Министерство образования Российской Федерации
АМУРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
Факультет математики и информатики

Т.В. Труфанова, В.В. Сельвинский

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ В ПРИМЕРАХ И ЗАДАЧАХ

Часть III. Системы дифференциальных уравнений и уравнения в частных производных 1- го порядка

Благовещенск
2002

ББК 22.161.6я73

Т80

Печатается по решению редакционно-издательского совета факультета математики и информатики Амурского государственного университета

Т.В. Труфанова, В.В. Сельвинский

Дифференциальные уравнения в примерах и задачах. Часть III. Системы дифференциальных уравнений и уравнения в частных производных 1-го порядка. Учебно-методическое пособие. Благовещенск: Амурский гос. ун-т, 2002.

Пособие содержит краткие теоретические сведения по общему курсу «Дифференциальные уравнения». Подробно рассматриваются методы решения систем дифференциальных уравнений и уравнений в частных производных 1-го порядка, а также методы исследования их решений на устойчивость. Студентам предлагаются варианты самостоятельной работы по данной теме. Материал пособия позволяет выработать практические навыки в решении и исследовании дифференциальных уравнений.

Предназначено для студентов специальностей 010100 – математика, 010200 – прикладная математика, 010400 – физика.

Рецензент: П.П. Алутин, доц., зав. кафедрой алгебры и геометрии БГПУ, канд. физ.-мат. наук

Оглавление

Глава 1. Линейные системы с постоянными коэффициентами

§1.1. Общие понятия и определения

Система уравнений вида:

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + f_i(t) \quad , \qquad i = \overline{1,k}, \tag{1.1}$$

где a_{ij}=const, $x_i = x_i(t)$ – неизвестные функции, $f_i(t)$ – заданные функции (свободные члены), называется *неоднородной системой линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами*.

Будем считать, что свободные члены $f_i(t)$ являются непрерывными функциями на некотором интервале (a,b). Решением системы уравнений (1.1) является любая совокупность непрерывно дифференцируемых функций $x_i(t)$ $(i = \overline{1,k})$, удовлетворяющих этой системе.

Система дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \quad , \qquad i = \overline{1,k} \tag{1.2}$$

называется *однородной*. Введя в рассмотрение векторы $\boldsymbol{x} = (x_1(t), x_2(t),..., x_n(t))$, $\boldsymbol{f} = (f_1(t), f_2(t),..., f_n(t))$

и матрицу $A = (a_{ij})$, $A = \begin{pmatrix} a_{11} & ... & a_{1n} \\ ... & ... & ... \\ a_{n1} & ... & a_{nn} \end{pmatrix}$,

уравнения (1.1), (1.2) можно представить в векторной форме

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt} = A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{f}, \tag{1.1'}$$

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt} = A\boldsymbol{x}. \tag{1.2'}$$

Матрица

$$X(t)=\begin{pmatrix} x_{11}(t) & x_{12}(t) & \dots & x_{1n}(t) \\ x_{21}(t) & x_{22}(t) & \dots & x_{2n}(t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{n1}(t) & x_{n2}(t) & \dots & x_{nn}(t) \end{pmatrix}, \tag{1.3}$$

где x_{ij} – координаты линейно независимых решений (векторов) $\boldsymbol{x}_1=(x_{11},x_{21},...,x_{n1}),\boldsymbol{x}_2=(x_{12},x_{22},...,x_{n2}),...,\boldsymbol{x}_n=(x_{1n},x_{2n},...,x_{nn})$ векторного уравнения (1.2'), – называется *фундаментальной* матрицей этого уравнения. Иногда её называют *матрицей Вронского.*

Определитель

$$W(t)=\begin{vmatrix} x_{11}(t) & x_{12}(t) & \dots & x_{1n}(t) \\ x_{21}(t) & x_{22}(t) & \dots & x_{2n}(t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{n1}(t) & x_{n2}(t) & \dots & x_{nn}(t) \end{vmatrix}, \tag{1.4}$$

составленный из частных решений система (1.2), называется *определителем Вронского.*

§ 1.2. Однородные системы линейных дифференциальных уравнений.

1. Общее решение системы (1.2) можно найти, пользуясь *методом исключения неизвестных.* Для этого из уравнений системы (1.2) и из уравнений, получающихся дифференцированием уравнений, входящих в систему, исключают все неизвестные функции, кроме одной, для определения которой получают одно дифференциальное уравнение более высокого порядка. Интегрируя это уравнение, находят одну из неизвестных функций, а остальные неизвестные функции последовательно определяют из исходных.

Пример 1. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \dot{x}=2x+y \\ \dot{y}=3x+4y \end{cases}.$$

Исключая y из первого уравнения, имеем $y=\dot{x}-2x$. Подставляя во второе уравнение, получаем $\ddot{x}-6\dot{x}+5x=0$. Корни характеристического уравнения $\lambda^2-6\lambda+5=0$ есть $\lambda_1=1, \lambda_2=5$. Следовательно, общее решение последнего уравнения будет $x=c_1e^t+c_2e^{5t}$. Подставляя выражение x в первое уравнение системы, найдем

$$y=(c_1e^t+c_2e^{5t})'-2(c_1e^t+c_2e^{5t})=-c_1e^t+3c_2e^{5t},$$

значит,

$$x = c_1 e^t + c_2 e^{5t},$$
$$y = -c_1 e^t + 3c_2 e^{5t}.$$

Пример 2.

$$\begin{cases} \dot{x} = -x + y + z \\ \dot{y} = x - y + z \\ \dot{z} = x + y - z \end{cases}$$

Дифференцируя первое равенство и используя затем все три уравнения данной системы, имеем:

$$\ddot{x} = -\dot{x} + \dot{y} + \dot{z} = 3x - (\dot{x} + x) = 2x - \dot{x},$$

или

$$\ddot{x} + \dot{x} - 2x = 0;$$

интегрируя полученное уравнение, находим $x = c_1 e^t + c_2 e^{-2t}$.

Далее, вычитая почленно из первого уравнения второе и учитывая полученное выражение для функции *x*, приходим к уравнению $\dot{y} + 2y = 3c_1 e^t$. Решив его, получим

$$y = c_1 e^t + c_3 e^{-2t}.$$

Подставляя *x* и *y* в первое уравнение системы, находим z:

$$z = \dot{x} + x - y = (c_1 e^t + c_2 e^{-2t})' + (c_1 e^t + c_2 e^{-2t}) - c_3 e^{-2t} - c_1 e^t = c_1 e^t - (c_2 + c_3) e^{-2t}.$$

Таким образом:

$$\begin{cases} x = c_1 e^t + c_2 e^{-2t}, \\ y = c_1 e^t + c_3 e^{-2t}, \\ z = c_1 e^t - (c_2 + c_3) e^{-2t}. \end{cases}$$

2. Общее решение системы (1.2) можно также найти методом Эйлера. Для этого определяем корни характеристического уравнения

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0, \qquad (1.5)$$

то есть находим собственные значения матрицы А. Каждому простому корню λ_i соответствует решение $c_i \mathrm{v}^i e^{\lambda_i t}$, где c_i - произвольная постоянная, $\boldsymbol{v}^i$ - собственный вектор матрицы А, соответствующий этому λ_i. Произвольная линейная комбинация

$$x = \sum_{i=1}^{n} c_i v^i e^{\lambda_i t} \tag{1.6}$$

есть общее решение уравнения (1.2’).

Если для корня λ кратности *k* имеется *l* линейно независимых собственных векторов, и *l*<*k*, то решение, соответствующее этому λ, можно искать в виде произведения многочлена степени *k-l* на $e^{\lambda t}$, то есть в виде

$$\begin{cases} x_1 = \left(a + bt + \ldots + dt^{k-l}\right)e^{\lambda t} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n = \left(p + qt + \ldots + st^{k-l}\right)e^{\lambda t} \end{cases} . \tag{1.7}$$

Чтобы найти коэффициенты *a,b,…s*, надо подставить решение (1.7) в систему (1.2) и приравнять коэффициенты при подобных членах в левой и правой частях уравнений. Получим систему линейных алгебраических уравнений относительно *a,b,…s*. Надо найти общее решение этой системы. Коэффициенты *a,b,…s* должны зависеть от *k* произвольных постоянных. Найдя для каждого λ решения указанного вида и сложив их, получим общее решение системы (1.2).

Пример 3. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \dot{x} = x - y \\ \dot{y} = y - 4x \end{cases} \tag{1.8}$$

Составляем и решаем характеристическое уравнение:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ -4 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0, \tag{1.9}$$

или $(1-\lambda)^2 - 4 = 0$. Корни характеристического уравнения $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = -1$ – простые. Для корня x_1=3 находим собственный вектор (α_1, β_1), решив систему

$$\begin{cases} -2\alpha_1 - \beta_1 = 0 \\ -4\alpha_1 - 2\beta_1 = 0 \end{cases} \tag{1.10}$$

(коэффициенты этой системы равны элементам детерминанта (1.9) при λ=3). Из (1.10) находим $\beta_1 = -2\alpha_1$. Значит, вектор (1;-2) – собственный и

$$x = e^{3t},\ y = -2e^{3t} \tag{1.11}$$

– частное решение системы (1.8). Для корня $\lambda = -1$ находим собственный вектор (α_2, β_2), решив систему

$$\begin{cases} 2\alpha_2 - \beta_2 = 0 \\ -4\alpha_2 + 2\beta_2 = 0 \end{cases} \tag{1.12}$$

Из (1.12) находим $\beta_2 = 2\alpha_2$, значит, вектор (1;2) – собственный и $x = e^{-t}$, $y = 2e^{-t}$ – частные решения системы (1.8).

Общее решение системы (1.8) согласно (1.6) имеет вид

$$\begin{aligned} x &= c_1 e^{3t} + c_2 e^{-t} \\ y &= -2c_1 e^{3t} + 2c_2 e^{-t} \end{aligned}.$$

Пример 4. Решить систему

$$\begin{cases} \dot{x} = x - y + z \\ \dot{y} = x + y - z \\ \dot{z} = 2x - y \end{cases}. \tag{1.13}$$

Ищем решение в виде $x = \alpha e^{\lambda t}, y = \beta e^{\lambda t}, z = \gamma e^{\lambda t}$. Подставляя в систему, имеем

$$\alpha(\lambda - 1) + \beta - \gamma = 0, \ -\alpha + \beta(\lambda - 1) + \gamma = 0, \ -2\alpha + \beta + \gamma\lambda = 0. \tag{1.14}$$

Составляем и решаем характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & -1 \\ 2 & -1 & -\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

откуда

$$\lambda^3 - 2\lambda^2 + \lambda + 2 = 0.$$

Корни этого уравнения $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = -1$ простые. Поэтому частные решения представляются следующим образом:

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{x}_1 = \alpha_1 \boldsymbol{e}^{\boldsymbol{t}}, \quad \boldsymbol{x}_2 = \alpha_2 \boldsymbol{e}^{2\boldsymbol{t}}, \quad \boldsymbol{x}_3 = \alpha_3 \boldsymbol{e}^{-\boldsymbol{t}}, \\ &\boldsymbol{y}_1 = \beta_1 \boldsymbol{e}^{\boldsymbol{t}}, \quad \boldsymbol{y}_2 = \beta_2 \boldsymbol{e}^{2\boldsymbol{t}}, \quad \boldsymbol{y}_3 = \beta_3 \boldsymbol{e}^{-\boldsymbol{t}}, \\ &\boldsymbol{z}_1 = \gamma_1 \boldsymbol{e}^{\boldsymbol{t}}, \quad \boldsymbol{z}_2 = \gamma_2 \boldsymbol{e}^{2\boldsymbol{t}}, \quad \boldsymbol{z}_3 = \gamma_3 \boldsymbol{e}^{-\boldsymbol{t}}, \end{aligned}$$

Для установления связи между постоянными $\alpha_{\boldsymbol{k}}, \beta_{\boldsymbol{k}}, \gamma_{\boldsymbol{k}}$, пользуясь системой (1.14), имеем

$$\alpha_k(\lambda_k - 1) + \beta_k - \gamma_k = 0,$$

$$-\alpha_k + \beta_k(\lambda_k - 1) + \gamma_k = 0, \ -2\alpha_k + \beta_k + \gamma_k\lambda_k = 0, \ \ k = 1,2,3.$$

Нетрудно получить решение последней системы:

$$\beta_1 = \alpha_1 = \gamma_1 \ ; \alpha_2 = \gamma_2 \ , \beta_2 = 0 \ ; \beta_3 = -3\alpha_3 \ , \gamma_3 = -5\alpha_3.$$

Поскольку часть найденных постоянных произвольна, можно положить

$\gamma_1 = 1 \;\; , \gamma_2 = 1 \;\; , \alpha_3 = 1$. Тогда $\beta_1 = \alpha_1 = 1 \;\; ; \alpha_2 = 1 \;\; ; \beta_3 = -3 \;\; ; \gamma_3 = -5$. Таким образом, общее решение имеет вид:

$$x = c_1 e^t + c_2 e^{2t} + c_3 e^{-t},$$
$$y = c_1 e^t - 3c_3 e^{-t},$$
$$z = c_1 e^t + c_2 e^{2t} - 5c_3 e^{-t}.$$

Пример 5. Решить систему

$$\begin{cases} \dot{x} = -2x + y - 2z, \\ \dot{y} = x - 2y + 2z, \\ \dot{z} = 3x - 3y + 5z. \end{cases} \tag{1.15}$$

