}}\left[C_2\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + C_3\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right].$

Пример. Решить уравнение $(1-x^2)y'' - 2xy' + 2y = 0.$

Это линейное однородное дифференциальное уравнение с переменными коэффициентами второго порядка. Для нахождения общего решения необходимо отыскать какое - либо частное решение.

Таким частным решением будет являться функция $y_1 = x$.

$$y_1' = 1; \quad y_1'' = 0; \qquad 0 - 2x + 2x = 0;$$

Исходное дифференциальное уравнение можно преобразовать:

$$y'' - \frac{2x}{1-x^2}y' + \frac{2y}{1-x^2} = 0.$$

Общее решение имеет вид: $y = C_1x\int \frac{1}{x^2}e^{\int \frac{2x}{1-x^2}dx}dx + C_2x;$

$$y = C_1x\int \frac{e^{-\ln(1-x^2)}}{x^2}dx + C_2x;$$
$$y = C_1x\int \frac{dx}{x^2(1-x^2)} + C_2x; \qquad y = C_2x + C_1x\int\left[\frac{1}{x^2} + \frac{1}{2(1-x)} + \frac{1}{2(1+x)}\right]dx;$$
$$y = C_2x + C_1x\left[-\frac{1}{x} + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|\right];$$

Окончательно: $y = C_2 x + C_3 x \ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| + C_4;$

<u>Пример.</u> Решить уравнение $y^{IV} - y = 0.$

Составим характеристическое уравнение: $k^4 - 1 = 0.$

$$(k^2 - 1)(k^2 + 1) = 0; \qquad k_1 = 1; \quad k_2 = -1; \quad k_3 = i; \quad k_4 = -i.$$

Общее решение: $y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + C_3 \cos x + C_4 \sin x.$

<u>Пример.</u> Решить уравнение $y'' - 4y' + 4y = 0.$

Характеристическое уравнение: $k^2 - 4k + 4 = 0; \qquad k_1 = k_2 = 2.$

Общее решение: $y = C_1 e^{2x} + C_2 x e^{2x}.$

<u>Пример.</u> Решить уравнение $y'' + 2y' + 5y = 0.$

Характеристическое уравнение: $k^2 + 2k + 5 = 0; \qquad D = -16; \qquad k_1 = -1 + 2i;$

$$k_2 = -1 - 2i.$$

Общее решение: $y = e^{-x}(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x).$

<u>Пример.</u> Решить уравнение $y''' - 7y'' + 6y' = 0.$

Характеристическое уравнение: $k^3 - 7k^2 + 6k = 0; \qquad k(k^2 - 7k + 6) = 0;$

$$k_1 = 0; \quad k_2 = 1; \quad k_3 = 6;$$

Общее решение: $y = C_1 + C_2 e^x + C_3 e^{6x};$

<u>Пример.</u> Решить уравнение $y'' - y' - 2y = 0.$

Характеристическое уравнение: $k^2 - k - 2 = 0; \qquad k_1 = -1; \quad k_2 = 2;$

Общее решение: $y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{2x}.$

<u>Пример.</u> Решить уравнение $y^V - 9y''' = 0.$

Характеристическое уравнение: $k^5 - 9k^3 = 0; \qquad k^3(k^2 - 9) = 0;$

$$k_1 = k_2 = k_3 = 0; \qquad k_4 = 3; \qquad k_5 = -3;$$

Общее решение: $y = C_1 + C_2x + C_3x^2 + C_4e^{3x} + C_5e^{-3x}$;

Пример. Решить уравнение $yy'' - y'^2 = 0$.

Это уравнение не является линейным, следовательно, приведенный выше метод решения к нему не применим.

Понизим порядок уравнения с помощью подстановки $y' = p$.

Тогда $y'' = \frac{dp}{dy}y' = \frac{dp}{dy}p$.

$$y\frac{dp}{dy}p - p^2 = 0; \quad p_1 = 0; \quad y_1 = C_1;$$

$$\frac{ydp}{dy} = p; \qquad \frac{dp}{p} = \frac{dy}{y}; \qquad \int\frac{dp}{p} = \int\frac{dy}{y}; \qquad \ln|p| = \ln|y| + \ln C;$$

$$p = Cy; \qquad y' = Cy; \qquad \frac{dy}{Cy} = dx; \qquad \int\frac{dy}{Cy} = \int dx;$$

$$\frac{1}{C}\ln|Cy| = x + \ln C_2; \qquad Cy = e^{Cx}e^{C\ln C_2} = C_3e^{Cx};$$

Окончательно получаем: $y = C_1e^{Cx}$;

Это выражение будет общим решением исходного дифференциального уравнения. Полученное выше решение $y_1 = C_1$ получается из общего решения при $C = 0$.

