Федеральное агентство по образованию РФ
АМУРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

ГОУВПО «АмГУ»

УТВЕРЖДАЮ
Зав. кафедрой ИУС
_______А.В. Бушманов
«___»_______________

УЧЕБНО – МЕТОДИЧЕСКИЙ КОМПЛЕКС

по дисциплине «ТЕОРИЯ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ»

для студентов специальности 230102 – Автоматизированные системы обработки информации и управления

Составитель: доцент, к.т.н. Самохвалова С.Г.

Факультет Математики и информатики

Кафедра информационных и управляющих систем

2007

Печатается по решению
редакционно-издательского совета
Факультета математики и информатики
Амурского государственного университета

С.Г. Самохвалова
Учебно-методический комплекс по дисциплине «Теория принятия решений» для студентов очной формы обучения специальности 230102 – Автоматизированные системы обработки информации и управления. - Благовещенск: Амурский гос. ун-т, 2007. – с.

Учебно-методические рекомендации ориентированы на оказание помощи студентам очной формы обучения по специальности 230102 – Автоматизированные системы обработки информации и управления для успешного освоения дисциплины «Теория принятия решений».

СОДЕРЖАНИЕ

Федеральное агентство по образованию РФ
АМУРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
(ГОУВПО «АмГУ»)

УТВЕРЖДАЮ

Проректор по УНР

___________ Е.С. Астапова

«___» _________ 2006 г.

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА

По дисциплине: Теория принятия решений

Для специальности: 230102 – Автоматизированные системы обработки информации и управления

КУРС: 3 **СЕМЕСТР: 6**

ЛЕКЦИИ: 36 (ЧАС.) **ЭКЗАМЕН: 6 СЕМЕСТР**

ПРАКТИЧЕСКИЕ ЗАНЯТИЯ: НЕТ **ЗАЧЕТ: НЕТ**

Лабораторные занятия: 36 (час.)

Курсовая работа: 30 (час.)

Самостоятельная работа: 50 (час.)

Всего часов: 122/30 (час.)

Составитель: Самохвалова С.Г.

Факультет Математики и информатики

Кафедра Информационных и управляющих систем

2006 г.

Рабочая программа составлена на основании Государственного образовательного стандарта ВПО по специальности 230102 – Автоматизированные системы обработки информации и управления

Рабочая программа обсуждена на заседании кафедры Информационных и управляющих систем

«___» _________ 2006 г., протокол № ___

Заведующий кафедрой А.В. Бушманов

Рабочая программа одобрена на заседании УМС 230102 – Автоматизированные системы обработки информации и управления

«___» _________ 2006 г., протокол № ___

Председатель А.В. Бушманов

Согласовано
Начальник УМУ
___________ Г.Н. Торопчина

«___» _________ 2006 г.

Согласовано
Председатель УМС факультета
___________ Е.Л. Ерёмин

«___» _________ 2006 г.

Согласовано
Заведующий выпускающей кафедрой
___________ А.В. Бушманов

«___» _________ 2006 г.

1. Цели и задачи дисциплины, ее место в учебном процессе

1.1. Цель преподавания дисциплины

Целью преподавания дисциплины является формирование у студентов теоретических знаний и практических навыков по реализации задач принятия решений в автоматизированных системах обработки информации и управления (АСОИУ) различного класса и назначения. В процессе изучения дисциплины студенты должны изучить основы теории принятия решений, ознакомиться с основными типами задач принятия решений, их постановкой и реализацией. Полученные в данном курсе знания должны использоваться в процессе изучения последующих дисциплин учебного плана, в которых рассматриваются вопросы проектирования и эксплуатации как отдельных функциональных подсистем АСОИУ, так и автоматизированных систем управления в целом. Указанные знания применяются также в процессе будущей профессиональной деятельности студентов при разработке автоматизированных систем различного класса и назначения.

1.2. Задачи изучения дисциплины

В результате изучения дисциплины студенты должны знать:
- основные понятия исследования операций и системного анализа, связанные с процессом принятия решений;
- методологические основы теории принятия решений;
- основные типы задач выбора и принятия решений, их постановку и реализацию;
- методы и модели, используемые при проектировании человеко-машинных систем для выбора и принятия решений.

Студенты должны уметь:
- использовать системный анализ, методы и модели исследования операций для постановки задач принятия решений;
- формировать и использовать основные модели для реализации задач выбора и принятия решений;
- разрабатывать процедуры и алгоритмы по реализации человеко-машинных систем для выбора и принятия решений.

1.3. Связь с другими дисциплинами учебного плана

Для усвоения курса необходимо знание соответствующих разделов (тем) предшествующих дисциплин учебного плана: "Математика", "Введение в системотехнику", "Информатика", "Алгоритмические языки и программирование", "Технология "программирования", "Системное программное обеспечение", "Теоретические основы автоматизированного управления".

Дисциплина "Теория принятия решений" связана с последующими и параллельно (в том же семестре) изучаемыми дисциплинами: "Моделирование систем", "Основы теории управления", "Базы данных".

2. Содержание дисциплины

2.1. Федеральный компонент

Обще профессиональная дисциплина

ГОС ВПО: 2040 ОПД – Ф.13.

2.2. Наименование тем, их содержание, объем в лекционных часах

ТЕМАТИЧЕСКИЙ ПЛАН ЛЕКЦИОННЫХ ЗАНЯТИЙ

№ темы	Наименование темы	Кол-во часов
1	Ведение	2
2	Основные понятия исследования операций и системного анализа	6
3	Принятие решений в условиях риска. Принятие решений в условиях и неопределенности	4
4	Принятие решений при нечеткой исходной информации	6
5	Теоретические основы выбора альтернатив	6
6	Процедуры и алгоритмы принятия решений	6
7	Критерии для описания выбора	6
ИТОГО		**36**

Тема 1. Введение.
Цели и задачи курса, связь с другими дисциплинами. Классификация моделей выбора и принятия решений. Задачи исследования операций. Принятие решений в условиях определенности.

Тема 2. Основные понятия исследования операций и системного анализа.
Системный анализ как основа методологии программно-целевого планирования и управления организационными системами. Основные этапы системного анализа. Место и роль принятия решений в жизненном цикле процесса управления. Исследование операций как наука, дающая количественное обоснование степени соответствия управления целевому назначению системы. Предмет и задачи исследования операций. Методы и модели исследования операций при реализации процесса принятия решений в АСОИУ. Роль человека при принятии решений в АСОИУ.

Тема 3. Принятие решений в условиях риска. Принятие решений в условиях и неопределенности.
Критерий ожидаемого значения. Критерий известного предельного уровня. Критерий наиболее вероятного события в будущем. Экспериментальные данные при принятии в условиях риска. Критерий Лапласа. Минимаксный критерий. Критерий Сэвиджа. Критерий Гурвица.

Тема 4. Принятие решений при нечеткой исходной информации.
Определение нечеткого множества. Операция над нечетными множествами. Свойства обычных отношений. Операция над отношениями. Определения нечетного отношения. Операция над нечетными отношениями. Свойства нечетных отношений. Задачи нечетного математического программирования. Классификация задач нечетного математического программирования.

Тема 5.. Теоретические основы выбора альтернатив.
Бинарные отношения. Описание выбора на языке бинарных отношений. Функции выбора, язык функций выбора. Функции выбора, порожденные бинарными отношениями. Операции над функциями выбора. Классы функций выбора. Координатные отношения. Декомпозиция функций выбора. Общие декомпозиции; частные декомпозиции; декомпозиции нормальных функций выбора.

Тема 6. Процедуры и алгоритмы принятия решений.
Экспертные процедуры для принятия решений. Задача оценивания. Подготовка экспертизы. Методы обработки экспертной информации. Статистические методы. Алгебраический метод. Формирование исходного множества альтернатив. Общая характеристика алгоритмов. Алгоритмы формирования исходного множества альтернатив. Задача выбора. Математическая задача выбора. Алгоритм решения общей задачи выбора. Задача выбора с функцией полезности. Функции полезности в задачах выбора. Общее понятие и свойства функции полезности. Алгоритмы оптимизации функции полезности.

Тема 7. Критерии для описания выбора
Выбор как максимизация критерия. Задача управления при многих критериях. Постановка задачи и её свойства. Общий алгоритм решения для функции полезности. Динамические многокритериальные задачи. Оптимальное управление в условиях противодействия. Многокритериальные задачи математического программирования. Дискретные многокритериальные задачи. Задача с дискретным временем. Многокритериальная задача с дискретным временем. Задача независимого выбора. Задача конструирования. Многокритериальная задача с непрерывным временем, Марковские модели принятия решений. С ведение многокритериальной задачи к однокритериальной.

2.3. Лабораторные занятия

2.3.1. Лабораторная работа 1. Решение задач линейного программирования – 10 ч.
2.3.2. Лабораторная работа 2. Анализ решений (в условиях неопределенности). – 4 ч.
2.3.3. Лабораторная работа 3. Анализ решений (в условиях риска). – 4 ч.
2.3.4. Лабораторная работа 4. Решение игр вида (2xn), (mx2), (mxn) – 12 ч.
2.3.5. Лабораторная работа 5. Операции над нечеткими отношениями и множествами – 6 ч.

2.4. Самостоятельная работа студентов

На внеаудиторную работу выделяется 50 часов. В процессе изучения дисциплины студенты должны регулярно самостоятельно, в часы внеаудиторной работы, заниматься изучением тем курса по конспекту лекций, учебникам и учебным пособиям, методическим пособиям с целью подготовки к лабораторным занятиям.

Темы самостоятельной работы:

1. Симплекс-метод.
2. Транспортная задача.
3. Целочисленное программирование. Метод ветвей и границ.
4. Предмет теория игр. Проблема равновесия в игре. Чистые и смешанные стратегии. Теорема о минимаксе. Оценка результатов игры.
5. Графическое решение игр вида (2xn) и (mx2). Решение игр вида (mxn) с помощью линейного программирования

Темы курсовых работ

1. Составление расписания занятий в компьютерном классе.
2. Планирование показателей деятельности организации.
3. Формирование тематического плана работ организации.
4. Формирование программы обучения по дисциплине.
5. Расчет сетевого графика загрузки вычислительного комплекса.

3. Вопросы к экзамену

1. Задачи принятия решений.
2. Деревья решений.
3. Критерий ожидаемого значения.
4. Задача достижения нечетко определенной цели.
5. Задачи математического программирования при нечетких условиях.
6. Критерий определенного уровня.
7. Операция над нечеткими отношениями.
8. Обычные отношения и их свойства.

9. Критерий Лапласа.
10. Нечеткие отношения и их свойства.
11. Принятие решений в условиях неопределенности.
12. Операции над нечеткими множествами.
13. Критерий Сэвиджа.
14. Нечеткие множества. Основные понятия и определения.
15. Критерий Гурвица.
16. Минимаксный критерий.
17. Графическое решение игр вида (2xn) и (mx2).
18. Теория игр.
19. Метод полного перебора.
20. Оптимальные решения в играх двух лиц с нулевой суммой.
21. Нечеткие отношения и их свойства.
22. □мешанные стратегии.
23. Решение игр вида (mxn) с помощью линейного программирования.
24. Решение 1, задачи нечетного математического программирования.
25. Игры в нечетко определенной обстановке.
26. Критерий Гурвица.
27. Нечеткое равновесное решение игры.
28. Задача достижения нечетко определенной цели.
29. Критерий Гурвица.
30. Максимальные гарантированные выигрыши.
31. Ршение 2, задачи нечеткого математического программирования.
32. Описание игры. Игры с противоположными интересами игроков.
33. Задачи линейного программирования.
34. Симплекс-метод.
35. Транспортная задача.
36. Метод ветвей и границ.

4. Оценочные критерии

При оценке знаний на экзамене учитывается: правильность и осознанность изложения содержания ответа на вопросы, полнота раскрытия понятий и закономерностей, точность употребления и трактовки общенаучных и специальных терминов; самостоятельность ответа; речевая грамотность и логическая последовательность ответа.

Критерии оценок:

- отлично – полно раскрыто содержание вопросов в объеме программы и рекомендованной литературы; четко и правильно даны определения и раскрыто содержание концептуальных понятий, закономерностей, корректно использованы научные термины; для доказательства использованы различные теоретические знания, выводы из наблюдений и опытов; ответ самостоятельный, исчерпывающий, без наводящих дополнительных вопросов, с опорой на знания, приобретенные в процессе специализации по выбранному направлению информатики.

- хорошо – раскрыто основное содержание вопросов; в основном правильно даны определения понятий и использованы научные термины; ответ самостоятельный; определения понятий неполные, допущены нарушения последовательности изложения, небольшие неточности при использовании научных терминов или в выводах и обобщениях, исправляемые по дополнительным вопросам экзаменаторов.
- удовлетворительно – усвоено основное содержание учебного материала, но изложено фрагментарно, не всегда последовательно; определение понятий недостаточно четкое; не использованы в качестве доказательства выводы из наблюдений и опытов или допущены ошибки при их изложении; допущены ошибки и неточности в использовании научной терминологии, определении понятий.
- неудовлетворительно – ответ неправильный, не раскрыто основное содержание программного материала; не даны ответы на вспомогательные вопросы экзаменаторов; допущены грубые ошибки в определении понятий, при использовании терминологии.

5. Учебно-методические материалы по дисциплине

Используемая и рекомендуемая литература

Основная:

1. Волков И.К. Исследование операций / Учеб. для тех. вузов / Издательство МГТУ им.Баумана - 2000, 435 стр.
2. Спицнадель В.Н. Теория и практика принятия оптимальных решений: Уч. пос. Изд. : Бизнес-Пресса, 2002. - 394 с
3. Харшаньи Дж., Зельтен Р. Общая теория выбора равновесия в играх. Изд-во: Экономическая школа, 2002, 424 стр

Дополнительная:

1. Кини Р.Л., Райфа Х. Принятие решений при многих критериях: предпочтения и замещения: - М.: Радио и связь, 1981.-560с.
2. Моисеев Н.Н. Математические задачи системного анализа. М.: Наука, 1981
3. Макаров И.М. и др. Теория выбора и принятия решений. М.: Наука, 1982.
4. Орловский С.А. Проблемы принятия решений при нечеткой исходной информации.- М.: Наука, 1981.
5. Таха Х. Введение в исследование операций. М.: Наука, 1985
6. Юдин Д.Б. Вычислительные методы теории принятия решений. М.: Наука, 1989.

6. Учебно-методическая (технологическая) карта дисциплины

<table>
<tr><th rowspan="2">Номер недели</th><th rowspan="2">Номер темы</th><th rowspan="2">Вопросы, изучаемые на лекции</th><th colspan="2">Занятия</th><th rowspan="2">Используемые наглядные и методические пособия</th><th colspan="2">Самостоятельная работа студентов</th><th rowspan="2">Форма контроля</th></tr>
<tr><th>Практические</th><th>Лабораторные</th><th>Содержание</th><th>Часы</th></tr>
<tr><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td><td>7</td><td>8</td><td>9</td></tr>
<tr><td>1</td><td>1</td><td rowspan="2">1-3</td><td rowspan="17">-</td><td rowspan="2">1</td><td rowspan="2">1</td><td rowspan="2">Выбор темы самостоятельной работы</td><td rowspan="2">10</td><td rowspan="2">злр</td></tr>
<tr><td>2</td><td rowspan="2">2</td></tr>
<tr><td>3</td><td rowspan="3">4-6</td><td rowspan="2">2</td><td rowspan="2">2</td><td rowspan="4">Поиск литературы по самостоятельной работы</td><td rowspan="4">20</td><td rowspan="2">злр</td></tr>
<tr><td>4</td><td rowspan="2">3</td></tr>
<tr><td>5</td><td rowspan="4">3</td><td rowspan="2">3</td><td rowspan="2">злр</td></tr>
<tr><td>6</td><td rowspan="3">4</td><td>5-3</td></tr>
<tr><td>7</td><td rowspan="4">7-10</td><td rowspan="2">3</td><td rowspan="4">Работа с литературой и поиск информации в сети Интернет</td><td rowspan="4">30</td><td rowspan="2">злр</td></tr>
<tr><td>8</td></tr>
<tr><td>9</td><td rowspan="3">5</td><td rowspan="2">4</td><td rowspan="2">2</td><td rowspan="2">злр, сб.</td></tr>
<tr><td>10</td></tr>
<tr><td>11</td><td rowspan="4">6-9</td><td rowspan="6">5</td><td rowspan="2">4</td><td rowspan="4">Написание отчета</td><td rowspan="4">10</td><td rowspan="2">злр</td></tr>
<tr><td>12</td><td rowspan="3">6</td></tr>
<tr><td>13</td><td rowspan="2">2</td><td rowspan="2">злр, защ.</td></tr>
<tr><td>14</td></tr>
<tr><td>15</td><td rowspan="3">7</td><td rowspan="3">10-12</td><td rowspan="2">1</td><td rowspan="3">Защита отчета по самостоятельной работе</td><td rowspan="3">10</td><td rowspan="2">злр</td></tr>
<tr><td>16</td></tr>
<tr><td>17</td><td>6</td><td>2</td><td>злр, защ.</td></tr>
</table>

Условные обозначения:
Осн.- основная литература
Доп. Дополнительная литература
К.р. – контрольная работа
Сб. – собеседование
Злр – защита лабораторной работы

Приложение А

Образец тестовых заданий

1**. Дайте понятие нечеткого множества**:

а) множество вида $supp\ A=\{x:\ \mu_A(x)>0,\ x\in X\}$

б) множество, когда его функция принадлежности $\mu_c=0$ на всем множестве X

в) совокупность пар вида $(x,\ \mu_c(x))$, где $x\in X$

2. **В каком критерии $\nu(a_{i,}, b_j)$ заменяется на $r(a_{i,}, b_j)$**

а) критерий Лапласа

б) минимаксный критерий

в) критерий Гурвица

г) критерий Сэвиджа

3. **Матрицу множества уровня α можно получить, заменив в матрице нечеткого отношения R**

а) единицами все элементы не меньше α

б) нулями элементы меньше α

в) нет правильного ответа

4. **Какими способами могут быть описаны бинарные отношения предпочтения на множестве альтернатив**

   а) в виде подмножества декартова произведения

   б) в форме функции полезности

   в) в виде множества декартова произведения

5. **Если величина наиболее гарантированного выигрыша игрока 1 слишком мала, то это означает, что:**

а) цель игрока 1 слишком занижена с учетом его возможностей;

б) цель игрока 1 чрезмерно завышена с учетом его возможностей;

в) цель игрока 1 не достаточно четко определена;

г) цель игрока 1 четко определена и достигнута.

6. **Что служит основой для достижения договоренности между игроками о выборе конкретной пары (x_0, y_0) в нечетко определенной игре**:

а) нечеткое равновесное решение;

б) носитель нечеткого равновесного решения;

в) ситуация равновесия игры;

г) принцип принятия решения.

2. ГРАФИК САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ УЧЕБНОЙ РАБОТЫ СТУДЕНТОВ

Понятие «самостоятельная работа» имеет две стороны: во-первых, это единственный метод усвоения знаний, во-вторых, это одна из организационных форм обучения.

Самостоятельная работа студентов включает следующие виды работ:

- подготовку к лабораторным работам, зачету, экзамену;
- текущие консультации;
- контрольные работы.

Распределение часов и заданий самостоятельной работы студентов по темам:

Тема 1. Симплекс-метод. (10 часов)

Контрольные вопросы:

1. Условие оптимальности симплекс-метода?
2. Как устраняется вырожденность в задачи?
3. Условие допустимости симплекс-метода?
4. При каком условии значение целевой функции неограничено?
5. На итерации симплекс-метода ведущий элемент может быть отрицательным или иметь нулевое значение?

Тема 2. Транспортная задача (10 часов)

Контрольные вопросы:

1. Условие оптимальности транспортной задачи?
2. Условие допустимости транспортной задачи?
3. Транспортную задачу всегда можно сбалансировать?
4. Сбалансированная транспортная модель может не иметь допустимых решений?
5. Какой метод используется при решении транспортной задачи?

Тема 3. Целочисленное программирование. Отсечение Гомори. (10 часов)

Контрольные вопросы:

1. Отсечение Гомори для полностью целочисленных задач?
2. С помощью каких методов решаются задачи целочисленного программирования?
3. С помощью какого метода можно решить частично целочисленную задачу?
4. Отсечение может исключить некоторое допустимое целочисленное решение, заведомо не являющееся оптимальным?
5. Что такое задача с ослабленными ограничениями?

Тема 4. Предмет теория игр. Проблема равновесия в игре. Чистые и смешанные стратегии. Теорема о минимаксе. Оценка результатов игры. (10 часов)

Контрольные вопросы:

1. Что такое седловая точка?
2. Условие оптимальности решения в игре двух лиц?
3. Что такое смешанные стратегии?
4. Как называют противников в теории игр?
5. Как называются игры с двумя игроками, в которых выигрыш одного равен проигрышу другого?

Тема 5. Графическое решение игр вида (2xn) и (mx2). Решение игр вида (mxn) с помощью линейного программирования. (10 часов)

Контрольные вопросы:

1. Если в игре двух лиц с нулевой суммой оптимальное решение предписывает одному игроку использовать только чистую стратегию, то это верно и для другого игрока?
2. Оптимальное решение в игре двух лиц с нулевой суммой всегда является Седловой точкой?
3. Если максимальное значение в игре двух лиц с нулевой суммой отрицательно, то конечный результат игры будет убыточным для игрока А?
4. Каждая игра двух лиц с нулевой суммой может быть представлена в каком виде?
5. Когда игра двух лиц с нулевой суммой устойчива?

3. КОНСПЕКТ ЛЕКЦИЙ ПО ДИСЦИПЛИНЕ

Тема 1. ВВЕДЕНИЕ

1.1. Понятие системы и среды

Понятие системы уточняется и совершенствуется вместе с развитием самого системного анализа. Так, основоположник теории систем Людвиг фон Берталанфи определил систему как комплекс взаимодействующих элементов, находящихся в определенных отношениях друг с другом и со средой.

Таким образом, исходным моментом в определении системы является ее сопоставление со средой, т.е. среда - это все то, что не входит в систему, а система - это конечное множество объектов, каким-то образом выделенное из среды. Между средой и системой существует множество взаимных связей, с помощью которых реализуется процесс взаимодействия среды и системы.

Выделение системы из среды и определение границ их взаимодействия является одной из первоочередных задач системного анализа. От правильности определения границ зависят не только выполняемые функции, эффективность и

качество системы, но и нередко сама ее жизнедеятельность. С другой стороны, диалектической основой системных исследований является принцип системности, суть которого сводится к тому, что система как нечто целое обладает свойствами, не присущими составляющим ее элементам (свойство целостности, эмерджентности). В этом случае при определении системы необходимо исходить из двух основополагающих понятий:

– система как совокупность взаимодействующих элементов;
– система как целостное образование, обладающее новыми системообразующими свойствами.

С учетом вышеизложенного перечислим следующие отличительные свойства системы:

• система есть нечто целое;
• система есть множество элементов, свойств и отношений;
• система есть организованное множество элементов;
• система есть динамическое множество элементов.

Тогда определение системы можно сформулировать следующим образом: система есть конечное множество элементов и отношений между ними, выделяемое из среды в соответствии с определенной целью, в рамках определенного временного интервала.

В данном случае под элементом принято понимать простейшую неделимую часть системы. При этом ответ на вопрос: что является такой частью? - не может быть однозначным и зависит от целей рассмотрения объекта как системы.

Объективно с точки зрения элементов внешней среды любая система существует как источник удовлетворения ее потребностей. Из этого следует, что простейшая модель взаимодействия между системой и средой выглядит следующим образом (рис. 1.1).

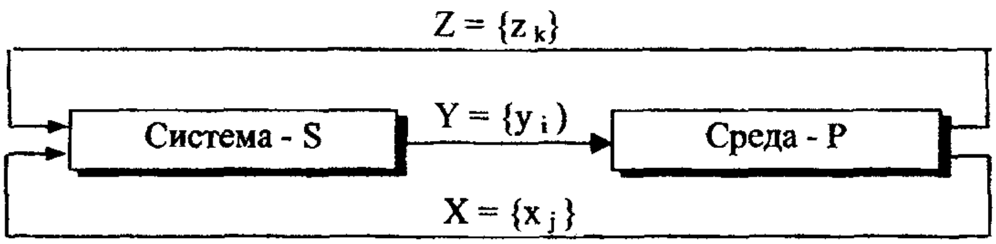


Рис. 1.1. Модель взаимодействия системы и среды

Элементы внешней среды задают системе множество целей и ограничений - Z =-$\{z_к\}$ и поставляют множество ресурсов - X = $\{x_j\}$.

Выходом из системы является множество конечных продуктов и услуг (КП) - Y = $\{y_j\}$, ориентированных на удовлетворение потребностей внешней среды. При этом множество конечных продуктов и ресурсов можно классифицировать на следующие группы: материальные, информационные, финансовые, трудовые, энергетические. В ряде случаев в классификаторе выходов системы помимо полезных конечных продуктов необходимо выделять отходы, т.е. конечные продукты, оказывающие негативное влияние на внешнюю среду.

Один из вариантов модели взаимодействия предприятия “как системы” с элементами ее внешней среды представлен на рисунке 1.2.

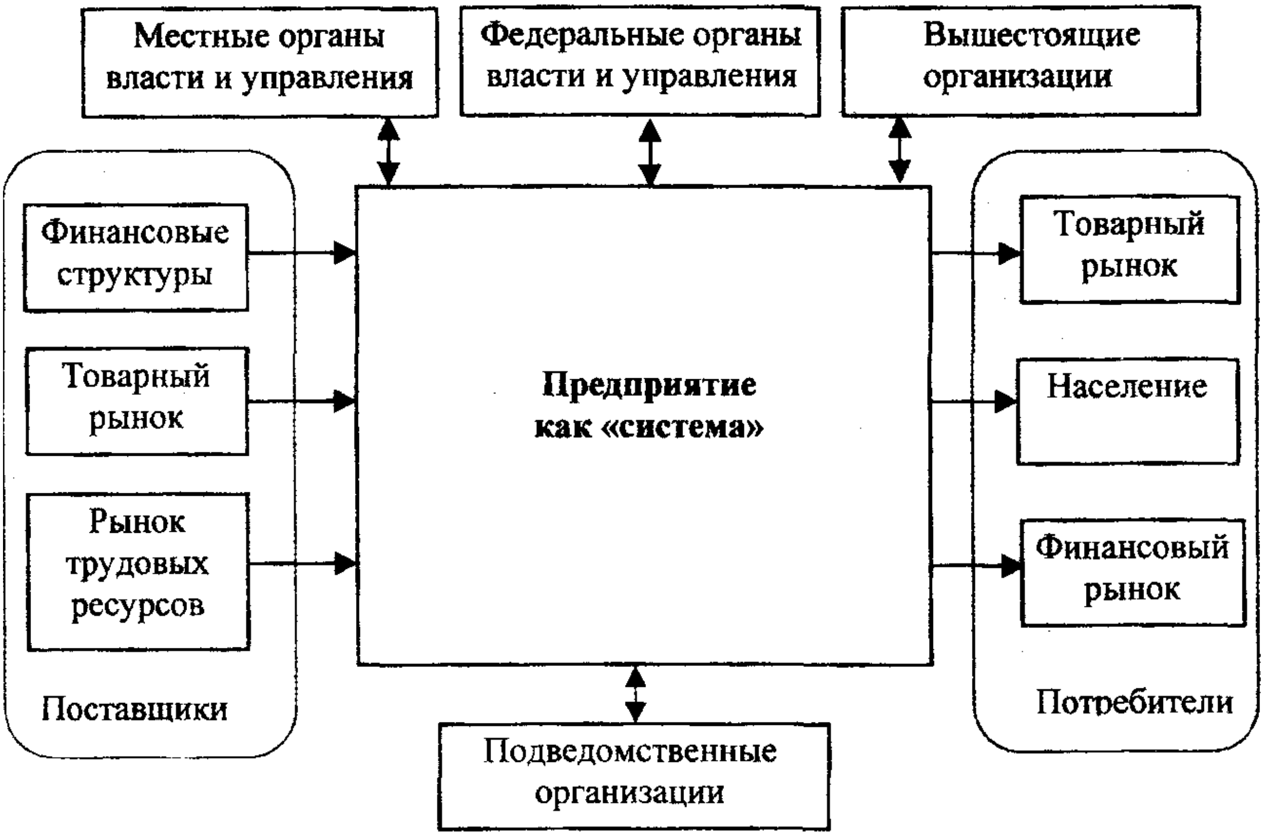


Рис. 1.2. Модель взаимодействия предприятия с элементами внешней среды

Рассмотрим фрагмент модели взаимодействия учебного заведения с элементами внешней среды.

В качестве конечных продуктов учебного заведения можно рассматривать следующие множества:

• инженерные и научные кадры:

y_1 - инженерные кадры, подготовленные по типовым учебным планам;

y_2 - инженерные кадры, подготовленные по заказам органов власти и управления;

y_3 - инженерные кадры, подготовленные по заказам финансовых институтов;

y_4 - инженерные кадры, подготовленные по заказам конкретного предприятия и т.д.;

y_5 - кадры высшей квалификации;

• информационную продукцию вуза:

y_6 - учебно-методическая литература;

y_7 - научно-техническая литература;

y_8- отчетная информация о деятельности вуза;

y_9- научно-технические разработки вуза. В качестве входных ресурсов учебного заведения выделим:

• финансовые ресурсы:

x_1 - средства федерального бюджета для организации учебного процесса;

x_2 - средства местного бюджета для организации учебного процесса;

x_3 - средства внебюджетных фондов для организации учебного процесса;

x_4 - средства благотворительных фондов для организации учебного процесса;

x_5- кредиты банков для организации учебного процесса;

x_6- финансовые ресурсы для организации научно-исследовательской деятельности;

x_7 - финансовые ресурсы для организации административно-хозяйственной деятельности;

• абитуриентов, поступающих в вуз:

x_8- на основе госбюджетного финансирования;

x_9- по заказам органов власти и управления;

x_{10} - по заказам финансовых институтов;

x_{11} - по заказам конкретных промышленных предприятий;

x_{12} - на личные сбережения родителей.

В качестве ограничений, определяющих деятельность вуза, можно рассматривать следующие:

• ограничения по учебной деятельности:

z_1 - требования государственного образовательного стандарта на подготовку специалистов по конкретной специальности;

z_2 - требования органов власти и управления к качеству подготовки специалистов;

z_3 - требования финансовых структур к качеству подготовки специалистов;

• ограничения по научно-исследовательской деятельности:

z_4 - требования федеральных органов к качеству выполнения госбюджетных тем;

z_5 - требования заказчиков к качеству выполнения хоздоговорных тем.

1.2. Понятие проблемной ситуации

Как было показано в предыдущем подразделе, взаимодействие между системой и средой построено по следующей схеме: среда поставляет системе ресурсы, устанавливает цели, ограничения, а получает из системы и потребляет ее конечные продукты (КП). Характерно, что КП системы принципиально не могут быть созданы в среде (в противном случае нет необходимости выделять систему из среды).

Возникшая либо назревающая степень неудовлетворения элементов внешней среды конечными продуктами системы либо низкая эффективность взаимодействия элементов внешней среды с системой порождают новое понятие системного подхода - “проблемная ситуация”. В этом случае очевидно, что перечень проблемных ситуаций можно определить исходя из анализа взаимосвязи элементов множеств:

$X=\{x_j\}$, $Y=\{y_i\}$, $Z=\{z_k\}$

При проведении данного этапа системных исследований рекомендуется, прежде всего, четко сформулировать сущность проблемы и описать ситуацию, в которой она имеет место. При этом содержание деятельности включает следующие этапы:

• установление содержания проблемы, т.е. уяснение, существует ли в действительности проблема либо является надуманной;

• определение новизны проблемной ситуации;

• установление причин возникновения проблемной ситуации;

• определение степени взаимосвязи проблемных ситуаций;

• определение полноты и достоверности информации о проблемной ситуации;

• определение возможности разрешения проблемы.

Определение существования проблемы предполагает проверку истинности или ложности формулировки проблемы и ее принадлежности. Проверка истинности существования проблемы должна определяться, прежде всего, по наличию в системе совокупности экономических и социальных потерь, а ее значимость - по критерию экономического либо социального эффекта, получаемого в системе после ликвидации проблемной ситуации. Оценка же степени проблемности должна производиться путем сопоставления фактических (в данный момент либо в будущем) значений целей с их плановыми либо нормативными значениями.

Определение новизны проблемной ситуации необходимо для выявления и установления возможных прецедентов или аналогий. Наличие прошлого опыта или нормативных рекомендаций позволяют существенно облегчить работу экспертов по выработке и принятию решений по ликвидации проблемы.

Установление причин (как в системе, так и во внешней среде) возникновения проблемы позволяет глубже понять закономерности функционирования объекта управления, вскрыть наиболее существенные факторы, приведшие к проблемной ситуации.

При анализе проблемной ситуации необходимо установить возможные взаимосвязи рассматриваемой проблемы с другими проблемами. При этом необходимо провести классификацию этих проблем на главные и второстепенные, общие и частные, срочные и несрочные. Анализ взаимосвязей проблем создает возможности четкого и глубокого выявления причинно-следственных зависимостей и способствует выработке комплексного решения, что, в свою очередь, позволяет выдавать рекомендации по изменению не только исследуемой системы, но и внешней среды.

Большое значение в анализе имеет определение степени полноты и достоверности информации о проблемной ситуации. В случае полной информации нетрудно сформулировать сущность проблемы и комплекс характеризующих ее условий. Если же имеет место неопределенность информации, то необходимо рассмотреть две альтернативы: провести работу по получению недостающей информации; отказаться от получения дополнительной информации и принимать решение в условиях имеющейся неопределенности. Выбор той или иной альтернативы в каждом конкретном случае надо производить исходя из схемы "затраты - эффект".

Важной составной частью анализа проблемной ситуации является определение степени разрешимости проблемы. В данном случае уже на предварительном этапе необходимо хотя бы приблизительно оценить возможность разрешения проблемы, поскольку не имеет смысла заниматься поиском решений для неразрешимых в данный момент времени проблем.

Сложность и многообразие систем и проблемных ситуаций требуют разработки формальных процедур организации такого рода деятельности. В предлагается следующий перечень методов, позволяющих систематизировать анализ и оценку проблемные ситуаций:

• анкетное обследование;

• прогнозирование на базе временных рядов;

• производное прогнозирование (использование уже полученных прогнозов для оценки каких-либо ситуаций. Например, компания, производящая запчасти к автомобилям, может воспользоваться прогнозами об объемах продаж автомобилей);

• моделирование на базе факторного и регрессионного анализа (установление причинно-следственных связей между некоторыми факторами и переменной величиной, которую необходимо определить);

• метод мозгового штурма;

• метод Дельфи;

• метод разработки сценариев.

Более подробная информация по некоторым методам будет представлена в следующих разделах учебного пособия.

Продолжая рассматривать пример анализа взаимодействия учебного заведения с элементами внешней среды, выделим следующий перечень проблемных ситуаций:

• на взаимосвязи y_4- низкое качество подготовки специалистов, несоответствующее требованиям современного производства;

• на взаимосвязи x_1 - низкий уровень финансирования учебного процесса со стороны государства;

• на взаимосвязи x_3 - низкие объемы и темпы привлечения внебюджетных средств при организации целевой и коммерческой подготовки студентов;

• на взаимосвязи x_8 - низкий конкурс при поступлении в вуз по ряду специальностей и т.д.

1.3. Понятие цели системы

Понятие цели и связанные с ним понятия целенаправленности, целеустремленности, целесообразности трудно сформулировать ввиду их неоднозначного толкования. Так, в БСЭ цель определяется как “заранее мыслимый результат созидательной деятельности человека”. Кроме того, в литературе имеется еще ряд альтернативных вариантов определения цели системы:

• “желаемое состояние выходов системы”;

• “определенное извне или установленное самой системой состояние ее выходов”;

• “идеальный образ того, чего человек либо группа людей хочет достичь”;

• “предвосхищение в сознании результата, на достижение которого направлены действия”;

• “требуемые внешней средой результаты деятельности системы, заданные на множестве выходных конечных продуктов”.

В данном случае при определении понятия цели будем исходить из следующих предпосылок. Поскольку проблемная ситуация идентифицируется с анализом взаимоотношений системы с элементами внешней среды, то цели системы должны выражаться через идеальный информационный образ этих взаимоотношений.

Таким образом, главная трудность формирования целей связана с тем, что цели являются как бы антиподом проблем. Формулируя проблемы, мы говорим в явном виде, что нам не нравится. Говоря о целях, мы пытаемся сформулировать, что мы хотим. При формулировке цели не следует подменять ее средствами. Предположим, вы хотите “улучшить информационное обслуживание своей фирмы” - приобретение необходимого количества ПЭВМ является лишь одним из возможных действий в этом направлении. В дальнейшем будем исходить из следующей классификации целей (рис. 1.3).

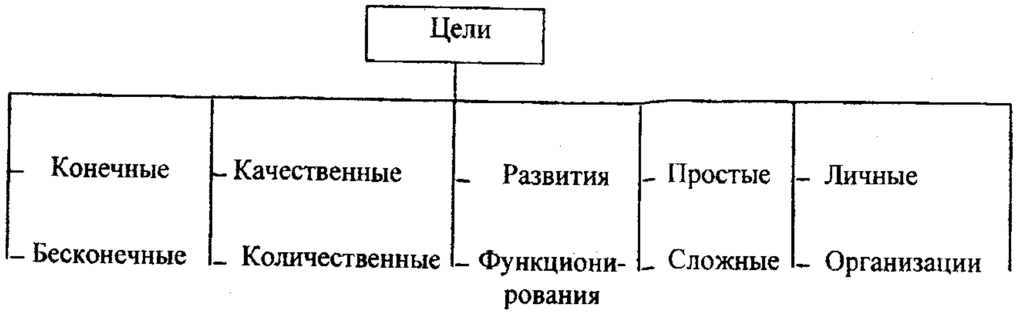


Рис. 1.3. Классификация целей

Конечные цели характеризуют вполне определенный результат, который может быть получен в заданном времени и пространстве. В этом случае цель можно задать в виде желаемых значений (или области желаемых значений) параметров состояния системы. Таким образом, конечная цель может быть представлена как некоторая точка (или область) в пространстве состояний.

Бесконечные цели определяют, как правило, общее направление деятельности.

Бесконечная цель может задаваться как вектор в пространстве состояний системы, например, в виде функций максимизации или минимизации параметров состояния.

Выбор того или иного класса целей зависит от характера решаемой проблемы. Очевидно, что при определении целей необходимо исходить из общественных интересов системы. При этом формулировка целей может выражаться как в качественной, так и в количественной форме, должна быть четкой и компактной, носить повелительный характер.

По отношению к состоянию целей система может находиться в двух режимах: функционирования и развития. В первом случае считается, что система полностью удовлетворяет потребности внешней среды и процесс перехода ее и ее отдельных элементов из состояния в состояние происходит при постоянстве заданных целей. Во втором случае считается, что система в некоторый момент времени перестает удовлетворять потребностям внешней среды, и требуется корректировка прежних целевых установок.

Учитывая, что практически все системы относятся к классу многопродуктовых (многоцелевых) систем, следует рассматривать простые (частные) цели системы и сложные (комплексные) цели. Так, например, для достижения успеха в бизнесе можно ограничиться заданием целей в основных областях деятельности (производство, финансы, коллектив, экология):

• максимизация объема выпуска продукции;
• минимизация затрат ресурсов;
• максимизация прибыли;
• максимизация эффективности инноваций;
• минимизация финансовых затрат;
• минимизация социальной напряженности;
• минимизация загрязнения окружающей среды.

Современная концепция управления по целям является одним из эффективных средств организации корпоративного управления. Она основана на том, что каждый член организации представляет себе цели организации и стремится к их достижению. При этом для такого управления характерны следующие особенности:

1) деятельность сотрудников должна оцениваться по ее результатам (достижениям), а не по количеству отработанного времени;

2) сотрудники должны знать цели организации и стремиться к их достижению;

3) сотрудники должны иметь право отстаивать свои собственные цели.

Установление личных целей придает человеку осмысленное поведение и высокую мотивацию. Римский философ Сенека однажды высказался: “Когда не знаешь, какая гавань тебе нужна, любой ветер будет попутным”. Многочисленные социологические исследования в этом направлении показывают, что человек всегда стремится достичь разумного компромисса между личными и профессиональными интересами. Личные интересы, как правило, определяются человеком в виде определенного стандарта удовлетворения своих потребностей. Одним из возможных вариантов задания таких стандартов для определения личных целей является следующий, включающий семь направлений целеполагания:

• карьера;
• душевное состояние;
• вера (религия), идеалы;
• финансы;
• физическое состояние;
• друзья;
• семья.

Содержательная формулировка целей является необходимым, но не достаточным условием осуществления целеполагания. Для конкретизации целей необходимо задать критерии достижения целей и ограничения, при которых осуществляется поиск возможных вариантов решения.

Критерий - мера близости к цели. В этом смысле критерий — это модель цели.

Критерий достижения целей отождествляется с показателем эффективности системы и может выражаться как в качественной, так и в количественной форме. От критериев требуется как можно большее сходство с целями для того, чтобы оптимизация решения в системе выбранных критериев соответствовала максимальному приближению к цели.

Наряду с выбранными критериями большое влияние на выбор того или иного варианта решения оказывает система выделенных в задаче ограничений.

Ограничения - это условия, отражающие влияние внешних и внутренних факторов, которые нужно учитывать в задаче принятия решений. Требования системности при рассмотрении вопроса требуют учета всех возможных ограничений: организационных, экономических, правовых, технических, психологических и т.д. При этом качественные ограничения формулируются, как правило, в терминах "не разрешается", "не допускается", а количественные - "не более", "не менее", "в интервале от-до". Ограничения, как правило, дополняют (конкретизируют) сформулированные ранее цели и в ряде случаев могут сделать цели нереализуемыми. В этом случае необходимо через проведение ряда итерационных процедур снять часть ограничений.

