Министерство образования Российской Федерации

АМУРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Факультет математики и информатики

С.В. Костенко,
Т.А. Маничева, А.П. Филимонова

ЭЛЕМЕНТЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛОГИКИ С ПРИЛОЖЕНИЕМ

Учебно-методическое пособие

Благовещенск
2002

Печатается по решению
редакционно-издательского совета
факультета математики и информатики

Амурского государственного
университета

Костенко С.В., Маничева Т.А., Филимонова А.П.

Элементы математической логики с приложением:

Учебно-методическое пособие / Благовещенск: Амурский гос. ун-т, 2002.

Пособие содержит краткие теоретические сведения, посвященные специальной главе высшей математики “Математическая логика”, образцы решения типовых задач, а также приложение математической логики к теории релейно-контактных схем. В нем представлены 15 вариантов расчетно-графической работы по теории релейно-контактных схем.

Предназначено в помощь студентам II курса специальностей 0719, 2102, 2202, 0102 очной формы обучения; может быть использован преподавателями.

Учебное пособие подготовлено авторским коллективом в следующем составе:
Костенко С.В. – подраздел «Релейно-контактные схемы», раздел «Решение типовых задач теории релейно-контактных схем»;
Маничева Т.А. – архитектоника учебного пособия, задания расчетно-графической работы;
Филимонова А.П. – раздел «Краткие теоретические сведения».

Рецензент: С.В. Ланкин, зав.кафедрой общей физики БГПУ д-р физ.-мат. наук.

ВВЕДЕНИЕ

Математическая логика – это наука о средствах и методах математических доказательств.

Как самостоятельная наука, логика оформилась в трудах греческого философа Аристотеля (384 - 322 г. до н.э.). Аристотелева или формальная логика просуществовала без серьезных изменений более двадцати столетий.

В XVII веке великий немецкий ученый Лейбниц задумал создать новую логику, которая была бы « искусством исчисления ». Он считал, что основные понятия логики должны быть обозначены символами, которые соединяются по определенным правилам, и это позволяет всякие рассуждения заменить вычислением.

Первая реализация идеи Лейбница принадлежит английскому математику Дж. Булю (1815 – 1864 г.).

Ведение символических обозначений в логику имело для этой науки такое же решающие значение, как и введение буквенных обозначений для математики. Именно благодаря введению символов в логику была получена основа для создания новой науки – математической логики.

Развитие математической логики позволило представить логические теории в новой удобной форме и применить вычислительный аппарат к решению задач, малодоступных человеческому мышлению, что, конечно, расширило область логических исследований.

Сегодня математическая логика используется в биологии, медицине, лингвистике, педагогике, психологии, экономике, технике, информатике.

Одной из важнейших областей применения аппарата алгебры логики является исследование релейно-контактных схем. Релейно – контактные схемы широко используются в технике автоматического управления, в электронно-вычислительной технике и т. д.

В предлагаемом пособии излагаются первоначальные сведения из математической логики.

Здесь достаточно полно изложена алгебра логики и ее приложение к теории релейно - контактных схем.

КРАТКИЕ ТЕОРИТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

Понятие высказывания и логические операции над высказываниями

Высказывание – связное повествовательное предложение, о котором можно сказать, истинно оно или ложно.

Пример:

1. Река Амур впадает в Балтийское море. Это предложение – ложное высказывание.

2. Является ли x = 3 корнем уравнения xi – 27x = 0? Не является высказыванием, так как представляет собой вопросительное предложение.

3. “2 < 7” – истинное высказывание.

4. Химия – интересный предмет. Не является высказыванием, так как не может единого мнения о том, истинно это предложение или ложно.

5. “$x > 4,\ x \in R$”. Не является высказыванием. Из-за присутствия в предложении переменной, оно обладает свойством превращаться в высказывание при фиксации значения этой переменной.

6. Длина ромба больше площади круга. Не является высказыванием. Об этом предложении нельзя сказать, истинно оно или ложно, из-за отсутствия в нем какого-либо смысла.

Пусть A – высказывание, через $\hat{A}$ обозначим его значение истинности (“истина”, ”ложь”). Если A – истинное высказывание, то $\hat{A} = 1$ (и). Если A – ложное высказывание, то $\hat{A} = 0$ (л).

В русском языке из простых связных повествовательных предложений с помощью некоторых стандартных связок можно образовать новые (составные) повествовательные предложения. В алгебре высказываний этим конструкциям соответствуют логические операции. Так как нас интересует не содержательный смысл высказывания, а только его значение истинности, то для задания операций достаточно определить значение истинности результата применения операции.

Отрицание – логическая операция, соответствующая конструкциям “не...”, “не верно, что...”. Отрицание высказывания, обозначается $\bar{A}$ и определяется следующей таблицей истинности:

$\hat{A}$	$\overline{\hat{A}}$
0	1
1	0

Конъюнкция (логическое умножение) соответствует союзу “и”, то есть конструкции “...и...”. Конъюнкцией высказываний А и В называется высказывание, обозначаемое $A \wedge B$ (А*В, АВ) и определяемое следующей таблицей истинности:

Â	Â	À ∧ Â
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Конъюнкция $A \wedge B$ истинна тогда и только тогда, когда истинны оба высказывания А, В.

Дизъюнкция (логическое сложение) соответствует неразделительному “или” в русском языке, то есть конструкции “...или...

Дизъюнкцией высказываний А, В называется высказывание, обозначаемое $A \vee B$ и определяемое следующей таблицей истинности:

A	B	$A \vee B$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Дизъюнкция $A \vee B$ ложна тогда и только тогда, когда ложны оба высказывания А, В.

Эквиваленция (равносильность) соответствует конструкции “…равносильно ххх” (“…тогда и только тогда, когда ххх”). Эквиваленцией высказываний А, В называется высказывание, обозначаемое $A \Leftrightarrow B$ (А~В) и определяемое следующей таблицей истинности:

A	B	$A \Leftrightarrow B$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Эквиваленция $A \Leftrightarrow B$ истинна тогда и только тогда, когда образующие её высказывания А и В имеют одинаковые значения истинности.

Импликация соответствует конструкции “Если …, то ххх” (“из … следует ххх”). Импликацией высказываний А и В называется высказывание, обозначаемое $A \Rightarrow B$ и определяемое следующей таблицей истинности:

A	B	$A \Rightarrow B$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Импликация А $\Rightarrow$ В ложна тогда и только тогда, когда А– истина, а В – ложь. А называется посылкой (гипотезой), В – заключением (выводом). С импликацией А $\Rightarrow$ В связаны еще две: В $\Rightarrow$ А, $\overline{B} \Rightarrow \overline{A}$. Первая из них называется обращением А $\Rightarrow$ В, вторая- контрапозицией А $\Rightarrow$ В.

Логика высказываний – простейший раздел математической логики. Логика высказываний интересуется единственным свойством элементарных высказываний – их значением истинности. Составные части высказывания изучаются со стороны их структуры, отражающей способ, которым они образованны. Структура составных высказываний определяет зависимость их значений истинности от значений истинности составляющих элементарных высказываний.

Формулы алгебры логики

Пусть X, У, ….Z – переменные, вместо которых можно подставлять любые элементарные высказывания (или их значения истинности). Такие переменные будем называть высказывательными (пропозициональными) переменными. С помощью этих переменных и символов логических операций любые высказывания можно формализовать, то есть заменить формулой, выражающей его логическую структуру.

Пример. “Если 90 делится на 3 и на 2, то 90 делится на 6”. Это высказывание формализуется в виде (X $\wedge$ У) $\Rightarrow$ Z. Такая же формула соответствует предложению “Если в четырехугольнике две противоположные стороны равны и параллельны, то этот четырехугольник – параллелограмм”.

Зададим алфавит, то есть набор символов, которые будем употреблять в логике высказываний:

1) X, У,…Z ; X_i , $У_i$,… Z_i (i – натуральное число) – символы для обозначения пропозициональных переменных;

2) 0, 1 - символы, обозначающие логические константы “ложь” , “истина”;

3) $\wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow, -$ – символы логических операций;

4) (,) – скобки, которые являются вспомогательными символами и служат для указания порядка выполненных операций.

Определение формулы логики высказываний:

1) всякая высказывательная (пропозициональная) переменная- формула;

2) символы 0, 1 – формулы;

3) если F – формула, то $\overline{F}$ – формула;

4) если F_1 и F_2 – формулы, то $(F_1 \wedge F_2)$, $(F_1 \vee F_2)$, $(F_1 \Rightarrow F_2)$, $(F_1 \Leftrightarrow F_2)$ – формулы;

5) никаких других формул в логике высказываний нет.

Формализация высказываний заключается в следующем:

1. Если высказывание простое, то ему ставится в соотношение элементарная формула.

2. Если высказывание составное, то для составления соответствующей формулы нужно: а) выделить все элементарные высказывания и логические связки, образующие данное высказывание; б) заменить их соответствующими символами; в) расставить скобки в соответствии со смыслом данного высказывания.

Пример. Записать формулой логическую структуру утверждения: “ Если треугольник равнобедренный и неравносторонний, то неверно, что он неравнобедренный”.

Пусть A –“ Данный треугольник равнобедренный “, B – “ Данный треугольник равносторонний”. Тогда соответствующая утверждению формула имеет следующий вид: $((A \wedge \overline{B}) \Rightarrow (\overline{\overline{A}}))$.

Путь F – некоторая формула логики высказываний. Если каждой переменной, входящей в эту формулу, присваивать одно из значений истинности (0 или 1), то, пользуясь определениями логических операций, можно найти значение формулы F при данном наборе значений её переменных.

Пример. Составить таблицу истинности для формулы $((X \wedge \overline{Y}) \Leftrightarrow (Z \Rightarrow X))$.

X	Y	Z	$\overline{Y}$	$X \wedge \overline{Y}$	$Z \Rightarrow X$	F
1	1	1	0	0	1	0
1	1	0	0	0	1	0
1	0	1	1	1	1	1
1	0	0	1	1	1	1
0	1	1	0	0	0	1
0	1	0	0	0	1	0
0	0	1	1	0	0	1
0	0	0	1	0	1	0

Примем следующие соглашения об упрощении записи формул:

а) наружные скобки в записи формул можно опускать;

б) конъюнкция “ сильнее” дизъюнкции, а обе они “сильнее” импликации и эквиваленции, поэтому часть скобок, определяющих порядок действий, можно опускать;

в) скобки, определяющие порядок действий, в ассоциативном случае можно опускать; г) конъюнкцию будем обозначать знаком " $\bullet$ " или знак конъюнкции опускать.

