Федеральное агентство по образованию

АМУРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

ГОУВПО «АмГУ»

Факультет математики и информатики

УТВЕРЖДАЮ

Зав. кафедрой МАиМ

________Т.В. Труфанова

7 мая 2007г.

СПЕЦКУРС И СПЕЦСЕМИНАР
МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ УСТОЙЧИВОСТИ

Учебно – методический

комплекс дисциплины

для специальности

010101 – математика

Составитель: **доцент В.В.Сельвинский**

Благовещенск

2007

ББК

С

Печатается по решению редакционно-издательского совета факультета математики и информатики Амурского государственного университета

В.В.Сельвинский

Математическая теория устойчивости. Учебно – методический комплекс дисциплины для студентов АмГУ очной формы обучения специальности 010101 «Математика».– Благовещенск: Амурский гос. ун–т, 2007. − с.

Учебно – методический комплекс дисциплины " **Математическая теория устойчивости** " содержит рабочую программу дисциплины, план-конспект лекций, материалы для проведения практических занятий, контролирующие материалы для осуществления промежуточного и итогового контроля, справочный материал и библиографический список. Предназначен ведущим преподавателям и студентам, изучающим данную дисциплину.

1.РАБОЧАЯ ПРОГРАММА

Федеральное агентство по образованию РФ

Амурский государственный университет

УТВЕРЖДАЮ
Проректор по УНР
______________Е.С. Астапова
«__» _______________ 200__г.

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА

по дисциплине спецкурс и спецсеминар

"Математическая теория устойчивости"

для специальности 010101–"Математика"

Курс 4 Семестр 7, 8.

Лекции 47 (32+15) час. Экзамен 7 семестр.

Практические (семинарские) занятия 47 (32+15) час. Зачет 8 семестр.

Лабораторные занятия (нет).

Самостоятельная работа 76 час.

Всего 170 час.

Составитель В.В.Сельвинский, зам. зав. кафедрой, доцент.

Факультет математики и информатики.

Кафедра математического анализа и моделирования.

Рабочая программа составлена на основании Государственного образовательного стандарта высшего профессионального образования по специальности 010101–"Математика"

Рабочая программа обсуждена на заседании кафедры МАиМ

«__» _____________200___ г., протокол № ______________

Заведующий кафедрой _______________Т.В.Труфанова

Рабочая программа одобрена на заседании УМС 010101–"Математика"

«__» _____________200___ г., протокол № _____

Председатель _____________ Т.В.Труфанова

(подпись)

Рабочая программа переутверждена на заседании кафедры от _____________

протокол № ____________ .

Зав.кафедрой _____________ Т.В.Труфанова

подпись

СОГЛАСОВАНО
Начальник УМУ

____________Г.Н.Торопчина

(подпись)

«__» _____________200___ г.

СОГЛАСОВАНО
Председатель УМС факультета

____________ Е.Л.Еремин

(подпись)

«__» _____________200___ г.

СОГЛАСОВАНО
Заведующий выпускающей кафедрой

_______________Т.В.Труфанова

(подпись)

«__» _____________200___ г.

ЦЕЛИ И ЗАДАЧИ ДИСЦИПЛИНЫ

1. Цель преподавания дисциплины:

знакомство с методами исследования математических моделей различ-ных процессов и явлений естествознания, изучение основных методов реше-ния возникающих при этом математических задач, выяснение смысла полу-ченного решения.

Дисциплина "Математическая теория устойчивости" изучает матема-тические модели естественнонаучных явлений, которые приводят к задачам отыскания решений системы дифференциальных уравнений, устойчивых по отношению к начальным, а также к постоянно действующим возмущениям.

2. Задачи изучения дисциплины

Дисциплина "Математическая теория устойчивости" вырабатывает у студентов навыки построения математических моделей простейших физических явлений и решения (аналитического и численного) получающихся при этом математических задач.

Студент должен свободно ориентироваться в основных разделах дисциплины, что включает:

- устойчивость линейных дифференциальных систем;
- первый метод Ляпунова, нормальные фундаментальные системы, приводимые системы, правильные системы, метод малого параметра;
- второй метод Ляпунова; приведенная система; теоремы Ляпунова об устойчивости дифференциальных систем; устойчивость по первому приближению; устойчивость по Лагранжу, орбитальная устойчивость; условная устойчивость.

3. Перечень дисциплин, усвоение которых студентами необходимо при изучении данной дисциплины

Дисциплина "Математическая теория устойчивости" излагается на базе математического анализа, алгебры и аналитической геометрии, дифференциальных уравнений, в тесной связи с теорией функций комплексного переменного и с основами функционального анализа.

СОДЕРЖАНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ

1. Наименования тем, их содержание, объем в лекционных часах

4 курс, 7 семестр – 32 часа

1.1. Некоторые сведения из матричного исчисления (8 часов).

Степень матрицы. Клеточные матрицы. Норма матрицы. Жорданова форма матрицы. Функции матрицы. Матричные ряды. Тождество Кейли и формула Сильвестра. Производная и интеграл матрицы. Экспоненциал матрицы. Нормальная форма экспоненциала матрицы. Логарифм матрицы.