Составляем и решаем характеристическое уравнение:

$$\begin{vmatrix} -2-\lambda & 1 & -2 \\ 1 & -2-\lambda & 2 \\ 3 & -3 & 5-\lambda \end{vmatrix} = 0 \;\; ; \lambda^3 - \lambda^2 - 5\lambda - 3 = 0 \tag{1.16}$$

$\lambda_1 = 3 \;\; , \lambda_2 = \lambda_3 = -1$. Для простого корня $\lambda_1 = 3$ находим собственный вектор (α, β, γ), решая систему

$$\begin{cases} -5\alpha + \beta - 2\gamma = 0, \\ \alpha - 5\beta + 2\gamma = 0, \\ 3\alpha - 3\beta + 2\gamma = 0. \end{cases}$$

Получаем $\alpha = -\beta$, $\gamma = 3\beta$. Значит, вектор (-1;1;3) – собственный и корню $\lambda = 3$ соответствует решение

$$x = -c_1 e^{3t}, \; y = c_1 e^{3t}, \; z = 3c_1 e^{3t}. \tag{1.17}$$

Для корня $\lambda = -1$ кратность k=2. Определим число *l* линейно независимых собственных векторов. При $\lambda = -1$ для координат собственного вектора получаем систему однородных уравнений с матрицей

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & -3 & 6 \end{pmatrix}.$$

Ее порядок n=3, ранг r=1. Число *l* – линейно независимых собственных векторов равно n-r=2. Степень многочленов в (1.7) равна k-*l*=0. Ищем решение в виде:

$$x = ae^{-t} \;\; ; \;\; y = be^{-t} \;\; ; \;\; z = ce^{-t} \tag{1.18}$$

Подставляем (1.18) в (1.15). Приравнивая коэффициенты при подобных членах, получаем систему:

$$\begin{cases} -a = -2a + b - 2c, \\ -b = a - 2b + 2c, \\ -c = 3a - 3b + 5c, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} a = b - 2c, \\ b = a + 2c, \\ b = a + 2c, \end{cases}$$

которая соответствует одному скалярному уравнению a-b+2c=0, или a=b-2c (b,c – произвольные постоянные). Положив $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{c}_2$; $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{c}_3$, имеем $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{c}_2 - 2\boldsymbol{c}_3$.

Подставив найденные a, b, c в (1.18) и прибавив (1.17),получаем общее решение системы (1.15):

$$x = -c_1e^{3t} + (c_2 - 2c_3)e^{-t},$$

$$y = c_1e^{3t} + c_2e^{-t},$$

$$z = 3c_1e^{3t} + c_3e^{-t}.$$

Пример 6. Решить систему

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x + y + z \\ \dot{y} = -2x - z \\ \dot{z} = 2x + y + 2z \end{cases} \tag{1.19}$$

Составляем и решаем характеристическое уравнение:

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 1 \\ -2 & -\lambda & -1 \\ 2 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0 \ ; \lambda^3 - 4\lambda^2 + 5\lambda + 2 = 0 \ ; \tag{1.20}$$

$\lambda_1 = 2$,$\lambda_2 = \lambda_3 = 1$. Для простого корня $\lambda_1 = 2$ находим собственный вектор (α, β, γ), решая систему

$$\begin{cases} \beta + \gamma = 0 \\ -2\alpha - 2\beta - \gamma = 0 \\ 2\alpha + \beta = 0 \end{cases}$$

(ее коэффициенты равны элементам детерминанта (1.20) при $\lambda = 2$). Находим $2\alpha = -\beta = \gamma$. Значит, вектор (1,-2,2) – собственный и корню $\lambda = 2$ соответствует решение

$$\begin{aligned} x &= c_1e^{2t}, \\ y &= -2c_1e^{2t}, \\ z &= 2c_1e^{2t}. \end{aligned} \tag{1.21}$$

Для корня $\lambda = 1$, кратность k=2, определим число *l* линейно независимых собственных векторов. При $\lambda = 1$ из (1.20) получаем матрицу:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Ее порядок n=3, ранг r=2. Число l – линейно независимых собственных векторов – равно n-r=1. Степень многочленов в (1.7) равна k-l=1. Ищем решение в виде:

$$x = (a + bt)e^t \quad ; \quad y = (c + dt)e^t \quad ; \quad z = (f + gt)ce^t \qquad (1.22)$$

Подставляем (1.22) в (1.19). Приравнивая коэффициенты при подобных членах, получаем систему

$$\begin{aligned} &b + d + g = 0 \;\; ; \quad -2b - d - g = 0 \;\; ; \quad 2b + d + g = 0 \;\; ; \\ &b = a + c + f \;\; ; \quad d = -2a - c - f \;\; ; \quad g = 2a + c + f \;\; ; \end{aligned} \qquad (1.23)$$

Отсюда получаем b=0, g=-d, d=-a, f=-a-c. Положив $a = c_2$; $c = c_3$, имеем b=0; d=- c_2, f=- c_2 - c_3; g= c_2.

Подставив найденные a,b,… в (1.22) и прибавив (1.21), получаем общее решение системы (1.19):

$$x = c_1e^{2t} + c_2e^t,$$

$$y = -2c_1e^{2t} + (c_3 - c_2t)e^t,$$

$$z = 2c_1e^{2t} + (c_2t - c_2 - c_3)e^t.$$

3. В случае, когда имеются комплексные корни λ, изложенный способ дает выражение решения через комплексные функции. Если коэффициенты системы (1.2) вещественны, можно выразить решение только через вещественные функции, так как вещественная и мнимая части решения, соответствующего корню $\lambda = \alpha + \beta i$ $(\beta \neq 0)$, являются вещественными линейно независимыми решениями.

Пример 7. Решить систему

$$\begin{cases} \dot{x} = 4x - y \\ \dot{y} = 5x + 2y \end{cases}$$

Составляем и решаем характеристическое уравнение:

$$\begin{vmatrix} 4-\lambda & -1 \\ 5 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0 \;\; ; \lambda^2 - 6\lambda + 13 = 0 \;\; , \;\; \lambda = 3 \pm 2i.$$

Для корня $\lambda = 3 \pm 2i$ находим собственный вектор (a,b):

(1-2i)a-b=0; 5a-(1+2i)b=0

Можно взять a=1; b=1-2i. Имеем частное решение $x = e^{(3+2i)t}$; $y = (1-2i)e^{(3+2i)t}$.

Чтобы получить два вещественных решения, надо взять вещественную и мнимую части найденного комплексного решения

$$x = e^{(3+2i)t} = e^{3t}\cos 2t + ie^{3t}\sin 2t = x_1 + ix_2;$$

$$y = (1-2i)e^{(3+2i)t} = e^{3t}(\cos 2t + 2\sin 2t + ie^{3t}(\sin 2t - 2\cos 2t)) = y_1 + iy_2,$$

(x_1, y_1) и (x_2, y_2) – вещественные решения. Общее решение выражается через эти два решения:

$$x = c_1 x_1 + c_2 x_2 = c_1 e^{3t} + c_2 e^{3t}\sin 2t;$$

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 = c_1 e^{3t}(\cos 2t + 2\sin 2t) + c_2 e^{3t}(\sin 2t - 2\cos 2t).$$

Пример 8. Решить систему

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x + y, \\ \dot{y} = x + 3y - z, \\ \dot{z} = -x + 2y + 3z. \end{cases}$$

Составляем и решаем характеристическое уравнение:

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & 3-\lambda & -1 \\ -1 & 2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0 \ ;\lambda_1 = 2 \ \ ,\lambda_2 = 3 + i \ \ ,\lambda_3 = 3 - i.$$

При этом частные решения будут

$$x_1 = A_1 e^{2t} \ ; \quad x_2 = A_2 e^{(3+i)t} \ ; \quad x_3 = A_3 e^{(3-i)t} \ ;$$

$$y_1 = B_1 e^{2t} \ ; \quad y_2 = B_2 e^{(3+i)t} \ ; \quad y_3 = B_3 e^{(3-i)t} \ ;$$

$$z_1 = C_1 e^{2t} \ ; \quad z_2 = C_2 e^{(3+i)t} \ ; \quad z_3 = C_3 e^{(3-i)t} \ .$$

Для определения постоянных A_k, B_k, C_k, k=1,2,3, пользуемся системой алгебраических уравнений:

$$A_k(2 - \lambda_k) + B_k = 0 \ , \ A_k + (3 - \lambda_k)B_k - C_k = 0 \ ,$$

$$-A_k + 2B_k + (3 - \lambda_k)C_k = 0 \ , \ k = 1,2,3.$$

Решив систему уравнений относительно A_k, B_k, C_k, k=1,2,3, получаем:

$$B_1 = 0, \ A_1 = C_1 = A_2 = A_3 = 1, \ B_2 = 1 + i, \ C_2 = 2 - i, \ B_3 = 1 - i, \ C_3 = 2 + i.$$

Следовательно, общее решение:

$$x = \tilde{c}_1 e^{2t} + \tilde{c}_2 e^{3t}(\cos t + i\sin t) + \tilde{c}_3 e^{3t}(\cos t - i\sin t);$$

$$y = \tilde{c}_2(1 + i)e^{3t}(\cos t + i\sin t) + \tilde{c}_3(1 - i)e^{3t}(\cos t - i\sin t);$$

$$z = \tilde{c}_1 e^{2t} + \tilde{c}_2(2 - i)e^{3t}(\cos t + i\sin t) + \tilde{c}_3(2 + i)e^{3t}(\cos t - i\sin t).$$

Чтобы получить общее решение данной системы дифференциального уравнения в действительной форме, надо взять вещественную и мнимые части найденного комплексного решения. В частности, если положить

$$\tilde{c}_2 = c_2 + ic_3 \ , \ \tilde{c}_3 = c_2 - ic_3,$$

где c_2 , c_3 – действительные постоянные, и считая также $c_1 = \tilde{c}_1$ действительной постоянной, можно дописать общее решение данной системы в действительной форме:

$$x = c_1 e^{2t} + 2e^{3t}(c_2 \cos t - c_3 \sin t),$$

$y = 2e^{3t}((c_2 - c_3)\cos t - (c_2 - c_3)\sin t),$

$z = c_1 e^{2t} + 2e^{3t}((2c_2 + c_3)\cos t + (c_2 - 2c_3)\sin t).$

4. Системы, не приведенные к нормальному виду (1.2), решаются теми же способами, как в пунктах 1, 2, 3.

Пример 9. Решить систему

$$\begin{cases} \ddot{x} = 3x + 4y, \\ \ddot{y} = -x - y. \end{cases}$$

Определим x из второго уравнения системы и, подставив его в первое уравнение, получим

$$\left(-y'' - y\right)'' = 3\left(-y'' - y\right) + 4y, \quad y^{IV} - 2y'' = 0 \ .$$

Решив последнее уравнение, будем иметь

$$y = (c_1 + c_2 t)e^{t} + (c_3 + c_4 t)e^{-t}.$$

Из второго уравнение находим x:

$$x = 2(c_4 - c_3 - c_4 t)e^{-t} - 2(c_1 + c_2 + c_2 t)e^{t}.$$

Пример 10. Решить систему

$$\begin{cases} \ddot{x} + \dot{x} + \dot{y} - 2y = 0, \\ \dot{x} - \dot{y} + x = 0. \end{cases}$$

Складывая почленно оба уравнения системы, имеем $\ddot{x} + \dot{x} + x = 2y$, откуда находим $y = \frac{1}{2}\left(\ddot{x} + \dot{x} + x\right)$.

Подставляя это значение y во второе уравнение системы, получим дифференциальное уравнение относительно функции x:

$$\dddot{x} + 2\ddot{x} - \dot{x} - 2x = 0.$$

Решив его, будем иметь

$$x = c_1 e^{-2t} + c_2 e^{t} + c_3 e^{-t}.$$

Учитывая полученное решение, находим

$$y = \frac{1}{2} c_1 e^{-2t} + 2c_2 e^{t}.$$

Пример 11. Решить систему

$$\begin{cases} \ddot{x} + 5\dot{x} + 2\dot{y} + y = 0, \\ 3\ddot{x} + 5x + \dot{y} + 3y = 0. \end{cases}$$

Составляем и решаем характеристическое уравнение:

$$\begin{vmatrix} \lambda^2 + 5\lambda & 2\lambda + 1 \\ 3\lambda^2 + 5 & \lambda + 3 \end{vmatrix} = 0 \ , \ \lambda_1 = \lambda_2 = 1 \ , \ \lambda_3 = -1 .$$

Для корня λ=1 кратности *k*=2 получаем матрицу $\begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 8 & 4 \end{pmatrix}$ ранга r=1. Число *l* – линейно независимых собственных векторов равно n-r=1, следовательно степень многочленов равна k-l=1 и решение можно искать в виде

$x=(a+bt)e^t \;\; ; \;\; y=(c+dt)e^t$.

Подставляя это в исходную систему, получаем для a, b, c, d систему линейных уравнений. Решив ее, найдем

$a=c_1 \;\;,\;\; b=c_2 \;\;,\;\; c=-2c_1-c_2 \;\;,\;\; d=-2c_2$.

Для простого корня λ=-1 матрица имеет вид $\begin{pmatrix} -4 & -1 \\ 8 & 2 \end{pmatrix}$ и собственный вектор (1,-4). Получаем решение $x=c_3e^{-t}$, $y=-4c_3e^{-t}$. Таким образом, общее решение представляется в следующем виде:

$x=(c_1+c_2t)e^t+c_3e^{-t}$

$y=(-2c_1-c_2-2c_2t)e^t-4c_3e^{-t}$

5. Другой метод решения системы (1.2) основан на непосредственном отыскании фундаментальной матрицы этой системы.