При формировании целей и ограничений используется так называемое пространство целеполагания. Пространство целеполагания - совокупность систем, предъявляющих требования к исследуемой системе. Для организационных систем это пространство включает такие системы окружающей среды (см. рис. 1.2):

• вышестоящие, организации, местные и федеральные органы управления;

• подведомственные организации;

• потребители и поставщики.

В пространство целеполагания также включается сама система, предъявляющая собственные требования.

Нужно отметить, что установить правильную систему целей намного важнее, чем найти наилучший вариант решения. Не самый лучший вариант приведет все-таки к целевому результату. Выбор же неправильной цели приводит не столько к решению самой проблемы, сколько к появлению новых проблем.

Примеры целей для ликвидации проблемных ситуаций по y_4 и x_3 :

1) повышение качества подготовки специалистов, проходящих обучение на контрактной основе;

2) обеспечение среднего балла по диплому для специалистов, обучаемых на контрактной основе, не ниже 4,5;

3) увеличение объема привлекаемых внебюджетных средств от контрактного обучения до N рублей;

4) обеспечение 100%-го выполнения договорных обязательств с предприятиями, получающими молодых специалистов.

Наличие проблемной ситуации и сформулированной цели системы как прообраза ее будущего состояния требует реализации определенных действий по достижению заданных целевых результатов.

В этом случае определим функцию системы как способ (совокупность действий) достижения системой поставленных целей [3,7].

В действующих системах множество функций задается, как правило, в уставе организации, множестве должностных инструкций. В этом случае задачей системного анализа является выявление соответствия между целями организации и множеством ее нормативных функций.

Для определения множества функций вновь проектируемых систем либо определения множества вариантов решения каких-либо проблемных ситуаций с успехом могут быть использованы некоторые формальные приемы системного анализа: метод декомпозиции; использование стандартных моделей сложных систем; IDEFO-методология; метод формирования иерархических содержательных моделей и др. Перечисленные методы будут рассмотрены ниже.

Например, при реализации цели "Обеспечение качества подготовки специалистов, соответствующего требованиям конкретного предприятия" можно сформулировать следующие функции (виды деятельности):

1) заключение договоров по целевой подготовке специалистов;

2) перевод студентов на индивидуальное обучение;

3) подготовка цикла специализированных занятий, соответствующих требованиям предприятия;

4) развитие материальной базы учебного процесса и т.д. В ряде случаев для генерации множества функций рекомендуется привлекать внешних экспертов, специалистов, не обремененных прошлым системы, не знающих ее внутренних ограничений и противоречий.

1.5. Понятие структуры системы

Рассмотренные выше этапы создания системы для конкретной проблемной ситуации (формирование целей и способов их достижения, т.е. функций) объективно требуют следующего логического шага - выявления таких элементов и отношений между ними (внутреннего устройства системы), которые реализуют целенаправленное функционирование системы.

Элементы любого содержания, необходимые для реализации функций, назовем частями или компонентами системы. Совокупность частей (компонентов) системы образует ее элементный (компонентный) состав. При этом те элементы системы, которые рассматриваются как неделимые, будут называться элементарными. Часть системы, состоящая более чем из одного элемента, образует подсистему. Вместе с тем каждую из подсистем, реализующих конкретную функцию, можно, в свою очередь, рассматривать как новую систему и т.д.

Упорядоченное множество отношений между частями, существенное по отношению к цели, необходимое для реализации функции, образует структуру системы. Понятие структуры происходит от латинского слова structure, означающего строение, расположение, порядок, а наиболее точное определение структуры выглядит следующим образом: “Под структурой понимается совокупность элементов системы и взаимосвязей между ними” [2]. При этом понятие “связи” может характеризовать одновременно и строение (статику), и функционирование (динамику) системы.

Отношения между элементами системы могут быть самыми разнообразными. Можно выделить следующие типы отношений:

- классификационные (“род - вид”);
- отношения типа “часть- целое”;
- пространственные отношения;
- временные отношения;
- материальные (вещественные, энергетические, информационные) связи;
- определяющие отношения (определяющие свойства, в том числе через
  математические, логические соотношения между свойствами элементов);
- эмпирические отношения.

К последнему типу относятся весьма разнообразные отношения, присутствующие в реальных системах, например: “руководить”, “владеть”, “нравиться” и т.д.

При проведении анализа используются два определяющих понятия структуры:

материальная структура и формальная структура [3].

В общем случае под формальной структурой понимается совокупность функциональных элементов и их отношений, необходимых и достаточных для достижения системой поставленных целей. Из определения следует, что формальная структура описывает нечто общее, присущее системам одного типа.

В свою очередь, материальная структура является носителем конкретных типов и параметров элементов системы и их взаимосвязей.

Приведенные рассуждения позволяют сделать два вывода относительно сущности формальных структур: фиксированной цели соответствует, как правило, одна и только одна формальная структура; одной формальной структуре может соответствовать множество материальных структур.

При проведении системного анализа на этапе изучения формальных и материальных структур системы аналитики решают обычно следующие задачи:

• определение соответствия существующей структуры новым целям и функциям

системы;

• определение необходимости реорганизации существующей структуры либо

проектирования принципиально новой структуры;

• определение вида распределения (перераспределения) новых и старых функций системы по элементам структуры.

Рассмотрим типовые структуры, используемые при построении административных, производственно-технологических и вычислительных систем (рис. 1.5) [2].

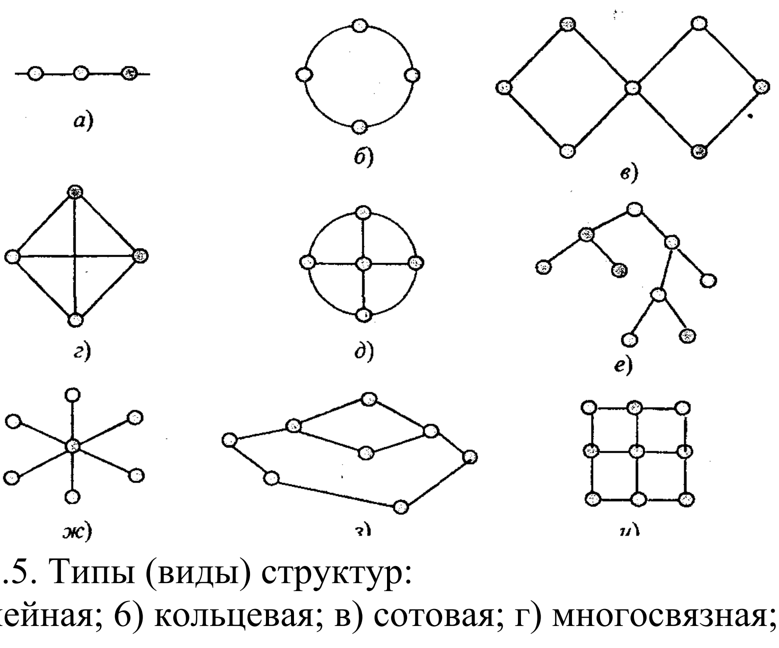


Рис. 1.5. Типы (виды) структур:

а) линейная; 6) кольцевая; в) сотовая; г) многосвязная; д) колесо;

е) иерархическая; ж) звездная; з) графовая; и) матричная

Линейная структура (рис. 1.5, а) характеризуется тем, что каждая вершина связана с двумя соседними. При выходе из строя хотя бы одного элемента (связи) структура разрушается.

Кольцевая структура (рис. 1.5, б) отличается замкнутостью, любые два элемента обладают двумя направлениями связи. Это повышает скорость общения, делает структуру более живучей.

Сотовая структура (рис. 1.5, в) характеризуется наличием резервных связей, что повышает надежность (живучесть) функционирования структуры, но приводит к повышению ее стоимости.

Многосвязная структура (рис. 1.5, г) имеет структуру полного графа.

Надежность функционирования максимальная, эффективность функционирования высокая за счет наличия кратчайших путей, стоимость - максимальная.

Частным случаем многосвязной структуры является структура "колесо" (рис.1.5,д). Иерархическая структура (рис. 1.5, е) получила наиболее широкое распространение при проектировании систем управления, чем выше уровень иерархии, тем меньшим числом связей обладают ее элементы. Все элементы, кроме верхнего и нижнего уровней, обладают как командными, так и подчиненными функциями управления. Каждый уровень такой системы характеризуется уровнем иерархии, который определяется как отношение числа исходящих связей к числу входящих.

Звездная структура (рис. 1.5, ж) имеет центральный узел, который исполняет роль центра, все остальные элементы системы являются подчиненными.

Графовая структура (рис. 1.5,з) является инвариантной по отношению у иерархической и используется обычно при описании производственно-технологических систем.

Матричная структура (рис. 1.5, и) используется, в частности, для описания матричной схемы управления оргсистемой.

В целом структура является материальным носителем целевой деятельности по ликвидации проблемной ситуации и от ее эффективности во многом зависит конечный результат этой деятельности. При выборе варианта структуры целесообразно использовать некоторые обобщенные показатели эффективности.

В литературе рассматриваются два класса таких показателей:

• показатели, описывающие статические параметры системы;

• показатели, описывающие ее динамические свойства. К первой группе показателей относятся число уровней иерархии, характер взаимосвязей между элементами, степень централизации (децентрализации) управления. Вторая группа показателей описывает эффективность функционирования системы: оперативность, централизацию, периферий-ность, живучесть. Кратко остановимся на характеристиках вышеперечисленных показателей [2].

Оперативность оценивается временем реакции системы на воздействие внешней среды либо скоростью ее изменения и зависит, в основном, оі общей схемы соединения элементов и их расположения.

Централизация определяет возможности выполнения одним из элементов системы руководящих функций. Численно централизация определяется средним числом связей центрального (руководящего) элемента со всем” остальными.

Периферийность характеризует пространственные свойства структур Численно периферийность определяется показателем центра тяжести структуры, при этом в качестве единичной оценки меры связности выступав "относительный вес" элемента структуры.

1.6. Внешние условия системы

Системное проектирование организации позволяет создать идеально нормативную систему, которая может служить эталоном реальных систем функционирующих в условиях ограничений, накладываемых внешней средой. При несоответствии существующей структуры системы нормативному набору функций, приводящему к достижению целей и невозможности ее ре организации за счет внутренних ресурсов системы, должны рассматривать; варианты целенаправленного воздействия на систему элементов внешней среды.

При исследовании системы в окружающую среду включаются лишь следующие элементы [2, 7]:

а) изменение свойств (параметров) которых влияет на систему;

б) свойства (параметры) которых изменяются вследствие изменения состояния системы.

В большинстве случаев в качестве элементов внешней среды, активно воздействующих на систему, рассматриваются:

• внешние ресурсы (финансовые, материальные, трудовые);

• ограничения (законодательные акты, нормативно-правовые документы и т.д.), задаваемые, как правило, в виде некоторых информационных ресурсов;

• потребители конечного продукта.

Иногда, после определения множества необходимых ресурсов, становится очевидной нереальность заданных целевых результатов и требуется корректировка исходных целей либо изменение множества функций по реализации целей.

В случае, если внешних ресурсов достаточно, то можно говорить о ликвидации анализируемой проблемной ситуации. В противном случае речь должна пойти о переосмыслении проблемы и формулировании новой системы целей.

Использование приведенных понятий и определений системной деятельности позволяет выявить наличие либо отсутствие проблемной ситуации, выявить основные направления (целя) ее ликвидации, определить, какие функции системы при этом надо реализовать и какой структурой, выяснить имеются ли для этой реализации соответствующие ресурсы.

Легко заметить, что цепочка "проблемная ситуация - цели - функция -структура - внешние ресурсы" образует логически обоснованную (на содержательном уровне) последовательность системной деятельности (рис. 1.6).

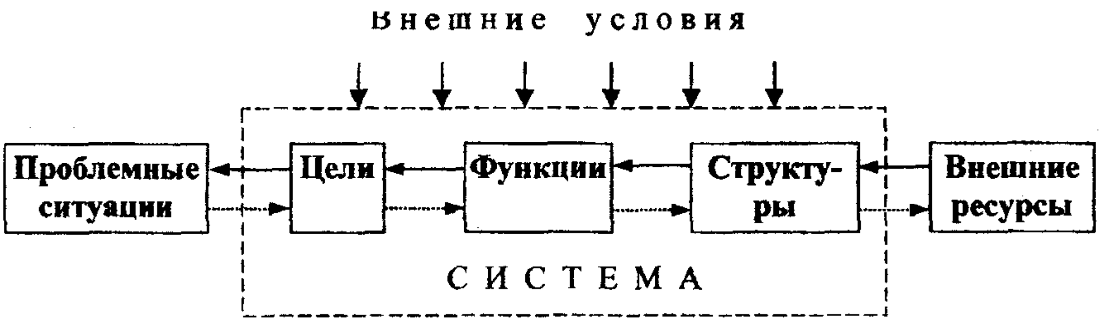


Рис. 1.6. Модель этапов системной деятельности

На рисунке сплошной линией показана последовательность функционирования системы, а пунктирной - последовательность анализа или проектирования системы.

Таким образом, исходя из вышеизложенного, можно дать еще одно определение системы [2]:

Система - целенаправленно функционирующая структура, способная к разрешению проблемной ситуации при определенных внешних условиях.

Тема 2. Основные понятия исследования операций и системного анализа

Для изучения систем и использования этих знаний для создания и управления системами необходимо системное мышление, заключающееся в сочетании аналитического и синтетического образов мышления [3]. Суть анализа состоит в разделении целого на части, в представлении сложного в виде совокупности более простых компонент. Но чтобы познать целое, сложное, необходим и обратный процесс - синтез. Необходимость сочетания этих видов познания вытекает из свойства эмерджентности систем: целостность системы нарушается при анализе, при расчленении системы утрачиваются не только существенные свойства самой системы, но и свойства ее частей, оказавшихся отделенными от нее. Результатом анализа является лишь вскрытие состава компонент, знание о том, как система работает, но не понимание того, почему и зачем она это делает. Синтетическое мышление объясняет поведение системы, почему система работает так. При этом система должна рассматриваться как часть большего целого.

Анализ и синтез дополняют друг друга. Так, при синтезе организационной структуры необходимо сначала провести анализ деятельности создаваемой организации, выделить отдельные процессы (функции), сопоставить им организационные единицы, а затем соединить их в отдельное целое, т.е. осуществить синтез. При выборе способа функционирования организации зачастую имеет место обратное: сначала используется синтетический подход - рассматривается деятельность организации, как целого; выбирается общая цель и способ функционирования, а затем осуществляется дезагрегация выбранного способа на отдельные функции [8].

Познание систем и использование этих знаний для создания систем и управления ими осуществляется через моделирование.

Множество окружающих нас предметов и явлений обладают различными свойствами. Процесс познания этих свойств состоит в том, что мы создаем для себя некоторое представление об изучаемом объекте, помогающее лучше понять его внутреннее состояние, законы функционирования, основные характеристики. Такое представление, выраженное в той либо иной форме, называется моделью. Как отмечается в [3], под моделью следует понимать любую другую систему, обладающую той же формальной структурой, при условии, что между системными характеристиками модели и оригиналом существует соответствие, и она более проста и доступна для изучения и исследования основных свойств объекта-оригинала.

Любая модель есть объект-заменитель объекта-оригинала, обеспечивающий изучение некоторых свойств оригинала.

Замещение одного объекта другим с целью получения информации о важнейших свойствах объекта-оригинала с помощью объекта-модели можно назвать моделированием, т.е. моделирование - это представление объекта моделью для получения информации об объекте путем проведения эксперимента с его моделью.

С точки зрения философии моделирование следует рассматривать как эффективное средство познания природы. При этом процесс моделирования предполагает наличие объекта исследования, исследователя-экспериментатора и модели.

В автоматизированных системах обработки информации и управления в качестве объекта моделирования могут выступать производственно-технологические процессы получения конечных продуктов; процессы движения документов, информационных потоков при реализации учрежденческой деятельности организации; процессы функционирования комплекса технических средств; процессы организации и функционирования информационного обеспечения АСУ; процессы функционирования программного обеспечения АСУ [2].

Преимущества моделирования состоят в том, что появляется возможность сравнительно простыми средствами изучать свойства системы, изменять ее параметры, вводить целевые и ресурсные характеристики внешней среды.

Как правило, моделирование используется на следующих этапах [2]:

1) исследования системы до того, как она спроектирована, с целью определения ее основных характеристик и правил взаимодействия элементов между собой и с внешней средой;

2) проектирования системы для анализа и синтеза различных видов структур и выбора наилучшего варианта реализации с учетом сформулированных критериев оптимальности и ограничений;

3) эксплуатации системы для получения оптимальных режимов функционирования и прогнозируемых оценок ее развития.

При этом одну и ту же систему можно описать различными типами моделей.

Например, транспортную сеть некоторого района можно промоделировать электрической схемой, гидравлической системой, математической моделью с использованием аппарата теории графов.

Для исследования систем широко используются следующие типы моделей: физические (геометрического подобия, электрические, механические и др.) и символические (содержательные и математические).

Под математической моделью понимается совокупность математических выражений, описывающих поведение (структуру) системы и те условия (возмущения, ограничения), в которых она работает. В свою очередь, математические модели в зависимости от используемого математического аппарата подразделяются, например:

- на статические и динамические;
- детерминированные и вероятностные;
- дискретные и непрерывные;
- аналитические и численные.

Статические модели описывают объект в какой-либо момент времени, а динамические отражают поведение объекта во времени. Детерминированные модели описывают процессы, в которых отсутствуют (не учитываются) случайные факторы, а вероятностные модели отражают случайные процессы - события. Дискретные модели характеризуют процессы, описываемые дискретными переменными, непрерывные - непрерывными. Аналитические модели описывают процесс в виде некоторых функциональных отношений или (и) логических условий. Численные модели отражают элементарные этапы вычислений и последовательность их проведения [2].

Если для описания системы используется естественный язык (язык общения между людьми), то такое описание называется содержательной моделью.

Примерами содержательных моделей являются словесные постановки задач, программы и планы развития систем, деревья целей организации и др.

Содержательные модели имеют самостоятельную ценность при решении задач исследования и управления системами, а также используются в качестве предварительного шага при разработке математических моделей. Поэтому качество математической модели зависит от качества соответствующей математической модели [9].

В качестве языковых средств описания содержательных моделей используются естественный язык (язык общения между людьми), диаграммы, таблицы, блок-схемы, графы.

Сложные системы потому и называются сложными, что они плохо поддаются формализации. Для них целесообразно использовать содержательные модели.

Содержательные модели незаменимы на ранних этапах проектирования сложных систем, когда формируется концепция системы. Методы системного анализа, используя декомпозиционный подход, позволяют выявить упорядоченное множество подсистем, элементов, свойств системы и их связей.

Интегрированная содержательная модель системы позволяет представить общую картину, составить обобщенное описание, в котором подчеркнуты основные сущности, а детали скрыты. Главное в такой модели -краткость и понятность.

Такая модель может служить основой для построения более детальных моделей, описывающих отдельные аспекты, подсистемы. Таким образом, содержательная модель может служить каркасом для построения других моделей, в том числе и математических. Она служит также для структуризации информации об объекте.

Классификация моделей и методов системного анализа

Все понятия, методы, модели и технологии можно объединить в несколько укрупненных блоков. На рис. 2.1. приведена схема, представленная в виде многоуровневой структуры. Блоки расположены так, что чем выше уровень, тем более прикладной, узко направленный характер носят его составляющие методы и модели. Связи между уровнями имеют смысл “использует”, причем имеется виду использование не только знаний соседнего уровня, но и всех нижерасположенных уровней.

Базисный уровень составляют основополагающие понятия системного анализа: система, подсистема, элемент, окружающая среда, проблема, цель, функция, структура, внешние условия системы. К базовым понятиям относятся и основные свойства систем - свойства иерархичности, эмерджентности, динамичности, целенаправленности.

Следующий уровень составляют базовые модели системного анализа.

Практически любая методика системного анализа в качестве основы использует одну из базовых моделей или их некоторую комбинацию. Высокий уровень абстрактности этих моделей позволяет использовать их для любых типов систем, причем для описания различных аспектов систем, таких как цели, задачи, функции, структуры. Конкретные методики, используя базовые модели, наполняют их более конкретным содержанием, накладывая определенные ограничения на синтаксис и семантику моделей.

К базовым моделям относятся также модель черного ящика, модель состава системы и модель структуры (см. рис. 2.2). Эти виды моделей широко используются для формирования моделей организаций. Например, модель черного ящика используется для описания взаимодействия организации с окружающей средой. Модель состава используется для отображения состава функций организации, целей, задач, персонала и т.д. Модель структуры используется для отображения структуры подчиненности в организации, коммуникационных взаимодействий и т.д.

Указанные виды моделей систем используются чаще всего в статическом варианте, однако они могут использоваться и в динамическом варианте.

Например, динамическая модель черного ящика может быть использована для отображения динамики изменения некоторых основных параметров, характеризующих состояние организации. Динамический вариант модели структуры используется, например, при формировании сетевого графика выполнения программы развития организации.

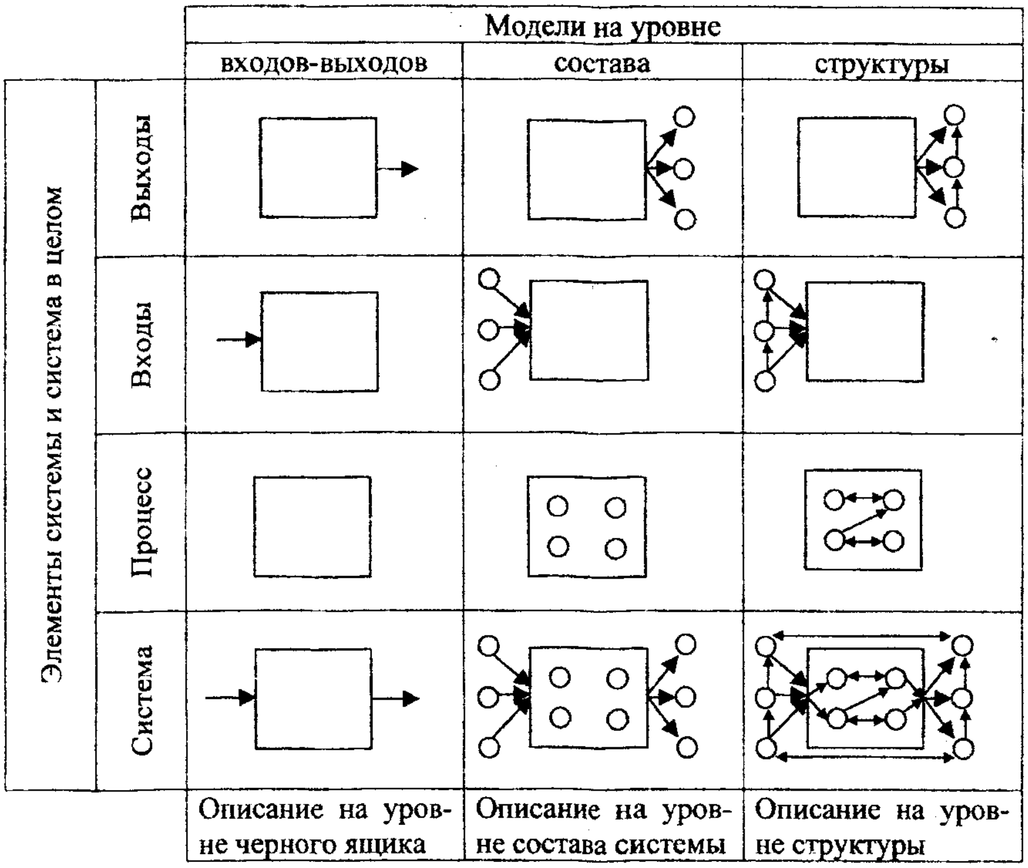


Рис. 2.2. Основные виды моделей систем

Для построения этих моделей применяется метод декомпозиции. В свою очередь, для проведения декомпозиции используются так называемые стандартные модели, описывающие инвариантные характеристики сложных систем.

В следующий уровень компонент системного анализа включены модели и методы принятия решений. В самом общем виде последовательность принятия решений включает этапы выявления проблемной ситуации, целевыявления, формирования критериев выбора решений, выработки (генерации) решений, согласования и выбора решений, реализации решений и оценки результатов. Данная последовательность применима для создания самых различных сложных систем.

К этому уровню будем относить и методы принятия решений. Как правило, эти методы не привязаны к объекту проектирования, в них делается акцент на способы организации группового или индивидуального поиска решений, К методам поиска решений относятся, в частности, методы активизации мышления (мозговой штурм, синектика), методы генерации вариантов (морфологический анализ, метод Дельфи), а также методы выбора (например метод экспертных оценок), модели выбора оптимальных альтернатив, модели исследования операций.

Перейдем к рассмотрению следующего уровня компонент системного анализа.

Его составляют прикладные методологии системного анализа, центральным моментом которых является модель сложной системы. Примерами таких методологий могут служить модель дерева целей, модель задач управления, метод построения иерархических содержательных моделей сложных систем, метод структурно-функционального проектирования Казарновского и т.д.

Различные методологии, используя те или иные сочетания базовых моделей системного анализа применительно к тем или иным аспектам сложной системы, предлагают более конкретные способы формирования моделей. Например, методика дерева целей, предназначенная для этапа целевыявления, использует как основу декомпозиционную модель состава применительно к целям сложной системы. При этом предлагаются конкретные способы формирования модели, в частности с использованием стандартных оснований декомпозиции, даются определенные рекомендации по проведению декомпозиции.

Верхний уровень компонент системного анализа составляют технологии проектирования, использующие системный анализ. К ним относятся технологии, ориентированные на конкретный вид систем, например: CASE-технологии проектирования программных информационных систем, технологии автоматизированного проектирования технических систем различного назначения, технологии реинжиниринга бизнес-процессов. Отличительной особенностью технологий является наличие регламентирующей процедуры проектирования, предусматривающей выполнение определенных этапов, для каждого из которых определены стандартизированные методики и стандартный набор документации. Как правило, на некоторых этапах предусматривается формирование различного рода моделей.

Практически любая технология явно или неявно использует системный подход.

Так, в основе регламентирующих процедур проектирования, как правило, лежит системная последовательность принятия решений. Методики проектирования зачастую базируются на различных методологиях системного анализа и общих процедурах принятия решений.

Многие технологии подкреплены автоматизированными средствами поддержки.

Модель “черного ящика”

Первым наиболее простым и абстрактным уровнем описания системы является модель "черного ящика". В этом случае предполагается, что выделенная система связана со средой через совокупность входов и выходов. Выходы модели описывают результаты деятельности системы, а входы - ресурсы и ограничения. При этом предполагается, что мы ничего не знаем и не хотим знать о внутреннем содержании системы. Модель в этом случае отражает два важных и существенных ее свойства: целостность и обособленность от среды .

Такая модель, несмотря на ее внешнюю простоту и отсутствие сведений о внутренней структуре, оказывается часто полезной и достаточной для практического использования.

Следует отметить, что существует множество систем, внутреннее устройство которых невозможно либо нецелесообразно описывать, и в этом случае модель "черного ящика" является единственным вариантом их исследования. Например, мы не знаем, как устроен организм человека, в то же время необходимо знать влияние, оказываемое на него лекарственными препаратами и т.д.

Формализация модели "черного ящика" основывается на задании двух множеств входных и выходных переменных, и никакие другие отношения между множествами не фиксируются. Недопустимо полагать, что построение модели "черного ящика" является тривиальной задачей, т.к. ответ на вопрос о содержании множеств не всегда однозначен.

Построение модели основывается на выборе из бесконечного множества связей системы со средой их конечного множества, адекватно отражающего цели исследования. Очевидно, что такие модели не надо сводить к моносистеме (т.е. системе с одним входом и выходом), а для обоснования необходимого и достаточного количества параметров множеств входов и выходов широко использовать методы математической статистики, привлекать опытных экспертов.

Модель “черного ящика” рассмотрим на примере хозяйствующей организации (предприятия). На рис. 2.3 приведена структура окружающей среды производственного предприятия, а также основные связи предприятия с окружающей средой [II].

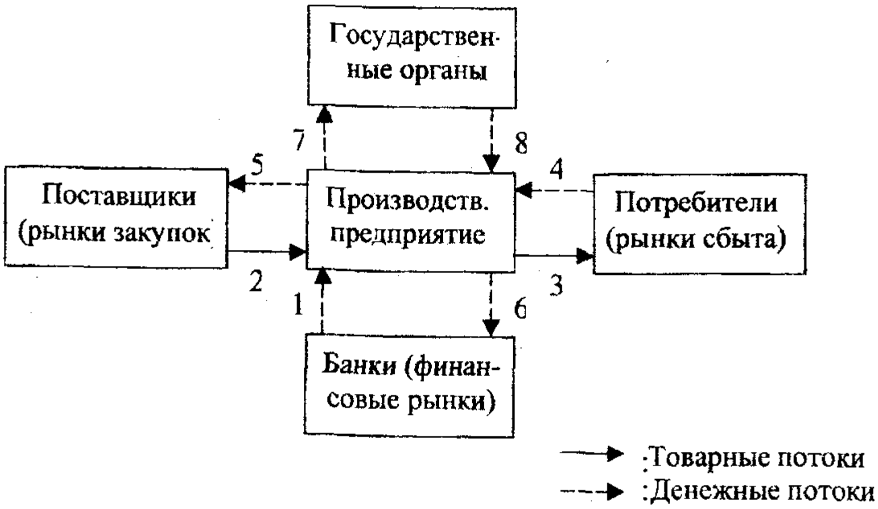


Рис. 2.3. Отношения предприятия с окружающей средой

Дадим некоторые пояснения. Для производственной деятельности необходимо привлечение капитала, будь то в форме акций или заемного капитала (1).

Ликвидные средства позволяют предприятию задействовать производственные факторы (2), т.е. сырье, материалы, оборудование, которые в процессе производства преобразуются в готовые изделия.

Сбыт продукции (3) предприятиям или личным хозяйствам дает предприятию поступления (4), которые необходимы для погашения задолженности на рынке закупок, оплаты труда и т.д. (5). Проценты на заемный капитал и образующиеся излишки выплачиваются инвесторам (6), кроме того, государству выплачиваются налоги и сборы (7). С другой стороны, государство может предоставлять предприятию дотации (8).

Модель структуры системы

Простота и доступность моделей "черного ящика" и состава позволяет решать с их использованием множество практических задач. Вместе с тем для более детального (глубокого) изучения систем необходимо устанавливать а модели состава отношения (связи) между элементами. Описание системы через совокупность необходимых и достаточных для достижения целей отношений между элементами назовем моделью структуры системы [2,3].

Перечень связей между элементами, на первый взгляд, является несколько отвлеченной, абстрактной моделью. В самом деле, как рассматривать связи, если не рассмотрены сами элементы? В данном случае речь опять же должна идти о целевом (проблемном) анализе взаимосвязей между элементами, т.е. выделении из бесконечного числа связей необходимого и достаточного их количества в соответствии с имеющимися целями и дальнейшем их изучении.

Приведенное ранее определение системы, понятия формальной и материальной структур позволяют говорить о структурной схеме (модели) системы, объединяющей модели "черного ящика", состава, структуры. В этой модели описываются все элементы системы, все связи между элементами внутри системы и связи определенных элементов с окружающей средой (входы и выходы системы) [2,3].

Так, например, в качестве структурной модели социально-экономической деятельности вообще можно рассматривать следующую схему (рис. 2.6).

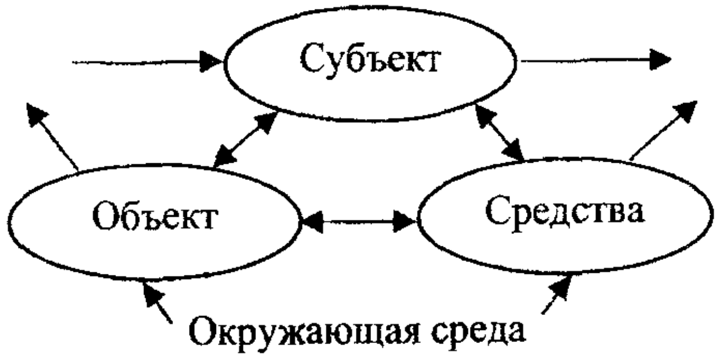


Рис. 2.6. Общая структурная модель деятельности

Применяя Э1-у модель к анализу учебной деятельности, определим, что объектом деятельности является обучаемый, субъектом деятельности - преподаватель, средствами деятельности - вычислительная техника, учебно-методические материалы, процессом деятельности - используемые технологии обучения.

Все структурные схемы имеют нечто общее, что побудило рассматривать их как особый объект математических исследований. Наиболее общей математической моделью описания структурной схемы являются различные графовые модели.

Графы могут изображать любые структуры. При этом некоторые типы структур, имеющие важные для практики особенности, выделены в специальные классы.

Метод декомпозиции сложных систем на основе стандартных моделей

Методы декомпозиции позволяют осуществить последовательное расчленение системы на подсистемы, которые, в свою очередь, могут быть разбиты на составляющие их части. Если полученные в результате декомпозиции подсистемы неэлементарны, т.е. не доступны на данном уровне описания для использования, то необходимо осуществить их дальнейшее разбиение.

Разбиение системы на подсистемы в общем случае может быть выполнено неоднозначным образом и определяется составом используемых признаков декомпозиции (оснований декомпозиции) и порядком их применения.

В качестве оснований декомпозиции сложных систем предлагается использовать так называемые стандартные модели, которые описывают некоторые инвариантные характеристики некоторого класса систем [3,9]. Рассмотрим стандартные модели, которые могут использоваться при построении содержательной модели системы, относящейся к классу организационно-технологических объектов. К этому классу относятся предприятия, организации, учреждения, автоматизированные системы управления и т.д.

В самом общем виде модель системы может быть представлена в виде совокупности “система - окружающая среда” и связей между ними (см. рис. 2.9).

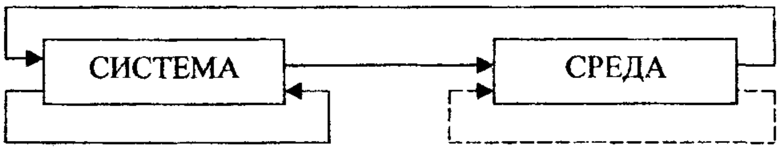


Рис. 2.9. Модель системы на уровне “входов-выходов”

Модель включает 4 агрегированные связи, характеризующие направленные вещественные, энергетические и информационные потоки. При моделировании реальных систем в большинстве случаев связь, отмеченная на рис. 2.9 пунктирной линией, является несущественной и поэтому далее не рассматривается.

Для многих задач исследования и управления целесообразно представление системы в виде совокупности “система управления - объект управления” (см. рис. 2.10).

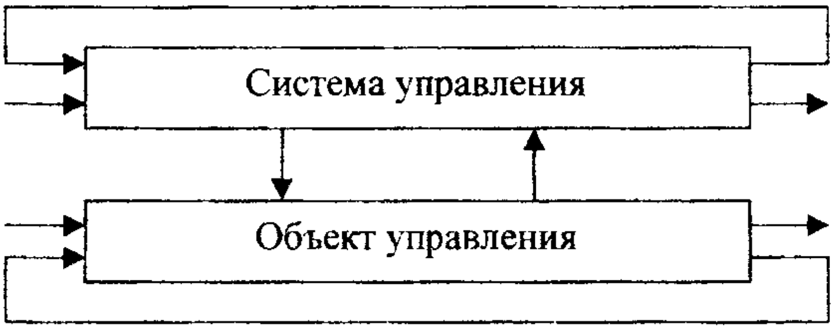


Рис. 2.10. Модель системы с выделением управляемой и управляющей частей

Рассмотрим стандартные модели для объекта управления и системы управления.

Стандартные модели для декомпозиции объекта управления (ОУ):

1. Выделение в ОУ подсистем социальной деятельности: "производство",

"население" (коллектив), "природа" (см. рис. 2.11).

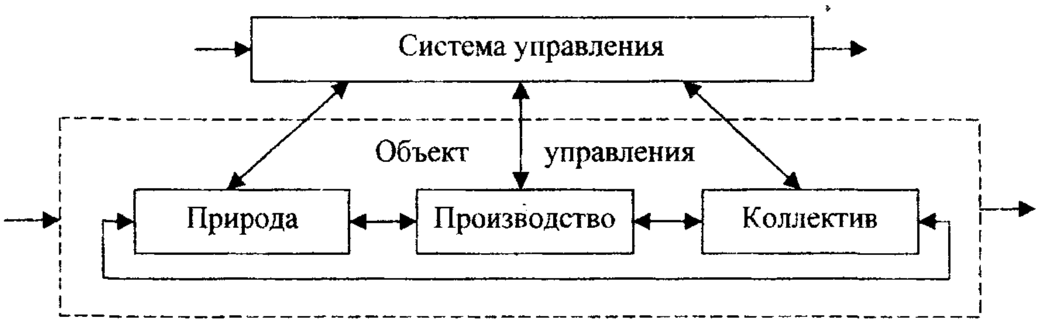


Рис. 2.11. Модель основных подсистем социальной деятельности

Подсистема "Производство" осуществляет процесс создания конечного продукта. Подсистема "Коллектив" включает исполнителей (трудовые ресурсы), рассматриваемых с социальных позиций. Подсистема "Природа" включает в себя природоохранные (экологические) процессы. В процессе функционирования и развития эти подсистемы обмениваются вещественными, энергетическими и информационными потоками как между собой, так и с подсистемами окружающей среды.

Декомпозиция на указанные части может быть целесообразна либо для ОУ, рассматриваемого в целом, либо для подсистем производства.

Подсистему производства образуют технологический процесс и вспомогательное производство, обеспечивающее основной процесс оборудованием, транспортом и т.д., а также проводящее ремонтное, строительное и другое производственное обслуживание технологического процесса.

Выделение подсистем, соответствующих “жизненному циклу” конечного продукта (см. рис. 2.12) [2].

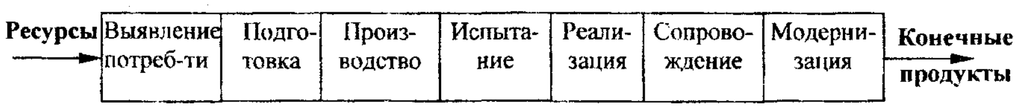


Рис. 2.12. Модель жизненного цикла конечного продукта

Декомпозиция ОУ (подсистемы ОУ) по составу подсистем - производителей отдельных конечных продуктов. Здесь предполагается, что каждому продукту соответствует определенная подсистема - производитель этого продукта.

Выделение стадий производства конечного продукта, соответствующих технологически законченным процессам. В работе [9] выделены типовые элементы, из которых конструируются реальные технологические сети (см. рис.2.!3):

а) последовательная структура;

б) расходящаяся структура;

в) сходящаяся-расходящаяся структура;

г) структура с реверсом (рециклом).

Стадии производства и их соединение образуют технологическую сеть.

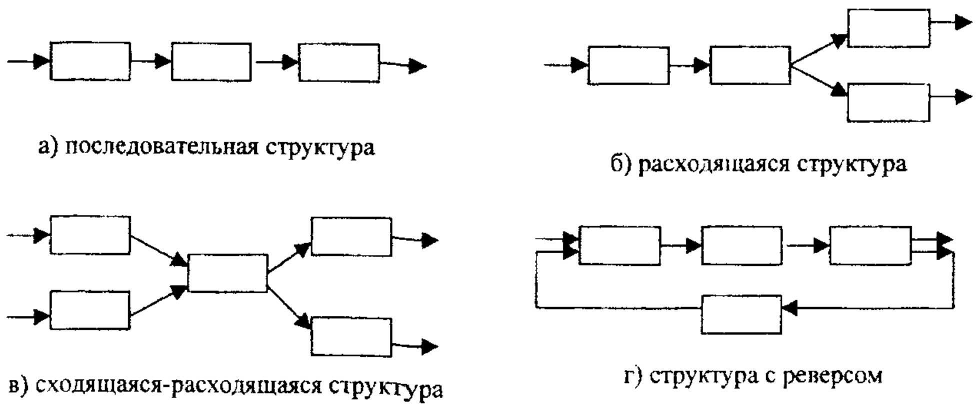


Рис. 2.13. Типовые технологические сети

Выделение структурных элементов подсистем и их взаимосвязей (рис. 2.14).

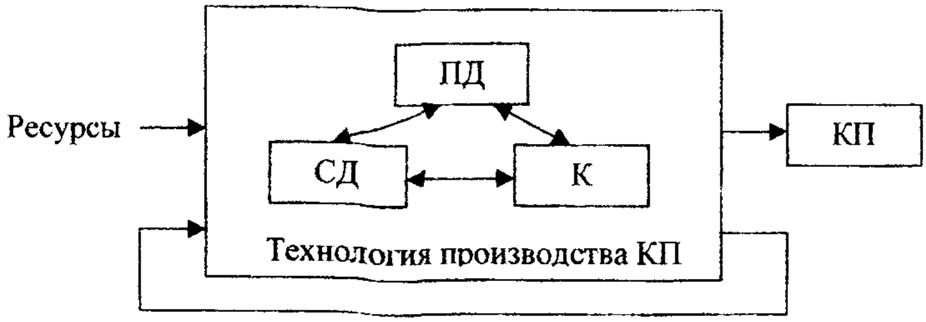


Рис. 2.14. Модель структуры системы (подсистемы)

В объекте управления в целом и в отдельной подсистеме протекает процесс производства некоторых конечных продуктов (КП) из предметов деятельности (ПД). Производство КП осуществляется работниками - исполнителями или кадрами (К) и средствами деятельности (СД) - инструментами, оборудованием.

