ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ РФ
Государственное образовательное учреждение высшего профессионального образования
АМУРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
(ГОУВПО «АмГУ»)

УТВЕРЖДАЮ
Зав. кафедрой ОМиИ
___________Г.В.Литовка
«___» _________2007г.

Факультет Математики и информатики

Кафедра Общей математики и информатики

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКИЙ КОМПЛЕКС
по дисциплине *«Математика»*
часть I

для специальностей:

260704 – Технология текстильных изделий

260901– Технология швейных изделий

260902 – Конструирование швейных изделий

280101 – Безопасность жизнедеятельности

330301 – Геология природопользования

Составители: И.Н. Шевченко
О.С. Попова

Благовещенск, 2007 г.

Печатается по решению
редакционно-издательского совета
факультета математики информатики

Авторы-составители: Шевченко И.Н. Попова О.С.
Учебно-методический комплекс «Математика» часть I для специальностей:260704 – Технология текстильных изделий, 260901– Технология швейных изделий, 260902 – Конструирование швейных изделий, 280101 – Безопасность жизнедеятельности. 330301 – Геология природопользования. Благовещенск:АмГУ, 2007.– 160с.

Введение

Роль математики в подготовке специалиста

Учебно-методический комплекс по учебной дисциплине «Математика» предназначен для студентов первого курса специальностей 260901, 260902, 260704, 280101, 130301.

Математика является не только мощным средством решения прикладных задач и универсальным языком науки, но так же и элементом общей культуры. Поэтому математическое образование следует рассматривать как важнейшую составляющую фундаментальной подготовки специалиста.

Учебно-методический комплекс дисциплины (УМКД) разработан в помощь студентам первого и второго курсов обучения. Он создан в связи с необходимостью культивирования в стенах учебного заведения полноценной среды интеллектуального, творческого общества, атмосферы нравственного самосовершенствования как преподавателей, так и студентов, необходимостью развития их самостоятельности активности, повышения математической культуры, привлечения широкого круга вопросов, касающихся работы учебного заведения, в том числе и учебного процесса, формирования и воспитания у молодежи чувства ответственности за свое будущее.

УМКД включает требования к обязательному минимуму содержания дисциплины по государственному образовательному стандарту, учебную программу, тематический план занятий, вопросы к экзамену и зачету, образцы контрольных работ, рекомендуемую литературу.

1. РАБОЧАЯ ПРОГРАММА

Цели и задачи учебной дисциплины «Математика» и ее место в учебном процессе.

1.1. Цели преподавания учебной дисциплины «Математика»

•формирование личности студента, развитие его интеллекта и способностей к логическому мышлению;

•обучение основным математическим методам, необходимым для анализа и моделирования устройств, процессов и явлений при поиске решений.

1.2. Задачи изучения дисциплины.

•на примерах математических понятий и методов продемонстрировать сущность научного подхода, специфику математики, ее роль в развитии других наук;

•научить студентов приемам исследования и решения, математически формализованных задач;

• выработать умения анализировать полученные результаты, привить навыки самостоятельного изучения литературы по математике.

1.3. Перечень учебных дисциплин с указанием разделов, усвоение которых необходимо для изучения осознания учебных тем, вопросов курса «Математика».

- основные понятия и методы математического анализа, аналитической геометрии, линейной алгебры, теории функций комплексного переменного, операционного исчисления, основы теории вероятностей и математической статистики, дискретной математики;
- математические модели простейших систем и процессов в естествознании;
- математическую символику для выражения количественных и качественных отношений объектов;
- основные приемы обработки экспериментальных данных;
- методы аналитического и численного решения алгебраических уравнений;
- методы исследования решений обыкновенных дифференциальных уравнений;
- исследование математических моделей решения прикладных задач.

1.4.После изучения дисциплины студент должен знать и уметь использовать:

•основные понятия и методы математического анализа, аналитической геометрии, дискретной математики и теории множеств, функционального анализа, векторной алгебры, линейной алгебры, основы теории вероятностей; теории функции комплексного переменного, операционное исчисление;

•математическую символику для выражения количественных и качественных отношений объектов;
•основные приемы обработки экспериментальных данных;
•методы аналитического и численного решения алгебраических уравнений;
•методы статистического оценивания и проверки гипотез.

Содержание учебной дисциплины «Математика».
Согласно государственному стандарту математических и естественных дисциплин студент должен изучить:
для специальности: 260901, 260902

- аналитическая геометрия и линейная алгебра; последовательности и ряды; Дифференциальное и интегральное исчисления; векторный анализ и элементы теории поля; гармонический анализ; дифференциальные уравнения; численные методы; функции комплексного переменного; элементы функционального анализа; вероятность и статистика: теория вероятностей, случайные процессы, статическое оценивание и проверка гипотез, статистические методы обработки экспериментальных данных; вариационное исчисление и оптимальное управление; уравнения математической физики.

для специальностей: 260704, 280101

- алгебра (основные алгебраические структуры, векторные пространства и линейные отображения, булевы алгебры);
- геометрия (аналитическая геометрия, многомерная евклидова геометрия, дифференциальная геометрия кривых и поверхностей, элементы топологий); дискретная математика (логические исчисления. Графы, теория алгоритмов, языки грамматики, автоматы, комбинаторика);
- математический анализ (дифференциальное и интегральное исчисления);
- элементы теории функций и функционального анализа, теория функций комплексного переменного, дифференциальные уравнения;
- вероятность и статистика (элементарная теория вероятностей, математические основы теории вероятностей, модели случайных процессов, проверка гипотез, принцип максимального правдоподобия, статистические методы обработки экспериментальных данных);
- математические методы в текстильной технологии.

для специальности 330301

- Аналитическая геометрия и линейная алгебра; последовательности и ряды; дифференциальное и интегральное исчисления; векторный анализ и элементы теории поля, гармонический анализ; дифференциальные уравнения; численные методы; функции комплексного переменного; элементы функционального анализа; вероятность и статистика – теория вероятностей, случайные процессы статистическое оценивание и проверка гипотез, статистические метолы обработки экспериментальных данных.

2. Тематическое планирование

	1 СЕМЕСТР **лекции 36часов, практические занятия 72час**	Кол-во часов		
		Лек.	Прак	С/Р.
1.	**ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА.** Определители, их свойства и вычисление. Матрицы и операции над ними. Свойства операций. Обратная матрица. Ранг матрицы. Система линейных уравнений. Свойства систем уравнений: совместимость, определенность. Частное и общее решение. Эквивалентность систем. Однородные и неоднородные СЛУ. Свободные и базисные переменные.	4	10	12
2.	**ВЕКТОРНАЯ АЛГЕБРА.** Векторы. Проекция вектора на ось. Разложение вектора по базису i, j, k. Векторное произведение векторов, его свойства. Условие коллинеарности векторов. Смешанное произведение векторов. Линейные операторы. Собственные векторы и собственные числа линейного оператора.	4	4	10
3.	**АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ.** Уравнения линий на плоскости. Различные уравнения прямой на плоскости Кривые второго порядка: окружность, эллипс, гипербола, парабола, их геометрические свойства и уравнения. Прямая и поверхности в R_3.	8	14	20
4.	**КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА**	2	6	
5.	**ВВЕДЕНИЕ В МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ.** Числовые последовательности. Предел числовой последовательности. Сложные и обратные функции, их графики. Предел функции. Бесконечно малые функции и их свойства. Непрерывность функции. Классификация точек разрыва.	4	12	18
6.	**ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ.** Производная функции, ее физический и геометрический смысл. Правило нахождения производной, производная сложной и обратной функции. Параметрические функции и их дифференцирование.	6	8	10

	Производные высших порядков. Дифференциал функции. Применение дифференциала к приближенным вычислениям; дифференциалы высших порядков: теоремы Ролля, Лагранжа, Коши; правило Лопиталя.			
7.	**ПРИЛОЖЕНИЕ ПРОИЗВОДНОЙ К ИССЛЕДОВАНИЮ ФУНКЦИЙ.** Необходимые и достаточные условия возрастания и убывания функции, экстремум функции. Необходимое и достаточное условия экстремума функции. Выпуклость и вогнутость графика функции, точка перегиба, асимптоты графика функции, примеры построения графиков функции.	4	8	12
8.	**НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ.** Первообразная и неопределенный интеграл, его свойства. Методы интегрирования.	4	10	16
	Итого	36	72	98

3. Тематическое планирование практических занятий и формы текущего контроля

№	**Тема занятия**	Час.	Контр.раб тип. расч.
	1 СЕМЕСТР – 72 часа		
	Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии – 32 часа		
1.	Определители и их свойства. Решение систем линейных уравнений методами Крамера и Гаусса.	2	КР
2.	Матрица операции над ними.	2	
3.	Обратная матрица. Ранг матрицы.	1	
4.	Решение систем матричным методом	2	
5.	Однородные системы.	2	КР
6.	Декартовы координаты. Векторы, скалярное умножение векторов.	2	
7.	Векторное и смешанное произведение векторов, приложение.	2	КР
8.	Линии на плоскости. Уравнение прямой.	2	
9.	Кривые второго порядка.	4	КР
10	Уравнения прямой и плоскости в пространстве.	4	
11	Уравнение поверхностей.	3	КР
12	Полярные, цилиндрические и сферические координаты	1	
	Ведение в математический анализ– 12 ч.		
13	Элементарные функции. Сложные и обратные функции. Их свойства. Графики функций.	2	КР

14	Предел функции, и предел числовой последовательности.	6	
15	Непрерывность функций.	4	КР
	Дифференциальное исчисление функции одной переменной– 11ч.		
16	Нахождение производной и дифференциала.	2	
17	Производная сложной и обратной функций, дифференцирование функций, заданных параметрически.	2	КР
18	Точки экстремума функции. Теоремы Ферма, Роля, Лагранжа, Коши, их применение. Правило Лопиталя.	4	
19	Применение дифференциального исчисления для исследования функций.	3	КР
20	Комплексные числа.	4	КР
	Интегральное исчисление функции одной переменной– 17 ч		
21	Неопределенный интеграл. Табличное интегрирование.	3	
22	Методы замены переменных и интегрирование по частям	2	
23	Интегрирование рациональной функций	2	
24	Интегрирование тригонометрических функций.	2	
25	Интегрирование иррациональных функций.	2	КР
26	Определенный интеграл. Формула Ньютона-Лейбница.	1	
27	Вычисление определенного интеграла	1	
28	Несобственные интегралы.	1	КР
29	Геометрическое и физическое приложения определенного интеграла.	1	
30	Контрольная работа.	2	КР

4. График самостоятельной работы

№ недели Подготовка к	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	Σ
Лекциям		1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1		16
Практическим занятиям	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2		34
РГР				16						16									32
Контр работа.			4				2				4		4				2		16
																			98

5. ВОПРОСЫ К ЭКЗАМЕНУ

1. Определители второго, третьего, и более высоких порядков. Способы их вычисления.
2. Свойства определителей.
3. Матрицы, их свойства.
4. Действия над матрицами.
5. Обратная матрица.
6. Ранг матрицы.
7. Решение линейных систем матричным методом.
8. Метод Крамера решение линейных систем.
9. Метод Гаусса решения линейных систем.
10. Теорема Кронекера-Капелли.
11. Решение систем линейных однородных уравнений.
12. Векторы и линейные операции над ними.
13. Проекция вектора на ось.
14. Разложение вектора по трем некомпланарным векторам, по ортам координатных осей.
15. Модуль вектора, направляющие косинусы.
16. Действия над векторами, заданными проекциями.
17. Скалярное произведение векторов, его свойства.
18. Выражение скалярного произведения векторов через координаты.
19. Векторное произведение векторов, его свойства.
20. Смешанное произведение векторов. Его свойства. Вычисление.
21. Различные виды уравнений прямой на плоскости.
22. Окружность. Эллипс. Гипербола. Парабола.
23. Общее уравнение линий второго порядка.
24. Различные виды уравнений плоскости в пространстве.
25. Плоскость. Основные задачи.
26. Различные виды уравнений прямой в пространстве.
27. Цилиндрические поверхности.
28. Поверхности вращения. Конические поверхности.
29. Канонические уравнения поверхностей.
30. Определения функции. Способы задания.
31. Сложная функция. Обратная функция и ее график.
32. Последовательность. Предел последовательности.
33. Предел функции при $x \to x_0$; $x \to +\infty$; $x_0 \to -\infty$

34. Бесконечно большие и бесконечно малые функции и основные теоремы о них.
35. Основные теоремы о пределах функции.
36. Признаки существования пределов.
37. Первых замечательный предел.
38. Второй замечательный предел.
39. Сравнение бесконечно малых функций.
40. Эквивалентные бесконечно малые, их применение к вычисление пределов.
41. Непрерывность функций. Классификация точек разрыва.
42. Определение производной, ее физический и геометрический смысл.
43. Уравнение касательной и нормали к кривой.
44. Производные суммы, разности, произведения и частного функций.
45. Производная сложной и обратной функции.
46. Производные основных элементарных функций.
47. Гиперболические функции и их производные.
48. Дифференцирование функций, заданных неявно и параметрически.
49. Логарифмическое дифференцирование.
50. Производные высших порядков, заданных неявно, и параметрически.
51. Дифференциал функции, его геометрический смысл.
52. Применение дифференциала к приближенным вычислениям.
53. Теорема Ролля, Коши, Лагранжа.
54. Правило Лопиталя.
55. Раскрытие неопределенностей различных видов.
56. Возрастание, убывание, максимум и минимум функции.
57. Выпуклость графика функции. Точки перегиба.
58. Асимптоты графика функции.
59. Общая схема исследования функции и построения графика.
60. Формула Тейлора для многочлена и произвольной функции.
61. Комплексные числа. Изображение. Действия над ними, в алгебраической, тригонометрической и показательной формах.
62. Возведение в степень и извлечение корня.
63. Первообразная. Неопределенный интеграл и его свойства. Таблица интегралов.
64. Методы интегрирования:
    - замены переменной (подведение под знак диффенциала); подстановки; по

частям;

- интегрирование функций, содержащих квадратный трехчлен;
- интегрирование рациональных дробей;
- интегрирование тригонометрических функций;
- интегрирование иррациональных функций.

65. Задачи, приводящие к понятию определенного интеграла. Определенный интеграл, его геометрический смысл.
66. Свойства определенного интеграла.
67. Основные правила вычисления определенного интеграла. Формула Ньютона-Лейбница.
68. Приложение определенных интегралов к решению задач физики и геометрии.
69. Методы вычисления определенных интегралов по формулам прямоугольников, трапеций и Симпсона.
70. Несобственные интегралы, их основные свойства.

Темы для самостоятельного изучения

1. Различные уравнения прямой на плоскости.
2. Уравнения кривых второго порядка. Вывод формул.
3. Собственные векторы и собственные числа.
4. Общее уравнение и прямой в пространстве.
5. Взаимное расположение прямой и плоскости в пространстве.
6. Свойства функции непрерывных в сегменте.
7. Применение к дифференциала к приближенным вычислениям.
8. Производные высших порядков.
9. Приложение формулы Тейлора в приближенных вычислениях.
10. Приближенное нахождение корней уравнений.
11. Интегрирование тригонометрических функций.

6. Общие рекомендации по изучению математических дисциплин

0*Чтение учебника*

1. Изучая материал по учебнику, следует переходить к следующему вопросу только после правильного понимания предыдущего, проделывая на бумаге все вычисления (в том числе, и те, которые из-за их простоты в учебнике опущены), а также воспроизводя имеющиеся в учебнике чертежи и схемы.

2. Особое внимание следует обратить на определение основных понятий. Студент должен подробно разобрать примеры, которые поясняют такие определения, и уметь привести аналогичные примеры самостоятельно.

3. Необходимо помнить, что каждая теорема состоит из предположений и утверждения. Все предположения должны обязательно использоваться в доказательстве. Нужно добиваться точного представления о том, в каком месте доказательства использовано каждое из предположений теоремы. Полезно составить схемы доказательства сложных теорем. Правильному пониманию многих теорем помогает разбор примеров математических объектов, обладающих и не обладающих свойствами, указанными в предположениях и утверждениях теорем.

4. При изучении материала по учебнику полезно вести конспект, в который рекомендуется выписывать определения, формулировки теорем, формулы, уравнения и т. п. На полях конспекта следует отмечать вопросы, выделенные для письменной или устной консультации с преподавателем.

5. Письменное оформление работы студента имеет исключительно важное значение. Записи в конспекте должны быть сделаны аккуратно. Хорошее внешнее оформление конспекта по изученному материалу не только приучит студента к необходимому в работе порядку, но и позволит ему избежать многочисленных ошибок, которые происходят из-за небрежных, беспорядочных записей.

6. Выводы, полученные в виде формул, рекомендуется в конспекте подчеркивать или обводить рамкой, чтобы при перечитывании конспекта они выделялись и лучше запоминались. Опыт показывает, что многим студентам помогает в работе составление листа, содержащего важнейшие и наиболее часто употребляемые формулы и теоремы курса. Такой лист не только помогает запомнить формулы и теоремы, но и может служить постоянным справочником для студента.

1Решение задач

1. Освоение материала дисциплины невозможно без умения решать практические задачи математическими методами. Поэтому чтение учебника должно сопровождаться решением задач, для чего рекомендуется завести специальную тетрадь.

2. При решении задач нужно обосновывать каждый этап решения исходя из теоретических положений дисциплины. Если студент видит несколько

путей решения задачи, то он должен сравнить их и выбрать из них самый удобный. Полезно до начала вычислений составить краткий план решения.

3. Решения задач и примеров следует записывать подробно, вычисления должны располагаться в строгом порядке, при этом рекомендуется отделять вспомогательные вычисления от основных. Ошибочные записи следует не стирать и не замазывать, а зачеркивать. Чертежи можно выполнять от руки, но аккуратно и в соответствии с данными условиями. Если чертеж требует особо тщательного выполнения (например, графическая проверка решения, полученного путем вычислений), то следует пользоваться линейкой, транспортиром, циркулем и указывать масштаб на координатных осях либо готовить чертежи при помощи компьютера.

4. Решение каждой задачи должно доводиться до окончательного ответа, которого требует условие.

5. Полученный ответ следует проверять способами, вытекающими из существа данной задачи. Полезно решить задачу несколькими возможными способами и сравнить полученные результаты.

6. Решение задач определенного типа нужно продолжать до приобретения твердых навыков в их решении.

7. При решении задач следует особое внимание уделять экономическому содержанию задачи, итоговых и промежуточных результатов и используемых при решении задачи формул, теорем и методов.

Самопроверка

1. После изучения определенной темы по учебнику и решения достаточного количества соответствующих задач студенту рекомендуется по памяти воспроизвести определения, выводы формул, формулировки и доказательства теорем, проверяя себя каждый раз по учебнику. Вопросы для самопроверки, приведенные в настоящем пособии, должны помочь студенту в таком повторении, закреплении и проверке прочности усвоения изученного материала. В случае необходимости нужно еще раз внимательно разобраться в материале учебника и перерешать задачи.

2. Иногда недостаточность усвоения того или иного материала выясняется только при изучении дальнейшего материала. В этом случае нужно вернуться назад и повторить плохо усвоенный раздел.

3. Важным критерием усвоения теории является умение решать задачи на пройденный материал. Однако здесь следует предостеречь студента от весьма распространенной ошибки, состоящей в том, что благополучное

решение задач воспринимается им как признак усвоения теории. Часто правильное решение задачи получается в результате механического применения заученных форм без понимания существа дела. Можно сказать, что решение задач является необходимым, но недостаточным условием хорошего знания теории.

1Использование вычислительной техники

При решении задач полезно использовать вычислительную технику. Компьютер может помочь как при проведении простейших вычислений и оформления графических результатов, так и при решении сложных комплексных задач, которые без применения компьютера являются очень трудоемкими. Мы советуем студенту ориентироваться на распространенный пакет Microsoft Excel, и использовать его при изучении всех разделов математики.

Консультации

1. Если в процессе работы над изучением теоретического материала или при решении задач у студента возникают вопросы, разрешить которые самостоятельно не удается (неясность терминов, формулировок теорем, отдельных задач и др.), то он может обратиться к преподавателю для получения от него указаний в виде письменной или устной консультации.
2. В своих запросах студент должен точно указать, в чем он испытывает затруднение. Если он не разобрался в теоретических объяснениях, в доказательстве теоремы или в выводе формулы по учебнику, то нужно указать название учебника, его авторов, год издания, номер страницы, где рассмотрен затрудняющий студента материал и описать, что именно затрудняет студента. Если студент испытывает затруднение при решении задачи, то следует указать характер этого затруднения, привести предполагаемый план решения.
3. За консультацией следует обращаться и в случае, если возникнут сомнения в правильности ответов на вопросы для самопроверки.

1Расчетно – графические работы

1. При изучении дисциплины «Математика» студент должен выполнить ряд расчетно – графические работы, главная цель которых — оказать помощь студенту в его работе. Рецензии на эти работы позволяют студенту судить о степени усвоения им соответствующего раздела курса, указывают на имеющиеся у него пробелы, на желательное исправление дальнейшей

работы, помогают сформулировать вопросы для консультации с преподавателем.

2. Не следует приступать к выполнению контрольного задания до изучения теоретического материала, соответствующего данному заданию, и решения достаточного количества задач по этому материалу. Опыт показывает, что чаще всего неумение решить ту или иную задачу контрольного задания вызывается тем, что студент не выполнил это требование.

3. Расчетные работы должны выполняться самостоятельно. Выполненная не самостоятельно работа не дает возможности преподавателю указать студенту на недостатки в его работе, в усвоении им учебного материала, в результате чего студент не приобретает необходимых знаний и может оказаться неподготовленным к экзамену.

4. Расчетно-графические работы выполняются аккуратно на одной стороне листа стандартного формата А4 либо рукописным способом, либо компьютерным (для компьютерного оформления работы рекомендуется использование пакета Microsoft Word). В любом случае необходимо приложение необходимых распечаток результатов работы компьютерных программ, которые требовалось использовать при выполнении заданий. Графики строятся либо при помощи компьютера (рекомендуется использование пакета Microsoft Excel), либо от руки (черными или цветными карандашами средней твердости на обычной или миллиметровой бумаге). Листы с текстом заданий и графики должны быть сшиты.

4. В работу должны быть включены все требуемые задания строго по положенному варианту. Работы, содержащие задания не своего варианта, не засчитываются.

6. Перед решением каждой задачи необходимо полностью выписать ее условие. В том случае, когда формулировка задачи одна для всех вариантов, а различаются лишь исходные данные, необходимо, переписывая общее условие задачи, заменять общие данные конкретными, соответствующими своему варианту.

7. Текст работы должен содержать все необходимые расчеты и пояснения. Обязательны оглавление и сквозная нумерация всех листов.

8.Работа сдается преподавателю до защиты для проверки. При указании рецензента на требуемую переработку все необходимые дополнения студент прилагает к первоначальному варианту работы, не делая в нем никаких исправлений. На защите студент должен показать умение ставить и исследовать конкретные финансовые задачи, которые он решал при выполнении контрольных заданий.

9.Прорецензированные контрольные задания вместе со всеми исправлениями и добавлениями, сделанными по требованию рецензента, следует сохранять. Без предъявления преподавателю прорецензированного контрольного задания студент не допускается к сдаче экзамена.

10.Контрольные задания настоящего семестра, приведенные в действующей программе дисциплины, повторены в разделе 3, а конкретные методические указания к их выполнению — в разделе 4.

1Лекции и практические занятия

Студенты очной и заочной формы обучения изучают дисциплину «Математика» с помощью посещения лекций, работе на практических занятиях и самостоятельной работы. Темп лекций и практических занятий одинаков (2 ч. лекций и 2 ч. практических занятий в неделю для студентов очной формы обучения и по одному часу — для студентов, обучающихся по заочной форме). После изучения теоретического материала на лекциях этот материал закрепляется на практических занятиях с помощью решения задач из учебников и учебных пособий, приведенных в списке рекомендованной литературы. При этом студент должен систематически (перед каждым занятием) повторять изученный теоретический материал и регулярно решать самостоятельно задачи, рекомендованные преподавателем. Если для студентов очной лекции и практические занятия являются основной формой обучения и на них подробно рассматривается большая часть теоретического материала и разбирается большое количество задач, то студент-заочник эти виды работ должен выполнять самостоятельно.

Вместе с тем, для заочников организуются установочные лекции и практические занятия. Они носят преимущественно обзорный характер. Их цель — обратить внимание на цели и задачи дисциплины, ее место в профессиональной деятельности специалиста, заинтересовать студента изучением дисциплины, обратить внимание на схему построения курса или некоторых его наиболее важных разделов. Кроме того, на этих занятиях могут быть разобраны вопросы, изложение которых в рекомендуемых учебниках и учебных пособиях отсутствует или является недостаточно полным.

Таким образом, лекции и практические занятия не заменяют собой самостоятельной работы студента, а призваны оказать студенту помощь в его самостоятельной работе!

Экзамен

На экзамене выясняется усвоение всех теоретических и прикладных вопросов дисциплины, а также умение применять полученные знания к решению задач. Определения, теоремы, формулы должны формулироваться точно и с пониманием существа дела, задачи должны решаться безошибочно и уверенно, всякая письменная и графическая работа должна быть аккуратной и четкой. Только при выполнении этих условий знания студента могут быть признаны удовлетворяющими требованиям, предъявляемым программой.

При подготовке к экзамену учебный материал рекомендуется повторить по учебнику и конспекту. Экзамен проводится в устно-письменной форме, каждый студент получает в билете три теоретических вопроса (их список приведен в разделе 5) и 6 задач. Подготовку к ответу на билет следует начинать с решения задачи, так успешное решение задачи является наиболее важным при сдаче экзамена; без ее решения работа студента признается неудовлетворительной. Затем следует подробно ответить на теоретические вопросы билета. На подготовку теоретических вопроса студенту дается не более 1 ч. На решения задач 1,5ч.

После этого студент отвечает преподавателю в устной форме по подготовленному билету. Преподаватель может предложить студенту дополнительные вопросы и задачи, как относящиеся непосредственно к материалу билета, так и из других разделов дисциплины.

Организация самостоятельной работы студентов

Студентам с самого начала учебного года нужно настроиться на повседневную серьезную работу, не откладывая составить расписание занятий в институте (чтобы оно постоянно было на виду). Составить режим работы дома: когда работать, когда отдыхать, когда по дому помогать и заниматься уборкой помещений. Нельзя позволять себе откладывать выполнение текущей работы: написание рефератов, выступлений, выполнение контрольных работ, подготовку к лекциям, практическим и лабораторным занятиям.

Потом чаще всего не будет времени: оно будет бездарно упущено. При чтении лекций, конспектировании сразу учитесь думать, анализировать, выбирать. Старайтесь понять, а не запомнить материал лекции. Всякое настоящее образование добывается путем самообразования. Все, что делаешь и чего добиваешься самолично по своей воле и желанию – остается в голове всего крепче.

7. Методика формирования результирующей оценки знаний по математики

Результатирующая оценка учитывает:

1) работу студента в течение всего периода изучения дисциплины;
2) получается на основе обобщения отдельных видов работы: работа в течении всего семестра; экзаменационная оценка за ответ по теории; экзаменационная оценка за выполнение практических заданий.
3) все оценки выставляются по пятибалльной системе;
4) для оценки относительной важности отдельных видов контроля вводиться их весовые коэффициенты:

   0,4 – для работы в течении семестра;

   0,4 – для экзаменационной оценки за теорию;

   0,2 – для экзаменационной оценки по практике.

Дробные значения оценки округляться до целых единиц.

Критерии оценок

- ОТЛИЧНО – полно раскрыто содержание вопросов в объеме программы; четко и правильно даны определения; корректно использованы научные термины; для доказательства использованы различные теоретические знания; ответ самостоятельный и исчерпывающий, без наводящих вопросов.
- ХОРОШО – раскрыто основное содержание вопросов; в основном правильно даны определения и понятия, ответ самостоятельный, но допущены нарушения последовательности изложения, небольшие неточности при использовании научных терминов или выводы, которые исправляться по дополнительным вопросам экзаменатора.
- УДОВЛЕТВОРИТЕЛЬНО – усвоено основное содержание учебного материала, но изложение не всегда последовательна; определение понятий нечеткое; допущены ошибки при изложении, в использовании научных терминов, определений.

- НЕУДОВЛЕТВОРИТЕЛЬНО – ответ неправильный, не раскрыто основное содержание программы, допущены грубые ошибки в определении понятий, при использовании терминологии.

8. Формы текущего контроля знаний студентов

Результативность работы обеспечивается системой контроля, которая при очной форме обучения включает опрос студентов на практических занятиях, проверку домашних заданий, контрольные работы, выполнения и защита РГР, проведение коллоквиумов, зачеты и экзамены. Каждое практическое занятие рекомендуется начинать с проверки домашнего задания, опроса по теоретическому материалу (10-15 мин.). На лекциях и практических занятиях рекомендуется проведение мини контрольных работ. Данная программа предусматривает в течении семестра проведение двух плановых контрольных работ и двух индивидуальных заданий (РГР). Контроль за выполнение РГР осуществляется в 2 этапа: проверка письменных отчетов и защита заданий в письменной или устной форме. Индивидуальные задания студентами выполняется по большинству тем курса. Выполнение каждого задания требует не менее 10 часов самостоятельной работы студентов.

9. Методические рекомендации профессорско-преподавательскому составу

Самостоятельная работа

Самостоятельная работа студентов (СРС) – это активны формы индивидуальной и коллективной деятельности, направленные на закрепление материала формирование умений и навыков быстро решать поставленные задачи. СРС предполагает не пассивное «поглощение» готовой информации, а ее поиск и творческое усвоение. Самостоятельная работа призвана подготовить студента к самостоятельной деятельности в будущем.

Строго говоря, все, что не является лекцией, можно отнести к практическим формам обучения. Главная функция практических занятий – организация и проведение отработки (интериоризация) учебного материала и формирование у студентов умений и навыков по применению знаний на практике, самостоятельного их приобретения и углубления.

Занятия такого типа, как правило, состоят из двух частей. Сперва проводится подготовка студентов к самостоятельной работе, затем они самостоятельно решают поставленные задачи. Эта форма занятий обеспечивает индивидуализацию обучения и способствует активизации познавательной деятельности студентов. Занятия должны быть организованны таким образом, чтобы все без исключения студенты были заняты решением посильной для них познавательной задачи. Значит, преподаватель должен хорошо знать (с позиции диагностики) индивидуальные особенности студентов. Желательно так организовать занятия, чтобы они содействовали предъявлению достаточно высоких требований к наиболее подготовленным студентам, обеспечивали их максимальное интеллектуальное развитие и в то же время создавали условия для успешного приобретения знаний и умений менее подготовленными студентами.

Аудиторные практически занятия

Преподаватель спрашивает основной теоретический материал, относящийся к данной теме либо опросом каждого студента, либо организацией математического диктанта, либо опросом доказательства теорем, вывода формул. После чего педагог предлагает студентам проделать ряд упражнений для усвоения и закрепления рассматриваемого вопроса. Студенты работают под наблюдением преподавателя, который проверяет результаты деятельности и указывает ошибки.

Все виды работы на практическом занятии оцениваются по пятибалльной системе.

Консультация – форма учебного занятия, в процессе которого студент получает ответы от преподавателя на конкретные вопросы или пояснения по соответствующим теоретическим положениям или аспектам их практического применения.

Консультация может быть индивидуальной или групповой, в зависимости от учебной ситуации: индивидуальное занятие, выполняемое студентам, может потребовать индивидуальной консультации, теоретические вопросы по учебному предмету – соответственно групповой консультации.

10. ЗАДАНИЯ ТЕКУЩЕГО КОНТРОЛЯ

Линейная алгебра

Вариант 1

Вычислить определители:

1) $\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}$; 2) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix}$; 3) $\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 & 4 \\ 3 & -3 & 2 & 4 \\ 4 & 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}$;

4) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 11 & 2 \\ 1 & 0 & 4 & -1 \\ 11 & 4 & 5 & 5 \\ 2 & -1 & 5 & -6 \end{vmatrix}$; 5) $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}$; 6) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 5 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$;

7) $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 5 & 2 \\ 4 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 4 & 2 \\ 6 & 4 & 1 & 2 \end{vmatrix}$; 8) $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 & 3 \\ 3 & -2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}$; 9) $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \\ 4 & 7 & 5 & 12 \end{vmatrix}$

Вариант 2

Вычислить определители:

1) $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 5 & -2 \end{vmatrix}$; 2) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 4 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix}$; 3) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 & 7 \\ 0 & 3 & 0 & 2 \\ 2 & 4 & 3 & 2 \\ 6 & 3 & 1 & 1 \end{vmatrix}$;

4) $\begin{vmatrix} 1 & -3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 3 \end{vmatrix}$; 5) $\begin{vmatrix} -7 & 3 \\ 5 & -2 \end{vmatrix}$; 6) $\begin{vmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 5 \\ 3 & 9 & 3 \end{vmatrix}$;

7) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 1 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$; 8) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 6 & 3 \\ 2 & 4 & 5 & 1 \\ 4 & 8 & 17 & 7 \\ 5 & 10 & 16 & 5 \end{vmatrix}$; 9) $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 4 & -1 \\ 4 & 2 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \\ 6 & -1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$

Вариант 1

1. Заданы матрицы: $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 2 \\ -2 & 5 & 1 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 4 & 3 & -1 \\ -2 & 0 & 5 \end{pmatrix}$.

Найти: 1) $A \times B$; 2) A^T; 3) $2B$; 4) B^{-1}; 5) $A+B$; 6) $A-B$; 7) A^2.

2. Решить систему уравнений методом:

1) Гаусса; 2) Крамера; 3) обратной матрицы.

$$\begin{cases} 2x - y + 3z = 12, \\ x + y - 5z = -15, \\ -3x + 2y = -5. \end{cases}$$

3. Решить систему однородных уравнений: $\begin{cases} x + y - z = 0, \\ 2x - y + 3z = 0, \\ 3x + 2z = 0. \end{cases}$

Вариант 2

1. Заданы матрицы : $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 5 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

Найти: 1) $A \times B$; 2) A^T; 3) $2B$; 4) B^{-1}; 5) $A+B$; 6) $A-B$; 7) A^2.

2. Решить систему уравнений методом:

1) Гаусса; 2) Крамера; 3) обратной матрицы.

$$\begin{cases} -x - 3y + z = -2, \\ 2x + 2y + z = 5, \\ 3y - z = 3. \end{cases}$$

3. Решить систему однородных уравнений:

$$\begin{cases} x - y + 3z = 0, \\ -x + 2y = 0, \\ 2x + y + 3z = 0. \end{cases}$$

Вариант 3

1. Заданы матрицы: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & 5 \\ -1 & 0 & 6 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ -3 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & -1 \end{pmatrix}$.

Найти: 1) $A \times B$; 2) A^T; 3) $2B$; 4) B^{-1}; 5) $A + B$; 6) $A - B$; 7) A^2.

2. Решить систему уравнений методом:

1) Гаусса; 2) Крамера; 3) обратной матрицы.

$$\begin{cases} y + z = 5, \\ x + 2y + 3z = 14, \\ -2x - y - z = -7. \end{cases}$$

3. Решить систему однородных уравнений: $\begin{cases} x - y + 2z = 0, \\ 2x + z = 0, \\ x + y - z = 0. \end{cases}$

Векторная алгебра

Вариант 1

1. Даны точки : А(1; 3; 6), В(2; 2; 1), С(-1; 0; 1), Д(-4; 6; -3).

Найти: 1) координаты векторов $\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AД}$; 2) $|\vec{AB}|, |\vec{AC}|, |\vec{AД}|$;

3) $\cos\left(\vec{AB}, \hat{} \vec{AC}\right)$; 4) $S_{\Delta ABC}$; 5) $V_{пирамиды}$; 6) работу силы $\vec{F} = 3\vec{i} - 4\vec{j} + 5\vec{k}$ по перемещению тела из точки А и точку В; 7) проекцию вектора $\vec{AД}$ на $\vec{AC}$; 8) смешанное произведение векторов $\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AД}$; 9) векторное произведение векторов $\vec{AB}, \vec{AC}$;

10) скалярное произведение векторов $\vec{AД}, \vec{AB}$.

2.Сила $\vec{F} = (2,-1,3)$ приложена к точке $A(0,2,1)$. Определить величину и направляющие косинусы момента этой силы относительно точки $B(-2,3,1)$.

Вариант 2

1. Даны точки: A(-4; 2; 6), B(2; -3; 0), C(-10; 5; 8), Д(-5; 2; -4).

Найти: 1) координаты векторов $\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AД}$; 2) $|\vec{AB}|, |\vec{AC}|, |\vec{AД}|$;

3) $\cos\left(\vec{AB}, \hat{\ } \vec{AC}\right)$; 4) $S_{\Delta ABC}$; 5) $V_{пирамиды}$; 6) работу силы $\vec{F} = -\vec{i} + 5\vec{j} - 2\vec{k}$ по перемещению тела из точки А и точку В; 7) проекцию вектора $\vec{AД}$ на $\vec{AC}$; 8) смешанное произведение векторов $\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AД}$; 9) векторное произведение векторов $\vec{AB}, \vec{AC}$; 10) скалярное произведение векторов $\vec{AД}, \vec{AB}$.

2.Сила $\vec{F}(0,5,3)$ приложена к точке $A(-1,2,1)$. Определить величину и направляющие косинусы момента этой силы относительно точки $B(6,0,2)$.

Вариант 3

1. Даны точки : A(5; 2; 0), B(2; 5; 0), C(1; 2; 4), Д(-1; 1; 1).

Найти: 1) координаты векторов $\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AД}$; 2) $|\vec{AB}|, |\vec{AC}|, |\vec{AД}|$; 3) $\cos\left(\vec{AB}\ \hat{}\ , \vec{AC}\right)$; 4) $S_{\Delta ABC}$; 5) $V_{пирамиды}$; 6) работу силы $\vec{F} = 2\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}$ по перемещению тела из точки А и точку В; 7) проекцию вектора $\vec{AД}$ на $\vec{AC}$; 8) смешанное произведение векторов $\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AД}$; 9) векторное произведение векторов $\vec{AB}, \vec{AC}$;

10) скалярное произведение векторов $\vec{AД}, \vec{AB}$.

2.Сила $\vec{F}(1,2,3)$ приложена к точке $A(0,0,1)$.Определить величину и направляющие косинусы момента этой силы относительно точки $B(-5,4,3)$.

Вариант 4

1. Даны точки: А(-1; 2; -3), В(4; -1; 0), С(2; 1; -2), Д(3; 4; 5).

Найти: 1) координаты векторов $\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AД}$; 2) $|\vec{AB}|, |\vec{AC}|, |\vec{AД}|$; 3) $\cos\left(\vec{AB} \,\hat{}\, , \vec{AC}\right)$; 4) $S_{\Delta ABC}$; 5) $V_{пирамиды}$; 6) работу силы $\vec{F} = \vec{j} - 2\vec{k}$ по перемещению тела из точки А и точку В; 7) проекцию вектора $\vec{AД}$ на $\vec{AC}$; 8) смешанное произведение векторов $\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AД}$; 9) векторное произведение векторов $\vec{AB}, \vec{AC}$; 10) скалярное произведение векторов $\vec{AД}, \vec{AB}$.

2.Сила $\vec{F}(-2,-1,4)$ приложена к точке $A(0,2,4)$. Определить величину и направляющие косинусы момента этой силы относительно точки $B(1,7,-4)$.

Линии второго порядка

Вариант 1

Построить линии:

1) $x^2 - y^2 = 2x$; 2) $x^2 + 2x - 8y + 17 = 0$; 3) $25x^2 + 4y^2 - 200x - 16y + 216 = 0$;

4) $36^2 + 36y^2 - 36x - 24y - 23 = 0$; 5) $x^2 - 6x + 8 = 0$; 6) $2x - 3y + 6 = 0$.

Вариант 2

Построить линии:

1) $x = 3 + \sqrt{16 - y^2}$; 2) $y = 2\sqrt{-x}$; 3) $\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{9}y^2 - x + \frac{2}{3}y - 1 = 0$;

4) $16x^2 + 25y^2 - 32x + 50y - 359 = 0$; 5) $x^2 + 2x + 5 = 0$; 6) $-x + 2y + 3 = 0$.

Вариант 3

Построить линии:

1) $x^2 - 2x + y^2 = 3$; 2) $y = \frac{5}{6}\sqrt{36 - x^2}$; 3) $-9x^2 + 4y^2 + 54x + 8y - 113 = 0$;

4) $3x^2+18x-y+31=0$;   5) $x^2+4y^2+8y+5=0$;   6) $-4x-2y+6=0$.

Вариант 4

Построить линии:

1) $y=\sqrt{9-x^2}$;   2) $x-4y^2-8=0$;   3) $x^2-y^2+2x+2=0$;

4) $36x^2+4y^2+144x-40y+100=0$; 5) $x^2-4y^2-4x-8y+8=0$; 6) $3x+y-9=0$.

Плоскость. Прямая в пространстве.

Вариант 1

1. Написать каноническое уравнение прямой $2x+y+z-2=0$ и $2x-y-3z+6=0$.

2. Найти расстояние от точки A до плоскости, проходящей через точки B,C,D.

   $A(-12,7,-1), B(-3,4,-7), C(1,5,-4), D(-5,-2,0)$.

3. Найти угол между плоскостями: $x-3y+5=0, 2x-y+5z-16=0$.

4. Построить плоскости: а) $2x+y-z+6=0$; б) $2x-2y+z-6=0$.

5. Написать уравнение плоскости, проходящей через точку A перпендикулярно вектору $\vec{BC}$. $A(1,0,-2), B(2,-1,3), C(0,-3,2)$.

6. Написать уравнение прямой, проходящей через точки: $A(3,-2,-1)$ и $B(5,4,5)$.

7. Написать уравнение прямой, проходящей через т. $A(4,3,0)$ и параллельно вектору $\vec{s}=\{-1;1;1\}$.

8. Данные прямые параллельны или перпендикулярны ?

$$\frac{x+2}{3}=\frac{y-3}{2}=\frac{z+1}{4},\quad \frac{x-7}{3}=\frac{y-2}{2}=\frac{z}{4}.$$

9. Данные прямые параллельны или перпендикулярны ?

$$\frac{x+1}{2}=\frac{y+5}{4}=\frac{z-1}{-13},\quad \frac{x+1}{3}=\frac{y-4}{5}=\frac{z+2}{2}.$$

Вариант 2

1. Написать каноническое уравнение прямой $x - 3y + 2z + 2 = 0$ и $x + 3y + z + 14 = 0.$

2. Найти расстояние от точки A до плоскости, проходящей через точки $B, C, D.$

$A(1,-6,-5), B(-1,2,-3), C(4,-1,0), D(2,1,-2).$

3.Найти угол между плоскостями: $4x - 5y + 3z - 1 = 0, x - 4y - z + 9 = 0.$

4. Построить плоскости: а) $y - 2z + 8 = 0;$ б) $3x + 2y - z - 6 = 0.$

5. Написать уравнение плоскости, проходящей через точку A перпендикулярно вектору $\vec{BC}$. $A(-1,3,4), B(-1,5,0), C(2,6,1).$

6. Написать уравнение прямой, проходящей через точки: $A(-5,-3,2)$ и $B(-2,-6,-3,).$

7. Написать уравнение прямой, проходящей через точку $A(2,3,1)$ и параллельно вектору $\vec{s} = \{-1;2;4\}.$

8. Данные прямые параллельны или перпендикулярны ?

$$\frac{x-2}{1} = \frac{y+2}{2} = \frac{z}{4}, \quad \frac{x+3}{2} = \frac{y}{4} = \frac{z-1}{8}.$$

9. Данные прямые параллельны или перпендикулярны ?

$$\frac{x-3}{2} = \frac{y-5}{-2} = \frac{z+1}{1}, \quad \frac{x+4}{3} = \frac{y-2}{2} = \frac{z+1}{-2}.$$

Вариант 3

1. Написать каноническое уравнение прямой $x - 2y + z - 4 = 0$ и $2x + 2y - z - 8 = 0.$

2. Найти расстояние от точки A до плоскости, проходящей через точки $B, C, D.$

$A(-7,0,-1), B(-3,-1,1), C(-9,1,-2), D(3,-5,4).$

3. Найти угол между плоскостями: $3x - y + 2z + 15 = 0{,}5x + 9y - 3z - 1 = 0.$

4. Построить плоскости : а) $7x - 5 = 0;$ б) $x - 2y - z + 4 = 0.$

5. Написать уравнение плоскости, проходящей через точку A

перпендикулярно вектору $\vec{BC}$. $A(4,-2,0), B(1,-1,-5), C(-2,1,-3).$

6. Написать уравнение прямой, проходящей через точки: $A(1,1,-1)$ и $B(2,3,1).$

7. Написать уравнение прямой, проходящей через точку $A(1,5,-7)$ и

параллельно вектору $\vec{s} = \{3;-2;5\}.$

8. Данные прямые параллельны или перпендикулярны ?

$$\frac{x+4}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z-5}{6}, \quad \frac{x}{3} = \frac{y+8}{6} = \frac{z-6}{18}.$$

9. Данные прямые параллельны или перпендикулярны ?

$$\frac{x+2}{-2} = \frac{y+3}{4} = \frac{z}{1}, \quad \frac{x+7}{4} = \frac{y}{3} = \frac{z-3}{-4}.$$

Вариант 4

1. Написать каноническое уравнение прямой $x + y + z - 2 = 0$ и

$x - y - 2z + 2 = 0.$

2. Найти расстояние от точки A до плоскости, проходящей через точки $B, C, D.$

$A(-2,4,2), B(1,-1,1), C(-2,0,3), D(2,1,-1).$

3. Найти угол между плоскостями: $6x + 2y - 4z + 17 = 0{,}9x + 3y - 6z - 4 = 0.$

4. Построить плоскости: а) $x + z = 1;$ б) $x - y - z - 4 = 0.$

5. Написать уравнение плоскости, проходящей через точку A

перпендикулярно вектору $\vec{BC}$. $A(-8,0,7), B(-3,2,4), C(-1,4,5).$

6. Написать уравнение прямой, проходящей через точки: $A(1,2,0)$ и $B(3,0,-3).$

7. Написать уравнение прямой, проходящей через т. $A(-3,6,3)$ и параллельно

вектору $\vec{s} = \{1;-3;2\}.$

8. Данные прямые параллельны или перпендикулярны ?

$$\frac{x}{2}=\frac{y+1}{1}=\frac{z+9}{-3}\ ,\ \frac{x+4}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z+12}{-3}.$$

9. Данные прямые параллельны или перпендикулярны ?

$$\frac{x+16}{-1}=\frac{y+4}{4}=\frac{z}{-5}\ ,\ \frac{x+2}{3}=\frac{y}{2}=\frac{z+6}{1}$$

Введение в анализ

Вариант 1

Вычислить пределы функций:

1) $\lim\limits_{x\to -2}\left(x^2+6x+8\right)$; 2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2x^3+3x^2-x}{7x}$; 3) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2+2x+3}{x^2+1}$; 4) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^4-1}{x^2-1}$;

5) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x}-1}$; 6) $\lim\limits_{x\to \infty}\frac{2x^4-3x^3+5}{3x^4-5x^2+1}$; 7) $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\frac{x}{1+x}\right)^x$; 8) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{tg2x}{x}$

.