Пример. Решить уравнение $3yy'' + y'^2 = 0$.

Производим замену переменной: $y' = p; \quad y'' = \frac{dp}{dy}y' = p\frac{dp}{dy}$;

$$3yp\frac{dp}{dy} + p^2 = 0; \quad p_1 = 0; \quad y_1 = C;$$

$$3y\frac{dp}{dy} = -p; \qquad \frac{dp}{p} = -\frac{dy}{3y}; \qquad \int\frac{dp}{p} = -\frac{1}{3}\int\frac{dy}{y};$$

$$\ln|p| = -\frac{1}{3}\ln|y| + \ln C; \qquad p^3 = \frac{C}{y}; \qquad y' = C_1y^{-\frac{1}{3}};$$

$$y^{\frac{1}{3}}dy = C_1dx; \qquad \int y^{\frac{1}{3}}dy = C_1\int dx; \qquad \frac{3}{4}y^{\frac{4}{3}} = C_1x + C_2;$$

$$y^{\frac{4}{3}} = C_3x + C_4;$$

Общее решение: $y = (C_3x + C_4)^{\frac{3}{4}}$.

Пример. Решить уравнение $y'' + y = x - \sin 2x$.

Правую часть дифференциального уравнения представим в виде суммы двух функций $f_1(x) + f_2(x) = x + (-\sin x)$.

Составим и решим характеристическое уравнение: $k^2 + 1 = 0;\qquad k_{1,2} = \pm\, i;$

1. Для функции $f_1(x)$ решение ищем в виде $y_1 = x^r e^{\alpha x} Q(x)$.

Получаем: $\alpha = 0,\quad r = 0,\ Q(x) = Ax + B;$ Т.е. $\quad y_1 = Ax + B;$

$$y_1' = A;\qquad y_1'' = 0;$$

$$Ax + B = x;\quad A = 1;\quad B = 0;$$

Итого: $y_1 = x;$

2. Для функции $f_2(x)$ решение ищем в виде: $y_2 = x^r e^{\alpha x}(Q_1(x)\cos\beta x + Q_2(x)\sin\beta x)$.

Анализируя функцию $f_2(x)$, получаем: $P_1(x) = 0;\quad P_2(x) = -1;\quad \alpha = 0;\quad \beta = 2;\quad r = 0;$

Таким образом, $y_2 = C\cos 2x + D\sin 2x;$

$$y_2' = -2C\sin 2x + 2D\cos 2x;$$

$$y_2'' = -4C2\cos x - 4D\sin 2x;$$

$$-4C\cos 2x - 4D\sin 2x + C\cos 2x + D\sin 2x = -\sin 2x;$$

$$-3C\cos 2x - 3D\sin 2x = -\sin 2x$$

$$A = 0;\quad B = \frac{1}{3};$$

Итого: $y_2 = \dfrac{1}{3}\sin 2x;$

Т.е. искомое частное решение имеет вид: $y = y_1 + y_2 = \dfrac{1}{3}\sin 2x + x;$

Общее решение неоднородного дифференциального уравнения:

$$y = \frac{1}{3}\sin 2x + x + C_1\cos x + C_2\sin x;$$

Рассмотрим примеры применения описанных методов.

<u>Пример.</u> Решить уравнение $y'' - 2y' + y = 3e^x$.

Составим характеристическое уравнение для соответствующего линейного однородного дифференциального уравнения:

$$k^2 - 2k + 1 - 0;\qquad k_1 = k_2 = 1;$$

Общее решение однородного уравнения: $y = C_1e^x + C_2xe^x$.
Теперь найдем частное решение неоднородного уравнения в виде:

$$y = x^r e^{\alpha x} Q(x)$$

$$\alpha = 1; \quad r = 2; \quad Q(x) = C;$$

$$y = Cx^2e^x.$$

Воспользуемся методом неопределенных коэффициентов.

$$y' = 2Cxe^x + Cx^2e^x; \qquad y'' = 2Ce^x + 2Cxe^x + 2Cxe^x + Cx^2e^x.$$

Подставляя в исходное уравнение, получаем:

$$2Ce^x + 4Cxe^x + Cx^2e^x - 4Cxe^x - 2Cx^2e^x + Cx^2e^x = 3e^x.$$

$$2C = 3; \qquad C = \frac{3}{2}.$$

Частное решение имеет вид: $y = \frac{3}{2}x^2e^x$.

Общее решение линейного неоднородного уравнения: $y = C_1e^x + C_2xe^x + \frac{3}{2}x^2e^x$.