Множество таких элементов для конкретной системы предполагается конечным.

Взаимодействие структурных элементов образует технологию производства.

Предметы деятельности, средства деятельности и кадры в виде ресурсов поступают из окружающей среды или от других подсистем системы. Здесь предполагается, что в процессе функционирования и развития используемые в системе средства деятельности и исполнителей требуется периодически заменять и усовершенствовать.

На рис. 2.15 - 2.18 приведены модели структур для различных подсистем социальной деятельности: “производство”, “коллектив”, “природа”, “управление”.

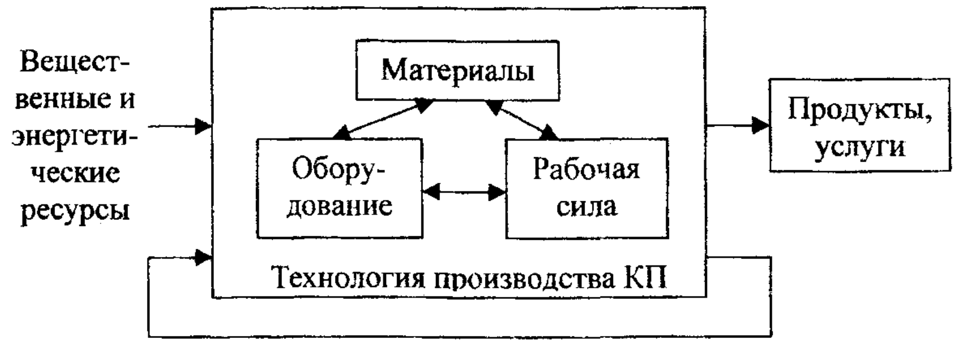


Рис. 2.15, Модель структуры подсистемы “производство”

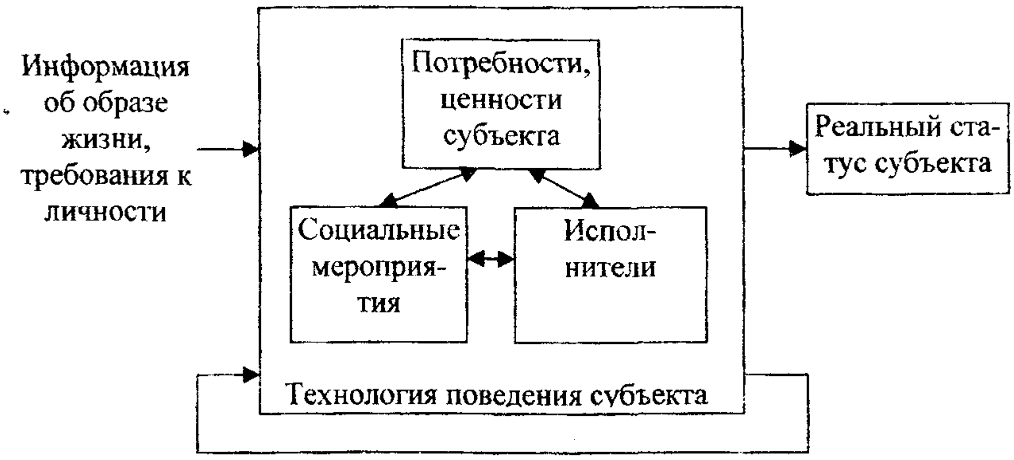


Рис. 2.16. Модель структуры подсистемы “коллектив”

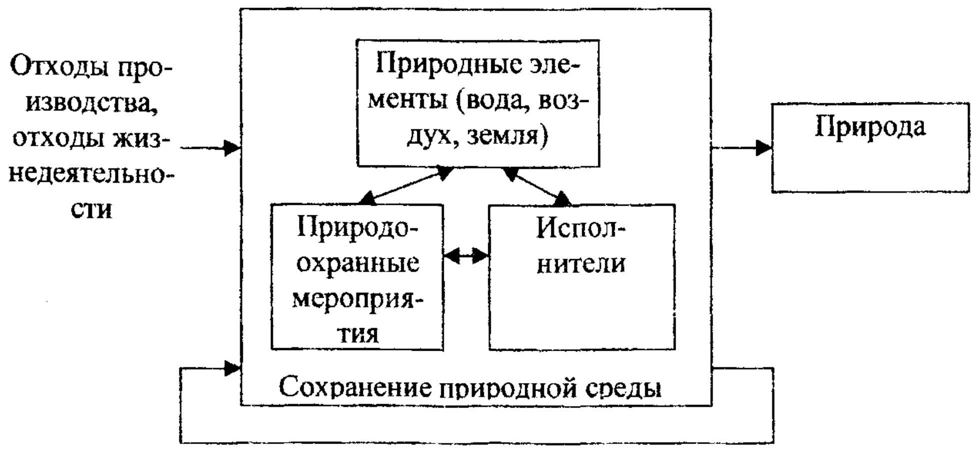


Рис. 2.17. Модель структуры подсистемы “природа”

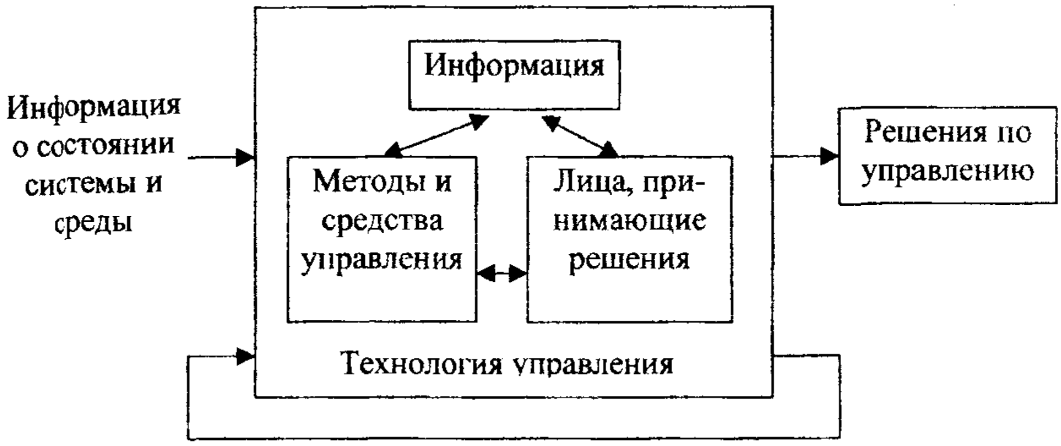


Рис. 2.18. Модель структуры подсистемы “управление”

Каждый из структурных элементов (конечных продуктов, средств деятельности, предметов деятельности, исполнителей) может быть описан своей совокупностью параметров. Кроме того, технологический процесс, протекающий в системе (подсистеме) характеризуется параметрами, описывающими процесс в целом. Такие параметры будем называть параметрами процесса.

Последовательность применения стандартных моделей может быть различной, хотя и не совсем произвольной (нельзя, например, сначала выделить подсистемы, соответствующие различным технологическим стадиям, а потом выделять подсистемы производства, транспортировки и сбыта продукции). При этом декомпозиция оказывается особенно плодотворной в тех случаях, когда в качестве подсистем оказываются более или менее самостоятельно функционирующие части системы. Для таких подсистем характерны относительно слабые связи между подсистемами и сильные связи внутри подсистем.

Перейдем к рассмотрению стандартных моделей системы управления организационно-технологическим объектом.

Тема 3. Принятие решений в условиях риска. Принятие решений в условиях неопределенности.

В зависимости от условий внешней среды и степени информативности лица принимающего решение (ЛПР) производится следующая классификация задач принятия решений:

а) в условиях риска;

б) в условиях неопределённости;

в) в условиях конфликта или противодействия (активного противника).

§1. Критерий ожидаемого значения.

Использование критерия ожидаемого значения обусловлено стремлением максимизировать ожидаемую прибыль (или минимизировать ожидаемые затраты). Использование ожидаемых величин предполагает возможность многократного решения одной и той же задачи, пока не будут получены достаточно точные расчётные формулы. Математически это выглядит так: пусть *X*– случайная величина с математическим ожиданием *MX* и дисперсией *DX*. Если $x_1, x_2, \ldots, x_n$ – значения случайной величины (с.в.) *X*, то среднее арифметическое их (выборочное среднее) значений $n\left(y, A\nu_x, ABA^T\right)$ имеет дисперсию

$\frac{DX}{n}$. Таким образом, когда $n \to \infty$

$\frac{DX}{n} \to 0$ и $\bar{x} \to MX$.

Другими словами при достаточно большом объёме выборки разница между средним арифметическим и математическим ожиданием стремится к нулю (так называемая предельная теорема теории вероятности). Следовательно, использование критерия ожидаемое значение справедливо только в случае, когда одно и тоже решение приходится применять достаточно большое число раз. Верно и обратное: ориентация на ожидания будет приводить к неверным результатам, для решений, которые приходится принимать небольшое число раз.

Пример 1. Требуется принять решение о том, когда необходимо проводить профилактический ремонт ПЭВМ, чтобы минимизировать потери из-за неисправности. В случае если ремонт будет производится слишком часто, затраты на обслуживание будут большими при малых потерях из-за случайных поломок.

Так как невозможно предсказать заранее, когда возникнет неисправность, необходимо найти вероятность того, что ПЭВМ выйдет из строя в период времени *t*. В этом и состоит элемент ”риска”.

Математически это выглядит так: ПЭВМ ремонтируется индивидуально, если она остановилась из-за поломки. Через *T* интервалов времени выполняется профилактический ремонт всех n ПЭВМ. Необходимо определить оптимальное значение *T*, при котором минимизируются общие затраты на ремонт неисправных ПЭВМ и проведение профилактического ремонта в расчёте на один интервал времени.

Пусть p_t – вероятность выхода из строя одной ПЭВМ в момент *t*, а n_t – случайная величина, равная числу всех вышедших из строя ПЭВМ в тот же момент. Пусть далее C_1 – затраты на ремонт неисправной ПЭВМ и C_2 – затраты на профилактический ремонт одной машины.

Применение критерия ожидаемого значения в данном случае оправдано, если ПЭВМ работают в течение большого периода времени. При этом ожидаемые затраты на один интервал составят

$$ОЗ = \frac{C_1 \sum_{t=1}^{T-1} M(n_t) + C_2 n}{T},$$

где $M(n_t)$ – математическое ожидание числа вышедших из строя ПЭВМ в момент *t*. Так как n_t имеет биномиальное распределение с параметрами (n, p_t), то $M(n_t) = np_t$. Таким образом

$$ОЗ = \frac{n(C_1\sum_{t=1}^{T-1} p_t + C_2)}{T}$$

Необходимые условия оптимальности T^* имеют вид:

$$ОЗ\ (T^*\text{-}1) \geq ОЗ\ (T^*),$$
$$ОЗ\ (T^*\text{+}1) \geq ОЗ\ (T^*).$$

Следовательно, начиная с малого значения T, вычисляют $ОЗ(T)$, пока не будут удовлетворены необходимые условия оптимальности.

Пусть $C_1 = 100$; $C_2 = 10$; $n = 50$. Значения p_t имеют вид:

T	p_t	$\sum_{t=1}^{T-1} p_t$	$ОЗ(T)$
1	0.05	0	$\frac{50\ (100\cdot 0+10)}{1} = 500$
2	0.07	0.05	375
3	0.10	0.12	366.7
4	0.13	0.22	400
5	0.18	0.35	450

$$T^* \to 3\ ,\quad ОЗ(T^*) \to 366.7$$

Следовательно профилактический ремонт необходимо делать через T^*=3 интервала времени.

§2. Критерий “ожидаемое значение – дисперсия”.

Критерий ожидаемого значения можно модифицировать так, что его можно будет применить и для редко повторяющихся ситуаций .

Если x – с. в. с дисперсией DX, то среднее арифметическое $\bar{x}$ имеет дисперсию DX/n, где n – число слогаемых в $\bar{x}$. Следовательно, если DX уменьшается, и вероятность того, что $\bar{x}$ близко к MX, увеличивается. Следовательно, целесообразно ввести критерий, в котором максимизация ожидаемого значения прибыли сочетается с минимизацией её дисперсии.

Пример 2. Применим критерий “ожидаемое значение – дисперсия” для примера 1. Для этого необходимо найти дисперсию затрат за один интервал времени, т.е. дисперсию

$$з_T = \frac{C_1\sum_{t=1}^{T-1} n_t + C_2 n}{T}$$

Т.к. n_t, $t =\overline{1,T-1}$ – с.в., то $з_T$ также с.в. С.в. n_t имеет биномиальное распределение с $M(n_t) = np_t$ и $D(n_t) = np_t(1–p_t)$. Следовательно,

$$D(з_T) = D\Bigl(\frac{C_1\sum_{t=1}^{T-1} n_t + C_2 n}{T}\Bigr) = \left(\frac{C_1}{T}\right)^2 D\Bigl(\sum_{t=1}^{T-1} n_t\Bigr) =$$

$$= \left(\frac{C_1}{T}\right)^2 \sum_{t=1}^{T-1} Dn_t = \left(\frac{C_1}{T}\right)^2 \sum_{t=1}^{T-1} np_t(1-p_t) = n\left(\frac{C_1}{T}\right)^2 \Bigl\{\sum_{t=1}^{T-1} p_t - \sum_{t=1}^{T-1} p_t^2\Bigr\},$$

где $C_2 n = const$.

Из примера 1 следует, что

$$M(з_T) = M(з(T)).$$

Следовательно искомым критерием будет минимум выражения

$$M(з(T)) + к\, D(з_T).$$

Замечание. Константу "*к*" можно рассматривать как уровень не склонности к риску, т.к. "*к*" определяет "степень возможности" дисперсии $Д(з_T)$ по отношению к математическому ожиданию. Например, если предприниматель, особенно остро реагирует на большие отрицательные отклонения прибыли вниз от $M(з(T))$, то он может выбрать "*к*" много больше 1. Это придаёт больший вес дисперсии и приводит к решению, уменьшающему вероятность больших потерь прибыли.

При $к = 1$ получаем задачу

$$M(З(T)) + D(З(T)) = n\left\{\left(\frac{C_1}{T} + \frac{C_1^2}{T^2}\right)\sum_{t=1}^{T-1} p_t - \left(\frac{C_1}{T}\right)^2 \sum_{t=1}^{T-1} p_t^2 + \frac{C^2}{T}\right\}$$

По данным из примера 1 можно составить следующую таблицу

T	p_t	p_t^2	$\sum_{t=1}^{T-1} p_t$	$\sum_{t=1}^{T-1} p_t^2$	$M(з(T))+D(з(T))$
1	0.05	0.0025	0	0	500.00
2	0.07	0.0049	0.05	0.0025	6312.50
3	0.10	0.0100	0.12	0.0074	6622.22
4	0.13	0.0169	0.22	0.0174	6731.25
5	0.18	0.0324	0.35	0.0343	6764.00

Из таблицы видно, что профилактический ремонт необходимо делать в течение каждого интервала $T^* = 1$.

§3. Критерий предельного уровня.

Критерий предельного уровня не дает оптимального решения, максимизирующего, например, прибыль или минимизирующего затраты. Скорее он соответствует определению приемлемого способа действий.

Пример 3. Предположим, что величина спроса x в единицу времени (интенсивность спроса) на некоторый товар задаётся непрерывной функцией распределения $f(x)$. Если запасы в начальный момент невелики, в дальнейшем возможен дефицит товара. В противном случае к концу рассматриваемого периода запасы нереализованного товара могут оказаться очень большими. В обоих случаях возможны потери.

Т.к. определить потери от дефицита очень трудно, ЛПР может установить необходимый уровень запасов таким образом, чтобы величина <u>ожидаемого</u> дефицита не превышала A_1 единиц, а величина <u>ожидаемых</u> излишков не превышала A_2 единиц. Иными словами, пусть I – искомый уровень запасов. Тогда

$$\text{ожидаемый дефицит} = \int_I^{\infty}(x - I)f(x)dx \le A_1,$$

$$\text{ожидаемые излишки} = \int_0^I (I - x)f(x)dx \le A_2.$$

При произвольном выборе A_1 и A_2 указанные условия могут оказаться противоречивыми. В этом случае необходимо ослабить одно из ограничений, чтобы обеспечить допустимость.

Пусть, например,

$$f(x) = \begin{cases} \frac{20}{x^2}, \text{ если } 10 \le x \le 20, \\ 0 \text{ , если } x \le 10 \text{ или } x \ge 20. \end{cases}$$

Тогда

$$\int_I^{20}(x - I)f(x)dx = \int_I^{20}(x - I)\frac{20}{x^2}dx = 20(\ln \frac{20}{I} + \frac{I}{20} - 1)$$

$$\int_{10}^{I}(I - x)f(x)dx = \int_{10}^{I}(I - x)\frac{20}{x^2}dx = 20(\ln \frac{10}{I} + \frac{I}{10} - 1)$$

Применение критерия предельного уровня приводит к неравенствам

$$\ln I - \frac{I}{20} \ge \ln 20 - \frac{A_1}{20} - 1 = 1.996 - \frac{A_1}{20}$$

$$\ln I - \frac{I}{10} \ge \ln 10 - \frac{A_2}{20} - 1 = 1.302 - \frac{A_2}{20}$$

Предельные значения A_1 и A_2 должны быть выбраны так, что бы оба неравенства выполнялись хотя бы для одного значения I.

Например, если $A_1 = 2$ и $A_2 = 4$, неравенства принимают вид

$$\ln I - \frac{I}{20} \ge 1.896$$

$$\ln I - \frac{I}{10} \ge 1.102$$

Значение I должно находиться между 10 и 20, т.к. именно в этих пределах изменяется спрос. Из таблицы видно, что оба условия выполняются для I, из интервала (13,17)

I	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
$\ln I - \frac{I}{}$	1.8	1.8	1.8	1.9	1.9	1.9	1.9	1.9	1.9	1.9	1.9
$\ln I - \frac{I}{}$	1.3	1.2	1.2	1.2	1.2	1.2	1.1	1.1	1.0	1.0	0.9

Любое из этих значений удовлетворяет условиям задачи.

Принятие решений в условиях неопределённости.

Будем предполагать, что лицу, принимающему решение не противостоит разумный противник.

Данные, необходимо для принятия решения в условии неопределенности, обычно задаются в форме матрицы, строки которой соответствуют возможным действиям, а столбцы – возможным состояниям системы.

Пусть, например, из некоторого материала требуется изготовить изделие, долговечность которого при допустимых затратах невозможно определить. Нагрузки считаются известными. Требуется решить, какие размеры должно иметь изделие из данного материала.

Варианты решения таковы:

E_1 – выбор размеров из соображений максимальной долговечности ;

E_m– выбор размеров из соображений минимальной долговечности ;

E_i – промежуточные решения.

Условия требующие рассмотрения таковы :

F_1 – условия, обеспечивающие максимальной долговечность;

F_n – условия, обеспечивающие min долговечность;

F_i – промежуточные условия.

Под результатом решения $e_{ij} = e(E_i\ ;\ F_j\,)$ здесь можно понимать оценку, соответствующую варианту E_i и условиям F_j и характеризующие прибыль, полезность или надёжность. Обычно мы будем называть такой результат полезностью решения.

Тогда семейство (матрица) решений $\left\| e_{ij} \right\|$ имеет вид :

	F_1	F_2	...	F_n
E_1	e_{11}	e_{12}	...	e_{1n}
E_2	e_{21}	e_{22}	...	e_{2n}
...	...	...	...	...
E_m	e_{m1}	e_{m2}	...	e_{mn}

Чтобы прийти к однозначному и по возможности наивыгоднейшему варианту решению необходимо ввести оценочную (целевую) функцию. При этом матрица решений $\left\| e_{ij} \right\|$ сводится к одному столбцу. Каждому варианту E_i приписывается, т.о., некоторый результат e_{ir}, характеризующий, в целом, все последствия этого решения. Такой результат мы будем в дальнейшем обозначать тем же символом e_{ir}.

§1. Классические критерии принятия решений .

1^o. Минимаксный критерий .

Правило выбора решения в соответствии с минимаксным критерием (ММ-критерием) можно интерпретировать следующим образом:

матрица решений дополняется ещё одним столбцом из наименьших результатов e_{ir} каждой строки. Необходимо выбрать те варианты в строках которых стоят наибольшее значение e_{ir} этого столбца.

Выбранные т.о. варианты полностью исключают риск. Это означает, что принимающий решение не может столкнуться с худшим результатом, чем тот, на который он ориентируется. Это свойство позволяет считать ММ-критерий одним из фундаментальных.

Применение ММ-критерия бывает оправдано, если ситуация, в которой принимается решение следующая:

1°. О возможности появления внешних состояний F_j ничего не известно;

2°. Приходится считаться с появлением различных внешних состояний F_j;

3°. Решение реализуется только один раз;

4°. Необходимо исключить какой бы то ни было риск.

2°. Критерий Байеса – Лапласа.

Обозначим через q_i – вероятность появления внешнего состояния F_j.

Соответствующее правило выбора можно интерпретировать следующим образом:

> *матрица решений $\| e_{ij} \|$ дополняется ещё одним столбцом содержащим математическое ожидание значений каждой из строк. Выбираются те варианты, в строках которых стоит наибольшее значение e_{ir} этого столбца.*

При этом предполагается, что ситуация, в которой принимается решение, характеризуется следующими обстоятельствами:

1°. Вероятности появления состояния F_j известны и не зависят от времени.

2°. Решение реализуется (теоретически) бесконечно много раз.

3°. Для малого числа реализаций решения допускается некоторый риск.

При достаточно большом количестве реализаций среднее значение постепенно стабилизируется. Поэтому при полной (бесконечной) реализации какой-либо риск практически исключён.

Т.о. критерий Байеса-Лапласа (B-L-критерий) более оптимистичен, чем минимаксный критерий, однако он предполагает большую информированность и достаточно длительную реализацию.

3°. Критерий Сэвиджа.

$$a_{ij} := \max_i e_{ij} - e_{ij}$$

$$e_{ir} := \max_i a_{ij} = \max_j (\max_i e_{ij} - e_{ij})$$

Величину a_{ij} можно трактовать как максимальный дополнительный выигрыш, который достигается, если в состоянии F_j вместо варианта E_i выбирать другой, оптимальный для этого внешнего состояния вариант. Величину a_{ij} можно интерпретировать и как потери (штрафы) возникающие в состоянии F_j при замене оптимального для него варианта на вариант E_i. В последнем случае e_{ir} представляет собой максимально возможные (по всем внешним состояниям F_j, $j = \overline{1, n}$) потери в случае выбора варианта E_i.

Соответствующее критерию Сэвиджа правило выбора теперь трактуется так:

1). Каждый элемент матрицы решений $\left\| e_{ij} \right\|$ *вычитается из наибольшего результата max* e_{ij} *соответствующего столбца.*

2). Разности a_{ij} *образуют матрицу остатков* $\left\| e_{ij} \right\|$*. Эта матрица пополняется столбцом наибольших разностей* e_{ir}*. Выбирают те варианты, в строках которых стоит наименьшее для этого столбца значение.*

Требования, предъявляемые к ситуации, в которой принимается решение, совпадают с требованием к ММ-критерию.

4^o. Пример и выводы.

Из требований, предъявляемых к рассмотренным критериям становится ясно, что в следствии их жёстких исходных позиций они применимы только для идеализированных практических решений. В случае, когда возможна слишком сильная идеализация, можно применять одновременно поочерёдно различные критерии. После этого среди нескольких вариантов ЛПР волевым методом выбирает окончательное решение. Такой подход позволяет, во-первых, лучше проникнуть во все внутренние связи проблемы принятия решений и, во-вторых, ослабляет влияние субъективного фактора.

Пример. При работе ЭВМ необходимо периодически приостанавливать обработку информации и проверять ЭВМ на наличие в ней вирусов. Приостановка в обработке информации приводит к определённым экономическим издержкам. В случае же если вирус вовремя обнаружен не будет, возможна потеря и некоторой части информации, что приведёт и ещё к большим убыткам.

Варианты решения таковы:

E_1– полная проверка;

E_2– минимальная проверка;

E_3– отказ от проверки.

ЭВМ может находиться в следующих состояниях:

F_1– вирус отсутствует;

F_2– вирус есть, но он не успел повредить информацию;

F_3– есть файлы, нуждающиеся в восстановлении.

Результаты, включающие затраты на поиск вируса и его ликвидацию, а также затраты, связанные с восстановлением информации имеют вид:

Таблица 1.

	F_1	F_2	F_3	ММ-критерий		критерий B-L	
				$e_{ir}=\min\limits_j e_{ij}$	$\max\limits_i e_{ir}$	$e_{ir}=\sum\limits_j e_{ij}$	$\max\limits_i e_{ir}$
E_1	-20.0	-22.0	-25.0	-25.0	-25.0	-22.33	
E_2	-14.0	-23.0	-31.0	-31.0		-22.67	
E_3	0	-24.0	-40.0	-40.0		-21.33	-21.33

Согласно ММ-критерию следует проводить полную проверку. Критерий Байеса-Лапласа, в предположении, что все состояния машины равновероятны.

$$P(F_j) = q_j = 0.33,$$

рекомендуется отказаться от проверки. Матрица остатков для этого примера и их оценка (в тысячах) согласно критерию Сэвиджа имеет вид:

	F_1	F_2	F_3	Критерий Сэвиджа	
				$e_{ir}=\min\limits_{j} a_{ij}$	$\min\limits_{j} e_{ir}$
E_1	+20.0	0	0	+20.0	
E_2	+14.0	+1.0	+6.0	+14.0	+14.0
E_3	0	+2.0	+15.0	+15.0	

Пример специально подобран так, что каждый критерий предлагает новое решение. Неопределённость состояния, в котором проверка застаёт ЭВМ, превращается в неясность, какому критерию следовать.

Поскольку различные критерии связаны с различными условиями, в которых принимается решение, лучшее всего для сравнительной оценки рекомендации тех или иных критериев получить дополнительную информацию о самой ситуации. В частности, если принимаемое решение относится к сотням машин с одинаковыми параметрами, то рекомендуется применять критерий Байеса-Лапласа. Если же число машин не велико, лучше пользоваться критериями минимакса или Сэвиджа.

Критерий Гурвица.

Стараясь занять наиболее уравновешенную позицию, Гурвиц предположил оценочную функцию, которая находится где-то между точкой зрения крайнего оптимизма и крайнего пессимизма:

$$\max_{i} e_{ir} = \{C \min_{j} e_{ij} + (1- C) \quad \max_{j} e_{ij} \},$$

где C– весовой множитель.

Правило выбора согласно критерию Гурвица, формируется следующим образом:

матрица решений $\|e_{ij}\|$ *дополняется столбцом, содержащим среднее взвешенное наименьшего и наибольшего результатов для каждой строки. Выбираются только те варианты, в строках которых стоят наибольшие элементы* e_{ir} *этого столбца.*

При C=1 критерий Гурвица превращается в ММ-критерий. При C = 0 он превращается в критерий “азартного игрока”

$$\max_{i} e_{ir} = \max_{i} \max_{j} e_{ij} ,$$

т.е. мы становимся на точку зрения азартного игрока, делающего ставку на то, что “выпадет” наивыгоднейший случай.

В технических приложениях сложно выбрать весовой множитель C, т.к. трудно найти количественную характеристику для тех долей оптимизма и пессимизма, которые присутствуют при принятии решения. Поэтому чаще всего $C := {}^1/_2$.

Критерий Гурвица применяется в случае, когда :

1) о вероятностях появления состояния F_j ничего не известно;
2) с появлением состояния F_j необходимо считаться;
3) реализуется только малое количество решений;
4) допускается некоторый риск.

Критерий Ходжа–Лемана.

Этот критерий опирается одновременно на ММ-критерий и критерий Баеса-Лапласа. С помощью параметра ν выражается степень доверия к используемому распределений вероятностей. Если доверие велико, то доминирует критерий Баеса-Лапласа, в противном случае – ММ-критерий, т.е. мы ищем

$$\max_i e_{ir} = \max_i \{\nu \sum_{j=1}^{n} e_{ij}\, q_i + (1-\nu) \min_j e_{ir}\}, \qquad 0 \le \nu \le 1. \qquad \underline{\underline{(*)}}$$

Правило выбора, соответствующее критерию Ходжа-Лемана формируется следующим образом:

матрица решений $\| e_{ij} \|$ *дополняется столбцом, составленным из средних взвешенных (с весом* $\nu \equiv const$*) математическое ожиданиями и наименьшего результата каждой строки (*). Отбираются те варианты решений в строках которого стоит набольшее значение этого столбца.*

При ν = 1 критерий Ходжа-Лемана переходит в критерий Байеса-Лапласа, а при ν = 0 становится минимаксным.

Выбор ν субъективен т. к. Степень достоверности какой-либо функции распределения – дело тёмное.

Для применения критерия Ходжа-Лемана желательно, чтобы ситуация в которой принимается решение, удовлетворяла свойствам:

1) вероятности появления состояния F_j неизвестны, но некоторые предположения о распределении вероятностей возможны;
2) принятое решение теоретически допускает бесконечно много реализаций;
3) при малых числах реализации допускается некоторый риск.

Критерий Гермейера.

Этот критерий ориентирован на величину потерь, т.е. на отрицательные значения всех e_{ij}. При этом

$$\max_i e_{ir} = \max_i \min_j e_{ij}\, q_j.$$

Т.к. в хозяйственных задачах преимущественно имеют дело с ценами и затратами, условие $e_{ij}<0$ обычно выполняется. В случае же, когда среди величин e_{ij} встречаются и положительные значения, можно перейти к строго отрицательным значениям с помощью преобразования $e_{ij} - a$ при подходящем образом подобранном $a > 0$. При этом оптимальный вариант решения зависит от a.

Правило выбора согласно критерию Гермейера формулируется следующим образом :

матрица решений $\| e_{ij} \|$ *дополняется ещё одним столбцом содержащим в каждой строке наименьшее произведение имеющегося в ней результата на вероятность соответствующего состояния* F_j. *Выбираются те варианты в строках которых находится наибольшее значение* e_{ij} *этого столбца.*

В каком-то смысле критерий Гермейера обобщает ММ-критерий: в случае равномерного распределения $q_j = \frac{1}{n}$, $j = \overline{1, n}$, они становятся идентичными.

Условия его применимости таковы :

1) вероятности появления состояния F_j неизвестны;
2) с появлением тех или иных состояний, отдельно или в комплексе, необходимо считаться;
3) допускается некоторый риск;
4) решение может реализоваться один или несколько раз.

Если функция распределения известна не очень надёжно, а числа реализации малы, то, следуя критерию Гермейера, получают, вообще говоря, неоправданно большой риск.

BL (MM) - критерий.

Стремление получить критерии, которые бы лучше приспосабливались к имеющейся ситуации, чем все до сих пор рассмотренные, привело к построению так называемых составных критериев. В качестве примера рассмотрим критерий, полученный путем объединения критериев Байеса-Лапласа и минимакса.

Правило выбора для этого критерия формулируется следующим образом:

матрица решений $\| e_{ij} \|$ *дополняется еще тремя столбцами. В первом из них записываются математические ожидания каждой из строк, во втором - разность между опорным значением*

$$e_{i_0 j_0} = \max_i \max_j e_{ij}$$

и наименьшим значением

$$\min_j e_{ij}$$

соответствующей строки. В третьем столбце помещаются разности между наибольшим значением

$$\max_j e_{ij}$$

каждой строки и наибольшим значением $\max e_{i_0 j}$ *той строки, в которой находится значение* $e_{i_0 j_0}$. *Выбираются те варианты, строки которых (при соблюдении приводимых ниже соотношений между элементами второго и третьего столбцов) дают наибольшее математическое ожидание. А именно, соответствующее значение*

$$e_{i_0 j_0} - \max_j e_{ij}$$

из второго столбца должно быть или равно некоторому заранее заданному уровню риска $\varepsilon_{доп}$. *Значение же из третьего столбца должно быть больше значения из второго столбца.*

Применение этого критерия обусловлено следующими признаками ситуации, в которой принимается решение:

1) вероятности появления состояний F_j неизвестны, однако имеется некоторая априорная информация в пользу какого-либо определенного распределения;
2) необходимо считаться с появлением различных состояний как по отдельности, так и в комплексе;
3) допускается ограниченный риск;
4) принятое решение реализуется один раз или многократно.

BL(MM)-критерий хорошо приспособлен для построения практических решений прежде всего в области техники и может считаться достаточно надежным. Однако заданные границы риска $\varepsilon_{доп}$ и, соответственно, оценок риска ε_i не учитывает ни число применения решения, ни иную подобную информацию. Влияние субъективного фактора хотя и ослаблено, но не исключено полностью.

Условие

$$\max_j e_{ij} - \max_j e_{i_0 j} \geq \varepsilon_i$$

существенно в тех случаях, когда решение реализуется только один или малое число раз. В этих условиях недостаточно ориентироваться на риск, связанный только с невыгодными внешними состояниями и средними значениями. Из-за этого, правда, можно понести некоторые потери в удачных внешних состояниях. При большом числе реализаций это условие перестает быть таким уж важным. Оно даже допускает разумные альтернативы. При этом не известно, однако, четких количественных указаний, в каких случаях это условие следовало бы опускать.

Критерий произведений.

$$\max_i e_{ir} := \max_i \prod_j e_{ij}$$

Правило выбора в этом случае формулируется так :

Матрица решений $\| e_{ij} \|$ дополняется новым столбцом, содержащим произведения всех результатов каждой строки. Выбираются те варианты, в строках которых находятся наибольшие значения этого столбца.

Применение этого критерия обусловлено следующими обстоятельствами :

1) вероятности появления состояния F_j неизвестны;
2) с появлением каждого из состояний F_j по отдельности необходимо считаться;
3) критерий применим и при малом числе реализаций решения;
4) некоторый риск допускается.

Критерий произведений приспособлен в первую очередь для случаев, когда все e_{ij} положительны. Если условие положительности нарушается, то следует выполнять некоторый сдвиг $e_{ij} + a$ с некоторой константой $a > |\min_{ij} e_{ij}|$. Результат при этом будет, естественно зависеть от a. На практике чаще всего

$$a := |\min_{ij} e_{ij}| + 1.$$

Если же никакая константа не может быть признана имеющей смысл, то критерий произведений не применим.

Пример.

Рассмотрим тот же пример (табл. 1).

Построение оптимального решения для матрицы решений о проверках по критерию Гурвица имеет вид (при C =0.5, в 10^3):

$\lVert e_{ij} \rVert$			$C\min\limits_j e_{ij}$	$(1-C)\max\limits_j e_{ij}$	e_{ir}	$\max\limits_i e_{ir}$
-20.0	-22.0	-25.0	-12.5	-10.0	-22.5	
-14.0	-23.0	-31.0	-15.5	-7.0	-22.5	
0	-24.0	-40.0	-20.0	0	-20.0	-20.0

В данном примере у решения имеется поворотная точка относительно весового множителя C: до $C = 0.57$ в качестве оптимального выбирается E_3, а при больших значениях – E_1.

Применение критерия Ходжа-Лемана ($q = 0.33$, $\nu = 0.5$, в 10^3) :

$\sum\limits_j e_{ij}q_j$	$\min\limits_j e_{ij}$	$\nu \sum e_{ij}q_j$	$(1-\nu)\min e_{ij}$	e_{ir}	$\max\limits_i e_{ir}$
-22.33	-25.0	-11.17	-12.5	-23.67	-23.67
-22.67	-31.0	-11.34	-15.5	-26.84	
-21.33	-40.0	-10.67	-20.0	-30.76	

Критерий Ходжа-Лемана рекомендует вариант E_1 (полная проверка) – так же как и ММ-критерий. Смена рекомендуемого варианта происходит только при $\nu = 0.94$. Поэтому равномерное распределение состояний рассматриваемой машины должно распознаваться с очень высокой вероятностью, чтобы его можно было выбрать по большему математическому ожиданию. При этом число реализаций решения всегда остаётся произвольным.

Критерий Гермейера при $q_j = 0.33$ даёт следующий результат (в 10^3):

$\lVert e_{ij} \rVert$			$\lVert e_{ij}q_j \rVert$			$e_{ir} = \min\limits_j e_{ij}q_j$	$\max\limits_i e_{ir}$
-20.0	-22.0	-25.0	-6.67	-7.33	-8.33	-8.33	-8.33
-14.0	-23.0	-31.0	-4.67	-7.67	-10.33	-10.33	
0	-24.0	-40.0	0	-8.0	-13.33	-13.33	

В качестве оптимального выбирается вариант E_1. Сравнение вариантов с помощью величин e_{ir} показывает, что способ действия критерия Гермейера является даже более гибким, чем у ММ-критерия.

В таблице, приведенной ниже, решение выбирается в соответствии с BL(MM)-критерием при $q_1=q_2=q_3={}^1/_2$ (данные в 10^3).

$\|e_{ij}\|$			$\sum_j e_{ij}q_j$	$e_{i_0 j_0} - \min_j e_{ij}$	$\max_j e_{ij}$	$\max_j e_{ij} - \max_j e_{i_0 j}$
-20.0	-22.0	-25.0	-23.33	0	-20.0	0
-14.0	-23.0	-31.0	-22.67	+6.0	-14.0	+6.0
0	-24.0	-40.0	-21.33	+15.0	0	+20.0

Вариант E_3 (отказ от проверки) принимается этим критерием только тогда, когда риск приближается к $\varepsilon_{возм} = 15 \times 10^3$. В противном случае оптимальным оказывается E_1. Во многих технических и хозяйственных задачах допустимый риск бывает намного ниже, составляя обычно только незначительный процент от общих затрат. В подобных случаях бывает особенно ценно, если неточное значение распределения вероятностей сказывается не очень сильно. Если при этом оказывается невозможным установить допустимый риск $\varepsilon_{доп}$ заранее, не зависимо от принимаемого решения, то помочь может вычисление ожидаемого риска $\varepsilon_{возм}$. Тогда становится возможным подумать, оправдан ли подобный риск. Такое исследование обычно дается легче.

Результаты применения критерия произведения при $a = 41 \cdot 10^3$ и $a = 200 \cdot 10^3$ имеют вид :

	$\|e_{ij} + a\|$			$e_{ir} = \prod_j e_{ij}$	$\max_i e_{ir}$
a=41	+21	+19	+16	6384	6384
	+27	+18	+10	4860	
	+41	+17	+1	697	
a=200	+180	+178	+175	5607	
	+186	+177	+169	5563	
	+200	+176	+160	5632	5632

Условие $e_{ij} > 0$ для данной матрицы не выполнимо. Поэтому к элементам матрицы добавляется (по внешнему произволу) сначала $a = 41 \cdot 10^3$, а затем $a = 200 \cdot 10^3$.

Для $a = 41 \cdot 10^3$ оптимальным оказывается вариант E_1, а для $a = 200 \cdot 10^3$ – вариант E_3, так что зависимость оптимального варианта от a очевидна.

Тема 4.Принятие решений при нечеткой исходной информации.

Нечеткие множества: определение, свойства, операции над нечеткими множествами

Определение нечеткого множества. Пусть $X = \{x\}$ -универсальное множество, т.е. полное множество, охватывающее всю проблемную область.

Определение. *Нечеткое множество* $\boldsymbol{A} \subseteq \boldsymbol{X}$ представляет собой набор пар $\{(x, \mu^A(x))\}$, где $x \in \boldsymbol{X}$ и $\mu^A: \boldsymbol{X} \longrightarrow [0, 1]$ - функция принадлежности, которая представляет собой некоторую субъективную меру соответствия элемента нечеткому множеству $\mu^A(x)$ может принимать значения от нуля, который обозначает абсолютную не принадлежность, до единицы, которая, наоборот, говорит об абсолютной принадлежности элемента x нечеткому множеству $\boldsymbol{A}$.

Если нечеткое множество $\boldsymbol{A}$ определено на конечном универсальном множестве
$\boldsymbol{X} = \{x_1 , x_2,,...,x_n\}$, то его удобно обозначать следующим образом:

$$A = \mu^A(x_1)/x_1 + \mu^A(x_2)/x_2 + \ldots + \mu^A(x_n)/x_n = \sum_{i=1}^{n} \mu^A(x_i)/x_i \qquad (6.2.1)$$

где $\mu^A(x_i)/x_i$ - *пара* “функция принадлежности / элемент”, называемая *синглтоном,* а “+” - обозначает совокупность пар.

Пример. Пусть $\boldsymbol{X}= \{1, 2, ..., 10\}$. Тогда нечеткое множество “большие числа” может быть представлено следующим образом:

$\boldsymbol{A}$ = “большие числа” = 0.2/6 + 0.5/7 + 0,8/8 + 1/9 + 1/10.

Это следует понимать следующим образом: 9 й 10 с абсолютной уверенностью можно отнести к “большим числам”, 8 - есть “большое число” со степенью 0.8 и т.д. 1,2, ..., 5 абсолютно не являются “большими числами”.

На практике удобно использовать кусочно-линейную аппроксимацию функции принадлежности нечеткого множества, как это показано на рис. 6.2.1, так как требуется только два значения - $\underline{a}$ и $\overline{a}$.