Вариант 2

Вычислить пределы функций:

1) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-3x+2}{x-1}$; 2) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-5x+6}{x^2-7x+10}$; 3) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^3-1}{x-1}$; 4) $\lim\limits_{x\to -1}\left(x^2-4x+3\right)$;

5) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-1}{x}$; 6) $\lim\limits_{x\to \infty}\frac{3x^3+x-1}{x^4+2x}$; 7) $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\frac{2x+3}{2x+1}\right)^{x+1}$; 8) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{tgx}{\sin 2x}$.

Вариант 3

Вычислить пределы функций:

1) $\lim\limits_{x\to -2}\frac{x^2-2x-8}{2x^2+5x+2}$; 2) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2-2}{x+3}$; 3) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{\sqrt{3+x+x^2}-\sqrt{9-2x+x^2}}{x^2-3x+2}$;

4) $\lim\limits_{x\to -1}\frac{x^2-1}{(x-1)^2}$; 5) $\lim\limits_{x\to \infty}\frac{x^2-7x+1}{3x^2+x+3}$; 6) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{tgx-\sin x}{x^3}$; 7) $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\frac{3x-1}{3x-4}\right)^{2x}$;

8) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{5x-1}{5x+4}\right)^{2x+1}$.

Вариант 4

Вычислить пределы функций:

1) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{4x^2+7x+3}{2x^2+x-1}$; 2) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{2x^2-9x+9}{x^2-5x+6}$; 3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+3x}-\sqrt{1-2x}}{x+x^2}$;

4) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3-2x-x^2}{x^2+4x+1}$; 5) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2-5x+4}{x^3-x+1}$; 6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{tg5x}$; 7) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 2x}{4x}$;

8) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{4x+3}{4x-1}\right)^{2x-3}$.

Построение графиков функций

Вариант 1

1. Построить графики функций:

а) y=$\left|2\ln|x-1|\right|$; б) y=$\log_2 |x+7|$; в) y=$3^{|X-1|}$; г) y=$\dfrac{2x+3}{x+4}$;

д) y=$\dfrac{x+2}{2x+3}$; е) y=5x^2-10x+3.

2. Найти точки разрыва функций и определить их тип, построить графики функций:

а) y=$\dfrac{x+3}{x-4}$; б) y=$3^{\frac{1}{x+1}}$; в) y=$\dfrac{9x^2-16}{3x+4}$; г) y= $\begin{cases} x+1, x\le 0; \\ -x-1, x>0. \end{cases}$

Вариант 2

1. Построить графики функций:

а) y=$\left|3\ln(x+3)\right|$; б) y=$\lg|x-6|$; в) y=$\left|x^3\right|$; г) y=$\dfrac{3x-5}{x+4}$;

д) y=$\frac{2x-5}{3x+4}$; е) y=4x$^{2}-7x+8$.

2. Найти точки разрыва функций и определить их тип, построить графики функций:

а) y=$\frac{x-2}{x+3}$; б) y=$\log_3(1-x)$; в) y=$\frac{4x^2-9}{2x+3}$; г) y=$\begin{cases} 2x+1, x\le 1; \\ 2x-1, x>1. \end{cases}$

Вариант 3

1. Построить графики функций:

а) y=$2^{|x|}$; б) y=$\left|x^5\right|$; в) y=$\dfrac{1}{|x|}$; г) y-$\dfrac{3x-2}{x+4}$;

д) y=$\dfrac{x+3}{3x+4}$; е) y=4x$^{2}+8x+9$.

2. Найти точки разрыва функций и определить их тип, построить графики функций:

а) y=$\dfrac{2x+5}{3x+1}$; б) y=$5^{\frac{2x}{x-1}}$; в) y=$\dfrac{9x^2-25}{3x-5}$; г) y= $\begin{cases} 2x+3, x\le 1; \\ 4-x, x>1. \end{cases}$

Вариант 4

1. Построить графики функций:

а) y=$4^{|x|}$; б) y=$2^{-|X|}$; в) y=$\log_{\frac{1}{3}}|x|+3$; г) y=$\dfrac{3x+4}{4x+5}$;

д) y=$\dfrac{x-4}{2x+3}$; е) y=3x$^{2}+9x+11$.

2. Найти точки разрыва функций и определить их тип , построить графики функций:

а) y=$\dfrac{2X-3}{3-5x}$; б) y=$\lg(x-4)$; в) y=$\dfrac{25x^2-16}{5x-4}$; г) y=$\begin{cases} 2x-3, x\le 2; \\ x+1, x>2. \end{cases}$

Дифференцирование функций

Вариант 1

Найти производные функции:

1) y=$\arccos\dfrac{x^2-1}{x^3}$; 2) y=$\operatorname{arctg}\sqrt{4x-x^2}$; 3) y=$\ln \operatorname{tg}^3\dfrac{x}{4}$; 4) y=$e^{-2x}\cdot\left(x^2+4x+1\right)$

;

5) y=$\left(\dfrac{x^3-1}{(x-1)^2}\right)^2$; 6) y=$\operatorname{tg}^2\ln\dfrac{x^3}{x^2-1}$; 7) y=$\cos^3\sqrt{2x}$; 8) y=sin

$\left(x^2+8x-1\right)$;

9) $y=\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$; 10) $y=2^{x}+2^{-x}$, $y^{(n)}=$?

Вариант 2

Найти производные функции:

1) y=$\log_3\left(x^2+3x-2\right)$; 2) y=$\arcsin^2\left(6x^3-x\right)$; 3) y=$\arccos\sqrt{1-6x^2}$;

4) y=$e^x \cdot e^{-x}$; 5) y=$\ln\cos^3\left(2x^4+x^3+2x^2-x\right)$; 6) y=$\left(\dfrac{x+1}{x-2x^2}\right)^2$; 7) y=$\mathrm{tg}^4\ln\dfrac{x}{3}$;

8) y=$e^{-2x}\cdot\left(2x^4+3x^3\right)$; 9) y=$\ln\mathrm{tg}\dfrac{2x+1}{4}$; 10) y=cos x , y$^{(n)}$=?

Вариант 1

Используя правило Лопиталя, найти следующие пределы:

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{\sin 10x}$; 2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$; 3) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\ln x}{x}$; 4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tgx}{x}$; 5) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\cos x\right)^{\frac{1}{x^2}}$;

6) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(1-\sin x\right)^{\cos x}$; 7) $\lim\limits_{z\to 0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{\sin x}\right)$; 8) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}}{\ln(1+x)}$; 9) $\lim\limits_{x\to 0}xctg2x.$

Вариант 2

Используя правило Лопиталя, найти следующие пределы:

1) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\cos 3x}{\cos x}$; 2) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln x}{x-1}$; 3) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x^2}{e^x}$; 4) $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\sin 3x}{tg5x}$; 5) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$;

6) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(x^2+1\right)^{\frac{1}{x}}$; 7) $\lim\limits_{x\to 3}\left(\dfrac{1}{x-3}-\dfrac{6}{x^2-9}\right)$; 8) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}$; 9) $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)tg\dfrac{\pi x}{2}$.

Исследование трафиков функций и построение их графиков

Вариант 1

Провести полное исследование функций и построить их графики:

1) $y=\dfrac{x^2+1}{x-1}$; 2) $y=e^{-x^2}$; 3) $y=\dfrac{x^2}{1-x^2}$; 4) $y=x+\dfrac{\ln x}{x}$.

Вариант 2

Провести полное исследование функций и построить их графики:

1) $y=2x^3-12x^2+18x$; 2) $y=\dfrac{x}{x^2+16}$; 3) $y=e^{-\frac{x^2}{4}}$; 4) $y=x+\sin x$.

Комплексные числа

Вариант 1

1. Перевести в тригонометрическую и показательную формы комплексные числа:

а) $z = -\sqrt{3} + i;$ б) $z = \sqrt{2} - \sqrt{2}i;$ в) $z = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i.$

2. Перевести в алгебраическую форму комплексные числа:

а) $z = 2e^{i30^0};$ б) $z = e^{-i120^0};$ в) $z = 6e^{i210^0}.$

3. Выполнить действие: $-\frac{2i}{1-i} + (3+2i)(-1-4i).$

4. Возвести в степень: $\left(\sqrt{2} - \sqrt{2}i\right)^{12}.$

5. Найти корни: $\sqrt[3]{-1-i}.$

6. Решить уравнения: а) $x^4 + 16 = 0;$ б) $27x^3 + 1 = 0;$ в) $z^3 + \frac{2\sqrt{2}}{1+i} = 0.$

Вариант 2

1. Перевести в тригонометрическую и показательную формы комплексные числа:

а) $z = 1 + i;$ б) $z = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i;$ в) $z = -2i.$

2. Перевести в алгебраическую форму комплексные числа:

а) $z = e^{i30^0};$ б) $z = 4e^{-i120^0};$ в) $z = 2e^{-i60^0}.$

3. Выполнить действие: $-\frac{3i}{-1-i} + (-2-i)(8+i).$

4. Возвести в степень: $\left(-\sqrt{3} + i\right)^{12}.$

5. Найти корни: $\sqrt[3]{-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}}.$

6. Решить уравнения: а) $x^2 + 4 = 0;$ б) $x^4 + 625 = 0;$ в) $z^3 + \frac{4}{1-\sqrt{3}i} = 0.$

Вариант 3

1. Перевести в тригонометрическую и показательную формы комплексные числа:

а) $z = 5 + 5\sqrt{3}i$; б) $z = -\sqrt{3} - i$; в) $z = -2 + 2\sqrt{3}i$.

2. Перевести в алгебраическую форму комплексные числа:

а) $z = 3e^{i60^0}$; б) $z = 4e^{i90^0}$; в) $z = 2e^{-i180^0}$.

3. Выполнить действие: $\dfrac{2}{\sqrt{3} - i} + (4 - i)(-2 - 5i)$.

4. Возвести в степень: $\left(-2 - 2\sqrt{3}i\right)^{12}$.

5. Найти корни: $\sqrt[3]{-1 + i}$.

6. Решить уравнения: а) $x^2 - 2x + 4 = 0$; б) $x^6 - 729 = 0$; в) $z^3 + \dfrac{2}{-1 - i} = 0$.

Вариант 4

1. Перевести в тригонометрическую и показательную формы комплексные числа:

а) $z = -1 - i$; б) $z = 4\sqrt{3} + 4i$; в) $z = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}i$.

2. Перевести в алгебраическую форму комплексные числа:

а) $z = 4e^{-i90^0}$; б) $z = 3e^{i45^0}$; в) $z = e^{i180^0}$.

3. Выполнить действие: $\dfrac{5 - 2i}{3 + i} - (0{,}2 - 0{,}5i)(-0{,}3 + 0{,}1i)$.

4. Возвести в степень: $(-6 + 6i)^6$.

5. Найти корни: $\sqrt[3]{-2 + 2\sqrt{3}i}$.

6. Решить уравнения: а) $x^4 + 256 = 0$; б) $x^2 - 4x + 13 = 0$; в)

$z^3 + \dfrac{2\sqrt{2}}{-1 + i} = 0$.

Вариант 5

1. Перевести в тригонометрическую и показательную формы комплексные числа:

а) $z = -2 - 2\sqrt{3}i$; б) $z = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$; в) $z = -i$.

2. Перевести в алгебраическую форму комплексные числа:

а) $z = 3e^{i45^0}$; б) $z = e^{-i60^0}$; в) $z = 4e^{i150^0}$.

3. Выполнить действие: $\dfrac{8+2i}{-1+i} - (4-5i)(-1+3i)$.

4. Возвести в степень: $(-1-i)^{24}$.

5. Найти корни: $\sqrt[3]{3-3\sqrt{3}i}$.

6. Решить уравнения: а) $x^2 + 25 = 0$; б) $x^3 - 27 = 0$; в) $z^3 + \dfrac{4}{\sqrt{3}-i} = 0$.

Вариант 6

1.Перевести в тригонометрическую и показательную формы комплексные числа:

а) $z = -\sqrt{3} + i$; б) $z = \dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{1}{2}i$; в) $z = -4\sqrt{3} - 4i$.

2. Перевести в алгебраическую форму комплексные числа:

а) $z = 2e^{i45^0}$; б) $z = 3e^{-i120^0}$; в) $z = 4e^{i30^0}$.

3. Выполнить действие: $\dfrac{4-2i}{-1-i} + (8-3i)(-2-4i)$.

4. Возвести в степень: $(-2+2\sqrt{3}i)^{18}$.

5. Найти корни: $\sqrt[3]{5\sqrt{3}-5i}$.

6. Решить уравнения: а) $x^2 + \dfrac{1}{4} = 0$; б) $8x^3 - 27 = 0$; в)

$z^3 + \dfrac{4}{-\sqrt{3}-i} = 0$.

Неопределенный интеграл

Вариант 1

Найти первообразную функций:

1\. $\int \frac{dx}{2\sqrt{x}}$; 2. $\int \frac{dx}{(\arcsin x)^3 \sqrt{1-x^2}}$; 3. $\int \frac{x^2 dx}{x^6+4}$; 4. $\int \frac{x}{x+4}dx$; 5. $\int \frac{x}{2x+1}dx$;

6\. $\int \frac{dx}{x^2-7x+10}$; 7. $\int \frac{x^3+1}{x^2-1}dx$; 8. $\int \frac{\ln^2 x}{\sqrt{x^5}}dx$; 9. $\int x^3 e^x dx$; 10. $\int \frac{2-\sin x}{2+\cos x}dx$;

11\. $\int \frac{dx}{5-4\sin x+3\cos x}$.

Вариант 2

Найти первообразную функций:

1\. $\int \sqrt[m]{x^n}\,dx$; 2. $\int e^{-3x+1}dx$; 3. $\int \frac{e^z dx}{e^{2x}+4}$; 4. $\int \frac{3+x}{3-x}dx$ 5. $\int \frac{x^4 dx}{x^2+1}$;

6\. $\int \frac{dx}{x^2+2x+3}$; 7. $\int \frac{dx}{\sqrt{4x-3-x^2}}$; 8. $\int e^x \sin x dx$; 9. $\int x^3 \sin x dx$;

10\. $\int \frac{dx}{\cos x \sin^2 x}$; 11. $\int ctg^4 x dx$.

11. КОНСПЕКТ ЛЕКЦИЙ

ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

Лекция 1. Матрицы и действия над ними. Определители, их свойства и вычисление. Обратная матрица.

Определение. **Матрицей** размера m×n, где m- число строк, n- число столбцов, называется таблица чисел, расположенных в определенном порядке. Эти числа называются элементами матрицы. Место каждого элемента однозначно определяется номером строки и столбца, на пересечении которых он находится. Элементы матрицы обозначаются a_{ij}, где i- номер строки, а j- номер столбца.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Основные действия над матрицами.

Матрица может состоять как из одной строки, так и из одного столбца. Вообще говоря, матрица может состоять даже из одного элемента.

Определение. Если число столбцов матрицы равно числу строк (m=n), то матрица называется **квадратной**.

Определение. Матрица вида: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 1 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & 1 \end{pmatrix} = E$, называется **единичной матрицей**.

Определение. Если $a_{mn} = a_{nm}$, то матрица называется **симметрической**.

Пример. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 1 & 3 & 6 \\ 5 & 6 & 4 \end{pmatrix}$ - симметрическая матрица

<u>Определение.</u> Квадратная матрица вида $\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & ... & 0 \\ 0 & a_{22} & ... & 0 \\ ... & ... & ... & 0 \\ 0 & 0 & ... & a_{nn} \end{pmatrix}$ называется **диагональной** матрицей.

Сложение и вычитание матриц сводится к соответствующим операциям над их элементами. Самым главным свойством этих операций является то, что они <u>определены только для матриц одинакового размера</u>. Таким образом, возможно определить операции сложения и вычитания матриц:

<u>Определение.</u> Суммой (разностью) матриц является матрица, элементами которой являются соответственно сумма (разность) элементов исходных матриц.

$$c_{ij} = a_{ij} \pm b_{ij}$$

$$C = A + B = B + A.$$

Операция **умножения (деления)** матрицы любого размера на произвольное число сводится к умножению (делению) каждого элемента матрицы на это число.

$$\alpha\,(A+B) = \alpha A \pm \alpha B$$

$$A(\alpha\pm\beta) = \alpha A \pm \beta A$$

<u>Пример.</u> Даны матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 5 & 7 & 8 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$, найти 2A + B.

$$2A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 4 & 2 & 8 \\ 6 & 4 & 6 \end{pmatrix}, \qquad 2A + B = \begin{pmatrix} 3 & 7 & 10 \\ 9 & 9 & 16 \\ 7 & 6 & 10 \end{pmatrix}.$$

<u>Операция умножения матриц</u>.

<u>Определение:</u> Произведением матриц называется матрица, элементы которой могут быть вычислены по следующим формулам:

$$A\cdot B = C;$$

$$\tilde{n}_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot b_{kj}\ .$$

Из приведенного определения видно, что операция умножения матриц определена только для матриц, **число столбцов первой из которых равно числу строк второй.**

<u>Свойства операции умножения матриц.</u>

1)Умножение матриц **не коммутативно**, т.е. $AB \neq BA$ даже если определены оба произведения. Однако, если для каких – либо матриц соотношение $AB=BA$ выполняется, то такие матрицы называются **перестановочными.**

Самым характерным примером может служить единичная матрица, которая является перестановочной с любой другой матрицей того же размера.

Перестановочными могут быть только квадратные матрицы одного и того же порядка.

$$\mathbf{A \cdot E = E \cdot A = A}$$

Очевидно, что для любых матриц выполняются следующее свойство:

$A \cdot O = O$; $O \cdot A = O$, где O – **нулевая** матрица.

2) Операция перемножения матриц **ассоциативна,** т.е. если определены произведения AB и (AB)C, то определены BC и A(BC), и выполняется равенство:

$$(AB)C=A(BC).$$

3) Операция умножения матриц **дистрибутивна** по отношению к сложению, т.е. если имеют смысл выражения A(B+C) и (A+B)C, то соответственно:

$$\mathbf{A(B + C) = AB + AC}$$
$$(A + B)C = AC + BC.$$

4) Если произведение AB определено, то для любого числа α верно соотношение:

$$\alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B).$$

5) Если определено произведение AB, то определено произведение $B^T A^T$ и выполняется равенство:

$(AB)^T = B^T A^T$, где индексом Т обозначается **транспонированная** матрица.

6) Заметим также, что для любых квадратных матриц $\det(AB) = \det A \cdot \det B$.

Понятие det (определитель, детерминант) будет рассмотрено ниже.

<u>Определение</u>. Матрицу В называют **транспонированной** матрицей А, а переход от А к В **транспонированием**, если элементы каждой строки матрицы А записать в том же порядке в столбцы матрицы В.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}; \qquad B = A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix};$$

другими словами, $b_{ji} = a_{ij}$.

В качестве следствия из предыдущего свойства (5) можно записать, что:

$$(ABC)^T = C^T B^T A^T,$$

при условии, что определено произведение матриц ABC.

Пример. Даны матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & -4 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ и число $\alpha = 2$. Найти $A^T B + \alpha C$.

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & -4 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}; \quad A^T B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & -4 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 1 + 2\cdot 3 + 1\cdot 2 \\ 0\cdot 1 + 4\cdot 3 - 4\cdot 2 \\ 3\cdot 1 + 1\cdot 3 + 2\cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 4 \\ 10 \end{pmatrix};$$

$$\alpha C = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}; \qquad A^T B + \alpha C = \begin{pmatrix} 9 \\ 4 \\ 10 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 12 \end{pmatrix}.$$

Пример. Найти произведение матриц $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$.

$$AB = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 2 & 1\cdot 4 & 1\cdot 1 \\ 4\cdot 2 & 4\cdot 4 & 4\cdot 1 \\ 3\cdot 2 & 3\cdot 4 & 3\cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 8 & 16 & 4 \\ 6 & 12 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$BA = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} = 2\cdot 1 + 4\cdot 4 + 1\cdot 3 = 2 + 16 + 3 = 21.$$

Пример. Найти произведение матриц $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 + 10 & 4 + 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & 16 \end{pmatrix}.$$

Определители. (детерминанты).

Определение. **Определителем** квадратной матрицы $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$ называется число, которое может быть вычислено по элементам матрицы по формуле:

$$\det A = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} a_{1k} M_{1k}, \quad \text{где}$$

$M_{1к}$ – детерминант матрицы, полученной из исходной вычеркиванием первой строки и k – го столбца. Следует обратить внимание на то, что определители имеют только квадратные матрицы, т.е. матрицы, у которых число строк равно числу столбцов.

Предыдущая формула позволяет вычислить определитель матрицы по первой строке, также справедлива формула вычисления определителя по первому столбцу:

$$\det\ A = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} a_{k1} M_{k1}$$

Вообще говоря, определитель может вычисляться по любой строке или столбцу матрицы, т.е. справедлива формула:

$$\det A = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+i} a_{ik} M_{ik}, \quad i = 1,2,\ldots,n.$$

Очевидно, что различные матрицы могут иметь одинаковые определители.

Определитель единичной матрицы равен 1.

Для указанной матрицы А число $M_{1к}$ называется **дополнительным минором** элемента матрицы a_{1k}. Таким образом, можно заключить, что каждый элемент матрицы имеет свой дополнительный минор. Дополнительные миноры существуют только в квадратных матрицах.

Определение. **Дополнительный минор** произвольного элемента квадратной матрицы a_{ij} равен определителю матрицы, полученной из исходной вычеркиванием i-ой строки и j-го столбца.

Свойство1. Важным свойством определителей является следующее соотношение: $\det A = \det A^T$;

Свойство 2. $\det(A \pm B) = \det A \pm \det B$.

Свойство 3. $\det(AB) = \det A \cdot \det B$

Свойство 4. Если в квадратной матрице поменять местами какие-либо две строки (или столбца), то определитель матрицы изменит знак, не изменившись по абсолютной величине.

Свойство 5. При умножении столбца (или строки) матрицы на число ее определитель умножается на это число.

<u>Определение:</u> Столбцы (строки) матрицы называются **линейно зависимыми**, если существует их линейная комбинация, равная нулю, имеющая нетривиальные (не равные нулю) решения.

<u>Свойство 6.</u> Если в матрице А строки или столбцы линейно зависимы, то ее определитель равен нулю.

<u>Свойство 7.</u> Если матрица содержит нулевой столбец или нулевую строку, то ее определитель равен нулю. (Данное утверждение очевидно, т.к. считать определитель можно именно по нулевой строке или столбцу.)

<u>Свойство 8.</u> Определитель матрицы не изменится, если к элементам одной из его строк(столбца) прибавить(вычесть) элементы другой строки(столбца), умноженные на какое-либо число, не равное нулю.

<u>Свойство 9.</u> Если для элементов какой- либо строки или столбца матрицы верно соотношение: $d = d_1 \pm d_2$, $e = e_1 \pm e_2$, $f = f_1 \pm f_2$, то верно:

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ k & l & m \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d_1 & e_1 & f_1 \\ k & l & m \end{vmatrix} \pm \begin{vmatrix} a & b & c \\ d_2 & e_2 & f_2 \\ k & l & m \end{vmatrix}$$

<u>Пример.</u> Вычислить определитель матрицы А = $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = (-2 \cdot 1 - 1 \cdot 3) - 2(0 \cdot 1 - 3 \cdot 3) + (0 \cdot 1 + 3 \cdot 2) =$$

= -5 + 18 + 6 = 19.

<u>Пример:</u>. Даны матрицы А = $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, В = $\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$. Найти det (AB).

1-й способ: det A = 4 – 6 = -2; det B = 15 – 2 = 13; det (AB) = det A $\cdot$ det B = -26.

2- й способ: AB = $\begin{pmatrix} 1 \cdot 5 + 2 \cdot 1 & 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 \\ 3 \cdot 5 + 4 \cdot 1 & 3 \cdot 2 + 4 \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 8 \\ 19 & 18 \end{pmatrix}$, det (AB) = 7$\cdot$18 - 8$\cdot$19 = 126 –
– 152 = -26.

Элементарные преобразования матрицы.

Определение. **Элементарными преобразованиями** матрицы назовем следующие преобразования:

1) умножение строки на число, отличное от нуля;
2) прибавление к элементам одной строки элементов другой строки;
3) перестановка строк;
4) вычеркивание (удаление) одной из одинаковых строк (столбцов);
5) транспонирование;

Те же операции, применяемые для столбцов, также называются элементарными преобразованиями.

С помощью элементарных преобразований можно к какой-либо строке или столбцу прибавить линейную комбинацию остальных строк (столбцов).

Миноры.

Выше было использовано понятие дополнительного минора матрицы. Дадим определение минора матрицы.

Определение. Если в матрице А выделить несколько произвольных строк и столько же произвольных столбцов, то определитель, составленный из элементов, расположенных на пересечении этих строк и столбцов называется **минором** матрицы А. Если выделено s строк и столбцов, то полученный минор называется минором порядка s.

Заметим, что вышесказанное применимо не только к квадратным матрицам, но и к прямоугольным.

Если вычеркнуть из исходной квадратной матрицы А выделенные строки и столбцы, то определитель полученной матрицы будет являться дополнительным минором.

Алгебраические дополнения.

Определение. **Алгебраическим дополнением** минора матрицы называется его дополнительный минор, умноженный на (-1) в степени, равной сумме номеров строк и номеров столбцов минора матрицы.

В частном случае, алгебраическим дополнением элемента матрицы называется его дополнительный минор, взятый со своим знаком, если сумма номеров столбца и строки, на которых стоит элемент, есть число четное и с противоположным знаком, если нечетное.

Теорема Лапласа. *Если выбрано s строк матрицы с номерами $i_1, \dots, i_s$, то определитель этой матрицы равен сумме произведений всех миноров, расположенных в выбранных строках на их алгебраические дополнения.*

Обратная матрица.

Определим операцию деления матриц как операцию, обратную умножению.

Определение. Если существуют квадратные матрицы X и A одного порядка, удовлетворяющие условию:

$$XA = AX = E,$$

где E - единичная матрица того же самого порядка, что и матрица A, то матрица X называется **обратной** к матрице A и обозначается A^{-1}.

Каждая квадратная матрица с определителем, не равным нулю имеет обратную матрицу и притом только одну.

Рассмотрим общий подход к нахождению обратной матрицы.

Исходя из определения произведения матриц, можно записать:

$$AX = E \Rightarrow \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot x_{kj} = e_{ij}, \ i=(1,n),\ j=(1,n),$$

$$e_{ij} = 0, \qquad i \neq j,$$

$$e_{ij} = 1, \qquad i = j.$$

Таким образом, получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} a_{11}x_{1j} + a_{12}x_{2j} + \dots + a_{1n}x_{nj} = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{j1}x_{1j} + a_{j2}x_{2j} + \dots + a_{jn}x_{nj} = 1 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}x_{1j} + a_{n2}x_{2j} + \dots + a_{nn}x_{nj} = 0 \end{cases},$$

Решив эту систему, находим элементы матрицы X.

Пример. Дана матрица A = $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, найти A^{-1}.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{cases} a_{11}x_{11} + a_{12}x_{21} = e_{11} = 1 \\ a_{11}x_{12} + a_{12}x_{22} = e_{12} = 0 \\ a_{21}x_{11} + a_{22}x_{21} = e_{21} = 0 \\ a_{21}x_{12} + a_{22}x_{22} = e_{22} = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_{11} + 2x_{21} = 1 \\ x_{12} + 2x_{22} = 0 \\ 3x_{11} + 4x_{21} = 0 \\ 3x_{12} + 4x_{22} = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_{11} = -2 \\ x_{12} = 1 \\ x_{21} = 3/2 \\ x_{22} = -1/2 \end{cases}$$

Таким образом, $A^{-1}=\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix}$.

Однако, такой способ не удобен при нахождении обратных матриц больших порядков, поэтому обычно применяют следующую формулу:

$$x_{ij} = \frac{(-1)^{i+j} M_{ji}}{\det A},$$

где M_{ji}- дополнительный минор элемента a_{ji} матрицы А.

Пример. Дана матрица $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, найти A^{-1}.

$$\det A = 4 - 6 = -2.$$

$$M_{11}=4; \quad M_{12}= 3; \quad M_{21}= 2; \quad M_{22}=1$$
$$x_{11}= -2; \quad x_{12}= 1; \quad x_{21}= 3/2; \quad x_{22}= -1/2$$

Таким образом, $A^{-1}=\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix}$.

Свойства обратных матриц.

Укажем следующие свойства обратных матриц:

1)$(A^{-1})^{-1} = A$; 2) $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$; 3) $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.

Пример. Дана матрица $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$, найти A^3.

$A^2 = AA = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & 14 \\ 7 & 18 \end{pmatrix}$; $A^3 = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 11 & 14 \\ 7 & 18 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 47 & 78 \\ 39 & 86 \end{pmatrix}$.

Отметим, что матрицы $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 11 & 14 \\ 7 & 18 \end{pmatrix}$ являются перестановочными.

Пример. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} -1 & 0 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{vmatrix}$.

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{vmatrix} = -1\begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix} + 3\cdot\begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} - 4\cdot\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix} = -1(6-4) - 1(9-1) + 2(12-2) = -2 - 8 + 20 = 10.$$

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -2 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 2(0-2) - 1(0-6) = 2.$$

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -2 & -3 \\ 0 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 2(-4) - 3(-6) = -8 + 18 = 10.$$

Значение определителя: -10 + 6 – 40 = -44.

Лекция 2. Система линейных уравнений, свойства систем. Однородные и неоднородные системы.

Ранг матрицы.

Как было сказано выше, минором матрицы порядка s называется определитель матрицы, образованной из элементов исходной матрицы, находящихся на пересечении каких - либо выбранных *s* строк и *s* столбцов.

Определение. В матрице порядка $m\times n$ минор порядка r называется **базисным**, если он не равен нулю, а все миноры порядка *r+1* и выше равны нулю, или не существуют вовсе, т.е. *r* совпадает с меньшим из чисел m или n.

Столбцы и строки матрицы, на которых стоит базисный минор, также называются **базисными.**

В матрице может быть несколько различных базисных миноров, имеющих одинаковый порядок.

Определение. Порядок базисного минора матрицы называется **рангом** матрицы и обозначается Rg A.

Очень важным свойством элементарных преобразований матриц является то, что они не изменяют ранг матрицы.

Определение. Матрицы, полученные в результате элементарного преобразования, называются **эквивалентными.**

Надо отметить, что **равные** матрицы и **эквивалентные** матрицы - понятия совершенно различные.

Теорема. *Наибольшее число линейно независимых столбцов в матрице равно числу линейно независимых строк.*

Т.к. элементарные преобразования не изменяют ранг матрицы, то можно существенно упростить процесс нахождения ранга матрицы.

Пример. Определить ранг матрицы.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 11 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 11 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 11 \end{pmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 11 \end{vmatrix} = 11 - 10 = 1 \neq 0 \Rightarrow \quad RgA = 2.$$

Пример: Определить ранг матрицы.

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 4 & 8 & 12 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 3 - 2 = 1 \neq 0 \Rightarrow \quad Rg = 2.$$

Пример. Определить ранг матрицы.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 6 & 8 \\ 1 & 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 6 & 8 \end{pmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 4 - 6 = -2 \neq 0. \Rightarrow Rg = 2.$$

Если с помощью элементарных преобразований не удается найти матрицу, эквивалентную исходной, но меньшего размера, то нахождение ранга матрицы следует начинать с вычисления миноров наивысшего возможного порядка. В вышеприведенном примере – это миноры порядка 3. Если хотя бы один из них не равен нулю, то ранг матрицы равен порядку этого минора.

Теорема о базисном миноре.

Теорема. *В произвольной матрице А каждый столбец (строка) является линейной комбинацией столбцов (строк), в которых расположен базисный минор.*

Таким образом, ранг произвольной матрицы А равен максимальному числу линейно независимых строк (столбцов) в матрице.

Если А- квадратная матрица и detA = 0, то по крайней мере один из столбцов – линейная комбинация остальных столбцов. То же самое справедливо и для строк. Данное утверждение следует из свойства линейной зависимости при определителе равном нулю.

Матричный метод решения систем линейных уравнений.

Матричный метод применим к решению систем уравнений, где число уравнений равно числу неизвестных.

Метод удобен для решения систем невысокого порядка.

Метод основан на применении свойств умножения матриц.

Пусть дана система уравнений:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

Составим матрицы: $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_n \end{pmatrix}$; $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}$.

Систему уравнений можно записать:

$$A\cdot X = B.$$

Сделаем следующее преобразование: $A^{-1}\cdot A\cdot X = A^{-1}\cdot B$,

т.к. $A^{-1}\cdot A = E$, то $E\cdot X = A^{-1}\cdot B$

$$\mathbf{X = A^{-1}\cdot B}$$

Для применения данного метода необходимо находить обратную матрицу, что может быть связано с вычислительными трудностями при решении систем высокого порядка.

Пример. Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} 5x - y - z = 0 \\ x + 2y + 3z = 14 \\ 4x + 3y + 2z = 16 \end{cases}$$

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 \\ 14 \\ 16 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Найдем обратную матрицу A^{-1}.

$$\Delta = \det A = \begin{vmatrix} 5 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 5(4-9) + 1(2 - 12) - 1(3 - 8) = -25 - 10 + 5 = -30.$$

$M_{11} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -5$; $M_{21} = \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 1$; $M_{31} = \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -1$;

$$M_{12}=\begin{vmatrix}1 & 3\\ 4 & 2\end{vmatrix}=-10; \qquad M_{22}=\begin{vmatrix}5 & -1\\ 4 & 2\end{vmatrix}=14; \qquad M_{32}=\begin{vmatrix}5 & -1\\ 1 & 3\end{vmatrix}=16;$$

$$M_{13}=\begin{vmatrix}1 & 2\\ 4 & 3\end{vmatrix}=-5; \qquad M_{23}=\begin{vmatrix}5 & -1\\ 4 & 3\end{vmatrix}=19; \qquad M_{33}=\begin{vmatrix}5 & -1\\ 1 & 2\end{vmatrix}=11;$$

$$a_{11}^{-1}=\frac{5}{30}; \quad a_{12}^{-1}=\frac{1}{30}; \quad a_{13}^{-1}=\frac{1}{30};$$

$$a_{21}^{-1}=-\frac{10}{30}; \quad a_{22}^{-1}=-\frac{14}{30}; \quad a_{23}^{-1}=\frac{16}{30};$$

$$a_{31}^{-1}=\frac{5}{30}; \quad a_{32}^{-1}=\frac{19}{30}; \quad a_{33}^{-1}=-\frac{11}{30};$$

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{6} & \frac{1}{30} & \frac{1}{30}\\ -\frac{1}{3} & -\frac{7}{15} & \frac{8}{15}\\ \frac{1}{6} & \frac{19}{30} & -\frac{11}{30}\end{pmatrix};$$

Сделаем проверку:

$$A\cdot A^{-1}=\begin{pmatrix}5 & -1 & -1\\ 1 & 2 & 3\\ 4 & 3 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{5}{30} & \frac{1}{30} & \frac{1}{30}\\ -\frac{10}{30} & -\frac{14}{30} & \frac{16}{30}\\ \frac{5}{30} & \frac{19}{30} & -\frac{11}{30}\end{pmatrix}=\frac{1}{30}\begin{pmatrix}25+10-5 & 5+14-19 & 5-16+11\\ 5-20+15 & 1-28+57 & 1+32-33\\ 20-30+10 & 4-42+38 & 4+48-22\end{pmatrix}=E.$$

Находим матрицу X.

$$X=\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=A^{-1}B=\begin{pmatrix}\frac{1}{6} & \frac{1}{30} & \frac{1}{30}\\ -\frac{1}{3} & -\frac{7}{15} & \frac{8}{15}\\ \frac{1}{6} & \frac{19}{30} & -\frac{11}{30}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\ 14\\ 16\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{6}0+\frac{14}{30}+\frac{16}{30}\\ -\frac{1}{3}0-\frac{98}{15}+\frac{128}{15}\\ \frac{1}{6}0+\frac{266}{30}-\frac{176}{30}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ 2\\ 3\end{pmatrix}.$$

Итого решения системы: $x=1$; $y=2$; $z=3$.

Несмотря на ограничения возможности применения данного метода и сложность вычислений при больших значениях коэффициентов, а также систем высокого порядка, метод может быть легко реализован на ЭВМ.

Метод Крамера.

(Габриель Крамер (1704-1752) швейцарский математик)

Данный метод также применим только в случае систем линейных уравнений, где число переменных совпадает с числом уравнений. Кроме того, необходимо ввести ограничения на коэффициенты системы. Необходимо, чтобы все уравнения были линейно независимы, т.е. ни одно уравнение не являлось бы линейной комбинацией остальных.

Для этого необходимо, чтобы определитель матрицы системы не равнялся 0.

$$\det A \neq 0;$$

Действительно, если какое- либо уравнение системы есть линейная комбинация остальных, то если к элементам какой- либо строки прибавить элементы другой, умноженные на какое- либо число, с помощью линейных преобразований можно получить нулевую строку. Определитель в этом случае будет равен нулю.

Теорема. (Правило Крамера):

Теорема. *Система из n уравнений с n неизвестными*

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

в случае, если определитель матрицы системы не равен нулю, имеет единственное решение и это решение находится по формулам:

$$x_i = \Delta_i/\Delta, \text{ где}$$

$\Delta = \det A$, а Δ_i – определитель матрицы, получаемой из матрицы системы заменой столбца i столбцом свободных членов b_i.

$$\Delta_i = \begin{vmatrix} a_{11}\ldots a_{1i-1} & b_1 & a_{1i+1}\ldots a_{1n} \\ a_{21}\ldots a_{2i-i} & b_2 & a_{2i+1}\ldots a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1}\ldots a_{ni-1} & b_n & a_{ni+1}\ldots a_{nn} \end{vmatrix}$$

Пример.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}; \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}; \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}; \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix};$$

$$x_1 = \Delta_1/\det A; \qquad x_2 = \Delta_2/\det A; \qquad x_3 = \Delta_3/\det A;$$

Пример. Найти решение системы уравнений:

$$\begin{cases} 5x - y - z = 0 \\ x + 2y + 3z = 14 \\ 4x + 3y + 2z = 16 \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 5 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 5(4-9) + (2-12) - (3-8) = -25 - 10 + 5 = -30;$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 14 & 2 & 3 \\ 16 & 3 & 2 \end{vmatrix} = (28-48) - (42-32) = -20 - 10 = -30.$$

$x_1 = \Delta_1/\Delta = 1;$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 5 & 0 & -1 \\ 1 & 14 & 3 \\ 4 & 16 & 2 \end{vmatrix} = 5(28-48) - (16-56) = -100 + 40 = -60.$$

$x_2 = \Delta_2/\Delta = 2;$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 5 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 14 \\ 4 & 3 & 16 \end{vmatrix} = 5(\,32-42) + (16-56) = -50 - 40 = -90.$$

$x_3 = \Delta_3/\Delta = 3.$

Как видно, результат совпадает с результатом, полученным выше матричным методом.

Если система однородна, т.е. $b_i = 0$, то при $\Delta \neq 0$ система имеет единственное нулевое решение $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$.

При $\Delta = 0$ система имеет бесконечное множество решений.

Для самостоятельного решения:

$$\begin{cases} x + 3y - 6z = 12 \\ 3x + 2y + 5z = -10 \\ 2x + 5y - 3z = 6 \end{cases};$$

Ответ: x = 0; y = 0; z = -2.

Решение произвольных систем линейных уравнений.

Как было сказано выше, матричный метод и метод Крамера применимы только к тем системам линейных уравнений, в которых число неизвестных равняется числу уравнений. Далее рассмотрим произвольные системы линейных уравнений.

<u>Определение.</u> Система m уравнений с n неизвестными в общем виде записывается следующим образом:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ .... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m \end{cases},$$

где a_{ij} – коэффициенты, а b_i – постоянные. Решениями системы являются n чисел, которые при подстановке в систему превращают каждое ее уравнение в тождество.

<u>Определение.</u> Если система имеет хотя бы одно решение, то она называется **совместной**. Если система не имеет ни одного решения, то она называется **несовместной**.

<u>Определение.</u> Система называется **определенной**, если она имеет только одно решение и **неопределенной**, если более одного.

<u>Определение.</u> Для системы линейных уравнений матрица

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{pmatrix}$$ называется матрицей системы, а матрица

$$A^* = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} & b_2 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$ называется расширенной матрицей системы

<u>Определение.</u> Если b_1, b_2, …,b_m = 0, то система называется **однородной**. однородная система всегда совместна, т.к. всегда имеет нулевое решение.

<u>Элементарные преобразования систем.</u>

К элементарным преобразованиям относятся:

1)Прибавление к обеим частям одного уравнения соответствующих частей другого, умноженных на одно и то же число, не равное нулю.

2)Перестановка уравнений местами.

3)Удаление из системы уравнений, являющихся тождествами для всех х.

Теорема Кронекера – Капелли.

(условие совместности системы)

(Леопольд Кронекер (1823-1891) немецкий математик)

Теорема: *Система совместна (имеет хотя бы одно решение) тогда и только тогда, когда ранг матрицы системы равен рангу расширенной матрицы.*

$$RgA = RgA^*.$$

Очевидно, что система (1) может быть записана в виде:

$$x_1\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + x_2\begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \dots \\ a_{m2} \end{pmatrix} + \dots + x_n\begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \dots \\ a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}$$

Доказательство.

1) Если решение существует, то столбец свободных членов есть линейная комбинация столбцов матрицы А, а значит добавление этого столбца в матрицу, т.е. переход $A \to A^*$ не изменяют ранга.

2) Если $RgA = RgA^*$, то это означает, что они имеют один и тот же базисный минор. Столбец свободных членов – линейная комбинация столбцов базисного минора, те верна запись, приведенная выше.

Пример. Определить совместность системы линейных уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 7x_4 + 9x_5 = 1 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 + 5x_5 = 2 \\ 2x_1 + 11x_2 + 12x_3 + 25x_4 + 22x_5 = 4 \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 \\ 1 & -2 & 3 & -4 & 5 \\ 2 & 11 & 12 & 25 & 22 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 \\ 3 & 9 & 15 & 21 & 27 \\ 2 & 11 & 12 & 25 & 22 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 \\ 1 & 3 & 5 & 7 & 9 \\ 2 & 11 & 12 & 25 & 22 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 \\ 2 & 11 & 12 & 25 & 22 \end{pmatrix}. \qquad \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 11 \end{vmatrix} = 1 - 6 = 5 \neq 0 \quad RgA = 2.$$

$$A^* = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 & 1 \\ 1 & -2 & 3 & -4 & 5 & 2 \\ 2 & 11 & 12 & 25 & 22 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 11 & 12 & 25 & 22 & 4 \end{pmatrix} \qquad RgA^* = 3.$$

Система несовместна.