Экспонентой e^A матрицы A называется сумма ряда

$$e^A = E+\frac{1}{1!}A+\frac{1}{2!}A^2+\frac{1}{3!}A^3+\ldots=\sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{j!}A^j \,, \qquad (1.24)$$

где E – единичная матрица. Свойства матричной экспоненты:

а) если AB=BA, то $e^{A+B}=e^A\cdot e^B=e^B\cdot e^A$;

б) если A=CMC^{-1}, то $e^A=Ce^MC^{-1}$;

в) матрица X(t)= e^{At} является решением матричной задачи Коши: $\frac{dX}{dt}=AX$, X(0)=E, то есть является фундаментальной матрицей системы (1.2').

Из свойства в) следует, что решение x(t), удовлетворяющее условию $x(0)=x_0$, определяется выражением $x(t)=e^{At}x_0$. Таким образом, задача нахождения решений системы уравнений (1.2') эквивалентна задаче отыскания матрицы e^{At} по матрице A. Последнее можно осуществить следующими способами.

1) Путем решения системы дифференциальных уравнений. В силу свойства в) i-й столбец матрицы e^{At} есть решение системы уравнений (в векторной записи) $\dot{\mathbf{x}}=A\,\mathbf{x}$ с начальными условиями $x_i(0)=1$, $x_k(0)=0$ при $k\neq i$ (x_i - i-я координата вектора x).

2) Путем приведения матрицы к жордановой форме. Пусть известна такая матрица C, что $C^{-1}AC=M$ имеет жорданову форму, то есть состоит из клеток K_j. Каждая жорданова клетка имеет вид K=λE+F, у матрицы F все элементы – нули, кроме первого косого ряда над диагональю. Поэтому F^m=0, где m – порядок матрицы F, и e^F легко найти с помощью ряда (1.24). Так как еще

$$e^{\lambda E}=e^{\lambda}E, \text{ то } e^{K}=e^{\lambda E+F}=e^{\lambda E}e^{F}=e^{\lambda}Ee^{F}=e^{\lambda}e^{F}.$$

Составив из клеток e^{K_j} матрицу e^M, найдём e^A с помощью свойства б).

Пример 12. Вычислить e^{At}, если

$$A=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}.$$

По определению матричной экспоненты имеем $e^{At}=E+At+\dfrac{A^2t^2}{2!}+\ldots$

Вычислим матрицы A^k (k=2,3,...);

$$A^2=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix};$$

$$A^3=A^2A=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix};$$

$$A^4=A^3A=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Отсюда видно, что $A^{2k}=(-1)^kE$, $A^{2k+1}=(-1)^kA$, k=0,1,2,... Поэтому

$$e^{At}=E+At-E\frac{t^2}{2!}-A\frac{t^3}{3!}+E\frac{t^4}{4!}+\ldots=$$

$$=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}t-\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\frac{t^2}{2!}-\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}\frac{t^3}{3!}+\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\frac{t^4}{4!}+\ldots=$$

$$=\begin{pmatrix}1-\dfrac{t^2}{2!}+\dfrac{t^4}{4!}+\ldots & t-\dfrac{t^3}{3!}+\dfrac{t^5}{5!}-\ldots\\ -t+\dfrac{t^3}{3!}-\dfrac{t^5}{5!}+\ldots & 1-\dfrac{t^2}{2!}+\dfrac{t^4}{4!}-\ldots\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos t & \sin t\\ -\sin t & \cos t\end{pmatrix}.$$

Пример 13. Вычислить матрицу e^{At}, если

$$A=\begin{pmatrix}3 & -2\\ 4 & -3\end{pmatrix}.$$

Собственные числа данной матрицы $\lambda_1=1$, $\lambda_2=-1$. Найдём такую невырожденную матрицу

$C=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$, чтобы $A=C^{-1}JC$, где $J=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$. Для определения матрицы C получаем уравнение

$$\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & -2\\ 4 & -3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$$

или

$$\begin{pmatrix} 3a+4b & -2a-3b \\ 3c+4d & -2c-3d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ -c & -d \end{pmatrix}.$$

отсюда a+2b=0, c+d=0. Одно из решений полученных уравнений есть a=2, b=-1, c=-1, d=1, поэтому в качестве C можно взять матрицу

$$C = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Обратная матрица к матрице C имеет вид

$$C^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, справедливо равенство

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Учитывая равенство $e^{At}=C^{-1}e^{Jt}C$, имеем

$$e^{At} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{t} & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{t} & e^{-t} \\ e^{t} & 2e^{-t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2e^{t}-e^{-t} & -e^{t}+e^{-t} \\ 2e^{t}-2e^{-t} & -e^{t}+2e^{-t} \end{pmatrix}.$$

Пример 14. Решить систему уравнений

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = A\mathbf{x},\ \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix},\ A = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 4 & 4 \end{pmatrix},$$ вычислив матрицу e^{At}.

<u>Решение</u>. Собственными числами матрицы A являются $\lambda_1=0$, $\lambda_2=2$. Найдем такую матрицу $T = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, чтобы $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

Перемножая матрицы в обеих частях записанного равенства, получим систему уравнений для определения чисел a, b, c, d: -a+2b=0, -c+d=0. Эта система алгебраических уравнений имеет решение a=2, b=1, c=1, d=1. Поэтому

$$T = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},\ T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Учитывая равенство $A=T^{-1}JT$, находим

$$e^{At} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} e^{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}t} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{2t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -e^{2t} \\ -1 & 2e^{2t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-e^{2t} & 1-e^{2t} \\ -2+2e^{2t} & -1+2e^{2t} \end{pmatrix}.$$

Таким образом, любое решение $\mathbf{x}(t)$ данной системы уравнений, проходящие при t=0 через точку x_0, запишем в виде

$$\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} 2-e^{2t} & 1-e^{2t} \\ -2+2e^{2t} & -1+2e^{2t} \end{pmatrix}\mathbf{x}_0.$$

§ 1.3. Неоднородные линейные системы.

Линейной неоднородной системой называется система вида

$$\frac{dx_i}{dt} = a_{i1}(t)x_1 + a_{i2}(t)x_2 + \ldots + a_{in}(t)x_n + f_i(t),\ i = \overline{1,n}, \tag{1.25}$$

или в векторной записи

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = A(t)\mathbf{x} + \mathbf{f}(t), \tag{1.26}$$

где $\mathbf{x}$ – вектор с компонентами $x_1, \ldots, x_n$; $A(t)=\{a_{ij}(t)\}$– матрица, компонентами которой являются функции $a_{ij}(t)$; $\mathbf{f}(t)$ – вектор-функция с компонентами $f_i(t)$.

1. Систему линейных неоднородных уравнений можно решать путём приведения их к одному уравнению более высокого порядка.

Пример 1. Решить систему

$$\begin{cases} \dot{x} = y + 2e^t \\ \dot{y} = x + t^2 \end{cases}$$

Исключая y из первого уравнения, имеем $y = \dot{x} - 2e^t$. Подставляя во второе уравнение, получаем $(\dot{x} - 2e^t)' = x + t^2$, или $\ddot{x} - x = t^2 + 2e^t$. Интегрируем последнее уравнение. Сначала найдем решение однородного $\ddot{x} - x = 0$, $\lambda^2 - 1 = 0;\ \lambda_1 = -1,\ \lambda_2 = 1$. Получаем общее решение однородного уравнения $x = c_1e^{-t} + c_2e^t$. Частное решение неоднородного уравнения найдем методом неопределенных коэффициентов.

В результате будем иметь

$x = c_1e^{-t} + c_2e^t - t^2 + te^t - 2$.

Далее, подставляя x в первое уравнение системы, найдём

$y = (c_1e^{-t} + c_2e^t - t^2 + te^t - 2)' - 2e^t = -c_1e^{-t} + c_2e^t - 2t + e^t + te^t - 2e^t =$

$= -c_1e^{-t} + c_2e^t + (t-1)e^t - 2t$

значит: $x = c_1e^{-t} + c_2e^t + te^t - t^2 - 2,\ y = c_1e^{-t} + c_2e^t + (t-1)e^t - 2e^t$.

Пример 2. Решить систему

$\dot{x}+y=t^2+6t+1,\ \dot{y}-x=-3t^2+3t+1.$

Подставляя значения $y=t^2+6t+1-\dot{x}$, найденное из первого уравнения системы, во второе уравнение, имеем

$$\ddot{x}+x=3t^2-t+5.$$

Интегрируя это уравнение, получаем общее решение
$x=c_1\sin t+c_2\cos t+\overline{x}(t)$ где $\overline{x}(t)$ – частное решение неоднородного уравнения, которое проще всего найти методом неопределенных коэффициентов. В результате будем иметь

$$x = c_1\sin t + c_2\cos t + 3t^2 - t - 1.$$

Далее, подставив значение x в первое уравнение системы, найдем

$$y = c_2\sin t - c_1\cos t + t^2 + 2.$$

2. Решение линейной неоднородной системы можно найти методом вариации постоянных, если известно общее решение однородной системы с теми же коэффициентами $a_{ij}(t)$. Для этого в формуле общего решения однородной системы надо заменить произвольные постоянные c_i на неизвестные функции $c_i(t)$. Полученные выражения для x_i надо подставить в систему (1.25) и из этой системы найти функции $c_i(t)$.

Пример 3. Применяя метод вариации, решить систему уравнений

$$\begin{cases} \dot{x} = -4x - 2y + \dfrac{2}{e^t - 1}, \\ \dot{y} = 6x + 3y - \dfrac{3}{e^t - 1}. \end{cases}$$

Прежде всего решаем однородную систему уравнений, соответствующую данной системе:

$$\begin{cases} \dot{x} = -4x - 2y, \\ \dot{y} = 6x + 3y. \end{cases}$$

Подставляя значение $y = -2x - \dfrac{1}{2}\dot{x}$ во второе уравнение, получаем

$\ddot{x} + \dot{x} = 0$, откуда $x=c_1+c_2e^{-t}$, тогда $y = -2c_1 - \dfrac{3}{2}c_2e^{-t}$. Для определения общего решения неоднородной системы, согласно методу вариации произвольных постоянных, считаем c_1 и c_2 некоторыми функциями: $c_1(t)$ и $c_2(t)$. Эти функции мы найдем из системы уравнений, которая получится в результате подстановки значений x и y в неоднородную систему:

$$\begin{cases} c_1'(t) + c_2'(t)e^{-t} = \dfrac{2}{e^t - 1}, \\ -2c_1'(t) - \dfrac{3}{2}c_2'(t)e^{-t} = -\dfrac{3}{e^t - 1}. \end{cases}$$

Отсюда положим $c_2'(t)=\dfrac{2e^t}{e^t-1}$, $c_1'(t)=0$. Интегрируя последние уравнения, получаем $c_1(t)=\tilde{c}_1$, $c_2(t)=2\ln(e^t-1)+\tilde{c}_2$, где $\tilde{c}_1$ и $\tilde{c}_2$ – произвольные постоянные. Подставляя значения $c_1(t)$ и $c_2(t)$ в общее решение однородной системы, имеем общее решение исходной системы:

$$\begin{cases} x=\tilde{c}_1+\tilde{c}_2e^{-t}+2e^{-t}\ln|e^t-1|, \\ y=-2\tilde{c}_1-\dfrac{3}{2}\tilde{c}_2e^{-t}-3e^{-t}\ln|e^t-1|. \end{cases}$$

Общее решение линейной неоднородной системы есть сумма общего решения соответствующей ей однородной системы и частного решения неоднородной системы.

3. Частные решения линейной неоднородной системы с постоянными коэффициентами (1.25) можно искать методом неопределенных коэффициентов в том случае, когда функции $f_i(t)$ состоят из сумм и произведений функций t^m, $e^{\alpha t}$, $\cos\beta t$, $\sin\beta t$. Это делается по тем же правилам, что и для одного линейного уравнения с постоянными коэффициентами, но со следующими изменениями. Если в (1.25) $f_i(t)=P_{m_i}(t)e^{\gamma t}$, где $P_{m_i}(t)$ – многочлен степени m_i, то частное решение системы (1.25) ищется в виде

$$Q^i_{m+s}(t)e^{\gamma t},\ \ i=\overline{1,n}, \tag{1.27}$$

где $Q^i_{m+s}(t)$ - многочлен степени m+s с неизвестными коэффициентами, $m=\max m_i$, s=0, если γ – не корень характеристического уравнения, а если γ – корень, то s следует взять равным кратности этого корня.

Аналогично определяются степени многочленов в случае, когда $f_i(t)$ содержит $e^{\alpha t}\cos\beta t$ и $e^{\alpha t}\sin\beta t$, здесь $\gamma=\alpha+\beta i$.

Неизвестные коэффициенты многочлена определяются путем подстановки (1.27) в данную систему (1.25) и сравнения коэффициентов подобных членов.