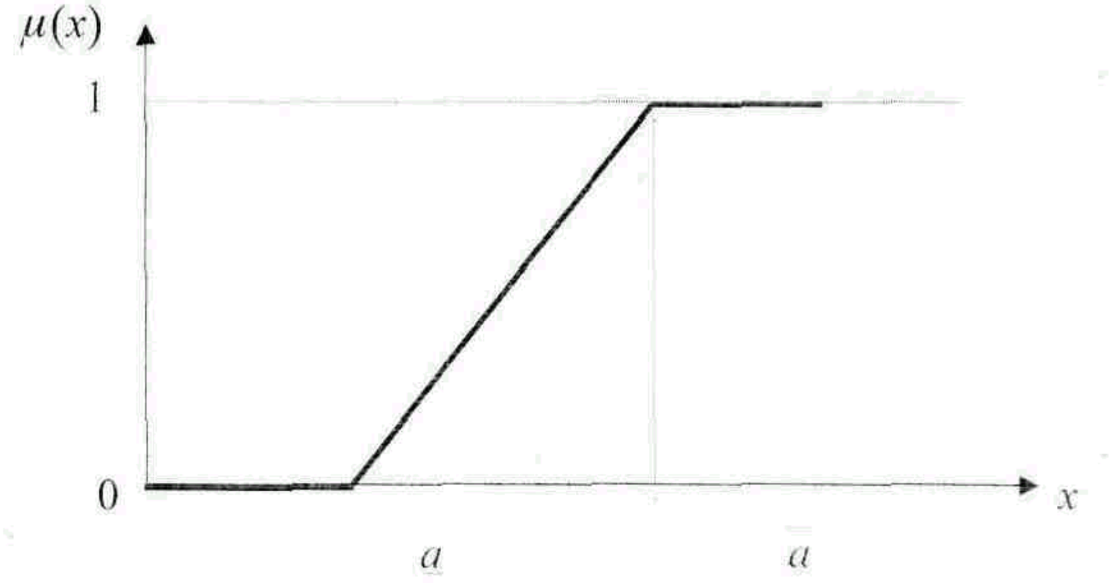


Рис. 6.2.1 Функция принадлежности нечеткого множества.

В случае непрерывного множества $\boldsymbol{X}$ используется следующее обозначение:

$$\min_{S \in M_s} q_1(S) \quad (6.2.2)$$

Свойства нечетких множеств.

1. Нечеткое множество $\boldsymbol{A} \subseteq \boldsymbol{X}$ *пустое,* т.е. $\boldsymbol{A} = \varnothing$, если $\mu^{A}(x) = 0$, $\forall x \in \mathbf{X}$.

2. Нечеткие множества $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B} \subseteq \boldsymbol{X}$ *эквивалентны,* т.е. $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$, если

$\mu^{A}(x) = \mu^{B}(x)\ \ \forall x \in \mathbf{X}$..

3. Нечеткое множество $\boldsymbol{A} \subseteq \boldsymbol{X}$ является подмножеством нечеткого множества $\boldsymbol{B} \subseteq \boldsymbol{X}$, т.е. $\boldsymbol{A} \subseteq \boldsymbol{B}$ если $\mu^{A}(x) \le \mu^{B}(x)\ \ \forall x \in \mathbf{X}$.

Пример . Пусть $\boldsymbol{X} = \{1,2,3\}$,

$\boldsymbol{A} = 0.3/1 + 0.5/2 + 1/3$,

$\boldsymbol{B} = 0.4/1+0.6/2+1/3$.

Тогда $\boldsymbol{A} \subseteq \boldsymbol{B}$.

Кардинальное число (мощность) нечеткого множества *n*

$$A = \mu^{A}(x_1)/x_1 + \mu^{A}(x_2)/x_2 + \ldots + \mu^{A}(x_n)/x_n = \sum_{i=1}^{n} \mu^{A}(x_i)/x_i$$

находится следующим образом:

$$cardA = |A| = \sum_{i=1}^{n} \mu^{A}(x_i) \quad (6.2.3)$$

Пример. Если $\boldsymbol{X}=\{1.,2,3,4\}$ $\boldsymbol{A} = 0.1/1 + 0.4/2 + 0.7/3 + 1/4$, то card $\boldsymbol{A}$ = 2.2.

Операции над нечеткими множествами.

1. *Дополнением* нечеткого множества $\boldsymbol{A}$ называется - нечеткое множество $\rceil \boldsymbol{A}$, функция принадлежности которого равна

$$\mu^{\rceil A}(x) = 1 - \mu^{A}(x), \forall x \in X. \quad (6.2.4)$$

2. *Пересечением* двух нечетких множеств $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B} \in \boldsymbol{X}$ называется нечеткое множество $\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B}$, функция принадлежности которого равна

$$\mu^{A \cap B}(x) = \mu^{A}(x) \wedge \mu^{B}(x), \forall x \in X \text{ , } (6.2.5)$$

где ^ - знак операции минимума.

3. *Объединением* двух нечетких множеств $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B} \in \boldsymbol{X}$ называется нечеткое множество $\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B}$, функция принадлежности которого равна

$$\mu^{A \cup B}(x) = \mu^{A}(x) \vee \mu^{B}(x), \forall x \in X \quad (6.2.6)$$

где V - знак операции максимума.

Пример. Пусть $\boldsymbol{X}$= {1, 2,..., 10},

$\boldsymbol{A}$ = “малые числа” = 1/1 + 1/2 + 0.8/3 + 0.5/4 + 0.3/5 + 0.1/6;

$\boldsymbol{B}$ = “большие числа” = 0.1/5 + 0.2/6 + 0.5/7 + 0.8/8 +1/9+1/10;

Тогда

$\neg\boldsymbol{A}$= *“НЕ* малые числа” = 0.2/3 + 0.5/4 + 0.7/5 + 0.9/6 + 1/7 + 1/8 + +1/9+1/10,

$\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B}$ **=** “малые числа” И “большие числа” = 0,1/5 + 0.1/6,

$\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B}$ = “малые числа” ИЛИ “большие числа” == 1/1 + 1/2 + 0.8/3 + + 0.5/4 + 0.3/5 + + 0.2/6 + 0.5/7 + 0.8/8 + 1/9 + 1/10.

Приведенные определения операций над нечеткими множествами являются наиболее распространенными.

Определение. α - *срезом (множеством уровня* α*)* нечеткого множества $\boldsymbol{A} \subseteq \boldsymbol{X}$, называется четкое множество $\boldsymbol{A}_{\alpha} \subseteq \boldsymbol{X}$ такое, что

$$A_{\alpha} = \{x \in X : \mu^{A}(x) \geq \alpha\}, \forall \alpha \in [0,1]. \quad (6.2.7)$$

Пример. Если $\boldsymbol{A}$ = 1/1 + 0.8/2+0.5/3+0.1/4, то $\boldsymbol{A}_{0.1}$ = {1,2,3,4}, $\boldsymbol{A}_{0.5}$= {1, 2, 3}, $\boldsymbol{A}_{1}$ ={1}.

Принцип обобщения [1] дает формальный аппарат для переноса операций (арифметических, алгебраических) с обычных множеств на нечеткие.

Пусть функция f представляет собой отображение f: $\boldsymbol{X}$ —> $\boldsymbol{Y}$ и $\boldsymbol{A}$ есть нечеткое множество в $\boldsymbol{X}$. В соответствии с принципом обобщения, функция отображает нечеткое множество $\boldsymbol{A}$ в нечеткое множество - $\boldsymbol{B} \subseteq \boldsymbol{Y}$ такое, что

$$\mu^{B}(y) = \begin{cases} \sup \mu^{A}(x), f^{-1}(y) \neq \varnothing; \\ y = f(x); \\ 0, f^{-1}(y) = \varnothing. \end{cases} \quad (6.2.8)$$

Пример. Пусть **X**={1,2,3,4}, **Y** ={1,2,3,4,5,6} и у = *x + 2.* Если теперь
$\boldsymbol{A}$ = 0.1/1 + 0.2/2 + 0.7/3 + 1/4, то $\boldsymbol{B}$ = 0.1/3 + 0.2/4 + 0.7/5 + 1/6.

Нечеткие отношения

Пусть $\boldsymbol{X}=\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ и $\boldsymbol{Y}=\{y_1, y_2, \ldots, y_m\}$.

Определение. *Нечетким отношением* $\boldsymbol{R}$ называется нечеткое множество, определенное на декартовом произведении $\boldsymbol{X}$ x $\boldsymbol{Y}$, которому соответствует функция принадлежности μ^{R}: $\boldsymbol{X} \times \boldsymbol{Y} \rightarrow [0,1]$. Здесь μ^{R} (x, y) отражает силу зависимости между x $\in \boldsymbol{X}$ и $y \in \boldsymbol{Y}$.

Пример. Пусть $\boldsymbol{X}$ = { конь, осел } и $\boldsymbol{Y}$ = { мул, корова }. Нечеткое отношение “подобный” может быть определено следующим образом:

R = “подобный” = 0.8 / (конь, мул) + 0.4 / (конь, корова) + 0.9/(осел, мул) + 0.5/(осел, корова), т.е. конь похож на мула со степенью 0.8, конь похож на корову со степенью 0.4 и т.д.

Определение. Если $\boldsymbol{R} \subseteq \boldsymbol{X} \times \boldsymbol{Y}$ и $\boldsymbol{S} \subseteq \boldsymbol{Y} \times \boldsymbol{Z}$, то *max-min композицией* называется нечеткое множество $\boldsymbol{R} \circ \boldsymbol{S}$, определенное на $\boldsymbol{X} \times \boldsymbol{Z}$, функция принадлежности которого имеет вид

$$\mu^{R \circ S}(x, z) = \sup_{y \in Y} \left[\mu^{R}(x, y) \wedge \mu^{S}(y, z) \right] \quad (6.2.9)$$

Max-min композиция позволяет ответить на вопрос, какое нечеткое множество в $\boldsymbol{Y}$ следует поставить в соответствие нечеткому множеству $\boldsymbol{A}' \subseteq \boldsymbol{X}$, если известно, что нечеткое множество $\boldsymbol{B} \subseteq \boldsymbol{Y}$ соответствует нечеткому множеству $\boldsymbol{A} \subseteq \boldsymbol{X}$. Операция нахождения такого соответствия называется *нечетким логическим выводом* и выполняется по следующей формуле:

$$B' = A' \circ R = A' \circ (A \times B), \quad (6.2.10)$$

где $\boldsymbol{R}$ - нечеткое отношение:

$$R = A \times B = \sum_{i=1}^{l} \sum_{j=1}^{m} \left\{ \mu^{A}(x_i) \wedge \mu^{B}(y_j) \right\} / (x_i, y_j), \quad (6.2.11)$$

$\circ$ - max-mm композиция,, в соответствии с которой

$$B' = \sum_{j=1, i=\overline{1,l}}^{m} \vee \left\{ \mu^{A'}(x_i) \wedge \mu^{R}(x_i, y_j) \right\} / y_j, A, A' \subseteq X, B, B' \subseteq Y. \quad (6.2.12)$$

Нечеткие числа

Введенный принцип обобщения служит для переноса четких отношений в нечеткие. Например, его можно применить для определения нечеткой арифметики.

Определение. *Нечеткое число* это нечеткое множество $\boldsymbol{A}$, определенное на множестве действительных чисел $\Re$, если его функция принадлежности нормальна и выпукла, т. е.

$$\sup_{x \in \Re} \mu^{A}(x) = 1,$$

$$x \le y \le z \Rightarrow \mu^{A}(y) \ge \min(\mu^{A}(x), \mu^{A}(z)).$$

Примеры нечетких чисел: “около 5”, “чуть больше 7”. В соответствии с принципом обобщения, арифметические операции над нечеткими числами имеют вид

-сложение $\int$

-вычитание $\mu^{A-B}(z) = \max\limits_{z=x-y} \left\lfloor \mu^{A}(x) \wedge \mu^{B}(y) \right\rfloor, \forall x, e, z \in \Re$

- умножение $\mu^{A*B}(z) = \max\limits_{z=x*y} \left\lfloor \mu^{A}(x) \wedge \mu^{B}(y) \right\rfloor, \forall x, y, z \in \Re$

-деление $\mu^{A/B}(z) = \max\limits_{z=x/y} \left\lfloor \mu^{A}(x) \wedge \mu^{B}(y) \right\rfloor, x, y, z \in \Re.$

К сожалению, использование принципа обобщения для определения арифметических операции над нечеткими числами в общем довольно неэффективно. Поэтому часто предполагается, что нечеткие числа представляются в *LR-форме,* что соответствует описанию левой (left) й правой (right) частей функции.

Нечеткое число ***A*** представляется в *LR-форме,* если

$$\mu^{A}(x) = \begin{cases} L\left(\dfrac{m-x}{\alpha}\right), \alpha > 0, \forall x \le m \\ R\left(\dfrac{m-x}{\beta}\right), \beta > 0, \forall x \le m \end{cases}, \qquad (6.2.13)$$

где ***L*** и ***R*** - функции, обладающие свойствами

а) L (- x) = L (x);

б) L (0) =1;

в) *L* монотонно убывает на промежутке [0, + ∞].

Здесь m - среднее значение нечеткого числа ***A,*** α - отклонение слева, β - отклонение справа.

Если α = β = 0, то нечеткое число ***A*** переходит в четкое число *m.*

Таким образом, **LR**-форму нечеткого числа ***A*** можно представить в виде тройки ***A***=$\{m_A, \alpha_A, \beta_A\}$. Арифметические операции над нечеткими числами можно определить через операции над соответствующими им тройками

$$A + B = (m_A, \alpha_A, \beta_A) + (m_B, \alpha_B, \beta_B) = (m_A + m_B, \alpha_A + \alpha_B, \beta_A + \beta_B), \qquad (6.2.14)$$

$$A - B = (m_A, \alpha_A, \beta_A) - (m_B, \alpha_B, \beta_B) = (m_A - m_B, \alpha_A - \alpha_B, \beta_A - \beta_B), \qquad (6.2.15)$$

$$A \cdot B = (m_A, \alpha_A, \beta_A) \cdot (m_B, \alpha_B, \beta_B) \approx (m_A \cdot m_B, m_A \cdot \alpha_B + m_B \cdot \alpha_A, m_A \cdot \beta_A + m_B \cdot \beta_B), \qquad (6.2.16)$$

На практике ***LR***-представление упрощается за счет применения линейных функций, что приводит к треугольным нечетким числам (рис. 6.2.2а), которые имеют функцию принадлежности вида

$$\mu^A(x) = \begin{cases} (x-a^-)/(a-a^-), a^- \le x \le a \\ (a^+-x)/(a^+-a), a \le x \le a^+ \end{cases} \quad (6.2.17)$$

Кроме того, получили распространение трапециевидные формы, функций принадлежности (рис. 6.2.26), которые имеют функций принадлежности вида

$$\mu^A(x) = \begin{cases} (x-a^-)/(\underline{a}-a^-), a^- \le x \le \underline{a} \\ 1, \underline{a} \le x \le \overline{a} \\ (a^+-x)/(a^+-\overline{a}), \overline{a} \le x \le a^+ \end{cases}, \quad (6.2.18)$$

Нечеткая и лингвистическая логики

Данный раздел написан в соответствии с работой. Детальное изложение применений нечеткой логики в конкретных практических задачах можно найти в [7,8 и др.].

Нечетким логическим выражением называется формула, в состав которой входят нечеткие предикаты. *Нечетким предикатом* назовем отображение $\boldsymbol{P^F}: \boldsymbol{X^n}$ —>[0, 1], где $\boldsymbol{X}=\{x\}$, *n* - любое натуральное число, принадлежащее отрезку [0, 1]. Число, которое предикат ставит в соответствие конкретному набору ($x_{k_1}, x_{k_2}, \dots, x_{k_k}$), где $k_i \in \overline{1,n}$, будем называть *степенью принадлежности* описываемого данным набором высказывания к множеству истинных высказываний или коротко - *степенью истинности,* Интерпретация степени истинности, как и для функции принадлежности, может быть следующей: степень истинности это вероятность того, что лицо, принимающее решение (ЛПР) назовет высказывание истинным.

Нечеткие логические выражения (или нечеткие формулы) отличаются от обычных наличием в их формулировках лингвистических и нечетких переменных и нечетких отношений (предикатов).

Приведем примеры.

1. Нечеткий предикат примерного равенства $\boldsymbol{AE}\{\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\}: x \approx y$, где $x,y \in \boldsymbol{R^1}$.

2. Нечеткий предикат порядка **GT{C,H): C > H,** где **C, H -** нечеткие числа.

Пусть μ_1 и μ_2 - степени истинности высказываний $\boldsymbol{P_1^F}$ и $\boldsymbol{P_2^F}$ (в которые превращаются нечеткие предикаты $\boldsymbol{P_1^F}$ и $\boldsymbol{P_2^F}$ после подстановки вместо переменных $(x_{k_1} - x_{k_k})$ элементов множества $\boldsymbol{X}$*)*. Тогда степень истинности сложного высказывания, образованного из $\boldsymbol{P_1^F}$ и $\boldsymbol{P_2^F}$ с помощью операций дизъюнкции, конъюнкции и отрицания, может быть определена следующим образом:

$$\mu(P_1^F \vee P_2^F) = \oplus(\mu_1, \mu_2); \quad (6.2.19)$$

$$\mu(P_1^F \wedge P_2^F) = \otimes(\mu_1, \mu_2); \quad (6.2.20)$$

$$\mu(\rceil P_1^F) = 1 - \mu \quad (6.2.21)$$

Здесь операций ⊕ и ⊗ соответствуют операциям объединения и пересечения нечетких множеств. При минимаксной интерпретации функции принадлежности

$$\oplus(\mu_1, \mu_2) = \max\{\mu_1, \mu_2\}, \quad (6.2.22)$$

$$T : z \to \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}, \alpha\delta - \beta\gamma \neq 0 \quad (6.2.23)$$

Нечеткой называется логика, в которой степень истинности высказываний определяется выражениями (6.2.19)- (6.2.23).

Степень истинности более сложных высказываний можно определить, последовательно сворачивая их с учетом старшинства операций и применяя формулы (6.2.19) - (6.2.21). Задание нечетких предикатов производится путем специального опроса ЛПР или с помощью нечетких алгоритмов. В рамках нечеткой логики обобщен известный метод резолюций.

Рассмотрим условный нечеткий оператор общего вида

*если **У** то **Ф** иначе **Е***, (6.2.24)

где ***У*** - некоторое нечеткое логическое выражение (условие); ***Ф*** и ***Е*** - группы нечетких операторов (в частности, в эти группы могут входить и обычные четкие операторы). Результат выполнения условного оператора (1.24) определим выражением

У (если ***У*** то ***Ф*** иначе ***Е***) = $\{\mu_y$ / ***V(Ф),*** $(1 - \mu_y)$***/V(E)***$\}$ (6.2.25}

где ***У***(ξ) — результат выполнения оператора ξ ; μ_y - степень истинности условия ***У***.

Таким образом, результатом выполнения условного нечеткого оператора является нечеткое множество результатов выполнения соответствующих групп нечетких операторов. Содержательно определение (6.2.25) означает, что начинают выполняться обе группы нечетких операторов ***Ф*** и ***Е***, однако каждая группа помечается своей меткой - степенью истинности.

При необходимости однозначного определения группы операторов продолжения можно воспользоваться двумя способами.

1. Задать порог степени истинности $\gamma_0 \in (0, 1)$. Вычислить μ_y.

Тогда

$$У(если \quad У\ то\ Ф \quad иначе\ E) = \begin{cases} V(Ф), если & \mu_y \geq \gamma_0; \\ V(E), если & \mu_y < \gamma_0. \end{cases} \quad (6.2.26)$$

Здесь следует обратить внимание на значение $\gamma_0 = 0{,}5$. Оно относится к случаю, когда переход к выполнению группы нечетких операторов ***Ф*** осуществляется, если условие ***У*** более истинно, чем ложно. Увеличение γ_0 свыше 0,5 означает повышение требований к уровню определенности заключения об истинности ***У***.

2. Вычислить μ_y.. Разыграть равномерную распределенную на интервале (0, 1) случайную величину. Пусть полученное значение есть γ_0. Тогда искомый результат определяется выражением (6.2.26). Здесь μ_y рассматривается как вероятность истинности условия ***У***.

В общем случае степень истинности оказывается не числом из отрезка [0, I], а нечетким числом. Логика, в которой степени истинности являются нечеткими числами, называется *лингвистической.* Заметим, что иногда нечеткую логику называют многозначной, а лингвистическую логику - нечеткой.

Лингвистическая степень истинности (ее значения — нечеткие числа) появляется, в частности, при оценке истинности одних нечетких высказываний относительно других. Пусть имеются высказывания ***W:*** $\langle$***X*** есть ***F***$\rangle$ и ***Q:*** $\langle$***X*** есть ***G***$\rangle$, где ***F*** и ***G*** - нечеткие подмножества ***U***. Тогда истинность ***Q*** относительно ***W*** вычисляется как степень соответствия ***G*** и ***F*** [7]

$$T(W,Q) = \bigcup_{\tau\in[0,1]} \mu_T(\tau)/\tau,$$

где

$$\mu_T(\tau) = \sup_{u:\tau=\mu_G(u)} \mu_F(u).$$

Одним из элементов лингвистической логики является правило истинностной модификации утверждения, которое заключается в следующем. Пусть известно, что лингвистическая степень истинности высказывания ***Q:*** $\langle$***X*** есть ***G***$\rangle$ равна ***T***. Тогда справедливо высказывание ***W:*** $\langle$***X*** есть ***F***$\rangle$, где

$$F = \bigcup_{u\in U} \mu_F(u)/u,$$

$$u = \mu_G^{-1}(\tau),\ \mu_F(u) = \mu_T(\mu_G(u)). \quad (6.2.27)$$

В лингвистической логике вводятся операции над лингвистическими истинностями, определяемые на основе формул (6.2.19) - (6.2.23) по принципу обобщения. Операции позволяют вычислять лингвистическую степень истинности составных логических выражений.

Отдельное направление работ в лингвистической логике связано с изучением построения выводов из нечетких посылок, включающих нечеткие кванторы типа “редко”, “очень часто” и т. п. В [8] предложено решение задачи нахождения квантора φ_B по известным кванторам ρ_A и ρ_B в схеме вывода типа modus ponens

$$\frac{\rho_A A;\ A \Rightarrow \rho_B B}{\mu_B B}. \quad (6.2.28)$$

НЕЧЕТКИЕ МНОЖЕСТВА

Пусть **E** - универсальное множество, ***x*** - элемент **E**, а **R** - некоторое свойство. Обычное (четкое) подмножество **A** универсального множества **E**, элементы которого удовлетворяют свойству **R**, определяется как множество упорядоченных пар **A =** $\{\mu_A(x)/x\}$, где
$\mu_A(x)$ - *характеристическая функция*, принимающая значение **1**, если ***x*** удовлетворяет свойству **R,** и **0** - в противном случае.

Нечеткое подмножество отличается от обычного тем, что для элементов ***x*** из **E** нет однозначного ответа *"да-нет"* относительно свойства **R**. В связи с этим, нечеткое подмножество **A** универсального множества **E** определяется как множество упорядоченных пар **A =**

$\{\mu_A(x)/x\}$, где

$\mu_A(x)$ - *характеристическая функция принадлежности* (или просто функция принадлежности), принимающая значения в некотором вполне упорядоченном множестве **M** (например, **M = [0,1]**). Функция принадлежности указывает *степень* (или уровень) принадлежности элемента x подмножеству **A**. Множество **M** называют *множеством принадлежностей*. Если **M = {0,1}**, то нечеткое подмножество **A** может рассматриваться как обычное или четкое множество.

Примеры записи нечеткого множества

Пусть $E = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$, M = **[0,1]**; A - нечеткое множество, для которого

$$\mu_A(x_1)=0,3;$$
$$\mu_A(x_2)=0;$$
$$\mu_A(x_3)=1;$$
$$\mu_A(x_4)=0,5;$$
$$\mu_A(x_5)=0,9.$$

Тогда **A** можно представить в виде:

A = $\{0,3/x_1;\ 0/x_2;\ 1/x_3;\ 0,5/x_4;\ 0,9/x_5\}$ или

A = $0,3/x_1 + 0/x_2 + 1/x_3 + 0,5/x_4 + 0,9/x_5$, или

A =

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
0,3	0	1	0,5	0,9

Основные характеристики нечетких множеств

Пусть **M = [0,1]** и **A** - нечеткое множество с элементами из универсального множества **E** и множеством принадлежностей **M**.

- Величина $\sup\limits_{x\in E} \mu_A(x)$ называется ***высотой*** нечеткого множества **A**. Нечеткое множество **A** ***нормально***, если его высота равна **1**, т.е. верхняя граница его функции принадлежности равна **1** ($\sup\limits_{x\in E} \mu_A(x)=1$). При $\sup\limits_{x\in E} \mu_A(x)<1$ нечеткое множество называется ***субнормальным***.
- Нечеткое множество ***пусто***, если $\forall\ x\in E\ \mu_A(x)=0$. Непустое субнормальное множество можно нормализовать по формуле $\mu_A(x) := \dfrac{\mu_A(x)}{\sup\limits_{x\in E}\mu_A(x)}$.
- Нечеткое множество ***унимодально***, $\mu_A(x)=1$ только на одном x из E.
- ***Носителем*** нечеткого множества **A** является обычное подмножество со свойством $\mu_A(x)>0$, т.е. ***носитель*** **A** = $\{x/\mu_A(x)>0\}\ \forall\ x\in E$.
- Элементы $x\in E$, для которых $\mu_A(x)=0,5$ называются ***точками перехода*** множества **A**.

Примеры нечетких множеств

1. Пусть **E =** {0,1,2,..,10}, M =[0,1]. Нечеткое множество *"несколько"* можно определить следующим образом: "*несколько*" =

0,5/3+0,8/4+1/5+1/6+0,8/7+0,5/8; его характеристики: *высота* **= 1**, *носитель*={3,4,5,6,7,8}, *точки перехода* - {3,8}.

2. Пусть **E = {**0,1,2,3,...,***n***,...**}.** Нечеткое множество "*малый*" можно определить:

$$\text{"малый"} = \left\{ \mu_{\text{"малый"}}(n) = \frac{1}{1+\left(\frac{n}{10}\right)^2} \,/\, n \right\}.$$

3. Пусть **E** = {1,2,3,...,100} и соответствует понятию "*возраст*", тогда нечеткое множество "*молодой*", может быть определено с помощью

$$\mu_{\text{"молодой"}}(x) = \begin{cases} 1, & x \in [1,25] \\ \dfrac{1}{1+\left(\dfrac{x-25}{5}\right)^2}, & x \geq 25 \end{cases}.$$

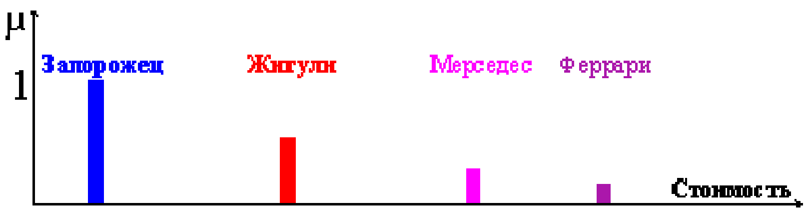
Нечеткое множество "*молодой*" на универсальном множестве **E'** ={*Иванов, Петров, Сидоров,...*} задается с помощью функции принадлежности $\mu_{\text{"молодой"}}(x)$ на **E** = {1,2,3,..100} (возраст), называемой по отношению к **E'** функцией совместимости, при этом:

$\mu_{\text{"молодой"}}$(*Сидоров*):= $\mu_{\text{"молодой"}}(x)$, где x - возраст Сидорова.

4. Пусть **E** = {*Запорожец, Жигули, Мерседес,....*} - множество марок автомобилей, а **E'** = [0,∞) - универсальное множество "*стоимость*", тогда на **E'** мы можем определить нечеткие множества типа: "*для бедных*", "*для среднего класса*", "*престижные*", с функциями принадлежности типа:

Имея эти функции и зная стоимости автомобилей из **E** в данный момент времени, мы тем самым определим на **E'** нечеткие множества с этими же названиями.

Так, например, нечеткое множество "*для бедных*", заданное на универсальном множестве **E** = {*Запорожец, Жигули, Мерседес,....*} выглядит следующим образом:



Аналогично можно определить Нечеткое множество "*скоростные*", "*средние*", "*тихоходные*" и т.д.

О методах построения функций принадлежности нечетких множеств

В приведенных выше примерах использованы ***прямые*** методы, когда эксперт либо просто задает для каждого $\boldsymbol{x \in E}$ значение $\mu_{\mathbf{A}}(\boldsymbol{x})$, либо определяет функцию совместимости. Как правило, прямые методы задания функции принадлежности используются для измеримых понятий, таких как скорость, время, расстояние, давление, температура и т.д., или когда выделяются полярные значения.

Во многих задачах при характеристике объекта можно выделить набор признаков и для каждого из них определить полярные значения, соответствующие значениям функции принадлежности, 0 или 1.
Например в задаче распознавания лиц можно выделить следующие шкалы:

		0	**1**
$\boldsymbol{x}_1$	высота лба	низкий	широкий
$\boldsymbol{x}_2$	профиль носа	курносый	горбатый
$\boldsymbol{x}_3$	длина носа	короткий	длинный
$\boldsymbol{x}_4$	разрез глаз	узкие	широкие
$\boldsymbol{x}_5$	цвет глаз	светлые	темные
$\boldsymbol{x}_6$	форма подбородка	остроконечный	квадратный
$\boldsymbol{x}_7$	толщина губ	тонкие	толстые
$\boldsymbol{x}_8$	цвет лица	темный	светлый
$\boldsymbol{x}_9$	очертание лица	овальное	квадратное

Для конкретного лица **A** эксперт, исходя из приведенной шкалы, задает $\mu_A(\boldsymbol{x}) \in [0,1]$, формируя векторную функцию принадлежности $\{\mu_A(\boldsymbol{x}_1), \mu_A(\boldsymbol{x}_2), \ldots \mu_A(\boldsymbol{x}_9)\}$.

При *прямых* методах используются также групповые прямые методы, когда, например, группе экспертов предъявляют конкретное лицо и каждый должен дать один из двух ответов: "*этот человек лысый*" *или "этот человек не лысый*", тогда количество утвердительных ответов, деленное на общее число экспертов, дает значение $\mu_{\text{"лысый"}}$ (данного лица). (В этом примере можно действовать через функцию совместимости, но тогда придется считать число волосинок на голове у каждого из предъявленных эксперту лиц).

Косвенные методы определения значений функции принадлежности используются в случаях, когда нет элементарных измеримых свойств, через которые определяется интересующее нас нечеткое множество. Как правило, это методы попарных сравнений. Если бы значения функций принадлежности были нам известны, например, $\mu_A(x_i) = w_i$, $i=1,2,\ldots,n$, то попарные сравнения можно представить матрицей отношений $\mathbf{A} = \{a_{ij}\}$, где $a_{ij}=w_i/w_j$ (операция деления).

На практике эксперт сам формирует матрицу **A**, при этом предполагается, что диагональные элементы равны 1, а для элементов симметричных относительно диагонали $a_{ij} = 1/a_{ij}$, т.е. если один элемент оценивается в α раз сильнее чем другой, то этот последний должен быть в $1/\alpha$ раз сильнее, чем первый. В общем случае задача сводится к поиску вектора $\boldsymbol{w}$, удовлетворяющего уравнению вида $\mathbf{A}_w = \lambda_{\max}\boldsymbol{w}$, где $\lambda_{\max}$ - наибольшее собственное значение матрицы **A**. Поскольку матрица **A** положительна по построению, решение данной задачи существует и является положительным.

Операции над нечеткими множествами

Включение.
Пусть **A** и **B** - нечеткие множества на универсальном множестве E.
Говорят, что **A** содержится в **B**, если $\forall x \in E\ \mu_A(x)\ \mu_B(x)$.
Обозначение: $\mathbf{A} \subset \mathbf{B}$.
Иногда используют термин "*доминирование*", т.е. в случае когда $\mathbf{A} \subset \mathbf{B}$, говорят, что **B** доминирует **A**.

Равенство.
A и **B** равны, если $\forall x \in E\ \mu_A(x) = \mu_B(x)$.
Обозначение: **A** = **B**.

Дополнение.
Пусть M = [0,1], **A** и **B** - нечеткие множества, заданные на **E**. **A** и **B** дополняют друг друга, если
$\forall x \in E\ \mu_A(x) = 1 - \mu_B(x)$.
Обозначение: $\mathbf{B} = \overline{\mathbf{A}}$ или $\mathbf{A} = \overline{\mathbf{B}}$.
Очевидно, что $\overline{(\overline{\mathbf{A}})} = \mathbf{A}$. (Дополнение определено для **M** = [0,1], но очевидно, что его можно определить для любого упорядоченного **M**).

Пересечение.
A$\cap$**B** - наибольшее нечеткое подмножество, содержащееся одновременно в **A** и **B**.
$\mu A\cap B(x) = \min(\mu_A(x), \mu_B(x))$.

Объединение.
A $\cup$ **B** - наименьшее нечеткое подмножество, включающее как **A**, так и **B**, с функцией принадлежности:
$\mu A\cup B(x) = \max(\mu_A(x), \mu_B(x))$.

Разность.
$\mathbf{A} - \mathbf{B} = \mathbf{A}\cap\overline{\mathbf{B}}$ с функцией принадлежности:
$\mu_{A-B}(x) = \mu A\cap\overline{B}\ (x) = \min(\mu_A(x), 1 - \mu_B(x))$.

Дизъюнктивная сумма.
$\mathbf{A}\oplus\mathbf{B} = (\mathbf{A} - \mathbf{B})\cup(\mathbf{B} - \mathbf{A}) = (\mathbf{A} \cap \overline{\mathbf{B}}) \cup (\overline{\mathbf{A}} \cap \mathbf{B})$ с функцией принадлежности:
$\mu_{A-B}(x) = \max\{[\min\{\mu_A(x), 1 - \mu_B(x)\}];[\min\{1 - \mu_A(x), \mu_B(x)\}]\}$
<u>Примеры.</u>
Пусть:

$$\mathbf{A} = 0{,}4/\ \mathbf{x}_1 + 0{,}2/\ \mathbf{x}_2 + 0/\ \mathbf{x}_3 + 1/\ \mathbf{x}_4;$$
$$\mathbf{B} = 0{,}7/\ \mathbf{x}_1 + 0{,}9/\ \mathbf{x}_2 + 0{,}1/\ \mathbf{x}_3 + 1/\ \mathbf{x}_4;$$
$$\mathbf{C} = 0{,}1/\ \mathbf{x}_1 + 1/\ \mathbf{x}_2 + 0{,}2/\ \mathbf{x}_3 + 0{,}9/\ \mathbf{x}_4.$$

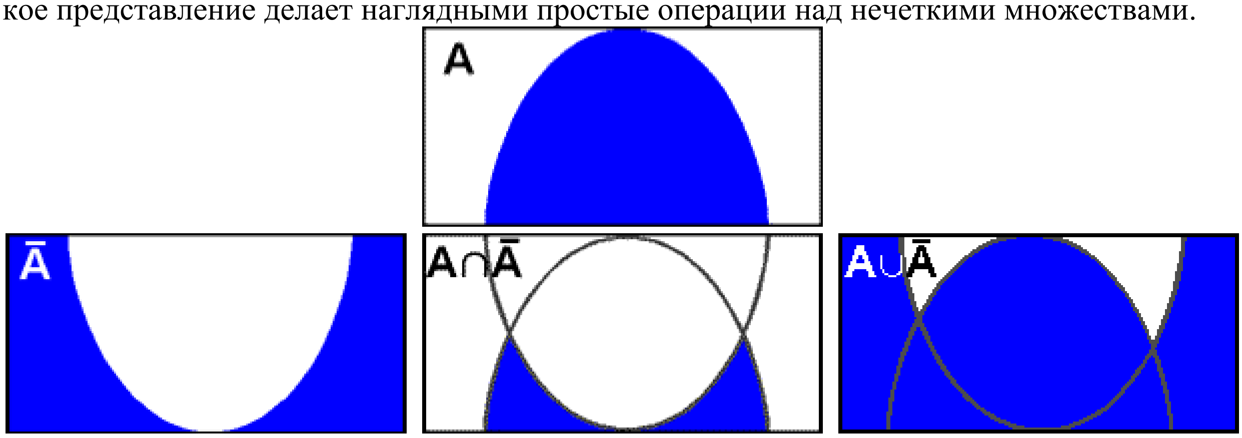
Здесь:

1. **A**$\subset$**B**, т.е. **A** содержится в **B** или **B** доминирует **A**, **C** *несравнимо* ни с **A**, ни с **B**, т.е. пары {**A, C**} и {**A, C**} - пары недоминируемых нечетких множеств.
2. $\mathbf{A} \neq \mathbf{B} \neq \mathbf{C}$.
3. $\overline{\mathbf{A}} = 0{,}6/\ \mathbf{x}_1 + 0{,}8/\mathbf{x}_2 + 1/\mathbf{x}_3 + 0/\mathbf{x}_4;$
   $\overline{\mathbf{B}} = 0{,}3/\mathbf{x}_1 + 0{,}1/\mathbf{x}_2 + 0{,}9/\mathbf{x}_3 + 0/\mathbf{x}_4.$

4. $\mathbf{A} \cap \mathbf{B} = 0{,}4/\mathbf{x}_1 + 0{,}2/\mathbf{x}_2 + 0/\mathbf{x}_3 + 1/\mathbf{x}_4$.
5. $\mathbf{A} \cup \mathbf{B} = 0{,}7/\mathbf{x}_1 + 0{,}9/\mathbf{x}_2 + 0{,}1/\mathbf{x}_3 + 1/\mathbf{x}_4$.
6. $\mathbf{A} - \mathbf{B} = \mathbf{A} \cap \overline{\mathbf{B}} = 0{,}3/\mathbf{x}_1 + 0{,}1/\mathbf{x}_2 + 0/\mathbf{x}_3 + 0/\mathbf{x}_4$;
   $\mathbf{B} - \mathbf{A} = \overline{\mathbf{A}} \cap \mathbf{B} = 0{,}6/\mathbf{x}_1 + 0{,}8/\mathbf{x}_2 + 0{,}1/\mathbf{x}_3 + 0/\mathbf{x}_4$.
7. $\mathbf{A} \oplus \mathbf{B} = 0{,}6/\mathbf{x}_1 + 0{,}8/\mathbf{x}_2 + 0{,}1/\mathbf{x}_3 + 0/\mathbf{x}_4$.

Наглядное представление операций над нечеткими множествами

Для нечетких множеств можно строить визуальное представление. Рассмотрим прямоугольную систему координат, на оси ординат которой откладываются значения $\mu_{\mathbf{A}}(x)$, на оси абсцисс в произвольном порядке расположены элементы **E** (мы уже использовали такое представление в примерах нечетких множеств). Если **E** по своей природе упорядочено, то этот порядок желательно сохранить в расположении элементов на оси абсцисс. Такое представление делает наглядными простые операции над нечеткими множествами.



На верхней части рисунка заштрихованная часть соответствует нечеткому множеству **A** и, если говорить точно, изображает область значений **A** и всех нечетких множеств, содержащихся в **A**. На нижней - даны $\overline{\mathbf{A}}$, $\mathbf{A} \cap \overline{\mathbf{A}}$, $\mathbf{A} \cup \overline{\mathbf{A}}$.

Свойства операций ∪ и ∩.

Пусть **A, B, C** - нечеткие множества, тогда выполняются следующие свойства:

- $\left.\begin{aligned} \mathbf{A} \cap \mathbf{B} = \mathbf{B} \cap \mathbf{A} \\ \mathbf{A} \cup \mathbf{B} = \mathbf{B} \cup \mathbf{A} \end{aligned}\right\}$ - коммутативность;
- $\left.\begin{aligned} (\mathbf{A} \cap \mathbf{B}) \cap \mathbf{C} = \mathbf{A} \cap (\mathbf{B} \cap \mathbf{C}) \\ (\mathbf{A} \cup \mathbf{B}) \cup \mathbf{C} = \mathbf{A} \cup (\mathbf{B} \cup \mathbf{C}) \end{aligned}\right\}$ - ассоциативность;
- $\left.\begin{aligned} \mathbf{A} \cap \mathbf{A} = \mathbf{A} \\ \mathbf{A} \cup \mathbf{A} = \mathbf{A} \end{aligned}\right\}$ - идемпотентность;
- $\left.\begin{aligned} \mathbf{A} \cap (\mathbf{B} \cup \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \cap \mathbf{B}) \cup (\mathbf{A} \cap \mathbf{C}) \\ \mathbf{A} \cup (\mathbf{B} \cap \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \cup \mathbf{B}) \cap (\mathbf{A} \cup \mathbf{C}) \end{aligned}\right\}$ - дистрибутивность;
- $\mathbf{A} \cup \varnothing = \mathbf{A}$, где $\varnothing$ - *пустое множество*, т.е. $\mu_\varnothing(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ $\forall$>$\mathbf{x} \in \mathbf{E}$;
- $\mathbf{A} \cap \varnothing = \varnothing$;
- $\mathbf{A} \cap \mathbf{E} = \mathbf{A}$, где **E** - универсальное множество;
- $\mathbf{A} \cup \mathbf{E} = \mathbf{E}$;

- $\left.\begin{array}{l}\overline{\mathbf{A}\cap\mathbf{B}}=\overline{\mathbf{A}}\cup\overline{\mathbf{B}}\\ \overline{\mathbf{A}\cup\mathbf{B}}=\overline{\mathbf{A}}\cap\overline{\mathbf{B}}\end{array}\right\}$ - теоремы де Моргана.

В отличие от четких множеств, для нечетких множеств в общем случае:

$$A\cap\overline{\mathbf{A}} \neq \varnothing,$$
$$A\cup\overline{\mathbf{A}} \neq \mathbf{E}.$$

(Что, в частности, проиллюстрировано выше в примере наглядного представления нечетких множеств).

<u>Замечание.</u> Введенные выше операции над нечеткими множествами основаны на использовании операций **max** и **min**. В теории нечетких множеств разрабатываются вопросы построения обобщенных, параметризованных операторов пересечения, объединения и дополнения, позволяющих учесть разнообразные смысловые оттенки соответствующих им связок "*и*", "*или*", "*не*".

Один из подходов к операторам пересечения и объединения заключается в их определении в *классе треугольных норм и конорм*.