Пример. Определить совместность системы линейных уравнений.

$$\begin{cases} x_1 - 4x_2 = -1 \\ 3x_1 + 2x_2 = 4 \\ 7x_1 + 10x_2 = 12 \\ 5x_1 + 6x_2 = 8 \\ 3x_1 - 16x_2 = -5 \end{cases} \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 3 & 2 \\ 7 & 10 \\ 5 & 6 \\ 3 & -16 \end{pmatrix}; \begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 2 + 12 = 14 \neq 0; \quad RgA = 2;$$

$$A^* = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -1 \\ 3 & 2 & 4 \\ 7 & 10 & 12 \\ 5 & 6 & 8 \\ 3 & -16 & -5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -4 & -1 \\ 0 & 14 & 7 \\ 0 & 38 & 19 \\ 0 & 26 & 13 \\ 0 & -4 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -4 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -4 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 \neq 0. \qquad RgA^* = 2.$$

Система совместна. Решения: $x_1 = 1$; $x_2 = 1/2$.

Метод Гаусса.

(Карл Фридрих Гаусс (1777-1855) немецкий математик)

В отличие от матричного метода и метода Крамера, метод Гаусса может быть применен к системам линейных уравнений с произвольным числом уравнений и неизвестных. Суть метода заключается в последовательном исключении неизвестных.

Рассмотрим систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Разделим обе части 1–го уравнения на $a_{11} \neq 0$, затем:

1) умножим на a_{21} и вычтем из второго уравнения

2) умножим на a_{31} и вычтем из третьего уравнения

и т.д.

Получим:

$$\begin{cases} x_1 + d_{12}x_2 + \ldots + d_{1n}x_n = d_1 \\ d_{22}x_2 + d_{23}x_3 + \ldots + d_{2n}x_n = d_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ d_{m2}x_2 + d_{m3} + \ldots + d_{mn}x_n = d_m \end{cases}, \quad \text{где } d_{1j} = a_{1j}/a_{11},\ j = 2, 3, \ldots, n+1.$$

$$d_{ij} = a_{ij} - a_{i1}d_{1j} \qquad i = 2, 3, \ldots, n; \qquad j = 2, 3, \ldots, n+1.$$

Далее повторяем эти же действия для второго уравнения системы, потом – для третьего и т.д.

Пример. Решить систему линейных уравнений методом Гаусса.

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 5 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 = -3 \\ 7x_1 + x_2 - x_3 = 10 \end{cases}$$

Составим расширенную матрицу системы.

$$A^* = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 5 \\ 1 & -2 & 3 & -3 \\ 7 & 1 & -1 & 10 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -3 \\ 2 & 1 & -1 & 5 \\ 7 & 1 & -1 & 10 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -3 \\ 0 & 5 & -7 & 11 \\ 0 & 15 & -22 & 31 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -3 \\ 0 & 5 & -7 & 11 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

Таким образом, исходная система может быть представлена в виде:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = -3 \\ 5x_2 - 7x_3 = 11 \\ -x_3 = -2 \end{cases}$$, откуда получаем: $x_3 = 2$; $x_2 = 5$; $x_1 = 1$.

Пример. Решить систему методом Гаусса.

$$\begin{cases} 5x - y - z = 0 \\ x + 2y + 3z = 14 \\ 4x + 3y + 2z = 16 \end{cases}$$

Составим расширенную матрицу системы.

$$\begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 14 \\ 4 & 3 & 2 & 16 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 14 \\ 4 & 3 & 2 & 16 \\ 5 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 14 \\ 0 & -5 & -10 & -40 \\ 0 & -11 & -16 & -70 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 14 \\ 0 & -5 & -10 & -40 \\ 0 & 0 & 6 & 18 \end{pmatrix}$$

Таким образом, исходная система может быть представлена в виде:

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 14 \\ -5y - 10z = 40 \\ 6z = 18 \end{cases}$$, откуда получаем: $z = 3$; $y = 2$; $x = 1$.

Полученный ответ совпадает с ответом, полученным для данной системы методом Крамера и матричным методом.

Для самостоятельного решения:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 4 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 1 \\ x_1 - x_3 + 2x_4 = 6 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$$

Ответ: {1, 2, 3, 4}.

Лекция 3. Векторы. Проекция вектора на ось. Разложение вектора по базису i,j,k. Векторное произведение векторов. Условие коллинеарности.

Элементы векторной алгебры.

Определение. Вектором называется направленный отрезок (упорядоченная пара точек). К векторам относится также и **нулевой** вектор, начало и конец которого совпадают.

Определение. Длиной (модулем) вектора называется расстояние между началом и концом вектора.

$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \left|\vec{a}\right|$$

Определение. Векторы называются **коллинеарными**, если они расположены на одной или параллельных прямых. Нулевой вектор коллинеарен любому вектору.

Определение. Векторы называются **компланарными**, если существует плоскость, которой они параллельны.

Коллинеарные векторы всегда компланарны, но не все компланарные векторы коллинеарны.

Определение. Векторы называются **равными**, если они коллинеарны, одинаково направлены и имеют одинаковые модули.

Всякие векторы можно привести к общему началу, т.е. построить векторы, соответственно равные данным и имеющие общее начало. Из определения равенства векторов следует, что любой вектор имеет бесконечно много векторов, равных ему.

Определение. Линейными операциями над векторами называется сложение и умножение на число.

Суммой векторов является вектор - $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$

Произведение - $\vec{b} = \alpha\ \vec{a}$; $\left|\vec{b}\right| = \alpha\left|\vec{a}\right|$, при этом $\vec{a}$ коллинеарен $\vec{b}$.

Вектор $\vec{a}$ сонаправлен с вектором $\vec{b}$ ($\vec{a}\uparrow\uparrow\vec{b}$), если $\alpha > 0$.
Вектор $\vec{a}$ противоположно направлен с вектором $\vec{b}$ ($\vec{a}\uparrow\downarrow\vec{b}$), если $\alpha < 0$.

Свойства векторов.

1) $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ - коммутативность.
2) $\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$
3) $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$
4) $\vec{a} + (-1)\vec{a} = \vec{0}$
5) $(\alpha\cdot\beta)\vec{a} = \alpha(\beta\vec{a})$ – ассоциативность
6) $(\alpha+\beta)\vec{a} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{a}$ - дистрибутивность
7) $\alpha(\vec{a} + \vec{b}) = \alpha\vec{a} + \alpha\vec{b}$
8) $1\cdot\vec{a} = \vec{a}$

Определение.

1) **Базисом** в пространстве называются любые 3 некомпланарных вектора, взятые в определенном порядке.

2) **Базисом** на плоскости называются любые 2 неколлинеарные векторы, взятые в определенном порядке.

3)**Базисом** на прямой называется любой ненулевой вектор.

Определение. Если $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}$ - базис в пространстве и $\vec{a} = \alpha \overrightarrow{e_1} + \beta \overrightarrow{e_2} + \gamma \overrightarrow{e_3}$, то числа α, β и γ - называются **компонентами или координатами** вектора $\vec{a}$ в этом базисе.

В связи с этим можно записать следующие **свойства**:

- равные векторы имеют одинаковые координаты,
- при умножении вектора на число его компоненты тоже умножаются на это число,

$$\lambda \vec{a} = \lambda (\alpha \overrightarrow{e_1} + \beta \overrightarrow{e_2} + \gamma \overrightarrow{e_3}) = (\lambda \alpha) \overrightarrow{e_1} + (\lambda \beta) \overrightarrow{e_2} + (\lambda \gamma) \overrightarrow{e_3}.$$

- при сложении векторов складываются их соответствующие компоненты.

$$\vec{a} = \alpha_1 \overrightarrow{e_1} + \alpha_2 \overrightarrow{e_2} + \alpha_3 \overrightarrow{e_3}; \qquad \vec{b} = \beta_1 \overrightarrow{e_1} + \beta_2 \overrightarrow{e_2} + \beta_3 \overrightarrow{e_3};$$

$$\vec{a} + \vec{b} = (\alpha_1 + \beta_1) \overrightarrow{e_1} + (\alpha_2 + \beta_2) \overrightarrow{e_2} + (\alpha_3 + \beta_3) \overrightarrow{e_3}.$$

Линейная зависимость векторов.

Определение. Векторы $\overrightarrow{a_1}, ..., \overrightarrow{a_n}$ называются **линейно зависимыми**, если существует такая линейная комбинация $\alpha_1 \overrightarrow{a_1} + \alpha_2 \overrightarrow{a_2} + ... + \alpha_n \overrightarrow{a_n} = 0$, при не равных нулю одновременно α_i, т.е. $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + ... + \alpha_n^2 \neq 0$.

Если же только при $\alpha_i = 0$ выполняется $\alpha_1 \overrightarrow{a_1} + \alpha_2 \overrightarrow{a_2} + ... + \alpha_n \overrightarrow{a_n} = 0$, то векторы называются линейно независимыми.

Свойство 1. Если среди векторов $\overrightarrow{a_i}$ есть нулевой вектор, то эти векторы линейно зависимы.

Свойство 2. Если к системе линейно зависимых векторов добавить один или несколько векторов, то полученная система тоже будет линейно зависима.

Свойство 3. Система векторов линейно зависима тогда и только тогда, когда один из векторов раскладывается в линейную комбинацию остальных векторов.

Свойство 4. Любые 2 коллинеарных вектора линейно зависимы и, наоборот, любые 2 линейно зависимые векторы коллинеарны.

Свойство 5. Любые 3 компланарных вектора линейно зависимы и, наоборот, любые 3 линейно зависимые векторы компланарны.

Свойство 6. Любые 4 вектора линейно зависимы.

Система координат.

Для определения положения произвольной точки могут использоваться различные системы координат. Положение произвольной точки в какой-либо системе координат должно однозначно определяться. Понятие системы координат представляет собой совокупность точки начала отсчета (начала координат) и некоторого базиса. Как на плоскости, так и в пространстве возможно задание самых разнообразных систем координат. Выбор системы координат зависит от характера поставленной геометрической, физической или технической задачи. Рассмотрим некоторые наиболее часто применяемые на практике системы координат.

Декартова система координат.

Зафиксируем в пространстве точку О и рассмотрим произвольную точку М.
Вектор $\overrightarrow{OM}$ назовем радиус- вектором точки М. Если в пространстве задать некоторый базис, то точке М можно сопоставить некоторую тройку чисел – компоненты ее радиус- вектора.

Определение. **Декартовой системой координат** в пространстве называется совокупность точки и базиса. Точка называется **началом координат**. Прямые, проходящие через начало координат называются **осями координат**.
1-я ось – ось **абсцисс**
2-я ось – ось **ординат**
3-я ось – ось **апликат**

Чтобы найти компоненты вектора нужно из координат его конца вычесть координаты начала.
Если заданы точки $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$, то $\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$.

Определение. Базис называется **ортонормированным**, если его векторы попарно ортогональны и равны единице.

Определение. Декартова система координат, базис которой ортонормирован называется **декартовой прямоугольной системой координат**.

Пример. Даны векторы $\vec{a}$(1; 2; 3), $\vec{b}$(-1; 0; 3), $\vec{c}$(2; 1; -1) и $\vec{d}$(3; 2; 2) в некотором базисе. Показать, что векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ образуют базис и найти координаты вектора $\vec{d}$ в этом базисе.

Векторы образуют базис, если они линейно независимы, другими словами, если уравнения, входящие в систему:

$$\begin{cases} \alpha - \beta + 2\gamma = 0 \\ 2\alpha + 0\cdot\beta + \gamma = 0 \\ 3\alpha + 3\beta - \gamma = 0 \end{cases}$$ линейно независимы.

Тогда $\vec{d} = \alpha\,\vec{a} + \beta\,\vec{b} + \gamma\,\vec{c}$.

Это условие выполняется, если определитель матрицы системы отличен от нуля.

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 3 & -1 \end{vmatrix} \neq 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 3 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = -3 + (-2 - 3) + 12 = 4 \neq 0$$

$$\begin{cases} \alpha a_1 + \beta b_1 + \gamma c_1 = d_1 \\ \alpha a_2 + \beta b_2 + \gamma c_2 = d_2 \\ \alpha a_3 + \beta b_3 + \gamma c_3 = d_3 \end{cases}$$ Для решения этой системы воспользуемся методом Крамера.

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 3(-3) + (-2 - 2) + 12 = -1.$$

$$\alpha = \frac{\Delta_1}{\Delta} = -1/4;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix} = (-2 - 2) - 3(-2 - 3) + 2(4 - 6) = -4 + 15 - 4 = 7;$$

$$\beta = \frac{\Delta_2}{\Delta} = 7/4;$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & 3 & 2 \end{vmatrix} = -6 + (4 - 6) + 18 = 10; \quad \gamma = \frac{\Delta_3}{\Delta} = 5/2;$$

Координаты вектора $\vec{d}$ в базисе $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$: $\vec{d}$ $\{-1/4, 7/4, 5/2\}$.

Длина вектора в координатах определяется как расстояние между точками начала и конца вектора. Если заданы две точки в пространстве A(x_1, y_1, z_1), B(x_2, y_2, z_2), то $\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$.

Если точка M(x, y, z) **делит отрезок AB в соотношении λ/μ**, считая от A, то координаты этой точки определяются как:

$$x = \frac{\mu x_1 + \lambda x_2}{\mu + \lambda}; \quad y = \frac{\mu y_1 + \lambda y_2}{\mu + \lambda}; \quad z = \frac{\mu z_1 + \lambda z_2}{\mu + \lambda}.$$

В частном случае координаты **середины отрезка** находятся как:

$$x = (x_1 + x_2)/2; \qquad y = (y_1 + y_2)/2; \qquad z = (z_1 + z_2)/2.$$

Линейные операции над векторами в координатах.

Пусть заданы векторы в прямоугольной системе координат

$\vec{a}(x_A, y_A, z_A)$; $\vec{b}(x_B, y_B, z_B)$, тогда линейные операции над ними в координатах имеют вид: $\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}(x_A + x_B; y_A + y_B; z_A + z_B)$; $\alpha \cdot \vec{a} = (\alpha x_A; \alpha y_A; \alpha z_A)$

Скалярное произведение векторов.

Определение. Скалярным произведением векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется число, равное произведению длин этих сторон на косинус угла между ними.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\varphi$$

Свойства скалярного произведения:

1) $\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2$;
2) $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$, если $\vec{a} \perp \vec{b}$ или $\vec{a} = 0$ или $\vec{b} = 0$.
3) $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$;
4) $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$;
5) $(m\vec{a}) \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot (m\vec{b}) = m(\vec{a} \cdot \vec{b})$; m=const

Если рассматривать векторы $\vec{a}(x_a, y_a, z_a)$; $\vec{b}(x_b, y_b, z_b)$ в декартовой прямоугольной системе координат, то

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = x_a x_b + y_a y_b + z_a z_b;$$

Используя полученные равенства, получаем формулу для вычисления угла между векторами: $\cos\varphi = \dfrac{x_a x_b + y_a y_b + z_a z_b}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$;

Пример. Найти $(5\vec{a} + 3\vec{b})(2\vec{a} - \vec{b})$, если $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 3$, $\vec{a} \perp \vec{b}$.

$$10\vec{a} \cdot \vec{a} - 5\vec{a} \cdot \vec{b} + 6\vec{a} \cdot \vec{b} - 3\vec{b} \cdot \vec{b} = 10|\vec{a}|^2 - 3|\vec{b}|^2 = 40 - 27 = 13,$$

т.к. $\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2 = 4$, $\vec{b} \cdot \vec{b} = |\vec{b}|^2 = 9$, $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$.

Пример. Найти угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если $\vec{a} = \vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}$, $\vec{b} = 6\vec{i} + 4\vec{j} - 2\vec{k}$.

Т.е. $\vec{a} = (1, 2, 3)$, $\vec{b} = (6, 4, -2)$

$\vec{a} \cdot \vec{b} = 6 + 8 - 6 = 8$:

$|\vec{a}| = \sqrt{1 + 4 + 9} = \sqrt{14}$; $|\vec{b}| = \sqrt{36 + 16 + 4} = \sqrt{56}$.

$$\cos\varphi = \frac{8}{\sqrt{14}\sqrt{56}} = \frac{8}{2\sqrt{14}\sqrt{14}} = \frac{4}{14} = \frac{2}{7}; \qquad \varphi = \arccos\frac{2}{7}.$$

<u>Пример.</u> Найти скалярное произведение $(3\vec{a} - 2\vec{b})\cdot(5\vec{a} - 6\vec{b})$, если $|\vec{a}| = 4$, $|\vec{b}| = 6$, $\vec{a}\wedge\vec{b} = \pi/3$.

$$15\vec{a}\cdot\vec{a} - 18\vec{a}\cdot\vec{b} - 10\vec{a}\cdot\vec{b} + 12\vec{b}\cdot\vec{b} = 15|\vec{a}|^2 - 28|\vec{a}||\vec{b}|\cos\frac{\pi}{3} + 12|\vec{b}|^2 = 15\cdot16 - 28\cdot4\cdot6\cdot\frac{1}{2} +$$

$$+ 12\cdot36 = 240 - 336 + 432 = 672 - 336 = 336.$$

<u>Пример.</u> Найти угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если $\vec{a} = 3\vec{i} + 4\vec{j} + 5\vec{k}$, $\vec{b} = 4\vec{i} + 5\vec{j} - 3\vec{k}$.

Т.е. $\vec{a} = (3, 4, 5)$, $\vec{b} = (4, 5, -3)$

$\vec{a}\cdot\vec{b} = 12 + 20 - 15 = 17$:

$|\vec{a}| = \sqrt{9+16+25} = \sqrt{50}$; $|\vec{b}| = \sqrt{16+25+9} = \sqrt{50}$.

$$\cos\varphi = \frac{17}{\sqrt{50}\sqrt{50}} = \frac{17}{50}; \qquad \varphi = \arccos\frac{17}{50}.$$

<u>Пример.</u> При каком m векторы $\vec{a} = m\vec{i} + \vec{j}$ и $\vec{b} = 3\vec{i} - 3\vec{j} - 4\vec{k}$ перпендикулярны.

$$\vec{a} = (m, 1, 0); \qquad \vec{b} = (3, -3, -4)$$

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = 3m - 3 = 0; \quad \Rightarrow \quad m = 1.$$

<u>Пример.</u> Найти скалярное произведение векторов $2\vec{a} + 3\vec{b} + 4\vec{c}$ и $5\vec{a} + 6\vec{b} + 7\vec{c}$, если $|\vec{a}| = 1$, $|\vec{b}| = 2$, $|\vec{c}| = 3$, $\vec{a}\wedge\vec{b} = \vec{a}\wedge\vec{c} = \vec{b}\wedge\vec{c} = \frac{\pi}{3}$.

$$(2\vec{a} + 3\vec{b} + 4\vec{c})(5\vec{a} + 6\vec{b} + 7\vec{c}) = 10\vec{a}\cdot\vec{a} + 12\vec{a}\cdot\vec{b} + 14\vec{a}\cdot\vec{c} + 15\vec{a}\cdot\vec{b} + 18\vec{b}\cdot\vec{b} + 21\vec{b}\cdot\vec{c} +$$

$$+ 20\vec{c}\cdot\vec{a} + 24\vec{b}\cdot\vec{c} + 28\vec{c}\cdot\vec{c} = 10\,\vec{a}\cdot\vec{a} + 27\vec{a}\cdot\vec{b} + 34\vec{a}\cdot\vec{c} + 45\vec{b}\cdot\vec{c} + 18\vec{b}\cdot\vec{b} + 28\vec{c}\cdot\vec{c} = 10 +$$

$$+ 27 + 51 + 135 + 72 + 252 = 547.$$

<u>Векторное произведение векторов.</u>

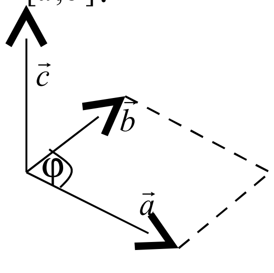
<u>Определение.</u> Векторным произведением векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется вектор $\vec{c}$, удовлетворяющий следующим условиям:

1) $|\vec{c}| = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\sin\varphi$, где φ - угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$,
$\sin\varphi \ge 0$; $0 \le \varphi \le \pi$

2) вектор $\vec{c}$ ортогонален векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$

3) $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ образуют правую тройку векторов.

Обозначается: $\vec{c} = \vec{a}\times\vec{b}$ или $\vec{c} = [\vec{a},\vec{b}]$.



Свойства векторного произведения векторов:

1) $\vec{b}\times\vec{a} = -\vec{a}\times\vec{b}$;
2) $\vec{a}\times\vec{b} = 0$, если $\vec{a}\,||\,\vec{b}$ или $\vec{a} = 0$ или $\vec{b} = 0$;
3) $(m\vec{a})\times\vec{b} = \vec{a}\times(m\vec{b}) = m(\vec{a}\times\vec{b})$;
4) $\vec{a}\times(\vec{b}+\vec{c}) = \vec{a}\times\vec{b} + \vec{a}\times\vec{c}$;
5) Если заданы векторы $\vec{a}\,(x_a, y_a, z_a)$ и $\vec{b}\,(x_b, y_b, z_b)$ в декартовой прямоугольной системе координат с единичными векторами $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$, то

$$\vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_a & y_a & z_a \\ x_b & y_b & z_b \end{vmatrix}$$

6) Геометрическим смыслом векторного произведения векторов является площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Пример. Найти векторное произведение векторов $\vec{a} = 2\vec{i} + 5\vec{j} + \vec{k}$ и $\vec{b} = \vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k}$.

$\vec{a} = (2, 5, 1)$; $\vec{b} = (1, 2, -3)$

$$\vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \end{vmatrix} = \vec{i}\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -17\vec{i} + 7\vec{j} - \vec{k}.$$

Пример. Вычислить площадь треугольника с вершинами A(2,2,2), B(4,0, 3), C(0, 1, 0).

$$\overrightarrow{AC} = (0-2; 1-2; 0-2) = (-2; -1; -2)$$

$$\overrightarrow{AB} = (4-2; 0-2; 3-2) = (2; -2; 1)$$

$$\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{AB} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & -1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix} = \vec{i}\begin{vmatrix} -1 & -2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} -2 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = \vec{i}(-1-4) - \vec{j}(-2+4) +$$

$$+\vec{k}(4+2) = -5\vec{i} - 2\vec{j} + 6\vec{k}.$$

$$\left|\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{25+4+36} = \sqrt{65}. \qquad S_\Delta = \frac{\sqrt{65}}{2}\ (\text{ед}^2).$$

Пример. Доказать, что векторы $\vec{a} = 7\vec{i} - 3\vec{j} + 2\vec{k}$, $\vec{b} = 3\vec{i} - 7\vec{j} + 8\vec{k}$ и $\vec{c} = \vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$ компланарны.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & -7 & 8 \\ 7 & -3 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & -4 & 5 \\ 0 & 4 & -5 \end{pmatrix},$$ т.к. векторы линейно зависимы, то они компланарны.

Пример. Найти площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}+3\vec{b};\quad 3\vec{a}+\vec{b}$, если $|\vec{a}|=|\vec{b}|=1;\quad \vec{a}\wedge\vec{b}=30^0$.

$$(\vec{a}+3\vec{b})\times(3\vec{a}+\vec{b})=3\vec{a}\times\vec{a}+\vec{a}\times\vec{b}+9\vec{b}\times\vec{a}+3\vec{b}\times\vec{b}=-\vec{b}\times\vec{a}+9\vec{b}\times\vec{a}=8\vec{b}\times\vec{a}$$

$S=8|\vec{b}||\vec{a}|\sin 30^0=4$ (ед^2).

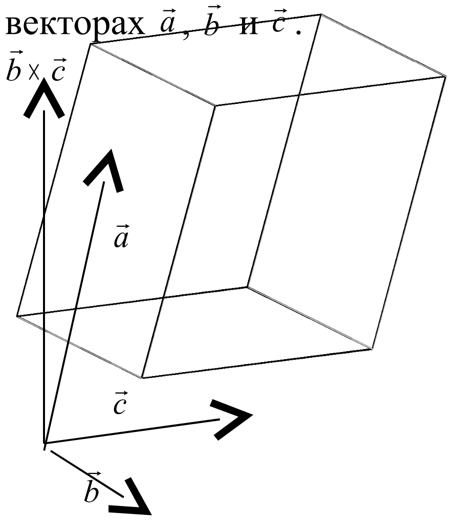
Лекция 4. Смешенное произведение векторов. Линейные операторы. Собственные векторы и собственные числа линейного оператора.

Смешанное произведение векторов.

Определение. Смешанным произведением векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ называется число, равное скалярному произведению вектора $\vec{a}$ на вектор, равный векторному произведению векторов $\vec{b}$ и $\vec{c}$.

Обозначается $\vec{a}\cdot\vec{b}\cdot\vec{c}$ или $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$.

Смешанное произведение $\vec{a}\cdot\vec{b}\cdot\vec{c}$ по модулю равно объему параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$.



Свойства смешанного произведения:

1)Смешанное произведение равно нулю, если:

а) хоть один из векторов равен нулю;

б) два из векторов коллинеарны;

в) векторы компланарны.

2) $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})$

3) $(\vec{a},\vec{b},\vec{c})=(\vec{b},\vec{c},\vec{a})=(\vec{c},\vec{a},\vec{b})=-(\vec{b},\vec{a},\vec{c})=-(\vec{c},\vec{b},\vec{a})=-(\vec{a},\vec{c},\vec{b})$

4) $(\lambda\vec{a}_1+\mu\vec{a}_2,\vec{b},\vec{c})=\lambda(\vec{a}_1,\vec{b},\vec{c})+\mu(\vec{a}_2,\vec{b},\vec{c})$

5) Объем треугольной пирамиды, образованной векторами $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$, равен

$$\frac{1}{6}\left|(\vec{a},\vec{b},\vec{c})\right|$$

6)Если $\vec{a}=(x_1,y_1,z_1)$, $\vec{b}=(x_2,y_2,z_2)$, $\vec{c}=(x_3,y_3,z_3)$, то

$$(\vec{a},\vec{b},\vec{c}) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$$

<u>Пример.</u> Доказать, что точки A(5; 7; 2), B(3; 1; -1), C(9; 4; -4), D(1; 5; 0) лежат в одной плоскости.

Найдем координаты векторов:

$$\overrightarrow{AB} = (-2;-6;1)$$
$$\overrightarrow{AC} = (4;-3;-2)$$
$$\overrightarrow{AD} = (-4;-2;2)$$

Найдем смешанное произведение полученных векторов:

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD} = \begin{vmatrix} -2 & -6 & 1 \\ 4 & -3 & -2 \\ -4 & -2 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & -6 & 1 \\ 0 & -15 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -6 & 1 \\ 0 & -15 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

Таким образом, полученные выше векторы компланарны, следовательно точки A, B, C и D лежат в одной плоскости.

<u>Пример.</u> Найти объем пирамиды и длину высоты, опущенной на грань BCD, если вершины имеют координаты A(0; 0; 1), B(2; 3; 5), C(6; 2; 3), D(3; 7; 2).

Найдем координаты векторов:

$$\overrightarrow{BA} = (-2;-3;-4)$$
$$\overrightarrow{BD} = (1;4;-3)$$
$$\overrightarrow{BC} = (4;-1;-2)$$

Объем пирамиды

$$V = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} -2 & -3 & -4 \\ 1 & 4 & -3 \\ 4 & -1 & -2 \end{vmatrix} = \frac{1}{6}(-2(-8-3)+3(-2+12)-4(-1-16)) =$$

$$= \frac{1}{6}(22+30+68) = 20(ед^3)$$

Для нахождения длины высоты пирамиды найдем сначала площадь основания BCD.

$$\overrightarrow{BD}\times\overrightarrow{BC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 4 & -3 \\ 4 & -1 & -2 \end{vmatrix} = \vec{i}(-8-3) - \vec{j}(-2+12) + \vec{k}(-1-16) = -11\vec{i} - 10\vec{j} - 17\vec{k}.$$

$$\left|\overrightarrow{BD}\times\overrightarrow{BC}\right| = \sqrt{11^2+10^2+17^2} = \sqrt{121+100+289} = \sqrt{510}$$

$S_{осн} = \sqrt{510}/2$ (ед^2)

Т.к. $V = \dfrac{S_{осн}\cdot h}{3}$; $\quad h = \dfrac{3V}{S_{осн}} = \dfrac{120}{\sqrt{510}} = \dfrac{4\sqrt{510}}{17}$. (ед)

Собственные значения и собственные векторы линейного преобразования.

Определение: Пусть L – заданное n- мерное линейное пространство. Ненулевой вектор $\bar{x} \in L$ называется **собственным вектором** линейного преобразования A, если существует такое число λ, что выполняется равенство: $A\bar{x} = \lambda\bar{x}$.

При этом число λ называется **собственным значением (характеристическим числом)** линейного преобразования A, соответствующего вектору $\bar{x}$.

Определение: Если линейное преобразование A в некотором базисе $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \ldots, \bar{e}_n$ имеет матрицу A = $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$, то собственные значения линейного преобразования A можно найти как корни $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ уравнения:

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

Это уравнение называется **характеристическим уравнением,** а его левая часть- **характеристическим многочленом** линейного преобразования A.

Следует отметить, что характеристический многочлен линейного преобразования не зависит от выбора базиса.

Рассмотрим частный случай. Пусть A – некоторое линейное преобразование плоскости, матрица которого равна $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$. Тогда преобразование A может быть задано формулами:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix}; \qquad \begin{cases} x_1' = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ x_2' = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \end{cases}$$

в некотором базисе $\bar{e}_1, \bar{e}_2$.

Если преобразование A имеет собственный вектор с собственным значением λ, то $A\bar{x} = \lambda\bar{x}$.

$$\begin{cases} x_1' = \lambda x_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ x_2' = \lambda x_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} (a_{11}-\lambda)x_1 + a_{12}x_2 = 0 \\ a_{21}x_1 + (a_{22}-\lambda)x_2 = 0 \end{cases}$$

Т.к. собственный вектор $\bar{x}$ ненулевой, то x_1 и x_2 не равны нулю одновременно. Т.к. данная система однородна, то для того, чтобы она имела нетривиальное решение, определитель системы должен быть равен нулю. В противном случае по правилу Крамера система имеет единственное решение – нулевое, что невозможно.

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = (a_{11} - \lambda)(a_{22} - \lambda) - a_{12}a_{21} = \lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})$$

Полученное уравнение является **характеристическим уравнением линейного преобразования А**.

Таким образом, можно найти собственный вектор $\bar{x}$ (x_1, x_2) линейного преобразования А с собственным значением λ, где λ - корень характеристического уравнения, а x_1 и x_2 – корни системы уравнений при подстановке в нее значения λ.

Понятно, что если характеристическое уравнение не имеет действительных корней, то линейное преобразование А не имеет собственных векторов.

Следует отметить, что если $\bar{x}$ - собственный вектор преобразования А, то и любой вектор ему коллинеарный – тоже собственный с тем же самым собственным значением λ.

Действительно, $A(k\bar{x}) = kA\bar{x} = k\lambda\bar{x} = \lambda(k\bar{x})$. Если учесть, что векторы имеют одно начало, то эти векторы образуют так называемое **собственное направление** или **собственную прямую**.

Т.к. характеристическое уравнение может иметь два различных действительных корня λ_1 и λ_2, то в этом случае при подстановке их в систему уравнений получим бесконечное количество решений. (Т.к. уравнения линейно зависимы). Это множество решений определяет две **собственные прямые**.

Если характеристическое уравнение имеет два равных корня $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$, то либо имеется лишь одна собственная прямая, либо, если при подстановке в систему она превращается в систему вида: $\begin{cases} 0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 = 0 \\ 0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 = 0 \end{cases}$.

Эта система удовлетворяет любым значениям x_1 и x_2. Тогда все векторы будут собственными, и такое преобразование называется **преобразованием подобия**.

<u>Пример.</u> Найти характеристические числа и собственные векторы линейного преобразования с матрицей А = $\begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.

Запишем линейное преобразование в виде: $\begin{matrix} x_1' = \lambda x_1 = 5x_1 + 4x_2 \\ x_2' = \lambda x_2 = 2x_1 + 3x_2 \end{matrix}$

Составим характеристическое уравнение:

$$\begin{vmatrix} 5 - \lambda & 4 \\ 2 & 3 - \lambda \end{vmatrix} = (5 - \lambda)(3 - \lambda) - 8 = 15 - 3\lambda - 5\lambda + \lambda^2 - 8 = 0$$

$$\lambda^2 - 8\lambda + 7 = 0;$$

Корни характеристического уравнения: $\lambda_1 = 7$; $\lambda_2 = 1$;

Для корня $\lambda_1 = 7$: $\begin{cases}(5-7)x_1 + 4x_2 = 0\\ 2x_1 + (3-7)x_2 = 0\end{cases}$ $\begin{cases}-2x_1 + 4x_2 = 0\\ 2x_1 - 4x_2 = 0\end{cases}$

Из системы получается зависимость: $x_1 - 2x_2 = 0$. Собственные векторы для первого корня характеристического уравнения имеют координаты: ***(t; 0,5t)*** где *t*- параметр.

Для корня $\lambda_2 = 1$: $\begin{cases}(5-1)x_1 + 4x_2 = 0\\ 2x_1 + (3-1)x_2 = 0\end{cases}$ $\begin{cases}4x_1 + 4x_2 = 0\\ 2x_1 + 2x_2 = 0\end{cases}$

Из системы получается зависимость: $x_1 + x_2 = 0$. Собственные векторы для второго корня характеристического уравнения имеют координаты: ***(t; -t)*** где *t*- параметр.

Полученные собственные векторы можно записать в виде:

$$\overrightarrow{u_1} = t(\overrightarrow{e_1} + 0{,}5\overrightarrow{e_2}); \quad \overrightarrow{u_2} = t(\overrightarrow{e_1} - \overrightarrow{e_2}).$$

<u>Пример.</u> Найти характеристические числа и собственные векторы линейного преобразования с матрицей A = $\begin{pmatrix}6 & -4\\ 4 & -2\end{pmatrix}$.

Запишем линейное преобразование в виде: $\begin{matrix}x_1' = \lambda x_1 = 6x_1 - 4x_2\\ x_2' = \lambda x_2 = 4x_1 - 2x_2\end{matrix}$

$$\begin{cases}(6-\lambda)x_1 - 4x_2 = 0\\ 4x_1 - (2+\lambda)x_2 = 0\end{cases}$$

Составим характеристическое уравнение:

$$\begin{vmatrix}6-\lambda & -4\\ 4 & -2-\lambda\end{vmatrix} = -(6-\lambda)(2+\lambda) + 16 = -12 - 6\lambda + 2\lambda + \lambda^2 + 16 = 0$$

$$\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0;$$

Корни характеристического уравнения: $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$;

Получаем: $\begin{cases}(6-2)x_1 - 4x_2 = 0\\ 4x_1 - 4x_2 = 0\end{cases}$

Из системы получается зависимость: $x_1 - x_2 = 0$. Собственные векторы для первого корня характеристического уравнения имеют координаты: ***(t; t)*** где *t*- параметр.

Собственный вектор можно записать: $\vec{u} = (\overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_2})t$.

Рассмотрим другой <u>частный случай</u>. Если $\bar{x}$ - собственный вектор линейного преобразования А, заданного в трехмерном линейном пространстве, а x_1, x_2, x_3 – компоненты этого вектора в некотором базисе $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}$, то $x_1' = \lambda x_1;\ x_2' = \lambda x_2;\ x_3' = \lambda x_3$, где λ - собственное значение (характеристическое число) преобразования А.

Если матрица линейного преобразования А имеет вид:

$$A = \begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{pmatrix}, \text{ то } \begin{cases}\lambda x_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3\\ \lambda x_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3\\ \lambda x_3 = a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3\end{cases}$$

Характеристическое уравнение: $\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-\lambda \end{vmatrix} = 0$

Раскрыв определитель, получим кубическое уравнение относительно λ. Любое кубическое уравнение с действительными коэффициентами имеет либо один, либо три действительных корня.

Тогда любое линейное преобразование в трехмерном пространстве имеет собственные векторы.

<u>Пример.</u> Найти характеристические числа и собственные векторы линейного преобразования А, матрица линейного преобразования $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Составим характеристическое уравнение:

$$\begin{cases} x_1' = \lambda x_1 = 1\cdot x_1 + 1\cdot x_2 + 3\cdot x_3 \\ x_2' = \lambda x_2 = 1\cdot x_1 + 5\cdot x_2 + 1\cdot x_3 \\ x_3' = \lambda x_3 = 3\cdot x_1 + 1\cdot x_2 + 1\cdot x_3 \end{cases} \qquad \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 3 \\ 1 & 5-\lambda & 1 \\ 3 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(1 - \lambda)((5 - \lambda)(1 - \lambda) - 1) - (1 - \lambda - 3) + 3(1 - 15 + 3\lambda) = 0$$
$$(1 - \lambda)(5 - 5\lambda - \lambda + \lambda^2 - 1) + 2 + \lambda - 42 + 9\lambda = 0$$
$$(1 - \lambda)(4 - 6\lambda + \lambda^2) + 10\lambda - 40 = 0$$
$$4 - 6\lambda + \lambda^2 - 4\lambda + 6\lambda^2 - \lambda^3 + 10\lambda - 40 = 0$$
$$-\lambda^3 + 7\lambda^2 - 36 = 0$$
$$-\lambda^3 + 9\lambda^2 - 2\lambda^2 - 36 = 0$$
$$-\lambda^2(\lambda + 2) + 9(\lambda^2 - 4) = 0$$
$$(\lambda + 2)(-\lambda^2 + 9\lambda - 18) = 0$$

Собственные значения: $\lambda_1 = -2$; $\lambda_2 = 3$; $\lambda_3 = 6$;

1) Для $\lambda_1 = -2$: $\begin{cases} (1+2)x_1 + x_2 + 3x_3 = 0 \\ x_1 + 7x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 + x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 + 7x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 + x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases}$

Если принять $x_1 = 1$, то $\begin{cases} 7x_2 + x_3 = -1 \\ x_2 + 3x_3 = -3 \end{cases} \Rightarrow x_2 = 0; \quad x_3 = -1;$

Собственные векторы: $\vec{u}_1 = (\vec{e}_1 - \vec{e}_3)\cdot t.$

2) Для $\lambda_2 = 3$: $\begin{cases} -2x_1 + x_2 + 3x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases}$

Если принять $x_1 = 1$, то $\begin{cases} 2x_2 + x_3 = -1 \\ x_2 - 2x_3 = -3 \end{cases}$ $\Rightarrow$ $x_2 = -1$; $x_3 = 1$;

Собственные векторы: $\overrightarrow{u_2} = (\overrightarrow{e_1} - \overrightarrow{e_2} + \overrightarrow{e_3}) \cdot t.$

3) Для $\lambda_3 = 6$: $\begin{cases} -5x_1 + x_2 + 3x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 + x_2 - 5x_3 = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 + x_2 - 5x_3 = 0 \end{cases}$

Если принять $x_1 = 1$, то $\begin{cases} -x_2 + x_3 = -1 \\ x_2 - 5x_3 = -3 \end{cases}$ $\Rightarrow$ $x_2 = 2$; $x_3 = 1$;

Собственные векторы: $\overrightarrow{u_3} = (\overrightarrow{e_1} + 2\overrightarrow{e_2} + \overrightarrow{e_3}) \cdot t.$

<u>Пример.</u> Найти характеристические числа и собственные векторы линейного преобразования А, матрица линейного преобразования А = $\begin{pmatrix} -3 & -2 & -4 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Составим характеристическое уравнение:

$$\begin{vmatrix} -3-\lambda & -2 & -4 \\ 2 & 1-\lambda & 2 \\ 1 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$-(3 + \lambda)((1 - \lambda)(2 - \lambda) - 2) + 2(4 - 2\lambda - 2) - 4(2 - 1 + \lambda) = 0$$
$$-(3 + \lambda)(2 - \lambda - 2\lambda + \lambda^2 - 2) + 2(2 - 2\lambda) - 4(1 + \lambda) = 0$$
$$-(3 + \lambda)(\lambda^2 - 3\lambda) + 4 - 4\lambda - 4 - 4\lambda = 0$$
$$-3\lambda^2 + 9\lambda - \lambda^3 + 3\lambda^2 - 8\lambda = 0$$
$$-\lambda^3 + \lambda = 0$$
$$\lambda_1 = 0; \quad \lambda_2 = 1; \quad \lambda_3 = -1;$$

Для $\lambda_1 = 0$: $\begin{cases} -3x_1 - 2x_2 - 4x_3 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} 2x_1 + x_2 = -2x_3 \\ x_1 + x_2 = -2x_3 \end{cases}$

Если принять $x_3 = 1$, получаем $x_1 = 0$, $x_2 = -2$

Собственные векторы $\overrightarrow{u_1} = (0 \cdot \overrightarrow{e_1} - 2 \cdot \overrightarrow{e_2} + 1 \cdot \overrightarrow{e_3}) \cdot t$, где t – параметр.

Аналогично можно найти $\overrightarrow{u_2}$ и $\overrightarrow{u_3}$ для λ_2 и λ_3

<u>Квадратичные формы.</u>

<u>Определение:</u> Однородный многочлен второй степени относительно переменных x_1 и x_2

$$\Phi(x_1, x_2) = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 ,$$

не содержащий свободного члена и неизвестных в первой степени, называется **квадратичной формой** переменных x_1 и x_2.

<u>Определение:</u> Однородный многочлен второй степени относительно переменных x_1, x_2 и x_3

$$\Phi(x_1, x_2, x_3) = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{23}x_2x_3 + 2a_{13}x_1x_3$$

не содержащий свободного члена и неизвестных в первой степени называется **квадратичной формой** переменных x_1, x_2 и x_3.

Рассмотрим квадратичную форму двух переменных. Квадратичная форма имеет симметрическую матрицу A = $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$. Определитель этой матрицы называется **определителем квадратичной формы**.

Пусть на плоскости задан ортогональный базис $\vec{e_1}, \vec{e_2}$. Каждая точка плоскости имеет в этом базисе координаты x_1, x_2.

Если задана квадратичная форма $\Phi(x_1, x_2) = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2$, то ее можно рассматривать как функцию от переменных x_1 и x_2.

<u>Приведение квадратичных форм к каноническому виду.</u>

Рассмотрим некоторое линейное преобразование A с матрицей $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$.

Это симметрическое преобразование можно записать в виде:

$$y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2$$
$$y_2 = a_{12}x_1 + a_{22}x_2$$

где y_1 и y_2 – координаты вектора $A\bar{x}$ в базисе $\vec{e_1}, \vec{e_2}$.

Очевидно, что квадратичная форма может быть записана в виде

$$\Phi(x_1, x_2) = x_1y_1 + x_2y_2.$$

Как видно, геометрический смысл числового значения квадратичной формы Φ в точке с координатами x_1 и x_2 – скалярное произведение $\bar{x} \cdot A\bar{x} = \Phi$.

Если взять другой ортонормированный базис на плоскости, то в нем квадратичная форма Φ будет выглядеть иначе, хотя ее числовое значение в каждой геометрической точке и не изменится. Если найти такой базис, в котором квадратичная форма не будет содержать координат в первой степени, а только координаты в квадрате, то квадратичную форму можно будет привести к каноническому виду.

Если в качестве базиса взять совокупность собственных векторов линейного преобразования, то в этом базисе матрица линейного преобразования имеет вид: $A' = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$.

При переходе к новому базису от переменных x_1 и x_2 мы переходим к переменным x_1' и x_2'.

$$\Phi = x_1'y_1' + x_2'y_2'$$

Имеем: $y_1' = a_{11}'x_1' + a_{12}'x_2'$

$$y_2' = a_{12}'x_1' + a_{22}'x_2'$$

Следовательно, $y_1' = \lambda_1 x_1', \qquad y_2' = \lambda_2 x_2'.$

Выражение $\Phi(x_1', x_2') = \lambda_1 (x_1')^2 + \lambda_2 (x_2')^2$ называется **каноническим видом** квадратичной формы. Аналогично можно привести к каноническому виду квадратичную форму с большим числом переменных.

Теория квадратичных форм используется для приведения к каноническому виду уравнений кривых и поверхностей второго порядка.

<u>Пример.</u> Привести к каноническому виду квадратичную форму

$$\Phi(x_1, x_2) = 27x_1^2 - 10x_1x_2 + 3x_2^2.$$

Коэффициенты: $a_{11} = 27$, $a_{12} = 5$, $a_{22} = 3$.

Составим характеристическое уравнение: $\begin{vmatrix} 27-\lambda & 5 \\ 5 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0$;

$$(27 - \lambda)(3 - \lambda) – 25 = 0$$

$$\lambda^2 - 30\lambda + 56 = 0$$

$$\lambda_1 = 2; \quad \lambda_2 = 28;$$

$$\Phi(x_1', x_2') = 2x_1'^2 + 28x_2'^2$$

<u>Пример.</u> Привести к каноническому виду уравнение второго порядка:

$$17x^2 + 12xy + 8y^2 – 20 = 0.$$

Коэффициенты $a_{11} = 17$, $a_{12} = 6$, $a_{22} = 8$. $\quad A = \begin{pmatrix} 17 & 6 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}$

Составим характеристическое уравнение: $\begin{vmatrix} 17-\lambda & 6 \\ 6 & 8-\lambda \end{vmatrix} = 0$

$$(17 - \lambda)(8 - \lambda) - 36 = 0$$

$$136 - 8\lambda - 17\lambda + \lambda^2 – 36 = 0$$

$$\lambda^2 - 25\lambda + 100 = 0$$

$$\lambda_1 = 5, \quad \lambda_2 = 20.$$

Итого: $5(x')^2 + 20(y')^2 - 20 = 0$; $\quad \frac{x'^2}{4} + \frac{y'^2}{1} = 1$ - каноническое уравнение эллипса.