Пример. Решить уравнение $y''' - y' = x^2 - 1$.

Характеристическое уравнение: $k^3 - k = 0; \quad k(k^2 - 1) = 0; \quad k_1 = 0; \quad k_2 = 1; \quad k_3 = -1;$
Общее решение однородного уравнения: $y = C_1 + C_2e^x + C_3e^{-x}$.
Частное решение неоднородного уравнения: $y = x^r e^{\alpha x} Q(x)$.

$$\alpha = 0; \quad r = 1; \quad Q(x) = Ax^2 + Bx + C.$$

$$y = Ax^3 + Bx^2 + Cx$$

Находим производные и подставляем их в исходное неоднородное уравнение:

$$y' = 3Ax^2 + 2Bx + C; \quad y'' = 6Ax + 2B; \quad y''' = 6A;$$

$$6A - 3Ax^2 - 2Bx - C = x^2 - 1;$$

$$-3A = 1; \quad -2B = 0; \quad 6A - C = -1;$$

$$A = -\frac{1}{3}; \quad B = 0; \quad C = -1;$$

Получаем общее решение неоднородного дифференциального уравнения:

$$y = C_1 + C_2e^x + C_3e^{-x} - \frac{1}{3}x^3 - x.$$

Пример. Найти общее решение системы уравнений:

$$\begin{cases} x' = 5x + 2y \\ y' = 2x + 2y \end{cases}$$

Составим характеристическое уравнение:

$$\begin{vmatrix} 5-k & 2 \\ 2 & 2-k \end{vmatrix} = 0; \qquad (5-k)(2-k) - 4 = 0; \qquad 10 - 5k - 2k + k^2 - 4 = 0;$$

$$k^2 - 7k + 6 = 0; \qquad k_1 = 1; \qquad k_2 = 6;$$

Решим систему уравнений:

$$\begin{cases} (a_{11} - k)\alpha + a_{12}\beta = 0 \\ a_{21}\alpha + (a_{22} - k)\beta = 0 \end{cases}$$

Для k_1: $\begin{cases} (5-1)\alpha_1 + 2\beta_1 = 0 \\ 2\alpha_1 + (2-1)\beta_1 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 4\alpha_1 + 2\beta_1 = 0 \\ 2\alpha_1 + \beta_1 = 0 \end{cases}$

Полагая $\alpha_1 = 1$ (принимается любое значение), получаем: $\beta_1 = -2$.

Для k_2: $\begin{cases} (5-6)\alpha_2 + 2\beta_2 = 0 \\ 2\alpha_2 + (2-6)\beta_2 = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} -1\alpha_2 + 2\beta_2 = 0 \\ 2\alpha_2 - 4\beta_2 = 0 \end{cases}$

Полагая $\alpha_2 = 2$ (принимается любое значение), получаем: $\beta_2 = 1$.

Общее решение системы: $\begin{cases} x = C_1 e^t + 2C_2 e^{6t} \\ y = -2C_1 e^t + C_2 e^{6t} \end{cases}$

Этот пример может быть решен другим способом:

Продифференцируем первое уравнение: $x'' = 5x' + 2y'$;

Подставим в это выражение производную $y' = 2x + 2y$ из второго уравнения.

$$x'' = 5x' + 4x + 4y;$$

Подставим сюда y, выраженное из первого уравнения:

$$x'' = 5x' + 4x + 2x' - 10x$$
$$x'' - 7x' + 6x = 0$$

$$k_1 = 6; \qquad k_2 = 1$$
$$x = Ae^t + Be^{6t}; \qquad x' = Ae^t + 6Be^{6t};$$

$$2y = x' - 5x = Ae^t + 6Be^{6t} - 5Ae^t - 5Be^{6t};$$
$$y = -2Ae^t + \frac{1}{2}Be^{6t};$$

Обозначив $A = C_1$; $\frac{1}{2}B = C_2$, получаем решение системы: $\begin{cases} x = C_1 e^t + 2C_2 e^{6t} \\ y = -2C_1 e^t + C_2 e^{6t} \end{cases}$

Пример. Найти решение системы уравнений

$$\begin{cases} y' = y + z \\ z' = y + z + x \end{cases}$$

Эта система дифференциальных уравнений не относится к рассмотренному выше типу, т.к. не является однородным (в уравнение входит независимая переменная x).

Для решения продифференцируем первое уравнение по x. Получаем:

$$y'' = y' + z'.$$

Заменяя значение z' из второго уравнения получаем: $y'' = y' + y + z + x$.

С учетом первого уравнения, получаем: $y'' = 2y' + x$.