Пример. Формулу $(((A \wedge B) \wedge \overline{C}) \vee C) \Rightarrow ((A \vee \overline{B}) \wedge A))$ будем записывать в виде $AB\overline{C} \vee C \Rightarrow (A \vee \overline{B}) \bullet A$.

Формулы, принимающие значение 1 при всех наборах значений входящих в них переменных, а также формула 1 называются тавтологиями (тождественно – истинными формулами). Предположения, которые формализуются тавтологиями, называются истинными предположениями. Формулы F_1 и F_2 называются равносильными, если их эквиваленция $F_1 \Leftrightarrow F_2$ – тавтология. Так как эквиваленция истинна тогда и только тогда, когда составляющие ее высказывания оба истинны либо оба ложны, то $F_1 \Leftrightarrow F_2$ есть тавтология в том и только в том случае, если формулы F_1 и F_2 одновременно, т.е. при одинаковых наборах значений переменных, входящих в формулы, принимают одинаковые значения истинности (1 или 0).

Равносильные формулы алгебры логики. СДНФ и СКНФ

Предположения P_1 и P_2 равносильны в логике высказываний, если соответствующие им формулы равносильны. Равносильность формул F_1 и F_2 будем обозначать $F_1 \equiv F_2$.

Справедливы следующие равносильности:

1. $X \equiv X$ – закон тождества.
2. $X \wedge \overline{X} \equiv 0$ закон противоречия.
3. $X \vee \overline{X} \equiv 1$ – закон исключённого третьего.
4. $\overline{\overline{X}} \equiv X$ – закон двойного отрицания.
5. $X \wedge X \equiv X, X \vee X \equiv X$ – законы идемпотентности.
6. $X \wedge Y \equiv Y \wedge X, X \vee Y \equiv Y \vee X$ – законы коммутативности.
7. $(X \wedge Y) \wedge Z \equiv X \wedge (Y \wedge Z), (X \vee Y) \vee Z \equiv X \vee (Y \vee Z)$ – законы ассоциативности.
8. $X \wedge (Y \vee Z) \equiv (X \wedge Y) \vee (X \wedge Z), X \vee (Y \wedge Z) \equiv (X \vee Y) \wedge (X \vee Z)$ – дистрибутивные законы.
9. $\overline{X \wedge Y} \equiv \overline{X} \vee \overline{Y}, \overline{X \vee Y} \equiv \overline{X} \wedge \overline{Y}$ – законы де Моргана.
10. $X \wedge 1 \equiv X, X \wedge 0 \equiv 0, X \vee 1 \equiv 1, X \vee 0 \equiv X$.
11. $X \wedge (X \vee Y) \equiv X, X \vee (X \wedge Y) \equiv X$ – законы поглощения.
12. $(X \vee Y) \wedge (\overline{X} \vee Y) \equiv Y, (X \wedge Y) \vee (\overline{X} \wedge Y) \equiv Y$ – законы склеивания.
13. $X \Rightarrow Y \equiv \overline{Y} \Rightarrow \overline{X}$ – законы контрапозиции.

Всякую формулу, содержащую " $\Rightarrow$ " или " $\Leftrightarrow$ ", можно заменить равносильной формулой, не содержащей этих знаков. Имеют место: $X \Rightarrow Y \equiv \overline{X} \vee Y$, $X \Leftrightarrow Y \equiv (X \Rightarrow Y\}$ *

*$\{Y \Rightarrow X\} \equiv (\overline{X} \vee Y)(\overline{Y} \vee X) \equiv XY \vee \overline{X}\overline{Y}$.

Две формулы, не содержащие знаков “$\Rightarrow$“, “ $\Leftrightarrow$ “, называются двойственными, если каждую из них можно получить из другой, заменив “$\wedge$“, “$\vee$ “, 1, 0 соответственно на “$\vee$“, “$\wedge$“, 0, 1.

Если две формулы (не содержащие знаков “$\Rightarrow$“, “$\Leftrightarrow$“} равносильны, то двойственные им формулы тоже равносильны (принцип двойственности). Если в равносильные формулы всюду вместо какой-нибудь переменной подставить одну и ту же формулу, то вновь полученные формулы также окажутся равносильными.

<u>Пример</u>. Доказать, что формула $(X \Rightarrow Y) \wedge (Y \Rightarrow X) \wedge ((X \wedge \overline{Y}) \vee (\overline{X} \wedge Y))$ является тождественно ложной (противоречием). Упростим данную формулу путем равносильных преобразований:

$$(X \Rightarrow Y)(Y \Rightarrow X)(X\overline{Y} \vee \overline{X}Y) \equiv (\overline{X} \vee Y)(\overline{Y} \vee X)(X\overline{Y} \vee \overline{X}Y) \equiv (\overline{X}\overline{Y} \vee Y\overline{Y} \vee \overline{X}X \vee YX)(X\overline{Y} \vee \overline{X}Y) \equiv$$
$$\equiv (\overline{X}\overline{Y} \vee 0 \vee 0 \vee YX)(X\overline{Y} \vee \overline{X}Y) \equiv (\overline{X}\overline{Y} \vee YX)(X\overline{Y} \vee \overline{X}Y) \equiv \overline{X}\overline{Y}X\overline{Y} \vee YXX\overline{Y} \vee \overline{X}\overline{Y}\overline{X}Y \vee YX\overline{X}Y \equiv$$
$$\equiv 0 * \overline{Y} \vee 0 * X \vee 0 * \overline{X} \vee 0 * Y \equiv 0 \vee 0 \vee 0 \vee 0 \equiv 0 .$$

Элементарной дизъюнкцией (конъюнкцией) называется дизъюнкция (конъюнкция) переменных и их отрицаний. Формула α называется конъюнктивной нормальной формой (КНФ), если она представляет собой конъюнкцию элементарных дизъюнкций. Формула α называется дизъюнктивной нормальной формой (ДНФ), если она представляет собой дизъюнкцию элементарных конъюнкций. Переменная А считается как элементарной дизъюнкцией, так и элементарной конъюнкцией.

Всякую формулу можно привести к КНФ и ДНФ.

<u>Пример.</u> $A \vee B \equiv A \vee C$. Найти КНФ и ДНФ.

$A \vee B \Rightarrow A \vee C \equiv \overline{A} \vee \overline{B} \vee (A \vee C) \equiv \overline{A}\overline{B} \vee A \vee C$ – ДНФ.

$\overline{A}\overline{B} \vee A \vee C \equiv (\overline{A} \vee A \vee C)(\overline{B} \vee A \vee C)$ – КНФ.

$(\overline{A} \vee A \vee C)(\overline{B} \vee A \vee C) \equiv 1 \vee \overline{B} \vee A \vee C \equiv \overline{B} \vee A \vee C$ – ДНФ.

Каждая формула имеет не одну, а множество ДНФ (КНФ). Формула тогда и только тогда является тождественно истинной, когда в ее КНФ каждая элементарная дизъюнкция вместе с некоторой переменной содержит и ее отрицание. Формула является тождественно ложной тогда и только тогда, когда в ее ДНФ каждая элементарная конъюнкция вместе с некоторой переменной содержит и ее отрицание. Из ДНФ любой формулы F (X_1 , X_2 … X_n) можно получит ее СДНФ – совершенную дизъюнктивную нормальную форму.

Характерные признаки СДНФ:

1) различны все члены дизъюнкции;

2) различны все члены каждой конъюнкции;

3) ни одна конъюнкция не содержит одновременно переменную и отрицание этой переменной;

4) каждая конъюнкция содержит все переменные входящие в формулу F, то есть имеют вид: $x_1^{\alpha} \wedge x_2^{\alpha} \wedge \ldots \wedge x_n^{\alpha}$, где x_i^{α} – либо x_i, либо $\overline{x}_i$.

Для всякой формулы, не является тождественно ложной, существует единственная СДНФ.

Чтобы привести формулу $F(X_1, X_2 \ldots X_n)$, не являющуюся тождественно ложной, к СДНФ достаточно:

1) привести ее к какой-нибудь ДНФ;

2) удалить члены дизъюнкции, содержащие переменную вместе с ее отрицанием;

3) из одинаковых членов дизъюнкции удалить все, кроме одного;

4) из одинаковых членов каждой конъюнкции удалить все, кроме одного;

5) если в какой-нибудь конъюнкции не содержится переменной x_i из числа переменных, входящих в исходную формулу, добавить к этой конъюнкции член $x_i \vee \bar{x}_i$ и применить закон дистрибутивности конъюнкции относительно дизъюнкции.

<u>Пример</u>: Найти СДНФ формула $A \Rightarrow B$.

$A \Rightarrow B \equiv \bar{A} \vee B \equiv \bar{A}(B \vee \bar{B}) \vee B(A \vee \bar{A}) \equiv \bar{A}B \vee \bar{A}\bar{B} \vee BA \vee B\bar{A} \equiv AB \vee \bar{A}B \vee \bar{A}\bar{B}$ – СДНФ.

Если формула не является тавтологией, то среди ее КНФ есть СКНФ – совершенная конъюнктивная нормальная формула. СКНФ характеризуется следующими свойствами:

1) различны все члены конъюнкции;

2) различны все члены каждой дизъюнкции;

3) ни одна дизъюнкции не содержит одновременно переменную и отрицание этой переменной;

4) каждая дизъюнкции содержит все переменные, входящие в исходную формулу;

<u>Пример.</u> Привести к СКНФ формулу $\overline{xyz} \wedge (xy \Rightarrow x\bar{y}\bar{z})$.

$\overline{xyz} \wedge (xy \Rightarrow x\bar{y}\bar{z}) \equiv (\bar{x} \vee \bar{y} \vee \bar{z})(\overline{xy} \vee x\bar{y}\bar{z}) \equiv (\bar{x} \vee \bar{y} \vee \bar{z})(\bar{x} \vee \bar{y} \vee x\bar{y}\bar{z}) \equiv$
$\equiv (\bar{x} \vee \bar{y} \vee \bar{z})(\bar{x} \vee \bar{y} \vee x)(\bar{x} \vee \bar{y} \vee \bar{y})\,(\bar{x} \vee \bar{y} \vee \bar{z})$ – КНФ.

Удалим члены конъюнкции, содержащие переменную вместе с ее отрицанием, повторяющиеся члены конъюнкции, кроме одного, повторяющиеся члены дизъюнкций, получим $(\bar{x} \vee \bar{y} \vee \bar{z})(\bar{x} \vee \bar{y})$. Дополним член конъюнкции, не содержащий переменную z, конъюнкцией $z\,\bar{z}$ и применим закон дистрибутивности дизъюнкции относительно конъюнкции:
$(\bar{x} \vee \bar{y} \vee \bar{z})(\bar{x} \vee \bar{y} \vee z\bar{z}) \equiv (\bar{x} \vee \bar{y} \vee \bar{z})(\bar{x} \vee \bar{y} \vee z)(\bar{x} \vee \bar{y} \vee \bar{z})$. Из одинаковых членов полученной конъюнкции оставим один, получим : $(\bar{x} \vee \bar{y} \vee \bar{z})(\bar{x} \vee \bar{y} \vee z)$ – СКНФ.