Треугольной нормой (***t****-нормой*) называется двуместная действительная функция $\mathbf{T}:[0,1]\times[0,1]\to[0,1]$, удовлетворяющая следующим условиям:

1. $\mathbf{T}(0,0)=0$; $\mathbf{T}(\mu_A, 1) = \mu_A$; $\mathbf{T}(1, \mu_A) = \mu_A$ - *ограниченность*;
2. $\mathbf{T}(\mu_A, \mu_B) \leq \mathbf{T}(\mu_C, \mu_D)$, если $\mu_A\leq\mu_C$, $\mu_B\leq\mu_D$ - *монотонность*;
3. $\mathbf{T}(\mu_A , \mu_B) = \mathbf{T}(\mu_B, \mu_A)$ - *коммутативность*;
4. $\mathbf{T}(\mu_A, \mathbf{T}(\mu_B, \mu_C))= \mathbf{T}(\mathbf{T}(\mu_A, \mu_B), \mu_C)$ - *ассоциативность*;

Простым случаем треугольных норм являются:

$\mathbf{min}(\mu_A , \mu_B)$
произведение $\mu_A\cdot\mu_B$
$\mathbf{max}(0, \mu_A + \mu_B -1)$.

Треугольной конормой (***t****-конормой*) называется двуместная действительная функция $\perp:[0,1]\times[0,1]\to [0,1]$, со свойствами:

1. $\mathbf{T}(1,1) = 1$; $\mathbf{T}(\mu_A ,0) = \mu_A$; $\mathbf{T}(0, \mu_A) = \mu_A$ - *ограниченность*;
2. $\mathbf{T}(\mu_A, \mu_B)\geq \mathbf{T}(\mu_C, \mu_D)$, если $\mu_A \geq\mu_C$, $\mu_B \geq\mu_D$ - *монотонность*;
3. $\mathbf{T}(\mu_A , \mu_B) = \mathbf{T}(\mu_B , \mu_A)$ - *коммутативность*;
4. $\mathbf{T}(\mu_A, \mathbf{T}(\mu_B , \mu_C)) = \mathbf{T}(\mathbf{T}(\mu_A , \mu_B), \mu_C)$ - *ассоциативность*.

Примеры ***t***-конорм:

$\mathbf{max}(\mu_A, \mu_B)$
$\mu_A + \mu_B - \mu_A\cdot \mu_B$
$\mathbf{min}(1, \mu_A + \mu_B)$.

Алгебраические операции над нечеткими множествами

<u>Алгебраическое произведение</u> **A** и **B** обозначается **A·B** и определяется так:
$\forall \mathbf{x}\in\mathbf{E}\ \mu_{A\cdot B}(x) = \mu_A(x)\mu_B(x)$.

<u>Алгебраическая сумма</u> этих множеств обозначается $\mathbf{A}\hat{+}\mathbf{B}$ и определяется так:

$\forall x \in E$ $\mu_{A\hat{+}B} = \mu_A(x) + \mu_B(x) - \mu_A(x)\mu_B(x)$.

Для операций $\{\cdot, \hat{+}\}$ выполняются свойства:

- $\left.\begin{array}{l} \mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = \mathbf{B}\cdot\mathbf{A} \\ \mathbf{A}\hat{+}\mathbf{B} = \mathbf{B}\hat{+}\mathbf{A} \end{array}\right\}$ - коммутативность;
- $\left.\begin{array}{l} (\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})\cdot\mathbf{C} = \mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}\cdot\mathbf{C}) \\ (\mathbf{A}\hat{+}\mathbf{B})\hat{+}\mathbf{C} - \mathbf{A}\hat{+}(\mathbf{B}\hat{+}\mathbf{C}) \end{array}\right\}$ - ассоциативность;
- $\mathbf{A}\cdot\varnothing = \varnothing$, $\mathbf{A}\hat{+}\varnothing = \mathbf{A}$, $\mathbf{A}\cdot\mathbf{E} = \mathbf{A}$, $\mathbf{A}\hat{+}\mathbf{E} = \mathbf{E}$
- $\left.\begin{array}{l} \overline{\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}} = \overline{\mathbf{A}}\hat{+}\overline{\mathbf{B}} \\ \overline{\mathbf{A}\hat{+}\mathbf{B}} = \overline{\mathbf{A}}\cdot\overline{\mathbf{B}} \end{array}\right\}$ - теоремы де Моргана.

Не выполняются:

- $\left.\begin{array}{l} \mathbf{A}\cdot\mathbf{A} = \mathbf{A} \\ \mathbf{A}\hat{+}\mathbf{A} = \mathbf{A} \end{array}\right\}$ - идемпотентность;
- $\left.\begin{array}{l} \mathbf{A}\ (\mathbf{B}\hat{+}\mathbf{C}) = (\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})\hat{+}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{C}) \\ \mathbf{A}\hat{+}(\mathbf{B}\mathbf{C}) = (\mathbf{B}\hat{+}\mathbf{A})\cdot(\mathbf{A}\hat{+}\mathbf{C}) \end{array}\right\}$ - дистрибутивность;
- а также $\mathbf{A}\cdot\overline{\mathbf{A}} = \varnothing$, $\mathbf{A}\hat{+}\overline{\mathbf{A}} = \mathbf{E}$.

<u>Замечание</u>. Доказательства приводимых свойств операций над нечеткими множествами мы оставляем читателю.

Для примера докажем свойство: $\mathbf{A}$. Обозначим $\mu_A(x)$ через a, $\mu_B(x)$ через b. Тогда в левой части для каждого элемента x имеем: $1-ab$, а в правой: $(1-a)+(1-b)-(1-a)(1-b) = 1-a+1-b-1+a+b-ab = 1-ab$.

Докажем, что свойство дистрибутивности не выполняется, т.е. $\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}\hat{+}\mathbf{C}) \neq (\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})\hat{+}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{C})$.
Для левой части имеем: $a(b+c-bc) = ab+ac-abc$; для правой: $ab+ac-(ab)(ac) = ab+ac+a^2bc$.
Это означает, что дистрибутивность не выполняется при $a \neq a^2$.

<u>Замечание.</u> При совместном использовании операций $\{\cup, \cap, +, \cdot\}$ выполняются свойства:

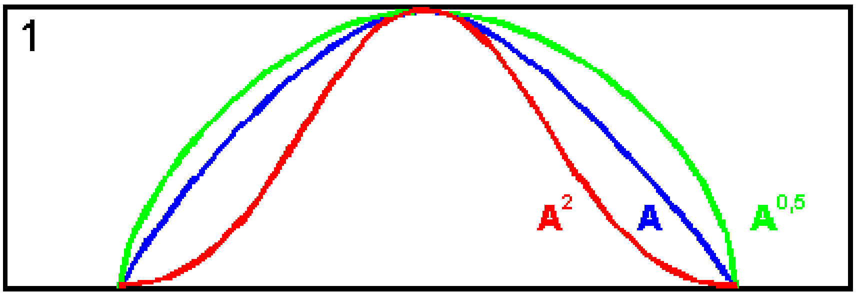
- $\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}\cup\mathbf{C}) = (\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})\cup(\mathbf{A}\cdot\mathbf{C})$;
- $\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}\cap\mathbf{C}) = (\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})\cap(\mathbf{A}\cdot\mathbf{C})$;
- $\mathbf{A}\hat{+}(\mathbf{B}\cup\mathbf{C}) = (\mathbf{A}\hat{+}\mathbf{B})\cup(\mathbf{A}\hat{+}\mathbf{C})$;
- $\mathbf{A}\hat{+}(\mathbf{B}\cap\mathbf{C}) = (\mathbf{A}\hat{+}\mathbf{B})\cap(\mathbf{A}\hat{+}\mathbf{C})$.

Продолжим обзор основных операций над нечеткими множествами.

На основе операции алгебраического произведения (по крайней мере для целых α эта основа очевидна) определяется операция <u>*возведения в степень*</u> α нечеткого множества **A**, где α - положительное число. Нечеткое множество $\mathbf{A}\alpha$ определяется функцией принадлежности $\mu_A{}^\alpha = \mu^\alpha{}_A(x)$. Частным случаем возведения в степень являются:

- $\mathbf{CON(A) = A^2}$ - операция *концентрирования*,
- $\mathbf{DIL(A) = A^{0,5}}$ - операция *растяжения*,

которые используются при работе с лингвистическими неопределенностями.



Умножение на число. Если α - положительное число, такое, что $\alpha \max_{x \in A} \mu_A(x) \leq 1$, то нечеткое множество α**A** имеет функцию принадлежности:

$$\mu\alpha A(x) = \alpha\mu A(x).$$

Выпуклая комбинация нечетких множеств. Пусть $A_1, A_2, .., A_n$ - нечеткие множества универсального множества **E**, а $\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n$ - неотрицательные числа, сумма которых равна 1.
Выпуклой комбинацией $A_1, A_2, .., A_n$ называется нечеткое множество **A** с функцией принадлежности:
$\forall x \in E\ \mu_A(x_1, x_1, ..., x_n) = \omega_1\mu_{A1}(x) + \omega_2\mu_{A2}(x) + ... + \omega_n\mu_{Ai}(x)$.

Декартово произведение нечетких множеств. Пусть $A_1, A_2, ..., A_n$ - нечеткие подмножества универсальных множеств $E_1, E_2, ..., E_n$ соответственно. Декартово произведение $A = A_1 \times A_2 \times ... \times A_n$ является нечетким подмножеством множества $E = E_1 \times E_2 \times ... \times E_n$ с функцией принадлежности:

$$\mu_A(x_1, x_1, ..., x_n) = \min\{ \mu_{A1}(x_1), \mu_{A2}(x_2), ..., \mu_{Ai}(x_n) \}.$$

Оператор увеличения нечеткости используется для преобразования четких множеств в нечеткие и для увеличения нечеткости нечеткого множества.
Пусть **A** - нечеткое множество, **E** - универсальное множество и для всех $x \in E$ определены нечеткие множества **K**(x). Совокупность всех **K**(x) называется ядром оператора увеличения нечеткости **Ф**. Результатом действия оператора **Ф** на нечеткое множество А является нечеткое множество вида:

$$\Phi(A, K) = \bigcup_{x \in E} \mu_A(x)K(x),$$

где $\mu_A(x)K(x)$ - произведение числа на нечеткое множество.

Пример:

E = {1,2,3,4};
A = 0,8/1+0,6/2+0/3+0/4;
K(1) = 1/1+0,4/2;
K(2) = 1/2+0,4/1+0,4/3;
K(3) = 1/3+0,5/4;
K(4) = 1/4.

Тогда

$$\mathbf{\Phi(A,K)} = \mu_A(1)\,\mathbf{K}(1) \cup \mu_A(2)\mathbf{K}(2) \cup \mu_A(3)\mathbf{K}(3) \cup \mu_A(4)\mathbf{K}(4) =$$
$$= 0{,}8(1/1+0{,}4/2) \cup 0{,}6(1/2+0{,}4/1+0{,}4/3) =$$
$$= 0{,}8/1+0{,}6/2+0{,}24/3.$$

Четкое множество α-уровня (или уровня α). Множеством α-уровня нечеткого множества **A** универсального множества **E** называется *четкое* подмножество **A**α универсального множества **E**, определяемое в виде:

$$\mathbf{A}\alpha = \{\boldsymbol{x}/\mu_{\mathbf{A}}(\boldsymbol{x}) \geq \alpha\},\ \text{где } \alpha \leq 1.$$

Пример: $\mathbf{A} = 0{,}2/x_1 + 0/x_2 + 0{,}5/x_3 + 1/x_4$,

тогда $\mathbf{A}_{0.3} = \{\boldsymbol{x}_3, \boldsymbol{x}_4\}$,

$\mathbf{A}_{0.7} = \{\boldsymbol{x}_4\}$.

Достаточно очевидное свойство: если $\alpha_1 \geq \alpha_2$, то $\mathbf{A}_{\alpha 1} \leq \mathbf{A}_{\alpha 2}$.

Теорема о декомпозиции. Всякое нечеткое множество **A** разложимо по его множествам уровня в виде:

$\mathbf{A} = \bigcup\limits_{x \in M} \alpha \mathbf{A}_{\alpha}$, где $\alpha\mathbf{A}_\alpha$ - произведение числа α на множество **A**, и α "пробегает" область значений **M** функции принадлежности нечеткого множества **A**.

Пример: $\mathbf{A} = 0{,}1/\boldsymbol{x}_1 + 0/\boldsymbol{x}_2 + 0{,}7/\boldsymbol{x}_3 + 1/\boldsymbol{x}_4$ представимо в виде:

$$\mathbf{A} = 0{,}1(1,0,1,1) \cup 0{,}7(0,0,1,1,) \cup 1(0,0,0,1)=$$
$$= (0{,}1/x_1 + 0/x_2 + 0{,}1/x_3 + 0{,}1/x_4) \cup (0/x_1 + 0/x_2 + 0{,}7/x_3 + 0{,}7/x_4) \cup$$
$$\cup (0/x_1 + 0/x_2 + 0/x_3 + 1/x_4) = 0{,}1/x_1 + 0/x_2 + 0{,}7/x_3 + 1/x_4 .$$

Если область значений функции принадлежности состоит из $\boldsymbol{n}$ градаций $\alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \alpha_3 \leq \ldots \leq \alpha_n$, то **A** (при фиксированных значениях градаций) представимо в виде:

$$\mathbf{A} = \bigcup_{i=1}^{n} \alpha_i \mathbf{A}_{\alpha i},$$

т.е. определяется совокупностью обычных множеств $\{\mathbf{A}_{\alpha 1}, \mathbf{A}_{\alpha 2}, \ldots, \mathbf{A}_{\alpha i}\}$, где $\mathbf{A}_{\alpha 1} \geq \mathbf{A}_{\alpha 2} \geq, \ldots, \geq \mathbf{A}_{\alpha i}$.

Расстояние между нечеткими множествами, индексы нечеткости

Пусть **A** и **B** - нечеткие подмножества универсального множества **E**. Введем понятие расстояния ρ(**A**, **B**) между нечеткими множествами. При введении расстояния обычно предъявляются следующие требования:

1. $\rho(\mathbf{A}, \mathbf{B}) \geq 0$ - неотрицательность;
2. $\rho(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = \rho(\mathbf{B}, \mathbf{A})$ - симметричность;
3. $\rho(\mathbf{A}, \mathbf{B}) < \rho(\mathbf{A}, \mathbf{C}) + \rho(\mathbf{C}, \mathbf{B})$.

К этим трем требованиям можно добавить четвертое: $\rho(\mathbf{A}, \mathbf{A}) = 0$.

Определим следующие расстояния по формулам:

Расстояние Хемминга (или *линейное расстояние*):

$$\rho(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = \sum_{i=1}^{n} |\mu_{\mathbf{A}}(x_i) - \mu_{\mathbf{B}}(x_i)| .$$

Очевидно, что $\rho(\mathbf{A}, \mathbf{B}) \in [0, n]$.

Евклидово или квадратичное расстояние:

$$\varepsilon(\mathbf{A},\mathbf{B}) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left(\mu_{\mathbf{A}}(x_i) - \mu_{\mathbf{B}}(x_i)\right)^2}, \quad \varepsilon(\mathbf{A},\mathbf{B}) \in [0, \sqrt{n}\,].$$

<u>Относительное расстояние Хемминга:</u>

$$\rho(\mathbf{A},\mathbf{B}) = \frac{1}{n}\sum_{i-1}^{n}\left|\mu_{\mathbf{A}}(x_i) - \mu_{\mathbf{B}}(x_i)\right|, \quad \rho(\mathbf{A},\mathbf{B}) \in [0,1].$$

<u>Относительное евклидово расстояние:</u>

$$\varepsilon(\mathbf{A},\mathbf{B}) = \frac{1}{\sqrt{n}}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left(\mu_{\mathbf{A}}(x_i) - \mu_{\mathbf{B}}(x_i)\right)^2}, \quad \varepsilon(\mathbf{A},\mathbf{B}) \in [0,1].$$

Расстояние Хемминга и квадратичное расстояние, в случае когда **E** бесконечно, определяются аналогично с условием сходимости соответствующих сумм:
если **E** счетное, то

$$\rho(\mathbf{A},\mathbf{B}) = \sum_{i=1}^{\infty}\left|\mu_{\mathbf{A}}(x_i) - \mu_{\mathbf{B}}(x_i)\right|,$$

$$\varepsilon(\mathbf{A},\mathbf{B}) = \sqrt{\sum_{i-1}^{\infty}\left(\mu_{\mathbf{A}}(x_i) - \mu_{\mathbf{B}}(x_i)\right)^2};$$

если **E** = **R** (числовая ось), то

$$\rho(\mathbf{A},\mathbf{B}) = \int_{-\infty}^{\infty}\left|\mu_{\mathbf{A}}(x_i) - \mu_{\mathbf{B}}(x_i)\right|dx,$$

$$\varepsilon(\mathbf{A},\mathbf{B}) = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty}\left(\mu_{\mathbf{A}}(x_i) - \mu_{\mathbf{B}}(x_i)\right)^2 dx}.$$

<u>Замечание.</u> Здесь приведены два наиболее часто встречающихся определения понятия расстояния. Разумеется, для нечетких множеств можно ввести и другие определения понятия расстояния.

Перейдем к *индексам нечеткости* или *показателям размытости* нечетких множеств. Если объект ***x*** обладает свойством ***R*** (порождающим нечеткое множество **A**) лишь в частной мере, т.е.
$0<\mu_{\mathbf{A}}(\boldsymbol{x})<1$, то внутренняя неопределенность, двусмысленность объекта ***x*** в отношении **R** проявляется в том, что он, хотя и в разной степени, принадлежит сразу двум противоположным классам: классу объектов, "обладающих свойством **R**", и классу объектов, "не обладающих свойством **R**". Эта двусмысленность максимальна, когда степени принадлежности объекта обеим классам равны, т.е. $\mu_{\mathbf{A}}(x) = \mu_{\bar{\mathbf{A}}}(x) = 0{,}5$, и минимальна, когда объект принадлежит только одному классу, т.е. либо $\mu_{\mathbf{A}}(x) = 1$ и $\mu_{\bar{\mathbf{A}}}(\boldsymbol{x}) = 0$, либо $\mu_{\mathbf{A}}(x) = 0$ и $\mu_{\bar{\mathbf{A}}}(\boldsymbol{x}) = 1$.
В общем случае показатель размытости нечеткого множества можно определить в виде функционала **d(A)** со значениями в **R** (положительная полуось), удовлетворяющего условиям:

1. **d(A)** = 0 тогда и только тогда, когда **A** - обычное множество;
2. **d(A)** максимально тогда и только тогда, когда $\mu_{\mathbf{A}}(x) = 0.5$ для всех $\boldsymbol{x \in E}$.
3. **d(A)d(B)**, если **A** является *заострением* ***B***, т.е.
   $\mu_{\mathbf{A}}(x) \le \mu_{\mathbf{B}}(x)$ при $\mu_{\mathbf{B}}(x) < 0{,}5$;
   $\mu_{\mathbf{A}}(x) \ge \mu_{\mathbf{B}}(x)$ при $\mu_{\mathbf{B}}(x) > 0{,}5$;
   $\mu_{\mathbf{A}}(x)$- любое при $\mu_{\mathbf{B}}(x) = 0{,}5$.

4. $\mathbf{d(A) = d(\bar{A})}$ - симметричность по отношению к 0,5.
5. $\mathbf{d(A\cup B)+d(A\cap B) = d(A)+d(B)}$.

Замечание. Приведенная система аксиом при введении конкретных показателей размытости часто используется частично, т.е., например, ограничиваются свойствами **P1, P2** и **P3**, либо некоторые свойства усиливаются или ослабляются в зависимости от решаемой задачи.
Рассмотрим индексы нечеткости (показатели размытости), которые можно определить, используя понятие расстояния.

Обычное множество, ближайшее к нечеткому

Пусть **A** - нечеткое множество. *Вопрос:* какое обычное множество $\underline{\mathbf{A}}\subset\mathbf{E}$ является ближайшим к **A**, т.е. находится на наименьшем евклидовом расстоянии от нечеткого множества **A**. Таким подмножеством, обозначаемым $\underline{\mathbf{A}}$, является подмножеством с характеристической функцией:

$$\mu_{\underline{A}}(x_i) = \begin{cases} 0, & \text{если } \mu_A(x_i) < 0{,}5 \\ 1, & \text{если } \mu_A(x_i) > 0{,}5 \\ 0 \text{ или } 1, & \text{если } \mu_A(x_i) = 0{,}5 \end{cases}.$$

Обычно принимают $\mu_{\mathbf{A}}(x_i) = 0$, если $\mu_{\mathbf{A}}(x_i) = 0{,}5$.
Используя понятие обычного множества, ближайшего к нечеткому, введем следующие индексы нечеткости нечеткого множества **A**.
Линейный индекс нечеткости:

$$d(A) = \frac{2}{n}\rho(A,\underline{A}).$$

Здесь $\rho(\mathbf{A}, \underline{\mathbf{A}})$ - линейное (хеммингово) расстояние, множитель - $\frac{2}{n}$ обеспечивает выполнение условия $0\le d(\mathbf{A})\le 1$.

Квадратичный индекс нечеткости

$$d(A) = \frac{2}{\sqrt{n}}\varepsilon(A,\underline{A})$$

, $0\le d(\mathbf{A})\le 1$.
Здесь $\varepsilon(\mathbf{A}, \underline{\mathbf{A}})$ - квадратичное (евклидово) расстояние.

Замечания.

1. Мы ввели линейный и квадратичный индексы нечеткости, используя понятие расстояния и понятие обычного множества, ближайшего к нечеткому. Эти же индексы можно определить, используя операцию дополнения, следующим образом:

$$d(A) = \frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n}\min(\mu_A(x_i),\mu_{\bar{A}}(x_i))$$ - линейный индекс,

$$d(A) = \frac{2}{\sqrt{n}}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\min(\mu_A^2(x_i),\mu_{\bar{A}}^2(x_i))}$$ - квадратичный индекс.

2. Отметим следующие свойства, связанные с ближайшим обычным множеством:
$\underline{\mathbf{A\cap B}}=\underline{\mathbf{A}}\cap\underline{\mathbf{B}}$,

$\mathbf{\underline{A \cup B} = \underline{A} \cup \underline{B}}$;

а также $\forall \mathbf{x} \in \mathbf{E}: |\mu_A(\mathbf{x}_i) - \mu_{\underline{A}}(\mathbf{x}_i)| = \mu_{A \cap \bar{A}}(x_i)$, откуда для линейного индекса нечеткости имеем:

$$d(A) = \frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n}\mu_{A \cap \bar{A}}(x_i),$$

т.е. в этом представлении становится очевидным, что d(**A**)=d($\bar{\mathbf{A}}$).

3. Нечеткое множество с функцией принадлежности $2\mu_{A \cap \bar{A}}(x_i)$ иногда называют векторным индикатором нечеткости.

<u>Оценка нечеткости через энтропию</u>

Ограничимся случаем конечного универсального множества. Энтропия системы с n состояниями $\varepsilon_1, \varepsilon_2, ..., \varepsilon_n$, с которыми связаны вероятности $p_1, p_2, ..., p_n$ определяется выражением:

$$H(p_1, p_2, ..., p_n) = -\frac{1}{\ln n}\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{p}_i \ln \boldsymbol{p}_i, \ H_{min} = 0, \ H_{max} = 1.$$

В случае нечетких множеств положим:

$$\pi_A(x_i) = \frac{\mu_A(x_i)}{\sum_{i=1}^{n}\mu_A(x_i)}$$

Тогда общую формулу, позволяющую подсчитать энтропию по нечеткости, можно записать в следующем виде:

$$H(\pi_A(x_1), \pi_A(x_2), ..., \pi_A(x_n)) = -\frac{1}{\ln n}\sum_{i=1}^{n} \pi_A(x_i) \ln \pi_A(x_i).$$

<u>Замечание.</u> Попытки использования энтропии в теории нечетких множеств (в приведенном выше виде) показали, что это не лучший способ оценки. Однако работы по обобщению понятия энтропии для нечетких множеств продолжаются.

Принцип обобщения

Принцип обобщения - одна из основных идей теории нечетких множеств - носит эвристический характер и используется для расширения области применения нечетких множеств на отображения. Пусть **X** и **Y** - два заданных универсальных множества. Говорят, что имеется функция, определенная на **X** со значением в **Y**, если, в силу некоторого закона f, каждому элементу **X**∈**X** соответствует элемент y∈**Y**.

Когда функцию f: **X**→**Y** называют отображением, значение f(x)∈**Y**, которое она принимает на элементе x∈**X**, обычно называют образом элемента x.

Образом множества **A**⊂X при отображении c→**Y** называют множество f(**A**)⊂**Y** тех элементов **Y**, которые являются образами элементов множества **A**.

<u>Замечание.</u> Мы напомнили классическое определение отображения, которое в теории нечетких множеств принято называть четким отображением, т.к. наряду с ним мы введем понятие нечеткого отображения (или нечеткой функции).

Будем говорить, что имеется нечеткая функция f, определенная на **X** со значением в **Y**, если она каждому элементу x∈**X** ставит в соответствие элемент y∈**Y** со степенью принадлежности $\mu_f(x,y)$. Нечеткая функция f определяет нечеткое отображение $f: \mathbf{X} \xrightarrow{H} \mathbf{Y}$.

Принцип обобщения заключается в том, что при заданном четком f:$\mathbf{X}\to\mathbf{Y}$ или нечетком f:$\mathbf{X}\xrightarrow{H}\mathbf{Y}$ отображении для любого нечеткого множества **A**, заданного на **X**, определяется нечеткое множество f(**A**) на **Y**, являющееся образом **A**.

Пусть f:$\mathbf{X}\to\mathbf{Y}$ заданное четкое отображение,
а $\mathbf{A} = \{\mu_A(x)/x\}$ - нечеткое множество в **X**. Тогда образом **A** при отображении f является нечеткое множество f(**A**) на **Y** с функцией принадлежности:

$$\mu_{f(A)}(y) = \sup_{x\in f^{-1}(y)} \mu_A(x);\ y\in\mathbf{Y},$$

где $f^{-1}(y)=\{x/f(x)=y\}$.
В случае нечеткого отображения f:$\mathbf{X}\xrightarrow{H}\mathbf{Y}$, когда для любых $x\in\mathbf{X}$ и $y\in\mathbf{Y}$ определена двуместная функция принадлежности $\mu_f(x,y)$, образом нечеткого множества **A**, заданного на X, является нечеткое множество f(**A**) на **Y** с функцией принадлежности:

$$\mu_{f(A)}(y) = \sup_{x\in X} \mathbf{min}(\mu_A(x), \mu_f(x,y)).$$

Замечание. Мы не приводим примеров использования принципа обобщения. Предлагаем подумать, каким образом можно определить нечеткое число и как с помощью принципа обобщения (не забывая декартова произведения) и классических операций возведения числа в степень(одноместная), сложения и умножения (двуместные) получать соответствующие нечеткие результаты. К нечетким отображениям мы вернемся, когда будем рассматривать понятие нечеткого отношения.

НЕЧЕТКИЕ ОТНОШЕНИЯ

Пусть $\mathbf{E} = \mathbf{E_1}\times\mathbf{E_2}\times \ldots\times\mathbf{E_n}$ - прямое произведение универсальных множеств и **M** - некоторое множество принадлежностей (например **M** = [0,1]). Нечеткое n-арное отношение определяется как нечеткое подмножество **R** на **E**, принимающее свои значения в **M**. В случае **n**=2 и **M** = [0,1], нечетким отношением **R** между множествами $\mathbf{X} = \mathbf{E_1}$ и $\mathbf{Y} = \mathbf{E_2}$ будет называться функция $\mathbf{R}:(\mathbf{X},\mathbf{Y})\to [0,1]$, которая ставит в соответствие каждой паре элементов $(x,y)\in\mathbf{X}\times\mathbf{Y}$ величину $\mu_{\mathbf{R}}(x,y) \in[0,1]$. Обозначение: нечеткое отношение на $\mathbf{X}\times\mathbf{Y}$ запишется в виде: $x\in\mathbf{X}$, $y\in\mathbf{Y}$: **xRy**. В случае, когда **X = Y**, т.е. **X** и **Y** совпадают, нечеткое отношение **R:** $X\times X\to[0,1]$ называется нечетким отношением на множестве **X**.

Примеры:

1. Пусть $\mathbf{X} = \{x_1,x_2,x_3\}$, $\mathbf{Y} = \{y_1,y_2,y_3,y_4\}$, **M** = [0,1]. Нечеткое отношение **R=XRY** может быть задано, к примеру, таблицей:

	y_1	y_2	y_3	y_4
x_1	0	0	0,1	0,3
x_2	0	0,8	1	0,7
x_3	1	0,5	0,6	1

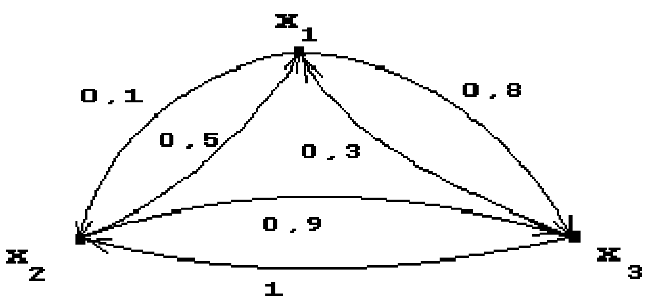
2. Пусть **X** = **Y** = $(-\infty, \infty)$, т.е. множество всех действительных чисел. Отношение x>>y (x много больше y) можно задаеть функцией принадлежности:

$$\mu_R(x,y) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \le y \\ \dfrac{1}{1+\dfrac{1}{(x-y)^2}}, & \text{если } y < x. \end{cases}$$

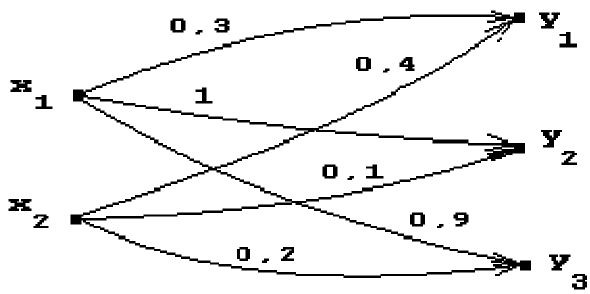
3. Отношение **R**, для которого $\mu_R(x,y) = e^{-k(x-y)2}$, при достаточно больших k можно интерпретировать так: "x и y близкие друг к другу числа".
   В случае конечных или счетных универсальных множеств очевидна интерпретация нечеткого отношения в виде нечеткого графа, в котором пара вершин (x_i,x_j) в случае XRX соединяется ребром с весом $\mu_R(x_i,x_j)$, в случае **XRY** пара вершин (x_i,y_j) соединяется ребром с весом $\mu_R(x_i,y_j)$.

Примеры:

1. Пусть $X=\{x_1,x_2,x_3\}$, и задано нечеткое отношение R: X×X→ [0,1], представимое графом:



2. Пусть $X=\{x_1,x_2\}$ и $Y=\{y_1,y_2,y_3\}$, тогда нечеткий граф вида:



задает нечеткое отношение **XRY**.

Замечание. В общем случае нечеткий граф может быть определен на некотором $\mathbf{G}\subset\mathbf{X}\times\mathbf{Y}$, где **G** - множество упорядоченных пар (x,y) (необязательно всех возможных) такое, что $\mathbf{G}\cap\overline{G} = \varnothing$ и $\mathbf{G}\cup\overline{G} = \mathbf{X}\times\mathbf{Y}$.

Будем использовать обозначения $\bigvee_x$ вместо $\max_x$ и $\bigwedge_x$ вместо $\min_x$.

Пусть **R**: **X**×**Y**→[0,1].

Носитель нечеткого отношения.

Носителем нечеткого отношения **R** называется обычное множество упорядоченных пар (x,y), для которых функция принадлежности положительна:

$$\mathbf{S(R)}=\{(x,y): \mu_{\mathbf{R}}(x,y)>0\}.$$

Нечеткое отношение содержащее данное нечеткое отношение, или содержащееся в нем.
Пусть $\mathbf{R_1}$ и $\mathbf{R_2}$ - два нечетких отношения такие, что:

$$\forall(x,y)\in \mathbf{X}\times \mathbf{Y}: \mu_{\mathbf{R1}}(x,y)\le\mu_{\mathbf{R2}}(x,y),$$

тогда говорят, что $\mathbf{R_2}$ содержит $\mathbf{R_1}$ или $\mathbf{R_1}$ содержится в $\mathbf{R_2}$.

Обозначение: $\mathbf{R_1}\subseteq\mathbf{R_2}$.

Пример:

$$\mu_{R_1}(x,y)=\begin{cases}0, & x>y,\\ 1-e^{-k_1(x-y)^2}; & y\ge x;\end{cases}$$

$$\mu_{R_2}(x,y)=\begin{cases}0, & x>y,\\ 1-e^{-k_2(x-y)^2}, & y\ge x.\end{cases}$$

Отношения $\mathbf{R_1}$, $\mathbf{R_2}$ - отношения типа y>>x (y много больше x). При $k_2 > k_1$ отношение $\mathbf{R_2}$ содержит $\mathbf{R_1}$.

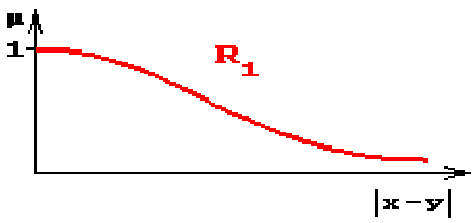
Операции над нечеткими отношениями

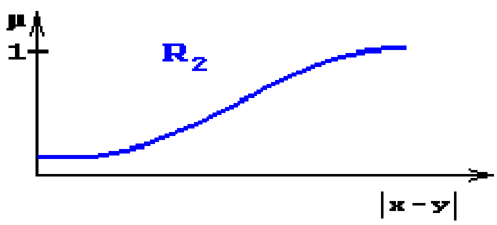
Объединение двух отношений $\boldsymbol{R_1}$ и $\mathbf{R_2}$.
Объединение двух отношений обозначается $\mathbf{R_1}\cup\mathbf{R_2}$ и определяется выражением:

$$\mu_{\mathbf{R1}\cup\mathbf{R2}}(x,y) = \mu_{\mathbf{R1}}(x,y)\vee \mu_{\mathbf{R2}}(x,y)$$

Примеры:

1. Ниже изображены отношения действительных чисел, содержательно означающие: x$\mathbf{R_1}$y - "числа x и y очень близкие", **x$\mathbf{R_2}$y** - "числа x и y очень различны" и их объединение x$\mathbf{R_1}\cup\mathbf{R_2}$y - "числа x и y очень близкие или очень различные".
Функции принадлежности отношений заданы на |y-x|.





$$\mu_{R1\cup R2}(x,y) = \begin{cases}\mu_{R1}(x,y), & |\,y - x\,| \le\alpha\\ \mu_{R2}(x,y), & |\,y - x\,| >\alpha\end{cases}$$

где α - такое $|y-x|$, что $\mu_{R1}(x,y) = \mu_{R2}(x,y)$

2.

R_1			
	y_1	y_2	y_3
x_1	0,1	0	0,8
x_2	1	0,7	0

R_2			
	y_1	y_2	y_3
x_1	0,7	0,9	1
x_2	0,3	0,4	0,5

$R_1 \cup R_2$			
	y_1	y_2	y_3
x_1	0,7	0,9	1
x_2	1	0,7	0,5

Пересечение двух отношений.

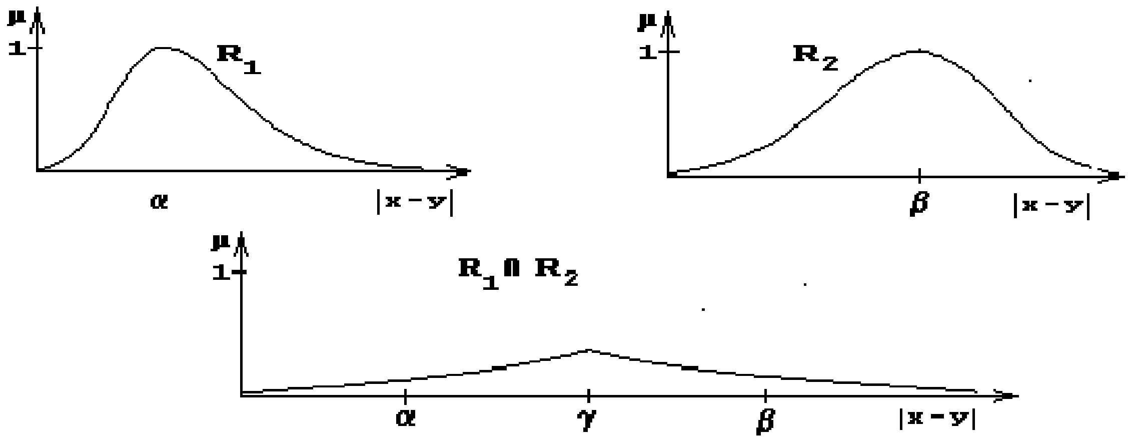
Пересечение двух отношений $\mathbf{R_1}$ и $\mathbf{R_2}$ обозначается $\mathbf{R_1 \cap R_2}$ и определяется выражением:

$$\mu_{R1 \cap R2}(x,y) = \mu_{R1}(x,y) \wedge \mu_{R2}(x,y)$$

.

Примеры:

1. Ниже изображены отношения: $x\mathbf{R_1}y$, означающее "модуль разности $|y-x|$ близок к α", $x\mathbf{R_2}y$, означающее "модуль разности $|y-x|$ близок к β", и их пересечение.



Алгебраическое произведение двух отношений.

Алгебраическое произведение двух отношений $\mathbf{R_1}$ и $\mathbf{R_2}$ обозначается $\mathbf{R_1 \cdot R_2}$ и определяется выражением:

$$\mu_{R1 \cdot R2}(x,y) = \mu_{R1}(x,y) \cdot \mu_{R2}(x,y)$$

Алгебраическая сумма двух отношений.

Алгебраическая сумма двух отношений R_1 и R_2 обозначается $R_1 \hat{+} R_2$ и определяется выражением: $\mu_{R_1 \hat{+} R_2}(x,y) = \mu_{R_1}(x,y) + \mu_{R_2}(x,y) - \mu_{R_1}(x,y) \cdot \mu_{R_2}(x,y)$.

Для введенных операций справедливы следующие свойства дистрибутивности:

$$R_1 \cap (R_2 \cup R_3) = (R_1 \cap R_2) \cup (R_1 \cap R_3),$$
$$R_1 \cup (R_2 \cap R_3) = (R_1 \cup R_2) \cap (R_1 \cup R_3),$$

$$R_1 \cdot (R_2 \cup R_3) = (R_1 \cdot R_2) \cup (R_1 \cdot R_3),$$
$$R_1 \cdot (R_2 \cap R_3) = (R_1 \cdot R_2) \cap (R_1 . R_3),$$
$$R_1 \mathbin{\hat{+}} (R_2 \cup R_3) = (R_1 \mathbin{\hat{+}} R_2) \cup (R_1 \mathbin{\hat{+}} R_3),$$
$$R_1 \mathbin{\hat{+}} (R_2 \cap R_3) = (R_1 \mathbin{\hat{+}} R_2) \cap (R_1 \mathbin{\hat{+}} R_3).$$

Дополнение отношения.

Дополнение отношения **R** обозначается $\bar{R}$и определяется функцией принадлежности:

$$\mu_{\bar{R}}(x,y) = 1 - \mu_{\mathbf{R}}(x,y)$$

.

Дизъюнктивная сумма двух отношений.

Дизъюнктивная сумма двух отношений $\mathbf{R_1}$ и $\mathbf{R_2}$ обозначается $\mathbf{R \oplus R}$ и определяется выражением:
$\mathbf{R_1 \oplus R_2 = (R_1 \cap \bar{R}_2) \cup (\bar{R}_1 \cap R_2)}$.

Обычное отношение, ближайшее к нечеткому.

Пусть **R** - нечеткое отношение с функцией принадлежности $\mu_{\mathbf{R}}(x,y)$. Обычное отношение, ближайшее к нечеткому, обозначается $\underline{R}$ и определяется выражением:

$$\mu_{\underline{R}}(x,y) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad \mu_{\mathrm{R}}(x,y) < 0{,}5 \\ 1, & \text{если} \quad \mu_{\mathrm{R}}(x,y) > 0{,}5 \\ 0 \ \text{или} \ \mathbf{1}, & \text{если} \quad \mu_{\mathrm{R}}(x,y) = 0{,}5 \end{cases}$$

По договоренности принимают $\mu_{\underline{\mathbf{R}}}(x,y)=0$ при $\mu_{\mathbf{R}}(x,y) = 0{,}5$.

Проекции нечеткого отношения.

Пусть **R** - нечеткое отношение **R**: $(x,y) \to [0,1]$. Первой проекцией R'_1отношения **R** (проекция на **X**) называется нечеткое множество R'_1, заданное на множестве **X**, с функцией принадлежности:

$$\mu_{R'_1}(x) = \bigvee_y \mu_R(x,y)$$
.

Аналогично, второй проекцией R'_2(проекцией на **Y**) называется нечеткое множество R'_2, заданное на множестве **Y**, с функцией принадлежности:

$$\mu_{R'_2}(x) = \bigvee_x \mu_R(x,y)$$
.

Величина $h(R) = \bigvee_x \mu_{R'_1}(x) = \bigvee_y \mu_{R'_2}(y)$ называется глобальной проекцией отношения **R**. Если $h(R)=1$, то отношение **R** нормально, в противном случае - субнормально.