Решаем полученное дифференциальное уравнение второго порядка.

$$y'' - 2y' = x; \qquad y'' - 2y' = 0; \qquad k^2 - 2k = 0; \quad k_1 = 0; \quad k_2 = 2.$$

Общее решение однородного уравнения: $y = C_1 + C_2 e^{2x}$.

Теперь находим частное решение неоднородного дифференциального уравнения по формуле $y = x^r e^{\alpha x} Q(x); \quad \alpha = 0; \quad r = 1; \quad Q(x) = Ax + B;$

$$y = Ax^2 + Bx; \quad y' = 2Ax + B; \quad y'' = 2A;$$

$$2A - 4Ax - 2B = x; \qquad A = -\frac{1}{4}; \quad B = -\frac{1}{4};$$

Общее решение неоднородного уравнения:

$$y = C_1 + C_2 e^{2x} - \frac{1}{4}x(x+1).$$

Подставив полученное значение в первое уравнение системы, получаем:

$$z = -C_1 + C_2 e^{2x} + \frac{1}{4}(x^2 - x - 1).$$

<u>Пример.</u> Найти решение системы уравнений:

$$\begin{cases} y' = z + w \\ z' = 3y + w \\ w' = 3y + z \end{cases}$$

Составим характеристическое уравнение:

$$\begin{vmatrix} -k & 1 & 1 \\ 3 & -k & 1 \\ 3 & 1 & -k \end{vmatrix} = 0; \qquad -k\begin{vmatrix} -k & 1 \\ 1 & -k \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 3 & -k \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & -k \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 0;$$

$$-k(k^2 - 1) + 3k + 3 + 3 + 3k = 0; \qquad k^3 - 7k - 6 = 0; \qquad k_1 = -1; \quad k_2 = -2; \quad k_3 = 3;$$

1) $k = -1$.

$$\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = 0 \\ 3\alpha + \beta + \gamma = 0; \\ 3\alpha + \beta + \gamma = 0 \end{cases} \qquad \alpha = 0; \quad \beta = -\gamma;$$

Если принять $\gamma = 1$, то решения в этом случае получаем:

$$y_1 = 0; \quad z_1 = -e^{-x}; \quad w_1 = e^{-x};$$

2) $k_2 = -2$.

$$\begin{cases} 2\alpha + \beta + \gamma = 0 \\ 3\alpha + 2\beta + \gamma = 0; \\ 3\alpha + \beta + 2\gamma = 0 \end{cases} \qquad \alpha = -\gamma; \quad \beta = \gamma;$$

Если принять $\gamma = 1$, то получаем:

$$y_2 = -e^{-2x}; \quad z_2 = e^{-2x}; \quad w_2 = e^{-2x};$$

3) $k_3 = 3$.

$$\begin{cases} -3\alpha + \beta + \gamma = 0 \\ 3\alpha - 3\beta + \gamma = 0 \; ; \\ 3\alpha + \beta - 3\gamma = 0 \end{cases} \quad \alpha = \frac{2}{3}\gamma; \quad \beta = \gamma;$$

Если принять γ = 3, то получаем:

$$y_3 = 2e^{3x}; \quad z_3 = 3e^{3x}; \quad w_3 = 3e^{3x};$$

Общее решение имеет вид:

$$\begin{cases} y = -C_2 e^{-2x} + 2C_3 e^{3x} \\ z = -C_1 e^{-x} + C_2 e^{-2x} + 3C_3 e^{3x} \\ w = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-2x} + 3C_3 e^{3x} \end{cases}$$

Тестовые задания

Тестовые задания по проверке остаточных знаний по дисциплине
«Математический анализ» для специальности 230102
20 заданий
время тестирования – 40 минут

ВАРИАНТ 1

Инструкция: все задания имеют одну и ту же форму – с выбором одного ответа из четырех предложенных