Составим формулы по заданной таблице истинности, рассмотрим на примере. Пусть имеем таблицу истинности для некоторой формулы F, содержащей переменные x,y,z:

x	y	Z	F(x,y,z)
1	1	1	1
1	1	0	0
1	0	1	0
1	0	0	1
0	1	1	0
0	1	0	0
0	0	1	0
0	0	0	1

Выделим строки, соответствующие значениям 1 искомой формулы: первая, четвертая, восьмая. Составим для каждой из выделенных строк конъюнкцию переменных или их отрицаний так, чтобы наборам значений переменных, представленных в этих строках, соответствовали истинные конъюнкции. Для этого достаточно переменные, под которыми в соответствующей строке стоит 0, взять со знаком отрицания, а переменные над 1 – без знака отрицания. Дизъюнкция этих конъюнкций и есть искомая формула:

$F(x,y,z) \equiv xyz \vee x\overline{y}\overline{z} \vee \overline{x}\overline{y}\overline{z}$ – СДНФ.

Понятие булевой функции

Каждая формула алгебры высказываний $F(X_1, X_2 \dots X_n)$от n пропозициональных переменных $X_1, X_2 \dots X_n$ определяет некоторую функцию от n аргументов, сопоставляющую любому набору длиной n, составленному из элементов множества $\{0,1\}$, единственный элемент того же множества. Этот элемент является логическим значением того составного высказывания, в которое превращается данная формула, если вместо всех ее пропозициональных переменных подставить конкретные высказывания, имеющие соответствующие значения истинности. Булевой функцией от n аргументов называется любая функция $f(X_1, X_2 \dots X_n)$ от n аргументов, заданная на множестве $\{0,1\}$ и принимающая значение в том множестве $\{0,1\}$.

Примеры булевых функций:

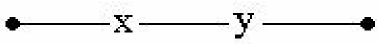
1) $f_1(x) = 0 \; x \in \{0,1\}$ – нуль – функция;
2) $f_2(x) = 1 \; x \in \{0,1\}$ – единица – функция;
3) $f_3(x) = \bar{x} \; x \in \{0,1\}$ – отрицание x;
4) $f_4(x,y) = x*y$ – конъюнкция x и y;
5) $f_5(x,y) = x \vee y$ – дизъюнкция x и y;
6) $f_6(x,y) = x \Rightarrow y$ – импликация x и y;
7) $f_7(x,y) = x \Leftrightarrow y$ – эквиваленция x и y;
8) $f_8(x,y) = \overline{x \vee y} = x \downarrow y$ – стрелка Пирса;
9) $f_9(x,y) = \overline{x * y} \equiv x|y$– штрих Шеффера;
10) $f_{10}(x,y) = \overline{x \Rightarrow y} = x \leftarrow y$ – функция запрета.

Можно показать, что каждая булева функция является суперпозицией следующих функций: отрицание, конъюнкция, дизъюнкция.

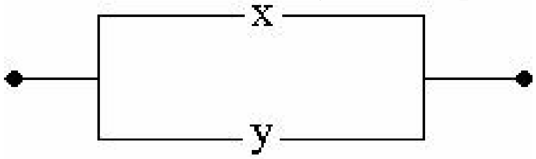
Релейно-контактные схемы

Под релейно-контактной схемой понимается устройство из проводников и двухпозиционных контактов, через которое полюсы источников тока связаны с некоторым потребителем. Контакты могут быть замыкающими и размыкающими. Каждый контакт подключен к некоторому реле (переключателю). Когда реле срабатывает (находится под током), все подключенные к нему замыкающие контакты замкнуты, а разомкнутые контакты разомкнуты; в противном случае наоборот. Каждому реле ставится в соответствие своя булева переменная x, которая принимает значение 1, если реле срабатывает, и

0 в противном случае. На чертежах все замыкающие контакты, подключенные к реле x, обозначаются тем же символом x, а размыкающие – символом $\overline{x}$. Это означает, что при срабатывании реле x все его замыкающие контакты x проводят ток и им сопоставляется 1, а все размыкающие контакты $\overline{x}$ не проводят ток и им сопоставляется 0. При отключении реле создается противоположная ситуация. Всей схеме также ставится в соответствие булева переменная y, которая равна 1, если схема проводит ток, и 0 в противном случае. Переменная y, соответствующая схеме, является булевой функцией от переменных X_1 , X_2 … X_n соответствующих реле. Эта функция называется функцией проводимости схемы, а ее таблица – условиями работы схемы. Две релейно-контактной схемы называются равносильными, если одна из них проводит ток тогда и только тогда, когда другая схема проводит ток, то есть если обе эти схемы обладают одинаковыми функциями проводимости. Из двух равносильных схем более простой считается та, которая содержит меньшее число контактов. Рассмотрим следующие схемы.

a) 

Данная схема проводит ток тогда и только тогда, когда оба независимых переключателя x и y замкнуты. Следовательно, функцией проводимости этой схемы будет такая булева функция от двух аргументов, которая принимает значение 1 в том и только в том случае, когда оба ее аргумента принимают значение 1. Такой функцией является конъюнкция x*y. Функция проводимости π(x,y) = x*y;

b) 

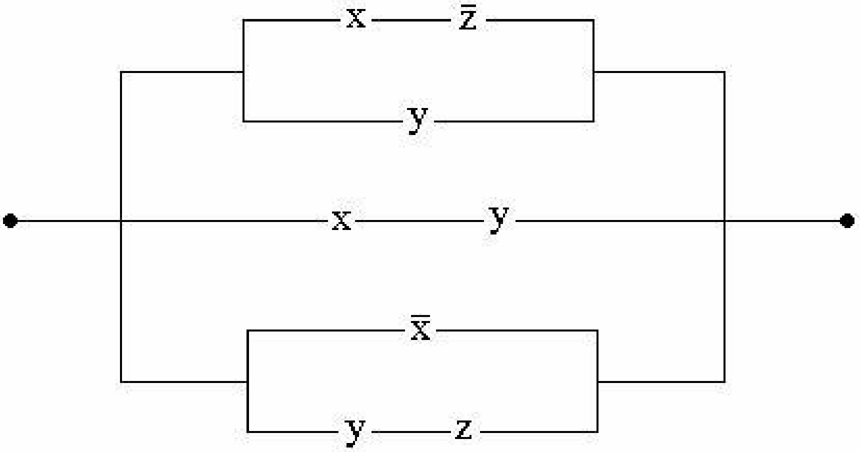
Данная схема проводит ток тогда и только тогда, когда по меньшей мере один из двух независимых переключателей x или y замкнут. Функцией проводимости этой схемы будет такая булева функция от двух переменных, которая принимает значение 1 в том и только том случае, когда хотя бы одна из переменных принимает значение 1. Такой функцией является дизъюнкция $x \vee y, \pi(x, y) = x \vee y$;

c) $\pi = 1$;

d) $\pi = 0$.

РШЕНИЕ ТИПОВЫХ ЗАДАЧ ТЕОРИИ РЕЛЕЙНО-КОНТАКТНЫХ СХЕМ

Задача 1. По данной релейно-контактной схеме найти функцию проводимости и условия работы.

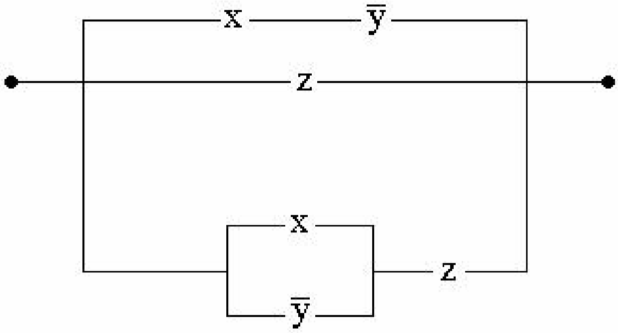


Первая из трех параллельных ветвей имеет функцию проводимости $x\bar{z} \vee y$, вторая параллельная ветвь имеет функцию проводимости x*y, а третья – $\bar{x} \vee yz$. Отсюда $\pi(x, y, z) = (x\bar{z} \vee y) \vee x*y \vee (\bar{x} \vee yz)$. Условия работы схемы определяется таблицей:

x	y	z	$\bar{x}$	$\bar{z}$	$x\bar{z}$	$x\bar{z} \vee y$	$\vee$	xy	π	yz	$\vee \bar{x}$
1	1	1	0	0	0	1	1	1	1	1	1
1	1	0	0	1	1	1	1	1	1	0	0
1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	1	1	1	1	0	1	0	0
0	1	1	1	0	0	1	1	0	1	1	1
0	1	0	1	1	0	1	1	0	1	0	1
0	0	1	1	0	0	0	0	0	1	0	1
0	0	0	1	1	0	0	0	0	1	0	1

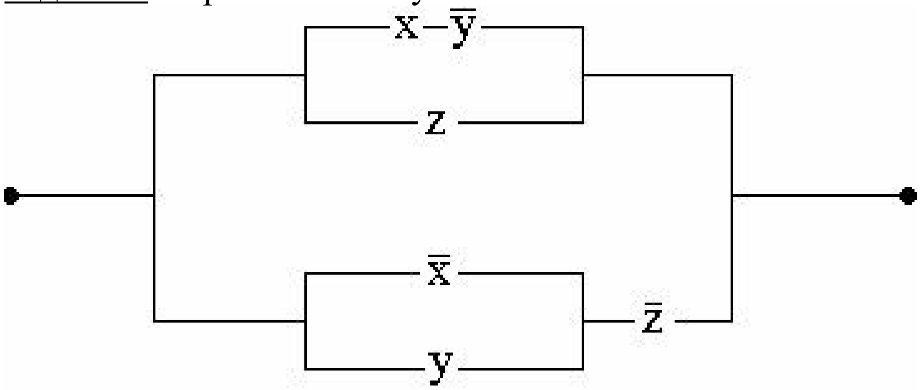
Видим, что схема не проводит ток в единственном случае, когда x = 1, y = 0: $\pi(1,0,1) = 0$.

Задача 2. Проверить равносильность следующих релейно-контактных схем:



Функция проводимости первой схемы $\pi_1(x,y,z) = x\bar{y} \vee z \vee ((x \vee \bar{y}) * z)$, а второй – $\pi_2(x,y,z) = x\bar{y} \vee z$. Упростим $\pi_1(x,y,z)$ путем равносильных преобразований: $\pi_1(x,y,z) \equiv x\bar{y} \vee z \vee xz \vee \bar{y}z \equiv x\bar{y} \vee z \vee \bar{y}z \equiv x\bar{y} \vee z = \pi_2(x,y,z)$.