Пример 4. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=y-5\cos t, \\ \dfrac{dy}{dt}=2x+y. \end{cases}$$

Решение. Найдем общее решение однородной системы

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=y, \\ \dfrac{dy}{dt}=2x+y. \end{cases}$$

Составляем и решаем характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0,\ \lambda^2\text{-}\lambda\text{-}2=0;\ \lambda_1=-1,\ \lambda_2=2.$$

Общее решение соответствующей однородной системы:

$$\begin{cases} x_{\text{од.}} = c_1e^{-t} + c_2e^{2t}, \\ y_{\text{од.}} = -c_1e^{-t} + 2c_2e^{2t}. \end{cases}$$

Частное решение неоднородной системы найдем методом неопределённых коэффициентов, полагая

$$\begin{cases} x = A_1\sin t + B_1\cos t, \\ y = A_2\sin t + B_2\cos t. \end{cases}$$

Подставляя эти выражения в данную систему уравнений, получим уравнения для определения коэффициентов A_1, A_2, B_1, B_2:

$$\begin{cases} A_1 - B_2 = -5, \\ B_1 + A_2 = 0, \\ A_2 - 2B_1 - B_2 = 0, \\ 2A_1 + B_2 + A_2 = 0. \end{cases}$$

Решая эти уравнения, найдем $A_1=-2$, $B_1=-1$, $A_2=1$, $B_2=3$. Общее решение данной системы уравнений запишем в виде:

$$\begin{cases} x = c_1e^{-t} + c_2e^{2t} - 2\sin t - \cos t, \\ y = -c_1e^{-t} + 2c_2e^{2t} + \sin t + 3\cos t. \end{cases}$$

Пример 5. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x + y + 2e^{t}, \\ \dfrac{dy}{dt} = x + 2y - 3e^{4t}. \end{cases}$$

<u>Решение.</u> Находим корни характеристического уравнения соответствующей однородной системы:

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0,\ \lambda^2\text{-}4\lambda\text{+}3=0,\ \lambda_1=1,\ \lambda_2=3.$$

Общее решение однородной системы есть

$$\begin{cases} x_{\text{од.}} = c_1e^{t} + c_2e^{3t}, \\ y_{\text{од.}} = -c_1e^{t} + c_2e^{3t}. \end{cases}$$

Поскольку λ – корень характеристического уравнения однородной системы, частное решение данной системы ищем в виде

$$x_{\text{ч.н.}} = (A_1 + A_2t)e^{t} + A_3e^{4t},\ \ y_{\text{ч.н.}} = (B_1 + B_2t)e^{t} + B_3e^{4t}.$$

Подставляя эти выражения в данную систему, получаем уравнения для определения неизвестных коэффициентов A_i, B_i $(i=\overline{1,3})$:

$$\begin{cases} -A_1+A_2-B_1=2, \\ A_1+B_1-B_2=0, \\ A_2+B_2=0, \\ 2A_3-B_3=0, \\ 2B_3-A_3=3. \end{cases}$$

Из этих уравнений находим $A_1=0$, $A_2=1$, $A_3=-1$, $B_1=-1$, $B_2=-1$, $B_3=-2$. Частное решение неоднородной системы –

$$\begin{cases} x_{\text{ч.н.}}=te^t-e^{4t}, \\ y_{\text{ч.н.}}=-(t+1)e^t-2e^{4t}, \end{cases}$$

а ее общее решение –

$$\begin{cases} x=c_1e^t+c_2e^{3t}+te^t-e^{4t}, \\ y=-c_1e^t+c_2e^{3t}-(t+1)e^t-2e^{4t}. \end{cases}$$

Глава 2. Устойчивость.

§2.1 Устойчивость по Ляпунову. Асимптотическая устойчивость.

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_i}{dt}=f_i(t,x_1,x_2,...,x_n),\ i=\overline{1,n}, \tag{2.1}$$

или в векторной записи

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt}=\mathbf{f}(t,\mathbf{x}),\ \ \mathbf{x}=(x_1,x_2,\ldots,x_n). \tag{2.2}$$

Пусть f_i и $\frac{\partial f_i}{\partial x_k}$ непрерывны при $t_0\le t<\infty$.

<u>Определение</u>. Решение $x=\varphi(t)$ системы (2.2) называется устойчивым по Ляпунову, если для любого $\varepsilon>0$ существует такое $\delta>0$, что для всякого решения $\mathbf{x}(t)$ той же системы, начальное значение которого удовлетворяет неравенству

$$|\mathbf{x}(t_0)-\boldsymbol{\varphi}(t_0)|<\delta, \tag{2.3}$$

при всех $(t_0\le t<\infty)$ выполняется неравенство

$$|x(t)-\varphi(t)|<\varepsilon. \tag{2.4}$$

Если же для некоторого $\varepsilon>0$ такого δ не существует, то решение $\boldsymbol{\varphi}(t)$ называется неустойчивым.

Если решение $\varphi(t)$ устойчиво по Ляпунову и удовлетворяет условию

$$\lim_{t\to+\infty}|\mathbf{x}(t)-\varphi(t)|=0,$$

то оно называется асимптотически устойчивым.

Исследование на устойчивость решения $\boldsymbol{\varphi}(t)$ может быть сведено к исследованию на устойчивость тривиального решения (точки покоя) с помощью замены $\mathbf{y} = \mathbf{x} - \varphi(t)$.

Пользуясь определением устойчивости по Ляпунову, выясните, устойчиво ли тривиальное решение дифференциальных уравнений в следующих примерах.

Пример 1.

$$\dot{x} = 4x - t^2 x.$$

Разделяя переменные и интегрируя, находим общее решение:

$$x(t) = ce^{(4t - \frac{t^3}{3})}.$$

Это решение описывает однопараметрическое семейство интегральных кривых и содержит при c=0 тривиальное решение. Полагая t_0=0, имеем в общем случае c=x(0). Отсюда $|x(t) =| x(0)| e^{4t - \frac{t^3}{3}} \leq | x(0)| e^{\frac{16}{3}} <| x(0)| e^6$ при $t \geq 0$.

Пусть любое $\varepsilon > 0$ задано. Тогда ясно, что из неравенства (2.3) будет следовать неравенство (2.4) при $\varphi(t) \equiv 0$, если взять $\delta(\varepsilon) = \varepsilon e^{-6}$. Таким образом, решение $\varphi(t) \equiv 0$ устойчиво по Ляпунову. Кроме того, поскольку $\lim\limits_{t \to +\infty} x(t) = \lim\limits_{t \to +\infty} c \exp(4t - \frac{t^3}{3}) = 0$, то согласно определению это решение асимптотически устойчиво.

Пример 2.

$$3(t-1)\dot{x} = x.$$

Общее решение данного уравнения имеет вид

$$x(t) = c(t-1)^{\frac{1}{3}}$$

и при c=0 содержит тривиальное решение $x = \varphi(t) \equiv 0$. Полагая t_0=2, имеем в общем случае c=x(2). Отсюда $| x(t) |=| x(2)| \cdot | t-1|^{\frac{1}{3}}$.Возьмем $\varepsilon \geq 0$. Тогда, каким-бы малым не было $\delta > 0$, несмотря на выполнение неравенства

$$| x(2)| < \delta,$$

можно указать момент t (любое $t > t^* = 1 + \frac{\varepsilon}{| x(2)|^3}$), в который $| x(t) | > \varepsilon$.

Следовательно, тривиальное решение неустойчиво.

§2.2 Устойчивость по первому приближению.

Рассмотрим действительную дифференциальную систему

$$\frac{d\overline{x}}{dt} = A\overline{x} + \overline{g}(t, \overline{x}), \qquad (2.5)$$

где Ф – постоянная матрица; $\overline{g}(t,\overline{x}) \in C(t_0 \le t < \infty, \|\overline{x}\| < H)$, причем $\overline{g}(t,\overline{x}) = o(\|\overline{x}\|)$ равномерно по t, т.е.

$$|\overline{g}(t,\overline{x})| \le \alpha_i(\overline{x}) \|\overline{x}\|, \ \alpha_i \to 0 \text{ при } \overline{x} \to 0, \ i = \overline{1,n} \qquad (2.6)$$

Систему (2.5) будем называть квазилинейной; очевидно, эта система допускает тривиальное решение $\overline{x} = 0$. В этом случае систему $\frac{d\overline{\xi}}{dt} = A\overline{\xi}$ называют системой первого приближения системы (2.5) при $\overline{x} \to 0$.

Теорема Ляпунова (об устойчивости по первому приближению). Если все собственные значения λ_j $(j = \overline{1,n})$ матрицы A имеют отрицательные вещественные части, Re $\lambda_j<0$ $(j = \overline{1,n})$, то тривиальное решение системы (2.5) асимптотически устойчиво по Ляпунову при $t \to +\infty$; если же хотя бы одно собственное значение имеет положительную вещественную часть (Re $\lambda_j>0$), то тривиальное решение неустойчиво.

Чаще всего используются следующие нормы:

$$\|x(t)\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i(t)|^2}, \ \|x(t)\| = \max_k |x_k(t)|, \ \|x(t)\| = \sum_{k=1}^{n} |x_k(t)|.$$

В примерах 1 – 3 требуется исследовать на устойчивость тривиальное решение системы.

Пример 1.

$$\begin{cases} x_1' = 2x_1x_2 - x_1 + x_2, \\ x_2' = 2x_1 - 3x_2 + 5x_1^4 + x_2^5. \end{cases}$$

Поскольку для нелинейных членов $g_1(t,x_1,x_2)=2x_1x_2$, $g_2(t,x_1,x_2)=5x_1^4 + x_2^5$ справедливы оценки

$$|g_1| = 2|x_1x_2| \le x_1^2 + x_2^2 = \alpha_1(x_1,x_2)\|\mathbf{x}\|, \ g_2 = |5x_1^4 + x_2^5| \le \alpha_2(x_1,x_2)\|\mathbf{x}\|,$$

где $\alpha_1(x_1,x_2) = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$, $\alpha_2(x_1,x_2) = \dfrac{5x_1^4 + x_2^5}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}$, $\|\mathbf{x}\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$;

$\alpha_1 \to 0$, $\alpha_2 \to 0$ при $\|\mathbf{x}\| \to 0$, то согласно указанной теореме будем исследовать на устойчивость нулевое решение линейной системы:

$$\begin{cases} x_1' = -x_1 + x_2, \\ x_2' = 2x_1 - 3x_2. \end{cases}$$

Составив и решив характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} -1-\lambda & 1 \\ 2 & -3-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 4\lambda + 1;\ \lambda_1 = -2+\sqrt{3},\ \lambda_2 = -2-\sqrt{3},$$

видим, что Re $\lambda_1<0$, Re $\lambda_2<0$. Следовательно, нулевое решение данной системы асимптотически устойчиво.

Пример 2.

$$\begin{cases} x_1' = \ln(4x_2 + e^{-3x_1}), \\ x_2' = 2x_2 - 1 + (1-6x_1)^{\frac{1}{3}}. \end{cases}$$

Для выделения линейных членов разложим правые части данных уравнений, пользуясь формулой Маклорена:

$$\ln(4x_2 + e^{-3x_1}) = \ln(4x_2 + 1 - 3x_1 + \frac{9}{2}x_1^2 + o(x_1^2)) =$$

$$= -3x_1 + 4x_2 - 8x_2^2 + 12x_1x_2 + o(x_1^2 + x_2^2);$$

$$2x_2 - 1 + (1-6x_1)^{\frac{1}{3}} = 2x_2 - 1 + (1 - 2x_1 - 4x_1^2) + o(x_1^2 + x_2^2) =$$

$$= 2x_2 - 2x_1 - 4x_1^2 + o(x_1^2 + x_2^2).$$

Поэтому соответствующая линейная система запишется в виде:

$$\begin{cases} x_1' = -3x_1 + 4x_2, \\ x_2' = -2x_1 + 2x_2. \end{cases}$$

Составим и решим характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} -3-\lambda & 4 \\ -2 & 2-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + \lambda + 2 = 0;\ \lambda_{1,2} = \frac{-1 \pm i\sqrt{7}}{2}.$$

Так как Re $\lambda_{1,2}<0$, то нулевое решение данной системы асимптотически устойчиво.

Пример 3.

$$\begin{cases} x_1' = e^{x_1} - e^{-3x_3}, \\ x_2' = 4x_3 - 3\sin(x_1 + x_2), \\ x_3' = \ln(1 + x_3 - 3x_1). \end{cases}$$

Пользуясь формулой Маклорена, представляем правые части в виде:

$$e^{x_1} - e^{-3x_3} = x_1 + 3x_3 + \frac{1}{2}x_1^2 - \frac{9}{2}x_3^2 + o(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2),$$

$$4x_3 - 3\sin(x_1 + x_2) = 4x_3 - 3(x_1 + x_2) + o(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2),$$

$$\ln(1 + x_3 - 3x_1) = x_3 - 3x_1 - \frac{1}{2}(x_3 - 3x_1)^2 + o(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2).$$

Далее исследуем на устойчивость нулевое решение системы:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 + 3x_3, \\ \dot{x}_2 = -3x_1 - 3x_2 + 4x_3, \\ \dot{x}_3 = -3x_1 + x_3. \end{cases}$$

Корни λ_k характеристического уравнения

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 3 \\ -3 & -3-\lambda & 4 \\ -3 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0, \text{ есть } \lambda_1=-3,\ \lambda_{2,3} = 1 \pm 3i.$$

Поскольку Re $\lambda_{2,3}>0$, то по теореме Ляпунова нулевое решение системы неустойчиво.

В примерах 4, 5 для данных систем найти все положения равновесия и исследовать их на устойчивость.