1. Областью определения функции $y=\dfrac{3x+1}{x^2-1}$ является…	1) $\boldsymbol{R}$ 2) (- ∞; - 1)∪(1; ∞) 3) (- ∞; - 1/3)∪(-1/3; ∞) 4) (1; ∞)
2. Числовая последовательность определена на множестве…	1) натуральных чисел 2) целых чисел 3) рациональных чисел 4) действительных чисел
3. Предел $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x^2-5x+6}$ равен…	1) – 4 2) 4 3) 0 4) 4/5
4. Предел $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2}{e^x}$ равен…	1) 1 2) ∞ 3) 0 4) 10
5. Производная функции $y=\dfrac{x^2}{x^3+1}$ в точке x_0 = 1 равна…	1) – 0,25 2) 4,5 3) 0 4) 0,25
6. Дифференциал функции $y=\dfrac{x-2}{x^2+1}$ равен…	1) $\dfrac{-x^2+4x+1}{\left(x^2+1\right)^2}$ 2) $\dfrac{-x^2+4x+1}{x^2+1}dx$ 3) $\dfrac{-x^2+4x+1}{\left(x^2+1\right)^2}dx$ 4) $\dfrac{1}{2x}dx$
7. Наименьшее значение функции $f(x)=\dfrac{1}{3}x^3-x^2-\dfrac{2}{3}$ на отрезке [- 1;1] равно…	1) -2 2) 0 3) -4/3 4) -2/3
8. Закон движения материальной точки имеет вид $x(t) = 4 + 10t + e^{7-t}$,где $x(t)$ - координата точки в момент времени t. Тогда ускорение точки при t = 7 равна…	1) 13 2) 75 3) 9 4) 1
9. Множество первообразных функции $f(x)=\sin(2x+5)$ имеет вид…	1) $2cos(2x + 5) + C$ 2) $2\ cosx + C$ 3) $-\dfrac{1}{2}\cos(2x+5)+C$ 4) $\dfrac{1}{2}\cos(2x+5)+C$

10. Определенный интеграл $\int\limits_{\frac{1}{2}}^{1}\sqrt{4x-2}dx$ равен…	1) $\frac{\sqrt{2}}{3}$ 2) $-\frac{\sqrt{2}}{3}$ 3) $\frac{4\sqrt{2}}{3}$ 4) $-\frac{4\sqrt{2}}{3}$
11. Несобственный интеграл $\int\limits_{0}^{+\infty}e^{-4x}dx$ равен…	1) $-\frac{1}{4}$ 2) $\frac{1}{4}$ 3) расходится 4) 1
12. На числовой прямой дана точка x = 5,3. Тогда ее «ε-окрестностью» может являться интервал…	1) (5,3; 5,4) 2) (4,9; 5,5) 3) (4,8; 5,8) 4) (4,9; 5,3)
13. Модуль комплексного числа z = - 2 + 2i равен…	1) $2\sqrt{2}$ 2) $\sqrt{2}$ 3) $3\sqrt{2}$ 4) $4\sqrt{2}$
14. Если $z_1 = 1 - i$, $z_2 = -2 + i$, то $z_1 \cdot z_2$ равно…	1) 1 - i 2) 2 – 3i 3) – 1 + 3i 4) 3 – i
15. Значение функции $f(z) = z^2 + i$ в точке z_0=1+i равно…	1) 2 + 3i 2) 3 + 2i 3) 3i 4) 2i
16. Частная производная функции $z = x^4 siny$ по переменной y в точке $M(1; \pi)$ равна…	1) 4 2) -1 3) 1 4) 0
17. Дифференциальное уравнение $y^2 y' + 2x - 1 = 0$ является…	1) линейным неоднородным дифференциальным уравнением 2) однородным дифференциальным уравнением 3) уравнением Бернулли 4) дифференциальным уравнение с разделяющимися переменными
18. Дано дифференциальное уравнение $y' = (k+3)x^2$, тогда функция $y = x^3$ является его решением при k равном…	1) 0 2) 2 3) 3 4) 1
19. Дано линейное однородное дифференциальное уравнение $y'' + y' - 2y = 0$, тогда его общее решение имеет вид…	1) $C_1e^{2x} + C_2e^{-x}$ 2) $C_1e^{2x} + C_2e^{x}$ 3) $C_1e^{-2x} + C_2e^{-x}$ 4) $C_1e^{-2x} + C_2e^{x}$
20. Частному решению линейного неоднородного дифференциального уравнения $y'' - 4y' + 3y = e^{2x}(x+1)$ по виду его правой части соответствует функция	1) $y = e^{2x}(Ax + B)$ 2) $y = Ae^{2x} + Be^{3x}$ 3) $y = Ax + B$ 4) $y = Ax^2 + Bx$

ВАРИАНТ 2

Инструкция: все задания имеют одну и ту же форму – с выбором одного ответа из четырех предложенных