<u>Пример</u>. Используя теорию квадратичных форм, привести к каноническому виду уравнение линии второго порядка. Схематично изобразить график.

$$5x^2 + 2\sqrt{3}xy + 3y^2 - 6 = 0$$

<u>Решение:</u> Составим характеристическое уравнение квадратичной формы $5x^2 + 2\sqrt{3}xy + 3y^2$: при $a_{11} = 5, a_{12} = \sqrt{3}, a_{22} = 3$.

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 - \lambda & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 3 - \lambda \end{vmatrix} = 15 - 3\lambda - 5\lambda + \lambda^2 - 3 = \lambda^2 - 8\lambda + 12 = 0$$

Решив это уравнение, получим $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 6$.

Найдем координаты собственных векторов:

$$\begin{cases} (a_{11} - \lambda_1)m_1 + a_{12}n_1 = 0 \\ a_{12}m_1 + (a_{22} - \lambda_1)n_1 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 3m_1 + \sqrt{3}n_1 = 0 \\ \sqrt{3}m_1 + n_1 = 0 \end{cases}$$ полагая $m_1 = 1$, получим $n_1 = -\sqrt{3}$

$$\begin{cases} (a_{11} - \lambda_2)m_2 + a_{12}n_2 = 0 \\ a_{12}m_2 + (a_{22} - \lambda_2)n_2 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} -m_2 + \sqrt{3}n_2 = 0 \\ \sqrt{3}m_2 - 3n_2 = 0 \end{cases}$$ полагая $m_2 = 1$, получим $n_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}$

Собственные векторы: $\bar{u}_1(1; -\sqrt{3})$ $\bar{u}_2(1; \frac{1}{\sqrt{3}})$

$$|\bar{u}_1| = \sqrt{1 + 3} = 2; \qquad |\bar{u}_2| = \sqrt{1 + \frac{1}{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

Находим координаты единичных векторов нового базиса.

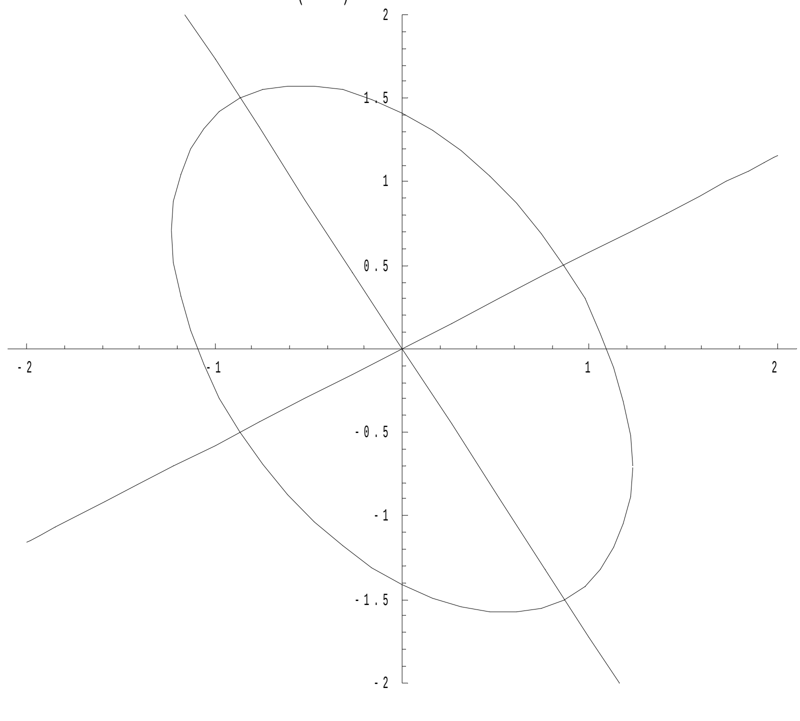
$$\vec{e}_1 = \left(\frac{1}{2}; -\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \qquad \vec{e}_2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2}\right)$$

Имеем следующее уравнение линии в новой системе координат:

$$2(x')^2 + 6(y')^2 = 6$$

Каноническое уравнение линии в новой системе координат будет иметь вид:

$$\frac{(x')^2}{\left(\sqrt{3}\right)^2} + \frac{(y')^2}{1^2} = 1$$



Пример. Используя теорию квадратичных форм, привести к каноническому виду уравнение линии второго порядка. Схематично изобразить график.

$$5x^2 + 4\sqrt{6}xy + 7y^2 - 22 = 0$$

Решение: Составим характеристическое уравнение квадратичной формы $5x^2 + 4\sqrt{6}xy + 7y^2$: при $a_{11} = 5, a_{12} = 2\sqrt{6}, a_{22} = 7.$

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 - \lambda & 2\sqrt{6} \\ 2\sqrt{6} & 7 - \lambda \end{vmatrix} = 35 - 7\lambda - 5\lambda + \lambda^2 - 24 = \lambda^2 - 12\lambda + 11 = 0$$

Решив это уравнение, получим $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 11$.

Найдем координаты собственных векторов:

$$\begin{cases} (a_{11} - \lambda_1)m_1 + a_{12}n_1 = 0 \\ a_{12}m_1 + (a_{22} - \lambda_1)n_1 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 2m_1 + \sqrt{6}n_1 = 0 \\ \sqrt{6}m_1 + 3n_1 = 0 \end{cases}$$ полагая $m_1 = 1$, получим $n_1 = -\frac{2}{\sqrt{6}}$

$$\begin{cases} (a_{11} - \lambda_2)m_2 + a_{12}n_2 = 0 \\ a_{12}m_2 + (a_{22} - \lambda_2)n_2 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} -3m_2 + \sqrt{6}n_2 = 0 \\ \sqrt{6}m_2 - 2n_2 = 0 \end{cases}$$ полагая $m_2 = 1$, получим $n_2 = \frac{3}{\sqrt{6}}$

Собственные векторы: $\bar{u}_1(1; -\sqrt{\frac{2}{3}})$ $\quad \bar{u}_2(1; \sqrt{\frac{3}{2}})$

$$|\bar{u}_1| = \sqrt{1 + \frac{2}{3}} = \sqrt{\frac{5}{3}}; \qquad |\bar{u}_2| = \sqrt{1 + \frac{3}{2}} = \sqrt{\frac{5}{2}}$$

Находим координаты единичных векторов нового базиса.

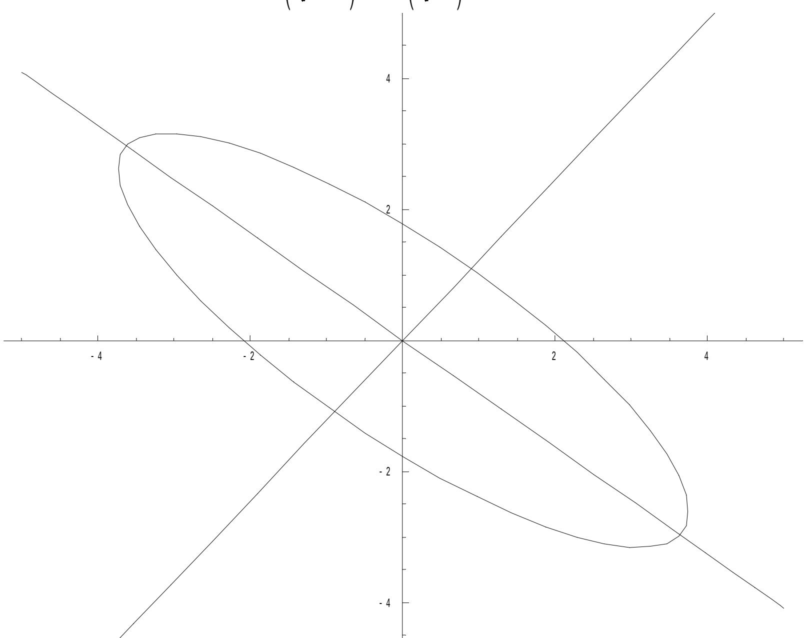
$$\vec{e}_1' = \left(\sqrt{\frac{3}{5}}; -\sqrt{\frac{2}{5}}\right) \qquad \vec{e}_2' = \left(\sqrt{\frac{2}{5}}; \sqrt{\frac{3}{5}}\right)$$

Имеем следующее уравнение линии в новой системе координат:

$$(x')^2 + 11(y')^2 = 22$$

Каноническое уравнение линии в новой системе координат будет иметь вид:

$$\frac{(x')^2}{\left(\sqrt{22}\right)^2} + \frac{(y')^2}{\left(\sqrt{2}\right)^2} = 1$$



Пример. Используя теорию квадратичных форм, привести к каноническому виду уравнение линии второго порядка. Схематично изобразить график.

$$4xy + 3y^2 + 16 = 0$$

Коэффициенты: $a_{11} = 0$; $a_{12} = 2$; $a_{22} = 3$.

Характеристическое уравнение: $\begin{vmatrix} 0-\lambda & 2 \\ 2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = -3\lambda + \lambda^2 - 4 = 0$

Корни: $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 4$.

Для $\lambda_1 = -1$

$$\begin{cases} 1\cdot m_1 + 2n_1 = 0 \\ 2m_1 + 4n_1 = 0 \end{cases}$$

$m_1 = 1$; $n_1 = -0{,}5$;

$\vec{u_1} = (1; -0{,}5)$

$$|\vec{u_1}| = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$\vec{e_1'} = \frac{\vec{u_1}}{|\vec{u_1}|} = \left(\frac{2}{\sqrt{5}}; -\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$$

Для $\lambda_2 = 4$

$$\begin{cases} -4m_2 + 2n_2 = 0 \\ 2m_2 - n_2 = 0 \end{cases}$$

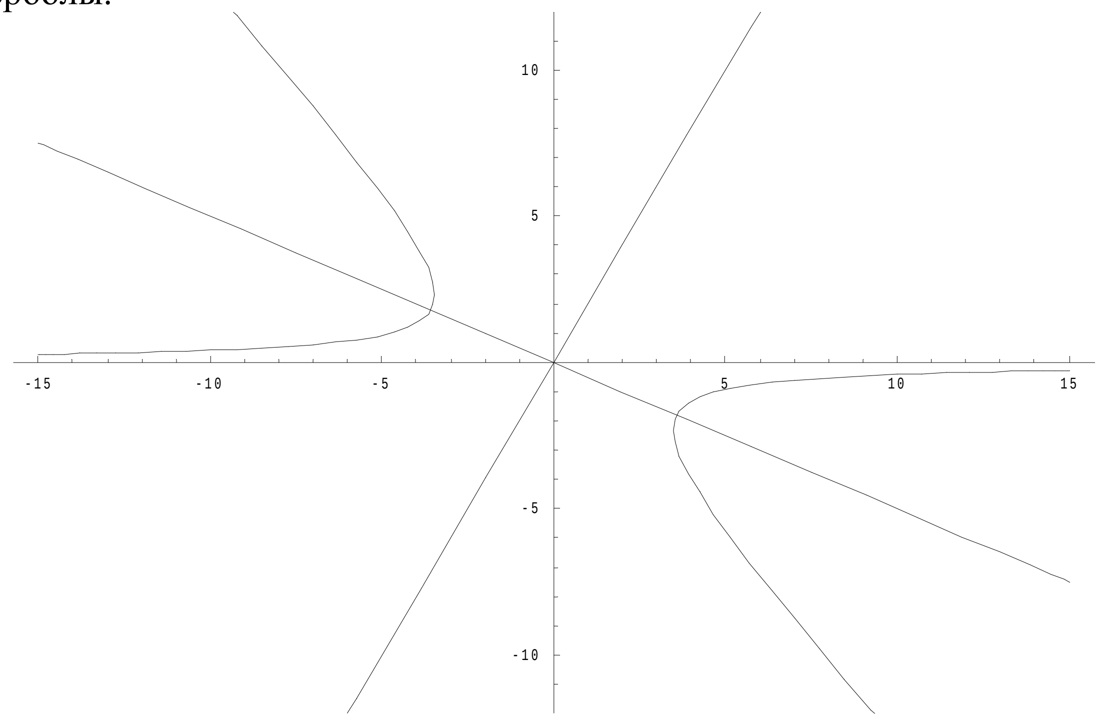
$m_2 = 1$; $n_2 = 2$;

$\vec{u_2} = (1; 2)$

$$|\vec{u_2}| = \sqrt{5}$$

$$\vec{e_2'} = \frac{\vec{u_2}}{|\vec{u_2}|} = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}; \frac{2}{\sqrt{5}}\right)$$

Получаем: $-x'^2 + 4y'^2 = -16$; $\frac{x'^2}{16} - \frac{y'^2}{4} = 1$ -каноническое уравнение гиперболы.



Лекция 5. Уравнения линии на плоскости. Различные уравнения прямой на плоскости.

Уравнение линии на плоскости.

Как известно, любая точка на плоскости определяется двумя координатами в какой- либо системе координат. Системы координат могут быть различными в зависимости от выбора базиса и начала координат.

Определение. Уравнением линии называется соотношение y = f(x) между координатами точек, составляющих эту линию.

Отметим, что уравнение линии может быть выражено параметрическим способом, то есть каждая координата каждой точки выражается через некоторый независимый параметр *t*.

Характерный пример – траектория движущейся точки. В этом случае роль параметра играет время.

Уравнение прямой на плоскости.

Определение. Любая прямая на плоскости может быть задана уравнением первого порядка

$$Ax + By + C = 0,$$

причем постоянные А, В не равны нулю одновременно, т.е. $A^2 + B^2 \neq 0$. Это уравнение первого порядка называют **общим уравнением прямой.**

В зависимости от значений постоянных А,В и С возможны следующие частные случаи:

- $C = 0, A \neq 0, B \neq 0$ – прямая проходит через начало координат
- $A = 0, B \neq 0, C \neq 0$ $\{ By + C = 0\}$- прямая параллельна оси Ох
- $B = 0, A \neq 0, C \neq 0$ $\{ Ax + C = 0\}$ – прямая параллельна оси Оу
- $B = C = 0, A \neq 0$ – прямая совпадает с осью Оу
- $A = C = 0, B \neq 0$ – прямая совпадает с осью Ох

Уравнение прямой может быть представлено в различном виде в зависимости от каких – либо заданных начальных условий.

Уравнение прямой по точке и вектору нормали.

Определение. В декартовой прямоугольной системе координат вектор с компонентами (А, В) перпендикулярен прямой , заданной уравнением Ах + Ву + С = 0.

Пример. Найти уравнение прямой, проходящей через точку А(1, 2) перпендикулярно вектору $\vec{n}$(3, -1).

Составим при A = 3 и B = -1 уравнение прямой: 3x – y + C = 0. Для нахождения коэффициента С подставим в полученное выражение координаты заданной точки А.
Получаем: 3 – 2 + C = 0, следовательно С = -1.
Итого: искомое уравнение: 3x – y – 1 = 0.

Уравнение прямой, проходящей через две точки.

Пусть в пространстве заданы две точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$, тогда уравнение прямой, проходящей через эти точки:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}$$

Если какой- либо из знаменателей равен нулю, следует приравнять нулю соответствующий числитель.

На плоскости записанное выше уравнение прямой упрощается:

$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$ если $x_1 \neq x_2$ и $x = x_1$, если $x_1 = x_2$.

Дробь $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = k$ называется **угловым коэффициентом** прямой.

Пример. Найти уравнение прямой, проходящей через точки А(1, 2) и В(3, 4).

Применяя записанную выше формулу, получаем: $y - 2 = \frac{4 - 2}{3 - 1}(x - 1),\ x - y + 1 = 0$

Уравнение прямой по точке и угловому коэффициенту.

Если общее уравнение прямой Ах + Ву + С = 0 привести к виду:

$$y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}$$

и обозначить $-\frac{A}{B} = k;\ \ -\frac{C}{B} = b;\ \ т.е.\ \ y = kx + b$, то полученное уравнение называется **уравнением прямой с угловым коэффициентом k**.

Уравнение прямой по точке и направляющему вектору.

По аналогии с пунктом, рассматривающим уравнение прямой через вектор нормали можно ввести задание прямой через точку и направляющий вектор прямой.

Определение. Каждый ненулевой вектор $\vec{a}(\alpha_1, \alpha_2)$, компоненты которого удовлетворяют условию $A\alpha_1 + B\alpha_2 = 0$ называется направляющим вектором прямой Ах + Ву + С = 0.

Пример. Найти уравнение прямой с направляющим вектором $\vec{a}(1, -1)$ и проходящей через точку A(1, 2).

Уравнение искомой прямой будем искать в виде: Ax + By + C = 0. В соответствии с определением, коэффициенты должны удовлетворять условиям: $1\cdot A + (-1)\cdot B = 0$, т.е. A = B.

Тогда уравнение прямой имеет вид: Ax + Ay + C = 0, или x + y + C/A = 0.

при x = 1, y = 2 получаем C/A = -3, т.е. искомое уравнение:

$$x + y - 3 = 0$$

Уравнение прямой в отрезках.

Если в общем уравнении прямой Ax + By + C = 0 $C \neq 0$, то, разделив на –C, получим: $-\frac{A}{C}x - \frac{B}{C}y = 1$ или $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$, где $a = -\frac{C}{A}$; $b = -\frac{C}{B}$

Геометрический смысл коэффициентов в том, что коэффициент *a* является координатой точки пересечения прямой с осью Ох, а *b* – координатой точки пересечения прямой с осью Оу.

Пример. Задано общее уравнение прямой x – y + 1 = 0. Найти уравнение этой прямой в отрезках.

$$C = 1,\ -\frac{x}{1} + \frac{y}{1} = 1, \qquad a = -1,\ \ b = 1.$$

Нормальное уравнение прямой.

Если обе части уравнения Ax + By + C = 0 разделить на число $\mu = \pm\frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2}}$, которое называется **нормирующем множителем**, то получим

$$x\cos\varphi + y\sin\varphi - p = 0$$ – нормальное уравнение прямой.

Знак ± нормирующего множителя надо выбирать так, чтобы $\mu\cdot C < 0$.

р – длина перпендикуляра, опущенного из начала координат на прямую, а φ - угол, образованный этим перпендикуляром с положительным направлением оси Ох.

Пример. Дано общее уравнение прямой 12x – 5y – 65 = 0. Требуется написать различные типы уравнений этой прямой.

уравнение этой прямой в отрезках:

$$\frac{12}{65}x - \frac{5}{65}y = 1$$

$$\frac{x}{(65/12)} + \frac{y}{(-13)} = 1$$

уравнение этой прямой с угловым коэффициентом: (делим на 5)

$$y = \frac{12}{5}x - \frac{65}{5} = \frac{12}{5}x - 13.$$ нормальное уравнение прямой:

$$\mu = \frac{1}{\sqrt{12^2 + (-5)^2}} = \frac{1}{13} \qquad \frac{12}{13}x - \frac{5}{13}y - 5 = 0; \qquad \cos\varphi = 12/13;\ \sin\varphi = -5/13;\ p = 5.$$

Следует отметить, что не каждую прямую можно представить уравнением в отрезках, например, прямые, параллельные осям или проходящие через начало координат.

Пример. Прямая отсекает на координатных осях равные положительные отрезки. Составить уравнение прямой, если площадь треугольника, образованного этими отрезками равна 8 см^2.

Уравнение прямой имеет вид: $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$, $a = b = 1$; $ab/2 = 8$; $a = 4; -4$.

$a = -4$ не подходит по условию задачи. Откуда: $\frac{x}{4} + \frac{y}{4} = 1$ или $x + y - 4 = 0$.

Пример. Составить уравнение прямой, проходящей через точку A(-2, -3) и начало координат.

Уравнение прямой имеет вид: $\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$, где $x_1 = y_1 = 0$; $x_2 = -2$; $y_2 = -3$.

$$\frac{x - 0}{-2 - 0} = \frac{y - 0}{-3 - 0}; \qquad \frac{x}{-2} = \frac{y}{-3}; \qquad 3x - 2y = 0.$$

Угол между прямыми на плоскости.

Определение. Если заданы две прямые $y = k_1x + b_1$, $y = k_2x + b_2$, то острый угол между этими прямыми будет определяться как

$$tg\alpha = \left|\frac{k_2 - k_1}{1 + k_1k_2}\right|.$$

Две прямые параллельны, если $k_1 = k_2$.
Две прямые перпендикулярны, если $k_1 = -1/k_2$.

Теорема. *Прямые $Ax + By + C = 0$ и $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ параллельны, когда пропорциональны коэффициенты $A_1 = \lambda A$, $B_1 = \lambda B$. Если еще и $C_1 = \lambda C$, то прямые совпадают.*

Координаты точки пересечения двух прямых находятся как решение системы уравнений этих прямых.

Уравнение прямой, проходящей через данную точку перпендикулярно данной прямой.

Определение. Прямая, проходящая через точку $M_1(x_1, y_1)$ и перпендикулярная к прямой $y = kx + b$ представляется уравнением:

$$y - y_1 = -\frac{1}{k}(x - x_1)$$

Расстояние от точки до прямой.

Теорема. *Если задана точка M(x_0, y_0), то расстояние до прямой Ax + By + C =0 определяется как*

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Доказательство. Пусть точка $M_1(x_1, y_1)$ – основание перпендикуляра, опущенного из точки М на заданную прямую. Тогда расстояние между точками М и M_1:

$$d = \sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2} \qquad (1)$$

Координаты x_1 и y_1 могут быть найдены как решение системы уравнений:

$$\begin{cases} Ax + By + C = 0 \\ A(y - y_0) - B(x - x_0) = 0 \end{cases}$$

Второе уравнение системы – это уравнение прямой, проходящей через заданную точку M_0 перпендикулярно заданной прямой.

Если преобразовать первое уравнение системы к виду:

$$A(x – x_0) + B(y – y_0) + Ax_0 + By_0 + C = 0,$$

то, решая, получим:

$$x - x_0 = -\frac{A}{A^2 + B^2}(Ax_0 + By_0 + C),$$

$$y - y_0 = -\frac{B}{A^2 + B^2}(Ax_0 + By_0 + C)$$

Подставляя эти выражения в уравнение (1), находим:

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Пример. Определить угол между прямыми: y = -3x + 7; y = 2x + 1.

$k_1 = -3$; $k_2 = 2$ $\quad tg\varphi = \left|\frac{2 - (-3)}{1 - (-3)2}\right| = 1$; $\varphi = \pi/4$.

Пример. Показать, что прямые 3x – 5y + 7 = 0 и 10x + 6y – 3 = 0 перпендикулярны.

Находим: $k_1 = 3/5$, $k_2 = -5/3$, $k_1k_2 = -1$, следовательно, прямые перпендикулярны.

Пример. Даны вершины треугольника A(0; 1), B(6; 5), C(12; -1). Найти уравнение высоты, проведенной из вершины С.

Находим уравнение стороны АВ: $\frac{x - 0}{6 - 0} = \frac{y - 1}{5 - 1}$; $\frac{x}{6} = \frac{y - 1}{4}$; 4x = 6y – 6;

2x – 3y + 3 = 0; $y = \frac{2}{3}x + 1$.

Искомое уравнение высоты имеет вид: Ax + By + C = 0 или y = kx + b.

$k = -\frac{3}{2}$. Тогда $y = -\frac{3}{2}x + b$. Т.к. высота проходит через точку С, то ее координаты удовлетворяют данному уравнению: $-1 = -\frac{3}{2}12 + b,$ откуда b = 17. Итого: $y = -\frac{3}{2}x + 17$.

Ответ: 3x + 2y – 34 = 0.

Лекция 6. Кривые второго порядка. Окружность, эллипс, гипербола, парабола, и их геометрические свойства. Полярная система координат.

Кривые второго порядка.

Кривая второго порядка может быть задана уравнением

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0.$$

Существует система координат (не обязательно декартова прямоугольная), в которой данное уравнение может быть представлено в одном из видов, приведенных ниже.

1) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ - уравнение эллипса.
2) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1$ - уравнение “мнимого” эллипса.
3) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ - уравнение гиперболы.
4) $a^2x^2 – c^2y^2 = 0$ – уравнение двух пересекающихся прямых.
5) $y^2 = 2px$ – уравнение параболы.
6) $y^2 – a^2 = 0$ – уравнение двух параллельных прямых.
7) $y^2 + a^2 = 0$ – уравнение двух “мнимых” параллельных прямых.
8) $y^2 = 0$ – пара совпадающих прямых.
9) $(x – a)^2 + (y – b)^2 = R^2$ – уравнение окружности.

Окружность.

В окружности $(x – a)^2 + (y – b)^2 = R^2$ центр имеет координаты (a; b).

Пример. Найти координаты центра и радиус окружности, если ее уравнение задано в виде:

$$2x^2 + 2y^2 – 8x + 5y – 4 = 0.$$

Для нахождения координат центра и радиуса окружности данное уравнение необходимо привести к виду, указанному выше в п.9. Для этого выделим полные квадраты:

$$x^2 + y^2 – 4x + 2{,}5y – 2 = 0$$
$$x^2 – 4x + 4 –4 + y^2 + 2{,}5y + 25/16 – 25/16 – 2 = 0$$
$$(x – 2)^2 + (y + 5/4)^2 – 25/16 – 6 = 0$$

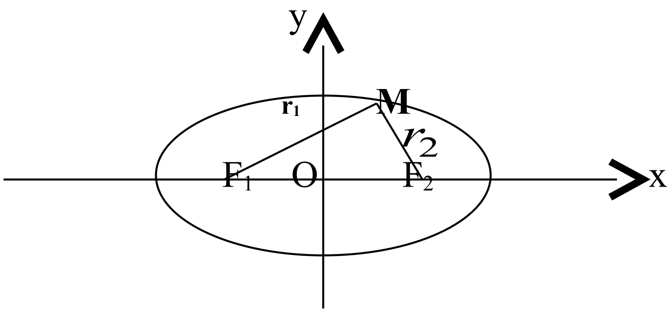
$$(x - 2)^2 + (y + 5/4)^2 = 121/16$$

Отсюда находим O(2; -5/4);   R = 11/4.

Эллипс.

Определение. **Эллипсом** называется кривая, заданная уравнением $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Определение. **Фокусами** называются такие две точки, сумма расстояний от которых до любой точки эллипса есть постоянная величина.



F_1, F_2 – фокусы. $F_1 = (c; 0)$; $F_2(-c; 0)$

c – половина расстояния между фокусами;

a – большая полуось;

b – малая полуось.

Теорема. *Фокусное расстояние и полуоси эллипса связаны соотношением:* $a^2 = b^2 + c^2$.

Определение. Форма эллипса определяется характеристикой, которая является отношением фокусного расстояния к большей оси и называется **эксцентриситетом**. $e = c/a$.

Т.к. $c < a$, то $e < 1$.

Определение. Величина $k = b/a$ называется **коэффициентом сжатия** эллипса, а величина $1 - k = (a - b)/a$ называется **сжатием** эллипса.

Коэффициент сжатия и эксцентриситет связаны соотношением: $k^2 = 1 - e^2$.

Если $a = b$ ($c = 0$, $e = 0$, фокусы сливаются), то эллипс превращается в окружность.

Если для точки $M(x_1, y_1)$ выполняется условие: $\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} < 1$, то она находится внутри эллипса, а если $\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} > 1$, то точка находится вне эллипса.

Теорема. *Для произвольной точки M(x, y), принадлежащей эллипсу верны соотношения*: $r_1 = a - ex$, $r_2 = a + ex$.

Прямые: $x = a/e$; $x = -a/e$., называются **директрисами**.

<u>Теорема.</u> *Для того, чтобы точка лежала на эллипсе, необходимо и достаточно, чтобы отношение расстояния до фокуса к расстоянию до соответствующей директрисы равнялось эксцентриситету е.*

<u>Пример.</u> Составить уравнение прямой, проходящей через левый фокус и нижнюю вершину эллипса, заданного уравнением: $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$.

1) Координаты нижней вершины: $x = 0$; $y^2 = 16$; $y = -4$.
2) Координаты левого фокуса: $c^2 = a^2 - b^2 = 25 - 16 = 9$; $c = 3$; $F_2(-3; 0)$.
3) Уравнение прямой, проходящей через две точки:

$$\frac{x - 0}{-3 - 0} = \frac{y + 4}{0 + 4}; \qquad \frac{x}{-3} = \frac{y + 4}{4}; \qquad 4x = -3y - 12; \qquad 4x + 3y + 12 = 0$$

<u>Пример.</u> Составить уравнение эллипса, если его фокусы $F_1(0; 0)$, $F_2(1; 1)$, большая ось равна 2.

Уравнение эллипса имеет вид: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Расстояние между фокусами:

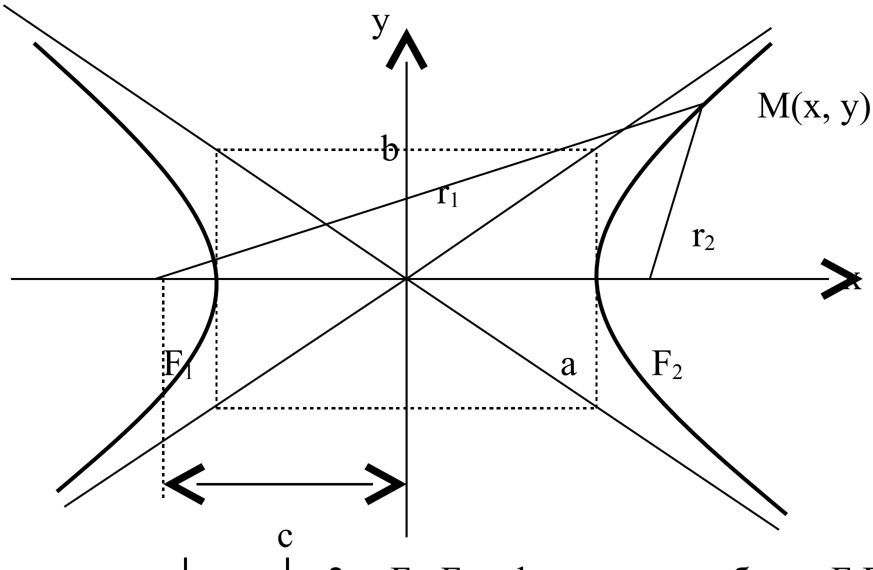
$2c = \sqrt{(1 - 0)^2 + (1 - 0)^2} = \sqrt{2}$, таким образом, $a^2 - b^2 = c^2 = ½$

по условию $2a = 2$, следовательно $a = 1$, $b = \sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{1 - 1/2} = \sqrt{2}/2$.

Итого: $\frac{x^2}{1^2} + \frac{y^2}{1/2} = 1$.

<u>Гипербола.</u>

<u>Определение.</u> **Гиперболой** называется множество точек плоскости, для которых модуль разности расстояний от двух данных точек, называемых **фокусами** есть величина постоянная, меньшая расстояния между фокусами.



По определению $|r_1 - r_2| = 2a$. F_1, F_2 – фокусы гиперболы. $F_1F_2 = 2c$. Выберем на гиперболе произвольную точку $M(x, y)$. Тогда:

$$r_1 = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$$
$$r_2 = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$
$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a$$
$$(x+c)^2 + y^2 = 4a^2 + 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x-c)^2 + y^2$$
$$4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = -4a^2 + 4xc$$
$$a^2(x-c)^2 + a^2y^2 = a^4 - 2a^2xc + x^2c^2$$
$$a^2x^2 - 2a^2xc + a^2c^2 + a^2y^2 = a^4 - 2a^2xc + x^2c^2$$
$$a^2x^2 + a^2c^2 + a^2y^2 - a^4 - x^2c^2 = 0$$
$$-x^2(c^2 - a^2) + a^2(c^2 - a^2) + a^2y^2 = 0$$
$$x^2(c^2 - a^2) - a^2y^2 = a^2(c^2 - a^2)$$

обозначим $c^2 - a^2 = b^2$ (геометрически эта величина – меньшая полуось)

$$a^2b^2 = b^2x^2 - a^2y^2$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Получили каноническое уравнение гиперболы.

Гипербола симметрична относительно середины отрезка, соединяющего фокусы и относительно осей координат.

Ось 2a называется действительной осью гиперболы.

Ось 2b называется мнимой осью гиперболы.

Гипербола имеет две асимптоты, уравнения которых $y = \pm \frac{b}{a}x.$

<u>Определение.</u> Отношение $e = \frac{c}{a} > 1$ называется **эксцентриситетом** гиперболы, где с – половина расстояния между фокусами, а – действительная полуось.

С учетом того, что $c^2 - a^2 = b^2$:

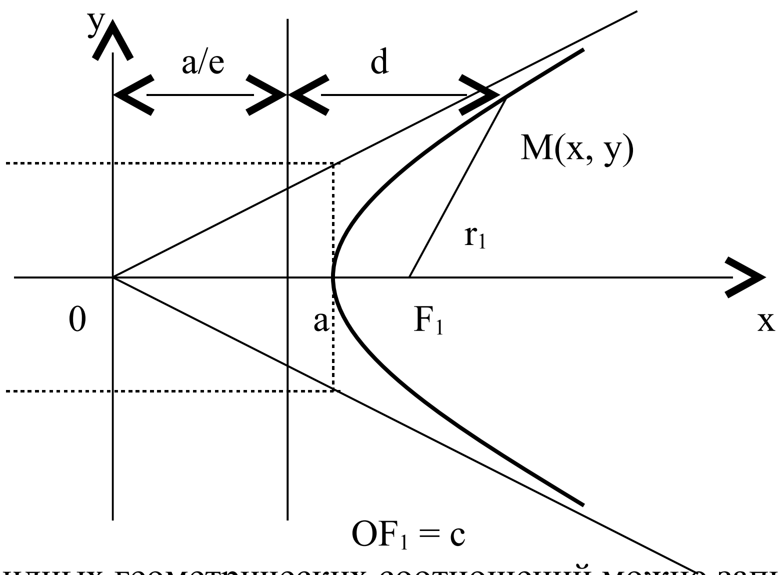
$$e^2 = \frac{c^2}{a^2} = \frac{a^2 + b^2}{a^2} = \frac{b^2}{a^2}$$
$$\frac{b}{a} = \sqrt{e^2 - 1}$$

Если a = b, e = $\sqrt{2}$, то гипербола называется **равнобочной (равносторонней).**

<u>Определение.</u> Две прямые, перпендикулярные действительной оси гиперболы и расположенные симметрично относительно центра на расстоянии a/e от него, называются **директрисами** гиперболы. Их уравнения: $x = \pm \frac{a}{e}$.

<u>Теорема.</u> *Если r – расстояние от произвольной точки М гиперболы до какого- либо фокуса, d – расстояние от той же точки до* *соответствующей этому фокусу директрисы, то отношение r/d – величина постоянная, равная эксцентриситету.*

Доказательство. Изобразим схематично гиперболу.



Из очевидных геометрических соотношений можно записать:
a/e + d = x, следовательно d = x – a/e.
$(x - c)^2 + y^2 = r^2$

Из канонического уравнения: $y^2 = \frac{x^2b^2}{a^2} - b^2$, с учетом $b^2 = c^2 - a^2$:

$$r^2 = x^2 - 2xc + c^2 + \frac{x^2b^2}{a^2} - b^2 =$$

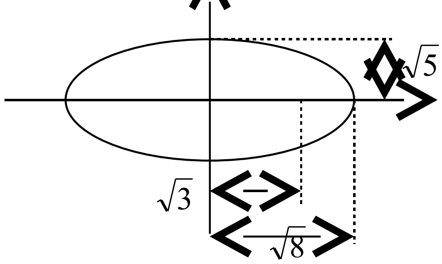
$$= x^2 - 2xc + c^2 + \frac{c^2x^2}{a^2} - x^2 - c^2 + a^2 = \left(\frac{c}{a}x - a\right)^2$$

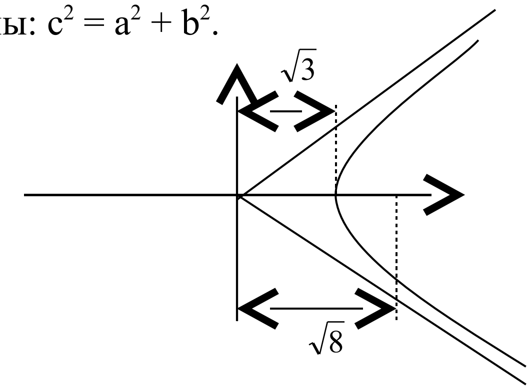
$r = \frac{c}{a}x - a$. Тогда т.к. c/a = e, то r = ex – a, то: $\frac{r}{d} = \frac{ex - a}{x - \frac{a}{e}} = e$.

Для левой ветви гиперболы доказательство аналогично.

Пример. Найти уравнение гиперболы, вершины и фокусы которой находятся в соответствующих вершинах и фокусах эллипса $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{5} = 1$.

Для эллипса: $c^2 = a^2 - b^2$. Для гиперболы: $c^2 = a^2 + b^2$.





Уравнение гиперболы: $\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{5} = 1$.

Пример. Составить уравнение гиперболы, если ее эксцентриситет равен 2, а фокусы совпадают с фокусами эллипса с уравнением $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$.

Находим фокусное расстояние $c^2 = 25 - 9 = 16$.

Для гиперболы: $c^2 = a^2 + b^2 = 16$, $e = c/a = 2$; $c = 2a$; $c^2 = 4a^2$; $a^2 = 4$;

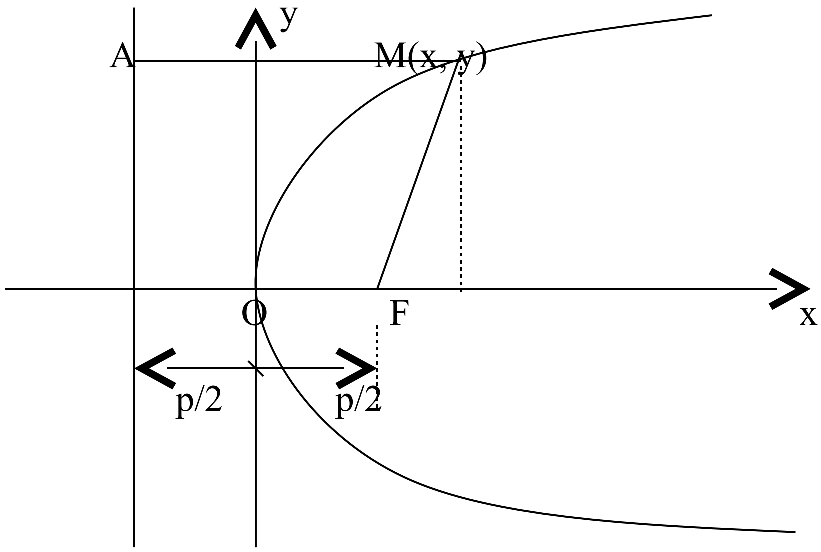
$b^2 = 16 - 4 = 12$.

Итого: $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{12}=1$ - искомое уравнение гиперболы.

Парабола.

Определение. Параболой называется множество точек плоскости, каждая из которых находится на одинаковом расстоянии от данной точки, называемой фокусом, и от данной прямой, называемой директрисой и не проходящей через фокус.

Расположим начало координат посередине между фокусом и директрисой.



Величина p (расстояние от фокуса до директрисы) называется **параметром** параболы. Выведем каноническое уравнение параболы.

Из геометрических соотношений: AM = MF; AM = x + p/2;

$$MF^2 = y^2 + (x - p/2)^2$$

$$(x + p/2)^2 = y^2 + (x - p/2)^2$$

$$x^2 + xp + p^2/4 = y^2 + x^2 - xp + p^2/4$$

$$y^2 = 2px$$

Уравнение директрисы: $x = -p/2$.

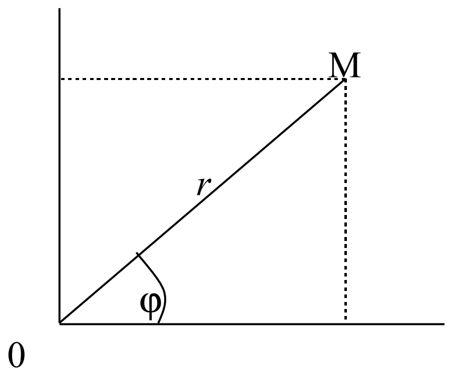
Пример. На параболе $y^2 = 8x$ найти точку, расстояние которой от директрисы равно 4.

Из уравнения параболы получаем, что p = 4.
$r = x + p/2 = 4$; следовательно:
$x = 2$; $y^2 = 16$; $y = \pm 4$. Искомые точки: $M_1(2; 4)$, $M_2(2; -4)$.

Полярная система координат.

Определение. Точка О называется **полюсом**, а луч l – **полярной осью.**

Суть задания какой- либо системы координат на плоскости состоит в том, чтобы каждой точке плоскости поставить в соответствие пару действительных чисел, определяющих положение этой точки на плоскости. В случае полярной системы координат роль этих чисел играют расстояние точки от полюса и угол между полярной осью и радиус– вектором этой точки. Этот угол φ называется **полярным углом**.



$$r = |\overrightarrow{OM}|$$

Можно установить связь между полярной системой координат и декартовой прямоугольной системой, если поместить начало декартовой прямоугольной системы в полюс, а полярную ось направить вдоль положительного направления оси Ох.

Тогда координаты произвольной точки в двух различных системах координат связываются соотношениями:

$$x = r\cos\varphi; \qquad y = r\sin\varphi; \qquad x^2 + y^2 = r^2$$

Пример. Уравнение кривой в полярной системе координат имеет вид: $r = \dfrac{4}{3 - \cos\varphi}$. Найти уравнение кривой в декартовой прямоугольной системе координат, определит тип кривой, найти фокусы и эксцентриситет. Схематично построить кривую.

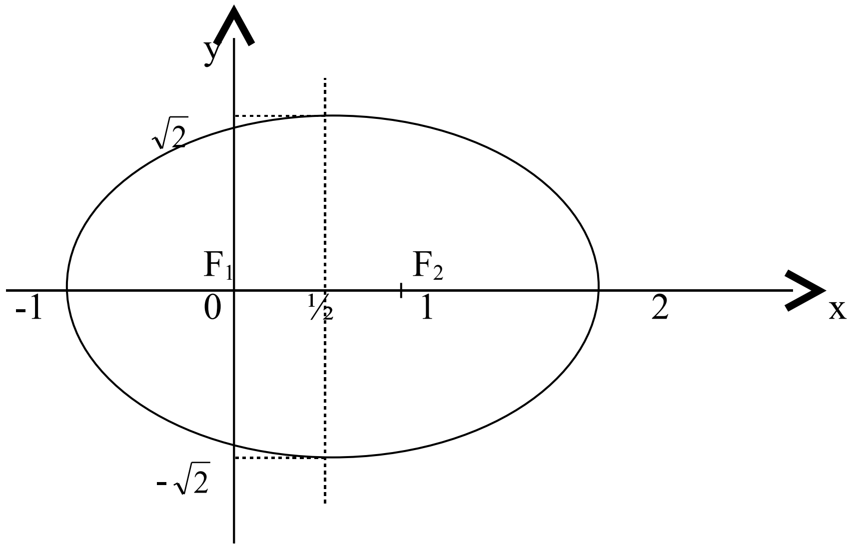
Воспользуемся связью декартовой прямоугольной и полярной системы координат: $r = \sqrt{x^2 + y^2}$; $\cos\varphi = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$; $\sqrt{x^2 + y^2} = \dfrac{4}{3 - \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}}$

$$3\sqrt{x^2 + y^2} - x = 4, \quad 3\sqrt{x^2 + y^2} = x + 4, \quad 9x^2 + 9y^2 = 16 + 8x + x^2, \; 8x^2 - 8x + 9y^2 - 16 = 0$$

$$8(x^2 - x + 1/4) - 8 \cdot 1/4 + 9y^2 - 16 = 0$$

$$8(x-1/2)^2-2+9y^2-16=0$$
$$8(x-1/2)^2+9y^2=18$$
$$\frac{(x-1/2)^2}{9/4}+\frac{y^2}{2}=1$$

Получили каноническое уравнение эллипса. Из уравнения видно, что центр эллипса сдвинут вдоль оси Ох на 1/2 вправо, большая полуось а равна 3/2, меньшая полуось b равна $\sqrt{2}$, половина расстояния между фокусами равно с = $\sqrt{a^2-b^2}$ = 1/2. Эксцентриситет равен е = с/а = 1/3. Фокусы $F_1(0; 0)$ и $F_2(1; 0)$.



<u>Пример.</u> Уравнение кривой в полярной системе координат имеет вид: $r=\dfrac{9}{4-5\cos\varphi}$. Найти уравнение кривой в декартовой прямоугольной системе координат, определит тип кривой, найти фокусы и эксцентриситет. Схематично построить кривую.