Задача 3. Упростить схему:



$\pi(x,y,z) = (x\bar{y} \vee z) \vee ((x \vee \bar{y}) * z)$. Составим двойственную формулу и упростим с помощью равносильных преобразований:

$\pi^*(x,y,z) = (\bar{x} \vee y) * \bar{z})((\bar{\bar{x}} * \bar{y}) \vee \bar{\bar{z}}) \equiv (\bar{x}\bar{z} \vee \bar{y}\bar{z})(x\bar{y} \vee z) \equiv \bar{x}\bar{z}x\bar{y} \vee y\bar{z}x\bar{y} \vee x\bar{z}z \vee yz\bar{z}$

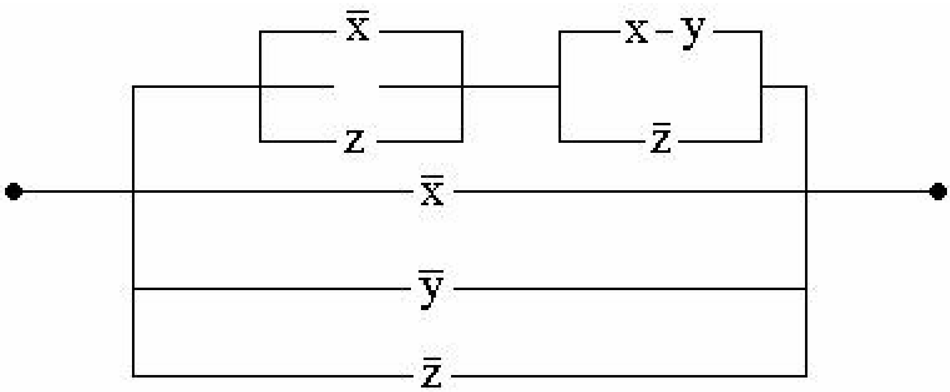
Тогда $\pi(x,y,z) = 1$.

Упрощенная схема: $\pi = 1$

Задача 4. Построить релейно-контактную схему с заданной функцией проводимости.

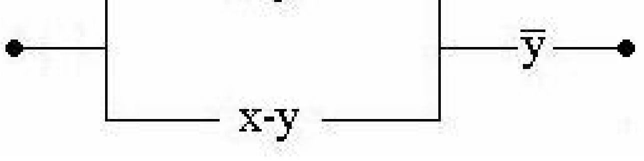
$\pi(x,y,z) = (x \Rightarrow (y \Rightarrow \bar{z})) \vee ((xy) \Leftrightarrow z)$.

$\pi(x,y,z) = (x \Rightarrow (y \Rightarrow \bar{z})) \vee ((\overline{xy}) \Leftrightarrow z)((xy) \Leftrightarrow \bar{z}) \equiv \bar{x} \vee \bar{y} \vee \bar{z} \vee ((\bar{x} \vee \bar{y} \vee z)(xy \vee \bar{z}))$



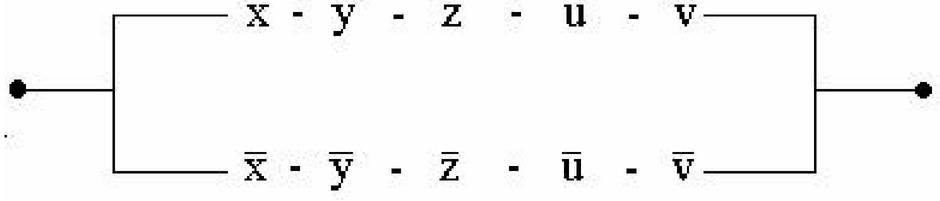
Задача 5. Построить релейно-контактную схему по заданным условиям работы: $\pi(0,0,0) = \pi(1,0,1) = 1$.

$\pi = \bar{x}\bar{y}\bar{z} \vee x\bar{y}z \equiv \bar{y}(\bar{x}\bar{z} \vee xz)$.



Задача 6. Построить линейно-контактную схему с пятью переключателями, которая проводит ток в том и только в том случае, если замкнуты все ее переключатели или когда не замкнут ни один из них.

По условию π (1,1,1,1,1) = π (0,0,0,0,0) = 1 $\pi = xyzuv \vee \bar{x}\bar{y}\bar{z}\bar{u}\bar{v}$ – СДНФ.



ЗАДАНИЯ РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКОЙ РАБОТЫ

Задание №1. По данной релейно-контактной схеме найти функцию проводимости и условия работы.

Задание №2. Построить релейно-контактную схему с данной функцией проводимости.

Задание №3. Упростить релейно-контактную схему.

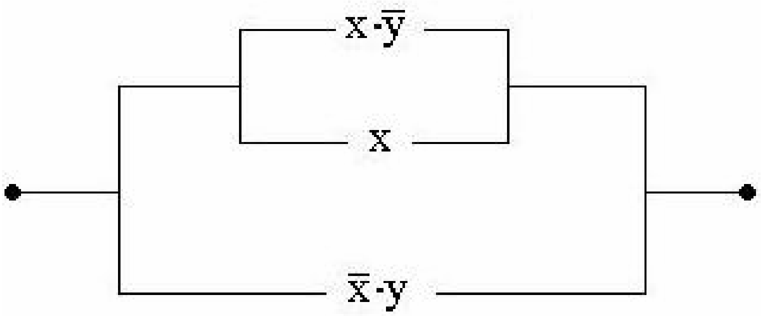
Задание №4. Построить наиболее простую релейно-контактную схему по заданным условиям работы.

Задание №5. Вставить контакт на вакантное место.

Задание №6. Построить схему с n переключателями, которая проводит ток тогда и только тогда, когда замкнуты (разомкнуты) k_1 (k_2) переключателей ($k_1 < n$, $k_2 < n$).

Вариант 1

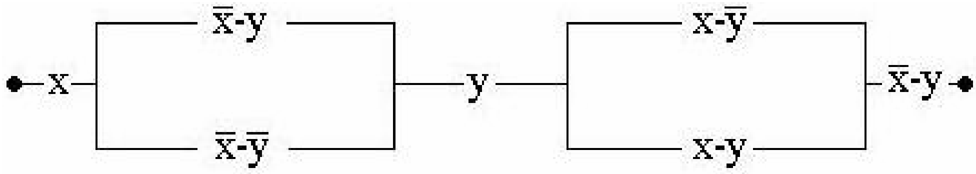
1.



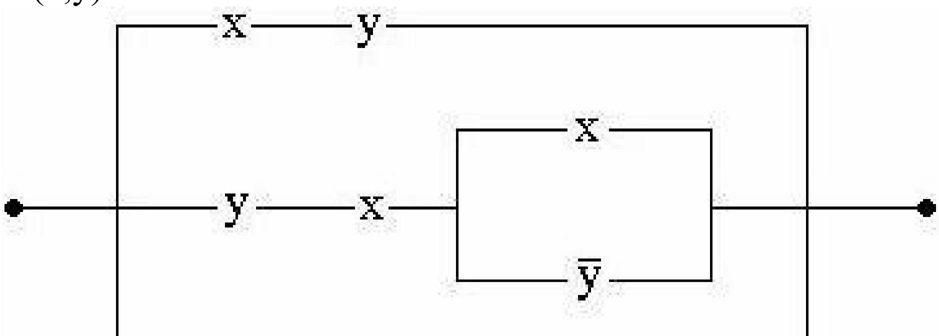
2.

x	y	F(x,y)
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

3.



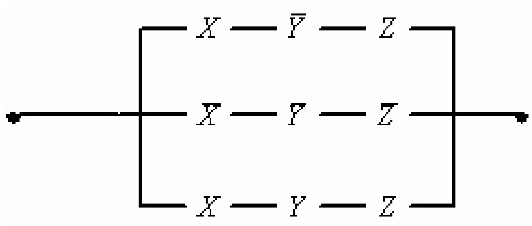
4. $\pi(0,1,0,0) = \pi(1,1,1,1) = \pi(0,0,1,0) = 1$
5. $\pi(x,y) = x$



6. n = 5. Проводит ток при:
   а) 1, 2, 3 – разомкнуты; 4, 5 – замкнуты;
   б) 1, 2, 3, 4, 5 – разомкнуты;
   в) 1, 2, 3, 4, 5 – замкнуты;
   г) 1, 2, 5 – разомкнуты; 3,4 – замкнуты .

Вариант 2

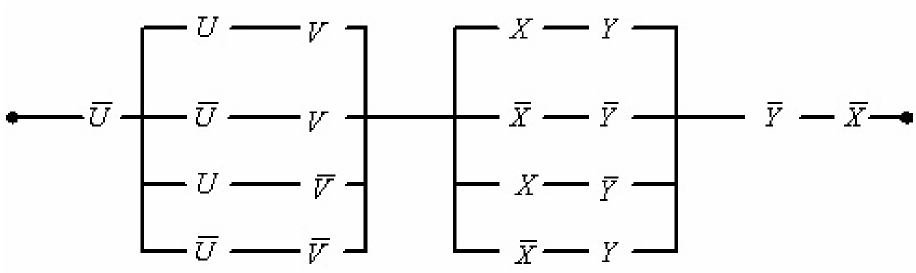
1.



2.

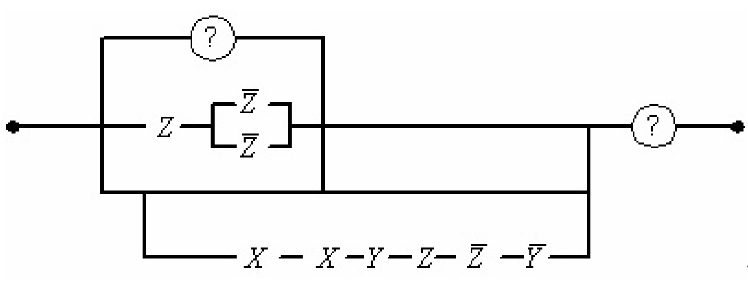
X	Y	Z	F(X,Y,Z)
1	1	1	1
1	1	0	0
1	0	1	0
1	0	0	0
0	1	1	0
0	1	0	1
0	0	1	1
0	0	0	0

3.



4. π(0,0,0,1)=π(1,1,1,0)=π(0,1,0,1)=1

5.