1. Областью определения функции $y=\sqrt{5-3x}$ является…	1) (- ∞; 5/3) 2) (- ∞; 5/3] 3) ***R*** 4) [5/3; ∞)
2. График числовой последовательности расположен…	1) левее оси *Oy* 2) в первой координатной четверти 3) правее оси *Oy* 4) ниже оси *Ox*
3. Предел $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x+8}-3}{x-1}$ равен…	1) $\dfrac{1}{6}$ 2) 0 3) ∞ 4) $\dfrac{1}{3}$
4. Предел $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\cos x}{x}$ равен…	1) -1 2) 1 3) ∞ 4) 0
5. Производная функции $y=4x+6\sqrt[3]{x}$ в точке $x_0=8$ равна…	1) – 0,25 2) 4,5 3) 0 4) 0,25
6. Дифференциал функции $y=x^2\ln x$ равен…	1) $x(2\ln x+1)$ 2) $2x(2\ln x+1)dx$ 3) $2dx$ 4) $x(2\ln x+1)dx$
7. Наименьшее значение функции $f(x)=\dfrac{1}{3}x^3-x^2-1$ на отрезке [- 1;1] равно…	1) -2 2) 0 3) -4/3 4) -1
8. Закон движения материальной точки имеет вид $x(t)=5+10t+e^{3-t}$,где $x(t)$ - координата точки в момент времени t. Тогда скорость точки при $t=3$ равна…	1) 13 2) 75 3) 9 4) 11
9. Множество первообразных функции $f(x)=e^{3x+4}$ имеет вид…	1) $3e^{3x+4}+C$ 2) $-3e^{3x+4}+C$ 3) $\dfrac{1}{3}e^{3x+4}+C$ 4) $-\dfrac{1}{3}e^{3x+4}+C$
10. Определенный интеграл $\int\limits_1^5\dfrac{x}{1+x^2}dx$	1) $\dfrac{1}{2}\ln 13$ 2) $-\dfrac{1}{2}\ln 13$ 3) $\ln 13$ 4) $-\ln 13$

11. Несобственный интеграл $\int_0^{+\infty} xe^{-x^2}\,dx$ равен…	1) $-\frac{1}{2}$ 2) $\frac{1}{2}$ 3) расходится 4) 1
12. На числовой прямой дана точка x = 5,2. Тогда ее «ε-окрестностью» может являться интервал…	1) (5,2; 5,4) 2) (4,9; 5,5) 3) (4,8; 5,2) 4) (4,9; 5,3)
13. Модуль комплексного числа $z = 2 + 2i$ равен…	1) $2\sqrt{2}$ 2) $\sqrt{2}$ 3) $3\sqrt{2}$ 4) $4\sqrt{2}$
14. Если $z_1 = 1 - i$, $z_2 = 2 - i$, то $z_1 \cdot z_2$ равно…	1) $1 - i$ 2) $1 - 3i$ 3) $3 + 3i$ 4) $3 - i$
15. Значение функции $f(z) = z^2 - i$ в точке $z_0 = 1+i$ равно…	1) $2 + 3i$ 2) $3 + 2i$ 3) $3i$ 4) i
16. Частная производная функции $z = x^4 \sin y$ по переменной y в точке $M(1; \pi/2)$ равна…	1) 4 2) -1 3) 1 4) 0
17. Дифференциальное уравнение $y^2 y' + 2x^2 - y^2 = 0$ является…	1) линейным неоднородным дифференциальным уравнением 2) однородным дифференциальным уравнением 3) уравнением Бернулли 4) дифференциальным уравнение с разделяющимися переменными
18. Дано дифференциальное уравнение $y' = kx^2$, тогда функция $y = x^3$ является его решением при k равном…	1) 0 2) 2 3) 3 4) 1
19. Дано линейное однородное дифференциальное уравнение $y'' - y' - 2y = 0$, тогда его общее решение имеет вид…	1) $C_1e^{2x} + C_2e^{-x}$ 2) $C_1e^{2x} + C_2e^{x}$ 3) $C_1e^{-2x} + C_2e^{-x}$ 4) $C_1e^{-2x} + C_2e^{x}$
20. Частному решению линейного неоднородного дифференциального уравнения $y'' - 4y' + 3y = x + 1$ по виду его правой части соответствует функция	1) $y = e^{2x}(Ax + B)$ 2) $y = Ae^{2x} + Be^{3x}$ 3) $y = Ax + B$ 4) $y = Ax^2 + Bx$

ВАРИАНТ 3

Инструкция: все задания имеют одну и ту же форму – с выбором одного ответа из четырех предложенных