1.2. Устойчивость линейных дифференциальных систем (10 часов**).**
Основные понятия теории устойчивости. Общие свойства решений линейной дифференциальной системы. Формула Остроградского-Лиувилля. Матрицант. Метод вариации произвольных постоянных Лагранжа. Общие теоремы об устойчивости линейных дифференциальных систем. Устойчивость линейных однородных дифференциальных систем. Устойчивость линейной дифференциальной системы с постоянной матрицей. Критерий Гурвица. Критерий Михайлова. Леммы Гронуолла-Беллмана и Бихари. Устойчивость линейной дифференциальной системы с почти постоянной матрицей. Случай Лаппо-Данилевского.

1.3. Первый метод Ляпунова (14 часов)

Характеристические показатели функций. Характеристические показатели функциональных матриц. Спектр линейной однородной системы.

Нормальные фундаментальные системы. Достаточное условие асимптотиче-ской устойчивости линейной дифференциальной системы. Неравенство Важевского. Неравенство Ляпунова. Приводимые системы. Теорема Н.П.Еругина. Приводимость к системе с нулевой матрицей. Асимптотически эквивалентные системы. Правильные системы. Теорема Перрона. Правиль-ность треугольной линейной системы. Теорема Перрона о триангуляции линейной системы. Теория Флоке. Приводимость периодической линейной системы. Линейное дифференциальное уравнение второго порядка с перио-дическими коэффициентами. Гамильтонова система дифференциальных уравнений. Возвратные уравнения. Теорема Ляпунова-Пуанкаре. Неоднород-ная периодическая система. Метод малого параметра.

4 курс, 8 семестр – 15 часов

1.4. Второй метод Ляпунова (15 часов)**.**

Приведенная система. Знакоопределенные функции. Первая теорема Ляпунова (теорема об устойчивости). Вторая теорема Ляпунова (теорема об асимптотической устойчивости). Третья теорема Ляпунова (теорема об не-устойчивости). Теорема Четаева. Асимптотическая устойчивость в целом. Экспоненциальная устойчивость. Теорема Персидского. Устойчивость квазилинейных систем. Оценка матрицы Коши для правильной системы. Теорема Ляпунова об устойчивости по первому приближению. Признак устойчивости для нелинейных систем с неправильной линейной частью. Неограниченная продолжаемость решений. Устойчивость по Лагранжу. Си-стемы с конвергенцией. Диссипативные системы. Уравнения в вариациях. Орбитальная устойчивость. Аналог теоремы Андронова-Витта. Признак Пуанкаре. Условная устойчивость.

2. Практические занятия, их содержание и объем в часах

4 курс, 7 семестр – 32 часа

2.1.Степень матрицы. Жорданова форма матрицы. Функции матрицы. Матричные ряды. Тождество Кейли и формула Сильвестра. Производная и интеграл матрицы. Экспоненциал матрицы. Нормальная форма экспоненци-ала матрицы. Логарифм матрицы (8 часов).

2.2.Формула Остроградского-Лиувилля. Метод вариации произвольных постоянных Лагранжа. Критерий Гурвица. Критерий Михайлова. Лемма Гронуолла-Беллмана. Устойчивость линейных дифференциальных систем. Случай Лаппо-Данилевского. (10 часов)

2.3.Контрольная работа. (2 часа)

2.4.Характеристические показатели. Достаточное условие асимптотической устойчивости линейной дифференциальной системы. Неравенство Важевского. Неравенство Ляпунова. Приводимые системы. Теорема Н.П.Еругина. Правильные системы. Приводимость периодической линейной системы. Возвратные уравнения. Неоднородная периодическая система. Метод малого параметра (12 часов).

4 курс, 8 семестр – 15 часов

2.5.Приведенная система. Теоремы Ляпунова об устойчивости. Экспоненциальная устойчивость. Теорема Персидского. Теорема Ляпунова об устойчивости по первому приближению. Уравнения в вариациях. Орбитальная устойчивость. Условная устойчивость. (15 часов)

Самостоятельная работа студентов (76 часов)

1. Знакомство с периодической литературой по теории устойчивости.
2. Подготовка докладов по отдельным учебным вопросам.
3. Выполнение индивидуальных заданий (2 задания в 7 семестре).

Перечень и темы промежуточных форм контроля знаний студентов

1. Контрольная работа "Устойчивость линейных дифференциальных систем" - 2 часа (7-ой семестр).

2. Контрольная работа "Устойчивость по первому приближению" - 2 часа (8-ой семестр).

3. Индивидуальное домашнее задание " Функции матрицы"

4. Индивидуальное домашнее задание " Общие свойства решений линейной дифференциальной системы".

Вопросы к экзамену за 7-ой семестр

1. Жорданова форма матрицы.Функции матрицы. Матричные ряды.
2. Тождество Кейли.
3. Формула Сильвестра.
4. Производная и интеграл матрицы.
5. Экспоненциал матрицы. Нормальная форма экспоненциала матрицы.
6. Логарифм матрицы.
7. Основные понятия теории устойчивости.
8 Общие свойства решений линейной дифференциальной системы.
9. Формула Остроградского-Лиувилля.
10. Матрицант.
11. Метод вариации произвольных постоянных Лагранжа.
12. Общие теоремы об устойчивости линейных дифференциальных систем.
13. Устойчивость линейных однородных дифференциальных систем.
14. Устойчивость линейной дифференциальной системы с постоянной матрицей.
15. Критерий Гурвица.

16. Критерий Михайлова.

17. Леммы Гронуолла-Беллмана и Бихари.

18. Устойчивость линейной дифференциальной системы с почти постоянной матрицей.