π(x,y,z)=z

6. n=5. Проводит ток при:

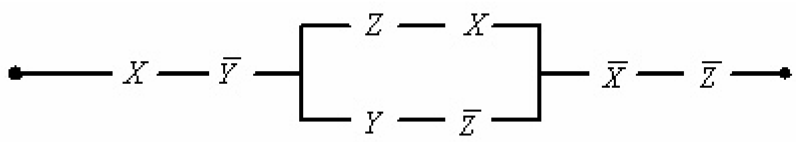
а) 1,5- замкнуты; 2,3,4- разомкнуты;

б) 1,3-- замкнуты; 4,5,2- разомкнуты;

в) 2,3,5- замкнуты; 1,4- разомкнуты.

Вариант 3

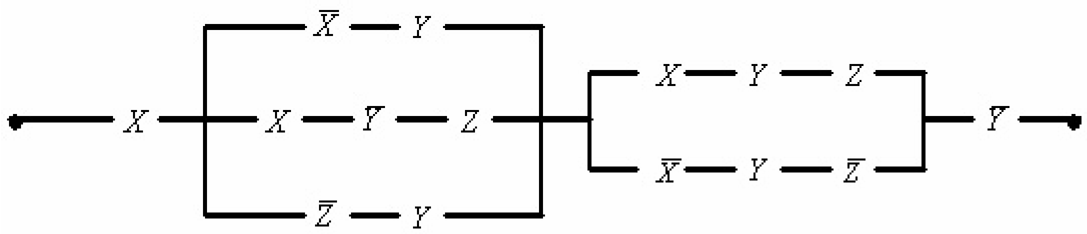
1.



2.

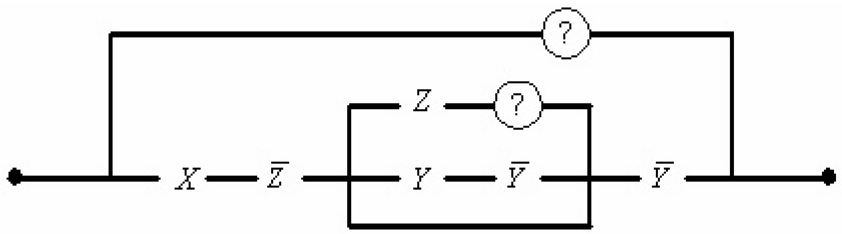
X	Y	Z	F(X,Y,Z)
1	1	1	1
1	1	0	1
1	0	1	0
1	0	0	0
0	1	1	1
0	1	0	1
0	0	1	0
0	0	0	0

3.



4. $\pi(1,1,1,1)=\pi(0,1,0,1)=\pi(1,1,1,0)=1$

5.



$\pi(x,y,z)=x$

6. n=5. Проводит ток при:

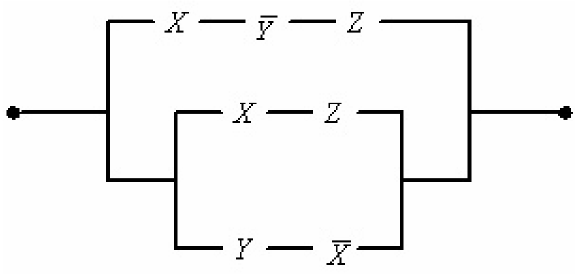
а) 1,3,5- замкнуты; 2,4- разомкнуты;

б) 1,5-- замкнуты; 4,3,2- разомкнуты;

в) 1,2- замкнуты; 3,4,5- разомкнуты.

Вариант 4

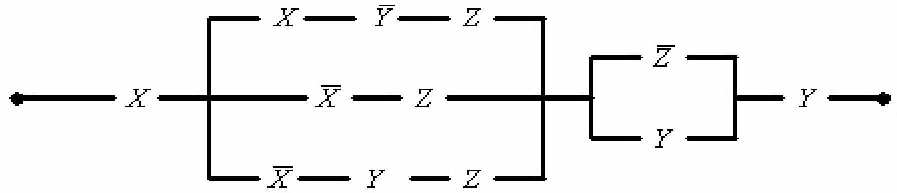
1.



2.

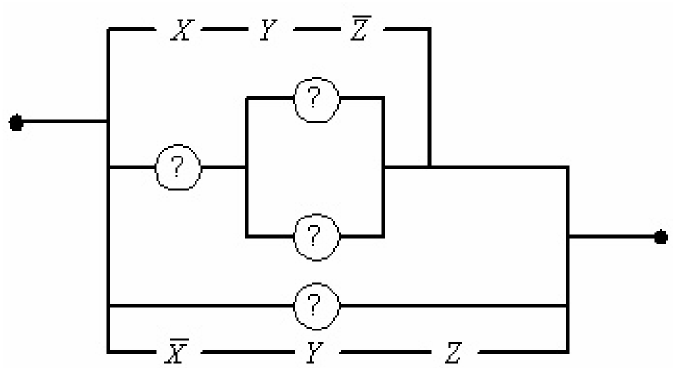
X	Y	Z	F(X,Y,Z)
1	1	1	1
1	1	0	0
1	0	1	1
1	0	0	0
0	1	1	1
0	1	0	1
0	0	1	1
0	0	0	0

3.



4. $\pi(0,1,1,0)=\pi(0,0,0,1)=\pi(0,0,0,0)=1$

5.



$\pi(x,y,z)=y$

6. n=5. Проводит ток при:

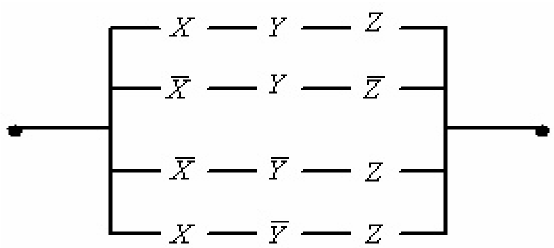
а) 1,3,5- замкнуты; 2,4- разомкнуты;

б) 1,5-- замкнуты; 4,3,2- разомкнуты;

в) 1,2- замкнуты; 3,4,5- разомкнуты.

Вариант 5

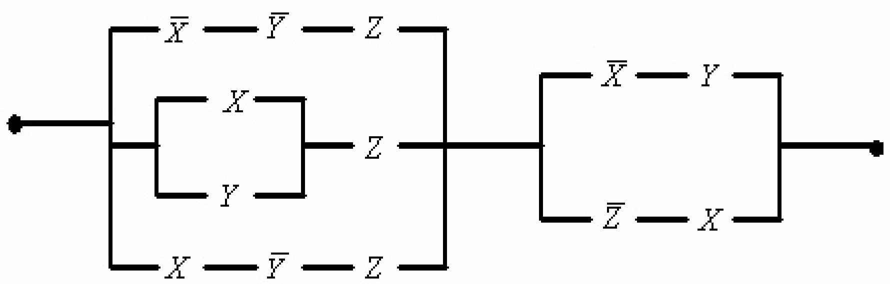
1.



2.

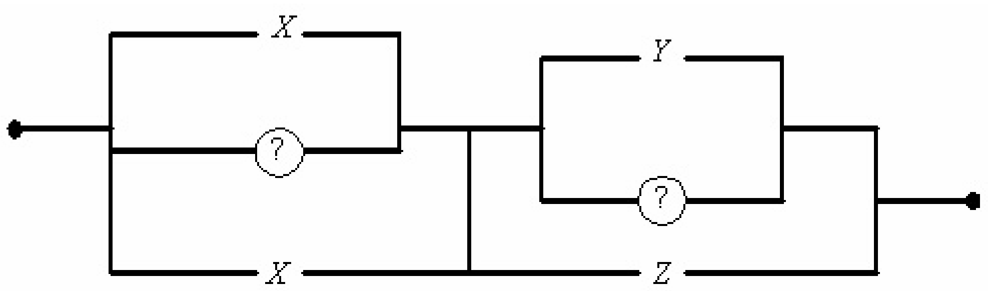
X	Y	Z	F(X,Y,Z)
1	1	1	1
1	1	0	0
1	0	1	0
1	0	0	1
0	1	1	1
0	1	0	0
0	0	1	0
0	0	0	0

3.



4. $\pi(1,1,0,1)=\pi(0,0,1,1)=\pi(0,1,0,0)=1$

5.



$\pi(x,y,z)=xy\vee z$

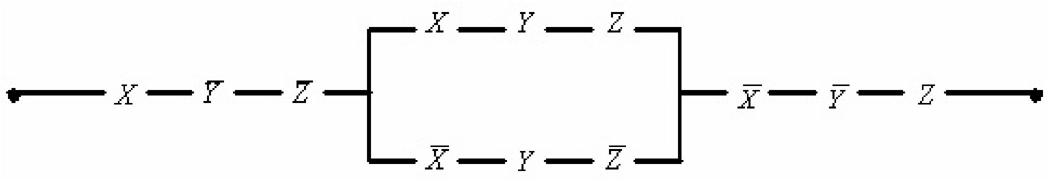
6. n=5. Проводит ток при:

а) 1,2,3,4,5- замкнуты;

б) 1,4,5-- замкнуты; 3,2- разомкнуты.

Вариант 6

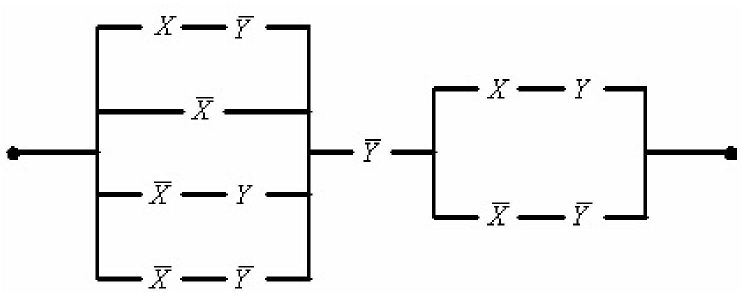
1.



2.

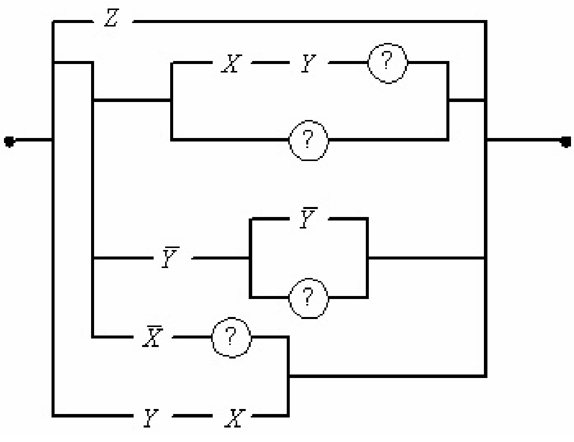
X	Y	Z	U	F(X,Y,Z,U)
1	1	1	1	1
1	1	1	0	0
1	1	0	1	0
1	1	0	0	0
1	0	1	1	0
1	0	1	0	1
1	0	0	1	0
1	0	0	0	0
0	1	1	1	0
0	1	1	0	0
0	1	0	1	1
0	1	0	0	0
0	0	1	1	0
0	0	1	0	0
0	0	0	1	0
0	0	0	0	0

3.