1. Областью определения функции $y=\ln(x+2)$ является…	1) (-2; ∞) 2) (2; ∞) 3) [-2; ∞) 4) ***R***
2. Формулой общего члена числовой последовательности 2, 5, 10, 17, 26, … является…	1) $(1+n)^2$ 2) n^2+1 3) n^2-1 4) $2n+1$
3. Предел $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{x^2-x}$ равен…	1) ∞ 2) 0 3) – 1 4) 1
4. Предел $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{tgx}$ равен…	1) 1 2) 0 3) ∞ 4) -1
5. Производная функции $y=x^2+3\sin x-\pi x$ в точке $x_0=\pi/2$ равна…	1) – 0,25 2) 4,5 3) 0 4) 0,25
6. Дифференциал функции $y=\left(x^3-x\right)\cdot tgx$ равен…	1) $\left[(3x-1)\cdot tgx+\dfrac{x^3-x}{\cos^2 x}\right]dx$ 2) $(3x-1)\cdot tgx+\dfrac{x^3-x}{\cos^2 x}$ 3) $\dfrac{3x-1}{\cos^2 x}\cdot dx$ 4) $\dfrac{3x-1}{\sin^2 x}\cdot dx$
7. Наименьшее значение функции $f(x)=\dfrac{1}{3}x^3-x^2$ на отрезке [- 1;1] равно…	1) -2 2) 0 3) -4/3 4) -2/3
8. Закон движения материальной точки имеет вид $x(t)=4+10t+e^{7-t}$,где $x(t)$ - координата точки в момент времени t. Тогда ускорение точки при $t=7$ равна…	1) 1 2) 75 3) 9 4) 11
9. Множество первообразных функции $f(x)=\cos(2x+5)$ имеет вид…	1) $\dfrac{1}{2}\sin(2x+5)+C$ 2) $-\dfrac{1}{2}\sin(2x+5)+C$ 3) $2\sin(2x+5)+C$ 4) $-2\sin(2x+5)+C$
10. Определенный интеграл $\displaystyle\int_2^5\frac{dx}{2x-3}$ равен…	1) $\dfrac{1}{2}\ln 7$ 2) $-\dfrac{1}{2}\ln 7$ 3) $\ln 7$ 4) $-\ln 7$

11. Несобственный интеграл $\int\limits_{13}^{+\infty} \frac{dx}{x \ln x}$ равен…	1) 13 2) -13 3) расходится 4) 1
12. На числовой прямой дана точка $x = 5$. Тогда ее «ε-окрестностью» может являться интервал…	1) (5; 5,4) 2) (4,9; 5,5) 3) (4,8; 5) 4) (4,9; 5,1)
13. Модуль комплексного числа $z = - 4 + 4i$ равен…	1) $2\sqrt{2}$ 2) $\sqrt{2}$ 3) $3\sqrt{2}$ 4) $4\sqrt{2}$
14. Если $z_1 = 1 + i$, $z_2 = 2 + i$, то $z_1 \cdot z_2$ равно…	1) $1 - i$ 2) $2 - 3i$ 3) $1 + 3i$ 4) $3 - i$
15. Значение функции $f(z) = z^3 + i$ в точке $z_0=1+i$ равно…	1) $- 2 + 3i$ 2) $3 + 2i$ 3) $3i$ 4) $2i$
16. Частная производная функции $z = x^3 cosy$ по переменной y в точке $M(-1; \pi/2)$ равна…	1) 4 2) -1 3) 1 4) 0
17. Дифференциальное уравнение $y' + 2xy - 1 = 0$ является…	1) линейным неоднородным дифференциальным уравнением 2) однородным дифференциальным уравнением 3) уравнением Бернулли 4) дифференциальным уравнение с разделяющимися переменными
18. Дано дифференциальное уравнение $y' = (k+2)x^2$, тогда функция $y = x^3$ является его решением при k равном…	1) 0 2) 2 3) 3 4) 1
19. Дано линейное однородное дифференциальное уравнение $y'' + 3y' - 4y = 0$, тогда его общее решение имеет вид…	1) $C_1e^{4x} + C_2e^{-x}$ 2) $C_1e^{4x} + C_2e^{x}$ 3) $C_1e^{-4x} + C_2e^{-x}$ 4) $C_1e^{-4x} + C_2e^{x}$
20. Частному решению линейного неоднородного дифференциального уравнения $y'' - 5y' + 6y = e^{2x}(x+1)$ по виду его правой части соответствует функция	1) $y = xe^{2x}(Ax + B)$ 2) $y = Ae^{2x} + Be^{3x}$ 3) $y = Ax + B$ 4) $y = Ax^2 + Bx$

ВАРИАНТ 4

Инструкция: все задания имеют одну и ту же форму – с выбором одного ответа из четырех предложенных