Пример:

1-я проекция

R =

	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5
x_1	0,1	0,2	1	0,3	0,9
x_2	0,9	0,1	0,5	0,8	0,5

1
0,9
1

= $\mathbf{R}_{1'}$

x_3	0,4	0	0,6	1	0,3

$\mathbf{R}_2' =$

	0,9	0,2	1	1	0,9

1

$= h(R)$

2-я проекция

Цилиндрические продолжения проекций нечеткого отношения

Проекции $\mathbf{R}_{1'}$ и $R_{2'}$ нечеткого отношения **XRY** в свою очередь определяют в **X**×**Y** нечеткие отношения $\hat{R}'_1$ и $\hat{R}'_2$ с функциями принадлежности:

$$\mu_{\hat{R}'_1}(x,y)=\mu_{R'_1}(x) \text{ при любом } y,\quad \mu_{\hat{R}'_2}(x,y)=\mu_{R'_2}(y) \text{ при любом } x,$$

называемые, соответственно, ***цилиндрическим продолжением*** $\mathbf{R}_1'$ и ***цилиндрическим продолжением*** $\mathbf{R}_2'$.

Замечание. Очевидно, что для любых нечетких подмножеств **A** и **B**, определенных, соответственно, на **X** и **Y**, можно построить их цилиндрические продолжения **A** и **B**.
Пример (продолжение):

Имеем:

$\mathbf{R}_1' =$

x_1	1
x_2	0,9
x_3	1

$\hat{R}'_1 =$

	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5
x_1	1	1	1	1	1
x_2	0,9	0,9	0,9	0,9	0,9
x_3	1	1	1	1	1

и

$\mathbf{R}_2' =$

	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5
	0,9	0,2	1	1	0,9

$\ddot{R}'_2 =$

x_1	0,9	0,2	1	1	0,9
x_2	0,9	0,2	1	1	0,9
x_3	0,9	0,2	1	1	0,9

Сепарабельность отношений

Нечеткое отношение **XRY** называется сепарабельным, если оно равно пересечению цилиндрических продолжений своих проекций, т.е. если $\mathbf{R} = \ddot{R}'_1 \cap \hat{R}'_2$, т.е. $\mu_{\mathbf{R}}(x,y) = \mu_{R'_1}(x) \cap \mu_{R'_2}(y)$.
Замечание. Если определено декартово произведение нечетких множеств (выше оно введено), то, очевидно, нечеткое отношение **XRY** сепарабельно, если оно является декартовым произведением своих проекций, т.е. $\mathbf{R} = \mathbf{R}_1' \times \mathbf{R}_2'$.

Пример (продолжение):

$\tilde{R}'_1 \cap \hat{R}'_2 =$

	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5
x_1	0,9	0,2	1	1	0,9
x_2	0,9	0,2	0,9	0,9	0,9
x_3	0,9	0,2	1	1	0,9

$\neq$ **R**,

т.е. исходное отношение **R** несепарабельно.

Композиция двух нечетких отношений

Композиция двух нечетких отношений
Пусть R₁ - нечеткое отношение $\mathbf{R_1}$: $(\mathbf{X}\times \mathbf{Y})\to[0,1]$ между X и Y, и R_2 - нечеткое отношение $\mathbf{R_2}$: $(\mathbf{Y}\times\mathbf{Z})\to [0,1]$ между Y и Z. Нечеткое отношение между X и Z, обозначаемое $\mathbf{R_2\bullet R_1}$, определенное через $\mathbf{R_1}$ и $\mathbf{R_2}$ выражением

$$\mu_{\mathbf{R1\bullet R2}}(x,z) = \bigvee_{y} [\mu_{\mathbf{R1}}(x,y)\Lambda\mu_{\mathbf{R1}}(y,z)],$$

называется (max-min)-композицией отношений $\mathbf{R_1}$ и $\mathbf{R_2}$.

Примеры:

R₁			
	y_1	y_2	y_3
x_1	0,1	0,7	0,4
x_2	1	0,5	0

R₂				
	z_1	z_2	z_3	z_4
y_1	0,9	0	1	0,2
y_2	0,3	0,6	0	0,9
y_3	0,1	1	0	0,5

R₂•R₁				
	z_1	z_2	z_3	z_4
x_1	0,3	0,6	0,1	0,7
x_2	0,9	0,5	1	0,5

$\mu_{\mathbf{R1\bullet R2}}(x_1, z_1) = [\mu_{R1}(x_1, y_1)\ \Lambda\ \mu_{\mathbf{R2}}(y_1, z_1)]\ V\ [\mu_{\mathbf{R1}}(x_1, y_2)\ \Lambda\ \mu_{\mathbf{R2}}(y_2, z_1)]\ V\ [\mu_{\mathbf{R1}}(x_1, y_3)\ \Lambda\ \mu_{\mathbf{R2}}(y_3, z_1)] =$

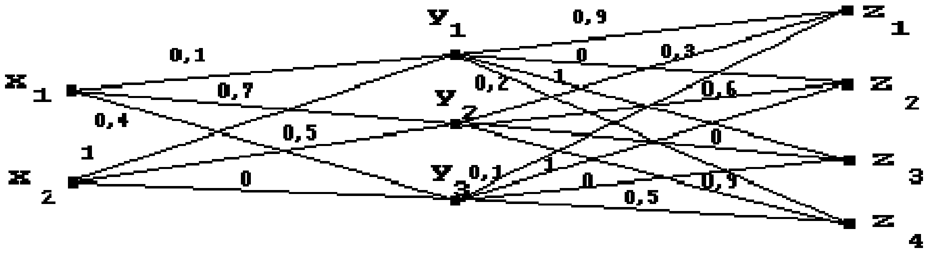
$= (0,1\Lambda 0,9)V(0,7\Lambda 0,3)V(0,4\Lambda 0,1) = 0,1V0,3V0,1 = 0,3$

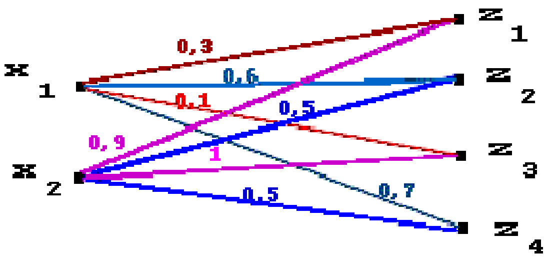
$\mu_{\mathbf{R1\bullet R2}}(x_1,z_2) = (0,1\Lambda 0)V(0,7\Lambda 0,6)V(0,4\Lambda\ 1) = 0V0,6V0,4 = 0,6$

$\mu_{\mathbf{R1\bullet R2}}(x_1,z_3) = 0,1$
....
....
$\mu_{\mathbf{R1\bullet R2}}(x_2,z_5) = 0,5$

Замечание. В данном примере вначале использован "аналитический" способ композиции отношений $\mathbf{R_1}$ и $\mathbf{R_2}$, т.е. i-я строка R_1 "умножается" на j-й столбец R_2 с использованием операции Λ, полученный результат "свертывается" с использованием операции V в $\mu(x_i,z_j)$.

Ниже приведены графы, соответствующие R_1 и R_2, "склеенные" по Y. В полученном графе рассматриваем пути от x_i к z_j и каждому ставим в соответствие минимальный из "весов" его составляющих. Затем определяем максимум по всем путям из x_i в z_j, который и дает искомое $\mu(x_i,z_j)$.





Свойства max-min композиции

Операция (max-min)-композиции ассоциативна, т.е.

$$R_3\bullet(R_2\bullet R_1) = (R_3\bullet R_2)\bullet R_1,$$

дистрибутивна относительно объединения, но недистрибутивна относительно пересечения:

$$R_3\bullet(R_2\cup R_1) = (R_3\bullet R_2)\cup (R_3\bullet R_1),$$
$$R_3\bullet(R_2\cap R_1)\neq(R_3\bullet R_2)\cap(R_3\bullet R_1).$$

Кроме того, для (max-min)-композиции выполняется следующее важное свойство: если $R_1\subset R_2$ то, $R\bullet R_1 \subset R\bullet R_2$.

(max-*) - ***композиция***

В выражении $\mu_{R1\bullet R2}(x, z) = \bigvee_y [\mu_{R1}(x, y)\wedge\mu_{R2}(y, z)]$ для (max-min)-композиции отношений R_1 и R_2 операцию $\wedge$ можно заменить любой другой, для которой выполняются те же ограничения, что и для $\wedge$: ассоциативность и монотонность (в смысле неубывания) по каждому аргументу. Тогда:

$$\mu_{R1\bullet R2}(x, z) = \bigvee_y [\mu_{R1}(x, y) * \mu_{R1}(y, z)]$$

В частности, операция $\wedge$ может быть заменена алгебраическим умножением, тогда говорят о (max - prod)-композиции.

Обычное подмножество α - уровня нечеткого отношения

Обычным подмножеством α - уровня нечеткого отношения R называется четкое (обычное) отношение $R\alpha$ такое, что

$$\mu_{R1}(x,y) = \begin{cases} 1, & \text{если } \mu_R(x,y) \geq \alpha \\ 0, & \text{если } \mu_R(x,y) < \alpha \end{cases}$$

Очевидно, что из $\alpha_1 \leq \alpha_2$ следует $R_{\alpha 1} \geq R_{\alpha 2}$.

Теорема декомпозиции

Любое нечеткое отношение R представимо в форме:

$$R = \bigcup_{\alpha} \alpha \cdot R\alpha,\ 0<\alpha\leq 1,$$

где $\alpha \cdot R_\alpha$ означает, что все элементы R_α умножаются на α.

Тема 5. Теоретические основы выбора альтернатив

Рассмотрим следующие основные этапы технологии разработки управленческих решений.

Этап 1. Выявление и описание проблемной ситуации

Формулировка проблемы является наиболее важной ступенью в решении самой проблемы, т.к. даже абсолютно верный ответ на неправильную постановку проблемного вопроса может только усугубить проблему (операция прошла успешно, но пациент умер). Процесс формулировки проблем является сложной задачей. Главные причины такого положения заключаются в объективной сложности, многомерности и многосвязности проблем организационного управления, неструктуризованном характере многих из них, трудностях измерения многих переменных, отсутствии априорных сведений о существенных связях между ними . Все это делает процесс формулировки проблемы творческим процессом. Так как проблема определяется как несоответствие между желаемым и фактическим состоянием объектов управления, то для описания проблемной ситуации, определения и анализа количественных оценок разногласий текущего и нормативного (прогнозного) состояния используются методы прогнозирования, экспертные и системного анализа.

Этап 2. Формирование целей системы управления

Для определения желаемого состояния по устранению проблемной ситуации необходимо сформулировать множество целей системы. Чем точнее ' будут сформулированы цели системы, тем легче выбрать средства их достижения. На данном этапе целевыявления определяется, что нужно сделать для снятия проблемы. Если на этапе 1, формулируя проблему, мы говорим в - явной форме, что нам не нравится (согласимся - это сделать сравнительно просто), то на этапе 2 мы пытаемся сформулировать, что же мы хотим, указывая направления выхода из существующей проблемной ситуации.

Методологической основой целевыявления является системный анализ с использованием экспертных методов.

Этап 3. Формирование критериев выбора решений

Сравнение ч выбор альтернативных решений возможен, если ввести измеритель степени достижения намеченной цели. Таким измерителем является критерий.

Содержанием данного этапа является построение системы критериев, однозначно характеризующих соответствующие цели субъекта управления.

Сформированные критерии в дальнейшем должны в некотором смысле заменить цели, стать их подобием, моделью целей. Критерием ценности альтернативы может служить любой ее признак, измеренный на качественном либо количественном уровне. Например, объем финансирования учебного процесса очень низкий или, например, составляет 30 тыс. рублей в год.

Одним из требований повышения адекватности описания цели является требование многокритериальности. Для описания цели должно быть введено столько критериев, чтобы они достаточно полно характеризовали цель при минимальном их числе. Это требование удовлетворяется, если критерии независимы. Поиск компромисса между полнотой (точностью) описания целей и количеством критериев является более искусством, чем наукой. Определение критериев выбора решений может быть осуществлено методами экспертных оценок, а также с помощью методов математической статистики.

Этап 4. Выработка (генерация) решений

На данном этапе вырабатываются альтернативные варианты решений, осуществляется поиск различных путей, способов достижения поставленных целей. Формирование решений - это творческий процесс, является наиболее трудным и ответственным. Без альтернативных вариантов решений отпадает и задача выбора, более того, множество исходных альтернатив должно быть достаточно полным, характеризоваться большой степенью уверенности наличия оптимальной альтернативы, в целях нахождения которой и решается задача выбора. Чем же определяется полнота множества альтернативных вариантов решений? Сколько нужно формировать вариантов для создания условий выбора оптимального решения? Формально - ровно столько, сколько принципиально возможно в рамках имеющихся ресурсов для принятия решений. Важно также соотношение затрат на формирование альтернатив с ожидаемым эффектом от выбранного решения. От альтернатив следует отказаться, если ожидаемый эффект небольшой, а имеющиеся ресурсы следует направить на поиск других вариантов решений.

Опыт и рекомендации по генерированию новых альтернатив изложен в ряде работ. Наиболее зарекомендовавшими себя на практике организационными формами генерирования альтернатив являются мозговой штурм, синектика, разработка сценариев, морфологический анализ, деловые игры, когнитивные карты.

Этап 5. Согласование и выбор решения

На данном этапе необходимо осуществить выбор решения по определенной схеме или алгоритму, наилучшему с точки зрения некоторого критерия, некоторого принципа оптимальности.

В задачах принятия решений в условиях определенности поиск оптимальных решений достаточно формализован. Используемые методы оптимизации математического программирования, вариационного исчисления, эвристические, организованного поиска и другие в настоящее время получили широкое распространение.

Математическое программирование - математический метод решения многомерных задач на экстремум целевой функции переменных с ограничениями на область изменения этих переменных. Вариационное исчисление является методом классического математического анализа, основано на применении аппарата дифференциального и интегрального исчислений для нахождения экстремумов функционалов. Эвристические методы построены на использовании правил, приемов, упрощений, обобщающих опыт поиска решения, близкого к оптимальному, организованными способами перебора возможных вариантов .

Для оценки альтернатив разрешения слабо формализуемых сложных проблем привлекаются эксперты. Методы экспертных оценок позволяют формализовать предпочтения экспертов и использовать формальные процедуры для их обработки.

При решении задач принятия решений по многим критериям (задач многокритериальной оптимизации) возникают трудности определения наилучшего с точки зрения ЛПР компромиссного решения из множества допустимых решений, в том числе и оптимальных решений, полученных по отдельным локальным критериям. К этим трудностям прежде всего относят нормализацию критериев, определение принципа (схемы) выбора компромиссного решения (принципа оптимальности), учет приоритета критериев.

В случае, если в процессе принятия решений участвуют несколько субъектов управления, взаимодействие которых определяется в основном взаимным влиянием их решений, и эти решения в силу объективных и субъективных причин отличны друг от друга, то возникает необходимость в согласовании решений.

Методы теории игр позволяют выбрать компромиссные решения в условиях конфликта либо разногласия, а также в условиях информационной недостаточности .

Исследовать организационную сторону процесса выработки коллективных решений, оценить важность используемой информации в оценке альтернативных действий, приобрести навыки согласования и принятия решения позволяют деловые игры.

Этап 6. Реализация и оценка решения

План реализации выбранного решения должен дать ответы на вопросы: кто и что должен делать, какими средствами и в какие сроки? Конкретизация решения по исполнителям может производиться путем решения задачи о назначениях исполнителей на выполнение комплекса работ, по срокам и объектам работ - методами сетевого планирования и управления (СПУ) .

Конкретизация ресурсного обеспечения может быть осуществлена путем решения задачи распределения ресурсов методами математического программирования.

Решение может оказаться недейственным по причине срыва плана его реализации. Поэтому контролирование и регулирование хода реализации решения занимает важное место в процессе управления. Как правило, это регулирование осуществляется на базе методов СПУ.

Оценка эффективности решения складывается из оценки качества самого решения и оценки качества исполнения. Поскольку управленческие решения влияют на социальную среду, производственную и финансовую деятельность, то для всесторонней оценки эффективности решений необходимо производить социологический, производственный, финансовый анализ последствий этих решений.

В заключение настоящего раздела следует отметить, что приведенная последовательность этапов разработки управленческих решений отражает в основном рациональную последовательность действий ЛПР. В действительности процесс разработки решений является более сложным и не всегда строится по приведенной схеме. Реальный процесс допускает определенную параллельность выполнения этапов и процедур, кроме того, при выполнении той или иной процедуры по мере получения новой и дополнительной информации возникает необходимость корректировки предшествующих процедур.

Из приведенных рекомендаций по разработке решений следует, что все этапы процесса принятия сложных решений допускают использование строгих математических методов в сочетании с субъективными предпочтениями ЛПР и экспертов. Таким образом, вопросы автоматизации процесса разработки решений становятся все более актуальными, требующими более широкого применения компьютерных систем поддержки решений в практике управления .

Имеется множество различных вариантов системной последовательности принятия решений. Так, в приведены 5 различных последовательностей, разработанных крупными специалистами по системному анализу - С.Л. Оптнером, С. Янгом, Н.П. Федоренко, С.П. Никаноровым и Ю.И. Черняком.

Основные моменты, отличающие другие схемы от приведенной выше последовательности: конкретизация отдельных этапов, изменение порядка следования этапов, адаптация к конкретной предметной области.

Тема 6. Процедуры и алгоритмы принятия решений.

Генерирование альтернативных решений достижения целей является творческим процессом ЛПР и экспертов, требующим анализа и синтеза предшествующих элементов процесса разработки решений: проблемной ситуации, времени и ресурсов, целей и ограничений. В условиях ограничения времени и ресурсов главным источником информации при разработке решений являются знания и опыт ЛПР и экспертов в предметной области решений. Рекомендации относительно генерирования новых идей и альтернатив решения проблем изложены в ряде публикаций.

Все множество управленческих решений в зависимости от новизны проблемной ситуации можно разделить на три типа:

- стандартные решения,
- усовершенствованные решения,
- оригинальные решения.

Если данная проблемная ситуация уже неоднократно встречалась в прошлом (типовая), то необходимо воспользоваться известным стандартным решением. Если данная проблемная ситуация отличается некоторыми особенностями от типовой, то целесообразно только конкретизировать стандартные решения применительно к данной ситуации, получив видоизменение известных вариантов решений и пополнив банк данных типовых проблемных ситуаций и стандартных решений. Оригинальные решения разрабатываются, когда известные пути решения не годятся либо имеют низкую эффективность достижения целей.

Для разработки новых и оригинальных решений наиболее часто используют экспертные методы , при этом обращают внимание на требования полноты множества альтернативных решений, степень достижения целей и возможности реализации решения. Количество сгенерированных альтернатив на начальном этапе не ограничивается. В дальнейшем каждый вариант решения должен быть комплексно проанализирован не только с позиции степени достижения целей, но и всех факторов, определяющих возможность его осуществления. Полнота генерируемого множества решений может быть достигнута путем генерирования промежуточных вариантов решений между двумя крайними - идеальным и наихудшим. Идеальный вариант решения характеризуется высокой степенью достижения целей любой ценой, и, как правило, не реализуется. Наихудший вариант решения может характеризоваться бездействием. После формирования альтернативных решений приступают к выявлению их предпочтений.

В практике управления и принятия решений хорошо зарекомендовали себя следующие способы генерирования решений: мозговой штурм, синектика, разработка сценариев, морфологический анализ, деловые игры. Эти способы в литературе достаточно подробно описаны, поэтому остановимся только на некоторых моментах.

Мозговой штурм. Мозговой штурм представляет собой групповое обсуждение с целью получения новых идей, вариантов решений проблемы. Мозговой штурм часто называют также мозговой атакой, методом генерации идей. Характерной особенностью этого вида экспертизы является его использование в трудных тупиковых ситуациях, когда известные пути и способы решения оказываются непригодными. При использовании метода мозгового штурма целесообразно использовать следующие принципы :

1) сознательное генерирование как можно большего количества вариантов. Предпочтение отдается количеству идей, а не качеству (идеи высказываются кратко - без обсуждения);

2) запрет критики любой идеи, какой бы дикой она ни казалась. Не рекомендуется отбрасывать альтернативы, кажущиеся, на первый взгляд, абсурдными, надуманными;

3) предпочтение отдается не систематическому логическому мышлению, а фантазии;

4) комбинирование или усовершенствование идей, предложенных участниками мозгового штурма.

При организации работ на этапе генерации альтернатив необходимо помнить о существовании факторов, как тормозящих работу, так и способствующих ей. К числу таких факторов можно отнести психологическую несовместимость экспертов, различную инертность мышления, эмоциональные преграды, физическое состояние, среду обитания и т.д. Совокупность этих факторов должна позволять эксперту не только самому продуктивно генерировать варианты, но и создавать условия для успешной деятельности других участников. Продуктивному мышлению способствует юмор, смех, свободные дружеские отношения.

При значительном количестве альтернатив рекомендуется проводить предварительную “грубую” классификацию. Желательно список идей разбить на группы:

- легко реализуемые;
- наиболее перспективные и эффективные;
- прочие.

Тема 7. Критерии для описания выбора

Постановка задачи многокритериального выбора. Будем предполагать, что множество X ={x1, x2, ... xm} альтернативных решений сформировано тем или иным методом генерации альтернатив (методами мозгового штурма, морфологического анализа, сценариев, деловых игр и др.). Необходимо выбрать одну (или несколько) наиболее предпочтительных альтернатив. Для выбора наилучшего альтернативного решения из исходного множества X необходимо сформировать критерий выбора. Большинство методов выбора предполагают, что каждую альтернативу возможно оценить по критерию определенным числом (значением критерия). Наилучшей считается альтернатива, имеющая наилучшее значение критерия. Для большинства задач выбора невозможно использовать какой-либо один критерий. В этом случае используют несколько критериев Fi;, i=1,n , описывающих одно решение с разных сторон и дополняющих друг друга. Такие критерии будем называть частными.

Рассмотрим пример. При выборе конструкции самолета проектировщикам следует учитывать множество критериев: технических (высотность, скорость, маневренность, грузоподъемность и т.д.), технологических (связанных с будущим процессом серийного производства), экономических (затраты на производство, обслуживание и т.д.), эргономических и пр.

Выбор по одному критерию сводится к отысканию альтернативы с наилучшим значением этого критерия. Многокритериальные задачи не имеют однозначного общего решения. Теоретически можно представить себе случай, когда имеется одна альтернатива, обладающая наилучшими оценками по всем критериям; она и является наилучшей. Однако на практике такие случаи встречаются редко. Часто по одному критерию наилучшей является одна альтернатива, по другому - другая.

Наиболее употребительным способом решения многокритериальной задачи является сведение ее к однокритериальной. Это означает введение интегрального критерия (суперкритерия) F, зависящего от частных критериев Fi=1,n: F=F(F1,F2,...Fn).

Оценка альтернативы по интегральному критерию, таким образом, зависит от ее оценок по каждому частному критерию, т.е. интегральная оценка каждой альтернативы есть некоторая функция от оценок по частным критериям.

При определении интегральной оценки, кроме того, необходимо учитывать вклад каждого частного критерия в интегральный критерий. Дело в том, что частные критерии могут иметь разный вес (важность, ценность). Например, при проектировании гражданского самолета такой критерий, как надежность является более важным, чем маневренность.

Будем рассматривать формирование интегрального критерия для частного случая. Предположим, что каждую альтернативу xj, возможно оценить по критерию Fi, числом в интервале от 0 до 1. Как правило, оценки выставляются экспертом или лицом, принимающим решения (ЛПР).

Важность частных критериев F, будем оценивать коэффициентами важности (весовыми коэффициентами) wi, отражающими относительный вклад критериев в суперкритерий. Множество весовых коэффициентов частных критериев W = {w1, w2,... wn}, как правило, определяется экспертом (ЛПР) и отражает его личные предпочтения.

В дальнейшем будем предполагать, что весовые коэффициенты задаются положительным числом и сумма всех коэффициентов должна быть равна некоторой константе a, равной, например, 1 (10, 100, 1000);

$$\sum_{i=1}^{n} w_i = a$$

Ниже рассмотрены наиболее часто используемые виды интегральных критериев.

1) Максимум суммы взвешенных оценок

$$F = \sum_{i=1}^{n} w_i * F_i(x_i) \to \max_{x_j \in X} \quad (1)$$

Наилучшей является альтернатива с максимальной суммой взвешенных оценок по всем частным критериям. Это наиболее распространенный критерий.

При максимальной оценке варианта по некоторому критерию, равной единице, его взвешенная оценка будет равна его весу. Таким образом, множество весов всех частных критериев характеризует идеальный возможный вариант.

Достоинство данного критерия заключается в его простоте и наглядном физическом смысле. Недостатком является следующее: можно получить относительно высокое значение интегрального критерия за счет больших значений отдельных частных критериев и малых значений других частных критериев.

2) Минимум суммы отклонений от “идеальной точки”

$$\sum_{i=1}^{n} w_i * (\widetilde{F}_i - F_i(x_j)) \rightarrow \min_{x_j \in X} \qquad (2)$$

Наилучшей является альтернатива с минимальным отклонением взвешенных оценок от максимальных значений частных критериев (Fi), т.е. наиболее приближенная к идеалу по всем критериям (к “идеальной точке”). В нашем случае “идеальной точкой” будет' альтернатива со следующими значениями частных критериев: F1=F2=...Fn=1

Очевидно, что оптимальное решение, найденное по критерию (2) совпадает с оптимальным решением, найденным но критерию (1).

3) Минимум суммы квадратов отклонений от “идеальной точки”

$$\sum_{i=1}^{n} (w_i * (\widetilde{F}_i - F_i(x_j)))^2 \rightarrow \min_{x_j \in X} \qquad (3)$$

Этот интегральный критерий является более чувствительным к отклонениям.

Критерий (3) позволяет “отсеять” альтернативы со значительными отклонениями значений частных критериев от их максимальных значений, т.к. такие отклонения, возведенные в квадрат, резко ухудшают значение интегрального критерия.

В отличие от предыдущих видов интегрального критерия здесь альтернатива должна “равномерно” приближаться к идеалу.

4) Минимум максимального отклонения

$$\max_i w_i * (\widetilde{F}_i - F_i(x_j)) \rightarrow \min_{x_j \in X} \qquad (4)$$

Этот критерий позволяет “отбраковывать” альтернативы с большими отклонениями по отдельным критериям.

5) Максимум минимальной оценки

$$\min_i w_i * F_i(x_j) \rightarrow \max_{x_j \in X} \qquad (5)$$

Для каждой альтернативы сначала находится минимальная взвешенная оценка по всем критериям. Наилучшей альтернативой является та, которая имеет максимальную оценку из минимальных оценок критериев. Этот критерий используется при выборе, когда нежелательны малые значения по частным критериям.

Рассмотрим пример выбора альтернативного варианта организационной структуры по интегральным критериям различных видов.

Множество X включает следующие альтернативы:

x1 - простая структура,

x2 - функционально-ориентированная структура,

x3 - структура на основе автономных центров (дивизиональная),

x4 - матричная структура,

Оценка каждого решения ведется по 9-ти частным критериям Fi,j = 1,9, приведенным в таблице 3.4. Коэффициенты wi, отражающие “вес” частных критериев, также приведены в таблице 3.4, Их сумма равна 100.

Таблица 3.4.

Выбор варианта организационной структуры

Критерии	Wi	X1	x2	x3	x4
Fi - Возможность компетентного управления	10	Н	у	х	х
F; - Оперативность управления	5	н	н	ох	у
Рз - Контролируемость работы подразделений	5	н	х	х	о
?4 - Координируемость решений	15	х	у	у	п
fs - Адаптивность оргструктуры к изменению рынка	20	о	ох	о	х
f(- Затраты на административный аппарат	5	у	у	х	п
f^ - Возможность технологического развития	10	0	х	0	ох
fs - Мотивация работы сотрудников	15	н	п	х	ох
F9 - Ответственность подразделений за издержки и доходы	15	н	У	0	0
Значения интегрального критерия (1)		41,9	50,6	78,0	65.0
Значения интегрального критерия (2)		58,1	49,4	22,0	35,0
Значения интегрального критерия (3)		53,3	27,9	8,9	18,1
Значения интегрального критерия (4)		15,0	11,2	7,5	11,2
Значения интегрального критерия (5)		0,0	0,0	3,1	1,1

Вариантам экспертами выставляются качественные оценки от "неудовлетворительно" до "отлично". Экспертным оценкам сопоставляются числовые оценки по следующей схеме:

• отлично (о) = 1,0;

• очень хорошо (ох) == 0,75;

• хорошо (х) = 0,625;

• удовлетворительно (у) = 0,5;

• посредственно (п) = 0,25;

• неудовлетворительно (н) = 0.

В таблице 3.4 приведены значения интегральных критериев для альтернатив. Из таблицы видно, что по всем интегральным критериям оптимальным является вариант х3 - оргструктура на основе автономных центров. Естественно, что при решении других задач оптимальные варианты по разным интегральным критериям могут быть различными.

Метод Дельфи

Метод Дельфи представляет собой многотуровую процедуру анкетирования с обработкой и сообщением результатов каждого тура экспертам, работающим отдельно друг от друга. Этот метод был разработан Хелмером и Гордоном (США) в середине 50-х годов для составления всевозможных прогнозов.

Экспертам предлагается ответить на ряд вопросов и свои ответы аргументировать. При этом какие-либо дискуссии между экспертами запрещены, что, по мнению авторов метода, исключает роль психологических и эмоциональных факторов, неизбежно проявляющихся во время открытой дискуссии. Полученные от эксперта данные обрабатываются с целью выделения среднего или медианы и крайних значений оценок. Экспертам сообщаются результаты обработки первого тура опроса с указанием расположения оценок каждого эксперта. Если оценка эксперта сильно отклоняется от среднего значения, то его просят аргументировать свое мнение или изменить оценку.Во втором туре эксперты аргументируют или изменяют свою оценку с объяснением причин корректировки. Результаты опроса во втором туре обрабатываются и сообщаются экспертам.

Если после первого тура производилась корректировка оценок, то результаты обработки второго тура содержат новые средние и крайние значения оценок экспертов. В случае сильного отклонения своих оценок эксперты должны аргументировать или изменить свои суждения, пояснив причины корректировки. Проведение последующих туров осуществляется по аналогичной процедуре. Обычно после третьего или четвертого тура оценки экспертов стабилизируются, что и служит критерием прекращения дальнейшего опроса. Итеративная процедура опроса с сообщением результатов обработки после каждого тура обеспечивает лучшее согласование мнений экспертов, поскольку эксперты, давшие сильно отклоняющиеся оценки, вынуждены критически осмыслить свои суждения и обстоятельно их аргументировать. Необходимость аргументации или корректировки своих оценок не означает, что целью экспертизы является получение полной согласованности мнений экспертов.

Конечным результатом может оказаться выявление двух или более групп мнений, отражающих принадлежность экспертов к различным научным школам, ведомствам или категориям лиц. Получение такого результата является также полезным, поскольку позволяет выяснить наличие различных точек зрения и поставить задачу проведения исследований в данной области.

4. МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ПО ПРОВЕДЕНИЮ ЛАБОРАТОРНЫХ РАБОТ

Лабораторные работы имеют различный уровень сложности и на их выполнение требуется различное количество часов. Каждая предполагает самостоятельную работу студентов по освоению лекций и теоретического материала, вынесенного на самостоятельное изучение. Текущий контроль знаний осуществляется путем опроса студентов перед началом лабораторного занятия по вопросам, перечень которых приведен в каждой лабораторной работе.

Лабораторная работа 1. Решение задач линейного программирования

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ

Стандартная задача линейного программирования состоит из трех частей:
целевой функции (на максимум или минимум) - формула (1.1), основных ограничений $(\geq, \leq, =)$ - формула (1.2), ограничений не отрицательности переменных (есть, нет) - формула (1.3)

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max(\min) \qquad (1.1)$$

$$\boxed{\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq (=, \geq) b_i \qquad i = 1, \ldots m} \qquad (1.2)$$

$$xj \geq 0, j = 1\ldots, n \qquad (1.3)$$

Алгоритм решения задач линейного программирования требует приведения их постановки в **<u>канонический вид</u>,** когда целевая функция стремится к максимуму (если стремилась к минимуму, то функцию надо умножить на -1, на станет стремиться к максимуму), основные ограничения имеют вид равенства (для приведения к равенствам в случае знака $\leq$ надо в правую часть каждого такого k-го неравенства добавить искусственную переменную $u_k \geq 0$, а в случае знака $\geq$, $u_k \geq 0$ надо отнять ее из правой части основных ограничений), присутствуют ограничения не отрицательности переменных (если их нет для некоей переменной x_k, то их можно ввести путем замены всех вхождений этой переменной комбинацией $\mathbf{x^1_k - x^2_k = x_k}$, где $\mathbf{x^1_k} \geq 0$ и $\mathbf{x^2_k} \geq 0$).

При этом для решения задачи линейного программирования необходимо иметь **<u>базис</u>,** т.е. набор переменных $\mathbf{x_i}$**,** в количестве, равным числу основных ограничений, причем чтобы каждая из этих переменных присутствовала лишь в одном основном ограничении и имела свой множитель $\mathbf{a_{ij} = 1}$. Если таких переменных нет, то они искусственно добавляются в основные ограничения и получают индексы $\mathbf{x_{m+1}}$**,** $\mathbf{x_{m+2}}$ и т.д. Считается при этом, что они удовлетворяют условиям не отрицательности переменных. Заметим, что если базисные переменные (все) образуются в результате приведения задачи к каноническому виду, то целевая функция задачи остается без изменений, а если переменные добавляются искусственно *к* основным ограничениям, имеющим вид равенств, то из целевой функции вычитается их сумма, умноженная на **М,** т.е. $M\sum_{i=1}^{m} x_{m+1}$ (так называемый **модифицированный симплекс-метод).** Мы не будем рассматривать задачи, относящиеся к модифицированному симплекс-методу. Для практической работы по нахождению решения задачи линейного программирования (по варианту простого **симплекс-метода**) будут использоваться алгоритм итерационного (многошагового) процесса нахождения решения и два типа оперативных оценок, позволяющих делать переходы от одного шага к другому, а также показывающих, когда итерационный процесс остановится и результат будет найден.

Первая оценка - это дельта-оценка, для переменной xj она имеет вид:

$$\Delta j = \sum_{i \in B} c_i a_{ij} - c_j \qquad (1.4)$$

Здесь выражение **i** $\in$ **B** означает, что в качестве коэффициентов целевой функции, представленных в сумме выражения (1.4), используются коэффициенты переменных, входящих в базис на данном шаге итерационного процесса. Переменными $\mathbf{a_{ij}}$ являются множители матрицы коэффициентов **A** при основных ограничениях, рассчитанные на данном шаге итерационного процесса. Дельта-оценки рассчитываются по всем переменным $\mathbf{x_i}$**,** имеющимся в задаче. Следует отметить; что дельта-оценки базисных переменных равны нулю. После нахождения дельта-оценок из них выбирается наибольшая по модулю отрицательная оценка, переменная $\mathbf{x_k}$**,** ей соответствующая, будет вводиться в базис. Другой важной оценкой является **<u>тетта-оценка</u>,** имеющая вид:

$$\Theta i = \min(\frac{X_i^B}{aik}) \qquad (1.5)$$

Т.е. по номеру **k,** найденному по дельта-оценке, мы получаем выход на переменную $\mathbf{x_k}$ и элементы столбца $\mathbf{X^B}$ делим на соответствующие (только положительные) элементы столбца матрицы **A,** соответствующего переменой $\mathbf{x_k}$. Из полученных результатов выбираем минимальный, он и будет тетта-оценкой, $\mathbf{a_i}$й элемент столбца **B,** лежащий в одной строке с тетта-оценкой, будет выводиться из базиса, заменяясь элементом $\mathbf{x_k}$**,** полученным по дельта-оценке. Для осуществления такой замены нужно в **i-ой** строке **k -** го столбца матрицы А сделать единицу, а в остальных элементах **k-**го столбца сделать нули. Такое преобразование и будет одним шагом итерационного процесса.

Для осуществления такого преобразования используется **метод Гаусса**. В соответствии с ним **i-я** строка всей матрицы **A,** а также **i-я** координата X^B делятся на a_{ik} (получаем единицу в i-ой строке вводимого в базис элемента). Затем вся i-я строка (если i не единица), а также **i-я** координата X^B умножаются на элемент ($-a_{1k}$). После этого производится поэлементное суммирование чисел в соответствующих столбцах 1-ой и i-ой строк, суммируются также X^B_1, и $(-a_{1k})*X^B_i$;. Аналогичные действия производятся для всех остальных строк кроме i-ой (базисной) строки. В результате получается, что в **i-ой** строке **k-го** элемента стоит 1, а во всех остальных его строках находится 0. Таким образом осуществляется шаг итерационального алгоритма, Шаги алгоритма симплекс-метода продолжаются до тех пор, пока не будет получен один из следующих результатов.

• **Все небазисные дельта-оценки больше нуля** — найдено решение задачи линейного программирования, оно представляет из себя вектор компонент x;, значения которых либо равны нулю, либо равны элементам столбца X, тав
кие компоненты стоят на базисных местах (скажем, если базис образуют переменные x_2, x_4, x_5, то ненулевые компоненты стоят в векторе решения задачи линейного программирования на 2-м, 4-м и 5-м местах).

• **Имеются небазисные дельта-оценки, равные нулю**, тогда делается вывод о том, что задача линейного программирования имеет бесчисленное множество решений (представляемое лучом или отрезком). Подробно рассматривать случаи такого типа, а также отличия между решениями в виде луча и отрезка мы не будем.

• Возможен вариант получения столбца отрицательных элементов на отрицательной рассчитанной дельта-оценке, в такой ситуации нельзя вычислить тетта-оценки. В этом случае делается вывод, что система ограничений задачи линейного программирования несовместна; следовательно, задача линейного программирования не имеет решения.

Решение задачи линейного программирования, если оно единственное, следует
записывать в виде **X* = (..., ..., ...)** - вектора решения и значения целевой функции в точке решения **L*(X*).** В других случаях (решений много или они отсутствуют) следует словесно описать полученную ситуацию. Если решение задачи линейного программирования не будет получено в течение 10-12 итераций симплекс-метода, то следует написать, что решение отсутствует в связи с неограчниченностью функции цели.

Для практического решения задачи линейного программирования симплекс-методом удобно пользоваться таблицей вида (табл. 11.1):

Таблица 1.1

B	C^B	X^B	A_1	…	A_n	Θ
Базисные	**Целевые**	**Правые**				
компоненты	**Коэффиц.**	**Части**				
	Базиса	**ограничен**				
Δ			Δ1		**Δn**	

Задание

Необходимо решить задачу линейного программирования.

$\mathbf{L(x) = x_1 - 2x_2 + 3x_3} \rightarrow \max$

$\mathbf{x_1 - 3x_2 \leq 3}$

$\mathbf{2x_1 - x_2 + x_3 \leq 3}$

$\mathbf{-x_1 + 2x_2 - 5x_3 \leq 3}$

Все $\mathbf{x_i \geq 0 \quad i = 1, \ldots 3}$

1. Для начала приведем задачу к каноническому виду:

$\mathbf{L(x) = x_1 - 2x_2 + 3x_3} \rightarrow \max$

$\mathbf{x_1 - 3x_2 + x_4 = 3}$

$\mathbf{2x_1 - x_2 + x_3 + x_5 = 3}$

$\mathbf{-x_1 + 2x_2 - 5x_3 + x_6 = 3}$

Все $\mathbf{x_i \geq 0 \quad i = 1, \ldots 6}$

2. **Составляем таблицу симплекс-метода (табл. 1.2).** Видно, что базис образуют компаненты $\mathbf{x_4, x_5, x_6}$:

B	$\mathbf{C^B}$	$\mathbf{X^B}$	$\mathbf{A_1}$	$\mathbf{A_2}$	$\mathbf{A_3}$	$\mathbf{A_4}$	$\mathbf{A_5}$	$\mathbf{A_6}$	Θ
A_4	**0**	**3**	**1**	**-3**	**0**	**1**	**0**	**0**	**-**
$\mathbf{A_5}$	**0**	**3**	**2**	**-1**	**1**	**0**	**1**	**0**	**3**
$\mathbf{A_6}$	**0**	**3**	**-1**	**2**	**-5**	**0**	**0**	**1**	**-**
Δ			**-1**	**2**	**-3**	**0**	**0**	**0**	
$\mathbf{A_4}$	**0**	**3**	**1**	**-3**	**0**	**1**	**0**	**0**	
$\mathbf{A_3}$	**3**	**3**	**2**	**-1**	**1**	**0**	**1**	**0**	
$\mathbf{A_6}$	**0**	**3**	**-1**	**2**	**0**	**0**	**0**	**1**	
Δ		**9**	**5**	**2**	**0**	**0**	**3**	**0**	

Таким образом, уже на втором шаге расчетов (вычислений дельта-оценок) получено, что все небазисные дельта оценки положительны, а это означает, что данная задача имеет единственное решение:

3. Решение задачи запишем в виде:

$X^* = (0, 0, 3, 3, 0, 3), \qquad L^*(X^*) = 9.$

ЗАДАНИЕ

1. Ознакомиться с теоретической частью, используя дополнительную литературу.
2. Исходя из полученных у преподавателя исходных данных, решить задачу симплекс-методом.
3. Провести программный контроль выполнения пункта 2 на примере исходных данных полученных у преподавателя.
4. Отчет.

<u>Контрольные вопросы.</u>

1. Какие неизвестные ограничения системы называются базисными?

2. В чем заключается основная идея симплекс-метода?
3. В чем состоит различие между симплекс-методом и методом полного перебора допустимых вершин области, задаваемой ограничениями?
4. Каковы содержание и последовательность шагов симплекс -алгоритма, реализуемого на симплекс-таблицах?
5. Как при помощи симплекс-метода определить, что задача линейного программирования имеет неограниченный оптимум?

Лабораторная работа 2. Анализ решений (в условиях неопределенности).