4. π(1,0,1,0)=π(0,1,0,1)=π(0,1,0,0)=1

5.



$\pi(X,Y,Z)=\bar{X}Z$

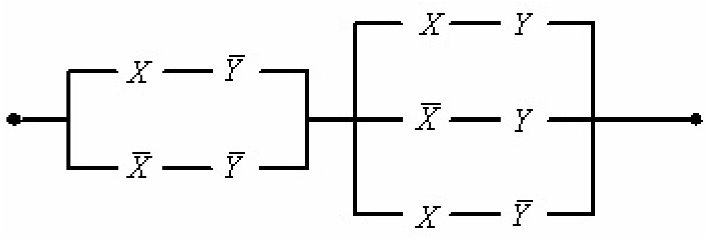
6. n=4. Проводит ток при:

а) 1,2,4- замкнуты; 3- разомкнуты;

б) 2,3-- замкнуты; 1,4- разомкнуты; в) 2,4- замкнуты; 1,3- разомкнуты.

Вариант 7

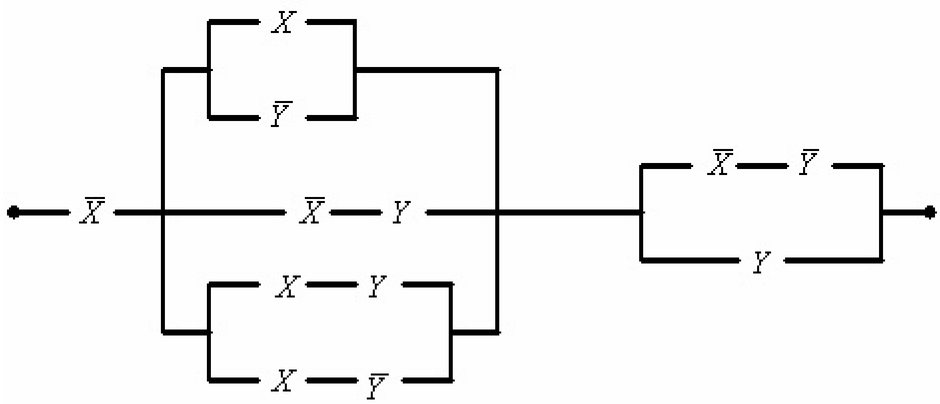
1.



2.

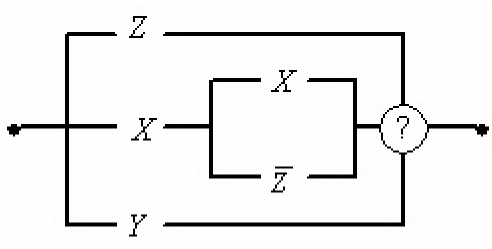
X	Y	Z	F(X,Y,Z)
1	1	1	1
1	1	0	0
1	0	1	1
1	0	0	0
0	1	1	1
0	1	0	0
0	0	1	1
0	0	0	0

3.



4. π(1,1,1,0)=π(0,1,0,0)=π(1,0,0,0)=1

5.



π(X,Y,Z)=$\overline{Z}(Y \vee X)$

6. n=4. Проводит ток при:

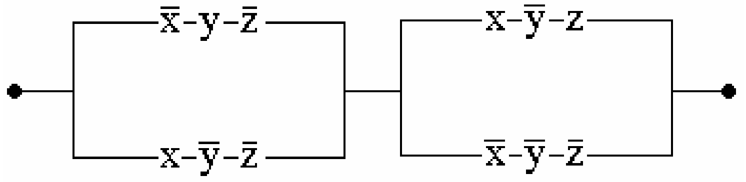
а) 2,3- замкнуты; 1,4- разомкнуты;

б) 1,2,3,4-- замкнуты;

в) 1,2,3- замкнуты; 4- разомкнуты.

Вариант 8

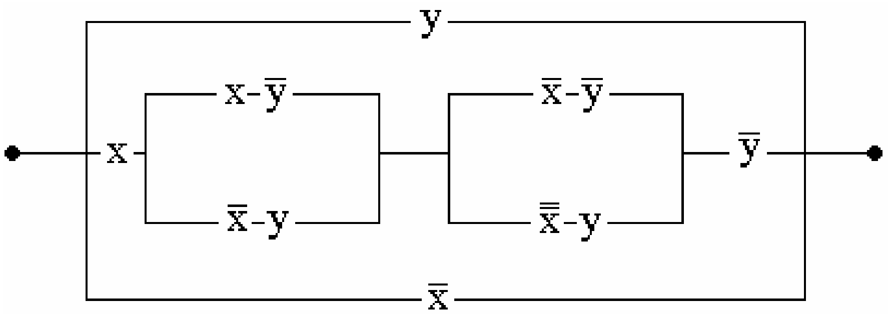
1.



2.

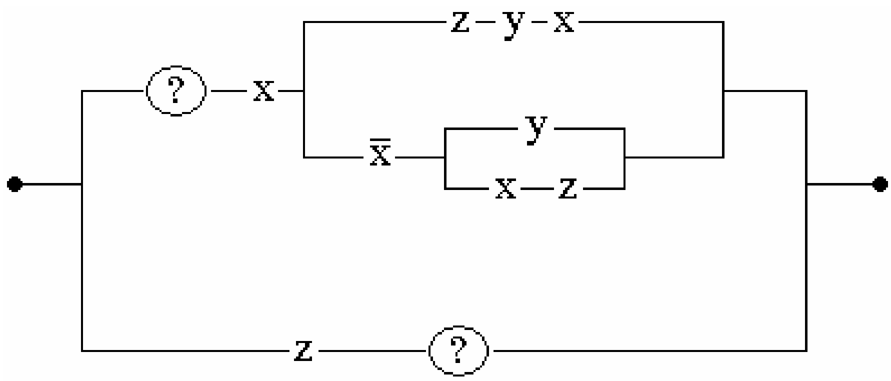
X	Y	Z	F(X,Y,Z)
1	1	1	0
1	1	0	1
1	0	1	1
1	0	0	1
0	1	1	1
0	1	0	0
0	0	1	0
0	0	0	0

3.



4. $\pi(0,1,0,1) = \pi(1,1,0,0) = \pi(0,0,0,0) = 1$

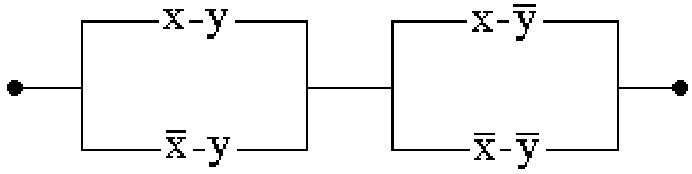
5.



6. n = 4. Проводит ток при :
   a) 1, 4 – замкнуты; 2, 3 – разомкнуты;
   b) 2, 4 – замкнуты; 1, 3 – разомкнуты;
   c) 1, 2, 3 – разомкнуты; 4 – замкнуты.

Вариант 9

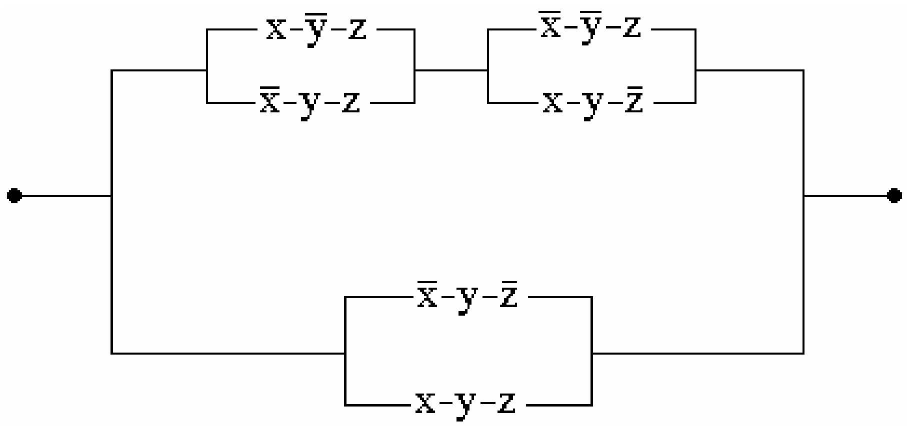
1.



2.

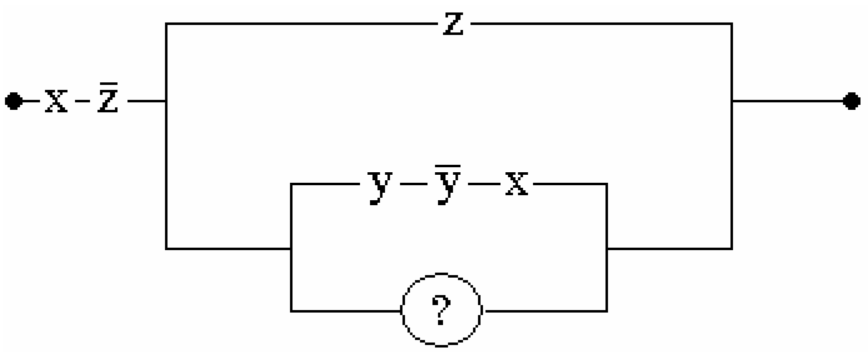
X	Y	Z	F(X,Y,Z)
1	1	1	0
1	1	0	1
1	0	1	0
1	0	0	0
0	1	1	0
0	1	0	0
0	0	1	1
0	0	0	0

3.



4. $\pi(0,1,1,1) = \pi(1,1,1,0) = \pi(0,0,0,1) = 1$

5.



$\pi(X, Y, Z) = X\bar{Z}Y$

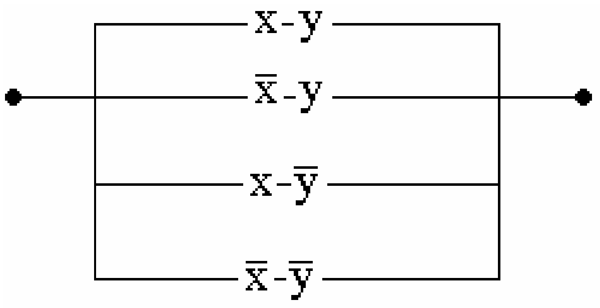
6. n = 4. Проводит ток при :

a) 1, 2, 3 – замкнуты; 4 – разомкнут;

b) 1, 4, 2 – разомкнуты; 3 – замкнут.

