

**Федеральное агентство по образованию
АМУРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ГОУВПО «АмГУ»
Факультет математики и информатики**

УТВЕРЖДАЮ

Зав. кафедрой МАиМ

_____ Т.В. Труфанова

7 мая 2007г.

**ФАКУЛЬТАТИВ
ДИНАМИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА**

Учебно – методический

комплекс дисциплины

для специальности

010501 –прикладная математика и информатика

Составитель: доцент В.В.Сельвинский

Благовещенск

2007

ББК

С

*Печатается по решению
редакционно-издательского
совета
факультета математики и
информатики
Амурского государственного
университета*

В.В.Сельвинский

Динамика твердого тела. Учебно – методический комплекс дисциплины для студентов АмГУ очной формы обучения специальности 010501 «Прикладная математика и информатика».– Благовещенск: Амурский гос. ун–т, 2007. – с.

Учебно – методический комплекс дисциплины " Динамика твердого тела " содержит рабочую программу дисциплины, план-конспект лекций, материалы для проведения практических занятий, контролирующие материалы для осуществления промежуточного и итогового контроля, справочный материал и библиографический список. Предназначен ведущим преподавателям и студентам, изучающим данную дисциплину.

© Амурский государственный университет, 2007

1. РАБОЧАЯ ПРОГРАММА

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА

по дисциплине «Динамика твердого тела»

для специальности 010501–«Прикладная математика и информатика»

Курс 4

Семестр 8

Лекции 48 час.

Экзамен (нет)

Практические (семинарские) занятия 32 час. Зачет 8 семестр

Лабораторные занятия (нет)

Самостоятельная работа 36 час.

Всего 116 часов

Составитель: В.В.Сельвинский, к.ф-м.н., доцент

Факультет математики и информатики.

Кафедра математического анализа и моделирования.

1. ЦЕЛИ И ЗАДАЧИ ДИСЦИПЛИНЫ, ЕЁ МЕСТО В УЧЕБНОМ ПРОЦЕССЕ

1.1 Цель преподавания учебной дисциплины

Дисциплина "Динамика твердого тела" изучает математические модели движения твердых тел и механических систем.

Целью дисциплины является знакомство с методами исследования математических моделей различных процессов и явлений естествознания, изучение основных методов решения возникающих при этом математических задач, выяснение смысла полученного решения.

1.3 Перечень основных умений и навыков, приобретаемых при изучении дисциплины.

Дисциплина "Динамика твердого тела" вырабатывает у студентов навыки построения математических моделей простейших физических явлений и решения (аналитического и численного) получающихся при этом математических задач. Студент должен свободно ориентироваться в основных разделах дисциплины, что включает:

основные законы динамики, дифференциальные уравнения движения и их интегрирование; инерционные и геометрические характеристики твердых тел и механической системы, теорию сил как меру механического взаимодействия между телами, методы исследования простейших механических систем.

1.2 Перечень дисциплин, необходимых для изучения данной дисциплины.

Дисциплина "Динамика твердого тела" излагается на базе математического анализа, алгебры и аналитической геометрии, дифференциальных уравнений, в тесной связи с теорией функций комплексного переменного и с основами вариационного исчисления.

2. СОДЕРЖАНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ

2.1. Наименование тем, их содержание и объем в часах лекционных занятий

Лекции – 48 часов

1. Введение в кинематику. Система отсчета. Закон движения. Основные задачи кинематики. Кинематика точки. Три способа задания движения точки: векторный, координатный, естественный. Скорость точки. Определение величины и направления скорости при координатном способе задания движения точки. – 2 час.

2. Ускорение точки. Определение величины и направления ускорения при координатном способе задания движения точки. Оси естественного трехгранника. Определение скорости и ускорения точки при естественном способе задания движения. Касательное и нормальное ускорения точки. Радиус кривизны траектории в данной точке. – 2 час.

3. Кинематика твердого тела. Поступательное движение твердого тела. Теорема о траекториях, скоростях и ускорениях точек твердого тела при поступательном движении. Закон поступательного движения твердого тела. – 2 час.

4. Вращательное движение твердого тела. Угол поворота тела. Закон вращательного движения твердого тела. Угловая скорость тела. Угловое ускорение тела. Частные случаи вращательного движения твердого тела. – 2 час.

5. Определение скоростей и ускорений точек вращающегося твердого тела. Векторы угловой скорости и углового ускорения. Выражение скоростей и ускорений точек тела через векторы угловой скорости и углового ускорения. – 2 час.

6. Плоскопараллельное (плоское) движение твердого тела. Закон плоского движения твердого тела. Определение скоростей точек тела при

плоском движении. Теорема о проекциях скоростей точек твердого тела. Мгновенный центр скоростей (МЦС). – 2 час.