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ

Полученные строки объединяем в матрицу:

$$\begin{array}{cccc} 0 & 6 & 5 & 2 \\ 6 & 2 & 8 & 22 \\ 9 & 4 & 3 & 32 \\ -6 & -4 & -12 & 10 \end{array}$$

$$p_j = (\ 1/2\ \ 1/4\ \ 1/5\ \ 1/20\ )$$

Руководитель, менеджер, обязан разрешать проблемы, встающие перед ним, перед коллективом, которым он руководит. Он обязан принимать решения. В теории принятия решений есть специальный термин: ЛПР — Лицо, Принимающее Решения. Ниже по тексту будем использовать этот термин.

Принять решение — это решить некоторую экстремальную задачу, т.е. найти экстремум некоторой функции, которую называют *целевой*, при некоторых ограничениях. Например, линейное программирование представляет целый класс таких экстремальных задач. Методы теории вероятностей и математической статистики помогают принимать решения в условиях неопределенности.

Не все случайное можно “измерить” вероятностью. Неопределенность — более широкое понятие. Неопределенность того, какой цифрой вверх ляжет игральный кубик, отличается от неопределенности того, каково будет состояние российской экономики через 15 лет. Кратко говоря, уникальные единичные случайные явления связаны с неопределенностью, массовые случайные явления обязательно допускают некоторые закономерности вероятностного характера.

Предположим, что ЛПР рассматривает несколько возможных решений $i = 1,..., m$. Ситуация не определена, понятно лишь, что наличествует какой-то из вариантов $j = 1,..., n$. Если будет принято i-е решение, а ситуация есть j-я, то фирма, возглавляемая ЛПР, получит доход q_{ij}. Матрица $Q = (q_{ij})$ называется *матрицей последствий* (*возможных решений*). Какое же решение нужно принять ЛПР? В этой ситуации полной неопределенности могут быть высказаны лишь некоторые рекомендации предварительного характера. Они не обязательно будут приняты ЛПР. Многое будет зависеть от его склонности к риску. Но как оценить риск в данной схеме?

Допустим, мы хотим оценить риск, который несет i-е решение. Нам неизвестна реальная ситуация. Но если бы ее знали, то выбрали бы наилучшее решение, т.е. приносящее наибольший доход. Иначе говоря, если ситуация есть j-я, то было бы принято решение, дающее доход $q_j = \max\limits_{i} q_{ij}$. Значит,

принимая i-е решение, мы рискуем получить не q_j, а только q_{ij}, значит, принятие i-го решения несет риск недобрать $r_{ij} = q_j - q_{ij}$. Матрица $R = (r_{ij})$ называется *матрицей рисков*.

Пусть матрица последствий есть Q.

$$
Q = \begin{array}{c c}
 & \max \\
\left|\begin{array}{rrrr} 0 & 6 & 5 & 2 \\ 6 & 2 & 8 & 22 \\ 9 & 4 & 3 & 32 \\ -6 & -4 & -12 & 10 \end{array}\right| & \begin{array}{r} 5 \\ 22 \\ 32 \\ 10 \end{array}
\end{array}
$$

Составим матрицу рисков R. Имеем $q_1 = 5$, $q_2 = 22$, $q_3 = 32$, $q_4 = 10$. Следовательно, матрица рисков есть R.

$$
R = \left|\begin{array}{rrrr} 9 & 0 & 3 & 30 \\ 3 & 4 & 0 & 10 \\ 0 & 2 & 5 & 0 \\ 15 & 10 & 20 & 22 \end{array}\right|
$$

Принятие решений в условиях полной неопределенности.

При принятии решений в условиях полной неопределенности некоторыми ориентирами могут служить следующие правила-рекомендации.

Правило Вальда (правило крайнего пессимизма). Рассматривая i-е решение, будем полагать, что на самом деле ситуация складывается самая плохая, т.е. приносящая самый малый доход $a_i = \min q_{ij}$. Но теперь уже выберем решение с наибольшим a_{i0}. Итак, правило Вальда рекомендует принять решение i_0 такое, что $a_{i0} = \max = \max (\min q_{ij})$.

$$
Q = \begin{array}{c c}
 & \min \\
\left|\begin{array}{rrrr} 0 & 6 & 5 & 2 \\ 6 & 2 & 8 & 22 \\ 9 & 4 & 3 & 32 \\ -6 & -4 & -12 & 10 \end{array}\right| & \begin{array}{r} 0 \\ 2 \\ 3 \\ -12 \end{array}
\end{array}
$$

Так, в вышеуказанном примере имеем $a_1 = 0$, $a_2 = 2$, $a_3 = 3$, $a_4 = -12$. Теперь из чисел 0, 2, 3, -12 находим максимальное. Это — 3. Значит, правила Вальда рекомендует принять 3-е решение. Данному правилу следует человек, боящийся риска.

Правило Сэвиджа (правило минимального риска). Данному правилу следует человек, боящийся риска. При применении этого правила анализируется матрица рисков $R = (r_{ij})$. Рассматривая i-е решение, будем полагать, что на самом деле складывается ситуация максимального риска $b_i = \max_j r_{ij}$. Но теперь уже выберем решение i_0 с наименьшим b_{i0}. Итак, правило Сэвиджа рекомендует принять решение i_0 такое, что $b_{i0} = \min_i b_i = \min_i (\max_j r_{ij})$.

$$
\begin{array}{c}
\\
R =
\end{array}
\begin{array}{|cccc|c}
 & & & & \max \\
9 & 0 & 3 & 30 & 30 \\
3 & 4 & 0 & 10 & 10 \\
0 & 2 & 5 & 0 & 5 \\
15 & 10 & 20 & 22 & 22
\end{array}
$$

Так, в вышеуказанном примере имеем $b_1 = 30$, $b_2 =10$, $b_3 = 5$, $b_4 = 22$. Теперь из чисел 30, 10, 5, 22 находим минимальное. Это — 5. Значит, правило Сэвиджа рекомендует принять 3-е решение.

Правило "розового оптимизма". ЛПР считает, что для него сложится самая благоприятная ситуация, т.е. он получит самый большой доход в результате своей деятельности

$c_i = \max_j q_{ij}$. Теперь выберем решение i_0 с наибольшим c_{i0}. Итак,

правило "розового оптимизма рекомендует принять решение i_0 такое, что $c_{i0} = \max (\max q_{ij})$.

max

$$
Q = \begin{array}{|cccc|c}
0 & 6 & 5 & 2 & 6 \\
6 & 2 & 8 & 22 & 22 \\
9 & 4 & 3 & 32 & 32 \\
-6 & -4 & -12 & 10 & 10
\end{array}
$$

Так, в вышеуказанном примере имеем $c_1 = 6$, $c_2 = 22$, $c_3 = 32$, $c_4 = 10$. Теперь из чисел 6, 22, 32, 10 берем максимальное. Это — 32. Значит, правило "розового оптимизма" рекомендует 3-е решение.

Правило Гурвица (взвешивающее пессимистический и оптимистический подходы к ситуации). Принимается решение i, на котором достигается максимум $\min q_{ij} + (1 - \max q_{ij})$, значение выбирается из субъективных соображений. Если приближается к единице, то правило Гурвица приближается к правилу Вальда, при приближении к нулю правило Гурвица приближается к правилу "розового оптимизма".

Возьмем □ = 1/2.

$$
Q = \begin{array}{|cccc|cc}
 & & & & \max & \min \\
0 & 6 & 5 & 2 & 6 & 0 \\
6 & 2 & 8 & 22 & 22 & 2 \\
9 & 4 & 3 & 32 & 32 & 3 \\
-6 & -4 & -12 & 10 & 10 & -12
\end{array}
$$

$i_1 = ½ * 6 + (1- ½) * 0 = 3$
$i_2 = ½ * 22 + (1 - ½) * 2 = 12$
$i_3 = ½ * 32 + (1 - ½) * 3 = 17.5$
$i_4 = ½ * 10 + (1 - ½) * (-12) = -1$

Итак, мы имеем $i_1 = 3$, $i_2 = 12$, $i_3 = 17.5$, $i_4 = -1$. Теперь из чисел 3, 12, 17.5, -1 берем максимальное. Это — 17.5. Значит, правило Гурвица рекомендует 3-е решение.

Принятие решений в условиях частичной неопределенности.

Предположим, что в рассматриваемой схеме известны вероятности p_j того, что реальная ситуация развивается по варианту j. Именно такое положение называется *частичной неопределенностью*. Как здесь принимать решение? Можно выбрать одно из следующих правил.

Правило максимизации среднего ожидаемого дохода. Доход, получаемый фирмой при реализации i-го решения,
является случайной величиной Q_i с рядом распределения

q_{i1}	. . .	in
1		n

Математическое ожидание $M(Q_i)$ и есть средний ожидаемый доход, обозначаемый также $\overline{Q_i}$. Итак, правило рекомендует принять решение, приносящее максимальный средний ожидаемый доход.

В приведенном примере вероятности такие (1/2, 1/4, 1/5, 1/20).

$$Q = \begin{vmatrix} 0 & 6 & 5 & 2 \\ 6 & 2 & 8 & 22 \\ 9 & 4 & 3 & 32 \\ -6 & -4 & -12 & 10 \end{vmatrix}$$

$p_j = (1/2 \;\; 1/4 \;\; 1/5 \;\; 1/20)$

$\overline{Q_1}$:	0	6	5	2
	1/2	1/4	1/5	1/20

$\overline{Q_2}$:	6	2	8	22
	1/2	1/4	1/5	1/20

$\overline{Q_3}$:	9	4	3	32
	1/2	1/4	1/5	1/20

	-6	-4	-12	10

Q_4 :

1/2	1/4	1/5	1/20

$\overline{Q}_1 = 6/4 + 5/5 + 2/20 = 1{,}5 + 1 + 0{,}1 = 2{,}6$

$\overline{Q}_2 = 6/2 + 2/4 + 8/5 + 22/20 = (30+5+16+11)/10 = 62/10 = 6{,}2$

$\overline{Q}_3 = 9/2 + 4/4 + 3/5 + 32/20 = (45+10+6+16)/10 = 77/10 = 7{,}7$

$\overline{Q}_4 = - 6/2 - 4/4 - 12/5 + 10/20 = (-30-10-24+5)/10 = - 59/10 = -5{,}9$

Максимальный средний ожидаемый доход равен 7.7, что соответствует 3-му решению.

Правило минимизации среднего ожидаемого риска. Риск фирмы при реализации i-го решения является случайной величиной R_i с рядом распределения

i1	· ·	in
1		n

Математическое ожидание $M[R_i]$ и есть средний ожидаемый риск, обозначаемый также $\overline{R}_i$. Правило рекомендует принять решение, влекущее минимальный средний ожидаемый риск. Вычислим средние ожидаемые риски.

$$R = \begin{vmatrix} 9 & 0 & 3 & 30 \\ 3 & 4 & 0 & 10 \\ 0 & 2 & 5 & 0 \\ 15 & 10 & 20 & 22 \end{vmatrix}$$

$p_j = (1/2 \;\; 1/4 \;\; 1/5 \;\; 1/20)$

$\overline{R}_1$:

9	0	3	30
1/2	1/4	1/5	1/20

$\overline{R}_2$:

3	4	0	10
1/2	1/4	1/5	1/20

$\overline{R}_3$:

0	2	5	0
1/2	1/4	1/5	1/20

$\overline{R}_4$:

15	10	20	22
1/2	1/4	1/5	1/20

$\overline{R}_1 = 9/2 + 3/5 + 30/20 = (45+6+15)/10 = 66/10 = 6.6$

$\overline{R}_2 = 3/2 + 4/4 + 10/20 = 1.5 + 1 + 0.5 = 3$

$\overline{R}_3 = 2/4 + 5/5 = 15/10 = 1.5$

$\overline{R}_4 = 15/2 + 10/4 + 20/5 + 22/20 = (150+50+80+22)/20 = 302/20 = 15.1$

Минимальный средний ожидаемый риск равен 1.5, что соответствует 3-му решению.

Иногда в условиях полной неопределенности применяется следующее правило.

Правило Лапласа равновозможности, когда все вероятности p считаются равными. После этого можно выбрать какое-нибудь из двух приведенных выше правил-рекомендаций принятия решений.

Правило максимизации среднего ожидаемого дохода.

$$Q = \begin{vmatrix} 0 & 6 & 5 & 2 \\ 6 & 2 & 8 & 22 \\ 9 & 4 & 3 & 32 \\ 6 & -4 & -12 & 10 \end{vmatrix}$$

$p_j = (\ 1/4 \ \ 1/4 \ \ 1/4 \ \ 1/4\ )$

$\overline{Q}_1$:

0	6	5	2
1/4	1/4	1/4	1/4

$\overline{Q}_2$:

6	2	8	22
1/4	1/4	1/4	1/4

$\overline{Q}_3$:

9	4	3	32
1/4	1/4	1/4	1/4

$\overline{Q}_4$:

-6	-4	-12	10
1/4	1/4	1/4	1/4

$\overline{Q}_1 = (6+5+2)/4 = 13/4 = 3,25$

$\overline{Q}_2 = (6+2+8+22)/4 = 38/4 = 9,5$

$\overline{Q}_3 = (9+4+3+32)/4 = 48/4 = 12$

$\overline{Q}_4 = (-6-4-12+10)/4 = -12/4 = -3$

Максимальный средний ожидаемый доход равен 12, что соответствует 3-му решению.

Правило минимизации среднего ожидаемого риска.

$$R = \begin{vmatrix} 9 & 0 & 3 & 30 \\ 3 & 4 & 0 & 10 \\ 0 & 2 & 5 & 0 \\ 15 & 10 & 20 & 22 \end{vmatrix}$$

$p_j = (\ 1/2\ \ 1/4\ \ 1/5\ \ 1/20\ )$

$\overline{R}_1$:

9	0	3	30
1/4	1/4	1/4	1/4

$\overline{R}_2$:

3	4	0	10
1/4	1/4	1/4	1/4

$\overline{R}_3$:

0	2	5	0
1/4	1/4	1/4	1/4

$\overline{R}_4$:

15	10	20	22
1/4	1/4	1/4	1/4

$\overline{R}_1 = (9+3+30)/4 = 42/4 = 10{,}5$

$\overline{R}_2 = (3+4+10)/4 = 17/4 = 4{,}25$

$\overline{R}_3 = (2+5)/4 = 7/4 = 1{,}75$

$\overline{R}_4 = (15+10+20+22)/4 = 67/4 = 16{,}75$

Минимальный средний ожидаемый риск равен 1.75, что соответствует 3-му решению.

При данных вероятностях состояний теперь требуется проанализировать семейство из 4-х операций: каждая операция имеет две характеристики — средний ожидаемый доход и средний ожидаемый риск. Точка (q’, r’) доминирует точку (q, r), если q’□q и r’□r. Точка, недоминируемая никакой другой, называется *оптимальной по Парето*.

Байесовский подход к принятию решений.

Предположим, предприниматель раздумывает над выбросом на рынок нового перспективного товара. Но он не знает, “пойдет” ли товар. Для уточнения ситуации он производит пробную партию и смотрит, как он раскупается. После этого ситуация становится более определенной, более прогнозируемой. Для уточнения этой ситуации можно выпустить еще одну пробную партию и проанализировать какие-нибудь другие моменты.

В общем, байесовский подход выглядит следующим образом. Предположим, мы имеем вероятностный прогноз ситуации S: $P(S=H_i)=p_i$. Имея такой прогноз, можно найти средний ожидаемый доход $\overline{Q}$ или средний ожидаемый риск $\overline{R}$. Рассмотрим возможность проведения пробной операции, которая уточнит $\{p_i\}$. Новое распределение вероятностей есть $\{p_i'\}$. Новому распределению вероятностей соответствуют новые характеристики: средний ожидаемый доход $\overline{Q}'$, средний ожидаемый риск $\overline{R}'$. Если ЛПР решит, что при уточнении пробная операция оправдывается (например, если увеличение среднего ожидаемого дохода превышает затраты на проведение пробной операции), то он ее проводит.

$$Q = \begin{vmatrix} 0 & 6 & 5 & 2 \\ 6 & 2 & 8 & 22 \\ 9 & 4 & 3 & 32 \\ -6 & -4 & -12 & 10 \end{vmatrix}$$

$$p_j' = (\ 1/6\ \ 1/6\ \ 1/3\ \ 1/3\ )$$

$\overline{Q_1'}$:

0	6	5	2
1/6	1/6	1/3	1/3

$\overline{Q_2'}$:

6	2	8	22
1/6	1/6	1/3	1/3

$\overline{Q_3'}$:

9	4	3	32
1/6	1/6	1/3	1/3

$\overline{Q_4'}$:

-6	-4	-12	10
1/6	1/6	1/3	1/3

$\overline{Q_1'} = 6/6 + 5/3 + 2/3 = 20/6$

$\overline{Q_2'} = 6/6 + 2/6 + 8/3 + 22/3 = 68/6$

$\overline{Q_3'} = 9/6 + 4/6 + 3/3 + 32/3 = 83/6$

$Q_4' = - 6/2 - 4/4 - 12/5 + 10/20 = -14/6$

Наибольший доход при пробной операции будет получен при 3-ем решении. Теперь выясним, стоит ли производить пробную операцию, т.е. найдем разность между средним ожидаемым доходом от основной операции (см. Правило максимизации среднего ожидаемого дохода) и полученными в результате пробной операции данными, (83/6 - 7,7 = 184/30 = 92/15 □ 6,13). В итоге можно сказать, что стоимость пробной операции в данном примере не должна превышать □ 6,13.

Для нахождения лучших операций иногда применяют подходящую взвешивающую формулу, которая для пар (Q, r) дает одна число, по которому и определяют лучшую операцию.

Для анализа ситуаций можно применить взвешивающую формулу E(Q, r) = 4Q - r. Данная формула говорит, что доход ценится в четыре раза больше, чем риск, т.е. увеличение риска на 4 компенсируется увеличением дохода на единицу.

$E_1 = 4*2.6 - 6.6 = 3.8$

$E_2 = 4*6.2 - 3 = 21.8$

$E_3 = 4*7.7 - 1.5 = 29.3$

$E_4 = 4*(-5.9) - 25.1 = -48.7$

Согласно этой формуле лучшей операцией считается операция № 3, а худшей — операция № 4.

для вторичных алфавитов с m=2 методы Шеннона-Фано и Хаффмена дают в большинстве случаев одинаковые результаты.

ЗАДАНИЕ

1. Ознакомиться с теоретической частью, используя дополнительную литературу.
2. Исходя из полученных у преподавателя исходных данных, решить поставленную задачу.
3. Провести программный контроль выполнения пункта 2 на примере исходных данных полученных у преподавателя.
4. Отчет.

Контрольные вопросы.

1. Методы решения задач в условиях неопределенности?
2. Какой из критериев принятия решений в условиях неопределенности наиболее пессимистичный?
3. Какой из критериев принятия решений в условиях неопределенности наименее пессимистичный?
4. Если платежная матрица представляет доход, то на каких условиях основывается оптимальный выбор?

Лабораторная работа 3. Анализ решений (в условиях риска).

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ

Критерий ожидаемого значения.

Использование критерия ожидаемого значения обусловлено стремлением максимизировать ожидаемую прибыль (или минимизировать ожидаемые затраты). Использование ожидаемых величин предполагает возможность многократного решения одной и той же задачи, пока не будут получены достаточно точные расчётные формулы. Математически это выглядит так: пусть X– случайная величина с математическим ожиданием MX и дисперсией DX. Если $x_1, x_2, ..., x_n$ – значения случайной величины (с.в.) X, то среднее арифметическое их (выборочное среднее) значений $\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n}$ имеет дисперсию $\frac{DX}{n}$. Таким образом, когда $n \to \infty$

$\frac{DX}{n} \to 0$ и $\bar{x} \to MX$.

Другими словами при достаточно большом объёме выборки разница между средним арифметическим и математическим ожиданием стремится к нулю (так называемая предельная теорема теории вероятности). Следовательно, использование критерия ожидаемое значение справедливо только в случае, когда одно и тоже решение приходится применять достаточно большое число раз. Верно и обратное: ориентация на ожидания будет приводить к неверным результатам, для решений, которые приходится принимать небольшое число раз.

Пример 1. Требуется принять решение о том, когда необходимо проводить профилактический ремонт ПЭВМ, чтобы минимизировать потери из-за неисправности. В случае если ремонт будет производится слишком часто, затраты на обслуживание будут большими при малых потерях из-за случайных поломок.

Так как невозможно предсказать заранее, когда возникнет неисправность, необходимо найти вероятность того, что ПЭВМ выйдет из строя в период времени t. В этом и состоит элемент ”риска”.

Математически это выглядит так: ПЭВМ ремонтируется индивидуально, если она остановилась из-за поломки. Через T интервалов времени выполняется профилактический ремонт всех n ПЭВМ. Необходимо определить оптимальное значение T, при котором минимизируются общие затраты на ремонт неисправных ПЭВМ и проведение профилактического ремонта в расчёте на один интервал времени.

Пусть p_t – вероятность выхода из строя одной ПЭВМ в момент t, а n_t – случайная величина, равная числу всех вышедших из строя ПЭВМ в тот же момент. Пусть далее C_1 – затраты на ремонт неисправной ПЭВМ и C_2 – затраты на профилактический ремонт одной машины.

Применение критерия ожидаемого значения в данном случае оправдано, если ПЭВМ работают в течение большого периода времени. При этом ожидаемые затраты на один интервал составят

$$ОЗ = \frac{C_1 \sum_{t=1}^{T-1} M(n_t) + C_2 n}{T},$$

где $M(n_t)$ – математическое ожидание числа вышедших из строя ПЭВМ в момент t. Так как n_t имеет биномиальное распределение с параметрами (n, p_t), то $M(n_t) = np_t$. Таким образом

$$ОЗ = \frac{n(C_1 \sum_{t=1}^{T-1} p_t + C_2)}{T}$$

Необходимые условия оптимальности T^* имеют вид:

$$ОЗ\ (T^*-1) \geq ОЗ\ (T^*),$$
$$ОЗ\ (T^*+1) \geq ОЗ\ (T^*).$$

Следовательно, начиная с малого значения T, вычисляют $ОЗ(T)$, пока не будут удовлетворены необходимые условия оптимальности.

Пусть $C_1 = 100$; $C_2 = 10$; $n = 50$. Значения p_t имеют вид:

T	p_t	$\sum_{t=1}^{T-1} p_t$	$ОЗ(T)$
1	0.05	0	$\frac{50\ (100 \cdot 0 + 10)}{1} = 500$
2	0.07	0.05	375
3	0.10	0.12	366.7
4	0.13	0.22	400
5	0.18	0.35	450

$$T^* \to 3\ , \quad ОЗ(T^*) \to 366.7$$

Следовательно профилактический ремонт необходимо делать через T^*=3 интервала времени.

Критерий “ожидаемое значение – дисперсия”.

Критерий ожидаемого значения можно модифицировать так, что его можно будет применить и для редко повторяющихся ситуаций .

Если x – с. в. с дисперсией DX, то среднее арифметическое $\bar{x}$ имеет дисперсию DX/n, где n – число слогаемых в $\bar{x}$. Следовательно, если DX уменьшается, и вероятность того, что $\bar{x}$ близко к MX, увеличивается. Следовательно, целесообразно ввести критерий, в котором максимизация ожидаемого значения прибыли сочетается с минимизацией её дисперсии.

Пример 2. Применим критерий “ожидаемое значение – дисперсия” для примера 1. Для этого необходимо найти дисперсию затрат за один интервал времени, т.е. дисперсию

$$з_T = \frac{C_1\sum\limits_{t=1}^{T-1} n_t + C_2 n}{T}$$

Т.к. $n_t,\ t = \overline{1, T-1}$ – с.в., то $з_T$ также с.в. С.в. n_t имеет биномиальное распределение с $M(n_t) = np_t$ и $D(n_t) = np_t(1–p_t)$. Следовательно,

$$D(з_T) = D\left(\frac{C_1\sum\limits_{t=1}^{T-1} n_t + C_2 n}{T}\right) = \left(\frac{C_1}{T}\right)^2 D\left(\sum_{t=1}^{T-1} n_t\right) =$$

$$= \left(\frac{C_1}{T}\right)^2 \sum_{t=1}^{T-1} Dn_t = \left(\frac{C_1}{T}\right)^2 \sum_{t=1}^{T-1} np_t(1-p_t) = n\left(\frac{C_1}{T}\right)^2 \left\{\sum_{t=1}^{T-1} p_t - \sum_{t=1}^{T-1} p_t^2\right\},$$

где $C_2 n = const.$

Из примера 1 следует, что

$$M(з_T) = M(з(T)).$$

Следовательно искомым критерием будет минимум выражения

$$M(з(T)) + к\, D(з_T).$$

<u>Замечание</u>. Константу “*к*” можно рассматривать как уровень <u>не склонности к риску</u>, т.к. “*к*” определяет “степень возможности” дисперсии $Д(з_T)$ по отношению к математическому ожиданию. Например, если предприниматель, особенно остро реагирует на большие отрицательные отклонения прибыли вниз от $M(з(T))$, то он может выбрать “*к*” много больше 1. Это придаёт больший вес дисперсии и приводит к решению, уменьшающему вероятность больших потерь прибыли.

При $к = 1$ получаем задачу

$$M(З(T)) + D(З(T)) = n\left\{\left(\frac{C_1}{T} + \frac{C_1^2}{T^2}\right)\sum_{t=1}^{T-1} p_t - \left(\frac{C_1}{T}\right)^2 \sum_{t=1}^{T-1} p_t^2 + \frac{C^2}{T}\right\}$$

По данным из примера 1 можно составить следующую таблицу

T	p_t	p_t^2	$\sum_{t=1}^{T-1} p_t$	$\sum_{t=1}^{T-1} p_t^2$	$M(з(T))+D(з(T))$
1	0.05	0.0025	0	0	500.00
2	0.07	0.0049	0.05	0.0025	6312.50
3	0.10	0.0100	0.12	0.0074	6622.22
4	0.13	0.0169	0.22	0.0174	6731.25
5	0.18	0.0324	0.35	0.0343	6764.00

Из таблицы видно, что профилактический ремонт необходимо делать в течение каждого интервала $T^* = 1$.

Критерий предельного уровня.

Критерий предельного уровня не дает оптимального решения, максимизирующего, например, прибыль или минимизирующего затраты. Скорее он соответствует определению приемлемого способа действий.

Пример 3. Предположим, что величина спроса x в единицу времени (интенсивность спроса) на некоторый товар задаётся непрерывной функцией распределения $f(x)$. Если запасы в начальный момент невелики, в дальнейшем возможен дефицит товара. В противном случае к концу рассматриваемого периода запасы нереализованного товара могут оказаться очень большими. В обоих случаях возможны потери.

Т.к. определить потери от дефицита очень трудно, ЛПР может установить необходимый уровень запасов таким образом, чтобы величина ожидаемого дефицита не превышала A_1 единиц, а величина ожидаемых излишков не превышала A_2 единиц. Иными словами, пусть I – искомый уровень запасов. Тогда

$$\text{ожидаемый дефицит} = \int_I^{\infty}(x-I)f(x)dx \le A_1,$$

$$\text{ожидаемые излишки} = \int_0^{I}(I-x)f(x)dx \le A_2.$$

При произвольном выборе A_1 и A_2 указанные условия могут оказаться противоречивыми. В этом случае необходимо ослабить одно из ограничений, чтобы обеспечить допустимость.

Пусть, например,

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{20}{x^2}, \text{ если } 10 \le x \le 20,\\ 0\ , \text{ если } x \le 10 \text{ или } x \ge 20.\end{cases}$$

Тогда

$$\int_I^{20}(x-I)f(x)dx = \int_I^{20}(x-I)\frac{20}{x^2}dx = 20(\ln\frac{20}{I}+\frac{I}{20}-1)$$

$$\int_{10}^{I}(I-x)f(x)dx = \int_{10}^{I}(I-x)\frac{20}{x^2}dx = 20(\ln\frac{10}{I}+\frac{I}{10}-1)$$

Применение критерия предельного уровня приводит к неравенствам

$$\ln I - \frac{I}{20} \ge \ln 20 - \frac{A_1}{20} - 1 = 1.996 - \frac{A_1}{20}$$

$$\ln I - \frac{I}{10} \ge \ln 10 - \frac{A_2}{20} - 1 = 1.302 - \frac{A_2}{20}$$

Предельные значения A_1 и A_2 должны быть выбраны так, что бы оба неравенства выполнялись хотя бы для одного значения I.

Например, если $A_1 = 2$ и $A_2 = 4$, неравенства принимают вид

$$\ln I - \frac{I}{20} \ge 1.896$$

$$\ln I - \frac{I}{10} \ge 1.102$$

Значение I должно находиться между 10 и 20, т.к. именно в этих пределах изменяется спрос. Из таблицы видно, что оба условия выполняются для I, из интервала (13,17)

I	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
ln I – I	1.8	1.8	1.8	1.9	1.9	1.9	1.9	1.9	1.9	1.9	1.9
ln I – I	1.3	1.2	1.2	1.2	1.2	1.2	1.1	1.1	1.0	1.0	0.9

Любое из этих значений удовлетворяет условиям задачи.

ЗАДАНИЕ

1. Ознакомиться с теоретической частью, используя дополнительную литературу.
2. Исходя из полученных у преподавателя исходных данных, решить поставленную задачу.
3. Провести программный контроль выполнения пункта 2 на примере исходных данных полученных у преподавателя.
4. Отчет.

Контрольные вопросы

1. Что такое критерий принятия решений?
2. В чем состоит особенность критериев Сэвиджа и Байеса-Лапласа?
3. Как осуществляется выбор по критерию геометрически?
4. В каких ситуациях предпочтительнее использовать производные критерии?
5. В каких случаях выбор вариантов решений по критерию Байеса-Лапласа и Ходжа-Лемана совпадет?

Лабораторная работа 4. Решение игр вида (2xn), (mx2), (mxn).

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

Игра представляет математическую модель реальной конфликтной ситуации, анализ которой ведется по определенным правилам. В общем случае правилами игры устанавливаются последовательность ходов, объем информации каждой стороны о поведении другой и результат (исход) игры. Правила определяют также конец игры, когда некоторая возможная последовательность выборов уже сделана, и больше ходов делать не разрешается.

В зависимости от числа участников игры подразделяются на ***парные*** и ***множественные***. В парной игре число участников равно двум, во множественной – более двух. Стороны, участвующие в игре (конфликте), называются ***игроками.*** В спортивной игре игроками могут быть отдельные лица или команды, в военном конфликте – воюющие стороны. Иногда под игроком понимается природа, формирующая условия, в которых необходимо принимать решения.

Стратегией игрока называется совокупность правил, определяющих выбор варианта действий при каждом личном ходе игрока в зависимости от ситуации, сложившейся в процессе игры. Игра называется ***конечной***, если число стратегий игроков конечно, и ***бесконечной***, если хотя бы у одного из игроков число стратегий является бесконечным. Стратегия игрока называется ***оптимальной,*** если она обеспечивает данному игроку при многократном повторении игры максимально возможный средний выигрыш или минимально возможный средний проигрыш, независимо от поведения противника. Выбор из предусмотренных правилами игры стратегий и ее осуществление называется ***ходом***. Ходы бывают ***личные*** и ***случайные***. Ход называется ***личным,*** если игрок сознательно выбирает один из возможных вариантов действий и осуществляет его (любой ход в шахматной игре). Ход называется ***случайным***, если выбор производится не игроком, а каким-либо механизмом случайного выбора (бросание игральной кости или монеты).

Существует два способа описания игр: ***позиционный*** и ***нормальный. Позиционный*** способ связан с развернутой формой игры и сводится к графу последовательных шагов (дереву игры). ***Нормальный*** способ заключается в явном представлении совокупности стратегий игроков и платежной функции. Платежная функция в игре определяет для каждой совокупности выбранных игроками стратегий выигрыш каждой из сторон. Если в парной игре выигрыш одного игрока равен проигрышу второго, то такую игру принято называть ***игрой с нулевой суммой.***

Парную игру с нулевой суммой удобно исследовать, если она описана в виде платежной матрице.

Рассмотрим конечную игру двух лиц (I и II) с нулевой суммой. Предположим, что игрок I имеет m стратегий (обозначим их $A_1, A_2,\ldots, A_m$), а игрок II (противник) – n стратегий ($B_1, B_2,\ldots., B_n$). Такая игра называется игрой размерности m x n.

Пусть игрок I выбрал одну из своих возможных стратегий A_i (i=1,m), а игрок II, не зная результата выбора игрока I, выбрал стратегию B_j(j=1,n). Выигрыши игрока I $W_1(A_i, B_j)$ и игрока II $W_2(A_i, B_j)$ в результате выбора стратегий удовлетворяют соотношению $W_1(A_i, B_j)+W_2(A_i, B_j)=0$. Отсюда, если положить $W_1(A_i, B_j)= W(A_i, B_j)$, имеем $W_2(A_i, B_j) = - W(A_i, B_j)$.

Пусть $W(A_i, B_j)=a_{ij}$. Предположим, что значения a_{ij} нам известны при каждой паре стратегий. Запишем эти значения в виде таблицы, строки которой соответствуют стратегиям игрока I, а столбцы – стратегиям игрока II. Такая таблица называется ***платежной матрицей***.

Таблица 1

II I	B_1	B_2	…	B_n
A_1	a_{11}	a_{12}	...	a_{1n}
A_2	a_{21}	a_{22}	…	a_{2n}
…	…	…	...	...
A_m	a_{m1}	a_{m2}	…	A_{mn}

Каждый положительный элемент a_{ij} матрицы определяет величину выигрыша игрока I и проигрыша игрока II при применении ими соответствующих стратегий. Цель игрока I – максимизировать свой выигрыш, а игрока II – минимизировать свой проигрыш.

Рассмотрим игру m x n с платежной матрицей, представленной в таблице 1 . Следует определить:

а) наилучшую стратегию игрока I среди стратегий $A_1, A_2, \ldots, A_i, \ldots, A_m$;

б) наилучшую стратегию игрока II среди стратегий $B_1, B_2, \ldots, B_j, \ldots, B_n$.

При определении наилучших стратегий игроков основой рассуждений является принцип, который предполагает, что ***противники, участвующие в игре, одинаково разумны, и каждый из них делает все для того, чтобы добиться своей цели.***

Используя этот принцип, найдем наилучшую стратегию игрока I, для чего проанализируем последовательно все его стратегии. Выбирая стратегию A_i игрока I, мы должны рассчитывать, что игрок II ответит на нее той из своих стратегий B_j, для которой выигрыш игрока I будет минимальным. Найдем минимальное число a_{ij} в каждой строке матрицы и, обозначив его α_i (i=1,m), запишем рядом с платежной матрицей в добавочный столбец:

$$\alpha_i = \min_j a_{ij} \quad , i=1,m. \qquad (1)$$

Таблица 2

II / I	B_1	B_2	…	B_n	α_i
A_1	a_{11}	a_{12}	...	a_{1n}	α_1
A_2	a_{21}	a_{22}	…	a_{2n}	α_2
…	…	…	…	...	…
A_m	a_{m1}	a_{m2}	…	a_{mn}	α_m

Зная числа α_i (свои минимальные выигрыши при применении стратегий A_i), игрок I должен предпочесть другим стратегиям ту, для которой α_i максимально. Обозначим это максимальное значение через α, тогда $\alpha = \max_i \alpha_i$.

Подставив вместо α_i правую часть выражения (1), получим

$$\alpha = \max_i \min_j a_{ij}.$$

Величина α - гарантированный выигрыш, который может обеспечить себе игрок I, называется ***нижней ценой игры (максимином).*** Стратегия, обеспечивающая получение нижней цены игры α , называется максиминной стратегией. Если игрок I будет придерживаться своей максиминной стратегии, то ему гарантирован выигрыш, не меньший α при любом поведении игрока II.

Игрок II заинтересован уменьшить свой проигрыш или, что то же самое, выигрыш игрока I обратить в минимум. Поэтому для выбора своей наилучшей стратегии он должен найти максимальное значение выигрыша в каждом из столбцов и среди этих значений выбрать наименьшее. Максимальный элемент в каждом столбце обозначим через β_j. Эти элементы будем записывать в дополнительной строке таблицы.

Таблица 3

II / I	B_1	B_2	…	B_n	α_i
A_1	a_{11}	a_{12}	…	a_{1n}	α_1
A_2	a_{21}	a_{22}	…	a_{2n}	α_2
…	…	…	…	...	…
A_m	a_{m1}	a_{m2}	…	a_{mn}	α_m
β_j	β_1	β_2	…	β_n	

Наименьшее значение среди β_j обозначим β - это ***верхняя цена игры (минимакс),*** которая определяется по формуле

$$\beta = \min_j \max_i a_{ij}.$$

Стратегия игрока II, обеспечивающая “выигрыш” β, является его ***минимаксной стратегией.*** Если игрок II будет придерживаться своей минимаксной стратегии, то он гарантирован, что в любом случае проиграет не больше β .

Можно показать, что нижней и верхней цены игры всегда справедливо неравенство $\max_i \min_j a_{ij} \le \min_j \max_i a_{ij}$, i=1,m; j=1,n, т.е. $\alpha \le \beta$.

Существуют игры, для которых нижняя цена равна верхней, т.е. $\alpha = \beta$. Такие игры называются играми с ***седловой точкой***.

Общее значение нижней и верхней цены игры в играх с селовой точкой называется ***чистой ценой игры***, а стратегия A^*_i и B^*_j, позволяющие достичь этого значения, - ***оптимальными***. Пара оптимальных стратегий (A^*_i, B^*_j) называется седловой точкой матрицы, так как элемент $a^*_{ij} = \gamma$ является одновременно минимальным в i-й строке и максимальным в j-м столбце. Оптимальные стратегии и чистая цена являются решением игры. Оптимальные стратегии опредбеляют в игре “положение равновесия”, которое заключается в том, что каждый из игроков не заинтересован в отходе от своей оптимальной стратегии, так как это ему не выгодно. Чистую цену игры γ в игре с седловой точкой при условии одинаковой разумности партнеров игрок I не может увеличить, а игрок II – уменьшить. Если игра имеет седловую точку, то говорят, что она решается в чистых стратегиях. Под ***чистой стратегией*** понимается такая стратегия, которая выбрана игроком сознательно, без привлечения механизма случайного выбора. Платежная матрица игры может иметь более одной седловой точки.

Если матрица игры содержит седловую точку, то ее решение находится по принципу минимакса. Применение минимаксных стратегий каждым из игроков обеспечивает первому выигрыш не меньше α , а второму проигрыш не больше β . Учитывая, что $\alpha \le \beta$, естественно для игрока I желание увеличить выигрыш, а для игрока II - уменьшить проигрыш. Поиск такого решения приводит к применению сложной стратегии, состоящей в случайном применении двух и более чистых стратегий с определенными частотами. Такая сложная стратегия в теории игр называется ***смешанной***. Смешанные стратегии игроков будем обозначать соответственно $p_A=(p_1,p_2,\ldots p_m)$ и $q_B=(q_1,q_2,\ldots q_n)$, где $p_i>0$, $q_j>0$ – вероятности применения чистых стратегий A_i и B_j, $i=1,m$; $j=1,n$, при этом $\sum_{i=1}^{m} p_i = 1,\ \sum_{j=1}^{n} q_j = 1.$

В основной теореме теории игр утверждается, что любая конечная игра двух лиц с нулевой суммой имеет, по крайней мере, одно решение, возможно, в смешанных стратегиях, т.е. каждая конечная игра имеет цену. Обозначим ее так же, как чистую цену игры, через γ. Цена игры γ - средний выигрыш, приходящийся на одну партию, - всегда удовлетворяет условию $\alpha \le \gamma \le \beta$, т.е. лежит между нижней ценой игры α и верхней ценой игры β . Следовательно, каждый игрок при многократном повторении игры, придерживаясь смешанных стратегий, получает более выгодный для себя результат. Оптимальное решение игры в смешанных стратегиях, так же как и решение в чистых стратегиях, обладает свойством, которое заключается в том, что каждый из игроков не заинтересован в отходе от своей оптимальной смешанной стратегии, если его противник применяет оптимальную смешанную стратегию, так как это ему не выгодно.

Стратегии игроков, входящие в их оптимальные смешанные стратегии, называются ***активными***.

Теорема. *Применение оптимальной смешанной стратегии обеспечивает игроку максимальный средний выигрыш (или минимальный средний проигрыш), равный цене игры* γ *, независимо от того, какие действия предпринимает другой игрок, если только он не выходит за пределы своих активных стратегий.*

Если платежная матрица игры не содержит седловой точки, то задача определения оптимальной смешанной стратегии тем сложнее, чем больше размерность матрицы. Поэтому для игр с платежными матрицами большой размерности отыскание решения можно несколько упростить используя *доминирование* строк и столбцов. Обычно говорят, что k-я строка матрицы **A** доминирует i-ю строку (т. е. одна чистая стратегия доминирует другую), если

$$a_{ij} \le a_{kj} \qquad \text{при всех } j,$$

$$a_{ij} < a_{kj} \qquad \text{по крайней мере при одном } j.$$

Аналогично *l-й* столбец доминирует *j*-й столбец, если

$$a_{ij} \le a_{kj} \qquad \text{при всех } i,$$

$$a_{ij} \le a_{kj} \qquad \text{по крайней мере при одном } i.$$

Смысл этого состоит в том, что доминирующая стратегия никогда не хуже, а в некоторых случаях лучше, чем доминируемая стратегия. Отсюда следует, что игроку нет необходимости использовать доминируемую стратегию. В самом деле, будут существовать оптимальные смешанные стратегии, при которых назначается нулевая вероятность использования доминируемых строк и столбцов, и при решении игры все доминируемые строки и столбцы могут быть отброшены, что часто позволяет уменьшить размеры матрицы.