Вариант 10

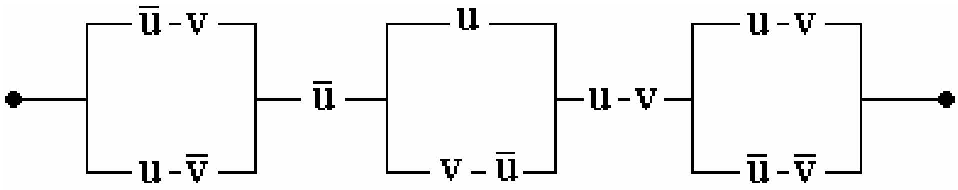
1.



2.

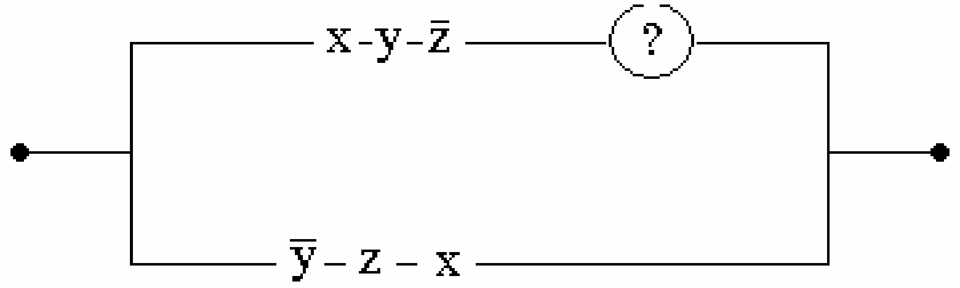
X	Y	Z	F(X,Y,Z)
1	1	1	0
1	1	0	1
1	0	1	0
1	0	0	0
0	1	1	0
0	1	0	0
0	0	1	1
0	0	0	1

3.



4. $\pi(1,1,0,0) = \pi(0,1,0,1) = 1$

5.

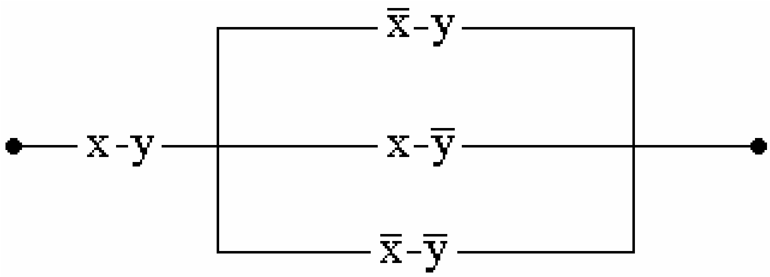


$\pi(X, Y, Z) = XZ\overline{Y}$

6. n = 4. Проводит ток при :
   a) 1, 2, 3, 4 – замкнуты;
   b) 1, 2 – замкнуты; 3, 4 – разомкнуты.

Вариант 11

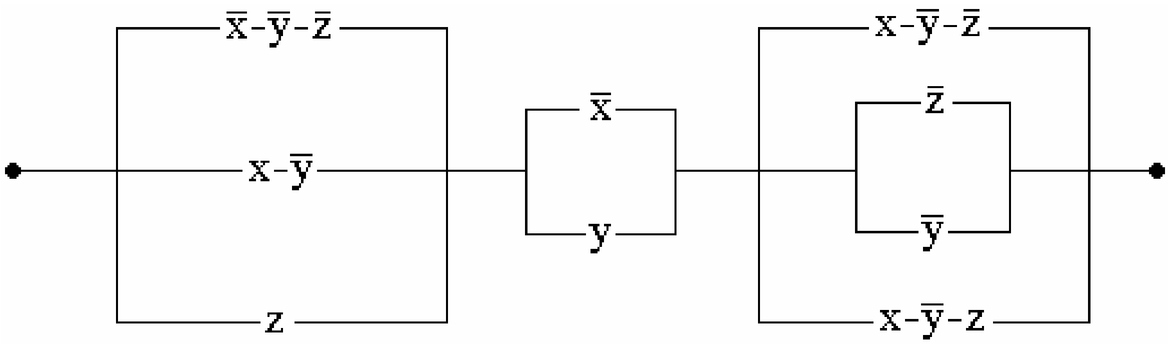
1.



2.

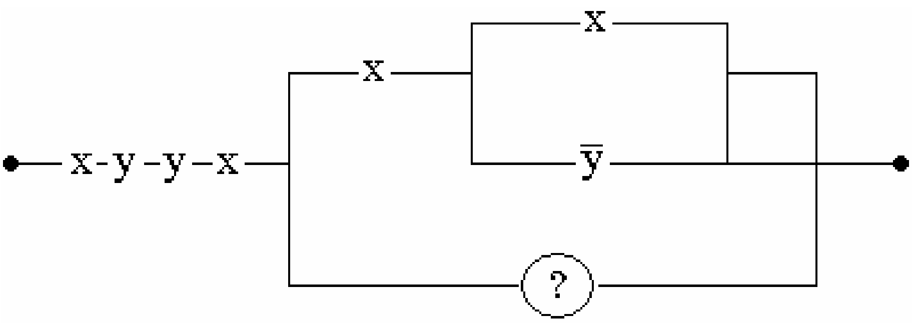
X	Y	F(X,Y)
1	1	0
1	0	1
0	1	1
0	0	0

3.



4. $\pi(1,1,1) = \pi(1,1,0) = \pi(0,1,0) = \pi(1,0,1) = 1$

5.

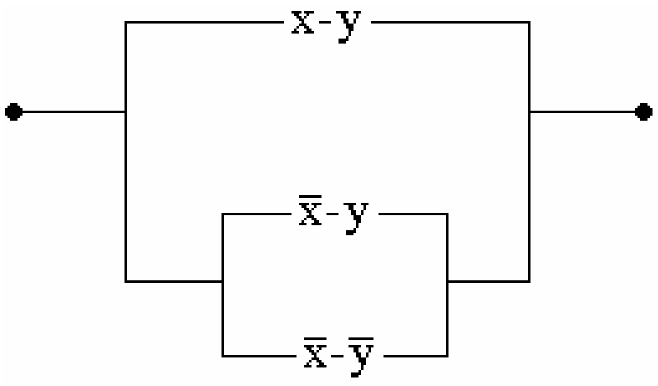


$\pi(X,Y) = XY$

6. n = 3. Проводит ток при :
   a) 1, 2, 3 – разомкнуты;
   b) 1, 3 – замкнуты; 2 – разомкнут;
   c) 1, 2, 3 – замкнуты.

Вариант 12

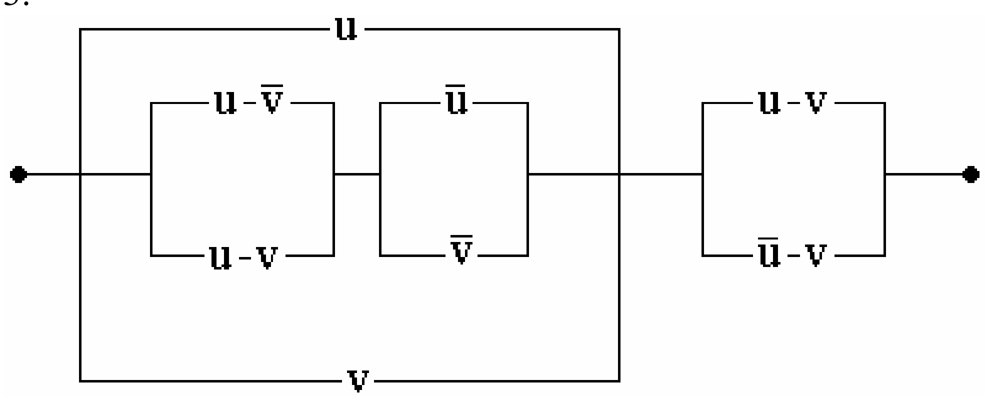
1.



2.

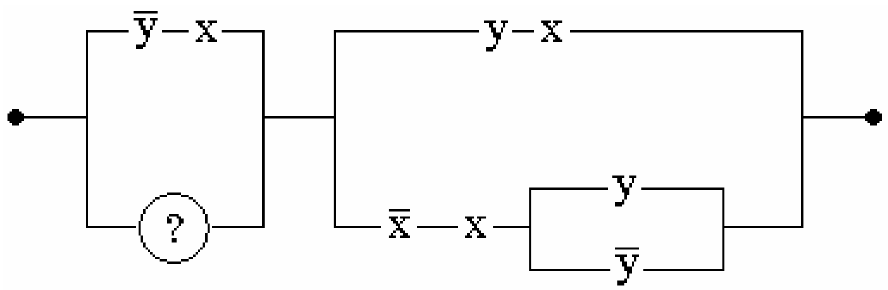
X	Y	Z	F(X,Y,Z)
1	1	1	1
1	1	0	1
1	0	1	0
1	0	0	1
0	1	1	1
0	1	0	0
0	0	1	0
0	0	0	0

3.



4. $\pi(0,0,0) = \pi(1,0,1) = \pi(0,0,1) = 1$

5.

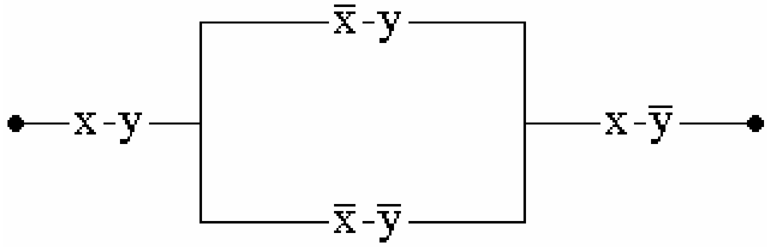


$\pi(X, Y) = YX\overline{X}$

6. n = 3. Проводит ток при : a) 1, 3 – разомкнуты; 2 – замкнут; b) 1, 2, 3 – замкнуты; c) 3 – замкнут; 1, 2 – разомкнуты.

Вариант 13

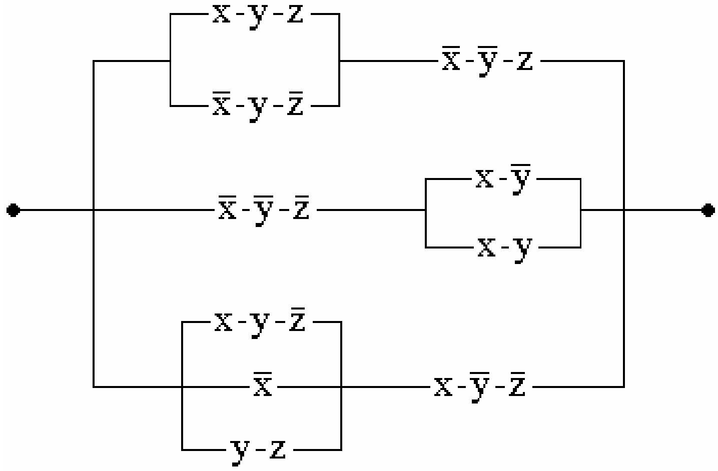
1.