19. Случай Лаппо-Данилевского.

Вопросы к зачету за 8-ой семестр

1. Характеристические показатели функций и функциональных матриц.

2. Спектр линейной однородной системы.

3. Нормальные фундаментальные системы.

4. Достаточное условие асимптотической устойчивости линейной дифференциальной системы.

5. Неравенство Важевского.

6. Неравенство Ляпунова.

7. Приводимые системы. Теорема Н.П.Еругина.

8. Приводимость к системе с нулевой матрицей.

9. Асимптотически эквивалентные системы.

10. Правильные системы.

11. Теорема Перрона.

12. Правильность треугольной линейной системы.

13. Теория Флоке.

14. Приводимость периодической линейной системы.

15. Линейное дифференциальное уравнение второго порядка с периодическими коэффициентами.

16. Гамильтонова система дифференциальных уравнений.

17. Возвратные уравнения. Теорема Ляпунова-Пуанкаре.

18. Неоднородная периодическая система. Метод малого параметра.

19. Приведенная система. Знакоопределенные функции.

20. Первая теорема Ляпунова (теорема об устойчивости).

21. Вторая теорема Ляпунова (теорема об асимптотической устойчивости).

22. Третья теорема Ляпунова (теорема о неустойчивости).

23. Теорема Четаева.

24. Асимптотическая устойчивость в целом.

25. Экспоненциальная устойчивость.

26. Теорема Персидского.

27. Устойчивость квазилинейных систем.

28. Оценка матрицы Коши для правильной системы.

29. Теорема Ляпунова об устойчивости по первому приближению.

30. Устойчивость по Лагранжу.

31. Системы с конвергенцией.

32. Диссипативные системы.

33. Уравнения в вариациях.

34. Орбитальная устойчивость.

35. Аналог теоремы Андронова-Витта.

36. Условная устойчивость.

Критерии допуска и сдачи зачета

Для сдачи зачета необходимо выполнить индивидуальные задания

(2 задания), уметь объяснить выполнение составляющих их упражнений, а также ответить на один из теоретических вопросов из общего списка вопро-сов к зачету.

Критерии сдачи экзамена

Для сдачи экзамена необходимо уметь выполнять типовые упражне-ния, а также достаточно хорошо ориентироваться в теоретическом материале программы спецкурса.

РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

Основная:

1. Демидович Б.П. Лекции по математической теории устойчивости. Изд.2, -М.: МГУ, 1998.-472 с.

2. Меркин Д.Р. Введение в теорию устойчивости движения. -М.: Наука, 1987.-304 с.

Дополнительная:

1. Вазов, Вольфганг. Асимптотические разложения решений обыкновен-ных дифференциальных уравнений. Пер. с англ. -М.: Мир, 1968.-464 с.

2. Кореневский Д.Г. Устойчивость динамических систем при случайных возмущениях параметров: Алгебраические критерии. АН УССР. Ин-т мате-матики. Киев: Наука, думка, 1989.-207 с.

3. Моисеев Н.Н. Асимптотические методы нелинейной механики. -М.: Наука, 1969.- 380 с.

4. Эльсгольц .Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. Для студ. физ. спец. университетов. -М.: Наука, 1969.- 424 с.

2. ГРАФИК САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ СТУДЕНТОВ

5 семестр

1.Реферат по теме "Роль и место теории устойчивости в современной математике» (2 нед.) 4 час

2. Индивидуальное задание (РГР) по теме " Функции матрицы " (9 нед.) 6 час

3. Индивидуальное задание (РГР) по теме "Общие

свойства решений линейной дифференциальной системы» 6 час.

3. Домашние задания по каждой теме практических занятий (еженед.) 20 ч.

4. Подготовка к экзамену 16 ч.

Итого: 52 ч.

6 семестр

1. Индивидуальные домашние задания по каждой теме практических занятий (еженед.) 20 ч.

3. Подготовка к зачету 10 ч.

Итого: 30 ч.

3. МАТЕРИАЛЫ ДЛЯ ЧТЕНИЯ ЛЕКЦИЙ

1 семестр

ВВЕДЕНИЕ

Элементы теории устойчивости

1. Основные понятия. Пусть задана нормальная система дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} &\dot{x}_1(t) = f_1(t, x_1, x_2, ..., x_n), \\ &\dot{x}_2(t) = f_2(t, x_1, x_2, ..., x_n), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\dot{x}_n(t) = f_n(t, x_1, x_2, ..., x_n) \end{aligned} \qquad (1)$$

с начальными условиями в точке t_0. Решение $X_0(t) = (\varphi_1(t),...,\varphi_n(t))^T$ системы (1) называется *устойчивым по Ляпунову*, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta(\varepsilon) > 0$, что для всякого решения $X(t) = (x_1(t),...,x_n(t))^T$ той же системы, значения которого в точке t_0 удовлетворяют неравенствам

$$\left|x_i(t_0) - \varphi_i(t_0)\right| < \delta(\varepsilon), \qquad i = 1,2,\ldots,n,$$

(2)

для всех $t > t_0$ справедливы неравенства

$$\left|x_i(t) - \varphi_i(t)\right| < \varepsilon, \qquad i = 1,2,\ldots,n. \qquad (3)$$

Если же при сколь угодно малом $\delta > 0$ хотя бы для одного решения $X(t)$ неравенства (3) не выполняются, то решение $X_0(t)$ называется *неустойчивым.*

Если решение $X_0(t)$ не только устойчиво, но, кроме того, при условии (2) удовлетворяет соотношению

$$\lim_{t\to+\infty} \left|x_i(t) - \varphi_i(t)\right| = 0, \qquad i = 1,2,\ldots,n,$$

то это решение называется *асимптотически устойчивым* .