Пример 4.

$$\begin{cases} x_1' = x_2 - x_1^2 - x_1, \\ x_2' = 3x_1 - x_1^2 - x_2. \end{cases}$$

Сначала на плоскости Ox_1x_2 находим точки в которых $x_1' = x_2' = 0$ (точки покоя, или положения равновесия), т.е. решаем систему уравнений

$$\begin{cases} x_2 - x_1 - x_1^2 = 0, \\ 3x_1 - x_1^2 - x_2 = 0. \end{cases}$$

Имеем две точки равновесия: (0,0) и (1,2). Составим матрицу из значений частных производных от правых частей исходной системы

$$A = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1-2x_1 & 1 \\ 3-2x_1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Находим собственные значения матрицы при $x_1=0$, $x_2=0$:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}, \begin{vmatrix} -1-\lambda & 1 \\ 3 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0,\ \lambda_{1,2} = -1 \pm \sqrt{3}.$$

Так как $-1+\sqrt{3} > 0$, то точка (0, 0) неустойчива.

При $x_1=1$, $x_2=2$ имеем

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{vmatrix} -3-\lambda & 1 \\ 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0,\ \lambda_{1,2} = -2 \pm \sqrt{2}.$$

Так как $\lambda_1<0$, $\lambda_2<0$, то точка (1, 2) асимптотически устойчива.
Пример 5.

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 3 - \sqrt{4 + x_1^2 + x_2}, \\ \dot{x}_2 = \ln(x_1^2 - 3). \end{cases}$$

Решаем систему уравнений

$$\begin{cases} 3 - \sqrt{4 + x_1^2 + x_2} = 0, \\ \ln(x_1^2 - 3) = 0. \end{cases}$$

Находим точки равновесия: (-2, 1); (2, 1).

Составим матрицу из значений частных производных от правых частей системы

$$A = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\dfrac{x_1}{\sqrt{4 + x_1^2 + x_2}} & -\dfrac{1}{2\sqrt{4 + x_1^2 + x_2}} \\ \dfrac{2x_1}{x_1^2 - 3} & 0 \end{pmatrix}.$$

Находим собственные значения матрицы A при $x_1=-2$, $x_2=1$:

$$A = \begin{pmatrix} \dfrac{2}{3} & -\dfrac{1}{6} \\ -4 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{vmatrix} \dfrac{2}{3} - \lambda & -\dfrac{1}{6} \\ -4 & -\lambda \end{vmatrix} = 0, \ \lambda^2 - \frac{2}{3}\lambda - \frac{2}{3} = 0; \ \lambda_{1,2} = \frac{1}{3} \pm \frac{\sqrt{7}}{6}.$$

Один из корней $\lambda = \frac{1}{3} + \frac{\sqrt{7}}{6}$ положителен, следовательно точка (-2, 1) неустойчива.

Проверим точку (2, 1). Получим характеристическое уравнение

$$\lambda^2 + \frac{2}{3}\lambda + \frac{2}{3} = 0; \ \lambda_{1,2} = -\frac{1}{3} \pm i\sqrt{\frac{5}{9}}.$$

Отсюда следует, что точка (2, 1) устойчива, так как $\mathrm{Re}\,\lambda_{1,2}<0$.

§2.3. Исследование на устойчивость с помощью функции Ляпунова

Определение. Производной от функции $V(t,x_1,\ldots,x_n)$ в силу системы (2.1) называется функция

$$\left.\frac{dv}{dt}\right|_{(2.1)} = \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial x_1} f_1 + \ldots + \frac{\partial v}{\partial x_n} f_n.$$

где $f_1,\ldots,f_n$ – правые части системы (2.1).

Теорема Ляпунова (об устойчивости тривиального решения нелинейной системы). Пусть система (2.1) обладает тривиальным решением $\overline{x} = \overline{0}$. Если существует дифференцируемая функция $v(x_1,\ldots,x_n)$, удовлетворяющая в области $|\bar{x}|<\varepsilon_0$ условиям:

1) v>0 при $\bar{x}\neq\bar{0}$, v(0)=0;
2) $\left.\dfrac{dv}{dt}\right|_{(2.1)}\leq 0$ при $|\bar{x}|<\varepsilon_0$, $t>t_0$,

то тривиальное решение системы (2.1) устойчиво по Ляпунову.

Если вместо условия 2) выполнено более сильное условие

3) $\left.\dfrac{dv}{dt}\right|_{(2.1)}\leq -W(\bar{x})<0$ при $0<|\bar{x}|<\varepsilon_0$, $t>t_0$,

а функция $W(\bar{x})$ непрерывна при $|\bar{x}|<\varepsilon_0$, $t>t_0$, то тривиальное решение системы (2.1) асимптотически устойчиво.

<u>Теорема Четаева</u> (о неустойчивости). Пусть система (2.1) обладает тривиальным решением $\bar{x}=\bar{0}$. Пусть в некоторой области $G\subset R^n$ существует дифференцируемая функция $v(x_1,\ldots,x_n)$, причём:

1) точка $\bar{x}=\bar{0}$ принадлежит границе области G;
2) v=0 на границе области G при $|\bar{x}|<\varepsilon_0$;
3) в области G при $t>t_0$ имеем v>0, $\left.\dfrac{dv}{dt}\right|_{(2.1)}\geq W(\bar{x})>0$, функция $W(\bar{x})$ непрерывная.

Тогда тривиальное решение системы (2.1) неустойчиво.

Построив функцию Ляпунова и применив теорему Ляпунова или Четаева, исследовать устойчивость нулевого решения в следующих задачах 1-4.

Пример 1.

$$\begin{cases}\dot{x}_1=x_2-x_1+x_1x_2,\\ \dot{x}_2=x_1-x_2-x_1^2-x_2^3.\end{cases}$$

Дифференцируемая функция $v=v(x_1,x_2)=x_1^2+x_2^2$ удовлетворяет условиям:

а) $v(x_1,x_2)>0$ при $x_1^2+x_2^2\neq 0$, $v(0,0)=0$;

б)

$$\frac{dv}{dt}=\frac{\partial v}{\partial x_1}\dot{x}_1+\frac{\partial v}{\partial x_2}\dot{x}_2=2x_1(x_2-x_1+x_1x_2)+2x_2(x_1-x_2-x_1^2-x_2^3)=$$

$$=-2((x_1-x_2)^2+x_2^4)\leq 0.$$

Следовательно, согласно теореме Ляпунова, нулевое решение устойчиво. Более того, так как функция

$$W(\bar{x})=2((x_1-x_2)^2+x_2^4)$$

удовлетворяет условию 3) теоремы Ляпунова, то тривиальное решение асимптотически устойчиво.

Пример 2.

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 2x_2^3 - x_1^5, \\ \dot{x}_2 = -x_1 - x_2^3 + x_2^5. \end{cases}$$

Поскольку дифференцируемая функция $v = v(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^4$ удовлетворяет условиям

а) $v(x_1, x_2) > 0$ при $x_1^2 + x_2^2 \neq 0$, $v(0,0) = 0$;

б) $\dfrac{dv}{dt} = 2x_1(2x_2^3 - x_1^5) + 4x_2^3(-x_1 - x_2^3 + x_2^5) = -2(x_1^6 + x_2^6 - 2x_2^8) \leq 0$

в некоторой малой окрестности точки (0,0), то по второй теореме Ляпунова нулевое решение устойчиво.

Пример 3.

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 2x_2 - x_1 - x_2^3, \\ \dot{x}_2 = x_1 - 2x_2. \end{cases}$$

Функция $v = v(x_1, x_2) = (x_1 + x_2)^2 + \dfrac{1}{2}x_2^4$ дифференцируема, неотрицательна при $x_1^2 + x_2^2 \neq 0$ и $v(0,0) = 0$. Ее полная производная $\dfrac{dv}{dt}$ в силу уравнений данной системы имеет вид:

$$\frac{dv}{dt} = 2(x_1 + x_2)(\dot{x}_1 + \dot{x}_2) + 2x_2^3\dot{x}_2 = -6x_2^4 \leq 0.$$

Следовательно, согласно теореме Ляпунова, нулевое решение устойчиво.

Пример 4.

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1^3 - x_2, \\ \dot{x}_2 = x_1 + x_2^3. \end{cases}$$

Функция $v = v(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$ удовлетворяет условиям:

а) $v(x_1, x_2) > 0$ в области $G : x_1^2 + x_2^2 \neq 0$. На границе области G (в точке (0,0)) $v(0,0) = 0$.

б) $\dfrac{dv}{dt} = 2x_1\dot{x}_1 + 2x_2\dot{x}_2 = 2x_1(x_1^3 - x_2) + 2x_2(x_1 + x_2^3) = 2(x_1^4 + x_2^4) > 0$ при $(x_1, x_2) \in G$.

Следовательно, согласно теореме Четаева, нулевое решение неустойчиво (заметим, что в качестве функции $W = W(x)$ здесь можно взять выражение $W = 2(x_1^4 + x_2^4)$).

§ 2.4. Условия отрицательности всех действительных частей собственных значений действительной матрицы

Собственные значения матрицы A с действительными коэффициентами являются корнями характеристического многочлена det(A-λE)=0, или корнями уравнения

$$a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0,\ a_0 > 0$$

с действительными коэффициентами. Здесь коэффициенты a_i $(i = \overline{1,n})$ однозначно выражаются через элементы матрицы A.

Необходимым условием отрицательности всех действительных частей корней уравнения

$$a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0,\ a_0 > 0 \tag{2.8}$$

являются неравенства $a_i > 0,\ i = \overline{1,n}$.

Матрица вида

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & a_n \end{pmatrix}, \tag{2.9}$$

получаемая заменой чисел a_i с индексами $i > n$ или $i < 0$ нулями, называется матрицей Гурвица.

1. Критерий Рауса-Гурвица.

   Для отрицательности всех действительных частей корней уравнения (2.8) необходимо и достаточно, чтобы были положительными все главные диагональные миноры матрицы Гурвица:

$$\Delta_1 = a_1,\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix},\ \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ a_5 & a_4 & a_3 \end{vmatrix},\ \ldots \tag{2.10}$$

2. Критерий Льенара-Шипара. Для отрицательности всех действительных частей корней уравнения (2.8) необходимо и достаточно, чтобы все $a_i > 0$ и чтобы $\Delta_{n-1} > 0,\ \Delta_{n-3} > 0,\ \Delta_{n-5} > 0,\ \ldots$
3. Критерий Михайлова. Для отрицательности всех действительных частей корней уравнения (2.8) необходимо и достаточно, чтобы $a_n a_{n-1} > 0$ и чтобы корни многочленов

$$\begin{aligned} p(\xi) &= a_n - a_{n-2}\xi + a_{n-4}\xi^2 - \ldots, \\ q(\eta) &= a_{n-1} - a_{n-3}\eta + a_{n-5}\eta^2 - \ldots, \end{aligned} \tag{2.11}$$

   удовлетворяли неравенствам:

$$0 < \xi_1 < \eta_1 < \xi_2 < \eta_2 < \ldots . \qquad (2.12)$$

В примерах 1-4 исследовать устойчивость нулевого решения, пользуясь условиями отрицательности действительных частей всех корней многочлена с действительными коэффициентами.

Пример 1.

$$x^{\mathrm{IV}} + 2x''' + 4x'' + 3x' + 2x = 0.$$

Для исследования устойчивости нулевого решения воспользуемся критерием Рауса-Гурвица. Матрица Гурвица в данном случае имеет вид:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Поскольку ее главные миноры

$$\Delta_1 = a_1 = 2 > 0,\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 5 > 0,\ \Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 7 > 0,$$

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 14 > 0,$$

то согласно указанному критерию действительные части всех корней характеристического многочлена $\lambda^4 + 2\lambda^3 + 4\lambda^2 + 3\lambda + 2$ отрицательны. Следовательно, нулевое решение асимптотически устойчиво.

Пример 2.

$$x^{\mathrm{IV}} + 2x''' + 6x'' + 5x' + 6x = 0.$$

Матрица Гурвица

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 6 & 2 & 1 \\ 0 & 6 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

имеет положительные главные диагональные миноры

$$\Delta_1 = 2 > 0,\ \Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 5 & 6 & 2 \\ 0 & 6 & 5 \end{vmatrix} = 11 > 0.$$

Поскольку, кроме того, все коэффициенты характеристического уравнения $\lambda^4 + 2\lambda^3 + 6\lambda^2 + 5\lambda + 6 = 0$ положительны, то по критерию Льенара-

Шипара действительные части всех корней этого уравнения отрицательны. Таким образом, мы имеем асимптотическую устойчивость.
Пример 3.

$$x^{V} + x^{IV} + 4x'''+3x''+\frac{15}{4}x'+2x = 0.$$

Для исследования на устойчивость воспользуемся критерием Михайлова. В данном случае корни многочленов

$$p(\xi) = 2 - 2\xi + \xi^2 \quad , \quad q(\eta) = \eta^2 - 4\eta + \frac{15}{4}$$

имеют вид $\xi_{1,2}$ =1, 2; $\eta_{1,2} = \frac{3}{2}$, $\frac{5}{2}$. Следовательно, $0 < \xi_1 < \eta_1 < \xi_2 < \eta_2$. Как видим, здесь выполняется условие критерия Михайлова, поэтому нулевое решение асимптотически устойчиво.
Пример 4.

$$x^{IV} + 2x'''+3x''+7x'+2x = 0.$$

Составляя и вычисляя первые главные диагональные миноры матрицы Гурвица

$$A_1 = 2, \quad A = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 7 & 3 \end{vmatrix} = -1,$$

замечаем, что не все корни уравнения

$$f(\lambda) = \lambda^4 + 2\lambda^3 + 3\lambda^2 + 7\lambda + 2 = 0$$

имеют отрицательные действительные части. Предположим, что один из корней имеет нулевую действительную часть: $\lambda = i\omega$. Тогда должно быть

$$\omega^4 - 2i\omega^3 - 3\omega^2 + 7i\omega + 2 = 0,$$

или

$$\begin{cases} \omega^4 - 3\omega^2 + 2 = 0, \\ -2\omega^3 + 7\omega = 0. \end{cases}.$$

Последнее соотношение показывает, что это невозможно. Следовательно, хотя бы один корень имеет положительную действительную часть. Значит, нулевое решение неустойчиво.