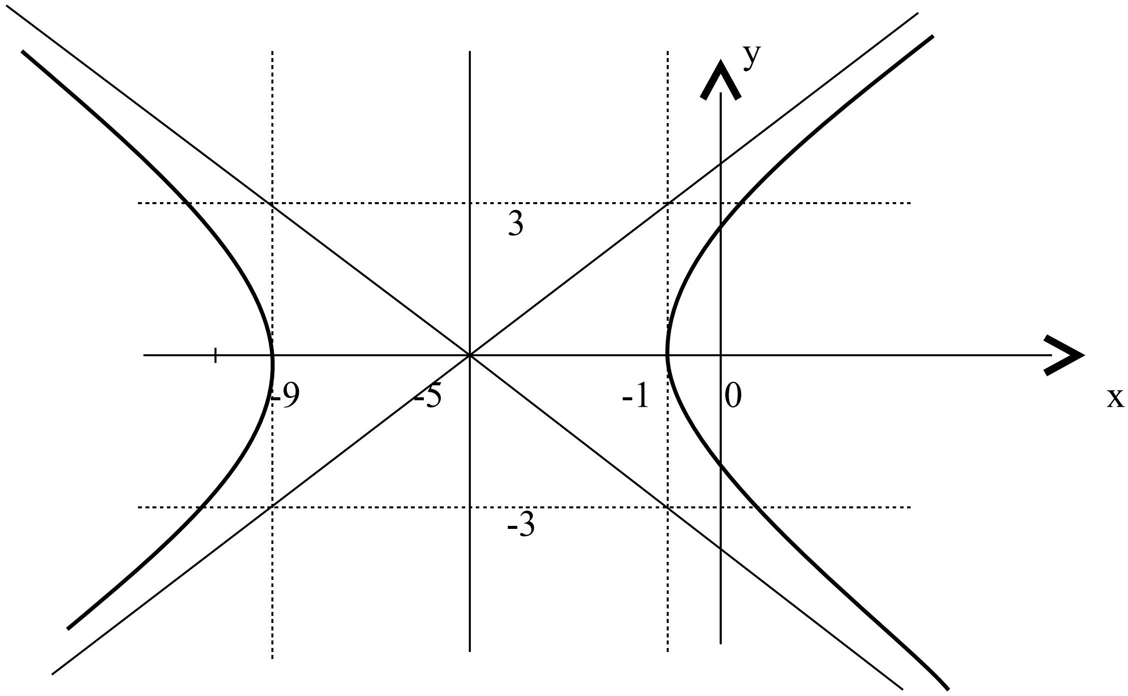
Подставим в заданное уравнение формулы, связывающие полярную и декартову прямоугольную системы координат.

$$\sqrt{x^2+y^2}=\frac{9}{4-\dfrac{5x}{\sqrt{x^2+y^2}}}$$
$$4\sqrt{x^2+y^2}-5x=9$$
$$4\sqrt{x^2+y^2}=5x+9$$
$$16x^2+16y^2=81+90x+25x^2$$
$$9x^2+90x-16y^2+81=0$$
$$9(x^2+10x+25-25)-16y^2+81=0$$
$$9(x+5)^2-225-16y^2+81=0$$
$$9(x+5)^2-16y^2=144$$
$$\frac{(x+5)^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$$

Получили каноническое уравнение гиперболы. Из уравнения видно, что гипербола сдвинута вдоль оси Ox на 5 влево, большая полуось a равна 4, меньшая полуось b равна 3, откуда получаем $c^2 = a^2 + b^2$; c = 5;   e = c/a = 5/4.

Фокусы $F_1(-10; 0)$, $F_2(0; 0)$.

Построим график этой гиперболы.



Лекция 7. Плоскость в пространстве. Различные виды уравнений, условия параллельности и перпендикулярности.

Уравнение линии в пространстве.

Как на плоскости, так и в пространстве, любая линия может быть определена как совокупность точек, координаты которых в некоторой выбранной в пространстве системе координат удовлетворяют уравнению:

$$F(x, y, z) = 0.$$

Это уравнение называется уравнением линии в пространстве.

Кроме того, линия в пространстве может быть определена и иначе. Ее можно рассматривать как линию пересечения двух поверхностей, каждая из которых задана каким- либо уравнением.

Пусть F(x, y, z) = 0 и Ф(x, y, z) = 0 – уравнения поверхностей, пересекающихся по линии L.

Тогда пару уравнений $\begin{cases} F(x,y,z) = 0 \\ \Phi(x,y,z) = 0 \end{cases}$ назовем **уравнением линии в пространстве**.

Уравнение поверхности в пространстве.

Определение. Любое уравнение, связывающее координаты x, y, z любой точки поверхности является уравнением этой поверхности.

Общее уравнение плоскости.

Определение. Плоскостью называется поверхность, все точки которой удовлетворяют общему уравнению: Ax + By + Cz + D = 0, где A, B, C – координаты вектора $\vec{N} = A\vec{i} + B\vec{j} + C\vec{k}$ -вектор **нормали** к плоскости.

Возможны следующие частные случаи:
A = 0 – плоскость параллельна оси Ox
B = 0 – плоскость параллельна оси Oy
C = 0 – плоскость параллельна оси Oz
D = 0 – плоскость проходит через начало координат
A = B = 0 – плоскость параллельна плоскости xOy
A = C = 0 – плоскость параллельна плоскости xOz
B = C = 0 – плоскость параллельна плоскости yOz
A = D = 0 – плоскость проходит через ось Ox
B = D = 0 – плоскость проходит через ось Oy
C = D = 0 – плоскость проходит через ось Oz
A = B = D = 0 – плоскость совпадает с плоскостью xOy
A = C = D = 0 – плоскость совпадает с плоскостью xOz
B = C = D = 0 – плоскость совпадает с плоскостью yOz

Уравнение плоскости, проходящей через три точки.

Для того, чтобы через три какие- либо точки пространства можно было провести единственную плоскость, необходимо, чтобы эти точки не лежали на одной прямой.

Рассмотрим точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$, $M_3(x_3, y_3, z_3)$ в общей декартовой системе координат.

Для того, чтобы произвольная точка M(x, y, z) лежала в одной плоскости с точками M_1, M_2, M_3 необходимо, чтобы векторы $\overrightarrow{M_1M_2}, \overrightarrow{M_1M_3}, \overrightarrow{M_1M}$ были компланарны.

$$(\overrightarrow{M_1M_2}, \overrightarrow{M_1M_3}, \overrightarrow{M_1M}) = 0$$

$$\overrightarrow{M_1M} = \{x - x_1; y - y_1; z - z_1\}$$

Таким образом, $\overrightarrow{M_1M_2} = \{x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1\}$

$$\overrightarrow{M_1M_3} = \{x_3 - x_1; y_3 - y_1; z_3 - z_1\}$$

Уравнение плоскости, проходящей через три точки: $\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0$

Уравнение плоскости по двум точкам и вектору, коллинеарному плоскости.

Пусть заданы точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$ и вектор $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$**.** Составим уравнение плоскости, проходящей через данные точки M_1 и M_2 и произвольную точку $M(x, y, z)$ параллельно вектору $\vec{a}$.

Векторы $\begin{matrix} \overrightarrow{M_1M} = \{x - x_1; y - y_1; z - z_1\} \\ \overrightarrow{M_1M_2} = \{x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1\} \end{matrix}$ и вектор $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ должны быть компланарны, т.е. $(\overrightarrow{M_1M}, \overrightarrow{M_1M_2}, \vec{a}) = 0$

Уравнение плоскости: $\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix} = 0$

Уравнение плоскости по одной точке и двум векторам, коллинеарным плоскости.

Пусть заданы два вектора $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ и $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$, коллинеарные плоскости. Тогда для произвольной точки $M(x, y, z)$, принадлежащей плоскости, векторы $\vec{a}, \vec{b}, \overrightarrow{MM_1}$ должны быть компланарны.

Уравнение плоскости: $\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = 0$

Уравнение плоскости по точке и вектору нормали.

Теорема. *Если в пространстве задана точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$, то уравнение плоскости, проходящей через точку M_0 перпендикулярно вектору нормали $\vec{N}$ (A, B, C) имеет вид:* $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$.

Доказательство. Для произвольной точки $M(x, y, z)$, принадлежащей плоскости, составим вектор $\overrightarrow{M_0M} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$. Т.к. вектор $\vec{N}$ - вектор нормали, то он перпендикулярен плоскости, а, следовательно, перпендикулярен и вектору $\overrightarrow{M_0M}$. Тогда скалярное произведение

$$\overrightarrow{M_0M} \cdot \vec{N} = 0$$

Таким образом, получаем уравнение плоскости $A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$

Уравнение плоскости в отрезках.

Если в общем уравнении Ах + Ву + Сz + D = 0 поделить обе части на (-D) $\neq 0$ $-\frac{A}{D}x-\frac{B}{D}y-\frac{C}{D}z-1=0$, заменив $-\frac{D}{A}=a,\quad -\frac{D}{B}=b,\quad -\frac{D}{C}=c$, получим уравнение плоскости в отрезках: $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$

Числа a, b, c являются точками пересечения плоскости соответственно с осями x, y, z.

Уравнение плоскости в векторной форме.

$\vec{r}\cdot\vec{n}=p,$ где $\vec{r}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$ - радиус- вектор текущей точки М(х, у, z),
$\vec{n}=\vec{i}\cos\alpha+\vec{j}\cos\beta+\vec{k}\cos\gamma$ - единичный вектор, имеющий направление, перпендикуляра, опущенного на плоскость из начала координат.
α, β и γ - углы, образованные этим вектором с осями x, y, z.
p – длина этого перпендикуляра.

В координатах это уравнение имеет вид: $x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0$.

Расстояние от точки до плоскости.

Расстояние от произвольной точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ до плоскости Ах+Ву+Сz+D=0 равно: $d=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$

Пример. Найти уравнение плоскости, зная, что точка Р(4; -3; 12) – основание перпендикуляра, опущенного из начала координат на эту плоскость.

$$\overrightarrow{OP}=(4;-3;12);\qquad |\overrightarrow{OP}|=\sqrt{16+9+144}=\sqrt{169}=13$$

$$\overrightarrow{N}=(\frac{4}{13};-\frac{3}{13};\frac{12}{13})$$

Таким образом, А = 4/13; В = -3/13; С = 12/13, воспользуемся формулой:

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0.$$

$$\frac{4}{13}(x-4)-\frac{3}{13}(y+3)+\frac{12}{13}(z-12)=0$$

$$\frac{4}{13}x-\frac{16}{13}-\frac{3}{13}y-\frac{9}{13}+\frac{12}{13}z-\frac{144}{13}=0$$

$$\frac{4}{13}x-\frac{3}{13}y+\frac{12}{13}z-\frac{169}{13}=0$$

$$4x-3y+12z-169=0.$$

Пример. Найти уравнение плоскости, проходящей через две точки P(2; 0; -1) и Q(1; -1; 3) перпендикулярно плоскости 3x + 2y – z + 5 = 0.

Вектор нормали к плоскости 3x + 2y – z + 5 = 0 $\overrightarrow{N} = (3;2;-1)$ параллелен искомой плоскости.

Получаем:

$$\begin{vmatrix} x-2 & y-0 & z+1 \\ 1-2 & -1-0 & 3+1 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} x-2 & y & z+1 \\ -1 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

$$(x-2)(1-8) - y(1-12) + (z+1)(-2+3) = 0$$

$$-7(x-2) + 11y + (z+1) = 0$$

$$-7x + 14 + 11y + z + 1 = 0$$

$$-7x + 11y + z + 15 = 0$$

Пример. Найти уравнение плоскости, проходящей через точки A(2,–1, 4) и B(3, 2, -1) перпендикулярно плоскости $x + y + 2z - 3 = 0$.

Искомое уравнение плоскости имеет вид: Ax + By + Cz + D = 0, вектор нормали к этой плоскости $\overrightarrow{n_1}$(A, B, C). Вектор $\overrightarrow{AB}$(1, 3, -5) принадлежит плоскости. Заданная нам плоскость, перпендикулярная искомой имеет вектор нормали $\overrightarrow{n_2}$(1, 1, 2). Т.к. точки А и В принадлежат обеим плоскостям, а плоскости взаимно перпендикулярны, то

$$\overrightarrow{n_1} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{n_2} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 3 & -5 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \vec{i}\begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} 1 & -5 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 11\vec{i} - 7\vec{j} - 2\vec{k}.$$

Таким образом, вектор нормали $\overrightarrow{n_1}$(11, -7, -2). Т.к. точка А принадлежит искомой плоскости, то ее координаты должны удовлетворять уравнению этой плоскости, т.е. $11\cdot 2 + 7\cdot 1 - 2\cdot 4 + D = 0$; $D = -21$.

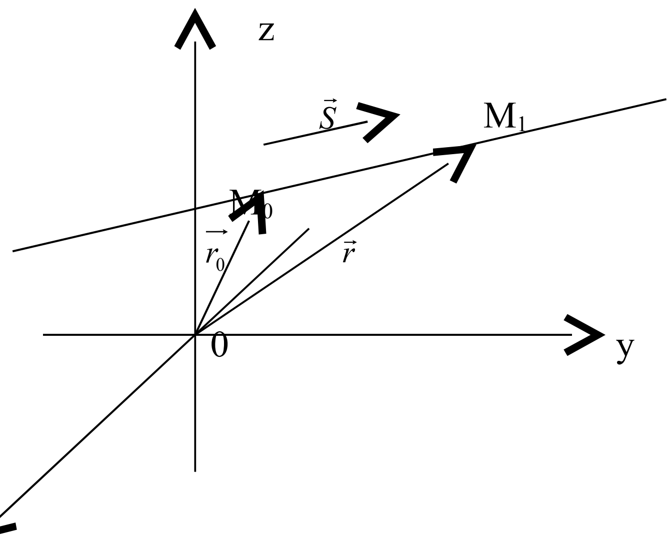
Итого, получаем уравнение плоскости: $11x - 7y - 2z - 21 = 0$.

Лекция 8. Прямая в пространстве. Различные ее уравнения. Взаимное расположение прямой и плоскости.

Уравнение прямой в пространстве по точке и направляющему вектору.

Возьмем произвольную прямую и вектор $\vec{S}$(m, n, p), параллельный данной прямой. Вектор $\vec{S}$ называется **направляющим вектором** прямой.

На прямой возьмем две произвольные точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и M(x, y, z).



Обозначим радиус- векторы этих точек как $\vec{r_0}$ и $\vec{r}$, очевидно, что $\vec{r}$ - $\vec{r_0}$ = $\overrightarrow{M_0M}$.

Т.к. векторы $\overrightarrow{M_0M}$ и $\vec{S}$ коллинеарны, то верно соотношение $\overrightarrow{M_0M} = \vec{S}$t, где t – некоторый параметр.

Итого, можно записать: $\vec{r} = \vec{r_0} + \vec{S}$t.

Т.к. этому уравнению удовлетворяют координаты любой точки прямой, то полученное уравнение – **параметрическое уравнение прямой**.

Это векторное уравнение может быть представлено в координатной форме: $\begin{cases} x = x_0 + mt \\ y = y_0 + nt \\ z = z_0 + pt \end{cases}$

Преобразовав эту систему и приравняв значения параметра t, получаем канонические уравнения прямой в пространстве: $\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}$.

<u>Определение.</u> Направляющими косинусами прямой называются направляющие косинусы вектора $\vec{S}$, которые могут быть вычислены по формулам: $\cos\alpha = \frac{m}{\sqrt{m^2 + n^2 + p^2}}$; $\cos\beta = \frac{n}{\sqrt{m^2 + n^2 + p^2}}$; $\cos\gamma = \frac{p}{\sqrt{m^2 + n^2 + p^2}}$.

Отсюда получим: m : n : p = cosα : cosβ : cosγ.

Числа m, n, p называются **угловыми коэффициентами** прямой. Т.к. $\vec{S}$- ненулевой вектор, то m, n и p не могут равняться нулю одновременно, но одно или два из этих чисел могут равняться нулю. В этом случае в уравнении прямой следует приравнять нулю соответствующие числители.

Уравнение прямой в пространстве, проходящей через две точки.

Если на прямой в пространстве отметить две произвольные точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$, то координаты этих точек должны удовлетворять полученному выше уравнению прямой: $\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1}=\dfrac{y-y_1}{y_2-y_1}=\dfrac{z-z_1}{z_2-z_1}$

Общие уравнения прямой в пространстве.

Уравнение прямой может быть рассмотрено как уравнение линии пересечения двух плоскостей: $\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{cases}$

Практическая задача часто состоит в приведении уравнений прямых в общем виде к каноническому виду.

Для этого надо найти произвольную точку прямой и числа m, n, p.

При этом направляющий вектор прямой может быть найден как векторное произведение векторов нормали к заданным плоскостям.

$$\vec{S}=\overrightarrow{N_1}\times\overrightarrow{N_2}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix}=\vec{i}\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}-\vec{j}\begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ A_2 & C_2 \end{vmatrix}+\vec{k}\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}=\vec{i}m+\vec{j}n+\vec{k}p.$$

Пример. Найти каноническое уравнение, если прямая задана в виде:

$$\begin{cases} 2x-y+3z-1=0 \\ 5x+4y-z-7=0 \end{cases}$$

Для нахождения произвольной точки прямой, примем ее координату x = 0, а затем подставим это значение в заданную систему уравнений.

$$\begin{cases} y=3z-1 \\ 4y-z-7=0 \end{cases}\quad \begin{cases} y=3z-1 \\ 12z-4-z-7=0 \end{cases}\quad \begin{cases} y=3z-1 \\ z=1 \end{cases}\quad \begin{cases} y=2 \\ z=1 \end{cases}$$, т.е. A(0, 2, 1).

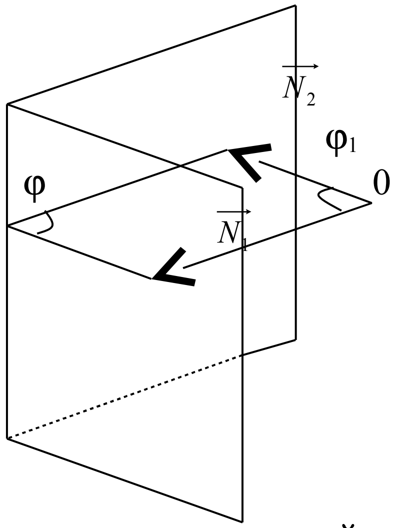
Находим компоненты направляющего вектора прямой.

$$m=\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 4 & -1 \end{vmatrix}=-11;\quad n=-\begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ A_2 & C_2 \end{vmatrix}=-\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & -1 \end{vmatrix}=17;\quad p=\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 5 & 4 \end{vmatrix}=13.$$

Тогда канонические уравнения прямой:

$$-\frac{x}{11}=\frac{y-2}{17}=\frac{z-1}{13}.$$

Угол между плоскостями.



Угол между векторами нормали найдем из их скалярного произведения: $\cos\varphi_1 = \dfrac{\overrightarrow{N_1}\cdot\overrightarrow{N_2}}{\left|\overrightarrow{N_1}\right|\left|\overrightarrow{N_2}\right|}$.

Таким образом, угол между плоскостями находится по формуле:

$$\cos\varphi = \pm\frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}$$

Выбор знака косинуса зависит от того, какой угол между плоскостями следует найти – острый, или смежный с ним тупой.

Условия параллельности и перпендикулярности плоскостей.

На основе полученной выше формулы для нахождения угла между плоскостями можно найти условия параллельности и перпендикулярности плоскостей.

Для того, чтобы плоскости были перпендикулярны необходимо и достаточно, чтобы косинус угла между плоскостями равнялся нулю. Это условие выполняется, если: $A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$.

Плоскости параллельны, векторы нормалей коллинеарны: $\overrightarrow{N_1} \,||\, \overrightarrow{N_2}$.Это условие выполняется, если: $\dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2} = \dfrac{C_1}{C_2}$.

Угол между прямыми в пространстве.

Пусть в пространстве заданы две прямые. Их параметрические уравнения:

$$l_1:\quad \vec{r} = \overrightarrow{r_1} + \overrightarrow{S_1}t$$

$$l_2: \quad \vec{r} = \overrightarrow{r_2} + \overrightarrow{S_2}t$$

$\vec{r} = (x, y, z)$; $\overrightarrow{r_1} = (x_1, y_1, z_1)$; $\overrightarrow{r_2} = (x_2, y_2, z_2)$; $\overrightarrow{S_1} = (m_1, n_1, p_1)$; $\overrightarrow{S_2} = (m_2, n_2, p_2)$.

Угол между направляющими векторами находится из скалярного произведения. Таким образом: $\cos\varphi = \pm\dfrac{\overrightarrow{S_1}\cdot\overrightarrow{S_2}}{\left|\overrightarrow{S_1}\right|\left|\overrightarrow{S_2}\right|} = \pm\dfrac{m_1m_2 + n_1n_2 + p_1p_2}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2 + p_1^2}\sqrt{m_2^2 + n_2^2 + p_2^2}}$.

Условия параллельности и перпендикулярности прямых в пространстве.

Чтобы две прямые были параллельны необходимо и достаточно, чтобы направляющие векторы этих прямых были коллинеарны, т.е. их соответствующие координаты были пропорциональны.

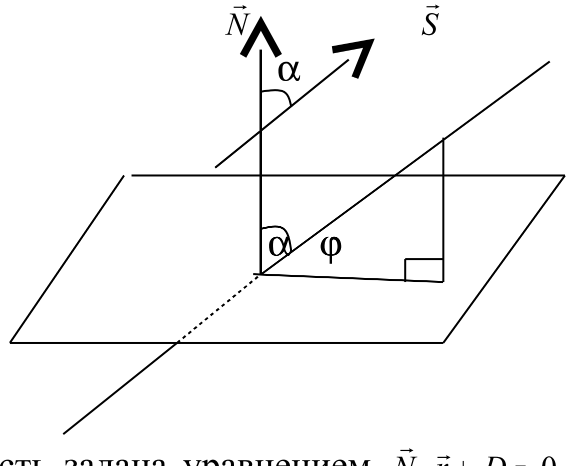
$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{p_1}{p_2}$$

Чтобы две прямые были перпендикулярны необходимо и достаточно, чтобы направляющие векторы этих прямых были перпендикулярны, т.е. косинус угла между ними равен нулю.

$$m_1m_2 + n_1n_2 + p_1p_2 = 0$$

Угол между прямой и плоскостью.

Определение. Углом между прямой и плоскостью называется любой угол между прямой и ее проекцией на эту плоскость.



Пусть плоскость задана уравнением $\vec{N}\cdot\vec{r} + D = 0$, а прямая - $\vec{r} = \overrightarrow{r_0} + \vec{S}t$. Из геометрических соображений (см. рис.) видно, что угол $\alpha = 90^0 - \varphi$, где α - угол между векторами $\vec{N}$ и $\vec{S}$. Этот угол может быть найден по формуле:

$$\cos\alpha = \frac{\vec{N}\cdot\vec{S}}{\left|\vec{N}\right|\left|\vec{S}\right|}$$

$$\sin\varphi = \pm\cos\alpha = \pm\frac{\vec{N}\cdot\vec{S}}{\left|\vec{N}\right|\left|\vec{S}\right|}$$

В координатной форме: $\sin\varphi = \pm \dfrac{Am + Bn + Cp}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\sqrt{m^2 + n^2 + p^2}}$

Условия параллельности и перпендикулярности прямой и плоскости в пространстве.

Для того, чтобы прямая и плоскость были параллельны, необходимо и достаточно, чтобы вектор нормали к плоскости и направляющий вектор прямой были перпендикулярны. Для этого необходимо, чтобы их скалярное произведение было равно нулю.

$$\vec{N} \perp \vec{S}, \quad \vec{N}\cdot\vec{S} = 0, \quad \sin\varphi = 0, \qquad Am + Bn + Cp = 0.$$

Для того, чтобы прямая и плоскость были перпендикулярны, необходимо и достаточно, чтобы вектор нормали к плоскости и направляющий вектор прямой были коллинеарны. Это условие выполняется, если векторное произведение этих векторов было равно нулю.

$$\vec{N} \times \vec{S} = 0; \qquad \frac{A}{m} = \frac{B}{n} = \frac{C}{p}$$

Лекция 9. Поверхности в пространстве.

Поверхности второго порядка.

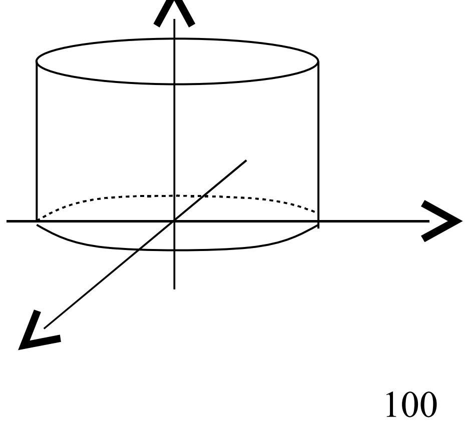
Определение. Поверхности второго порядка – это поверхности, уравнения которых в прямоугольной системе координат являются уравнениями второго порядка.

Цилиндрические поверхности.

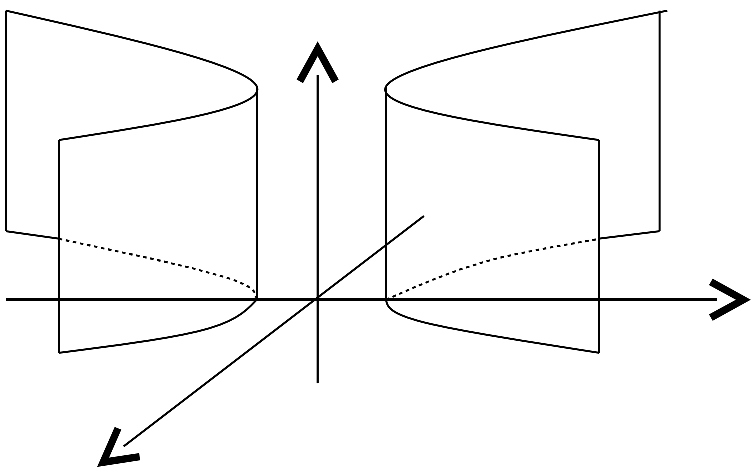
Определение. Цилиндрическими поверхностями называются поверхности, образованные линиями, параллельными какой- либо фиксированной прямой.

Рассмотрим поверхности, в уравнении которых отсутствует составляющая z, т.е. направляющие параллельны оси Oz. Тип линии на плоскости XOY (эта линия называется направляющей поверхности) определяет характер цилиндрической поверхности. Рассмотрим некоторые частные случаи в зависимости от уравнения направляющих:

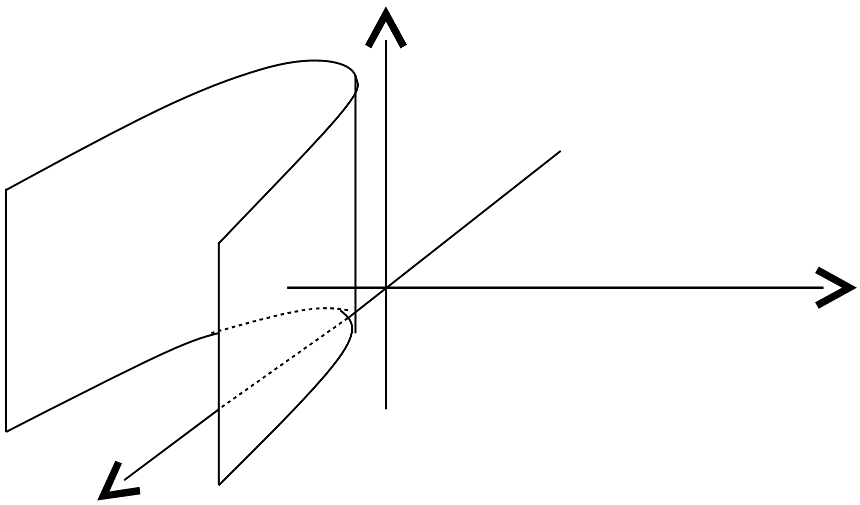
1) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ - эллиптический цилиндр.



2) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ - гиперболический цилиндр.



2) $x^2 = 2py$ – параболический цилиндр.



<u>Поверхности вращения.</u>

<u>Определение.</u> Поверхность, описываемая некоторой линией, вращающейся вокруг неподвижной прямой *d*, называется **поверхностью вращения** с осью вращения *d*.

Если уравнение поверхности в прямоугольной системе координат имеет вид: $F(x^2 + y^2, z) = 0$, то эта поверхность – поверхность вращения с осью вращения Oz.

Аналогично: $F(x^2 + z^2, y) = 0$ – поверхность вращения с осью вращения Oy,
$F(z^2 + y^2, x) = 0$ – поверхность вращения с осью вращения Ox.

Запишем уравнения поверхностей вращения для некоторых частных случаев:

1) $\frac{x^2 + y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ - **эллипсоид вращения**

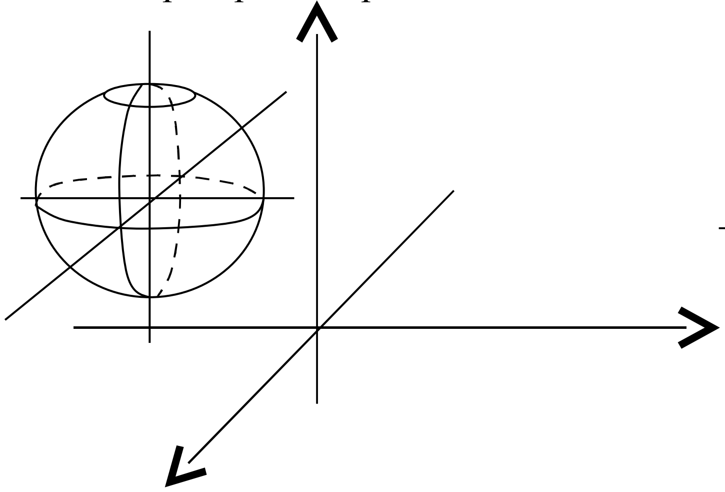
2) $\frac{x^2 + y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ - **однополостный гиперболоид вращения**

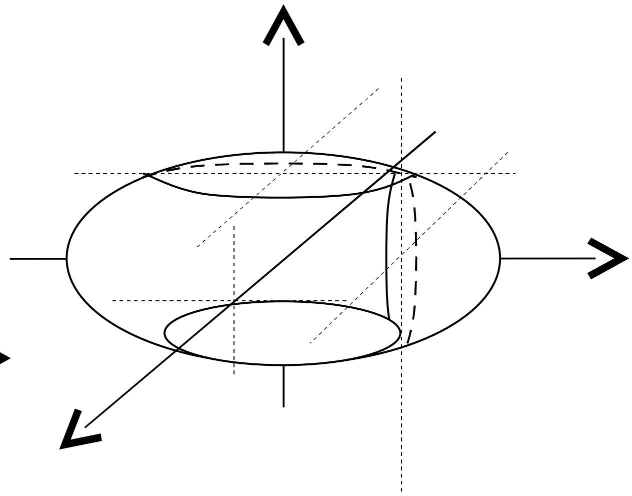
3) $\frac{x^2 + y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$ **- двуполостный гиперболоид вращения**

4) $\frac{x^2 + y^2}{p} = 2z$ **- параболоид вращения**

Аналогично могут быть записаны уравнения для рассмотренных выше поверхностей вращения, если осью вращения являются оси Ох или Оу.

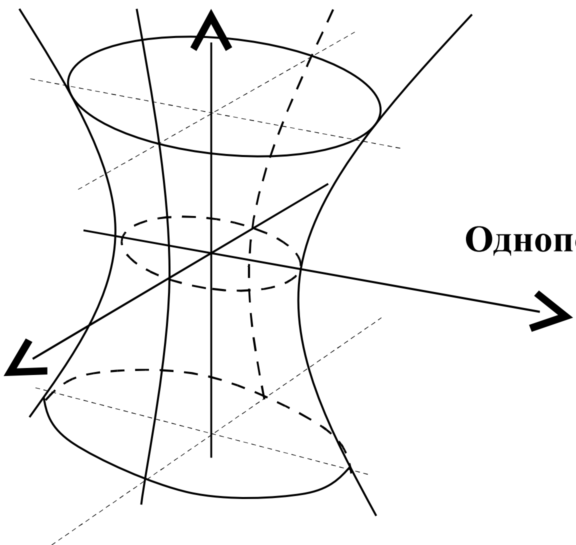
Однако, перечисленные выше поверхности являются всего лишь частными случаями поверхностей второго порядка общего вида, некоторые типы которых рассмотрены ниже:





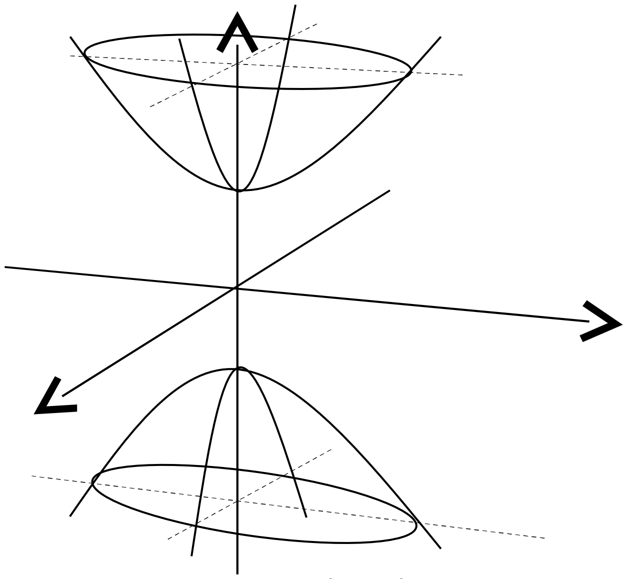
Сфера: $(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = r^2$ **Трехосный эллипсоид**: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$

В сечении эллипсоида плоскостями, параллельными координатным плоскостям, получаются эллипсы с различными осями.

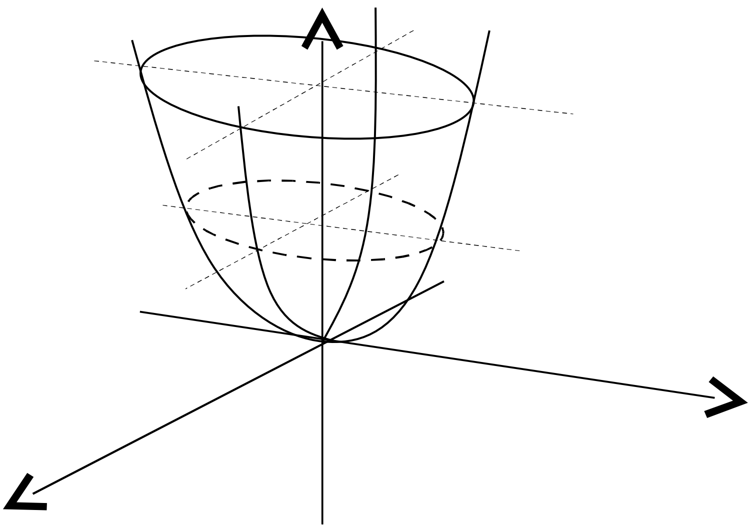


Однополостный гиперболоид: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$

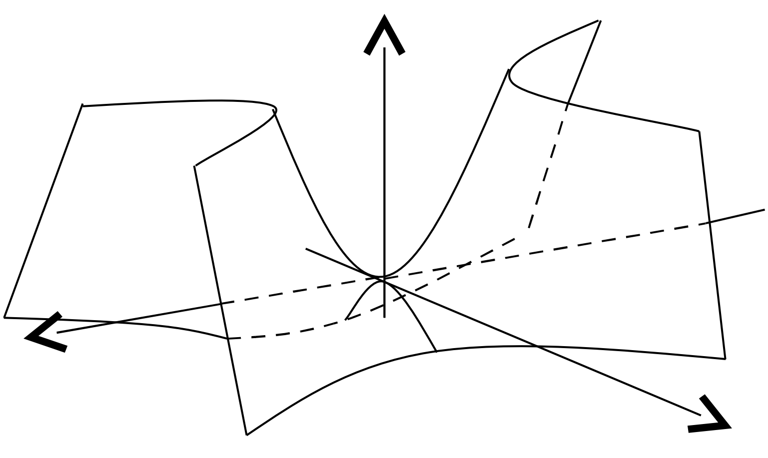
Двуполостный гиперболоид: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$



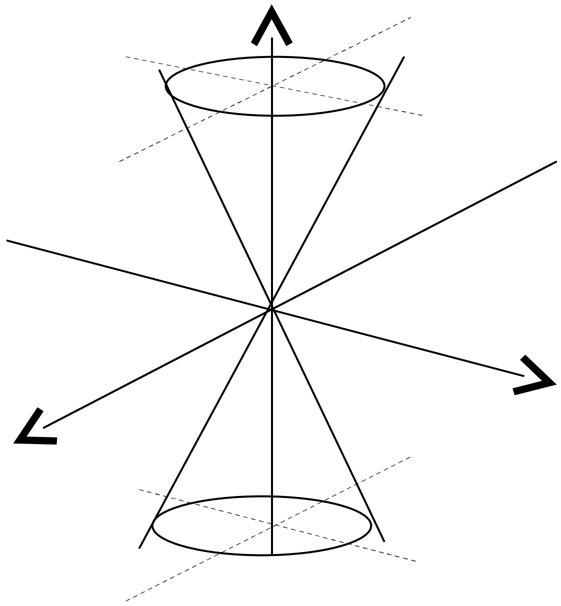
Эллиптический параболоид: $\frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{q}=2z, \quad где\ p>0, q>0$



Гиперболический параболоид: $\frac{x^2}{p}-\frac{y^2}{q}=2z$



Конус второго порядка: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$



Лекция 10. Комплексные числа.

<u>**Определение.**</u> **Комплексным числом** ***z*** называется выражение $z=a+ib$, где *a* и *b* – действительные числа, *i* – мнимая единица, которая определяется соотношением: $i^2=-1;\quad i=\sqrt{-1}.$

При этом число *a* называется **действительной частью** числа *z* (*a = Re z*), а *b*- **мнимой частью** (*b = Im z*).

Если *a =Re z =0,* то число *z* будет чисто мнимым, если *b = Im z = 0*, то число *z* будет действительным.

<u>**Определение.**</u> Числа $z=a+ib$ и $\bar{z}=a-ib$ называются **комплексно – сопряженными.**

<u>**Определение.**</u> Два комплексных числа $z_1=a_1+ib_1$ и $z_2=a_2+ib_2$ называются равными, если соответственно равны их действительные и мнимые части:

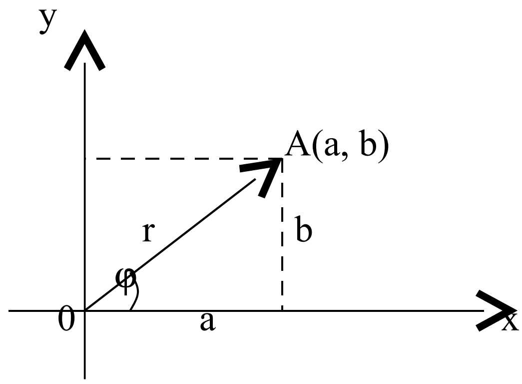
$$a_1=a_2;\qquad b_1=b_2;$$

<u>**Определение.**</u> Комплексное число равно нулю, если соответственно равны нулю действительная и мнимая части.

$$a=b=0.$$

Понятие комплексного числа имеет геометрическое истолкование. Множество комплексных чисел является расширением множества действительных чисел за счет включения множества мнимых чисел. Комплексные числа включают в себя все множества чисел, которые изучались ранее. Так натуральные, целые, рациональные, иррациональные, действительные числа являются, вообще говоря, частными случаями комплексных чисел.

Если любое действительное число может быть геометрически представлено в виде точки на числовой прямой, то комплексное число представляется точкой на плоскости, координатами которой будут соответственно действительная и мнимая части комплексного числа. При этом горизонтальная ось будет являться действительной числовой осью, а вертикальная - мнимой осью.



Таким образом, на оси OX располагаются действительные числа, а на оси OY – чисто мнимые.

С помощью подобного геометрического представления можно представлять числа в так называемой тригонометрической форме.

Тригонометрическая форма числа.

Из геометрических соображений видно, что $a = r\cos\varphi;\quad b = r\sin\varphi$. Тогда комплексное число можно представить в виде:

$$z = a + ib = r\cos\varphi + ir\sin\varphi = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

Такая форма записи называется **тригонометрической формой комплексного числа.**

При этом величина r называется **модулем** комплексного числа, а угол наклона φ **- аргументом** комплексного числа.

$$r = |z|; \qquad \varphi = Arg\, z\,.$$

Из геометрических соображений: $r = |a + ib| = \sqrt{a^2 + b^2};\quad \varphi = Arg\, z = arctg\frac{b}{a};$

Очевидно, что комплексно – сопряженные числа имеют одинаковые модули и противоположные аргументы.

$$|z| = |\bar{z}|; \qquad Arg\, z = -Arg\,\bar{z}.$$

Действия с комплексными числами.

Основные действия с комплексными числами вытекают из действий с многочленами.

1) **Сложение и вычитание.**

$$z = z_1 \pm z_2 = (a_1 + ib_1) \pm (a_2 + ib_2) = (a_1 \pm a_2) + i(b_1 \pm b_2)$$

$$|z| = \sqrt{(a_1 \pm a_2)^2 + (b_1 \pm b_2)^2}$$

2) **Умножение.**

$$z = z_1 z_2 = (a_1 + ib_1)(a_2 + ib_2) = a_1a_2 + ia_1b_2 + ib_1a_2 + i^2b_1b_2$$

$$z = z_1 z_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + i(a_1 b_2 + b_1 a_2)$$

В тригонометрической форме:

$$z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1), \ z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2).$$

$$z = z_1 z_2 = r_1 r_2(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2))$$

С случае комплексно – сопряженных чисел:

$$z\bar{z} = (a + ib)(a - ib) = a^2 + b^2 = |z|^2 = |\bar{z}|^2.$$

3) **Деление.**

$$z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1 + ib_1}{a_2 + ib_2} = x + iy$$

$$z = \frac{(a_1 + ib_1)(a_2 - ib_2)}{(a_2 + ib_2)(a_2 - ib_2)} = \frac{(a_1 a_2 + b_1 b_2) + i(a_2 b_1 - a_1 b_2)}{a_2^2 + b_2^2}$$

$$z = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} + i\frac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2}$$

В тригонометрической форме: $z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2))$

4) **Возведение в степень.** $z^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$,где n – целое положительное число.

Это выражение называется **формулой Муавра.**
(Абрахам де Муавр (1667 – 1754) – английский математик)

Формулу Муавра можно использовать для нахождения тригонометрических функций двойного, тройного и т.д. углов.

Пример. Найти формулы sin2φ и cos2φ.

Рассмотрим некоторое комплексное число $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$.
Тогда с одной стороны $z^2 = r^2(\cos^2\varphi + 2i\cos\varphi\sin\varphi - \sin^2\varphi)$.
По формуле Муавра: $z^2 = r^2(\cos 2\varphi + i\sin 2\varphi)$
Приравнивая, получим $\cos 2\varphi + i\sin 2\varphi = \cos^2\varphi - \sin^2\varphi + 2i\cos\varphi\sin\varphi$
Т.к. два комплексных числа равны, если равны их действительные и мнимые части, то

$$\cos 2\varphi = \cos^2\varphi - \sin^2\varphi$$
$$\sin 2\varphi = 2\sin\varphi\cos\varphi$$

Получили известные формулы двойного угла.

5) **Извлечение корня из комплексного числа.**

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)} = \rho(\cos\psi + i\sin\psi)$$

Возводя в степень, получим:

$$\rho^n(\cos n\psi + i\sin n\psi) = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

Отсюда: $\rho = \sqrt[n]{r}; \qquad n\psi = \varphi + 2\pi k; \qquad k \in Z.$

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right)$$

Таким образом, корень n – ой степени из комплексного числа имеет n различных значений.

Показательная форма комплексного числа.

Рассмотрим показательную функцию $w = e^z; \qquad z = x + iy.$
Можно показать, что функция w может быть записана в виде:

$$w = e^{x+iy} = e^x(\cos y + i\sin y)$$

Данное равенство называется **уравнением Эйлера.** Вывод этого уравнения будет рассмотрен позднее. (См.).

Для комплексных чисел будут справедливы следующие свойства:

1) $e^{z_1+z_2} = e^{z_1}e^{z_2}$; 2) $e^{z_1-z_2} = \dfrac{e^{z_1}}{e^{z_2}}$; 3) $(e^z)^m = e^{mz}$; где m – целое число.

Если в уравнении Эйлера показатель степени принять за чисто мнимое число ($x=0$), то получаем: $e^{iy} = \cos y + i\sin y$

Для комплексно – сопряженного числа получаем: $e^{-iy} = \cos y - i\sin y$

Из этих двух уравнений получаем: $\begin{cases} \cos y = \dfrac{e^{iy} + e^{-iy}}{2} \\ \sin y = \dfrac{e^{iy} - e^{-iy}}{2i} \end{cases}$

Этими формулами пользуются для нахождения значений степеней тригонометрических функций через функции кратных углов.

Если представить комплексное число в тригонометрической форме:

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

и воспользуемся формулой Эйлера: $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$

$$z = re^{i\varphi}$$

Полученное равенство и есть **показательная форма комплексного числа.**

Разложение многочлена на множители.