Пример 1. Исследовать на устойчивость решение дифференциального уравнения

$\dot{x} = ax(a \in R)$, определяемое начальным условием $x_0(t_0) = C_0$.

◀ Если $a \neq 0$, то решение имеет вид

$$x_0(t) = C_0 e^{a(t-t_0)}.$$

Пусть $x_0(t) = C_0 e^{a(t-t_0)}$ - произвольное решение этого уравнения , удовлетворяющее условию $\left|C - C_0\right| < \delta = \varepsilon$. Тогда при $a < 0$ получаем

$$\left|x(t) - x_0\right| = \left|Ce^{a(t-t_0)} - C_0e^{a(t-t_0)}\right| = e^{a(t-t_0)}\left|C - C_0\right| < \varepsilon,$$

откуда

$$\lim_{t\to+\infty}\left|x(t) - x_0(t)\right| = \left|C - C_0\right| \lim_{t\to+\infty} e^{a(t-t_0)} = 0,$$

т.е. решение асимптотически устойчиво.

При $a > 0$

$$|x(t) - x_0| = e^{a(t-t_0)}|C - C_0|$$

может быть сколь угодно большим числом при достаточно больших t.

Значит, при $a > 0$ решение неустойчиво.

Если $a = 0$, то решение имеет вид $x_0(t) = C_0$

Для всякого решения $x(t) = C$ с условием $|C - C_0| < \delta = \varepsilon$ имеем

$$|x(t) - x_0(t)| = |C - C_0| < \varepsilon$$

Но

$$\lim_{t \to +\infty} |x(t) - x_0(t)| = |C - C_0| \neq 0,$$

а потому решение устойчиво, но не асимптотически устойчиво. ►

Исследование на устойчивость решения $x(t)$ системы (1) может быть сведено к исследованию на устойчивость тривиального (нулевого) решения – *точки покоя* некоторой системы, аналогичной системы (1) (см. задачу 9.454).

Исследовать на устойчивость решения следующих уравнений и систем уравнений:

9.449. $\dot{x} = t(x - 1), x(0) = 1.$

9.450. $\dot{x} = t - 1, x(0) = -1.$

9.451. $\dot{x} = x + y,\ \dot{y} = x - y;\ x(0) = y(0) = 0.$

9.452. $\dot{x} = -2x - 3y,\ \dot{y} = x + y;\ x(0) = y(0) = 0.$

9.453. $\dot{x} = \alpha x - y,\ \dot{y} = \alpha y - z,\ \dot{z} = \alpha z - x;\ x(0) = y(0) = z(0) = 0,\ \alpha \in R.$

9.454. Написать систему дифференциальных уравнений, исследование на устойчивость точки покоя которой равносильно исследованию на устойчивость решения $X_0(t)$ системы (1).

9.455. Сформулировать определения устойчивости, асимптотической устойчивости и неустойчивости для точки покоя системы дифференциальных уравнений.

2. Простейшие типы точек покоя. Для исследования на устойчивость точки покоя системы двух линейных однородных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

$$\begin{aligned} \dot{x} &= a_{11}x + a_{12}y, \\ \dot{y} &= a_{21}x + a_{22}y, \end{aligned} \qquad \Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0, \tag{4}$$

надо составить характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - (a_{11}+a_{22})\lambda + \Delta = 0.$$

и найти его корни λ_1 и λ_2. В таблице 4.1 приведена классификация точек покоя системы (4) в зависимости от корней λ_1, λ_2 характеристического уравнения.

Пример 2. Определить характер и исследовать на устойчивость точку покоя системы

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -2x + \alpha y, \\ \dot{y} &= x + y \end{aligned}$$

в зависимости от параметра α $(\alpha \neq -2)$.

◀ Характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} -2-\lambda & \alpha \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + \lambda - (\alpha + 2) = 0$$

имеет корни $\lambda_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{9+4a}$. Исследуя поведение корней λ_1, λ_2 в зависимости от параметра α и используя данные таблицы 4.1 получаем:

если $\alpha < -9/4$ (корни комплексные , $\mathrm{Re}\lambda_{1,2} < 0$) - устойчивый фокус;

если $-9/4 \leq \alpha < -2$ (корни действительные и отрицательные) – устойчивый узел;

если $-2 < \alpha$ (корни действительные и разных знаков) – седло, точка покоя неустойчива.►

Определить характер точек покоя следующих систем:

9.456. $\dot{x} = x + 2y,\ \dot{y} = -3x + y.$

9.457. $\dot{x} = -2x + \frac{1}{3}y,\ \dot{y} = -2x + \frac{1}{2}y.$

9.458. $\dot{x} = -x + 3y,\ \dot{y} = -x + 2y.$

9.459. $\dot{x} = -y,\ \dot{y} = x - 2y.$

9.460. $\dot{x} = -6x - 5y,\ \dot{y} = -2x - 5y.$

9.461. $\dot{x} = -x + 2y,\ \dot{y} = -2x - 5y.$

Определить, при каких значениях параметра α точка покоя системы устойчива.