§2.5. Особые точки

Определение особых точек и их классификация. Пусть в системе дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = M(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = N(x, y) \tag{2.13}$$

функции M,N непрерывно дифференцируемы в некоторой окрестности точки (x_0, y_0) где они одновременно обращаются в нуль, то есть $M(x_0, y_0)$=0, $N(x_0, y_0)$=0.

Определение. Точка (x_0, y_0), в окрестности которой функции M, N непрерывно дифференцируемы и $M(x_0, y_0) = N(x_0, y_0) = 0$, называется особой точкой системы (1) на плоскости 0xy.

Для исследования расположения траекторий вблизи особой очки (0,0) системы

$$\dot{x} = ax + by; \quad \dot{y} = cx + dy \tag{2.14}$$

надо найти собственные значения λ_1, λ_2 характеристического уравнения

$$\begin{vmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{vmatrix} = 0 \tag{2.15}$$

Если λ_1, λ_2 вещественны, различны и одного знака, то особая точка – *узел* (картина интегральных кривых в окрестности начала координат напоминает семейство парабол, вершины которых совпадают с точкой (0, 0)). Если корни имеют разные знаки, то особая точка называется *седлом*, а интегральные кривые представляют собой несколько деформированные гиперболы. Если корни комплексные, но $\operatorname{Re}\lambda_{1,2} \neq 0$, то особая точка называется *фокусом*, а интегральные кривые имеют вид спиралей, закручивающихся вокруг начала координат. Если же $\operatorname{Re}\lambda_{1,2} = 0$, но $\operatorname{Im}\lambda_{1,2} \neq 0$, то особая точка – *центр*. Интегральные кривые в этом случае замкнуты и охватывают начало координат.

Кроме этих (основных) особых точек различают еще точки: *вырожденный узел* ($\lambda_1 = \lambda_2 \neq 0$) и *докритический узел* (лишь в случае, когда система имеет вид $\dfrac{dx}{dt} = ax;\ \dfrac{dy}{dt} = ay;\ a \neq 0$).

Выясним, как расположены траектории вблизи особой точки относительно осей координат. Вдоль каждого собственного вектора матрицы

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

системы (2.15) в особую точку входит прямолинейная траектория этой системы. В случае узла остальные траектории касаются с двух сторон прямой, идущей вдоль собственного вектора с меньшим по модулю собственным значением. В случае фокуса и вырожденного узла надо определить направление закручивания траектории.

В следующих примерах следует исследовать особые точки и изобразить графически семейство интегральных кривых в окрестности особой точки.

Пример 1.

$$\begin{cases} \dot{x} = x + 3y, \\ \dot{y} = -6x - 5y. \end{cases}$$

Составляем и решаем характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 3 \\ -6 & -5-\lambda \end{vmatrix} = 0; \ \lambda_{1,2} = -2 \pm 3i.$$

Поскольку $\operatorname{Re}\lambda_{1,2} < 0$, то точка (0, 0) является устойчивым фокусом (рис. 1).

Чтобы выяснить направление закручивания интегральных кривых (спиралей) построим вектор скорости в точке (1, 0):

$\dot{x} = 1, \quad \dot{y} = -6$ (рис.1).

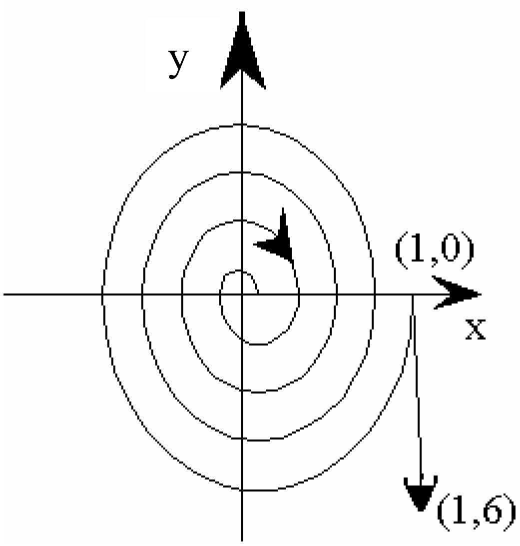


Рис. 1

Пример 2. $\dot{x} = -2x - 5y, \ \dot{y} = 2x + 2y.$

Характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} -2-\lambda & -5 \\ 2 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

имеет корни $\lambda_{1,2} = \pm i\sqrt{6}$. Следовательно, особая точка – центр. Направление движения по траектории определяем по вектору скорости: $(\dot{x}(0,1); \dot{y}(0,1)) = (-5,2)$. Для установления уравнений прямых y=kx, на которых расположены оси эллипсов, найдем экстремумы функций

$f = f(x,y) = x^2 + y^2$ при условии, что $\dfrac{y}{x} = k$ и $\dot{x} = -2x - 5y, \ \dot{y} = 2x + 2y.$

Из необходимого условия экстремума получаем уравнение

$$\frac{df}{dt} = 2x\dot{x} + 2y\dot{y} = 0,$$

подставив в которое значения $\dot{x}, \dot{y}, y = kx,$ после сокращения на x^2 приходим к уравнению

$$2k^2 - 3k - 2 = 0.$$

Следовательно, на прямых $y = 2x, \ \ y = -\dfrac{x}{2}$ расположены оси всех эллипсов (рис. 2).

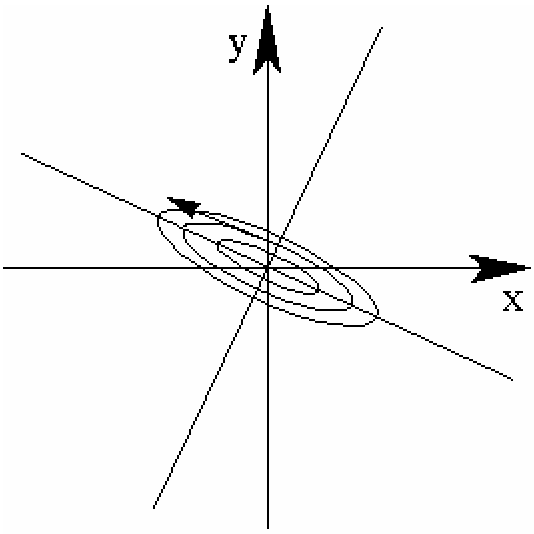


Рис. 2

Пример 3. $\dot{x} = 3x - 4y,\ \dot{y} = x - 2y.$

Из уравнения

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & -4 \\ 1 & -2-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

находим $\lambda_{1,2} = \dfrac{1 \pm 3}{2}$. Так как корни $\lambda_{1,2}$ действительные и имеют разные знаки, то особая точка – седло. В этом случае семейство интегральных кривых (гипербол) имеет две прямые, проходящие через начало координат x=t, y=kt (t – параметр). Для нахождения углового коэффициента k подставим параметрические уравнения прямых в систему дифференциальных уравнений.

После исключения параметра t получим уравнение для k: $4k^2$-5k+1=0, откуда k_1=1, $k_2 = \dfrac{1}{4}$. Следовательно, среди интегральных кривых имеются две прямые: $y = x,\ y = \dfrac{x}{4}$. Построив четыре вектора скорости $v_1(0,-1) = (4,2); v_2(0,1) = (-4,-2); v_3(1,\frac{1}{2}) = (0,1); v_4(-1,-\frac{1}{2}) = (-1,0),$ устанавливаем направление движения по траекториям (рис. 3).

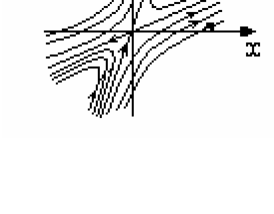


Рис. 3

Глава 3. Уравнения в частных производных первого порядка.

§3.1. Основные понятия и решение уравнения в частных производных первого порядка

Определение. Квазилинейным уравнением первого порядка в частных производных называется уравнение вида

$$\sum_{i=1}^{n} X_i(x_1, x_2, ..., x_n, z)\frac{\partial z}{\partial x_i} = R(x_1, x_2, ..., x_n, z), \tag{3.1}$$

где X_i, R – известные функции, $z=z(x_1,x_2,...,x_n)$ – функция, подлежащая определению. Если функции X_i от z не зависят и $R \equiv 0$, то уравнение (3.1) называется линейным однородным в частных производных.

1. Чтобы решить уравнение (3.1), надо составить систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_1}{X_1} = \frac{dx_2}{X_2} = ... = \frac{dx_n}{X_n} = \frac{dz}{R}, \tag{3.2}$$

интегрируя которую, находим n независимых первых интегралов:

$$\left.\begin{aligned} &\psi_1(x_1, x_2, ..., x_n, z) = c_1, \\ &\psi_2(x_1, x_2, ..., x_n, z) = c_2, \\ &.................................. \\ &\psi_n(x_1, x_2, ..., x_n, z) = c_n. \end{aligned}\right\} \tag{3.3}$$

Общий интеграл уравнения (3.1) записывается так:

$$\Phi(\psi_1, \psi_2, ..., \psi_n) = 0, \tag{3.4}$$

где Φ – произвольная дифференцируемая функция.

Найти общее решение или общий интеграл для каждого из следующих уравнений:

Пример 1. $$(x + 2y)\frac{\partial z}{\partial x} - y\frac{\partial z}{\partial y} = 0.$$

Решение. Составляем систему уравнений (3.2):

$$\frac{dx}{x + 2y} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{0}.$$

Из второго уравнения получаем первый интеграл $z=c_1$. Первое уравнение

$$ydx=(x+2y)dy$$

является уравнением в полных дифференциалах, поэтому $d(xy+y^2)=0$, или $xy+y^2=c_2$.

Общий интеграл данного уравнения имеет вид

$$\Phi(z,xy+y^2)=0.$$

Разрешив последнее уравнение относительно z, получим общее решение

$$z=\varphi(xy+y^2),$$

где φ – произвольная дифференцируемая функция.

Пример 2. $(x-z)\dfrac{\partial u}{\partial x}+(y-z)\dfrac{\partial u}{\partial y}+2z\dfrac{\partial u}{\partial z}=0.$

Из системы

$$\frac{dx}{x-z}=\frac{dy}{y-z}=\frac{dz}{2z}=\frac{du}{0}$$

находим первый интеграл $u=c_1$. Далее, используя свойство пропорции, получаем две интегрируемые комбинации:

$$\frac{d(x+z)}{x+z}=\frac{dz}{2z},\ \frac{d(y+z)}{y+z}=\frac{dz}{2z},$$

откуда находим еще два первых независимых интеграла:

$$2\ln|x+z|=\ln|z|+\ln c_2,\ \text{или}\ \frac{(x+z)^2}{z}=c_2\ \text{и}\ \frac{(y+z)^2}{z}=c_3.$$

Таким образом, общий интеграл представляется в виде:

$$\Phi\left(u,\frac{(x+z)^2}{z},\frac{(y+z)^2}{z}\right)=0,$$

откуда следует общее решение

$$u=\varphi\left(\frac{(x+z)^2}{z},\frac{(y+z)^2}{z}\right),$$

где φ – произвольная дифференцируемая функция.

Пример 3. $(u-x)\dfrac{\partial u}{\partial x}+(u-y)\dfrac{\partial u}{\partial y}-z\dfrac{\partial u}{\partial z}=x+y.$

Находим первые интегралы системы:

$$\frac{dx}{u-x}=\frac{dy}{u-y}=\frac{dz}{-z}=\frac{du}{x+y}.$$

На основании свойства пропорции получаем интегрируемую комбинацию

$$\frac{d(x-y)}{x-y}=\frac{dz}{z},$$

откуда находим первый интеграл $\dfrac{x-y}{z}=c_1$. Аналогично имеем еще одну комбинацию:

$$\frac{d(x+y+2u)}{2u-(x+y)+2(x+y)}=-\frac{dz}{z},$$

или

$$\frac{d(x+y+2u)}{2u+x+y}=-\frac{dz}{z},$$

откуда интегрированием находим $(x+y+2u)z=c_2$ – первый интеграл. Остается найти еще один первый интеграл. Для этого с помощью последнего интеграла исключим сумму $x+y$ из третьего уравнения системы. Тогда придем к уравнению

$$\frac{zdu}{2uz-c_2}=\frac{dz}{z}.$$

Интегрируя это уравнение, получаем еще один первый интеграл:

$$u=\frac{c_2}{3z}+c_3z^2, \text{ или } \frac{u-x-y}{3z^2}=c_3.$$

Таким образом, общий интеграл имеет вид:

$$\Phi\left(\frac{x-y}{z},(x+y+2u)z,\frac{u-x-y}{z^2}\right)=0.$$

2. Чтобы найти поверхность $z=z(x,y)$, удовлетворяющую дифференциальному уравнению

$$a_1(x,y,z)\frac{\partial z}{\partial x}+a_2(x,y,z)\frac{\partial z}{\partial y}=b(x,y,z) \tag{3.5}$$

и проходящую через данную линию

$$x=u(t),\ y=v(t),\ z=w(t), \tag{3.6}$$

надо составить систему уравнений

$$\frac{dx}{a_1}=\frac{dy}{a_2}=\frac{dz}{b} \tag{3.7}$$

и найти ее два независимых первых интеграла

$$\varphi_1(x,y,z)=c_1,\ \ \varphi_2(x,y,z)=c_2. \tag{3.8}$$

Из этих интегралов и уравнений (3.6) надо исключить x,y,z,t. Получится соотношение вида $F(c_1,c_2)=0$. В него вместо c_1, c_2 надо подставить левые части первых интегралов (3.8). Это даст уравнение искомой поверхности.