2.

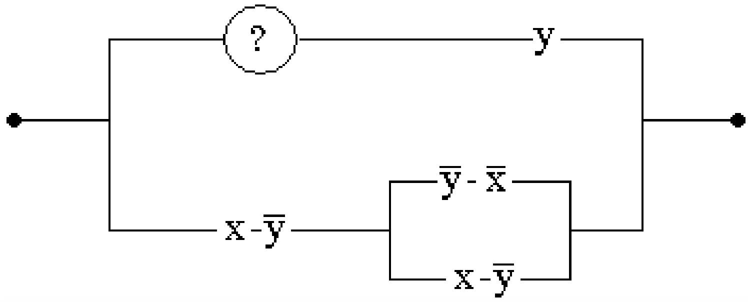
X	Y	Z	F(X,Y,Z)
1	1	1	0
1	1	0	1
1	0	1	0
1	0	0	0
0	1	1	1
0	1	0	0
0	0	1	1
0	0	0	1

3.



4. $\pi(0,1,0) = \pi(1,1,0) = \pi(0,1,1) = 1$

5.



$\pi(X, Y) = X\overline{Y}$

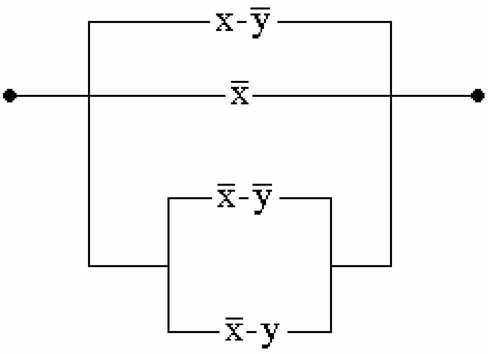
6. n = 3. Проводит ток при :

a) 1, 2, 3 – замкнуты;

b) 1, 2 – разомкнуты; 3 – замкнут; c) 1, 3 – замкнуты; 2 – разомкнут.

Вариант 14

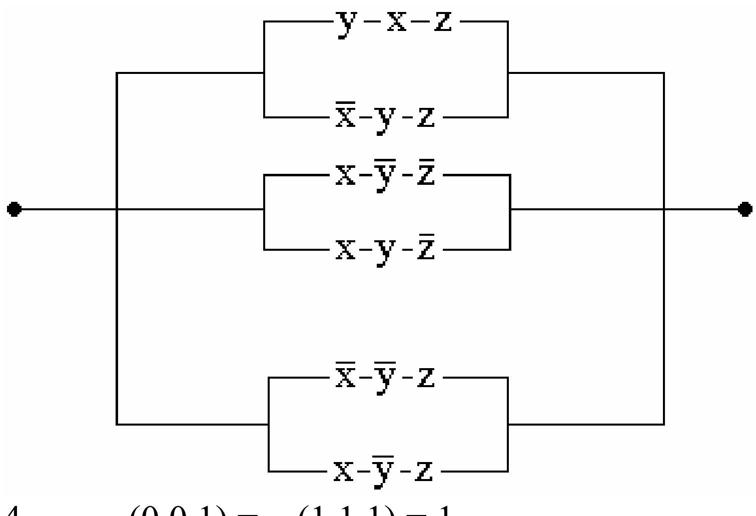
1.



2.

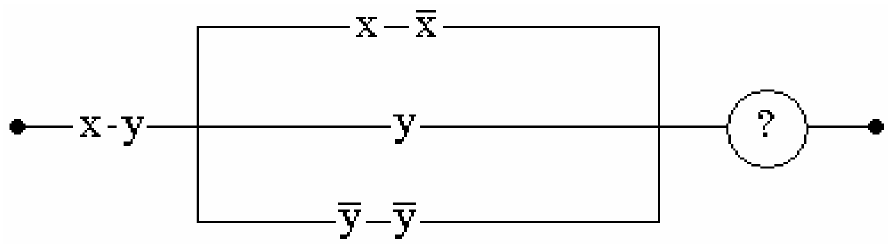
X	Y	Z	F(X,Y,Z)
1	1	1	1
1	1	0	0
1	0	1	1
1	0	0	1
0	1	1	0
0	1	0	0
0	0	1	1
0	0	0	0

3.



4. $\pi(0,0,1) = \pi(1,1,1) = 1$

5.

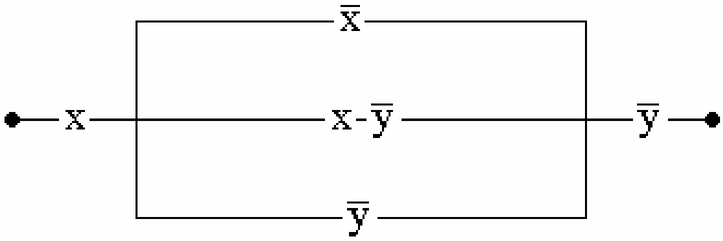


$\pi(X, Y) = XY$

6. n = 3. Проводит ток при : a) 2, 3 – замкнуты; 1 – разомкнут;
b) 1, 3 – разомкнуты; 2 – замкнут.

Вариант 15

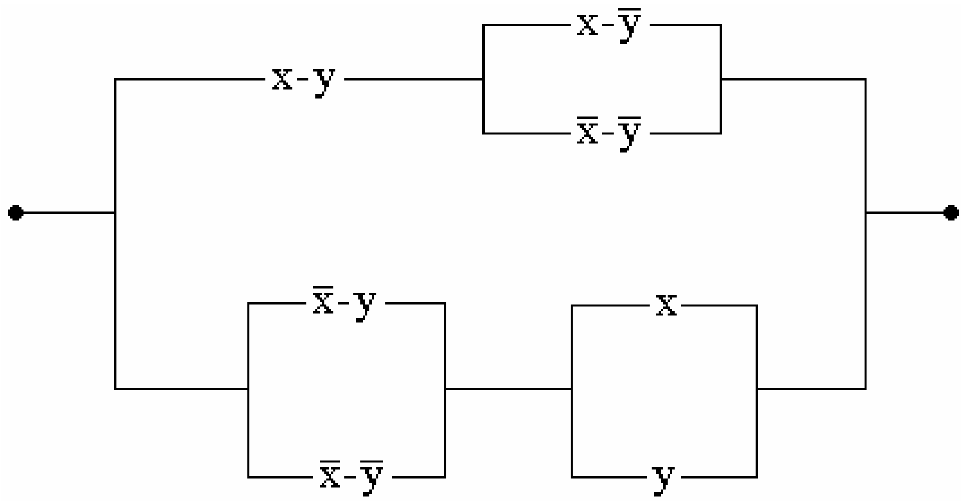
1\.



2\.

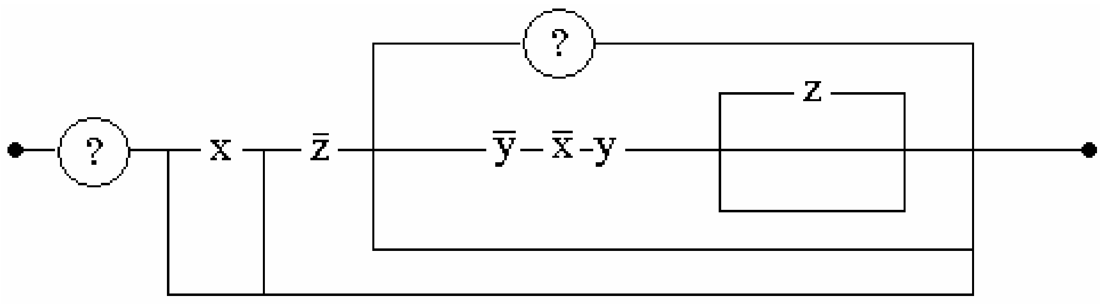
X	Y	Z	F(X,Y,Z)
1	1	1	1
1	1	0	1
1	0	1	1
1	0	0	0
0	1	1	1
0	1	0	0
0	0	1	0
0	0	0	0

3\.



4\. $\pi(0,0,0) = \pi(1,1,1) = 1$

5\.



$\pi(X, Y) = \overline{X}$

6\. n = 3. Проводит ток при :

a) 1, 3 – замкнуты; 2 – разомкнут;

b) 1, 2, 3 – разомкнуты.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Игошин В.И.* Математическая логика и теория алгоритмов. Саратов: Изд–во Саратовского унт-а, 1991.

2. *Калужнин Л.А.* Что такое математическая логика. М.: Наука, 1964.

3. *Кемени Д., Томпсон Д., Снелл Д.* Введение в конечную математику. М.: ИЛ, 1963.

4. *Кофман А., Фор Р.* Займемся исследованием операций. М.: Мир, 1966.

5. *Лихтарников Л.М., Сукачева Т.Г.* Курс лекций по математической логике (учебное пособие). Новгород: Изд-во Новгородского гос. пед. ин-та, 1993.

6. *Новиков П.С.* Элементы математической логики. М.: Наука, 1973.

7. *Столл Р.* Множества, логика и аксиоматические теории. М.: Просвещение, 1967.

8. *Хаусдорф Ф.* Теория множеств. М., 1937.

9. *Яглом И.М.* Необыкновенная алгебра. М.: Наука, 1968.

СОДЕРЖАНИЕ

Введение……………………………………………………3
Краткие теоретические сведения……………………………………………4
Понятие высказывания и логические операции над ними……………4
Формулы алгебры логики……………………………………………6
Равносильные формулы алгебры логики. СДНФ и СКНФ……………8
Понятие булевой функции ……………………………………………12
Релейно-контактные схемы……………………………………………12
Решение типовых задач теории релейно-контактных схем …………………14
Задания расчетно-графической работы ……………………………………16
Библиографический список…………………………………………………32

Светлана Владимировна Костенко,
ст. преподаватель кафедры ОМиИ АмГУ;

Татьяна Александровна Маничева,
ассистент кафедры ОМиИ АмГУ;

Анна Павловна Филимонова,
доцент кафедры ОМиИ АмГУ.

Элементы математической логики с приложением. *Учебно-методическое пособие.*

Изд-во АмГУ. Подписано к печати 27.08.02.Формат 60 х 84/16. Усл. печ.1,86, уч. изд. л.2,1
Тираж 100. Заказ 101.