7. Частные случаи определения МЦС. Определение скоростей точек тела с помощью МЦС. Подвижная и неподвижная центроиды. Определение ускорений точек твердого тела при плоском движении. – 2 час.

8. Движение твердого тела с неподвижной точкой (сферическое движение). Углы Эйлера. Закон сферического движения твердого тела. Мгновенная ось вращения. Векторы угловой скорости и углового ускорения. – 2 час.

9. Определение скоростей и ускорений точек твердого тела при сферическом движении. – 2 час.

10. Общий случай движения свободного твердого тела. Определение скоростей и ускорений точек твердого тела в общем случае движения. – 2 час.

11. Динамика. Основные понятия и определения: инертность, масса, сила, материальная точка. Силы, зависящие от времени, от положения и скорости точки приложения силы. Задачи динамики. – 2 час.

12. Динамика материальной точки. Законы динамики Галилея – Ньютона. Дифференциальные уравнения движения материальной точки в проекциях на декартовы и естественные оси. Начальные условия. – 2 час.

13. Динамика относительного движения материальной точки. Переносная и кориолисова силы инерции. Частные случаи относительного движения. Случай относительного покоя. Принцип относительности классической механики. – 2 час.

Динамика механической системы материальных точек. Силы внешние и внутренние. Главный вектор и главный момент внутренних сил. Масса и центр масс механической системы. Теорема о движении центра масс. Закон сохранения движения центра масс. – 2 час.

Количество движения механической системы. Импульс силы. Теорема об изменении количества движения. Закон сохранения количества движения. – 2 час.

Момент инерции. Момент инерции механической системы относительно оси. Теорема о моментах инерции относительно параллельных осей. Моменты инерции простейших тел (тонкий однородный стержень, тонкое круглое кольцо, однородный круглый диск). Центробежные моменты инерции. Тензор инерции. – 2 час.

Момент инерции твердого тела относительно оси произвольного направления. Эллипсоид инерции. Главные оси и главные моменты инерции твердого тела. – 2 час.

Кинетический момент. Момент количества движения материальной точки. Кинетический момент механической системы относительно неподвижной точки, относительно центра масс, относительно произвольного центра. Кинетический момент вращающегося твердого тела. Теорема об изменении кинетического момента. Закон сохранения кинетического момента. – 2 час.

Дифференциальные уравнения поступательного движения твердого тела. Дифференциальные уравнения вращательного движения твердого тела вокруг неподвижной оси. Дифференциальные уравнения плоского движения твердого тела. Дифференциальные уравнения движения твердого тела вокруг неподвижной точки. Дифференциальные уравнения движения свободного твердого тела. – 2 час.

Кинетическая энергия. Кинетическая энергия материальной точки и механической системы. Теорема Кенига. Кинетическая энергия твердого тела при различных случаях движения. – 2 час.

Работа. Элементарная работа силы. Работа силы на конечном перемещении ее точки приложения. Примеры вычисления работ некоторых сил (сила тяжести материальной точки и твердого тела, сила упругости, реакция поверхности, вращающий момент, сопротивление качению). – 2 час.

Теорема об изменении кинетической энергии материальной точки и механической системы. – 2 час.

Принцип Даламбера для материальной точки и механической системы. Сила инерции материальной точки. Главный вектор и главный момент сил инерции механической системы. Главный вектор и главный момент сил инерции твердого тела при различных случаях движения. – 2 час.

Связи и их классификация (стационарные, геометрические, голономные).

Возможное перемещение материальной точки и механической системы. Элементарная работа силы на возможном перемещении. Идеальные связи. Принцип возможных перемещений. – 2 час.

Общее уравнение динамики. Принцип Даламбера – Лагранжа.

Обобщенные координаты механической системы. Число степеней свободы. Обобщенные силы. Уравнения движения механической системы в обобщенных координатах. Уравнения Лагранжа II рода. Движение твердого тела по шероховатой плоскости. – 2 час.

2.2. Практические занятия, их содержание и объем в часах - 32 часа

Определение величины и направления скорости и ускорения точки при координатном способе задания движения точки. – 2 час.

Определение скорости и ускорения точки при естественном способе задания движения. Касательное и нормальное ускорения точки- 3 час.

Поступательное и вращательное движение твердого тела. – 2 час.

Определение скоростей и ускорений точек вращающегося твердого тела. – 2 час.

Плоскопараллельное (плоское) движение твердого тела. Определение скоростей точек тела с помощью МЦС. – 2 час.

Определение ускорений точек твердого тела при плоском движении. – 2 час.