Пример 4. Найти поверхность, удовлетворяющую данному уравнению и проходящую через данную линию, если:

$$x\frac{\partial z}{\partial x}-2y\frac{\partial z}{\partial y}=x^2+y^2;\ \ y=1,\ \ z=x^2.$$

Решение. Составим систему уравнений:

$$\frac{dx}{x}=\frac{dy}{-2y}=\frac{dz}{x^2+y^2}.$$

Отсюда находим: $yx^2=c_1,\ \dfrac{x^2}{2}-\dfrac{y^2}{4}-z=c_2.$

Следовательно, общее решение имеет вид:

$$z=\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{4}+\varphi(yx^2). \qquad (3.9)$$

Функция φ, согласно начальным условиям, удовлетворяет уравнению:

$$x^2=\frac{x^2}{2}-\frac{1}{4}+\varphi(x^2)$$

Отсюда

$$\varphi(x^2)=\frac{x^2}{2}+\frac{1}{4}.$$

Следовательно: $\varphi(yx^2)=\frac{yx^2}{2}+\frac{1}{4}$.

Тогда из (3.9) находим требуемое решение:

$$z=\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{4}+\frac{yx^2}{2}+\frac{1}{4}.$$

Пример 5. $x\frac{\partial z}{\partial x}-y\frac{\partial z}{\partial y}=z^2(x-3y),\ x=1,\ yz+1=0.$

Решение. Находим первые интегралы системы:

$$\frac{dx}{x}=-\frac{dy}{y}=\frac{dz}{z^2(x-3y)}.$$

Из первого уравнения $\frac{dx}{x}=-\frac{dy}{y}$ получаем: $xy=c_1$. (3.10)

Используя этот интеграл, решаем уравнение

$$\frac{dx}{x}=\frac{dz}{z^2(x-3c_1x^{-1})},$$

или

$$(1-\frac{3c_1}{x^2})dx=\frac{dz}{z^2}.$$

Отсюда находим еще один первый интеграл:

$$x+3y+\frac{1}{z}=c_2. \qquad (3.11)$$

Теперь, исключив переменные x,y,z из соотношений

$$x=1,\ \ yz+1=0,\ \ xy=c_1,\ \ x+3y+\frac{1}{z}=c_2,$$

находим связь между c_1 и c_2 на кривой $x=1,\ yz+1=0$. Имеем:

$$1+2c_1-c_2=0.$$

Подставляя сюда вместо c_1 и c_2 левые части первых интегралов (3.10), (3.11), получим искомое решение уравнения:

$$1+2xy-x-3y-\frac{1}{z}=0.$$

Пример 6.

$$z\frac{\partial z}{\partial x}-xy\frac{\partial z}{\partial y}=2xz;\ \ x+y=2,\ \ yz=1.$$

Первые независимые интегралы системы

$$\frac{dx}{z}=-\frac{dy}{xy}=\frac{dz}{2xz}$$

имеют вид: $x^2-z=c_1,\ zy^2=c_2$.

Исключив переменные x, y, z из соотношений

$$x+y=2,\ yz=1,\ x^2-z=c_1,\ zy^2=c_2,$$

находим связь между интегралами на данной кривой:

$$(2-c_2)^2-c_2^{-1}-c_1=0.$$

Подставив сюда значения c_1, c_2, имеем уравнение искомой поверхности:

$$(2-zy^2)^2-z^{-1}y^{-2}-x^2+z=0.$$

3. Уравнение вида

$$P(x,y,z)dx+Q(x,y,z)dy+R(x,y,z)dz=0 \qquad (3.12)$$

называется уравнением Пфаффа.

К нему сводится задача о нахождении семейства поверхностей $u(x,y,z)=c$, ортогональных векторным линиям поля $\overline{F}=(P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z))$. При этом dx, dy, dz – координаты вектора, лежащего в касательной плоскости к искомым поверхностям.

Если поле $\overline{F}$ потенциально, т.е. $P=\frac{\partial u}{\partial x},\ Q=\frac{\partial u}{\partial y},\ R=\frac{\partial u}{\partial z}$, то искомая поверхность U находится с помощью криволинейного интеграла:

$$u(x,y,z)=\int\limits_{(x_0,y_0,z_0)}^{(x,y,z)} Pdx+Qdy+Rdz. \qquad (3.13)$$

Если поле $\overline{F}$ не потенциально, то в некоторых случаях можно подобрать множитель $\mu=\mu(x,y,z)$ так что потенциальным окажется поле $\mu\overline{F}$. Следовательно,

$$\mu P=\frac{\partial u}{\partial x},\ \mu Q=\frac{\partial u}{\partial y},\ \mu R=\frac{\partial u}{\partial z}.$$

Необходимым и достаточным условием существования семейства поверхностей, ортогональных векторным линиям, является равенство $(\overline{F},\mathrm{rot}\overline{F})=0$. Если это условие выполнено, то уравнение (3.12) можно интегрировать как с помощью интегрирующего множителя, так и следующим методом. Считают некоторую переменную в уравнении (3.12) постоянной и интегрируют оставшуюся часть уравнения. В полученном интеграле постоянную интегрирования принимают за неизвестную функцию от ранее зафиксированной переменной и подбирают ее таким образом, чтобы интеграл удовлетворял уравнению (3.9).

Если $(\overline{F}, \mathrm{rot}\overline{F}) = 0,$ то уравнение (3.12) интегрируется одним соотношением. Если же $(\overline{F}, \mathrm{rot}\overline{F}) \neq 0,$ то уравнение Пфаффа интегрируется двумя соотношениями, т.е. ищут не поверхности, ортогональные векторным линиям поля $\overline{F},$ а линии, обладающие тем же свойством и лежащие на заданной поверхности $u(x, y, z) = 0.$ Исключив одну из переменных уравнений (3.12) и используя u(x,y,z)=0, получают обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка.

<u>Проинтегрировать уравнения Пфаффа.</u>

Пример 1.

$$(z^2 - y^2 + yz)dx + (xz - 2xy)dy + (2xz + 2z + xy)dz = 0.$$

<u>Решение</u>. Находим $\mathrm{rot}\overline{F},$ где $\overline{F} = (z^2 - y^2 + yz, xz - 2xy, 2xz + 2z + xy);$ следовательно

$$\mathrm{rot}\overline{F} = (\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z})\overline{i} + (\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x})\overline{j} + (\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y})\overline{k} =$$

$$= (x - x)\overline{i} + (2z + y - 2z - y)\overline{j} + (z - 2y + 2y - z)\overline{k} = 0.$$

Поле $\overline{F}$ – потенциально, следовательно, левая часть данного уравнения является полным дифференциалом функции

$$u(x, y, z) = \int\limits_{(0,0,0)}^{(x,y,z)} F_x dx + F_y dy + F_z dz = \int\limits_{(0,0,0)}^{(x,y,z)} (z^2 - y^2 + yz)dx + (xz - 2xy)dy +$$

$$+ (2xz + 2z + xy)dz = z^2(x + 1) + xyz - xy^2.$$

Поэтому $z^2(x + 1) + xyz - xy^2 = c$ есть искомый интеграл.

Пример 2.

$$3xy^2zdx + 3x^2yzdy + 2x^2y^2dz = 0.$$

Поскольку $\mathrm{rot}\overline{F} \neq 0,$ но $(\overline{F}, \mathrm{rot}\overline{F}) = 0,$ то данное уравнение интегрируется одним соотношением. Найдем интеграл уравнения, считая переменную z постоянной, интегрируем соотношение

$$3xy^2z_0dx + 3x^2yz_0dy = 0, \text{ или } d(xy) = 0.$$

Отсюда следует, что $xy = c.$ Принимая $c = c(z),$ подбираем функцию c таким образом, чтобы соотношение $xy = c(z)$ стало интегралом данного уравнения. Вычислив

$$dx = \frac{c'(z)dz - xdy}{y}$$

и подставив в исходное уравнение значения $xy = c(z)$ и dx, после некоторых упрощений получим уравнение:

$$3c'z + 2c = 0.$$

Интегрируя последнее уравнение, имеем

$$c = c_0 z^{-\frac{2}{3}}.$$

Таким образом, интегрируя исходное уравнение, получим

$$x^3 y^3 z^2 = c_0.$$

Пример 3.

$$(2yz + 3x)dx + xzdy + xydz = 0.$$

Здесь $\overline{F} = (2yz + 3x, xz, xy)$. Поскольку $(\overline{F}, \operatorname{rot}\overline{F}) = 0$, но $\operatorname{rot}\overline{F} \neq 0$, то поле $\overline{F}$ не потенциально. Но существует множитель μ такой, что $\operatorname{rot}\overline{F} = 0$, т.е. потенциальным является поле $\mu\overline{F}$. Из уравнения $\operatorname{rot}\mu\overline{F} = 0$ следуют три скалярных уравнения:

$$y\frac{\partial\mu}{\partial y} - z\frac{\partial\mu}{\partial z} = 0,\; xy\frac{\partial\mu}{\partial x} - (2yz + 3x)\frac{\partial\mu}{\partial z} = \mu y,\; xz\frac{\partial\mu}{\partial x} - (2yz + 3x)\frac{\partial\mu}{\partial y} = \mu z.$$

Из первого уравнения находим

$$\mu = \varphi(x, y, z).$$

Подставив значение μ во второе уравнение, получим:

$$x\frac{\partial\varphi}{\partial x} - (2yz + 3x)\frac{\partial\varphi}{\partial(yz)} = \varphi,$$

Отсюда $\varphi = x\Psi(x^2yz + x)$; поэтому $\mu = x\psi(x^2yz + x)$.

Наконец, подставив μ в третье уравнение, имеем $\psi' = 0$, т.е. $\psi = c$. Таким образом, $\mu = x$.

После умножения исходного уравнения на μ, получаем

$$(2xyz + 3x^2)dx + x^2zdy + x^2ydz = 0,$$

интеграл которого имеет вид

$$x^3 + x^2yz = c.$$

Это и есть искомый интеграл.

§ 3.2. Варианты заданий для самостоятельной работы

Контрольные задания.

1. Найти общее решение системы дифференциальных уравнений в случае, когда матрица системы имеет вещественные собственные значения.
2. Найти общее решение системы дифференциальных уравнений в случае, когда матрица системы имеет комплексные собственные значения.
3. Найти общее решение, используя метод вариации постоянных.
4. Найти решение неоднородной системы уравнений.
5. Для заданной системы уравнений найти все положения равновесия и исследовать их на устойчивость.
6. Исследовать устойчивость нулевого решения, используя критерий Рауса-Гурвица или критерий Михайлова.
7. Найти общее решение или общий интеграл.
8. Найти поверхность, удовлетворяющую данному уравнению и проходящую через данную линию.

Вариант 1.

1. $\begin{cases} \dot{x} = x + z - y, \\ \dot{y} = x + y - z, \\ \dot{z} = 2x - y. \end{cases}$

2. $\begin{cases} \dot{x} = x - y - z, \\ \dot{y} = x + y, \\ \dot{z} = 3x + z. \end{cases}$

3. $\begin{cases} \dot{x} = x - y + \dfrac{1}{cos\, t}, \\ \dot{y} = 2x - y. \end{cases}$

4. $\begin{cases} \dot{x} = y - 5\cos t, \\ \dot{y} = 2x + y. \end{cases}$

5. $\begin{cases} \dot{x} = -\sin y, \\ \dot{y} = 2x + \sqrt{1 - 3x - \sin y}. \end{cases}$

6. $y^{\mathrm{IV}} + 2y''' + 3y'' + 7y' + 2y = 0.$

7. $(x + 2y)\dfrac{\partial z}{\partial x} - y\dfrac{\partial z}{\partial y} = 0.$

8. $x\dfrac{\partial z}{\partial x} - 2y\dfrac{\partial z}{\partial y} = x^2 + y^2, \quad y = 1,\ z = x^2.$

Вариант 2.

1. $\begin{cases} \dot{x} = x - 2y - z, \\ \dot{y} = y - x + z, \\ \dot{z} = x - z. \end{cases}$

2. $\begin{cases} \dot{x} = 2x + y, \\ \dot{y} = x + 3y - z, \\ \dot{z} = 2y + 3z - x. \end{cases}$

3. $\begin{cases} \dot{x} = -4x - 2y + \dfrac{2}{e^t - 1}, \\ \dot{y} = 6x + 3y - \dfrac{3}{e^t - 1}. \end{cases}$

4. $\begin{cases} \dot{x} = 3x + 2y + 4e^{5t}, \\ \dot{y} = x + 2y. \end{cases}$

5. $\begin{cases} \dot{x} = \ln(1 + y + \sin x), \\ \dot{y} = 2 + \sqrt[3]{3\sin x - 8}. \end{cases}$

6. $y^{\mathrm{IV}} + 2y''' + 6y'' + 5y' + 6y = 0.$

7. $(x - z)\dfrac{\partial u}{\partial x} + (y - z)\dfrac{\partial u}{\partial y} + 2z\dfrac{\partial u}{\partial z} = 0.$

8. $x\dfrac{\partial z}{\partial x} - y\dfrac{\partial z}{\partial y} = z^2(x - 3y), \quad x = 1, \quad yz + 1 = 0.$

Вариант 3.