Определение. Функция вида $f(x) = A_0x^n + A_1x^{n-1} + \ldots + A_n$ называется **целой рациональной** функцией от x.

Теорема Безу. (Этьенн Безу (1730 – 1783) – французский математик)

При делении многочлена f(x) на разность x – a получается остаток, равный f(a).

Доказательство. При делении многочлена $f(x)$ на разность $x - a$ частным будет многочлен $f_1(x)$ степени на единицу меньшей, чем $f(x)$, а остатком – постоянное число R.

$$f(x)=f_1(x)(x-a)+R$$

Переходя к пределу при $x\to a$, получаем $f(a)=R$.

<u>**Следствие.**</u> *Если, a – корень многочлена, т.е. f(a) = 0, то многочлен f(x) делится на (x – a) без остатка.*

<u>**Определение.**</u> Если уравнение имеет вид $P(x)=0$, где $P(x)$–многочлен степени n, то это уравнение называется **алгебраическим** уравнением степени n.

<u>**Теорема.**</u> (Основная теорема алгебры) *Всякая целая рациональная функция f(x) имеет, по крайней мере, один корень, действительный или комплексный.*

<u>**Теорема.**</u> *Всякий многочлен n – ой степени разлагается на n линейных множителей вида (x – a) и множитель, равный коэффициенту при* x^n.

<u>**Теорема.**</u> *Если два многочлена тождественно равны друг другу, то коэффициенты одного многочлена равны соответствующим коэффициентам другого.*

Если среди корней многочлена встречаются кратные корни, то разложение на множители имеет вид:

$$f(x)=A_0(x-a_1)^{k_1}(x-a_2)^{k_2}...(x-a_m)^{k_m}.$$

$k_1+k_2+...+k_m=n$, k_i - кратность соответствующего корня.

Отсюда следует, что *любой многочлен n – ой степени имеет ровно n корней (действительных или комплексных).*

Это свойство имеет большое значение для решения алгебраических уравнений, дифференциальных уравнений и играет важную роль в анализе функций.

Рассмотрим несколько примеров действий с комплексными числами.

<u>Пример.</u> Даны два комплексных числа $z_1=1-\frac{7}{2}i;\quad z_2=-7-2i$. Требуется а) найти значение выражения $\left(\dfrac{1-\frac{7}{2}i}{-7-2i}\right)^{-4}$ в алгебраической форме, б) для числа $z=2-2\sqrt{3}i$ найти тригонометрическую форму, найти z^{20}, найти корни уравнения $w^3+z=0$.

а) Очевидно, справедливо следующее преобразование:

$$\left(\dfrac{1-\frac{7}{2}i}{-7-2i}\right)^{-4}=\left(\frac{2-7i}{-14-4i}\right)^{-4}=\left(\frac{-14-4i}{2-7i}\right)^{4}=16\left(\frac{-7-2i}{2-7i}\right)^{4}$$

Далее производим деление двух комплексных чисел:

$$\frac{-7-2i}{2-7i}=\frac{(-7-2i)(2+7i)}{(2-7i)(2+7i)}=\frac{-14-49i-4i+14}{4+49}=\frac{-53i}{53}=-i.$$

Получаем значение заданного выражения: $16(-i)^4=16i^4=16$.

б) Число $z=2-2\sqrt{3}i$ представим в виде $z=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$, где

$$r = |z| = \sqrt{4+12} = 4; \qquad \varphi = arctg\frac{b}{a} = arctg\left(-\sqrt{3}\right) = -60^0$$

Тогда $z = 4(\cos 60^0 - i\sin 60^0)$.

Для нахождения z^{20} воспользуемся формулой Муавра.

$$z^{20} = 4^{20}(\cos 1200^0 - i\sin 1200^0) = 4^{20}(\cos(3\cdot 2\pi + 120^0) - i\sin(3\cdot 2\pi + 120^0)) =$$

$= 4^{20}(\cos 120^0 - i\sin 120^0) = -4^{20}\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$. Если $w^3 + z = 0$, то $w = \sqrt[3]{z}$

$$\sqrt[3]{z} = \sqrt[3]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{3} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{3}\right) = \sqrt[3]{4}\left(\cos\frac{-60^0 + 2\pi k}{3} + i\sin\frac{-60^0 + 2\pi k}{3}\right); \quad k \in Z.$$

Лекция 11. Числовые последовательности. Предел числовой последовательности и предел функции. Бесконечно большие, бесконечно малые функции и их свойства.

Введение в математический анализ. Числовая последовательность.

Определение. Если каждому натуральному числу n поставлено в соответствие число x_n, то говорят, что задана **последовательность**

$$x_1, x_2, \ldots, x_n = \{x_n\}$$

Общий элемент последовательности является функцией от n.

$$x_n = f(n)$$

Таким образом последовательность может рассматриваться как функция порядкового номера элемента.

Задать последовательность можно различными способами – главное, чтобы был указан способ получения любого члена последовательности.

Пример. $\{x_n\} = \{(-1)^n\}$ или $\{x_n\} = -1; 1; -1; 1; \ldots$
$\{x_n\} = \{\sin\pi n/2\}$ или $\{x_n\} = 1; 0; 1; 0; \ldots$

Для последовательностей можно определить следующие **операции**:

1) Умножение последовательности на число m: $m\{x_n\} = \{mx_n\}$, т.е. $mx_1, mx_2, \ldots$
2) Сложение (вычитание) последовательностей: $\{x_n\} \pm \{y_n\} = \{x_n \pm y_n\}$.
3) Произведение последовательностей: $\{x_n\}\cdot\{y_n\} = \{x_n\cdot y_n\}$.
4) Частное последовательностей: $\frac{\{x_n\}}{\{y_n\}} = \left\{\frac{x_n}{y_n}\right\}$ при $\{y_n\} \neq 0$.

Ограниченные и неограниченные последовательности.

Определение. Последовательность $\{x_n\}$ называется **ограниченной**, если существует такое число M>0, что для любого n верно неравенство: $|x_n| < M$ т.е. все члены последовательности принадлежат промежутку (-M; M).

Определение. Последовательность $\{x_n\}$называется **ограниченной сверху**, если для любого n существует такое число M, что $x_n \le M$.

Определение. Последовательность $\{x_n\}$называется **ограниченной снизу**, если для любого n существует такое число M, что $x_n \ge M$

Пример. $\{x_n\} = n$ – ограничена снизу $\{1, 2, 3, \dots \}$.

Определение. Число **a** называется **пределом** последовательности $\{x_n\}$, если для любого положительного $\varepsilon>0$ существует такой номер N, что для всех n > N выполняется условие: $|a - x_n| < \varepsilon$. Это записывается: $\lim x_n = a$.

В этом случае говорят, что последовательность $\{x_n\}$**сходится** к а при $n \to\infty$.

Свойство: Если отбросить какое- либо число членов последовательности, то получаются новые последовательности, при этом если сходится одна из них, то сходится и другая.

Пример. Доказать, что предел последовательности $\lim \frac{(-1)^n}{n} = 0$.

Пусть при n > N верно $\left|0 - \frac{(-1)^n}{n}\right| < \varepsilon$, т.е. $\frac{1}{n} < \varepsilon$. Это верно при $n > \frac{1}{\varepsilon}$, таким образом, если за N взять целую часть от $\frac{1}{\varepsilon}$, то утверждение, приведенное выше, выполняется.

Пример. Показать, что при $n\to\infty$ последовательность 3, $2\frac{1}{2}, 2\frac{1}{3}, 2\frac{1}{4}, \dots, 2 + \frac{1}{n}$ имеет пределом число 2.

Итого: $\{x_n\}= 2 + 1/n$; $1/n = x_n - 2$

Очевидно, что существует такое число n, что $|x_n - 2| = \left|\frac{1}{n}\right| < \varepsilon$, т.е. $\lim \{x_n\} = 2$.

Теорема. *Последовательность не может иметь более одного предела.*

Доказательство. Предположим, что последовательность $\{x_n\}$имеет два предела a и b, не равные друг другу.

$$x_n \to a;\ x_n \to b;\quad a \ne b.$$

Тогда по определению существует такое число $\varepsilon>0$, что

$$|a - x_n| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$|b - x_n| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Запишем выражение: $|a - b| = |(a - x_n) + (x_n - b)| \le |a - x_n| + |x_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$

А т.к. ε- **любое** число, то $|a-b|=0$, т.е. a = b. Теорема доказана.

Теорема. *Если* $x_n \to a$, *то* $|x_n| \to |a|$.

Доказательство. Из $x_n \to a$ следует, что $|x_n - a| < \varepsilon$. В то же время: $||x_n| - |a|| \le |x_n - a|$, т.е. $||x_n| - |a|| < \varepsilon$, т.е. $|x_n| \to |a|$. Теорема доказана.

Теорема. *Если* $x_n \to a$, *то последовательность* $\{x_n\}$ *ограничена.*
Следует отметить, что обратное утверждение неверно, т.е. из ограниченности последовательности не следует ее сходимость.

Например, последовательность $x_n = \begin{cases} 1+\dfrac{1}{n}, \text{при четном } n \\ 2-\dfrac{1}{n}, \text{при нечетном } n \end{cases}$ не имеет предела, хотя $|x_n| \le 2$.

Монотонные последовательности.

Определение.
1) Если $x_{n+1} > x_n$ для всех n, то последовательность возрастающая.
2) Если $x_{n+1} \ge x_n$ для всех n, то последовательность неубывающая.
3) Если $x_{n+1} < x_n$ для всех n, то последовательность убывающая.
4) Если $x_{n+1} \le x_n$ для всех n, то последовательность невозрастающая

Все эти последовательности называются **монотонными.** Возрастающие и убывающие последовательности называются **строго монотонными**.

Пример. $\{x_n\} = 1/n$ – убывающая и ограниченная
$\{x_n\} = n$ – возрастающая и неограниченная.

Пример. Доказать, что последовательность $\{x_n\}=\dfrac{n}{2n+1}$ монотонная возрастающая.

Найдем член последовательности $\{x_{n+1}\}=\dfrac{n+1}{2n+2+1}=\dfrac{n+1}{2n+3}$

Найдем знак разности: $\{x_n\}-\{x_{n+1}\}=\dfrac{n}{2n+1}-\dfrac{n+1}{2n+3}=\dfrac{2n^2+3n-2n^2-2n-n-1}{(2n+1)(2n+3)}=$

$=\dfrac{-1}{(2n+1)(2n+3)}<0$, т.к. $n \in N$, то знаменатель положительный при любом n.

Таким образом, $x_{n+1} > x_n$. Последовательность возрастающая, что и следовало доказать.

Пример. Выяснить является возрастающей или убывающей последовательность $\{x_n\} = \dfrac{n}{5^n}$.

Найдем $x_{n+1}=\dfrac{n+1}{5^{n+1}}$. Найдем разность $x_{n+1}-x_n=\dfrac{n+1}{5\cdot 5^n}-\dfrac{n}{5^n}=\dfrac{n+1-5n}{5\cdot 5^n}=$

$= \frac{1-4n}{5\cdot 5^n}$, т.к. $n \in N$, то $1 - 4n < 0$, т.е. $x_{n+1} < x_n$. Последовательность монотонно убывает.

Следует отметить, что монотонные последовательности ограничены по крайней мере с одной стороны.

<u>Теорема.</u> *Монотонная ограниченная последовательность имеет предел.*

<u>Число *e*.</u>

Рассмотрим последовательность $\{x_n\} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$.

Если последовательность $\{x_n\}$ монотонная и ограниченная, то она имеет конечный предел.

По формуле бинома Ньютона:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1+\frac{n}{1}\cdot\frac{1}{n}+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^2+\frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\left(\frac{1}{n}\right)^3+\ldots+\frac{n(n-1)(n-2)\ldots[n-(n-1)]}{1\cdot 2\cdot 3\cdots n}\left(\frac{1}{n}\right)^n$$

или, что то же самое

$$x_n = 1+1+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\ldots+\frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)+\ldots+\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{n-1}{n}\right)$$

Покажем, что последовательность $\{x_n\}$ – возрастающая. Действительно, запишем выражение x_{n+1} и сравним его с выражением x_n:

$$x_{n+1} = 1+1+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)+\ldots+\frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\ldots\left(1-\frac{k-1}{n+1}\right)+\ldots+\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\ldots$$
$$\ldots\left(1-\frac{n-1}{n+1}\right)+\frac{1}{(n+1)!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\ldots\left(1-\frac{n}{n+1}\right).$$

Каждое слагаемое в выражении x_{n+1} больше соответствующего значения x_n, и, кроме того, у x_{n+1} добавляется еще одно положительное слагаемое. Таким образом, последовательность $\{x_n\}$ возрастающая.

Итак, последовательность $\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}$ - монотонно возрастающая и ограниченная сверху, т.е. имеет конечный предел. Этот предел принято обозначать буквой *e*.

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$$

Из неравенства $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 3$ следует, что $e \le 3$. Отбрасывая в равенстве для $\{x_n\}$ все члены, начиная с четвертого, имеем: $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n > 2+\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{n}\right)$ переходя к пределу, получаем $e \ge 2+\frac{1}{2} = 2{,}5$

Таким образом, число е заключено между числами 2,5 и 3. Если взять большее количество членов ряда, то можно получить более точную оценку значения числа е.

Можно показать, что число е иррациональное и его значение равно 2,71828…

Аналогично можно показать, что $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$, расширив требования к х до любого действительного числа:

Предположим:

$$n \le x \le n+1$$

$$\frac{1}{n} \ge \frac{1}{x} \ge \frac{1}{n+1}$$

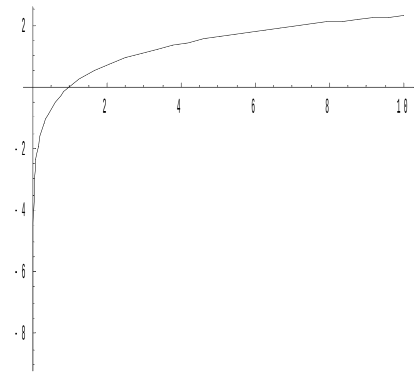
$$1+\frac{1}{n} \ge 1+\frac{1}{x} \ge 1+\frac{1}{n+1}$$

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} > \left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} > \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n}$$

Найдем $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = e\cdot 1 = e;\quad \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n} = \frac{e}{1} = e;\quad \Rightarrow\quad \lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} = e$

Число е является основанием натурального логарифма.

$$\log_e x = \ln x = y,\quad т.е.\quad e^y = x.$$



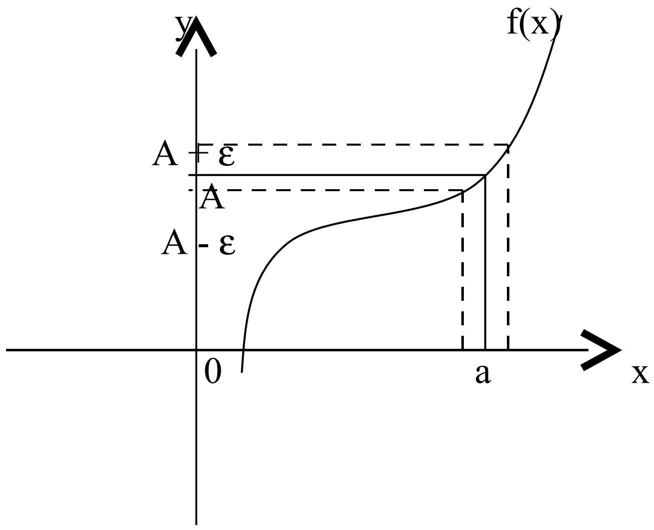
Выше представлен график функции y = lnx.

<u>Связь натурального и десятичного логарифмов.</u>

Пусть х = 10^y, тогда lnx = $\ln 10^y$, следовательно lnx = yln10

y = $\lg x = \frac{\ln x}{\ln 10} = M\ln x;\quad \ln x = \frac{1}{M}\lg x$, где М = 1/ln10 ≈ 0,43429…- модуль перехода.

Предел функции в точке.



Пусть функция f(x) определена в некоторой окрестности точки x = a (т.е. в самой точке x = a функция может быть и не определена)

Определение. Число А называется **пределом** функции f(x) при $x \to a$, если для любого $\varepsilon>0$ существует такое число $\Delta>0$, что для всех x таких, что

$$0 < |x - a| < \Delta$$

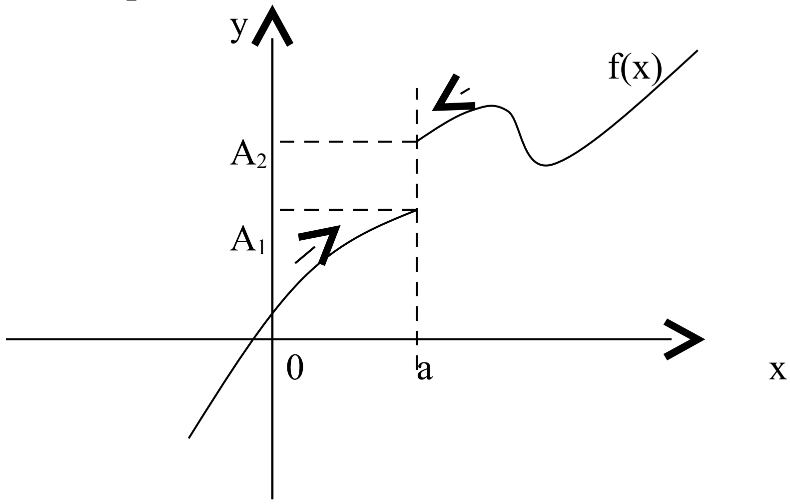
верно неравенство $$|f(x) - A| < \varepsilon.$$

То же определение может быть записано в другом виде:

Если $a - \Delta < x < a + \Delta$, $x \neq a$, то верно неравенство $A - \varepsilon < f(x) < A + \varepsilon$.

Запись предела функции в точке: $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$

Определение. Если $f(x) \to A_1$ при $x \to a$ только при $x < a$, то $\lim\limits_{x \to a-0} f(x) = A_1$ - называется **пределом** функции f(x) в точке x = a **слева**, а если $f(x) \to A_2$ при $x \to a$ только при $x > a$, то $\lim\limits_{x \to a+0} f(x) = A_2$ называется **пределом** функции f(x) в точке x = a **справа**.



Приведенное выше определение относится к случаю, когда функция f(x) не определена в самой точке x = a, но определена в некоторой сколь угодно малой окрестности этой точки.

Пределы A_1 и A_2 называются также **односторонними пределами** функции f(x) в точке x = a. Также говорят, что A – **конечный предел** функции f(x).

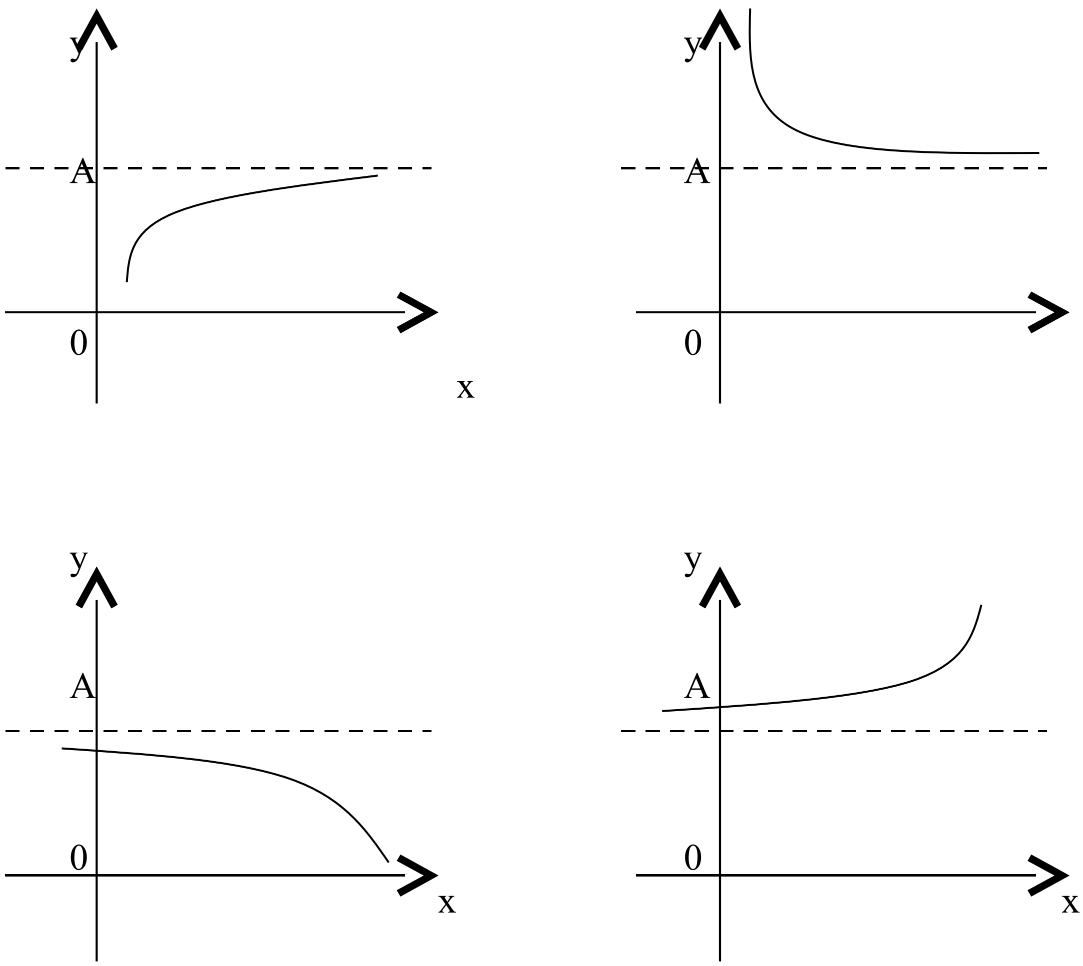
Предел функции при стремлении аргумента к бесконечности.

Определение. Число A называется **пределом** функции f(x) при $x\to\infty$, если для любого числа $\varepsilon>0$ существует такое число $M>0$, что для всех x, $|x|>M$ выполняется неравенство $|A - f(x)| < \varepsilon$

При этом предполагается, что функция f(x) определена в окрестности бесконечности.

Записывают: $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = A.$

Графически можно представить:



Аналогично можно определить пределы $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = A$ для любого x>M и $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = A$ для любого x<M.

Основные теоремы о пределах.

Теорема 1. $\lim\limits_{x\to a} C = C$, где С = const.

Следующие теоремы справедливы при предположении, что функции f(x) и g(x) имеют конечные пределы при $x\to a$.

Теорема 2. $\lim\limits_{x\to a}(f(x) \pm g(x)) = \lim\limits_{x\to a} f(x) \pm \lim\limits_{x\to a} g(x)$

Теорема 3. $\lim\limits_{x\to a}[f(x)\cdot g(x)] = \lim\limits_{x\to a} f(x)\cdot \lim\limits_{x\to a} g(x)$

Следствие. $\lim\limits_{x\to a} C\cdot f(x) = C\cdot \lim\limits_{x\to a} f(x)$

Теорема 4. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}$ при $\lim\limits_{x\to a} g(x) \neq 0$

Теорема 5. *Если f(x)>0 вблизи точки x = a и* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$, *то A>0.*

Аналогично определяется знак предела при f(x) < 0, f(x) ≥ 0, f(x) ≤ 0.

Теорема 6. *Если g(x) ≤ f(x) ≤ u(x) вблизи точки x = a и* $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \lim\limits_{x\to a} u(x) = A$, *то и* $\lim\limits_{x\to a} = A$.

Определение. Функция f(x) называется **ограниченной** вблизи точки x = a, если существует такое число M>0, что |f(x)|<M вблизи точки x = a.

Теорема 7. *Если функция f(x) имеет конечный предел при $x\to a$, то она ограничена вблизи точки x = a.*

Бесконечно малые функции.

Определение. Функция f(x) называется **бесконечно малой** при $x\to a$, где а может быть числом или одной из величин ∞, +∞ или -∞, если $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$.

Пример. Функция $f(x) = x^n$ является бесконечно малой при $x\to 0$ и не является бесконечно малой при $x\to 1$, т.к. $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 1$.

Теорема. *Для того, чтобы функция f(x) при $x\to a$ имела предел, равный A, необходимо и достаточно, чтобы вблизи точки x = a выполнялось условие*

$$f(x) = A + \alpha(x),$$

где $\alpha(x)$ – бесконечно малая при $x \to a$ ($\alpha(x)\to 0$ при $x \to a$).

Свойства бесконечно малых функций:

1) Сумма фиксированного числа бесконечно малых функций при $x\to a$ тоже бесконечно малая функция при $x\to a$.
2) Произведение фиксированного числа бесконечно малых функций при $x\to a$ тоже бесконечно малая функция при $x\to a$.

3) Произведение бесконечно малой функции на функцию, ограниченную вблизи точки x = a является бесконечно малой функцией при $x\to a$.
4) Частное от деления бесконечно малой функции на функцию, предел которой не равен нулю есть величина бесконечно малая.

Бесконечно большие функции и их связь с бесконечно малыми.

Определение. Предел функции f(x) при $x\to a$, где a- число, **равен бесконечности**, если для любого числа M>0 существует такое число $\Delta>0$, что неравенство $|f(x)|>M$ выполняется при всех x, удовлетворяющих условию

$$0 < |x - a| < \Delta$$

Записывается $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$.

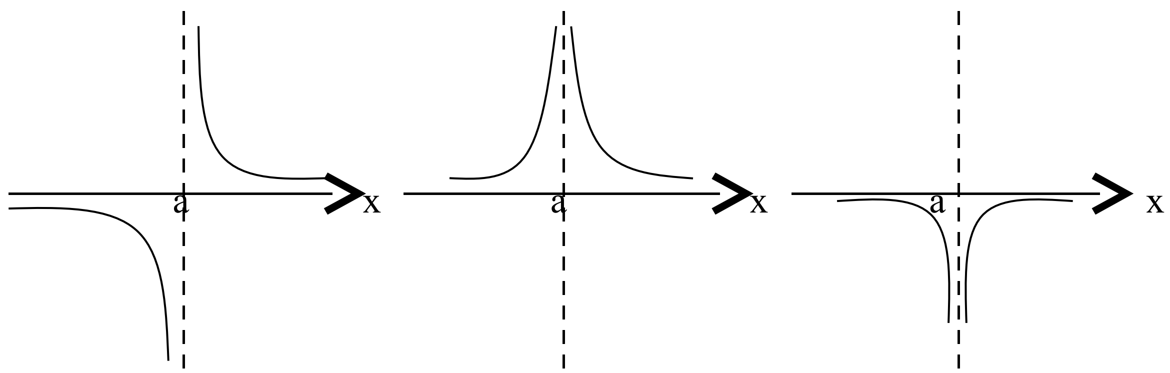
Собственно, если в приведенном выше определении заменить условие $|f(x)| > M$ на $f(x)>M$, то получим:

$$\lim_{x\to a} f(x) = +\infty ,$$

а если заменить на $f(x)<M$, то:

$$\lim_{x\to a} f(x) = -\infty .$$

Графически приведенные выше случаи можно проиллюстрировать следующим образом:



Определение. Функция называется **бесконечно большой** при $x\to a$, где a – число или одна из величин $+\infty$ или $-\infty$, если $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$, где A – число или одна из величин $+\infty$ или $-\infty$.

Связь бесконечно больших и бесконечно малых функций осуществляется в соответствии со следующей теоремой.

Теорема. *Если $f(x)\to 0$ при $x\to a$ (если $x\to\infty$) и не обращается в ноль, то*

$$y = \frac{1}{f(x)} \to \infty$$

Сравнение бесконечно малых функций.

Пусть $\alpha(x)$, $\beta(x)$ и $\gamma(x)$ – бесконечно малые функции при $x \to a$. Будем обозначать эти функции α, β и γ соответственно. Эти бесконечно малые функции можно сравнивать по быстроте их убывания, т.е. по быстроте их стремления к нулю.

Например, функция $f(x) = x^{10}$ стремится к нулю быстрее, чем функция $f(x) = x$.

Определение. Если $\lim\limits_{x\to a}\frac{\alpha}{\beta} = 0$, то функция α называется **бесконечно малой более высокого порядка**, чем функция β.

Определение. Если $\lim\limits_{x\to a}\frac{\alpha}{\beta} = A, \quad A \neq 0, \quad A = const$, то α и β называются **бесконечно малыми одного порядка**.

Определение. Если $\lim\limits_{x\to a}\frac{\alpha}{\beta} = 1,$ то функции α и β называются **эквивалентными бесконечно малыми**. Записывают $\alpha \sim \beta$.

Пример. Сравним бесконечно малые при $x\to 0$ функции $f(x) = x^{10}$ и $f(x) = x$.

$$\lim_{x\to a}\frac{x^{10}}{x} = \lim_{x\to a} x^9 = 0$$

т.е. функция $f(x) = x^{10}$ – бесконечно малая более высокого порядка, чем $f(x) = x$.

Определение. Бесконечно малая функция α называется **бесконечно малой порядка k** относительно бесконечно малой функции β, если предел $\lim\limits_{x\to a}\frac{\alpha}{\beta^k}$ конечен и отличен от нуля.

Однако следует отметить, что не все бесконечно малые функции можно сравнивать между собой. Например, если отношение $\frac{\alpha}{\beta}$ не имеет предела, то функции несравнимы.

Пример. Если $\alpha = x\sin x, \quad \beta = x$, то при $x\to 0$ $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\alpha}{\beta^2} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{x\sin x}{x^2} = 1$, т.е. функция α - бесконечно малая порядка 2 относительно функции β.

Пример. Если $\alpha = x\sin\frac{1}{x}, \quad \beta = x$, то при $x\to 0$ $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\alpha}{\beta}$ не существует, т.е. функция α и β несравнимы.

Свойства эквивалентных бесконечно малых.

1) $\alpha \sim \alpha, \quad \left(\lim\limits_{x\to a}\frac{\alpha}{\alpha} = 1\right)$

2) Если $\alpha \sim \beta$ и $\beta \sim \gamma$, то $\alpha \sim \gamma$, $\left(\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha}{\gamma} = \lim\limits_{x\to a}\left(\dfrac{\alpha}{\beta}\cdot\dfrac{\beta}{\gamma}\right) = 1\cdot 1 = 1\right)$

3) Если $\alpha \sim \beta$, то $\beta \sim \alpha$, $\left(\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\beta}{\alpha} = \lim\limits_{x\to a}\dfrac{1}{\frac{\alpha}{\beta}} = 1\right)$

1 4) Если $\alpha \sim \alpha_1$ и $\beta \sim \beta_1$ и $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha}{\beta} = k$, то и $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha_1}{\beta_1} = k$ или $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha}{\beta} = \lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha_1}{\beta_1}$.

<u>Следствие:</u> а) если $\alpha \sim \alpha_1$ и $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha}{\beta} = k$, то и $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha}{\beta} = \lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha_1}{\beta}$

б) если $\beta \sim \beta_1$ и $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha}{\beta} = k$, то $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha}{\beta} = \lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha}{\beta_1}$

Свойство 4 особенно важно на практике, т.к. оно фактически означает, что предел отношения бесконечно малых не меняется при замене их на эквивалентные бесконечно малые. Этот факт дает возможность при нахождении пределов заменять бесконечно малые на эквивалентные им функции, что может сильно упростить вычисление пределов.

<u>Пример.</u> Найти предел $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg5x}{\sin 7x}$

Так как tg5x ~ 5x и sin7x ~ 7x при x → 0, то, заменив функции эквивалентными бесконечно малыми, получим:

$$\lim_{x\to 0}\frac{tg5x}{\sin 7x} = \lim_{x\to 0}\frac{5x}{7x} = \frac{5}{7}$$

<u>Пример.</u> Найти предел $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^3}{1-\cos x}$.

Так как 1 – cosx = $2\sin^2\dfrac{x}{2} \sim 2\left(\dfrac{x}{2}\right)^2$ при x→0, то $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^3}{1-\cos x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^3}{\frac{x^2}{2}} = \lim\limits_{x\to 0}2x = 0$.

<u>Пример.</u> Найти предел $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tgx}{\sin x^2} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{x^2} = \infty$.

Если α и β - бесконечно малые при x→a, причем β - бесконечно малая более высокого порядка, чем α, то $\gamma = \alpha + \beta$ - бесконечно малая, эквивалентная α. Это можно доказать следующим равенством $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\gamma}{\alpha} = \lim\limits_{x\to a}\left(1+\dfrac{\beta}{\alpha}\right) = 1$.

<u>Некоторые замечательные пределы.</u>

$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{P(x)}{Q(x)}$, где $P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n$,

$Q(x) = b_0x^m + b_1x_{m-1} + \ldots + b_m$ - многочлены.

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{x^n\left(a_0 + \frac{a_1}{x} + \ldots + \frac{a_n}{x^n}\right)}{x^m\left(b_0 + \frac{b_1}{x} + \ldots. + \frac{b_m}{x^m}\right)} = x^{n-m}\frac{a_0 + \frac{a_1}{x} + \ldots + \frac{a_n}{x^n}}{b_0 + \frac{b_1}{x} + \ldots + \frac{b_m}{x^m}}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a_0 + \frac{a_1}{x} + \ldots + \frac{a_n}{x^n}}{b_0 + \frac{b_1}{x} + \ldots + \frac{b_m}{x^m}} = \frac{a_0}{b_0}$$

Итого: $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{P(x)}{Q(x)} = \begin{cases} 0, & при \quad n < m \\ \frac{a_0}{b_0}, & при \quad n = m \\ \infty, & при \quad n > m \end{cases}$

<u>Первый замечательный предел.</u> $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$

<u>Второй замечательный предел.</u> $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$

Кроме трех, изложенных выше, пределов можно записать следующие полезные на практике соотношения:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = 1; \qquad \lim_{x\to 0}\frac{a^x - 1}{x} = \ln a; \qquad \lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^m - 1}{x} = m.$$

<u>Пример.</u> Найти предел.

$$\lim_{x\to 0}\frac{tgmx}{\sin nx} = \lim_{x\to 0}\frac{mx}{nx} = \frac{m}{n}$$

<u>Пример.</u> Найти предел.

$$\lim_{x\to x_0}\frac{tgx - tgx_0}{x - x_0} = \lim_{x\to x_0}\frac{\sin(x - x_0)}{(x - x_0)\cos x\cos x_0} = \lim_{x\to x_0}\frac{\sin(x - x_0)}{x - x_0}\cdot\lim_{x\to x_0}\frac{1}{\cos x\cos x_0} = 1\cdot\frac{1}{\cos^2 x_0} = \frac{1}{\cos^2 x_0}$$

<u>Пример.</u> Найти предел.

$$\lim_{x\to\pi/4}\frac{\sin x - \cos x}{\pi - 4x} = \lim_{x\to\pi/4}\frac{-\frac{2}{\sqrt{2}}\sin(\pi/4 - x)}{\pi - 4x} = \lim_{x\to\pi/4}\frac{-\sin(\pi/4 - x)}{2\sqrt{2}(\pi/4 - x)} = -\frac{1}{2\sqrt{2}}$$

<u>Пример.</u> Найти предел.

$$\lim_{x\to\pi/2}\frac{\cos x}{\pi - 2x} = \left\{\begin{matrix} y = \pi/2 - x \\ x = \pi/2 - y \\ \pi - 2x = \pi - \pi + 2y \end{matrix}\right\} = \lim_{y\to 0}\frac{\cos(\pi/2 - y)}{2y} = \lim_{y\to 0}\frac{\sin y}{y} = \frac{1}{2}$$

<u>Пример.</u> Найти предел.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+3}{x-1}\right)^{x+3} = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-1+4}{x-1}\right)^{x+3} = \left\{\begin{matrix} y = x-1 \\ x\to\infty \\ y\to\infty \end{matrix}\right\} = \lim_{y\to\infty}\left(\frac{y+4}{y}\right)^{y+4} = \lim_{y\to\infty}\left(1 + \frac{4}{y}\right)^y\cdot\lim_{y\to\infty}\left(1 + \frac{4}{y}\right)^4 =$$

$$= \left\{z = \frac{y}{4}\right\} = \lim_{z\to\infty}\left(1 + \frac{1}{z}\right)^{4z} = \left(\lim_{z\to\infty}\left(1 + \frac{1}{z}\right)^z\right)^4 = e^4$$

Пример. Найти предел $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-6x+8}{x^2-8x+12}$.

Для нахождения этого предела разложим на множители числитель и знаменатель данной дроби.

$$x^2 - 6x + 8 = 0; \qquad\qquad x^2 - 8x + 12 = 0;$$
$$\boldsymbol{D = 36 - 32 = 4;} \qquad\qquad \boldsymbol{D = 64 - 48 = 16;}$$
$$x_1 = (6 + 2)/2 = 4; \qquad\qquad x_1 = (8 + 4)/2 = 6;$$
$$x_2 = (6 - 2)/2 = 2\ ; \qquad\qquad x_2 = (8 - 4)/2 = 2;$$

Тогда $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x-2)(x-4)}{(x-2)(x-6)}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-4}{x-6}=\dfrac{2}{4}=\dfrac{1}{2}$

Пример. Найти предел.

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x+x^2}-\sqrt{1-x+x^2}}{x^2-x}$ домножим числитель и знаменатель дроби на сопряженное выражение:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1+x+x^2-1+x-x^2}{x(x-1)(\sqrt{1+x+x^2}+\sqrt{1-x+x^2})}=\lim_{x\to 0}\frac{2x}{x(x-1)(\sqrt{1+x+x^2}+\sqrt{1-x+x^2})}=\frac{2}{-1\cdot(1+1)}=-1.$$

Пример. Найти предел.

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-5x+6}{x^2-9}=\left\{x^2-5x+6=(x-2)(x-3)\right\}=\lim_{x\to 3}\frac{(x-2)(x-3)}{(x-3)(x+3)}=\frac{3-2}{3+3}=\frac{1}{6}$$

Пример. Найти предел $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-6x^2+11x-6}{x^2-3x+2}$.

Разложим числитель и знаменатель на множители.

$$x^2 - 3x + 2 = (x - 1)(x - 2)$$
$$x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = (x - 1)(x - 2)(x - 3),\ \text{т.к.}$$

$$\begin{array}{r|l}
x^3 - 6x^2 + 11x - 6 & x - 1 \\ \cline{2-2}
x^3 - x^2 \phantom{{}+ 11x - 6} & x^2 - 5x + 6 \\ \cline{1-1}
-5x^2 + 11x \phantom{{}- 6} & \\
-5x^2 + 5x \phantom{{}- 6} & \\ \cline{1-1}
6x - 6 & \\
6x - 6 & \\ \cline{1-1}
0 &
\end{array}$$

$x^2 - 5x + 6 = (x - 2)(x - 3)$. Тогда $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)(x-2)(x-3)}{(x-1)(x-2)}=-2$

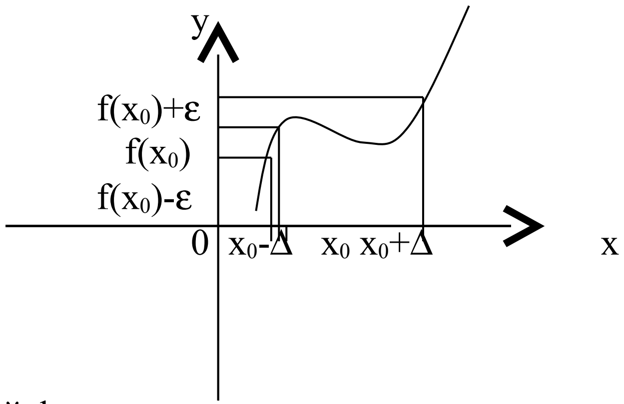
<u>Определение.</u> Функция f(x), определенная в окрестности некоторой точки x_0, называется **непрерывной в точке** x_0, если предел функции и ее значение в этой точке равны, т.е.

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

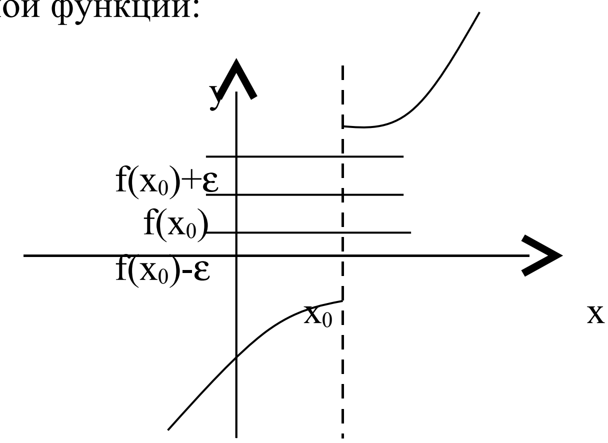
Тот же факт можно записать иначе: $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(\lim_{x \to x_0} x)$

<u>Определение.</u> Если функция f(x) определена в некоторой окрестности точки x_0, но не является непрерывной в самой точке x_0, то она называется **разрывной** функцией, а точка x_0 – точкой разрыва.

Пример непрерывной функции:



Пример разрывной функции:



<u>Определение.</u> Функция f(x) называется непрерывной в точке x_0, если для любого положительного числа ε>0 существует такое число Δ>0, что для любых x, удовлетворяющих условию

$$|x - x_0| < \Delta$$

верно неравенство $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

<u>Определение.</u> Функция f(x) называется **непрерывной** в точке x = x_0, если приращение функции в точке x_0 является бесконечно малой величиной.

$$f(x) = f(x_0) + \alpha(x)$$

где α(x) – бесконечно малая при $x \to x_0$.

Свойства непрерывных функций.

1) Сумма, разность и произведение непрерывных в точке x_0 функций – есть функция, непрерывная в точке x_0.

2) Частное двух непрерывных функций $\frac{f(x)}{g(x)}$ – есть непрерывная функция при условии, что g(x) не равна нулю в точке x_0.

3) Суперпозиция непрерывных функций – есть непрерывная функция.
Это свойство может быть записано следующим образом:
Если u = f(x), v = g(x) – непрерывные функции в точке x = x_0, то функция v = g(f(x)) – тоже непрерывная функция в этой точке.

Справедливость приведенных выше свойств можно легко доказать, используя теоремы о пределах.

Непрерывность некоторых элементарных функций.

1) Функция f(x) = C, C = const – непрерывная функция на всей области определения.

2) Рациональная функция $f(x) = \frac{a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n}{b_0x^m + b_1x^{m-1} + \ldots + b_m}$ непрерывна для всех значений x, кроме тех, при которых знаменатель обращается в ноль. Таким образом, функция этого вида непрерывна на всей области определения.

3) Тригонометрические функции sin x и cos x непрерывны на своей области определения.

Докажем свойство 3 для функции y = sinx.
Запишем приращение функции Δy = sin(x + Δx) – sinx, или после преобразования: $\Delta y = 2\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)\sin\frac{\Delta x}{2}$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = 2\lim_{\Delta x \to 0}\left(\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)\sin\frac{\Delta x}{2}\right) = 0$$

Действительно, имеется предел произведения двух функций $\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)$ и $\sin\frac{\Delta x}{2}$. При этом функция косинус – ограниченная функция при Δx$\to$0 $\left|\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)\right| \le 1$, а т.к. предел функции синус $\lim_{\Delta x \to 0}\sin\frac{\Delta x}{2} = 0$, то она является бесконечно малой при Δx$\to$0.

Таким образом, имеется произведение ограниченной функции на бесконечно малую, следовательно это произведение, т.е. функция Δy –

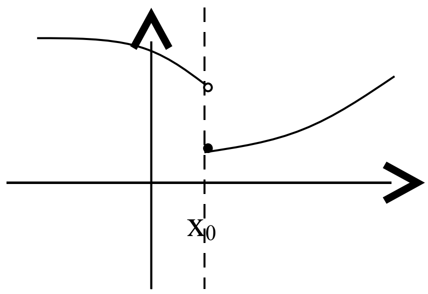
бесконечно малая. В соответствии с рассмотренными выше определениями, функция y = sinx – непрерывная функция для любого значения $x = x_0$ из области определения, т.к. ее приращение в этой точке – бесконечно малая величина.

<u>Точки разрыва и их классификация.</u>

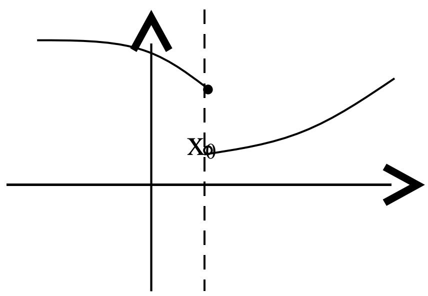
Рассмотрим некоторую функцию f(x), непрерывную в окрестности точки x_0, за исключением может быть самой этой точки. Из определения точки разрыва функции следует, что $x = x_0$ является точкой разрыва, если функция не определена в этой точке, или не является в ней непрерывной.

Следует отметить также, что непрерывность функции может быть односторонней. Поясним это следующим образом.

Если односторонний предел (см. выше) $\lim\limits_{x \to x+0} f(x) = f(x_0)$, то функция называется непрерывной справа.



Если односторонний предел (см. выше) $\lim\limits_{x \to x-0} f(x) = f(x_0)$, то функция называется непрерывной слева.