Пример 2. Рассмотрим игру со следующей матрицей:

$$\begin{matrix} 5 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 6 & 4 \end{matrix}$$

Третья строка доминирует вторую. Исключение второй строки приводит к матрице

$$\begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 3 & 6 & 4 \end{pmatrix}$$

Третий столбец в этой урезанной матрице доминирует второй, исключение второго столбца дает

$$\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Если можно найти решение для полученной игры, то его легко использовать для решения исходной игры, просто приписав исключенным строкам и столбцам нулевые вероятности.

Решение и геометрическая интерпретация игр nx2 и 2xm

Этот метод применим только к играм, в которых хотя бы один игрок имеет только две стратегии. Рассмотри игру 2х2, т.к. она является наиболее простым случаем конечных игр. В этой игре каждый из игроков обладает только двумя стратегиями. Если игра 2х2 имеет седловую точку, то решение ее очевидно. Предположим, что игра не имеет седловой точки.

Таблица 4

II / I	B_1	B_2
A_1	a_{11}	a_{12}
A_2	a_{21}	a_{22}

Требуется найти оптимальные смешанные стратегии игроков $p^*_A=(p_1,p_2)$, $q^*_B=(q_1,q_2)$ и цену игры γ.

Игрок I будет применять стратегию A_1 с вероятностью p_1 и стратегию A_2 с вероятностью p_2. Если игрок II применяет стратегию B_1, то выигрыш игрока I определяется из уравнения

$$a_{11}p_1+a_{21}p_2=\gamma.$$

Если игрок II будет применять стратегию B_2, то выигрыш игрока I не изменится и определяется равенством

$$a_{12}p_1+a_{22}p_2=\gamma.$$

Принимая во внимание условие $p_1+p_2=1$, будем иметь систему из трех линейных уравнений с тремя неизвестными величинами:

$$\begin{cases} a_{11}p_1+a_{21}p_2=\gamma \\ a_{21}p_1+a_{22}p_2=\gamma \\ p_1+p_2=1 \end{cases} \qquad (2)$$

Решив эту систему уравнений, находим величины p_1, p_2, т.е. $p^*_A=(p_1,p_2)$ и γ.

Аналогично определяется оптимальная стратегия игрока II $q^*_B=(q_1,q_2)$ из системы уравнений:

$$\begin{cases} a_{11}q_1+a_{21}q_2=\gamma \\ a_{21}q_1+a_{22}q_2=\gamma \\ q_1+q_2=1 \end{cases} \qquad (3)$$

Дадим геометрическую интерпретацию игры 2x2, представленной в таблице 4. Для этого в системе координат X0Y на оси абсцисс отложим отрезок $[A_1, A_2]$, равный единице, и через концы этого отрезка проведем перпендикулярные к оси абсцисс прямые, на которых будем откладывать выигрыш игрока I (см. рисунок 1).

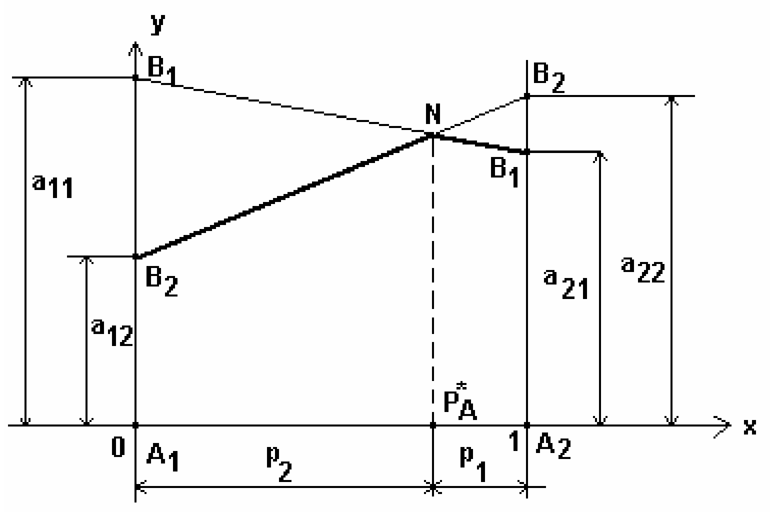


Рис.1

Левый перпендикуляр, совпадающий с осью ординат, соответствует стратегии A_1, для которой p_1=1, p_2=0, а правый равен стратегии A_2, для которой p_1=0, p_2=1. При применении игроком II стратегии B_1 выигрыш игрока I будет равен a_{11}, если он применяет стратегию A_1, и a_{21}, если он применяет стратегию A_2. Отложив отрезки, равные a_{11} и a_{21}, на соответствующих перпендикулярах, получим две точки: B_1 на перпендикуляре, который соответствует стратегии A_1, и B_1 на перпендикуляре, который соответствует стратегии A_2. Ордината любой точки отрезка B_1B_1 равна величине выигрыша игрока I при применении им стратегии A_1 и A_2 с вероятностями p_1 и p_2 соответственно.

Если игрок II применяет стратегию B_2, то выигрыш игрока I будет равен a_{12} при применении м стратегии A_1 и a_{22} при применении стратегии A_2. Проводя аналогичные построения, получим отрезок B_2B_2. Ординаты точек, лежащих на отрезке B_2B_2, равны среднему выигрышу игрока I, если он применяет стратегии A_1 и A_2 с вероятностями p_1 и p_2 соответственно, а игрок II применяет стратегию B_2.

Для нахождения оптимальной стратегии p^*_A построим нижнюю границу выигрыша игрока I, т.е. ломанную B_2NB_1, отмеченную на рисунке жирной линией. На этой ломаной лежат минимальные выигрыши игрока I при использовании им любой смешанной стратегии.

Оптимальное решение игры определяет точка N, в которой выигрыш игрока I принимает наибольшее значение. Ордината точки N равна цене игры γ. Проекции этой точки на оси абсцисс соответствует оптимальная стратегия $p^*_A=(p_1,p_2)$, при этом расстояния от точки p^*_A до концов единичного отрезка на оси абсцисс равны вероятностям p_1 и p_2 стратегий A_1 и A_2 в оптимальной смешанной стратегии игрока I.

Оптимальная стратегия $q^*_B=(q_1,q_2)$ игрока II находится аналогично. Для этого необходимо поменять местами игроков I и II, т.е. транспонировать платежную матрицу, и вместо максимального значения нижней границы выигрыша находить минимальное значение верхней границы выигрыша (см. рисунок 2). Транспонированная матрица представлена в таблице 5.

Таблица 5

I / II	A_1	A_2
B_1	a_{11}	a_{21}
B_2	a_{12}	a_{22}

На рисунках 1 и 2 решение игры определялось точкой пересечения стратегий, однако это справедливо не всегда. Так на рисунке 3 показан случай, когда нижняя граница игрока I совпадает с отрезком B_1B_2. Стратегия B_1 игрока II является для него невыгодной, так как, применяя ее, он в любом случае проигрывает больше, чем при применении стратегии B_2. Здесь $p^*_A=(p_1,p_2)=(0,1)$; $\gamma=a_{22}$. Игра имеет седловую точку.

Любая конечная игра mxn имеет решение, в котором число активных стратегий каждого игрока не превосходит l, где l=min(m,n). Следовательно, у игры 2xn или mx2 всегда имеется решение, содержащее не более двух активных стратегий у каждого из игроков. Если эти активные стратегии игроков будут найдены, то игра 2xn или mx2 превращается в игру 2x2.

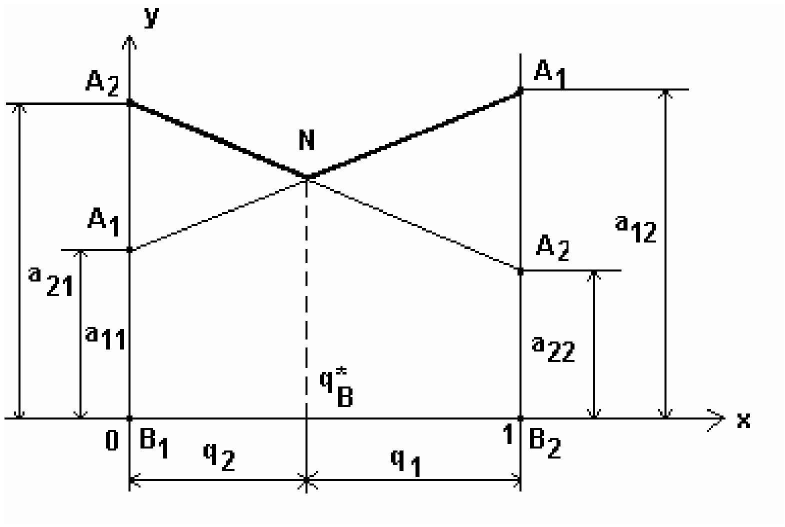


Рис. 2

Практически решение игры 2xn осуществляется следующим образом:

1) строится графическое изображение игры;

2) выделяется нижняя граница выигрыша и находится наибольшая ордината нижней границы, которая равна цене игры γ;

3) определяется пара стратегий, пересекающихся в точке оптимума.

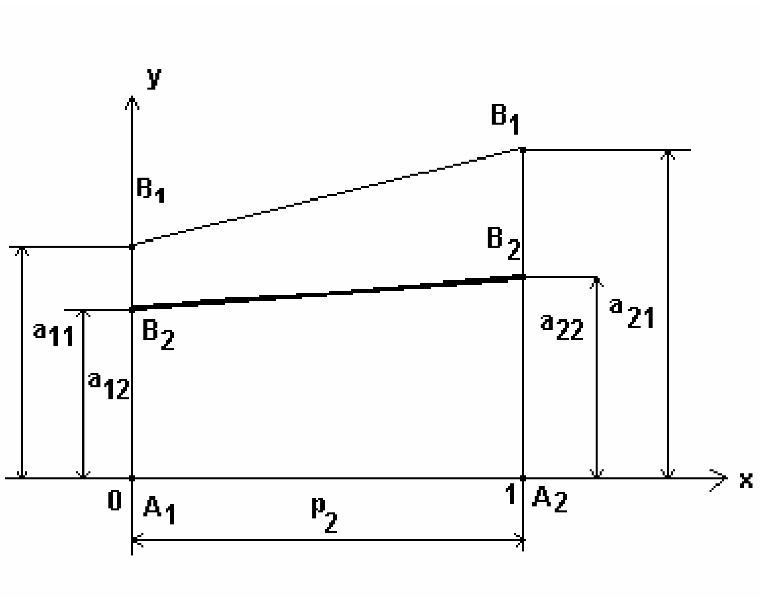


Рис.3

Эти стратегии являются активными стратегиями игрока II. Таким образом, игра 2xn сведена к игре 2x2. Если в точке оптимума пересекаются более двух стратегий, то в качестве активных стратегий может быть выбрана любая пара из них.

Решение игры mx2 осуществляется аналогично, только при решении игры mx2 выделяется не нижняя, а верхняя граница выигрыша и на ней находится точка оптимума с наименьшей ординатой.

Пример. Найти решение и дать геометрическую интерпретацию игры, платежная матрица которой представлена в таблице 6.

Таблица 6.

II / I	B_1	B_2
A_1	5	-1
A_2	2	4

Так как $\alpha = 2 \neq \beta = 4$, то седловой точки матрица игры не имеет. Следовательно, решение игры будем находить в смешанных стратегиях. Записав и решив системы уравнений вида (2) и (3), получим:

$$p_A^* = \left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right); \quad q_B^* = \left(\frac{5}{8}, \frac{3}{8}\right); \qquad \gamma = \frac{11}{4}.$$

Графическое изображение игры относительно игрока I показано на рис.4. Нижняя граница выигрыша совпадает с ломаной B_2NB_1. Оптимальное решение игры определяется точкой N.

Построим графическое изображение игры относительно игрока II. Для чего транспонируем платежную матрицу. После транспонирования платежная матрица имеет вид, представленный в табл.7.

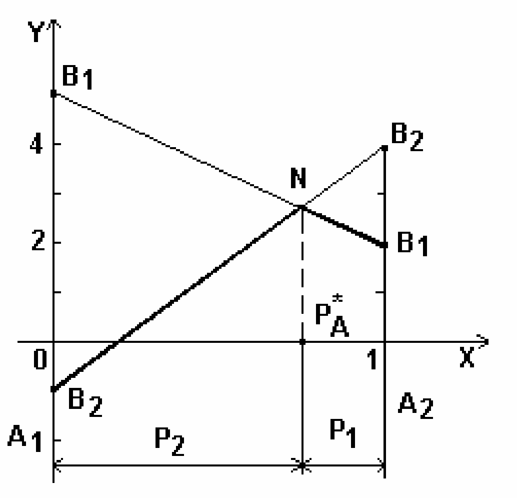


Рис.4

Таблица 7.

I / II	A_1	A_2
B_1	5	2
B_2	-1	4

В системе координат XOY отложим на оси OX отрезок B_1B_2 единичной длины. Через точки B_1 и B_2 проведем два перпендикуляра к оси абсцисс.

Перпендикуляр, проходящий через точку B_1 и совпадающий с осью OY, соответствует стратегии B_1 игрока II, а перпендикуляр, проходящий через точку B_2, соответствует стратегии B_2. На этих перпендикулярах будем откладывать “выигрыши” игрока II. При применении стратегии B_1 выигрыш игрока II равен 5, если игрок I применяет стратегию A_1, и 2, если игрок I применяет A_2 (см.рис.5).

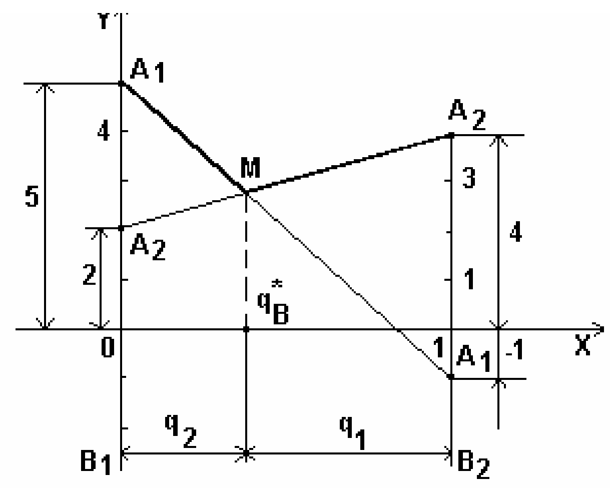


Рис.5.

Соответственно при применении стратегии B_2 выигрыш игрока II может быть –1 или 4. Эти выигрыши показаны парой точек (A_1, A_2) на перпендикулярах, восставленных в точках B_1 и B_2. Средние выигрыши игрока II в зависимости от применяемых им стратегий определяются ординатами точек, лежащих на отрезках A_1A_1 и A_2A_2. На основании принципа минимакса получим, что оптимальное решение игры определяет точка M, ордината которой равна цене игры γ .

Решение игр вида m x n с помощью линейного программирования

Для игр, у которых один из игроков имеет три стратегии, а другой – произвольное количество, можно построить пространственную геометрическую интерпретацию. Однако такая геометрическая интерпретация менее наглядна, чем плоская. В случае игры mxn, где m>3, n>3, графическое изображение вообще построить невозможно. Однако такую игру с конечными значениями m и n можно свести к паре двойственных задач линейного программирования.

Рассмотрим игру, заданную платежной матрицей размерности mxn (см.табл. 7).

Будем считать, что все элементы платежной матрицы неотрицательны (если это не так, то можно ко всем элементам матрицы добавить некоторое достаточно большое число L, переводящее платежи в область неотрицательных значений). При этом цена игры увеличится на L, а решение задачи не изменится.

Пусть платежная матрица игры не содержит седловой точки, следовательно, игра решается в смешанных стратегиях:

$p^*_A=(p_1,p_2,\ldots,p_m)$; $q^*_B=(q_1,q_2,\ldots q_n)$.

Применение игроком I оптимальной смешанной стратегии $p^*_A=(p_1,p_2,\ldots,p_m)$ гарантирует ему, независимо от поведения игрока II, выигрыш, не меньший цены игры γ.

Предположим, что игрок II применяет свою чистую стратегию B_j, а игрок I – свою оптимальную стратегию p^*_A. Тогда средний выигрыш игрока I будет равен

$$\gamma_j=a_{1j}p_1+a_{2j}p_2+\ldots+a_{ij}p_i+\ldots+a_{mj}p_m, \quad j=1,n.$$

Таблица 8

II / I	B_1	B_2	…..	B_j	…..	B_n
A_1	a_{11}	a_{12}	…	a_{1j}	…	a_{1n}
A_2	a_{21}	a_{22}	…	a_{2j}	…	a_{2n}
…	…	…	…	…	…	…
A_i	a_{i1}	a_{i2}	…	aij	…	a_{in}
…..	…	…	…	…	…	…
A_m	a_{m1}	a_{m2}	…	a_{mj}	…	a_{mn}

Учитывая, что γ_j, j=1,n, не может быть меньше γ, можем записать условия:

$$\begin{cases} a_{11}p_1+a_{21}p_2+\ldots+a_{i1}p_i+..+a_{m1}p_m \geq \gamma \\ a_{12}p_1+a_{22}p_2+\ldots+a_{i2}p_i+\ldots+a_{m2}p_m \geq \gamma \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{1j}p_1+a_{2j}p_2+\ldots.+a_{ij}p_i+\ldots+a_{mj}p_m \geq \gamma \\ a_{1n}p_1+a_{2n}p_2+\ldots+a_{1n}p_i+\ldots.+a_{mn}p_m \geq \gamma \end{cases} \qquad (4)$$

Полученная задача линейного программирования может быть упрощена делением всех n+1 ограничений на γ. Эта операция возможна при $\gamma>0$. В противном случае, если $\gamma<0$, необходимо изменить знаки неравенств. При $\gamma=0$ деление, естественно, недопустимо.

Таким образом, разделив левую и правую части каждого из неравенств (4) на цену игры $\gamma>0$, получим

$$a_{1j}\frac{p_1}{\gamma}+a_{2j}\frac{p_2}{\gamma}+....+a_{ij}\frac{p_i}{\gamma}+....+a_{mj}\frac{p_m}{\gamma}\ge 1,\ j=1,n. \qquad (5)$$

Введем новые обозначения:

$$\frac{p_i}{\gamma}=x_i,\ i=1,m\ . \qquad (6)$$

Тогда неравенства (5) запишутся в виде:

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{21}x_2+...+a_{i1}x_i+..+a_{m1}x_m\ge 1 \\ a_{12}x_1+a_{22}x_2+...+a_{i2}x_i+...+a_{m2}x_m\ge 1 \\ .... \\ a_{1j}x_1+a_{2j}x_2+....+a_{ij}x_i+...+a_{mj}x_m\ge 1 \\ a_{1n}x_1+a_{2n}x_2+...+a_{1n}x_i+....+a_{mn}x_m\ge 1 \end{cases} \qquad (7)$$

где все $x_i>0$, так как $p_i>0$, $\gamma>0$.

Из равенства $p_1+p_2+.....+p_m=1$ и в силу выражения (6) следует, что переменные (x_i) удовлетворяют условию

$$x_1+x_2+......+x_k+....+x_m=\frac{1}{\gamma}.$$

Учитывая, что игрок I стремится максимизировать γ, получаем линейную функцию

$$f(x)=x_1+x_2+....+x_k+....+x_m\to\min. \qquad (8)$$

Задача решения игры свелась к следующей задаче линейного программирования: найти неотрицательные значения переменных x_i, i=1,m, минимизирующие линейную функцию (8) и удовлетворяющие ограничениям (7).

Из решения задачи линейного программирования находим цену игры γ и оптимальную стратегию $p^*_A=(p_1,p_2,\ldots,p_m)$ игрока I по формулам:

$$\gamma=\frac{1}{\sum_{i=1}^{m}x_i}, \qquad p_i=\frac{x_i}{\sum_{i=1}^{n}x_i}, \qquad \text{i=1,m.}$$

Оптимальную стратегию $q^*_B=(q_1,q_2,\ldots q_n)$ игрока II находим из выражения

$$q_j=\frac{u_j}{\sum_{j=1}^{m}u_j}, \quad \text{j=1,n,}$$

где u_j – неотрицательные переменные задачи линейного программирования:

$$f(u)=u_1+u_2+....+u_j+....+u_n\to\max;$$

$$\begin{cases} a_{11}u_1+a_{12}u_2+...+a_{1j}u_j+..+a_{1n}u_n\le 1 \\ a_{21}u_1+a_{22}u_2+...+a_{2j}u_j+...+a_{2n}u_n\le 1 \\ .... \\ a_{m1}u_1+a_{m2}u_2+...+a_{mj}u_j+....+a_{mn}u_n\le 1 \end{cases}$$

которая является двойственной по отношению к задаче, представленной условиями (7) и (8). Переменные $u_j = \frac{q_j}{\gamma}$, j=1,n.

Таким образом, оптимальные стратегии $p^*_A=(p_1,p_2, \ldots,p_m)$ $q^*_B=(q_1,q_2,\ldots,q_n)$ игры с платежной матрицей (a_{ij}) mxn могут быть найдены путем решения симметричной пары двойственных задач линейного программирования.

Исходная задача	Двойственная задача
$f(x) = \sum_{i=1}^{m} x_i \to \min$	$f(u) = \sum_{j=1}^{n} u_j \to \max$
$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} x_i \geq 1, j = 1,n$	$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} u_j \leq 1, i = 1,m$
$x_i \geq 0, i = 1,m$	$u_j \geq 0, j = 1,n$

При этом

$$\gamma = \frac{1}{\sum_{i=1}^{m} x_i} = \frac{1}{\sum_{j=1}^{n} u_j}$$

$$p_i = \gamma x_i, \quad i=1,m, \quad q_j = \gamma u_j, \quad j=1,n.$$

Пример. Найти решение и цену игры , платежная матрица которой представлена в табл. 9

Таблица 9.

II I	B_1	B_2	B_3
A_1	1	2	3
A_2	3	1	1
A_3	1	3	1

Математические модели пары двойственных задач линейного программирования будут выглядеть следующим образом.

Исходная задача	Двойственная задача
Найти неотрицательные значения переменных x_1, x_2, x_3, минимизирующие функцию	Найти неотрицательные значения u_1,u_2,u_3, максимизирующие функцию
$f(x) = x_1 + x_2 + x_3$	$f(u) = u_1 + u_2 + u_3$
при условиях:	при условиях:
$x_1+3x_2+ x_3 \geq 1$	$u_1+2u_2+3 u_3 \leq 1$

$2x_1+\ x_2+3x_3 \geq 1$ $\qquad\qquad$ $3u_1+\ u_2+\ \ u_3 \leq 1$

$3x_1+\ x_2 + x_3 \geq 1$ $\qquad\qquad$ $u_1+3\ u_2+\ u_3 \leq 1$

Решим вторую задачу симплексным методом, для чего условие поместим в таблицу (БП – базисная переменная, СП – свободная переменная).

СП БП	$-u_1$	$-u_2$	$-u_3$	решение
F(u)	-1	-1	-1	0
V_1	1	2	3	1
V_2	3	1	1	1
V_3	1	3	1	1

Проводя последовательные преобразования симплексных таблиц, на третьей итерации получим оптимальное решение

СП БП	$-v_2$	$-v_3$	$-v_1$	решение
F(u)	2/9	1/9	2/9	5/9
U_3	0	0	1	1/9
U_1	0	1	0	2/9
U_2	1	0	0	2/9

Оптимальное решение задачи линейного программирования следующее: $v_1=v_2=v_3=0$; $\quad u_1=u_2=2/9$; $\quad u_3=1/9$; $\quad f(u)=5/9$.

Находим оптимальную смешанную стратегию игрока II и цену игры γ :

$$\gamma = \frac{1}{f(u)} = \frac{1}{5/9} = \frac{9}{5}; \qquad q_1 = \gamma u_1 = \frac{9}{5} * \frac{2}{9} = \frac{2}{5};$$

$$q_2 = \gamma u_2 = \frac{9}{5} * \frac{2}{9} = \frac{2}{5}; \qquad q_3 = \gamma u_3 = \frac{9}{5} * \frac{1}{9} = \frac{1}{5}.$$

Следовательно, $q^*_B=(q_1, q_2, q_3)=(\frac{2}{5},\frac{2}{5},\frac{1}{5})$.

Оптимальное решение первой задачи найдем, используя двойственные оценки, находящиеся в строке функции f(u) таблице :

$$x_1 = \frac{2}{9}; \quad x_2 = \frac{2}{9}; \quad x_3 = \frac{1}{9}; \qquad f(x) = \frac{5}{9}.$$

Отсюда определяем вероятности применения стратегий игроком I:

$$p_1 = \gamma x_1 = \frac{9}{5} * \frac{2}{9} = \frac{2}{5}; \qquad p_2 = \gamma x_2 = \frac{9}{5} * \frac{2}{9} = \frac{2}{5}; \qquad p_3 = \gamma x_3 = \frac{9}{5} * \frac{1}{9} = \frac{1}{5}.$$

Таким образом, $p^*_A=(p_1, p_2, p_3)=(\frac{2}{5},\frac{2}{5},\frac{1}{5})$.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Как может быть представлена игра двух лиц с нулевой суммой?
2. На что влияет прибавление одного и того же числа ко всем элементам платежной матрице игры двух лиц с нулевой суммой?
3. Каким будет конечный результат игры для игрока А, если максимальное значение в игре двух лиц с нулевой суммой отрицательно?
4. Может игрок улучшить ожидаемый выигрыш, отступив от своей минимаксной (максиминной) стратегии, если игра двух лиц с нулевой суммой устойчива?
5. Чему равно оптимальное решение в смешанных стратегиях, если в игре 2xn или mx2 с нулевой суммой нет оптимального решения в чистых стратегиях?

Лабораторная работа 5. Операции над нечетким отношениями.

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ

Все типы нечетких отношений в зависимости от свойств, которыми они обладают, могут быть разделены на три больших класса. В первый класс входят симметричные отношения, которые обычно характеризуют сходство или различие между объектами множества X. Второй класс образуют антисимметричные отношения; они задают на множестве X отношения упорядоченности, доминирования, подчиненности и т.п. Третий класс состоит из всех остальных отношений.Отношения каждого класса, в свою очередь, могут быть разделены на подклассы в зависимости от выполнения условий рефлексивности и антирефлексивности.

Рефлексивные и симметричные отношения обычно называют отношениями сходства, толерантности, безразличия или неразличимости. В дальнейшем эти отношения будем называть отношениями сходства и обозначать буквой S. Антирефлексивные и симметричные отношения называются отношениями различия и обозначаются буквой D. Отношения сходства и отношения различия двойственны друг другу. **Антисимметричные отношения, называемые предпорядками и обозначаемые буквой P**, в зависимости от выполнения условия рефлексивности или антирефлексивности делятся на нестрогие и строгие порядки.

Из отношений третьего класса, обозначаемых буквой R, обычно выделяют лишь рефлексивные отношения, которые будут называться слабыми порядками.

На следующем уровне классификации из каждого класса отношений могут быть выделены отношения специального вида. Определяющим условием для них является условие транзитивности. Оно устанавливает связь между силой отношения для различных пар объектов из X . Эта связь может быть очень слабой, а может накладывать достаточно сильные ограничения на возможные значения силы отношения между объектами из X . Число отличающихся друг от друга условий транзитивности зависит от типа отношения, для которого они формулируются.

Условия транзитивности зависят от вида операций, с помощью которых они определяются. Наиболее общими условиями транзитивности являются условия, определяемые с помощью решеточных операций $\vee$ и $\wedge$ в L . Более частыми являются условия, определяемые с помощью дополнительных операций в L и зависящих от конкретного вида L . В этих случаях указывается вид соответствующего множества L . Далее мы будем рассматривать нечеткие отношения, определенные на множестве $L=[0,1]$.

Симметричное и рефлексивное нечеткое отношение сходства является аналогом обычного отношения толерантности. Нечеткие отношения сходства обычно задаются с помощью матриц сходства, связи между объектами, либо с помощью неориентированных взвешенных графов. Матрицы сходства могут быть получены как в результате измерения некоторого физического параметра, так и в результате опроса экспертов, которые для каждой пары объектов из X указывают их степень сходства в некоторой шкале сравнений.

Условие транзитивности для нечетких отношений сходства обычно формулируются в виде $S \supseteq S \circ S,$

которое при различных определениях операции композиции приводит к различным условиям транзитивности. Наиболее распространенными условиями транзитивности являются следующие:

- ($\wedge$)-транзитивность

$$\forall x, y, z \in X \qquad \mu_S(x,z) \geqslant \mu_S(x,y) \wedge \mu_S(y,z).$$

- ($\cdot$)-транзитивность

$$\forall x, y, z \in X \qquad \mu_S(x,z) \geqslant \mu_S(x,y) \cdot \mu_S(y,z).$$

- (Δ)-транзитивность

$$\forall x, y, z \in X \qquad \mu_S(x,z) \geqslant \mu_S(x,y) + \mu_S(y,z) - 1.$$

Наиболее интересными свойствами обладает ($\wedge$)-транзитивное отношение сходства S , которое является обобщением обычного отношения эквивалентности. Это отношение называется **нечетким отношением эквивалентности** или **отношением подобия**. Нетрудно показать, что любой α -уровень нечеткого отношения эквивалентности является обычным отношением эквивалентности и, следовательно, определяет разбиение множества объектов X на непересекающиеся классы эквивалентности. Из вложенности α -уровней нечеткого отношения следует и вложенность разбиений множества X , соответствующих различным α -уровням, причем с уменьшением α происходит укрупнение классов эквивалентности α -уровней. Таким образом, нечеткое отношение эквивалентности задает иерархическую совокупность разбиений множества X на непересекающиеся классы эквивалентности.

Нечеткое отношение эквивалентности, в отличие от произвольного отношения сходства, определяет совокупность разбиений множества X на классы эквивалентности, благодаря тому, что условие транзитивности накладывает дополнительно сильные ограничения на возможные значения степени принадлежности. В случае, когда $L = [0, 1]$, отношение сходства S транзитивно тогда и только тогда, если для любых $x, y, z \in X$ из трех чисел $\mu_S(x, y), \mu_S(y, z), \mu_S(x, z),$ по крайней мере, два числа равны друг другу и по величине не превышают третье. Таким образом, нечеткое отношение эквивалентности обладает многими полезными свойствами из-за своего довольно специфического вида.

отношением различия D **называется симметричное и антирефлексивное нечеткое отношение.** Отношение различия двойственно отношению сходства. В случае, когда $L = [0, 1]$, эти отношения могут быть получены друг из друга с помощью соотношения:

$$\mu_D(x, y) = 1 - \mu_S(x, y),$$

что можно записать в алгебраической форме как $D = \bar{S}$.

Ультраметрикой называется отношение различия, удовлетворяющее следующему неравенству:

$$\forall x, y, z \in X \qquad \mu_D(x, z) \leqslant \mu_D(x, y) \vee \mu_D(y, z).$$

Очевидно, что это условие двойственно условию ($\wedge$)-транзитивности. Понятие ультраметрики первоначально возникло и изучалось в кластерном анализе при исследовании свойств меры различия между объектами, определяющих естественное представление множества объектов в виде дерева разбиений. Представление ультраметрики с помощью системы вложенных друг в друга отношений эквивалентности было также известно в кластерном анализе, однако лишь в рамках теории нечетких отношений это представление получило естественное объяснение.

Метрикой называется отношение различия, удовлетворяющее неравенству треугольника:

$$\forall x, y, z \in X \qquad \mu_D(x, z) \leqslant \mu_D(x, y) + \mu_D(y, z).$$

От метрики обычно требуют выполнения условия сильной антирефлексивности. Метрика, удовлетворяющая лишь простому условию антирефлексивности, называется **псевдометрикой**. Двойственным по отношению к метрике является (Δ)-транзитивное отношение сходства.

Двойственным условию ($\cdot$)-транзитивности является следующее условие:

$$\forall x, y, z \in X \qquad \mu_D(x, z) \leqslant \mu_D(x, y) + \mu_D(y, z) - \mu_D(x, y)\mu_D(y, z).$$

Задачи нечеткой классификации

Пусть имеется набор X фотографических портретов всех членов нескольких семей. Требуется разделить этот набор на группы так, чтобы в каждой оказались портреты членов только одной семьи. Пусть $f_1(x, y)$ — функция принадлежности нечеткого бинарного отношения сходства на заданном наборе фотографий. Для каждой пары фотографий x и y значение $f_1(x, y)$ есть субъективная оценка человеком степени сходства x и y. Это нечеткое отношение можно рассматривать как своего рода "экспериментальные данные", отражающие понимание человеком понятия "сходства" в данной задаче. Следующий этап — использование этих "данных" для требующейся классификации фотографий.

Заметим, что нечеткое отношение $f_1(x, y)$ обладает естественными свойствами рефлексивности и симметричности. Оно называется одношаговым отношением, в том смысле, что описывает результаты лишь попарного сравнения портретов друг с другом. Для $f_1(x, y)$ вводится n-шаговое отношение $f_n(x, y)$ следующим образом:

$$f_n(x, y) = \sup_{x_1 \ldots x_{n-1} \in X} \min\{f_1(x, x_1), \ldots, f_1(x_{n-1}, y)\}.$$

Это отношение является n-арной композицией исходного "экспериментального" отношения $f_1(x, y)$ и представляет собой в некотором смысле его уточнение. Нетрудно показать, что для любых $x, y \in X$ выполняется цепочка неравенств

$$0 \leqslant f_1(x, y) \leqslant f_2(x, y) \leqslant \ldots \leqslant f_n(x, y) \leqslant \ldots \leqslant 1,$$

из которой следует, в частности, что для любых $x, y \in X$ последовательность Таким образом, существует предельное отношение сходства, определяемое равенством

$$f(x, y) = \lim_{k \to \infty} f_k(x, y), \quad \text{для всех } x, y \in X.$$

Это предельное отношение является конечным результатом обработки результатов нечетких измерений $f_1(x,y)$ и следующим образом используется для классификации.

Для произвольного числа λ ($0 < \lambda < 1$) вводится обычное (не нечеткое) отношение R_λ :

$$R_\lambda(x,y) \quad \Leftrightarrow \quad f(x,y) \geqslant \lambda.$$

Нетрудно показать, что для любого λ ($0 < \lambda < 1$) R_λ есть отношение эквивалентности в X , т.е. для любых $x, y \in X$ выполняются обычные аксиомы эквивалентности

(1) $R_\lambda(x,x)$ — **рефлексивность**,

(2) $R_\lambda(x,y) \Longrightarrow R_\lambda(y,x)$ — **симметричность**,

(3) $R_\lambda(x,y) \& R_\lambda(y,z) \Longrightarrow R_\lambda(x,z)$ — **транзитивность**.

Заметим, что (3) есть следствие того, что предельное нечеткое отношение $f(x,y)$ обладает свойством нечеткой транзитивности

$$f(x,z) \geqslant \min\{f(x,y), f(y,z)\}, \qquad \text{для всех } x, y, z \in X.$$

Окончательный этап алгоритма классификации — разбиение множества X на классы эквивалентности по полученному отношению R_λ .

Выбор величины порога λ в этом алгоритме осуществляется, исходя из условий начальной задачи. В приведенном выше примере с фотографиями этот выбор осуществляли следующим образом. Пусть имеется набор из 20 фотографий представителей 3 семей. Тогда величину λ выбирают так, чтобы в результате реализации алгоритма классификации получилось 3 класса эквивалентности по отношению R_λ .

ЗАДАНИЕ

1. Ознакомиться с теоретической частью, используя дополнительную литературу.
2. Исходя из полученных у преподавателя исходных данных, решить поставленную задачу.
3. Провести программный контроль выполнения пункта 2 на примере исходных данных полученных у преподавателя.
4. Отчет.

6. ПЕРЕЧЕНЬ ПРОГРАММНЫХ ПРОДУКТОВ, ИСПОЛЬЗУЕМЫХ В ПРЕПОДАВАНИИ ДИСЦИПЛИНЫ «Теория принятия решений»

Лекции проводятся в стандартной аудитории, оснащенной в соответствии с требованиями преподавания теоретических дисциплин.

Для проведения лабораторных работ необходим компьютерный класс на 12-14 посадочных рабочих мест пользователей. В классе должны быть установлены языки программирования Си++, PacaL

7. ФОНД ТЕСТОВЫХ И КОНТРОЛЬНЫХ ЗАДАНИЙ ДЛЯ ОЦЕНКИ КАЧЕСТВА ЗНАНИЙ СТУДЕНТОВ

Контрольный тест

1. Если число стратегий игроков конечно, то игра называется

а) парной б) множественной
в) двойной г) конечной

2) В игре с платежной матрицей $\begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 6 & 4 \end{pmatrix}$

а) третья строка доминирует вторую б) вторая строка доминирует первую
в) первая строка доминирует третью с) третья строка доминирует первую

3) Множество, описываемое функцией принадлежности вида $\mu_x(x)=1$ – это:

а) универсальное множество б) нечеткое множество
в) пустое множество г) нормальное множество

4) Какие теории изучают игры в нечетко определенной обстановке

а) теория игр б) теория нечетких отношений
в) отдел прикладной математики г) все вышеперечисленные

5) Способы решения многокритериальных задач

а) условная максимизация б) поиск альтернативы с заданными свойствами
в) введение суперкритерия г) введение экстремума

6) Какой критерий основан на более оптимистических предложениях

а) критерий Сэвиджа б) минимаксный критерий
в) критерий Лапласа г) критерий Гурвица

7) В критерии Гурвица если ν - потери, то

а) $a^* = \min_{a_i}\left\{\alpha \min_{b_j} \upsilon + (1-\alpha)\max_{b_j} \upsilon\right\}$ б) $a^* = \min_{b_j}\left\{\alpha \min_{a_i} \upsilon + (1-\alpha)\max_{a_i} \upsilon\right\}$

в) $a^* = \max_{a_i}\left\{\alpha \max_{b_j} \upsilon + (1-\alpha)\min_{b_j} \upsilon\right\}$ г) $a^* = \min_{a_i}\left\{\alpha \max_{b_j} \upsilon + (1-\alpha)\max_{b_j} \upsilon\right\}$

8) Множество X, на котором задано отношение R конечно, то это отношение можно описать

а) матрицей б) уравнением
в) ориентированным графом г) вектором

9) Нечеткое отношение R на множестве X называется рефлексивным, если для любого $x \in X$, выполняется следующее условие

а) $\mu_R(x,x) = 0$ б) $\mu_R(x,x) = 1$
в) $\mu_R(x,x) > 0$ г) $\mu_R(x,x) < 0$

10) Решение 1 задачи нечеткого математического программирования называется нечеткое подмножество множества альтернатив описывается функцией принадлежности

а) $\mu^1(x)=\text{supp}\alpha$ б) $\mu^1(x)=\sup\alpha$
в) $\mu^1(x)=\inf\alpha$ г) $\mu^1(x)=\alpha$

8. КОМПЛЕКТ ЭКЗАМЕНАЦИОННЫХ БИЛЕТОВ

Экзаменационные билеты для студентов включают один теоретический вопрос и задачу. Вопросы к экзамену выдаются студентам на последней лекции. Задачи, включаемые в экзаменационный билет аналогичны задачам, которые выполнялись в течение семестра. Примерный комплект экзаменационных билетов выглядит следующим образом.

АМУРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Утверждено на заседании кафедры
____
Заведующий кафедрой
Утверждаю:__________________

Кафедра___ИУС___
Факультет___МиИ_
Курс __3_________
Дисциплина_ТПР__

Экзаменационный билет №__1___

1. Принятие решений в условиях неопределенности
2. Задача.

$$
\begin{matrix}
3 & 9 & 2 & 3 & 7 \\
6 & 1 & 5 & 6 & 6 \\
9 & 4 & 7 & 10 & 3 \\
2 & 5 & 4 & 2 & 1 \\
9 & 6 & 2 & 4 & 6
\end{matrix}
$$

АМУРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Утверждено на заседании кафедры
____
Заведующий кафедрой
Утверждаю:__________________

Кафедра___ИУС___
Факультет___МиИ_
Курс __3_________
Дисциплина_ТПР__

Экзаменационный билет №__2___

1. Принятие решений в условиях риска
2. Задача.

$$
\begin{aligned}
& z = 3x_1 + x_2 + 2x_3 \quad \max \\
& 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 7 \\
& -2x_1 + 4x_2 \le 12 \\
& -4x_1 + 3x_2 + 8x_3 \ge 10
\end{aligned}
$$

---

9. КАРТА ОБЕСПЕЧЕННОСТИ ДИСЦИПЛИНЫ КАДРАМИ ПРОФЕССОРСКО – ПРЕПОДАВАТЕЛЬСКОГО СОСТАВА

<table>
<tr><th rowspan="4">№</th><th rowspan="4">Наименование дисциплин в соответствии с учебным планом</th><th colspan="9">Обеспеченность преподавательским составом</th></tr>
<tr><th rowspan="3">Ф.И.О. должность по штатному расписанию</th><th rowspan="3">Какое образовательное учреждение профессионального образования окончил, специальность по диплому</th><th rowspan="3">Ученая степень и ученое звание</th><th colspan="3">Стаж научно педагогической работы</th><th rowspan="3">Основное место работы, должность</th><th rowspan="3">Условия привлечения к трудовой деятельности (штатный, совместитель, внутренний или внешний с указанием доли ставки), иное</th><th rowspan="3">Кол-во часов</th></tr>
<tr><th rowspan="2">Всего</th><th colspan="2">В т. ч. педагогический</th></tr>
<tr><th>Всего</th><th>В том числе по преподаваемой дисциплине</th></tr>
<tr><td></td><td>Теория принятия решений</td><td>Самохвалова С.Г.</td><td>ДВГУ, математик</td><td>доцент, к.т.н.</td><td>19</td><td>18</td><td>7</td><td>АмГУ, каф. ИУС</td><td>Штатный</td><td>152</td></tr>
</table>