1. $\begin{cases} \dot{x} = 2x - y + z, \\ \dot{y} = x + 2y - z, \\ \dot{z} = x - y + 2z. \end{cases}$

2. $\begin{cases} \dot{x} = 2x + 2z - y, \\ \dot{y} = x + 2z, \\ \dot{z} = y - 2x - z. \end{cases}$

3. $\begin{cases} \dot{\mathrm{x}} = 3\mathrm{x} - 2\mathrm{y}, \\ \dot{\mathrm{y}} = 2\mathrm{x} - \mathrm{y} + 15\mathrm{e}^{\mathrm{t}}\sqrt{\mathrm{t}}. \end{cases}$

4. $\begin{cases} \dot{x} = 2x - 4y + 4e^{-2t}, \\ \dot{y} = 2x - 2y. \end{cases}$

5. $\begin{cases} \dot{x} = e^y - e^x, \\ \dot{y} = \sqrt{3x + y^2} - 2. \end{cases}$

6. $y^{\mathrm{IV}} + 8y''' + 14y'' + 36y' + 45y = 0.$

7. $e^x\dfrac{\partial z}{\partial x} + y^2\dfrac{\partial z}{\partial y} = ye^x.$

8. $z\dfrac{\partial z}{\partial x} - xy\dfrac{\partial z}{\partial y} = 2xz, \quad x + y = 2, \quad yz = 1.$

Вариант 4.

1. $\begin{cases} \dot{x} = 3x - y + z, \\ \dot{y} = x + y + z, \\ \dot{z} = 4x - y + 4z. \end{cases}$

2. $\begin{cases} \dot{x} = -x - 2y + 2z, \\ \dot{y} = -2x - y + 2z, \\ \dot{z} = -3x - 2y + 3z. \end{cases}$

3. $\begin{cases} \dot{x} = y + \mathbf{tg}^2 t - 1, \\ \dot{y} = -x + \mathbf{tg} t. \end{cases}$

4. $\begin{cases} \dot{x} = 4x + y - e^{2t}, \\ \dot{y} = y - 2x. \end{cases}$

5. $\begin{cases} \dot{x} = 3 - \sqrt{4 + x^2 + y}, \\ \dot{y} = \ln(x^2 - 3). \end{cases}$

6. $y^{\mathrm{IV}} + 13y''' + 16y'' + 55y' + 76y = 0.$

7. $(x^2 + y^2)\dfrac{\partial z}{\partial x} 2xy \dfrac{\partial z}{\partial y} + z^2 = 0.$

8. $x\dfrac{\partial z}{\partial x} + z\dfrac{\partial z}{\partial y} = y, \quad y = 2z, \quad x + 2y = z.$

Вариант 5.

1. $\begin{cases} \dot{x} = 4y - 2z - 3x, \\ \dot{y} = z + x, \\ \dot{z} = 6x - 6y + 5z. \end{cases}$

2. $\begin{cases} \dot{x} = 2x + 2z - y, \\ \dot{y} = x + 2z, \\ \dot{z} = y - 2x - z. \end{cases}$

3. $\begin{cases} \dot{x} = 2x + 2y + 3e^{2t}, \\ \dot{y} = x + 2y + e^{2t}. \end{cases}$

4. $\begin{cases} \dot{x} = 2y - x + 1, \\ \dot{y} = 3y - 2x. \end{cases}$

5. $\begin{cases} \dot{x} = \ln(x^2 - x), \\ \dot{y} = z - y - 1. \end{cases}$

6. $y^{\mathrm{IV}} + 3y''' + 26y'' + 74y' + 85y = 0.$

7. $xy\dfrac{\partial z}{\partial x} + (x + 2z)\dfrac{\partial z}{\partial y} = yz.$

8. $xy^3\dfrac{\partial z}{\partial x} + x^2z^2\dfrac{\partial z}{\partial y} = y^3 z, \quad x = -z^3, \quad y = z^2.$

Вариант 6.

1. $\begin{cases} \dot{x} = 4x - y - z, \\ \dot{y} = x + 2y - z, \\ \dot{z} = x - y + 2z. \end{cases}$

2. $\begin{cases} \dot{x} = -3x + 2y + 2z, \\ \dot{y} = -3x - y + z, \\ \dot{z} = -x + 2y. \end{cases}$

3. $\begin{cases} \dot{x} = 3x + y + \dfrac{1}{t} - 4\ln t, \\ \dot{y} = -x + y + \dfrac{1}{t}. \end{cases}$

4. $\begin{cases} \dot{x} = 5x - 3y + 2e^{3t}, \\ \dot{y} = x + y + 5e^{-t}. \end{cases}$

5.

6.

7.

8.

Вариант 7.

1.

2.

3.

4.

5.

6. $y^{\mathrm{V}} + 2y^{\mathrm{IV}} + 4y''' + 6y'' + 5y' + 4y = 0.$

7. $yz\dfrac{\partial z}{\partial x} - xz\dfrac{\partial z}{\partial y} = e^{z}.$

8. $x\dfrac{\partial z}{\partial x} + y\dfrac{\partial z}{\partial y} = z - x^2 - y^2, \quad y = -2, \quad z = x - x^2.$

Вариант 8.

1.

2.

3.

4.

5.

6.

7.

8.

Вариант 9.

1.

2.

3.

4.

5.

6.

7.

8.

Вариант 10.

1. 2.

3. 4.

5.

6.

7.

8.

Вариант 11.

1. 2.

3. 4.

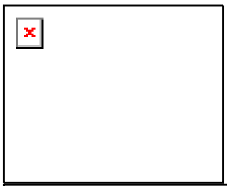
5.

6.

7.

8.

Вариант 12.

1. 

2. 

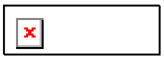
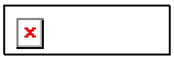
3. 

4. 

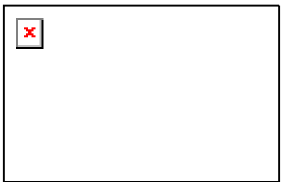
5. 

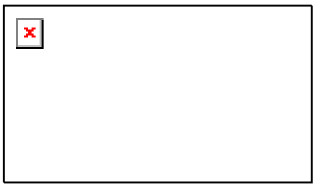
6. 

7. 

8.   

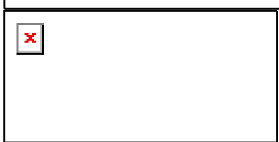
Вариант 13.

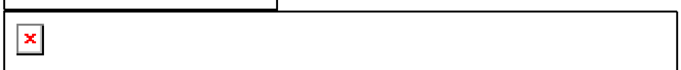
1. 

2. 

3. 

4. 

5. 

6. 

7. 

8.

Вариант 14.

1.

2.

3.

4.

5.

6.

7.

8.

Вариант 15.

1.

2.

3.

4.

5.

6.

7.

8.

Вариант 16.

1.

2.

3.

4.

5.

6.

7.

8.

Вариант 17.

1.

2.

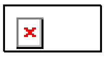
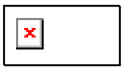
3.

4.

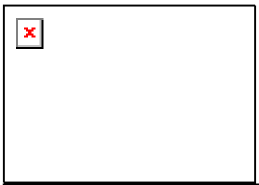
5.

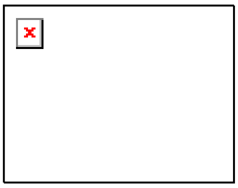
6. 

7. 

8.   

Вариант 18.

1. 

2. 

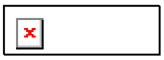
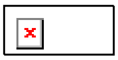
3. 

4. 

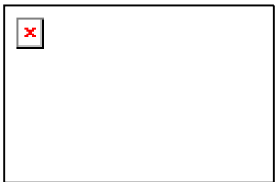
5. 

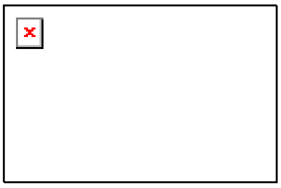
6. 

7. 

8.   

Вариант 19.

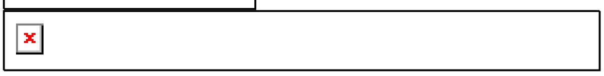
1. 

2. 

3. 

4. 

5. 

6. 

7.

8.

Вариант 20.

1.

2.

3.

4.

5.

6.

7.

8.

Вариант 21.

1.

2.

3.

4.

5.

6.

7.

8.

Вариант 22.

1.

2.

3.

4.

5.

6.

7.

8.

Вариант 23.

1.

2.

3. 4.

5.

6.

7.

8.

Вариант 24.

1. 2.

3. 4.

5.

6.

7.

8.

Библиографический список

1. *Боярчук А.К., Головач Г.П.* Справочное пособие по высшей математике. Т. 5. М., 1999.

2. *Бугров Я.С.*, *Никольский С.М.* Дифференциальные уравнения. Кратные интегралы, Ряды. ФКП. М.: Наука, 1985.

3. *Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Г.Я.* Высшая математика в упражнениях и задачах: ч. II. М.: Высшая шк., 1997.

4. *Краснов М.Л.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Высш. шк., 1983.

5. *Кудрявцев Л.Д.* Курс математического анализа. *М.:* Высшая. шк., 1988.

6. *Самойленко А.М., Кривошеев С.А.* Дифференциальные уравнения. Примеры и задачи. М.: Высш. шк., 1989.

7. Сборник задач по математике для втузов: Специальные разделы математического анализа / Под ред. *А.В. Ефимова*, *Б.П. Демидовича*. М.: Наука, 1981.

8. *Тихонов А.Н., Васильев А.Б., Свешников А.Г.* Дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1985.

9. Федорюк М.В. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1985.

10. *Филиппов А.Ф.* Задачи и примеры по дифференциальным уравнениям. М.: Изд. МГУ, 1998.

11. *Филиппов А.Ф.* Сборник задач по дифференциальным уравнениям. М.: Наука, 1992.

12. *Федорюк М.В.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Наука. 1985.

Татьяна Вениаминовна Труфанова,
зав. кафедрой МАиМ АмГУ, канд. техн. наук

Владимир Владимирович Сельвинский,
доцент кафедры МАиМ АмГУ, канд. физ.-мат. наук

Дифференциальные уравнения в примерах и задачах. Часть III. Системы дифференциальных уравнений и уравнения в частных производных 1-го порядка. *Учебно-методическое пособие.*

Изд-во АмГУ. Подписано к печати 01.08.02 Формат 60x84/16.

Усл. печ. л. 3,25, уч.-изд. л. 3,4. Тираж 50. Заказ .

Рецензия
на учебно-методическое пособие Т.В.Труфановой, В.В.Сельвинского
«Дифференциальные уравнения в примерах и задачах. Часть 3. Системы дифференциальных уравнений и уравнения в частных производных 1-ого порядка»

В данном учебно-методическом пособии представлен один из основных разделов курса дифференциальных уравнений, предусмотренных государственными образовательными стандартами специальностей 010100- математика и 010200- прикладная математика и информатика. Поэтому данная работа необходима как элемент учебно-методического обеспечения указанных специальностей.

Работа включает в себя три главы (общая теория систем дифференциальных уравнений, устойчивость дифференциальных систем, уравнения в частных производных 1-ого порядка), в каждой из которых приводится краткая теория и основные методы решения задач, разбираются конкретные примеры. Важным элементом работы является раздел, в котором представлены варианты индивидуальных заданий для студентов, изучающих курс дифференциальных уравнений.

Работа написана хорошим литературным и математическим языком, все вопросы излагаются четко и ясно, логически последовательно. В ней используется общепринятая терминология и система обозначений. Несомненно, она является необходимым руководством, как для студентов, так и для преподавателей, ведущих учебные занятия по этой дисциплине.

Учитывая недостаточную методическую обеспеченность курса дифференциальных уравнений учебниками и пособиями, работа рекомендуется к опубликованию.

Зав. кафедрой алгебры и геометрии БГПУ, канд. физ.-мат. наук П.П. Алутин

ВЫПИСКА
из протокола № 7 заседания кафедры математического анализа и моделирования от 27 марта 2002 года

Присутствовали 15 членов кафедры.

Слушали: сообщение зав. кафедрой Труфановой Т.В. о представлении к публикации работы «Дифференциальные уравнения в примерах и задачах. Часть 3. Системы дифференциальных уравнений и уравнения в частных производных 1-ого порядка», авторы: Труфанова Т.В., Сельвинский В.В., рецензент Алутин П.П. – зав. кафедрой алгебры и геометрии БГПУ.

Выступили: доцент Гетман А.Н. Отметил достаточно высокий уровень пособия, четкость изложения материала и его соответствие государственному образовательному стандарту, необходимость срочной публикации пособия в связи с недостатком учебной литературы по курсу дифференциальных уравнений.

Решение: Рекомендовать Ученому Совету факультета математики и информатики издать пособие тиражом 100 экз.

Зав. кафедрой МАиМ Т.В. Труфанова

Секретарь С.Ф. Докучаева