<u>Определение.</u> Точка x_0 называется **точкой разрыва** функции f(x), если f(x) не определена в точке x_0 или не является непрерывной в этой точке.

<u>Определение.</u> Точка x_0 называется **точкой разрыва 1- го рода**, если в этой точке функция f(x) имеет конечные, но не равные друг другу левый и правый пределы.

$$\lim_{x \to x_0+0} f(x) \neq \lim_{x \to x_0-0} f(x)$$

Для выполнения условий этого определения не требуется, чтобы функция была определена в точке $x = x_0$, достаточно того, что она определена слева и справа от нее.

Из определения можно сделать вывод, что в точке разрыва 1 – го рода функция может иметь только конечный скачок. В некоторых частных случаях точку разрыва 1 – го рода еще иногда называют **устранимой** точкой разрыва, но подробнее об этом поговорим ниже.

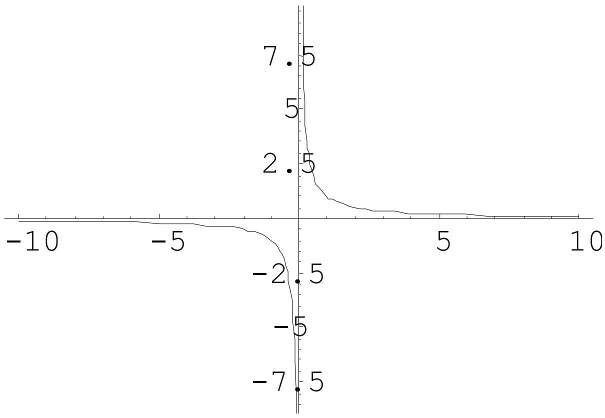
<u>Определение.</u> Точка x_0 называется **точкой разрыва 2 – го рода**, если в этой точке функция f(x) не имеет хотя бы одного из односторонних пределов или хотя бы один из них бесконечен.

<u>Пример.</u> Функция Дирихле (Дирихле Петер Густав(1805-1859) – немецкий математик, член- корреспондент Петербургской АН 1837г)

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x - \textit{рациональное число} \\ 0, & x - \textit{иррациональное число} \end{cases}$$

не является непрерывной в любой точке x_0.

<u>Пример.</u> Функция f(x) = $\frac{1}{x}$ имеет в точке x_0 = 0 точку разрыва 2 – го рода, т.к. $\lim\limits_{x\to 0+0} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x\to 0-0} f(x) = -\infty$.

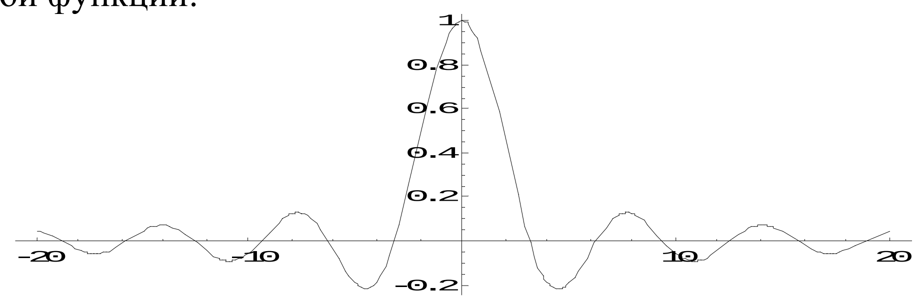


<u>Пример.</u> f(x) = $\frac{\sin x}{x}$

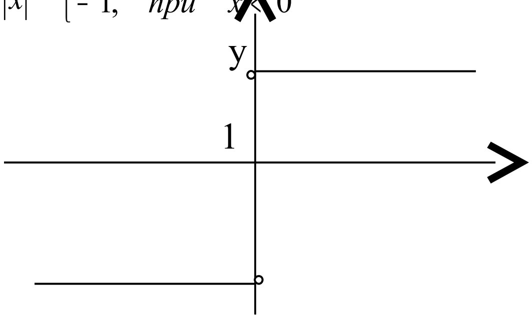
Функция не определена в точке x = 0, но имеет в ней конечный предел $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 1$, т.е. в точке x = 0 функция имеет точку разрыва 1 – го рода. Это – устранимая точка разрыва, т.к. если доопределить функцию:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & \textit{при} \quad x \neq 0 \\ 1, & \textit{при} \quad x = 0 \end{cases}$$

График этой функции:



<u>Пример.</u> f(x) = $\frac{x}{|x|} = \begin{cases} 1, & \textit{при} \quad x > 0 \\ -1, & \textit{при} \quad x < 0 \end{cases}$



0 x

-1

Эта функция также обозначается sign(x) – знак x. В точке $x = 0$ функция не определена. Т.к. левый и правый пределы функции различны, то точка разрыва – 1 – го рода. Если доопределить функцию в точке $x = 0$, положив $f(0) = 1$, то функция будет непрерывна справа, если положить $f(0) = -1$, то функция будет непрерывной слева, если положить f(x) равное какому- либо числу, отличному от 1 или –1, то функция не будет непрерывна ни слева, ни справа, но во всех случаях тем не менее будет иметь в точке $x = 0$ разрыв 1 – го рода. В этом примере точка разрыва 1 – го рода не является устранимой.

Таким образом, для того, чтобы точка разрыва 1 – го рода была устранимой, необходимо, чтобы односторонние пределы справа и слева были конечны и равны, а функция была бы в этой точке не определена.

Непрерывность функции на интервале и на отрезке.

Определение. Функция f(x) называется **непрерывной на интервале (отрезке)**, если она непрерывна в любой точке интервала (отрезка).

При этом не требуется непрерывность функции на концах отрезка или интервала, необходима только односторонняя непрерывность на концах отрезка или интервала.

Свойства функций, непрерывных на отрезке.

Свойство 1: (Первая теорема Вейерштрасса (Вейерштрасс Карл (1815-1897)- немецкий математик)). Функция, непрерывная на отрезке, ограничена на этом отрезке, т.е. на отрезке [a, b] выполняется условие $-M \le f(x) \le M$.

Доказательство этого свойства основано на том, что функция, непрерывная в точке x_0, ограничена в некоторой ее окрестности, а если разбивать отрезок [a, b] на бесконечное количество отрезков, которые “стягиваются” к точке x_0, то образуется некоторая окрестность точки x_0.

Свойство 2: Функция, непрерывная на отрезке [a, b], принимает на нем наибольшее и наименьшее значения.

Т.е. существуют такие значения x_1 и x_2, что $f(x_1) = m$, $f(x_2) = M$, причем

$$m \le f(x) \le M$$

Отметим эти наибольшие и наименьшие значения функция может принимать на отрезке и несколько раз (например – $f(x) = \sin x$).

Разность между наибольшим и наименьшим значением функции на отрезке называется **колебанием** функции на отрезке.

Свойство 3: (Вторая теорема Больцано – Коши). Функция, непрерывная на отрезке [a, b], принимает на этом отрезке все значения между двумя произвольными величинами.

Свойство 4: Если функция f(x) непрерывна в точке $x = x_0$, то существует некоторая окрестность точки x_0, в которой функция сохраняет знак.

Свойство 5: (Первая теорема Больцано (1781-1848) – Коши). Если функция f(x)- непрерывная на отрезке [a, b] и имеет на концах отрезка значения противоположных знаков, то существует такая точка внутри этого отрезка, где f(x) = 0.

Т.е. если $\mathrm{sign}(f(a)) \neq \mathrm{sign}(f(b))$, то $\exists\, x_0$: $f(x_0) = 0$.

Определение. Функция f(x) называется **равномерно непрерывной** на отрезке [a, b], если для любого ε>0 существует Δ>0 такое, что для любых точек $x_1 \in [a,b]$ и $x_2 \in [a,b]$ таких, что

$$|x_2 - x_1| < \Delta$$

верно неравенство $$|f(x_2) - f(x_1)| < \varepsilon$$

Отличие равномерной непрерывности от «обычной» в том, что для любого ε существует свое Δ, не зависящее от х, а при “обычной” непрерывности Δ зависит от ε и х.

Свойство 6: Теорема Кантора (Кантор Георг (1845-1918)- немецкий математик). Функция, непрерывная на отрезке, равномерно непрерывна на нем.

(Это свойство справедливо только для отрезков, а не для интервалов и полуинтервалов.)

Свойство 7: Если функция f(x) определена, монотонна и непрерывна на некотором промежутке, то и обратная ей функция x = g(y) тоже однозначна, монотонна и непрерывна.

Пример. Исследовать на непрерывность функцию и определить тип точек разрыва, если они есть.

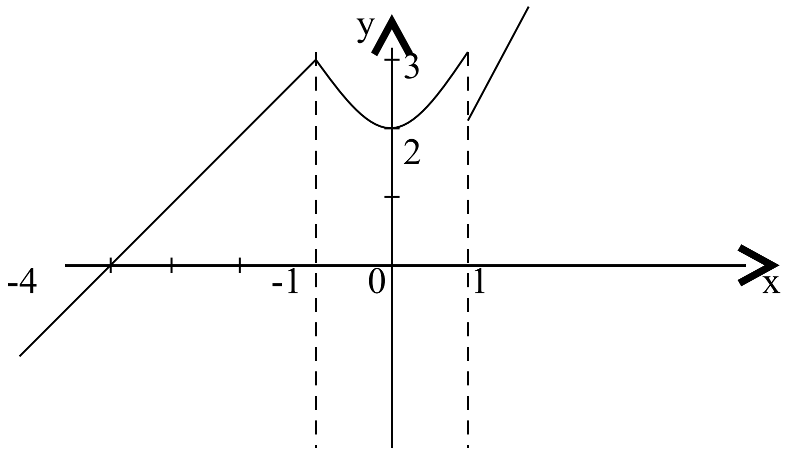
$$f(x) = \begin{cases} x+4, & x < -1 \\ x^2+2, & -1 \le x \le 1 \\ 2x, & x \ge 1 \end{cases}$$

$$\lim_{x \to -1-0} f(x) = 3 \qquad \lim_{x \to 1-0} f(x) = 3$$

$$\lim_{x \to -1+0} f(x) = 3 \qquad \lim_{x \to 1+0} f(x) = 2$$

в точке х = -1 функция непрерывна

в точке х = 1 точка разрыва 1 – го рода

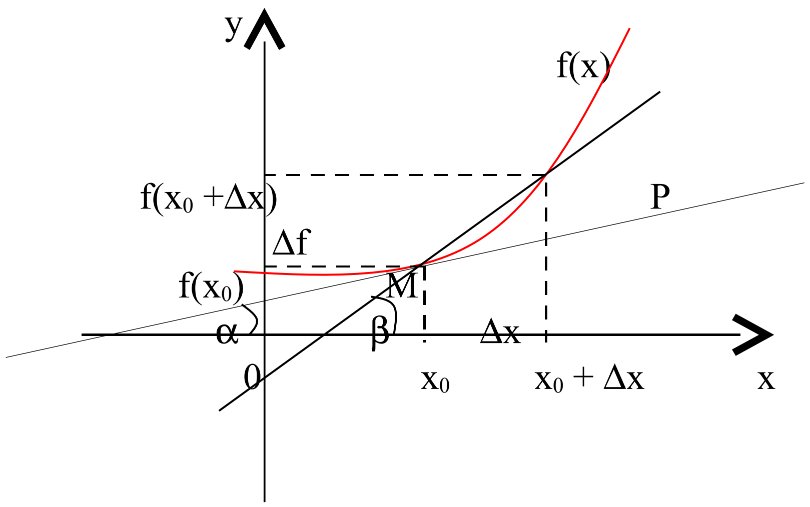


Лекция 13. Дифференциальное исчисление функции одной переменной.

Производная функции, ее геометрический и физический смысл.

Определение. Производной функции *f(x)* в точке x = x_0 называется предел отношения приращения функции в этой точке к приращению аргумента, если он существует.

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$



Пусть *f(x)* определена на некотором промежутке (a, b). Тогда $tg\beta = \frac{\Delta f}{\Delta x}$ - тангенс угла наклона секущей МР к графику функции.

$$\lim_{\Delta x \to 0} tg\beta = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = f'(x_0) = tg\alpha ,$$

где α - угол наклона касательной к графику функции *f(x)* в точке (x_0, f(x_0)).

Угол между кривыми может быть определен как угол между касательными, проведенными к этим кривым в какой- либо точке.

Уравнение касательной к кривой: $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$

Уравнение нормали к кривой: $y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)$.

Производная функции показывает скорость изменения функции при изменении переменной.

Физический смысл производной функции f(t), где t- время, а f(t)- закон движения (изменения координат) – мгновенная скорость движения.

Соответственно, вторая производная функции - скорость изменения скорости, т.е. ускорение.

Односторонние производные функции в точке.

Определение. Правой (левой) производной функции *f(x)* в точке $x = x_0$ называется правое (левое) значение предела отношения $\frac{\Delta f}{\Delta x}$ при условии, что это отношение существует.

$$f'_+(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0+} \frac{\Delta f}{\Delta x} \qquad f'_-(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0-} \frac{\Delta f}{\Delta x}$$

Если функция *f(x)* имеет производную в некоторой точке $x = x_0$, то она имеет в этой точке односторонние производные. Однако, обратное утверждение неверно. Во- первых функция может иметь разрыв в точке x_0, а во- вторых, даже если функция непрерывна в точке x_0, она может быть в ней не дифференцируема.

Например: $f(x) = |x|$- имеет в точке $x = 0$ и левую и правую производную, непрерывна в этой точке, однако, не имеет в ней производной.

Теорема. (Необходимое условие существования производной) *Если функция f(x) имеет производную в точке x_0, то она непрерывна в этой точке.*

Понятно, что это условие не является достаточным.

Основные правила дифференцирования.

Обозначим *f(x) = u, g(x) = v*- функции, дифференцируемые в точке x.

1) $(u \pm v)' = u' \pm v'$

2) $(u \cdot v)' = u \cdot v' + u' \cdot v$

3) $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$, если $v \neq 0$

Производные основных элементарных функций.

1) $C' = 0$; 2) $(x^m)' = mx^{m-1}$; 3) $\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$; 4) $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$; 5) $\left(e^x\right)' = e^x$;

6) $\left(a^x\right)' = a^x \ln a$; 7) $(\ln x)' = \frac{1}{x}$; 8) $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$; 9) $(\sin x)' = \cos x$;

10) $(\cos x)' = -\sin x$; 11) $(tgx)' = \frac{1}{\cos^2 x}$; 12) $(ctgx)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$; 13) $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$

14) $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$; 15) $(arctgx)' = \frac{1}{1+x^2}$; 16) $(arcctgx)' = -\frac{1}{1+x^2}$

Производная сложной функции.

Теорема. *Пусть y = f(x); u = g(x), причем область значений функции u входит в область определения функции f.*

Тогда $y' = f'(u)\cdot u'$

Логарифмическое дифференцирование.

Рассмотрим функцию $y = \ln|x| = \begin{cases} \ln x, & при \quad x > 0 \\ \ln(-x), & при \quad x < 0 \end{cases}$.

Тогда $(\ln|x|)' = \frac{1}{x}$, т.к. $(\ln x)' = \frac{1}{x}$; $(\ln(-x))' = \frac{(-x)'}{x} = \frac{1}{x}$.

Учитывая полученный результат, можно записать $(\ln|f(x)|)' = \frac{f'(x)}{f(x)}$.

Отношение $\frac{f'(x)}{f(x)}$ называется **логарифмической производной** функции f(x).

Способ **логарифмического дифференцирования** состоит в том, что сначала находят логарифмическую производную функции, а затем производную самой функции по формуле

$$f'(x) = (\ln|f(x)|)'\cdot f(x)$$

Способ логарифмического дифференцирования удобно применять для нахождения производных сложных, особенно показательных и показательно-степенных функций, для которых непосредственное вычисление производной с использованием правил дифференцирования представляется трудоемким.

Производная обратных функций.

Пусть требуется найти производную функции *y = f(x)* при условии, что обратная ей функция *x = g(y)* имеет производную, отличную от нуля в соответствующей точке.

Для решения этой задачи дифференцируем функцию x = g(y) по x:

$1 = g'(y)y'$, т.к. $g'(y) \neq 0$; $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}$; $y' = \frac{1}{g'(y)}$,

т.е. производная обратной функции обратна по величине производной данной функции.

Пример. Найти формулу для производной функции arctg x.

Функция arctg x является функцией, обратной функции tg x, $y = tgx; \quad x = arctgy;$

Известно, что $y' = (tgx)' = \dfrac{1}{\cos^2 x};$

По приведенной выше формуле получаем:

$$y' = \frac{1}{d(arctgy)/dx}; \qquad \frac{d(arctgy)}{dy} = \frac{1}{1/\cos^2 x}$$

Т.к. $\dfrac{1}{\cos^2 x} = 1 + tg^2 x = 1 + y^2;$ то можно записать окончательную формулу для производной арктангенса: $(arctgy)' = \dfrac{1}{1+y^2};$

Таким образом получены все формулы для производных арксинуса, арккосинуса и других обратных функций, приведенных в таблице производных.

Лекция 14. Дифференциал функции.

Пусть функция y = f(x) имеет производную в точке x: $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x)$

Тогда можно записать: $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \alpha$, где $\alpha \to 0$, при $\Delta x \to 0$.

Следовательно: $\Delta y = f'(x) \cdot \Delta x + \alpha \cdot \Delta x$.

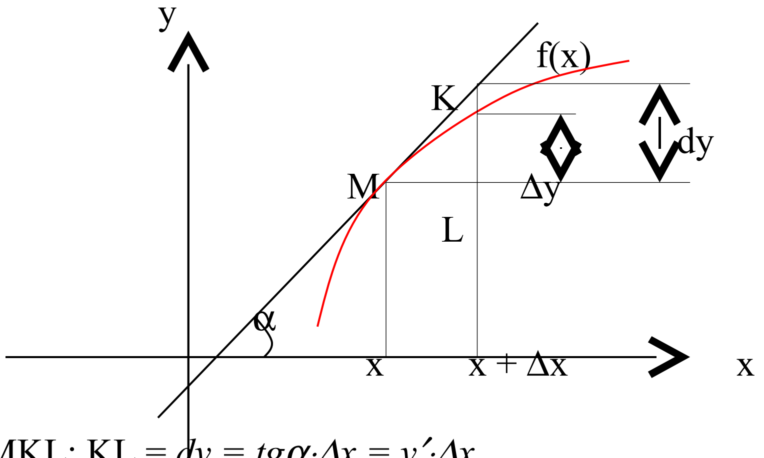
Величина $\alpha\Delta x$- бесконечно малая более высокого порядка, чем $f'(x)\Delta x$, т.е. $f'(x)\Delta x$- главная часть приращения Δy.

<u>Определение.</u> Дифференциалом функции f(x) в точке x называется главная линейная часть приращения функции. Обозначается dy или df(x).

Из определения следует, что $dy = f'(x)\Delta x$ или $dy = f'(x)dx$.

Можно также записать: $f'(x) = \dfrac{dy}{dx}$

<u>Геометрический смысл дифференциала.</u>



Из треугольника ΔMKL: KL = $dy = tg\alpha \cdot \Delta x = y' \cdot \Delta x$

Таким образом, дифференциал функции *f(x)* в точке x равен приращению ординаты касательной к графику этой функции в рассматриваемой точке.

Свойства дифференциала.

Если $u = f(x)$ и $v = g(x)$- функции, дифференцируемые в точке x, то непосредственно из определения дифференциала следуют следующие свойства:

1) $d(u \pm v) = (u \pm v)'dx = u'dx \pm v'dx = du \pm dv$
2) $d(uv) = (uv)'dx = (u'v + v'u)dx = vdu + udv$
3) $d(Cu) = Cdu$
4) $d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vdu - udv}{v^2}$

Дифференциал сложной функции.

Инвариантная форма записи дифференциала.

Пусть $y = f(x), x = g(t),$ т.е. у - сложная функция.

Тогда $dy = f'(x)g'(t)dt = f'(x)dx$.

Видно, что форма записи дифференциала dy не зависит от того, будет ли х независимой переменной или функцией какой- то другой переменной, в связи с чем эта форма записи называется **инвариантной формой записи дифференциала**.

Однако, если х - независимая переменная, то $dx = \Delta x$, но если х зависит от t, то $\Delta x \neq dx$.

Таким образом, форма записи $dy = f'(x)\Delta x$ не является инвариантной.

Теоремы о среднем.

Теорема Ролля.

(Ролль (1652-1719)- французский математик)

Если функция f(x) непрерывна на отрезке [a, b], дифференцируема на интервале (a, b) и значения функции на концах отрезка равны f(a) = f(b), то на интервале (a, b) существует точка ε, $a < \varepsilon < b$, в которой производная функция f(x) равная нулю, $f'(\varepsilon) = 0$.

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(\varepsilon)}{\Delta x} = 0, \quad т.е. \quad f'(\varepsilon) = 0.$$

Теорема Ролля имеет несколько **следствий**:

1) Если функция f(x) на отрезке [a, b] удовлетворяет теореме Ролля, причем f(a) = f(b) = 0, то существует по крайней мере одна точка ε, $a < \varepsilon < b$, такая, что $f'(\varepsilon) = 0$. Т.е. между двумя нулями функции найдется хотя бы одна точка, в которой производная функции равна нулю.

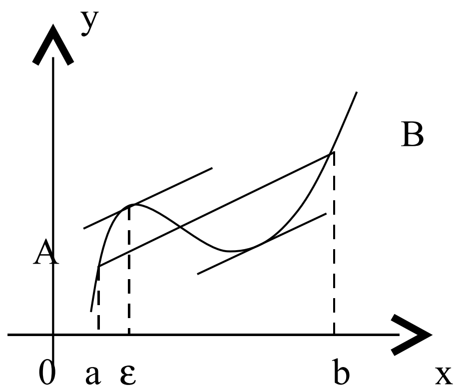
2) Если на рассматриваемом интервале (a, b) функция f(x) имеет производную (n-1)- го порядка и n раз обращается в нуль, то существует по крайней мере одна точка интервала, в котором производная (n – 1) – го порядка равна нулю.

Теорема Лагранжа.

(Жозеф Луи Лагранж (1736-1813) французский математик)

Если функция f(x) непрерывна на отрезке [a, b] и дифференцируема на интервале (a, b), то на этом интервале найдется по крайней мере одна точка ε $a < \varepsilon < b$, *такая, что* $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(\varepsilon)$.

Отношение $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ равно угловому коэффициенту секущей АВ.



Если функция f(x) удовлетворяет условиям теоремы, то на интервале (a, b) существует точка ε такая, что в соответствующей точке кривой y = f(x) касательная параллельна секущей, соединяющей точки А и В. Таких точек может быть и несколько, но одна существует точно.

$$f'(\varepsilon) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

Определение. Выражение $f(b)-f(a) = f'(\varepsilon)(b-a)$ называется **формулой Лагранжа** или **формулой конечных приращений.**

В дальнейшем эта формула будет очень часто применяться для доказательства самых разных теорем.

Иногда формулу Лагранжа записывают в несколько другом виде:

$$\Delta y = f'(x+\theta\Delta x)\Delta x,$$

где $0 < \theta < 1$, $\Delta x = b - a$, $\Delta y = f(b) - f(a)$.

Теорема Коши.

(Коши (1789-1857)- французский математик)

Если функции f(x) и g(x) непрерывны на отрезке [a, b] и дифференцируемы на интервале (a, b) и $g'(x) \neq 0$ на интервале (a, b), то существует по крайней мере одна точка ε, a < ε < b, такая, что

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\varepsilon)}{g'(\varepsilon)}.$$

Т.е. отношение приращений функций на данном отрезке равно отношению производных в точке ε.

Раскрытие неопределенностей.

Правило Лопиталя.

(Лопиталь (1661-1704) – французский математик)

К разряду неопределенностей принято относить следующие соотношения: $\frac{0}{0}; \frac{\infty}{\infty}; \infty \cdot 0; \infty^0; 1^\infty; \infty - \infty$

Теорема (правило Лопиталя). *Если функции f(x) и g(x) дифференцируемы в вблизи точки a, непрерывны в точке a, $g'(x)$ отлична от нуля вблизи a и f(a) = g(a) = 0, то предел отношения функций при x→a равен пределу отношения их производных, если этот предел (конечный или бесконечный) существует.*

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Пример: Найти предел $\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1 + \ln x}{e^x - e}$.

Как видно, при попытке непосредственного вычисления предела получается неопределенность вида $\frac{0}{0}$. Функции, входящие в числитель и знаменатель дроби удовлетворяют требованиям теоремы Лопиталя.

$$f'(x) = 2x + \frac{1}{x}; \qquad g'(x) = e^x;$$

$$\lim_{x \to 1} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{2x + \frac{1}{x}}{e^x} = \frac{2+1}{e} = \frac{3}{e};$$

Производные и дифференциалы высших порядков.

Пусть функция f(x)- дифференцируема на некотором интервале. Тогда, дифференцируя ее, получаем первую производную

$$y' = f'(x) = \frac{df(x)}{dx}$$

Если найти производную функции f′(x), получим **вторую производную** функции f(x).

$$y'' = f''(x) = \frac{d^2 f(x)}{dx^2} \text{ т.е. } y'' = (y')' \text{ или } \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right).$$

Этот процесс можно продолжить и далее, находя производные степени n.

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}}\right).$$

Лекция 15. Исследование функций с помощью производной.

Возрастание и убывание функций. Экстремум функции.

Теорема.

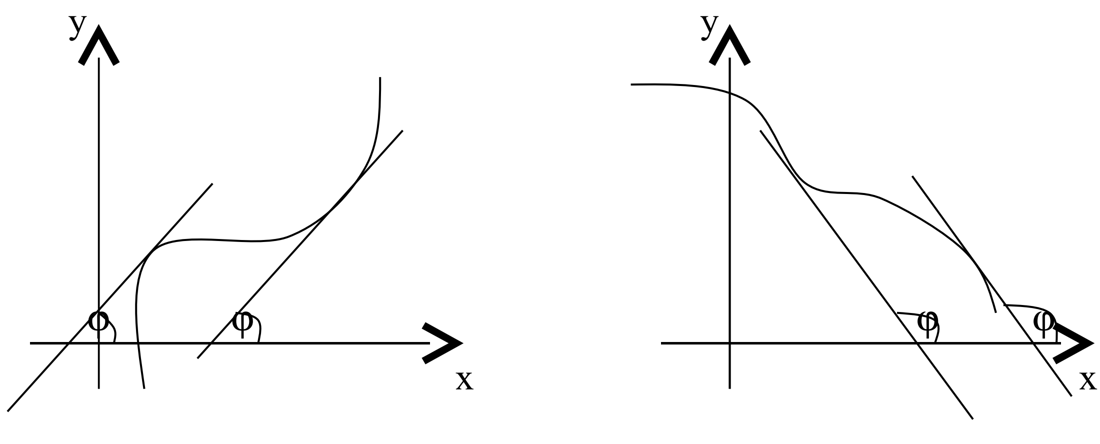
1) *Если функция f(x) имеет производную на отрезке [a, b] и возрастает на этом отрезке, то ее производная на этом отрезке неотрицательна, т.е. $f'(x) \geq 0$.*

2) *Если функция f(x) непрерывна на отрезке [a, b] и дифференцируема на промежутке (a, b), причем $f'(x) > 0$ для $a < x < b$, то эта функция возрастает на отрезке [a, b].*

Аналогично можно сделать вывод о том, что если функция f(x) убывает на отрезке [a, b], то $f'(x) \leq 0$ на этом отрезке. Если $f'(x) < 0$ в промежутке (a, b), то f(x) убывает на отрезке [a, b].

Конечно, данное утверждение справедливо, если функция f(x) непрерывна на отрезке [a, b] и дифференцируема на интервале (a, b).

Доказанную выше теорему можно проиллюстрировать геометрически:



Точки экстремума.

Определение. Функция f(x) имеет в точке x_1 максимум, если ее значение в этой точке больше значений во всех точках некоторого интервала, содержащего точку x_1. Функция f(x) имеет в точке x_2 минимум, если $f(x_2 +\Delta x) > f(x_2)$ при любом Δx (Δx может быть и отрицательным).

Очевидно, что функция, определенная на отрезке может иметь максимум и минимум только в точках, находящихся внутри этого отрезка. Нельзя также путать максимум и минимум функции с ее наибольшим и наименьшим значением на отрезке – это понятия принципиально различные.

Определение. Точки максимума и минимума функции называются **точками экстремума.**

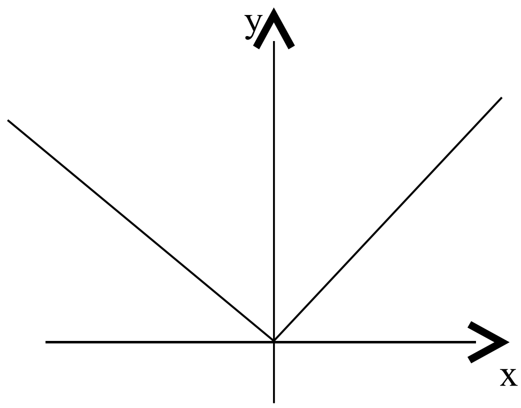
Теорема. (необходимое условие существования экстремума) *Если функция f(x) дифференцируема в точке $x = x_1$ и точка x_1 является точкой экстремума, то производная функции обращается в нуль в этой точке.*

Следствие. Обратное утверждение неверно. Если производная функции в некоторой точке равна нулю, то это еще не значит, что в этой точке функция имеет экстремум. Красноречивый пример этого – функция $y = x^3$, производная которой в точке x = 0 равна нулю, однако в этой точке функция имеет только перегиб, а не максимум или минимум.

Определение. **Критическими точками** функции называются точки, в которых производная функции не существует или равна нулю.

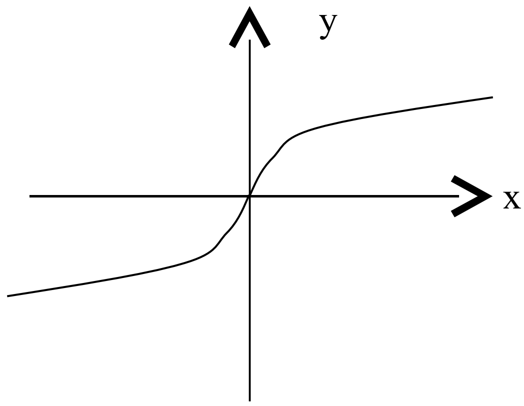
Рассмотренная выше утверждение дает нам необходимые условия существования экстремума, но этого недостаточно.

Пример: $f(x) = |x|$



В точке x = 0 функция имеет минимум, но не имеет производной

Пример: $f(x) = \sqrt[3]{x}$



В точке x = 0 функция не имеет максимума, ни минимума, но имеет производную.

Вообще говоря, функция f(x) может иметь экстремум в точках, где производная не существует или равна нулю.

Теорема. (Достаточные условия существования экстремума)

Пусть функция f(x) непрерывна в интервале (a, b), который содержит критическую точку x_1*, и дифференцируема во всех точках этого интервала (кроме, может быть, самой точки* x_1*).*

Если при переходе через точку x_1 *слева направо производная функции* $f'(x)$ *меняет знак с "+" на "-", то в точке* $x = x_1$ *функция f(x) имеет максимум, а если производная меняет знак с "-" на "+"- то функция имеет минимум.*

На основе вышесказанного можно выработать единый порядок действий при нахождении наибольшего и наименьшего значения функции на отрезке:

1) Найти критические точки функции.
2) Найти значения функции в критических точках.
3) Найти значения функции на концах отрезка.
4) Выбрать среди полученных значений наибольшее и наименьшее.

Исследование функции на экстремум с помощью производных высших порядков.

Пусть в точке $x = x_1$ $f'(x_1) = 0$ и $f''(x_1)$ существует и непрерывна в некоторой окрестности точки x_1.

Теорема. *Если* $f'(x_1) = 0$*, то функция f(x) в точке* $x = x_1$ *имеет максимум, если* $f''(x_1)<0$ *и минимум, если* $f''(x_1)>0$*.*

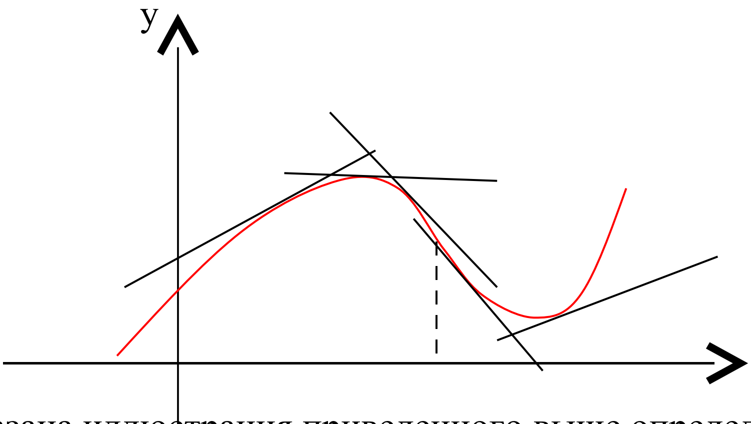
Для случая минимума функции теорема доказывается аналогично.

Если $f''(x) = 0$, то характер критической точки неизвестен. Для его определения требуется дальнейшее исследование.

Лекция 16. Выпуклость вогнутость, асимптоты графика функции. Полное исследование функций.

Выпуклость и вогнутость кривой. Точки перегиба.

Определение. Кривая обращена выпуклостью **вверх** на интервале (a, b), если все ее точки лежат ниже любой ее касательной на этом интервале. Кривая, обращенная выпуклостью вверх, называется **выпуклой**, а кривая, обращенная выпуклостью вниз – называется **вогнутой**.



На рисунке показана иллюстрация приведенного выше определения.

Теорема 1. *Если во всех точках интервала (a, b) вторая производная функции f(x) отрицательна, то кривая y = f(x) обращена выпуклостью вверх (выпукла).*

Определение. Точка, отделяющая выпуклую часть кривой от вогнутой, называется **точкой перегиба**.

Очевидно, что в точке перегиба касательная пересекает кривую.

Теорема 2. *Пусть кривая определяется уравнением y = f(x). Если вторая производная $f''(a) = 0$ или $f''(a)$ не существует и при переходе через точку x = a $f''(x)$ меняет знак, то точка кривой с абсциссой x = a является точкой перегиба.*

Асимптоты.

При исследовании функций часто бывает, что при удалении координаты x точки кривой в бесконечность кривая неограниченно приближается к некоторой прямой.

Определение. Прямая называется **асимптотой** кривой, если расстояние от переменной точки кривой до этой прямой при удалении точки в бесконечность стремится к нулю.

Следует отметить, что не любая кривая имеет асимптоту. Асимптоты могут быть прямые и наклонные. Исследование функций на наличие асимптот имеет большое значение и позволяет более точно определить характер функции и поведение графика кривой.

Вообще говоря, кривая, неограниченно приближаясь к своей асимптоте, может и пересекать ее, причем не в одной точке, как показано на приведенном ниже графике функции $y = x + e^{-\frac{x}{3}} \sin x$. Ее наклонная асимптота y = x.

Рассмотрим подробнее методы нахождения асимптот кривых.

Вертикальные асимптоты.

Из определения асимптоты следует, что если $\lim\limits_{x\to a+0} f(x) = \infty$ или $\lim\limits_{x\to a-0} f(x) = \infty$ или $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$, то прямая х = а – асимптота кривой y = f(x).

Например, для функции $f(x) = \dfrac{2}{x-5}$ прямая х = 5 является вертикальной асимптотой.

Наклонные асимптоты.

Предположим, что кривая y = f(x) имеет наклонную асимптоту

y = kx + b, где $k = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x}$; $b = \lim\limits_{x\to\infty} [f(x) - kx]$.

Отметим, что горизонтальные асимптоты являются частным случаем наклонных асимптот при k =0.

Пример. Найти асимптоты и построить график функции $y = \dfrac{x^2 + 2x - 1}{x}$.

1) Вертикальные асимптоты: $y\to+\infty$ $x\to 0-0$: $y\to-\infty$ $x\to 0+0$, следовательно, х = 0- вертикальная асимптота.

2) Наклонные асимптоты: $k = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2 + 2x - 1}{x^2} = \lim\limits_{x\to\infty} \left(1 + \dfrac{2}{x} - \dfrac{1}{x^2}\right) = 1$

$$b = \lim_{x\to\infty}(f(x) - x) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2 + 2x - 1}{x} - x\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2 + 2x - 1 - x^2}{x}\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x - 1}{x}\right) = \lim_{x\to\infty}\left(2 - \frac{1}{x}\right) = 2$$

Таким образом, прямая y = x + 2 является наклонной асимптотой.

Схема исследования функции и построение графика

Процесс исследования функции состоит из нескольких этапов. Для наиболее полного представления о поведении функции и характере ее графика необходимо отыскать:

1) Область существования функции.

Это понятие включает в себя и область значений и область определения функции.

2) Точки разрыва. (Если они имеются).
3) Интервалы возрастания и убывания.
4) Точки максимума и минимума.
5) Максимальное и минимальное значение функции на ее области определения.
6) Области выпуклости и вогнутости.
7) Точки перегиба. (Если они имеются).

8) Асимптоты. (Если они имеются).

9) Построение графика.

Применение этой схемы рассмотрим на примере.

Пример. Исследовать функцию $y = \dfrac{x^3}{x^2 - 1}$ и построить ее график.

Находим область существования функции. Очевидно, что *областью определения* функции является область $(-\infty; -1) \cup (-1; 1) \cup (1; \infty)$.

В свою очередь, видно, что прямые $x = 1$, $x = -1$ являются *вертикальными асимптотами* кривой.

Областью значений данной функции является интервал $(-\infty; \infty)$.

Точками разрыва функции являются точки $x = 1$, $x = -1$.

Находим *критические точки*.

Найдем производную функции

$$y' = \frac{3x^2(x^2-1) - 2x\cdot x^3}{(x^2-1)^2} = \frac{3x^4 - 3x^2 - 2x^4}{(x^2-1)^2} = \frac{x^4 - 3x^2}{(x^2-1)^2}$$

Критические точки: $x = 0$; $x = -\sqrt{3}$; $x = \sqrt{3}$; $x = -1$; $x = 1$.

Найдем вторую производную функции

$$y'' = \frac{(4x^3-6x)(x^2-1)^2 - (x^4-3x^2)4x(x^2-1)}{(x^2-1)^4} =$$

$$= \frac{(4x^3-6x)(x^4-2x^2+1) - (x^4-3x^2)(4x^3-4x)}{(x^2-1)^4} =$$

$$= \frac{4x^7 - 8x^5 + 4x^3 - 6x^5 + 12x^3 - 6x - 4x^7 + 4x^5 + 12x^5 - 12x^3}{(x^2-1)^4} =$$

$$= \frac{2x^5 + 4x^3 - 6x}{(x^2-1)^4} = \frac{2x(x^4 + 2x^2 - 3)}{(x^2-1)^4} = \frac{2x(x^2+3)(x^2-1)}{(x^2-1)^4} = \frac{2x(x^2+3)}{(x^2-1)^3}.$$

Определим выпуклость и вогнутость кривой на промежутках.

$-\infty < x < -\sqrt{3}$, $y'' < 0$, кривая выпуклая

$-\sqrt{3} < x < -1$, $y'' < 0$, кривая выпуклая

$-1 < x < 0$, $y'' > 0$, кривая вогнутая

$0 < x < 1$, $y'' < 0$, кривая выпуклая

$1 < x < \sqrt{3}$, $y'' > 0$, кривая вогнутая

$\sqrt{3} < x < \infty$, $y'' > 0$, кривая вогнутая

Находим промежутки *возрастания* и *убывания* функции. Для этого определяем знаки производной функции на промежутках.

$-\infty < x < -\sqrt{3}$, $y' > 0$, функция возрастает

$-\sqrt{3} < x < -1$, $y' < 0$, функция убывает

$-1 < x < 0$, $y' < 0$, функция убывает

$0 < x < 1$, $y' < 0$, функция убывает

$1 < x < \sqrt{3}$, $y' < 0$, функция убывает

$\sqrt{3} < x < \infty$, $y'' > 0$, функция возрастает

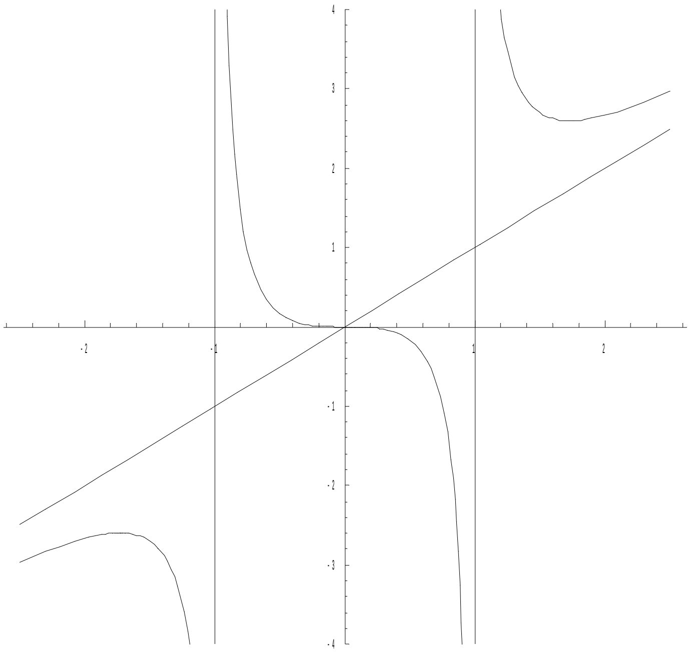
Видно, что точка $x = -\sqrt{3}$ является точкой *максимума*, а точка $x = \sqrt{3}$ является точкой *минимума*. Значения функции в этих точках равны соответственно $-3\sqrt{3}/2$ и $3\sqrt{3}/2$.

Про вертикальные *асимптоты* было уже сказано выше. Теперь найдем *наклонные асимптоты*.

$$k = \lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x^2-1} = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{1-\frac{1}{x^2}} = 1;$$

$$b = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3}{x^2-1} - x\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3 - x^3 + x}{x^2-1}\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{x}{x^2-1} = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{x^2}} = 0$$

Уравнение наклонной асимптоты – $y = x$. Построим *график* функции:



<u>Определение:</u> Функция F(x) называется **первообразной функцией** функции f(x) на отрезке [a, b], если в любой точке этого отрезка верно равенство: $F'(x) = f(x)$.

Надо отметить, что первообразных для одной и той же функции может быть бесконечно много. Они будут отличаться друг от друга на некоторое постоянное число.

$$F_1(x) = F_2(x) + C.$$

<u>Неопределенный интеграл.</u>

<u>Определение:</u> Неопределенным интегралом функции f(x) называется совокупность первообразных функций, которые определены соотношением:

F(x) + C.

Записывают: $\int f(x)dx = F(x) + C;$

Условием существования неопределенного интеграла на некотором отрезке является непрерывность функции на этом отрезке.

<u>Свойства:</u>

1. $\left(\int f(x)dx\right)' = (F(x) + C)' = f(x);$

2. $d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx;$

3. $\int dF(x) = F(x) + C;$

4. $\int (u + v - w)dx = \int udx + \int vdx - \int wdx;$ где u, v, w – некоторые функции от x.

1. $\int C \cdot f(x)dx = C \cdot \int f(x)dx;$

<u>Пример:</u> $\int (x^2 - 2\sin x + 1)dx = \int x^2dx - 2\int \sin xdx + \int dx = \frac{1}{3}x^3 + 2\cos x + x + C;$

Нахождение значения неопределенного интеграла связано главным образом с нахождением первообразной функции. Для некоторых функций это достаточно сложная задача. Ниже будут рассмотрены способы нахождения неопределенных интегралов для основных классов функций – рациональных, иррациональных, тригонометрических, показательных и др.

Для удобства значения неопределенных интегралов большинства элементарных функций собраны в специальные таблицы интегралов, которые бывают иногда весьма объемными. В них включены различные наиболее часто встречающиеся комбинации функций. Но большинство представленных в этих таблицах формул являются следствиями друг друга, поэтому ниже приведем таблицу основных интегралов, с помощью которой можно получить значения неопределенных интегралов различных функций.

	Интеграл	Значение		Интеграл	Значение
1	$\int tgx dx$	$-\ln\lvert\cos x\rvert+C$	9	$\int e^x dx$	$e^x + C$
2	$\int ctgx dx$	$\ln\lvert\sin x\rvert + C$	10	$\int \cos x dx$	$\sin x + C$
3	$\int a^x dx$	$\frac{a^x}{\ln a} + C$	11	$\int \sin x dx$	$-\cos x + C$
4	$\int \frac{dx}{a^2 + x^2}$	$\frac{1}{a} arctg \frac{x}{a} + C$	12	$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx$	$tgx + C$
5	$\int \frac{dx}{x^2 - a^2}$	$\frac{1}{2a} \ln\left\lvert\frac{x+a}{x-a}\right\rvert + C$	13	$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx$	$-ctgx + C$
6	$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}}$	$\ln\left\lvert x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right\rvert + C$	14	$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}$	$\arcsin \frac{x}{a} + C$
7	$\int x^\alpha dx$	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha + 1} + C, \alpha \neq -1$	15	$\int \frac{1}{\cos x} dx$	$\ln\left\lvert tg\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right\rvert + C$
8	$\int \frac{dx}{x}$	$\ln\lvert x\rvert + C$	16	$\int \frac{1}{\sin x} dx$	$\ln\left\lvert tg \frac{x}{2}\right\rvert + C$

Методы интегрирования.