9.462. $\dot{x} = \alpha x - y,\ \dot{y} = x + 2y.$

9.463. $\dot{x} = -3x + \alpha y,\ \dot{y} = -\alpha x + y.$

9.464*. Исследовать на устойчивость уравнение упругих колебаний

$$\ddot{x} + 2\alpha\dot{x} + \beta^2 x = 0 \qquad (\alpha > 0).$$

9.465*. Пусть задана система n линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

$$\dot{x}_i = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}x_j,\ \ i = 1, 2, ..., \mathrm{n}.$$

Доказать, что если все корни характеристического уравнения этой системы имеют отрицательную действительную часть, то точка покоя системы асимптотически устойчива. Если же хотя бы один из корней характеристического уравнения имеет положительную действительную часть, то точка покоя неустойчива.

Используя результат задачи 9.465, исследовать на устойчивость точку покоя каждой из следующих систем:

9.466. $\dot{x} = 2x, \quad \dot{y} = 3x + 2y, \quad \dot{z} = -x - y - z.$

9.467. $\dot{x} = -2x - y, \quad \dot{y} = x - 2y, \quad \dot{z} = x + 3y - z.$

3. Метод функций Ляпунова. Этот метод в применении к автономной системе

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= f_1(x_1, ..., x_n), \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dot{x}_n &= f_n(x_1, ..., x_n), \end{aligned} \tag{5}$$

где $f_i(0, ..., 0) = 0,\ i = 1, 2, ..., n,$ состоит в непосредственном исследовании устойчивости ее точки покоя при помощи подходящим образом подобранной *функции Ляпунова* $V(x_1, ..., x_n)$.

Верны следующие теоремы Ляпунова:

Т е о р е м а 1 (об устойчивости). *Если существует дифференцируемая функция* $V(x_1, ..., x_n)$, *удовлетворяющая в окрестности начала координат следующим условиям:*

а) $V(x_1, ..., x_n) \geq 0,$ *причем* $V = 0$ *лишь при* $x_1 = ... = x_n = 0;$

б) $\dfrac{dV}{dt} = \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{\partial V}{\partial x_i} f_i(x_1, ..., x_n) \leq 0,$

то точка покоя системы (5) устойчива

Т е о р е м а 2 (об асимптотической устойчивости). *Если существует дифференцируемая функция* $V(x_1, ..., x_n)$, *удовлетворяющая в окрестности начала координат следующим условиям:*

а) $V(x_1, ..., x_n) \geq 0,$ *причем* $V = 0$ *лишь при* $x_1 = ... = x_n = 0$

б) $\dfrac{dV}{dt} = \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{\partial V}{\partial x_i} f_i(x_1, ..., x_n) \leq 0,$ *причем* $\dfrac{dV}{dt} = 0$ *лишь при* $x_1 = ... = x_n = 0,$

то точка покоя системы (5) асимптотически устойчива.

Т е о р е м а 3 (о неустойчивости). *Если существует дифференцируемая функция* $V(x_1, ..., x_n)$, *удовлетворяющая в окрестности начала координат следующим условиям:*

а) $V(0, ..., 0) = 0$ *и сколь угодно близко от начала координат имеются точки, в которых* $V(x_1, ..., x_n) > 0$;

б) $\frac{dV}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_i} f_i(x_1, ..., x_n) \le 0$, *причем* $\frac{dV}{dt} = 0$ *лишь при* $x_1 = ... = x_n = 0$,

то точка покоя системы (5) неустойчива.

П р и м е р 3. С помощью функции Ляпунова исследовать на устойчивость точку покоя системы

$$\dot{x} = -x + y,$$
$$\dot{y} = -2y^3 - x.$$

◄ В качестве функции Ляпунова возьмем $V = x^2 + y^2$. Тогда $\frac{dV}{dt} = 2x(-x + y) + 2y(-2y^3 - x) = -2(x^2 + 2y^4)$, и функция V вместе с $\frac{dV}{dt}$ удовлетворяет условиям теоремы 2. Значит, точка покоя системы асимптотически устойчива. ►

П р и м е р 4. Исследовать на устойчивость точку покоя системы

$$\dot{x} = x(2 + \cos x),$$
$$\dot{y} = -y.$$

◄ Возьмем функцию $V(x, y) = x^2 - y^2$. тогда $\frac{dV}{dt} = 2x^2(2 + \cos x) + 2y^2 = 2(2x^2 + y^2 + x^2 \cos x) = 2\left(x^2 + 2x^2 \cos^2 \frac{x}{2} + y^2\right) > 0$ всюду, кроме начала координат. Кроме того, сколь угодно близко к началу координат найдутся точки, в которых $V > 0$ (например, вдоль прямой $y = 0$ $V = x^2 > 0$). Следовательно, выполнены условия теоремы 3, и точка покоя неустойчива. ►

Общего метода построения функций Ляпунова не существует. В простейших случаях ее следует искать в виде: $V = ax^2 + by^2$, $V = ax^4 + by^4$, $V = ax^2 + by^4$, подбирая надлежащим образом постоянные $a > 0$ и $b > 0$.