1. Областью определения функции $y=\dfrac{x^2+4}{x^3+1}$ является…	1) $\boldsymbol{R}$ 2) $(-\infty;\ 1)\cup(1;\ \infty)$ 3) $(-\infty;\ -1)\cup(-1;\ \infty)$ 4) $(1;\ \infty)$
2. Формулой общего члена числовой последовательности -1, 2, - 3, 4, - 5 … является…	1) $(-1)^n\cdot n$ 2) $(-1)^n\cdot n^2$ 3) n 4) n^2-1
3. Предел $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+25}-5}{x^2+2x}$ равен…	1) 0 2) $\dfrac{1}{20}$ 3) ∞ 4) $\dfrac{1}{2}$
4. Предел $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^{10}-2x+1}{x^{20}-4x+3}$ равен…	1) 0,5 2) – 0,5 3) 0 4) ∞
5. Производная функции $y=e^{x+1}\cdot(4x-5)$ в точке $x_0=\ln 2$ равна…	1) 2e(4ln2 + 1) 2) 2e 3) 4ln2 – 1 4) 2e(4ln2 – 1)
6. Дифференциал функции $y=arctg\sqrt{x}$ равен…	1) $\dfrac{dx}{2\sqrt{x}(1+x)}$ 2) $\dfrac{1}{2\sqrt{x}(1+x)}$ 3) $\dfrac{dx}{(1+x)}$ 4) $\dfrac{dx}{2\sqrt{x^3}(1+x)}$
7. Наименьшее значение функции $f(x)=\dfrac{1}{3}x^3-x^2-2$ на отрезке [- 1;1] равно…	1) -2 2) 0 3) -4/3 4) -2/3
8. Закон движения материальной точки имеет вид $x(t)=4+10t+e^{7-t}$,где $x(t)$ - координата точки в момент времени t. Тогда скорость точки при $t=7$ равна…	1) 13 2) 75 3) 9 4) 11
9. Множество первообразных функции $f(x)=(2x+3)^{10}$ имеет вид…	1) $\dfrac{(2x+3)^{11}}{22}+C$ 2) $-\dfrac{(2x+3)^{11}}{22}+C$ 3) $10(2x+3)^9+C$ 4) $20(2x+3)^9+C$
10. Определенный интеграл $\int\limits_0^{\pi}(2x+\sin 2x)dx$ равен…	1) π^2-1 2) π^2 3) $-\pi^2$ 4) π^2+1

11. Несобственный интеграл $\int_{e^2}^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$ равен…	1) e^2 2) - e^2 3) расходится 4) 1
12. На числовой прямой дана точка x = 5,1. Тогда ее «ε-окрестностью» может являться интервал…	1) (5,1; 5,4) 2) (4,9; 5,5) 3) (4,8; 5,1) 4) (4,9; 5,3)
13. Модуль комплексного числа z = - 1 + i равен…	1) $2\sqrt{2}$ 2) $\sqrt{2}$ 3) $3\sqrt{2}$ 4) $4\sqrt{2}$
14. Если $z_1 = 1 - i$, $z_2 = 2 + i$, то $z_1 \cdot z_2$ равно…	1) 1 - i 2) 2 – 3i 3) 3 + 3i 4) 3 – i
15. Значение функции $f(z) = z^3 + i$ в точке z_0=1+i равно…	1) - 2 - 5i 2) 3 + 2i 3) 3i 4) 2i
16. Частная производная функции $z = x^4 cosy$ по переменной y в точке $M(1; \pi/2)$ равна…	1) 4 2) -1 3) 1 4) 0
17. Дифференциальное уравнение $y' + 2xy - xy^2 = 0$ является…	1) линейным неоднородным дифференциальным уравнением 2) однородным дифференциальным уравнением 3) уравнением Бернулли 4) дифференциальным уравнение с разделяющимися переменными
18. Дано дифференциальное уравнение $y' = (k+1)x^2$, тогда функция $y = x^3$ является его решением при k равном…	1) 0 2) 2 3) 3 4) 1
19. Дано линейное однородное дифференциальное уравнение $y'' - 3y' - 4y = 0$, тогда его общее решение имеет вид…	1) $C_1e^{4x} + C_2e^{-x}$ 2) $C_1e^{4x} + C_2e^{x}$ 3) $C_1e^{-4x} + C_2e^{-x}$ 4) $C_1e^{-4x} + C_2e^{x}$
20. Частному решению линейного неоднородного дифференциального уравнения $y'' - 5y' + 6y = x + 1$ по виду его правой части соответствует функция	1) $y = e^{2x}(Ax + B)$ 2) $y = Ae^{2x} + Be^{3x}$ 3) $y = Ax + B$ 4) $y = Ax^2 + Bx$

Содержание

Виктория Владимировна ЕРЕМИНА
доцент кафедры Информационных и управляющих систем АмГУ,
кандидат физико-математических наук, доцент

Математический анализ для специальности
230201 «Информационные системы и технологии»:
учебно-методический комплекс дисциплины.

Издательство АмГУ.