Рассмотрим три основных метода интегрирования.

Непосредственное интегрирование.

Метод непосредственного интегрирования основан на предположении о возможном значении первообразной функции с дальнейшей проверкой этого значения дифференцированием. Вообще, заметим, что дифференцирование является мощным инструментом проверки результатов интегрирования.

Рассмотрим применение этого метода на примере:

Требуется найти значение интеграла $\int \frac{dx}{x}$. На основе известной формулы дифференцирования $(\ln x)' = \frac{1}{x}$ можно сделать вывод, что искомый интеграл равен $\ln x + C$, где C – некоторое постоянное число. Однако, с другой стороны $(\ln(-x))' = -\frac{1}{x} \cdot (-1) = \frac{1}{x}$. Таким образом, окончательно можно сделать вывод:

$$\int \frac{dx}{x} = \ln\lvert x\rvert + C$$

Способ подстановки (замены переменных).

Теорема: Если требуется найти интеграл $\int f(x)dx$, но сложно отыскать первообразную, то с помощью замены x = φ(t) и dx = φ′(t)dt получается:

$$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$$

Пример. Найти неопределенный интеграл $\int \sqrt{\sin x}\cos x dx$.

Сделаем замену *t = sinx, dt = cosxdt.*

$$\int \sqrt{t}dt = \int t^{1/2}dt = \frac{2}{3}t^{3/2} + C = \frac{2}{3}\sin^{3/2} x + C.$$

Пример. $\int x(x^2+1)^{3/2}dx.$

Замена $t = x^2 + 1; \quad dt = 2xdx; \quad dx = \frac{dt}{2x}$; Получаем:

$$\int t^{3/2}\frac{dt}{2} = \frac{1}{2}\int t^{3/2}dt = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{5}t^{5/2} + C = \frac{t^{5/2}}{5} + C = \frac{(x^2+1)^{5/2}}{5} + C;$$

Интегрирование по частям.

Способ основан на известной формуле производной произведения:

(uv)′ = u′v + v′u

где u и v – некоторые функции от x.

В дифференциальной форме: d(uv) = udv + vdu

Проинтегрировав, получаем: $\int d(uv) = \int udv + \int vdu$, а в соответствии с приведенными выше свойствами неопределенного интеграла:

$uv = \int udv + \int vdu$ или $\int udv = uv - \int vdu$;

Получили формулу интегрирования по частям, которая позволяет находить интегралы многих элементарных функций.

Пример. $\int x^2 \sin x dx = \left\{\begin{matrix} u = x^2; & dv = \sin x dx; \\ du = 2xdx; & v = -\cos x \end{matrix}\right\} = -x^2\cos x + \int \cos x \cdot 2xdx =$

$$= \left\{\begin{matrix} u = x; & dv = \cos x dx; \\ du = dx; & v = \sin x \end{matrix}\right\} = -x^2\cos x + 2\left[x\sin x - \int \sin x dx\right] = -x^2\cos x + 2x\sin x + 2\cos x + C.$$

Как видно, последовательное применение формулы интегрирования по частям позволяет постепенно упростить функцию и привести интеграл к табличному.

Пример. $\int e^{2x}\cos x dx = \begin{Bmatrix} u = e^{2x}; & du = 2e^{2x}dx; \\ dv = \cos x dx; & v = \sin x \end{Bmatrix} = e^{2x}\sin x - \int \sin x \cdot 2e^{2x}dx =$

$$= \begin{Bmatrix} u = e^{2x}; & du = 2e^{2x}dx; \\ dv = \sin x dx; & v = -\cos x; \end{Bmatrix} = e^{2x}\sin x - 2\left[-e^{2x}\cos x - \int -\cos x \cdot 2e^{2x}dx\right] = e^{2x}\sin x +$$

$$+ 2e^{2x}\cos x - 4\int \cos x e^{2x}dx$$

Видно, что в результате повторного применения интегрирования по частям функцию не удалось упростить к табличному виду. Однако, последний полученный интеграл ничем не отличается от исходного. Поэтому перенесем его в левую часть равенства.

$$5\int e^{2x}\cos x dx = e^{2x}(\sin x + 2\cos x)$$

$$\int e^{2x}\cos x dx = \frac{e^{2x}}{5}(\sin x + 2\cos x) + C.$$

Таким образом, интеграл найден вообще без применения таблиц интегралов.

Прежде чем рассмотреть подробно методы интегрирования различных классов функций, приведем еще несколько примеров нахождения неопределенных интегралов приведением их к табличным.

Пример.

$$\int (2x+1)^{20}dx = \{2x+1 = t; \quad dt = 2dx;\} = \int t^{20}\cdot\frac{1}{2}dt = \frac{1}{21}t^{21}\cdot\frac{1}{2} + C = \frac{t^{21}}{42} + C = \frac{(2x+1)^{21}}{42} + C$$

Пример.

$$\int \frac{\sqrt{2-x^2}+\sqrt{2+x^2}}{\sqrt{4-x^4}}dx = \int \frac{\sqrt{2-x^2}+\sqrt{2+x^2}}{\sqrt{2-x^2}\sqrt{2+x^2}}dx = \int \frac{dx}{\sqrt{2+x^2}} + \int \frac{dx}{\sqrt{2-x^2}} = \ln\left|x+\sqrt{x^2+2}\right| +$$

$$+ \arcsin\frac{x}{\sqrt{2}} + C.$$

Пример.

$$\int \frac{\cos x}{\sqrt{\sin^3 x}}dx = \int \sin^{-3/2} x\cos x dx = \{\sin x = t; \quad dt = \cos x dx\} = \int t^{-3/2}dt = -2t^{-1/2} + C =$$

$$= -2\sin^{-1/2}x + C = -\frac{2}{\sqrt{\sin x}} + C.$$

Пример.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{-x^2-2x+8}} = \int \frac{dx}{\sqrt{-x^2-2x-1+9}} = \{dx = d(x+1)\} = \int \frac{d(x+1)}{\sqrt{9-(x+1)^2}} = \{x+1 = t\} =$$

$$= \int \frac{dt}{\sqrt{3^2-t^2}} = \arcsin\frac{t}{3} + C = \arcsin\frac{x+1}{3} + C.$$

Пример.

$$\int x\ln x dx = \left\{\begin{matrix} u = \ln x; & dv = xdx; \\ du = \frac{1}{x}dx; & v = \frac{x^2}{2}; \end{matrix}\right\} = \frac{x^2}{2}\ln x - \int \frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{x}dx = \frac{x^2\ln x}{2} - \frac{1}{2}\int xdx = \frac{x^2\ln x}{2} - \frac{x^2}{4} + C =$$

$$= \frac{x^2}{4}(2\ln x - 1) + C.$$

Пример.

$$\int e^{\cos^2 x}\sin 2xdx = \left\{t = e^{\cos^2 x}; \quad dt = -e^{\cos^2 x}\cdot 2\cos x\sin x = -\sin 2x\cdot e^{\cos^2 x}dx;\right\} = -\int dt = -t + C =$$

$$= -e^{\cos^2 x} + C.$$

Пример.

$$\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x}} = \left\{\sqrt{x} = t; \quad \frac{dt}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2t}\right\} = \int \frac{2tdt}{(t^2+1)t} = 2\int \frac{dt}{t^2+1} = 2arctgt + C = 2arctg\sqrt{x} + C.$$

Лекция 17. Интегрирование элементарных дробей.

Определение: **Элементарными** называются дроби следующих четырех типов:

I. $\frac{1}{ax+b}$; III. $\frac{Mx+N}{ax^2+bx+c}$;

II. $\frac{1}{(ax+b)^m}$; IV. $\frac{Mx+N}{(ax^2+bx+c)^n}$

m, n – натуральные числа (m ≥ 2, n ≥ 2) и $b^2 – 4ac <0$.

Первые два типа интегралов от элементарных дробей довольно просто приводятся к табличным подстановкой t = ax + b.

I. $$\int \frac{dx}{ax+b} = \frac{1}{a}\int \frac{dt}{t} = \frac{1}{a}\ln|t| + C = \frac{1}{a}\ln|ax+b| + C.$$

II. $$\int \frac{dx}{(ax+b)^m} = \frac{1}{a}\int \frac{dt}{t^m} = -\frac{1}{a(m-1)t^{m-1}} + C = -\frac{1}{a(m-1)(ax+b)^{m-1}} + C;$$

Рассмотрим метод интегрирования элементарных дробей вида III.

Интеграл дроби вида III может быть представлен в виде:

$$\int \frac{Ax+B}{x^2+px+q}dx = \int \frac{\frac{A}{2}(2x+p) + \left(B - \frac{Ap}{2}\right)}{x^2+px+q}dx = \frac{A}{2}\int \frac{2x+p}{x^2+px+q}dx + \left(B - \frac{Ap}{2}\right)\int \frac{dx}{x^2+px+q} =$$

$$= \frac{A}{2}\ln|x^2+px+q| + \left(B - \frac{Ap}{2}\right)\int \frac{dx}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2 + \left(q - \frac{p^2}{4}\right)} = \frac{A}{2}\ln|x^2+px+q| + \frac{2B - Ap}{\sqrt{4q-p^2}}\cdot$$

$$\cdot arctg\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}}+C$$

Здесь в общем виде показано приведение интеграла дроби вида III к двум табличным интегралам.

Интегрирование рациональных дробей.

Для того, чтобы проинтегрировать рациональную дробь необходимо разложить ее на элементарные дроби.

Теорема: Если $R(x)=\frac{Q(x)}{P(x)}$ - правильная рациональная дробь, знаменатель P(x) которой представлен в виде произведения линейных и квадратичных множителей (отметим, что любой многочлен с действительными коэффициентами может быть представлен в таком виде:

$$P(x) = (x - a)^{\alpha}\ldots(x - b)^{\beta}(x^2 + px + q)^{\lambda}\ldots(x^2 + rx + s)^{\mu}),$$

то эта дробь может быть разложена на элементарные по следующей схеме:

$$\frac{Q(x)}{P(x)}=\frac{A_1}{x-a}+\frac{A_2}{(x-a)^2}+\ldots+\frac{A_\alpha}{(x-a)^\alpha}+\ldots+\frac{B_1}{(x-b)}+\frac{B_2}{(x-b)^2}+\ldots+\frac{B_\beta}{(x-b)^\beta}+\frac{M_1x+N_1}{x^2+px+q}+$$
$$+\frac{M_2x+N_2}{(x^2+px+q)^2}+\ldots+\frac{M_\lambda x+N_\lambda}{(x^2+px+q)^\lambda}+\ldots+\frac{R_1x+S_1}{x^2+rx+s}+\frac{R_2x+S_2}{(x^2+rx+s)^2}+\ldots+\frac{R_\mu x+S_\mu}{(x^2+rx+s)^\mu}$$

где A_i, B_i, M_i, N_i, R_i, S_i – некоторые постоянные величины.

При интегрировании рациональных дробей прибегают к разложению исходной дроби на элементарные. Для нахождения величин A_i, B_i, M_i, N_i, R_i, S_i применяют так называемый **метод неопределенных коэффициентов**, суть которого состоит в том, что для того, чтобы два многочлена были тождественно равны, необходимо и достаточно, чтобы были равны коэффициенты при одинаковых степенях x.

Применение этого метода рассмотрим на конкретном примере.

Для того, чтобы избежать при нахождении неопределенных коэффициентов раскрытия скобок, группировки и решения системы уравнений (которая в некоторых случаях может оказаться достаточно большой) применяют так называемый **метод произвольных значений**. Суть метода состоит в том, что в полученное выше выражение подставляются поочередно несколько (по числу неопределенных коэффициентов) произвольных значений x. Для упрощения вычислений принято в качестве произвольных значений принимать точки, при которых знаменатель дроби равен нулю.

Пример.

$$\int\frac{3x^4+14x^2+7x+15}{(x+3)(x^2+2)^2}dx=\int\frac{A}{x+3}dx+\int\frac{Bx+C}{(x^2+2)^2}dx+\int\frac{Dx+E}{x^2+2}dx$$

Найдем неопределенные коэффициенты:

$$A(x^2+2)^2+(Bx+C)(x+3)+(Dx+E)(x+3)(x^2+2)=3x^4+14x^2+7x+15$$

$$Ax^4+4Ax^2+4A+Bx^2+3Bx+Cx+3C+Dx^4+2Dx^2+3Dx^3+6Dx+Ex^3+2Ex+3Ex^2+6E=$$
$$=(D+A)x^4+(3D+E)x^3+(A+B+2D+3E+4A)x^2+(3B+C+6D+2E)x+(2A+3C+6E+4A)$$

$$\begin{cases} D+A=3 \\ 3D+E=0 \\ B+2D+3E+4A=14 \\ 3B+C+6D+2E=7 \\ 3C+6E+4A=15 \end{cases} \qquad \begin{cases} D=3-A \\ E=-9+3A \\ B+6-2A-27+9A+4A=14 \\ 3B+C+18-6A-18+6A=7 \\ 3C-54+18A+4A=15 \end{cases}$$

$$\begin{cases} D=3-A \\ E=-9+3A \\ B+11A=35 \\ 3B+C=7 \\ 3C+22A=69 \end{cases} \qquad \begin{cases} D=3-A \\ E=-9+3A \\ 11A=35-B \\ C=7-3B \\ 21-9B+70-2B=69 \end{cases} \qquad \begin{cases} A=3 \\ B=2 \\ C=1 \\ D=0 \\ E=0 \end{cases}$$

Тогда значение заданного интеграла:

$$3\int\frac{dx}{x+3}+\int\frac{2x+1}{(x^2+2)^2}dx=3\int\frac{dx}{x+3}+2\int\frac{x}{(x^2+2)^2}dx+\int\frac{dx}{(x^2+2)^2}=3\ln|x+3|-\frac{1}{x^2+2}+$$
$$+\frac{x}{4(x^2+2)}+\frac{1}{4\sqrt{2}}arctg\frac{x}{\sqrt{2}}+C.$$

Интегрирование некоторых тригонометрических функций.

Интеграл вида $\int R(\sin x,\cos x)dx$.

Здесь R – обозначение некоторой рациональной функции от переменных sinx и cosx.

Интегралы этого вида вычисляются с помощью подстановки $t=tg\frac{x}{2}$. Эта подстановка позволяет преобразовать тригонометрическую функцию в рациональную.

$$\sin x=\frac{2tg\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}}=\frac{2t}{1+t^2}, \qquad \cos x=\frac{1-tg^2\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}}=\frac{1-t^2}{1+t^2};$$

Тогда $x=2arctgt;\qquad dx=\frac{2dt}{1+t^2};$

Таким образом: $\int R(\sin x,\cos x)dx=\int R\left(\frac{2t}{1+t^2},\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{2}{1+t^2}dt=\int r(t)dt.$

Описанное выше преобразование называется **универсальной тригонометрической подстановкой.**

Пример.

$$\int \frac{dx}{4\sin x + 3\cos x + 5} = \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{4\frac{2t}{1+t^2} + 3\frac{1-t^2}{1+t^2} + 5} = 2\int \frac{dt}{8t + 3 - 3t^2 + 5 + 5t^2} = 2\int \frac{dt}{2t^2 + 8t + 8} =$$

$$= \int \frac{dt}{t^2 + 4t + 4} = \int \frac{dt}{(t+2)^2} = -\frac{1}{t+2} + C = -\frac{1}{tg\frac{x}{2} + 2} + C.$$

Интеграл вида $\int R(\sin x, \cos x)dx$ *если*

функция R является нечетной относительно cosx.

Несмотря на возможность вычисления такого интеграла с помощью универсальной тригонометрической подстановки, рациональнее применить подстановку *t = sinx*.

$$\int R(\sin x, \cos x)dx = \int \frac{R(\sin x, \cos x)}{\cos x}\cos x dx$$

Функция $\frac{R(\sin x, \cos x)}{\cos x}$ может содержать cosx только в четных степенях, а следовательно, может быть преобразована в рациональную функцию относительно sinx.

$$\int R(\sin x, \cos x)dx = \int r(\sin x)\cos x dx = \int r(t)dt.$$

Пример.

$$\int \frac{\cos^7 x dx}{\sin^4 x} = \left\{ \begin{array}{l} \sin x = t \\ dt = \cos x dx \\ \cos^2 x = 1 - \sin^2 x \end{array} \right\} = \int \frac{(1-t^2)^3}{t^4}dt = \int \frac{1 - 3t^2 + 3t^4 - t^6}{t^4}dt = \int \frac{dt}{t^4} - 3\int \frac{dt}{t^2} +$$

$$+ 3\int dt - \int t^2 dt = -\frac{1}{3t^3} + \frac{3}{t} + 3t - \frac{1}{3}t^3 = -\frac{1}{3\sin^3 x} + \frac{3}{\sin x} + 3\sin x - \frac{\sin^3 x}{3} + C.$$

Вообще говоря, для применения этого метода необходима только нечетность функции относительно косинуса, а степень синуса, входящего в функцию может быть любой, как целой, так и дробной.

Интеграл вида $\int R(\sin x, \cos x)dx$ *если*

функция R является нечетной относительно sinx.

По аналогии с рассмотренным выше случаем делается подстановка *t = cosx.*

Тогда $\int R(\sin x, \cos x)dx = \int r(\cos x)\sin x dx = -\int r(t)dt.$

Интеграл вида $\int R(\sin x, \cos x)dx$

функция R четная относительно sinx и cosx.

Для преобразования функции R в рациональную используется подстановка $t = tgx$.

Тогда $\int R(\sin x, \cos x)dx = \int r(t)dt$

Пример.

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x + 6\sin x\cos x - 16\cos^2 x} = \int \frac{\frac{1}{\cos^2 x}}{tg^2 x + 6tgx - 16}dx = \left\{ \begin{array}{l} tgx = t; \\ \frac{1}{\cos^2 x}dx = d(tgx) = dt \end{array} \right\} =$$

$$= \int \frac{dt}{t^2 + 6t - 16} = \int \frac{dt}{(t+3)^2 - 25} = \frac{1}{10}\ln\left|\frac{tgx + 3 - 5}{tgx + 3 + 5}\right| + C = \frac{1}{10}\ln\left|\frac{tgx - 2}{tgx + 8}\right| + C.$$

Интеграл произведения синусов и косинусов

различных аргументов.

В зависимости от типа произведения применятся одна из трех формул:

$$\int \cos mx \cos nx dx = \int \frac{1}{2}[\cos(m+n)x + \cos(m-n)x]dx = \frac{1}{2}\left[\frac{\sin(m+n)x}{m+n} + \frac{\sin(m-n)x}{m-n}\right]$$

$$\int \sin mx \cos nx dx = \int \frac{1}{2}[\sin(m+n)x + \sin(m-n)x]dx = \frac{1}{2}\left[-\frac{\cos(m+n)x}{m+n} - \frac{\cos(m-n)x}{m-n}\right]$$

$$\int \sin mx \sin nx dx = \int \frac{1}{2}[-\cos(m+n)x + \cos(m-n)x]dx = \frac{1}{2}\left[-\frac{\sin(m+n)}{m+n} + \frac{\sin(m-n)}{m-n}\right]$$

Пример.

$$\int \sin 7x \sin 2x dx = \frac{1}{2}\int \cos 5x dx - \frac{1}{2}\int \cos 9x dx = \frac{1}{10}\sin 5x - \frac{1}{18}\sin 9x + C.$$

Иногда при интегрировании тригонометрических функций удобно использовать общеизвестные тригонометрические формулы для понижения порядка функций.

Пример.

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x\cos^2 x} = \int \frac{4dx}{\sin^2 2x} = \left\{ \frac{dctg2x}{dx} = \frac{-2}{\sin^2 x} \right\} = -2ctg2x + C$$

Пример.

$$\int \sin^4 x dx = \int\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 2x\right)^2 dx = \frac{1}{4}\int(1-\cos 2x)^2 dx = \frac{1}{4}\int(1-2\cos 2x+\cos^2 2x)dx =$$

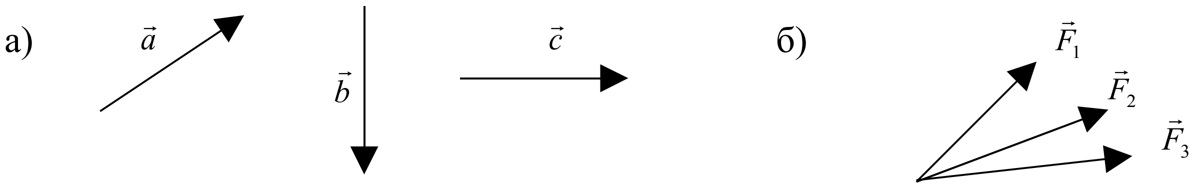
$$=\frac{1}{4}\int dx-\frac{1}{2}\int\cos 2xdx+\frac{1}{4}\int\cos^2 2xdx = \frac{x}{4}-\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{1}{4}\int\frac{1}{2}(1+\cos 4x)dx = \frac{x}{4}-\frac{\sin 2x}{4}+$$

$$+\frac{1}{8}\left[\int dx+\int\cos 4xdx\right] = \frac{x}{4}-\frac{\sin 2x}{4}+\frac{x}{8}+\frac{\sin 4x}{32} = \frac{1}{4}\left[\frac{3x}{2}-\sin 2x+\frac{\sin 4x}{8}\right]+C.$$

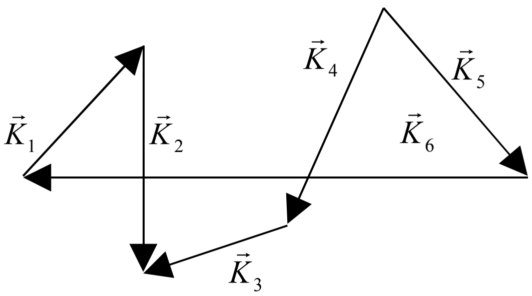
12. ФОНД ТЕСТОВЫХ И КОНТРОЛЬНЫХ ЗАДАНИЙ ДЛЯ ОЦЕНКИ ЗНАНИЙ.

Вариант расчетно-графической работы

1. Выполнить сложение векторов а) $2\vec{a}-\frac{1}{2}\vec{b}+3\vec{c}$; б) $-\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}-2\vec{c}$;
в) $\vec{F}_1+\vec{F}_2+\vec{F}_3$



2. Записать векторное выражение (равенство) для изображенных векторных сумм. Сделать чертеж.



3. Даны координаты вершин пирамиды A_1, A_2, A_3, A_4. Требуется средствами векторной алгебры найти:
а) координаты векторов $\vec{A_1A_2}$, $\vec{A_1A_3}$, $\vec{A_1A_4}$
б) длину ребра A_1A_2
в) площадь грани $A_1A_2A_3$ (используя векторное произведение векторов)
г) угол между ребрами A_1A_2 и A_1A_4
д) проекцию вектора A_1A_2 на вектор A_1A_4
е)объем пирамиды
ж) чертеж

4. Даны три силы : $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}$, приложенные к одной точке. Вычислить , какую работу производит равнодействующая этих сил, когда её точка приложения, двигаясь прямолинейно, перемещается из приложения А в положение В.

5. Сила $\vec{P}$ приложена к точке А . Определить величину и направляющие косинусы момента этой силы относительно точки В.
6. Решить задачу.

Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ образуют угол $\varphi = \frac{\pi}{4}$. Зная ,что $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 4$, вычислить $|\vec{a} + \vec{b}|$ и $|\vec{a} - \vec{b}|$.

7. Найти площадь треугольника с вершинами A(1;6), B(2;2), C(10;5).

Вариант расчетно-графической работы

1. Найти область определения функций

a) y = arcsin(x-5); b) $y = \frac{1}{\lg(1-x)} + \sqrt{x+2}$

2. Построить графики функций

a) y = $x^2 + 4|x-2| + 2$, если $-3 \le x \le 5$; b) y = 2sin(x-$\frac{\pi}{3}$)

3. Вычислить пределы функций

а) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n+2)! + (n+1)!}{(n+3)!}$; б) $\lim\limits_{x\to+\infty} x(\sqrt{x^2+1} - x)$

в) $\lim\limits_{x\to 3} \frac{2x^3 + 24x - 13x^2 - 9}{x^2 - 2x - 3}$; г) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{Sin2x}{Sin3x}$;

д) $\lim\limits_{x\to 3} \frac{\sqrt{x-1} - \sqrt{2}}{\sqrt{2x+3} - 3}$; е) $\lim\limits_{x\to 2} (2x-3)^{\frac{x}{x-2}}$; ж) $\lim\limits_{x\to+0} \frac{3}{1+3^{\frac{1}{x}}}$;

4. Исследовать на непрерывность функции и построить их графики.

а) $\lim\limits_{x\to+0} \frac{3}{1+3^{\frac{1}{x}}}$; б) $\lim\limits_{x\to 5+0} \frac{1}{x-5}$; в) y =$9^{\frac{1}{2-x}}$, x1= 0, x2 = 2.

г) y=$\begin{cases} -2(x+1), если x \le -1, \\ (x+1)^3, если -1 < x < 0, \\ x, если x \ge 0 \end{cases}$ д) y=$\frac{2}{x^2-9}$; е) y=$\begin{cases} x, при x \ne 1, \\ \frac{1}{2}, при x = 1 \end{cases}$

Варианты контрольной работы по теме «Комплексные числа»

Вариант 1.

1. Записать число в тригонометрической и показательной форме:

а) $z=-2\sqrt{3}-2i$; б) $z=(\mathrm{Sin}\frac{3\pi}{2}+i(1+\mathrm{Cos}\frac{3\pi}{2}))^4$.

2. Представить число в алгебраической форме

$Z=(\frac{3i}{-\sqrt{3}+i\sqrt{3}})^6$.

3.Дано: $z_1=-2+2i$, $z_2=2i^3$. Найти: а) $\frac{z_1}{z_2}$, б) $(\frac{z_1+z_2}{2\overline{z_1}})^4$

4. При каких $x\in R$, $y\in R$ числа $z_1=2x^2-\frac{3}{i}-yi-1$ и $z_2=y-3+x^2i-2i$ будут:

а) равными, б) сопряженными, в) противоположными.

5. Найти все значения корня $\sqrt{-1-i\sqrt{3}}$.

6. Решить уравнения: а) $x^2-3x+9=0$; б) $z^2+2z+5=0$, $z^3=-1-i$.

7. Какое множество точек комплексной плоскости задается условием $|z+2|<|z-2|$?

Вариант 2.

1. Записать число в тригонометрической и показательной форме:

а) $z=2-2\sqrt{3}i$, б) $z=\frac{Cos\frac{\pi}{6}+iSin\frac{\pi}{6}}{\sqrt{3i}}$.

2. Представить число в алгебраической форме

$z=\frac{2i}{(-1+i)^2}$.

3.Дано: $z_1=2-2i$, $z_2=-3i^{3\ 3}$. Найти: а) $\frac{\overline{z_1}}{z_2}$, б) $(\frac{\overline{z_1}+z_2}{3z_2})^{10}$

4. При каких $x\in R$, $y\in R$ числа $z_1=x-\frac{y^2}{i}-5+5i$, $z_2=y^2+1-3xi$ будут

а) равными, б) сопряженными, в) противоположными.

5.Решить уравнения: а) $x^2-4x+5=0$, б) $z^2+3z+12\frac{1}{4}=0$, в) $z^3=\sqrt{3}-6\sqrt{3}i$.

г) $z=\sqrt[3]{-1-i\sqrt{3}}$.

6. Какое множество точек комплексной плоскости задано условием $|2z-i|<2$?

Вариант 3.

1. Записать число в тригонометрической и показательной форме:

   а) z=-5-5i , б) z=$\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{i-1}\right)^6$.

2. Представить число в алгебраической форме z=$\frac{(Cos\frac{\pi}{3}-iSin\frac{\pi}{3})(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2})}{2i}$.

3. Дано: $z_1=-\sqrt{3}-3\sqrt{3}i$, $z_2=-i$. Найти: а) $\frac{\overline{z_1}}{z_2}$, б) $\left(\frac{z_1+\overline{z_2}}{4z_2}\right)^8$

4.Найти все значения корня $\sqrt[3]{-1+i\sqrt{3}}$

5. Решить уравнения: а) x^2 -3x+18=0, б) z^2 -2z+5,25=0, в) $z^3=4\sqrt{3}-4i$.

6. Какое множество точек комплексной плоскости задано условием $|z+1|<|z-i|$?

Комплект экзаменационных билетов

Вариант 1.

1. Вывести формулу первого замечательного предела.
2. Дать определение дифференциала функции. Записать формулу.
3. Решить задания:

   1) Найти y', если y $\frac{e^{2x}}{\arcsin 5x}+\sqrt{x^2-2x}$.

   2)Найти предел функции, используя правило Лопиталя

$\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{x}{x-1}-\frac{1}{\ln x}\right)$

   3) Найти первообразную $\int\left(\frac{4}{x\sqrt{x}}-\frac{1}{1+4x^2}+e^{3x}\right)dx$

   4) Построить линию $x^2+y^2=2x$

   5) Решить систему $\begin{cases} x+y+2z=-1, \\ 2x-y+2z=-4, \\ 4x+e+4z=-2. \end{cases}$

   6) Найти орты вектора $\vec{m}=\{2;1;2\sqrt{5}\}$

   7) Исследовать на непрерывность функцию y = $3^{\frac{1}{x-2}}$

Вариант 2.

1. Вывести теорему Лагранжа, записать формулу Лагранжа.
2. Записать основные теоремы о пределах. Доказать одну из них.
3. Решить задания:

1)Найти дифференциал функции $y = 3^{1-\cos^2} \sin^2 x$.

2)Исследовать на непрерывность функцию $y = \begin{cases} x^2, & если\ x \le 2 \\ x & , если\ 2 < x \le 3 \end{cases}$

3) Записать интервалы выпуклости и вогнутости графика функции. $y = x^4 - 8x^2 + 1$

4) Решить систему $\begin{cases} 2x - 3y - z = 0 \\ x + y - 2z = -3 \\ x + 2y + z = 3 \end{cases}$.

5) Найти векторное произведение векторов $\vec{a} = 3\vec{i} - 4\vec{j} + 2\vec{k}, \quad \vec{b} = 5\vec{j} - 2\vec{k}$.

6) Построить поверхности: а) $x + 3z = 6$; б) $2y^2 = x$

7) Найти первообразную функции: $\left(\int \frac{1}{1-2x} + \ell^{3x} - \frac{1}{\cos^2 x} \right) dx$

Вариант 3.

1. Определение экстремума функции. Необходимое условие существования экстремума.
2. Интегрирование алгебраических дробей.
3. Решить задания:

1) Найти $y', если\ y = 3^{1-\cos} \sin^2 x + \ell^{-5x}$

2) Исследовать на непрерывность функцию $y = \begin{cases} x^2, \text{если } x \le 2, \\ x, \text{если } x > 2 \end{cases}$

3) Найти интервалы выпуклости и вогнутости графика функции $y = x^4 - 8x^2 + 1$

4) Решить систему $\begin{cases} 2x - 3y - z = 0 \\ x + y - 2z = -3 \\ x + 2y + z = 3 \end{cases}$

5) Найти первообразную $\int \left(\frac{1}{1-2x} + \ell^{3x} - \frac{1}{\cos^2 x} \right) dx$

6) Найти асимптоты графика $y = \frac{1}{x^2 - 4}$.

7) Построить линию $x^2 - \frac{y^2}{4} = 1$.

Вариант 4.

1. Вывести формулу первого замечательного предела.
2. Дать определение дифференциала функции. Записать формулу.

3. Решить задания:

1) Найти y', если у $\dfrac{e^{2x}}{\arcsin 5x}+\sqrt{x^2-2x}$.

2) Найти предел функции, используя правило Лопиталя

$\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{x}{x-1}-\dfrac{1}{\ln}\right)$.

3) Найти первообразную $\displaystyle\int\left(\frac{4}{x\sqrt{x}}-\frac{1}{1+4x^2}+e^{3x}\right)dx$

4) Построить линию $x^2+y^2=2x$

5) Решить систему $\begin{cases} x+y+2z=-1 \\ 2x-y+2z=-4 \\ 4x+e+4z=-2 \end{cases}$

6) Найти орты вектора $\vec{m}=\{2;1;2\sqrt{5}\}$

7) Исследовать на непрерывность функцию у = $3^{\frac{1}{x-2}}$

Тестовые задания для контроля знаний

Вариант 1

1. $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 4 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & 2 \end{pmatrix}$ Найти: A^2; 2A – 3B; A^{-1} B; (AE - B^2).

2. Решить систему методом Гаусса, матричным методом и по формулам

Крамера: $\begin{cases} 2x+y+2z=-1, \\ x+2y-z=2, \\ x-2y+3z=-2. \end{cases}$

3. Построить линии:

а) $y^2=8x$; $x^2=-3y$; $y=-3\sqrt{-2x}$; $x=3+\sqrt{2y}$;

б) $5x^2+9y^2-30x+18y+9=0$; $y=1+\dfrac{4}{9}\sqrt{-6x+x^2}$;

в) $5x^2-4y^2+16y-36=0$; $y=-\dfrac{4}{3}\sqrt{x^2-9}$.

4. Построить область, ограниченную линиями:

а) $4y=8x-x^2$, $4y=x+6$; *б*) $z=4-x^2$, $y=x^2-2x$; *в*) $y=6x+x^2$, $y=x+6$.

5. Построить графики функций:

$а)\ y = |2 - x| + |2 + x|;\ \ б)\ y = x^2 + x - |x|;\ \ в)\ y = \sin 2x;\ \ г)\ y = 1 + \cos 2x.$

6. Найти интервал монотонности графика функции:

$$а)\ y = x\sqrt{1 - x^2};\quad б)\ y = x - 2\sin x;\quad в)\ y = \frac{x}{\ln x}.$$

7. Найти предел функции:

$а)\ \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{5x^2 - 4}{3 - 2x^2};$

$б)\ \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x - 1}{\sqrt{x + 3} - 2};$

$в)\ \lim\limits_{x\to 3}\left(\dfrac{1}{x - 3} - \dfrac{4}{x^2 - 9}\right);$

$г)\ \lim\limits_{x\to\infty}\left(1 - \dfrac{2}{x}\right)^{3x};$

$д)\ \lim\limits_{x\to 0}(1 + 5x)^{\frac{2}{x}}.$

8. Найти пределы функций, используя правило Лопиталя:

$а)\ \lim\limits_{x\to 0} x^2 \cdot e^{\frac{1}{x}};$

$б)\ \lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{5}{x^5 - 1} - \dfrac{7}{x^7 - 1}\right);$

$в)\ \lim\limits_{x\to \frac{1}{2}}(\sin 2x - 1)\cdot tg\pi x;$

$г)\ \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{2x} - 1}{arctg 5x};$

$д)\ \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\ln^2 x}{x^3}.$

9. Найти точки разрыва функции, исследовать их характер, построить график функции:

$$а)\ f(x) = \begin{cases} 2^x, & -1 < x < 1, \\ x - 1, & 1 \le x < 4, \\ 3, & x \ge 4. \end{cases}\qquad б)\ \begin{cases} 2\sqrt{x}, & 0 \le x < 1, \\ 4 - 2x, & 1 \le x < 2.5, \\ 2x - 7. & 2.5 \le x \le 4. \end{cases}$$

$$в)\ f(x) = \frac{1}{2^{\frac{1}{1-x}} + 1};\qquad г)\ f(x) = 3^{\frac{1}{x-2}}.$$

10. Найти экстремум функции:

$$а)\ y = (y - 2)e^{-\frac{1}{x}};\quad б)\ y = x^2\ln x;\quad в)\ y = \frac{\sqrt[3]{x^3 + 2}}{x}.$$

11. Найти интервалы выпуклости, вогнутости графика функции:

$$а)\ y=\frac{x^2-1}{x^2+1};\quad б)\ y=e^{2x-x^2};\quad в)\ y=x\cdot arctgx;\quad г)\ y=x\cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$$

12. Найти асимптоты графика функции:

$$а)\ y=\frac{x^4}{x^3-1};\quad б)\ y=\frac{x^3-3x}{x^2-1};\quad в)\ y=x\ln^2 x.$$

13. Найти производные функции:

$$а)\ y=tg\sqrt{x}\cdot\cos^2 x+\frac{e^{3x}}{\sin 5x};$$

$$б)\ y=2^{\sin x^3}+x^2\cdot\ln\sqrt{tgx};$$

$$в)\ y=\frac{1+x^2}{x^2-4}+\ln^3\left(x^2-3x\right)\cdot\cos^5 2x;$$

$$г)\ y=(\sin x)^{\sqrt{x}};$$

$$д)\ y=\frac{(x+2)^2(x-3)^4}{\sqrt{x-1}\cdot\sqrt[3]{x^2+6x}};$$

$$е)\ \begin{cases} x=e^t-\cos t,\\ y=e^{3t}+t^2.\end{cases}$$

14. Найти первообразные:

$а)\int\frac{4dx}{x^5};$ $б)\int\frac{arctg^5 x\cdot dx}{1+x^2};$ $в)\int\frac{dx}{1+\sqrt{x+1}};$

$д)\int\frac{dx}{\sqrt[4]{x^3}};$ $е)\int tg2x\cdot dx;$ $ж)\int\frac{(3x-1)\cdot dx}{x^2+2x+2};$

$з)\int\sqrt{\sin x}\cdot\cos x\cdot dx;$ $и)\int\frac{\left(x^4+5x\right)\cdot dx}{x+1};$ $к)\int\sin^2 4x\cdot dx;$

$л)\int\frac{\ln^3 x\cdot dx}{x};$ $м)\int xe^{3x}\cdot dx;$ $н)\int\cos^2 5x\cdot dx.$

15. Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями:

$а)\ y=x^2,\ y=0,\ x=-1,\ x=2;$

$б)\ y=\sqrt{x},\ y=0,\ x=0,\ x=4;$

$в)\ y=x^2,\ y=x+6;$

$г)\ y=x,\ y=2x,\ x=1,\ x=3.$

16. Установите сходимость несобственных интегралов:

I $а)\int_{0.3}^{\infty}\frac{dx}{x^3};$ $б)\int_0^{\infty}e^{3x}\cdot dx;$ $в)\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{2x\cdot dx}{x^2+1};$ $г)\int_0^{\infty}\frac{x\cdot dx}{(1+x)^3}.$

II $а)\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}};$ $б)\int_0^4\frac{dx}{x^2-3x-4};$ $в)\int_0^1 x\ln x\cdot dx;$ $г)\int_{-1}^1\frac{\left(x^2-3\right)\cdot dx}{\sqrt{x}}.$

Вариант 2

1. Найти область определения функции $f(x)=\sqrt{x-4}+\sqrt{8-x}$.

2. Дана функция $f(x)=\frac{1+x}{1-x}$. Найдите $f[f(x)]$. Вычислите $2f(f(2))$.

3. Найти пределы последовательностей

$$\lim_{n\to\infty}\frac{6n^4-n+5}{2n^4+5n-1};\quad \lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{n^4+2n}-n^2)n^2}{3n+4}.$$

4. Найти пределы функций

$$\lim_{x\to\infty}(3x+1)\sin\frac{5}{x+1};\quad \lim_{x\to 0}\frac{3^{1/x}-1}{4^{1/x}-1};\quad \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+x+1}{x^2+1}\right)^{3x+1};\quad \lim_{x\to 1}\frac{5^x-5}{(x^2-1)\ln 5}$$

5. Указать точки разрыва функции и их тип:

а) $f1(x)=\frac{\sin(x-2)}{x^2-4}+arctg\frac{2}{x}$ б) $f2(x)=\begin{cases}\frac{x+3}{x^2-9}\,при\,x<0\\ \frac{x-1}{x^2-4}\,при\,x>0\end{cases}$

6. Найти производные от данных функций:

а) $y=3\left(\frac{2-x}{x^2}+4\sqrt{5x+4}\right)$, $y'(1)$;

б) $y=\sqrt{15}arc\cos\frac{1}{x^2}+\frac{ctg^2 5x}{10}+\frac{ctg10}{\sin^2 10}x$, найти $y'(2)$;

в) $y=3\left[e^{3x}\ln(4x+6)+tg8x-(3\ln 6)\cdot x\right]$, найти $y'(0)$.

7.Дана функция $y=\sqrt{5}\left[\frac{x}{2}\cdot\sqrt{4+x^2}+2\ln(x+\sqrt{4+x^2})\right]$. Найти $y''(1)$.

8. Найти y''_{xx}, если $\begin{cases}x=\sin^3 t,\\ y=\cos^3 t.\end{cases}$ Вычислить y''_{xx}, если $t=\frac{\pi}{3}$.

9.К графику функции $y=\sqrt{x}$ в точке с абсциссой $x=7$ проведена касательная. Найти абсциссу точки пересечения касательной с осью OX.

10. Вычислите значение dy, если $y=\frac{x+3\sqrt{5+x^2}}{2}$., если $x=2$ $\Delta x=0{,}02$.

11.Дана функция $z=x^2+xy+y^2$ и точки $M_o(1; 2)$ и $M_1(1{,}02; 1{,}96)$.

Вычислить Δz и dz при переходе из точки Мо в точку M_1 (ответы округлить до сотых).

12. Дана функция $y = x^{2+\frac{16}{x}-16}$. Найти ее наибольшее и наименьшее значения на отрезке [1;4].

13. Провести полное исследование функции $y = \frac{12}{x^2 - 4}$ и начертить ее график.

14. Найти первообразную

1. $\int (\sin 7x + \frac{1}{\sqrt{x}} + x^3)dx$.
2. $\int \frac{dx}{\sin^2 5x}$.
3. $\int (\sqrt{1-4x} - \sqrt[3]{2x+1})dx$.
4. $\int x^2 \cos 3x dx$.
5. $\int x \operatorname{arctg} 4x dx$.
6. $\int \frac{x^2+3x}{(x+1)(x-2)}dx$.

15. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x + 2, y = 2 - x^2$.

16. Вычислить несобственный интеграл $\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$.

13. Литература

Основная литература

1. Беклемишев Д.В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. – М:Наука. 1999.
2. Берман Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа. – М.Нука, 2001.
3. Натансон И. П. Краткий курс высшей математики: Учебник: Рек. Мин. Обр. РФ. – СПб.: Лань, 2001г.
4. Яблонский С.В. Введение в дискретную математику, 2001г.

Дополнительная литература

5. Шипачев В. С. Высшая математика: Учебник: Рек. Мин. Обр. РФ. – М.: Высш. Шк.,2003г.
6. Данко П. Е., Попов А. Г., "Высшая математика в упражнениях и задачах". Москва - наука, 2002г.
7. Методические разработки кафедры. «Общей математики и информатики»:

Юрьева Т.А. Методические указания к РГР «Элементы линейной и векторной алгебры»;

14. Карта обеспеченности дисциплины кадрами профессорско-преподавательского состава

	для специальностей 260704, 260902, 260901,							
Наимен. дисц. в соот. с учебным планом	Обеспеченность преподавательским составом							
	Ф.И.О. должность по штатному расписанию	Какое образов. учреждение професс. образов. окончил, спец. по диплому	Ученая степень и ученое звание (почетное звание)	Стаж научно педагогической работы			Основное место работы, должность	Условия привлечения к трудовой деятельности (штатный, совместитель (внутренний или внешний с указанием доли ставки), иное
				Всего	В т. ч. педагогический			
					Всего	В том числе по дисц.		
2	3	4	5	6	7	8	9	10
математика	Шевченко Ф.Н., доцент	БГПИ, учитель математики	доцент	41	41	40	АмГУ	Штатный 1 ст.
	Ефимова О.В., ассистент	АмГУ, физик	-	3	3	2	АмГУ, ОМиИ	Штатный 1,3 ст.
	Попова О.С., ассистент	БГПУ, учитель математики	-	3	3	3	АмГУ, ОМиИ	Штатный 1ст.

	для специальности 280101, 130301							
Наимен. дисц. в соот. с учебным планом	Обеспеченность преподавательским составом							
	Ф.И.О. должность по штатному расписанию	Какое образов. учреждение професс. образов. окончил, спец. по диплому	Ученая степень и ученое звание (почетное звание)	Стаж научно педагогической работы			Основное место работы, должность	Условия привлечения к трудовой деятельности (штатный, совместитель (внутренний или внешний с указанием доли ставки), иное
				Всего	В т. ч. педагогический			
					Всего	В том числе по дисц.		
2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	3	4	5	6	7	8	9	10
математика	Шевченко Ф.Н., доцент	БГПИ, учитель математики	доцент	41	41	40	АмГУ	Штатный 1 ст.
	Терентьева Е.А., ассистент	БГПУ, учитель математики	-	6	6	5	Вечерняя школа	Внеш. совм 0,5ст.
	Попова О.С., ассистент	БГПУ, учитель математики	-	6	5	5	АмГУ	Штатный 1 ст.
	Костенко С.В., ст.преподаватель	МГПИ, учитель математики	-	15	15	15	АмГУ	Штатный 1 ст.

СОДЕРЖАНИЕ