П р и м е р 5. Исследовать на устойчивость точку покоя системы

$$\dot{x} = -x + \frac{3}{2}y + 3xy^3,$$
$$\dot{y} = -x - \frac{1}{3}y - 2x^2y^2.$$

◀ Функцию Ляпунова будем искать в виде $V = ax^2 + by^2$, $a > 0$, $b > 0$. Тогда имеем:

$$\frac{dV}{dt} = 2ax\left(-x + \frac{3}{2}y + 3xy^3\right) + 2by\left(-x - \frac{y}{3} - 2x^2y^2\right) = -\left(2ax^2 + \frac{2}{3}by^2\right) + \left(xy + 2x^2y^3\right)(3a - 2b).$$

Полагая $b = \frac{3}{2}a$, получим, что $\frac{dV}{dt} = -a\left(2x^2 + y^2\right) \le 0$ при всяком $a > 0$. Из теоремы 2 вытекает, что точка покоя системы асимптотически устойчива. ▶

Исследовать на устойчивость точки покоя следующих систем:

9.468. $\dot{x} = -x - y - x^3 - y^2$, $\dot{y} = x - y + xy$.

9.469. $\dot{x}\,y + x^3$, $\dot{y} = -x + y^3$.

9.470. $\dot{x} = xy^4$, $\dot{y} = -x^4y$.

9.471. $\dot{x} = -y + x^5$, $\dot{y} = x + y^5$.

9.472. $\dot{x} = y + x^2y^2 - \frac{1}{4}x^5$, $\dot{y} = -2x - 2x^3y - \frac{1}{2}y^3$.

9.473. $\dot{x} = -2x + 4xy^2$, $\dot{y} = y + 2x^2y$.

4. Устойчивость по первому приближению. Предположим, что правые части системы (5), т.е. функции $f_1(x_1,\ldots,x_n)$, $i = 1, 2, \ldots, \mathrm{n}$, дифференцируемы в начале координат достаточное число раз. Разложим их по формуле Тейлора в окрестности начала координат:

$f_1(x_1,....,x_n) = \sum\limits_{i=1}^{n} a_{ij}x_j + F_i(x_1,....,x_n)$, где $a_{ij} = \dfrac{\partial f(0,...,0)_i}{\partial x_j}$, а F_i - члены второго порядка малости относительно $x_1,....,x_n$. Тогда исходная система (5) может быть записана в виде

$$\dot{x}_1 = \sum_{j=1}^{n} a_{1j}x_j + F_1(x_1,....,x_n),$$

....

$$\dot{x}_n = \sum_{j=1}^{n} a_{nj}x_j + F_n(x_1,....,x_n).$$

Рассмотрим систему

$$\dot{x}_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j, \quad i = 1, 2, ..., \mathrm{n}, \tag{6}$$

называемую системой уравнений *первого приближения* для системы (5).

Справедливо следующее утверждение: если все корни характеристического уравнения системы (6) имеют отрицательные действительные части, то точка покоя системы (6), а также исходной системы (5) асимптотически устойчива; если хотя бы один из корней характеристического уравнения системы (6) имеет положительную действительную часть, то точка покоя системы (6) (и системы 5)) неустойчива.

Говорят, что в этих случаях возможно исследование системы (5) на *устойчивость по первому приближению.* В остальных случаях такое исследование, вообще говоря, невозможно, так как начинает сказываться влияние членов 2-го порядка малости.

П р и м е р 6. Исследовать на устойчивость точку покоя системы

$$\dot{x} = 2x + 8\sin y,$$

$$\dot{y} = 2 - e^x - 3y - \cos y.$$

◄ Разлагая функции $\sin y$, $\cos y$, e^x по формуле Тейлора и выделяя члены 1-го порядка малости, можем переписать исходную систему в виде

$$\dot{x} = 2x + 8y + F_1(x, y),$$
$$\dot{y} = -x - 3y + F_2(x, y),$$

где F_1 и F_2 - члены 2-го порядка малости относительно x и y. Соответствующая система уравнений первого приближенного вида (6) запишется следующим образом:

$$\dot{x} = 2x + 8y,$$
$$\dot{y} = -x - 3y.$$

Корни ее характеристического уравнения $\lambda_{1,2} = \frac{-1 \pm i\sqrt{7}}{2}$ имеют отрицательные действительные части. Следовательно, точка покоя этой, а также исходной систем устойчива. ►

Исследовать на устойчивость по первому приближению точки покоя следующих систем дифференциальных уравнений:

9.474. $\dot{x} = \frac{1}{4}\left(e^x - 1\right) - 9y$, $\dot{y} = \frac{1}{5}x - \sin y$.

9.475. $\dot{x} = 5x + y\cos y$, $\dot{y} = 3x + 2y - y^3 e^y$.

9.476. $\dot{x} = 7x + 2\sin y$, $\dot{y} = e^x - 3y - 1$.

9.477. $\dot{x} = -\frac{3}{2}x + \frac{1}{2}\sin 2y$, $\dot{y} = -y - 2x$.

9.478. $\dot{x} = \ln\left(4y + e^{-3x}\right)$, $\dot{y} = 2y - 1 + \sqrt[3]{1 - 6x}$.

9.479. $\dot{x} = e^{x+2y} - \cos 3x$, $\dot{y} = \sqrt{4 + 8x} - 2e^y$.

9.480. Показать, что исследование на устойчивость по первому приближению точки покоя системы

$$\dot{x} = -4y - x^3, \quad \dot{y} = 3x - y^3$$

невозможно. Провести исследование методом функций Ляпунова.

4. МАТЕРИАЛЫ ДЛЯ ПРОВЕДЕНИЯ ТЕКУЩЕГО И ИТОГОВОГО КОНТРОЛЯ

Вопросы к экзамену
по СК «Математическая теория устойчивости»
7-ой семестр

1. Жорданова форма матрицы. Функции матрицы. Матричные ряды.
2. Тождество Кейли.
3. Формула Сильвестра.
4. Производная и интеграл матрицы.
5. Экспоненциал матрицы. Нормальная форма экспоненциала матрицы.
6. Логарифм матрицы.
7. Основные понятия теории устойчивости.
8. Общие свойства решений линейной дифференциальной системы.
9. Формула Остроградского-Лиувилля.
10. Матрицант.
11. Метод вариации произвольных постоянных Лагранжа.
12. Общие теоремы об устойчивости линейных дифференциальных систем.
13. Устойчивость линейных однородных дифференциальных систем.
14. Устойчивость линейной дифференциальной системы с постоянной матрицей.
15. Критерий Гурвица.
16. Критерий Михайлова.
17. Леммы Гронуолла-Беллмана и Бихари.

18. Устойчивость линейной дифференциальной системы с почти постоянной матрицей.
19. Случай Лаппо-Данилевского.
20. Характеристические показатели функций и функциональных матриц.
21. Спектр линейной однородной системы.
22. Нормальные фундаментальные системы.
23. Достаточное условие асимптотической устойчивости линейной дифференциальной системы.
24. Неравенство Важевского.
25. Неравенство Ляпунова.
26. Приводимые системы. Преобразование Ляпунова. Теорема Еругина.
27. Приводимость к системе с нулевой матрицей.
28. Правильные системы.

Экзаменационные билеты

по спецкурсу «Математическая теория устойчивости»

7-ой семестр

Билет 1

1. Экспоненциал матрицы. Нормальная форма экспоненциала. Свойства экспоненциала матрицы.
2. Устойчивость линейных однородных дифференциальных систем.
3. Доказать, что полином $f(z)=z^2+pz+q$ (p,q – действительные) есть полином Гурвица тогда и только тогда, когда $p>0,\ q>0$. Вывести условие Гурвица для полинома $f(z)$, если его коэффициенты p и q – комплексные числа.

4. Доказать, что для линейной системы $\frac{dx}{dt} = Jx$ с постоянной матрицей Жордана J ее фундаментальная система $X(t)=exp((t-t_0)J)$ является нормальной.

Билет 2

1. Производная и интеграл матрицы.
2. Характеристические показатели функциональных матриц. Спектр линейной однородной системы.
3. Доказать, что для всех квадратных матриц X определены аналитические функции: $SinX = X - \frac{1}{3!}X^3 + \frac{1}{5!}X^5 - \ldots;\ CosX = E - \frac{1}{2!}X^2 + \frac{1}{4!}X^4 - \ldots$. Найти Sin J($\alpha$), где J($\alpha$) – клетка Жордана.
4. Показать, что линейная система $\frac{dx}{dt} = A(t)x \quad (t \geq 1)$ с матрицей $A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2/t^2 & 0 \end{pmatrix}$ неприводима.

Вопросы к зачету за 8-ой семестр

1. Характеристические показатели функций и функциональных матриц.
2. Спектр линейной однородной системы.
3. Нормальные фундаментальные системы.
4. Достаточное условие асимптотической устойчивости линейной дифференциальной системы.
5. Неравенство Важевского.
6. Неравенство Ляпунова.
7. Приводимые системы. Теорема Н.П.Еругина.
8. Приводимость к системе с нулевой матрицей.

9. Асимптотически эквивалентные системы.

10. Правильные системы.

11. Теорема Перрона.

12. Правильность треугольной линейной системы.

13. Теория Флоке.

14. Приводимость периодической линейной системы.

15. Линейное дифференциальное уравнение второго порядка с периодическими коэффициентами.

16. Гамильтонова система дифференциальных уравнений.

17. Возвратные уравнения. Теорема Ляпунова-Пуанкаре.

18. Неоднородная периодическая система. Метод малого параметра.

19. Приведенная система. Знакоопределенные функции.

20. Первая теорема Ляпунова (теорема об устойчивости).

21. Вторая теорема Ляпунова (теорема об асимптотической устойчивости).

22. Третья теорема Ляпунова (теорема о неустойчивости).

23. Теорема Четаева.

24. Асимптотическая устойчивость в целом.

25. Экспоненциальная устойчивость.

26. Теорема Персидского.

27. Устойчивость квазилинейных систем.

28. Оценка матрицы Коши для правильной системы.

29. Теорема Ляпунова об устойчивости по первому приближению.

30. Устойчивость по Лагранжу.

31. Системы с конвергенцией.

32. Диссипативные системы.

33. Уравнения в вариациях.

34. Орбитальная устойчивость.

35. Аналог теоремы Андронова-Витта.

36. Условная устойчивость.

Задачи для самостоятельного решения

1. $\boldsymbol{\Gamma} = \begin{bmatrix} 0 & \gamma_{12} & \dots & \gamma_{1n} \\ 0 & 0 & \dots & \gamma_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \gamma_{n,n-1} \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$. Показать, что верхняя треугольная матрица Γ с нулевой диагональю нильпотентна, то есть $\Gamma^n = 0$, где n - порядок матрицы.

2.Пусть T - верхняя треугольная матрица вида $T=\alpha E+\Gamma$ $(\alpha\neq 0)$, где Γ– сумма косых рядов от 1-ого до $(n-1)$ – ого. Показать, что

$$T^{-1}=\alpha^{-1}E-\alpha^{-2}\Gamma+\alpha^{-3}\Gamma^{2}+\ldots+(-1)^{n-1}\alpha^{-n}\Gamma^{n-1}.$$

3.Доказать, что для всех квадратных матриц X определены аналитические функции:

$$SinX = X - \frac{1}{3!}X^3 + \frac{1}{5!}X^5 - \ldots ; \quad CosX = E - \frac{1}{2!}X^2 + \frac{1}{4!}X^4 - \ldots .$$

Найти $SinJ(\alpha)$, где $J(\alpha)$ – клетка Жордана.

4.Пусть Γ - сумма косых рядов от 1-ого до $(n-1)$ – ого. Показать, что

$$e^{\Gamma} = E + \boldsymbol{\Gamma} + \frac{1}{2!}\boldsymbol{\Gamma}^2 + \ldots + \frac{1}{(n-1)!}\boldsymbol{\Gamma}^{n-1};$$

$$Ln(E + \boldsymbol{\Gamma}) = \boldsymbol{\Gamma} - \frac{1}{2}\boldsymbol{\Gamma}^2 + \ldots + \frac{(-1)^n}{(n-1)}\boldsymbol{\Gamma}^{n-1}.$$

5.Пользуясь формулой Сильвестра, найти e^X, если $X = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$.

6.Для матриц второго порядка X найти представление аналитической функции $F(X)$ в виде полинома в следующих случаях: 1) неравных характеристических корней $\lambda_1\neq\lambda_2$ и 2) равных $\lambda_1=\lambda_2$.

7.Найти LnA, если $A = \begin{pmatrix} Cos\alpha & -Sin\alpha \\ Sin\alpha & Cos\alpha \end{pmatrix}$.

8.Методом вариации произвольных постоянных Лагранжа найти частное решение уравнения

$$\ddot{y} + 2p\dot{y} + (p^2 + q^2)y = f(t)$$

(p, q–постоянные, $f(t) \in C[0, \infty)$), удовлетворяющее условиям:

$$y(0) = 0, \dot{y}(0) = 0.$$

9.Доказать, что полином $f(z)=z^2+pz+q$ (p,q- действительны) есть полином Гурвица тогда и только тогда, когда $p>0$, $q>0$. Вывести условия Гурвица для полинома $f(z)$, если его коэффициенты p и q – комплексные числа.

10.Пусть $f(z)$ – стандартный полином и $f(-\delta)>0$ $(\delta>0)$, причем для полинома $g(z)=f(z-\delta)$ выполнены условия Гурвица. Доказать, что корни z_j полинома $f(z)$ удовлетворяют усиленному условию: $Re\, z_j<-\delta$.

11.Написать условия Гурвица для возвратного уравнения

$$z^4+pz^3+qz^2+pz+1=0$$

(p,q - действительны).

12.Найти область асимптотической устойчивости для скалярной системы:

$$\frac{dx}{dt} = -x + \alpha \cdot y + \beta \cdot z,$$

$$\frac{dy}{dt} = -\alpha \cdot x - y + \alpha \cdot z,$$

$$\frac{dz}{dt} = -\beta \cdot x - \alpha \cdot y - z,$$

(α, β - действительные).

13.Определить область устойчивости системы

$$\frac{dx}{dt} = a \cdot x + b \cdot y,$$

$$\frac{dy}{dt} = c \cdot x + d \cdot y,$$

(a,b,c,d - действительные).

14.Построить годограф Михайлова для полинома $f(z)=z^3+ z^2+z+2$ и определить расположение его корней на комплексной плоскости.

15.Методом Михайлова вывести условие Гурвица для полинома $f(z)=z^2+pz+q$ (p,q- действительны).

16.Пусть $\frac{d\boldsymbol{x}}{dt} = A(t)\boldsymbol{x}$, $A(t)\in C[t_0,\infty)$. Доказать, что

$$\|\boldsymbol{x}(t_0)\| \cdot exp(-\int_{t_0}^{t}\|A(t_1)\|dt_1) \le \|\boldsymbol{x}(t)\| \le \|\boldsymbol{x}(t_0)\| \cdot exp(\int_{t_0}^{t}\|A(t_1)\|dt_1)$$ при $t \ge t_0$.

17.Доказать, что

$$\overline{\lim_{t\to\infty}}\varphi(t) - \overline{\lim_{t\to\infty}}\psi(t) \le \overline{\lim_{t\to\infty}}(\varphi(t) - \psi(t)) \le \overline{\lim_{t\to\infty}}\varphi(t) - \underline{\lim_{t\to\infty}}\psi(t),$$

предполагая, что $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ определены и ограничены в интервале (t_0,∞).

18.Пользуясь неравенством Важевского, иследовать на устойчивость скалярную систему:

$$\frac{dx}{dt} = -x \cdot Sin^2 t + (a + \frac{2b}{t}) \cdot y,$$

$$\frac{dy}{dt} = -a \cdot x - yCos^2 t,$$

a,b – действительные.

5. КАРТА КАДРОВОЙ ОБЕСПЕЧЕННОСТИ ДИСЦИПЛИНЫ

Лекторы: доцент, к.ф.-м.н. Сельвинский В.В

Практические занятия: доцент, к.ф.-м.н. Сельвинский В.В.,

ОГЛАВЛЕНИЕ