Определение скоростей и ускорений точек твердого тела при сферическом движении. – 4 час.

Динамика. Решение первой основной задачи динамики материальной точки. – 2 час

Решение второй основной задачи динамики материальной точки. Начальные условия. – 4 час.

Динамика относительного движения материальной точки. – 2 час.

Теорема о движении центра масс. Закон сохранения движения центра масс. – 2 час.

Теорема об изменении количества движения. Закон сохранения количества движения. – 2 час.

Теорема об изменении кинетического момента. Закон сохранения кинетического момента. – 2 час.

Дифференциальные уравнения вращательного движения твердого тела вокруг неподвижной оси. Дифференциальные уравнения плоского движения твердого тела. – 2 час.

Дифференциальные уравнения движения твердого тела вокруг неподвижной точки.– 2 час.

Теорема об изменении кинетической энергии материальной точки и механической системы. – 4 час.

Принцип Даламбера для материальной точки и механической системы.– 2 час.

Принцип возможных перемещений. – 2 час.

Общее уравнение динамики. – 2 час.

Уравнения Лагранжа II рода.– 4 час.

2.3. Самостоятельная работа студентов – 36 часов

Индивидуальные задания:

1. Кинематика точки.
2. Вращательное движение твердого тела.
3. Плоское движение твердого тела.
4. Движение твердого тела вокруг неподвижной точки.
5. Сложное движение точки.
6. Динамика материальной точки.
7. Кинетическая энергия механической системы.
8. Общее уравнение динамики.
9. Уравнения Лагранжа.

2.4. Вопросы к зачету

1. Динамика. Основные понятия и определения.
2. Законы динамики Галилея – Ньютона.
3. Дифференциальные уравнения движения материальной точки в проекциях на декартовы и естественные оси. Начальные условия.
4. Динамика относительного движения материальной точки.
5. Теорема о движении центра масс.
6. Количество движения механической системы. Импульс силы.
7. Момент инерции. Теорема о моментах инерции относительно параллельных осей.
8. Центробежные моменты инерции. Тензор инерции.
9. Момент инерции твердого тела относительно оси произвольного направления.
10. Эллипсоид инерции. Главные оси и главные моменты инерции твердого тела.
11. Кинетический момент. Кинетический момент вращающегося твердого тела.

12. Теорема об изменении кинетического момента. Закон сохранения кинетического момента.
13. Дифференциальные уравнения поступательного движения твердого тела. Дифференциальные уравнения вращательного движения твердого тела вокруг неподвижной оси.
14. Дифференциальные уравнения плоского движения твердого тела.
15. Дифференциальные уравнения движения твердого тела вокруг неподвижной точки.
16. Дифференциальные уравнения движения свободного твердого тела.
17. Кинетическая энергия материальной точки и механической системы. Теорема Кенига.
18. Кинетическая энергия твердого тела при различных случаях движения.
19. Работа. Элементарная работа силы. Работа силы на конечном перемещении ее точки приложения.
20. Теорема об изменении кинетической энергии материальной точки и механической системы.
21. Принцип Даламбера для материальной точки и механической системы.
22. Возможное перемещение материальной точки и механической системы.
23. Элементарная работа силы на возможном перемещении. Идеальные связи. Принцип возможных перемещений.
24. Общее уравнение динамики. Принцип Даламбера – Лагранжа.
25. Обобщенные координаты механической системы. Число степеней свободы. Обобщенные силы.
26. Уравнения движения механической системы в обобщенных координатах. Уравнения Лагранжа II рода.

3. РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

3.1. Основная литература:

1. Аппель П. Теоретическая механика. Т.1,2. М.: Физматгиз,1960.-487 с.
2. Лойцянский А.А., Лурье А.И. Теоретическая механика. Ч.1, 2.М.: Высшая школа, 1990.
4. Виттенбург Й. Динамика систем твердых тел. М.: Мир, 1980. – 292 с.
5. Даламбер Ж. Динамика. М.-Л.: ГИТТЛ, 1950.
6. Лагранж Ж. Аналитическая механика. М.-Л.: ГИТТЛ, 1950. Т 1,2.
8. Лурье А.И. Аналитическая механика. М.: Физматгиз, 1961.- 824 с.
9. Мак-Милан В.Д. Динамика твердого тела. М.: Издательство, 1951.
10. Сборник заданий для курсовых работ по теоретической механике. Под ред. Яблонского А.А. М. Высшая школа, 1992.

3.2. Дополнительная литература:

1. Неймарк Ю.И., Фуфаев Н.А. Динамика неголономных систем. М.: Наука, 1967.- 319 с.
2. Парс Л.А. Аналитическая динамика. М.: Наука, 1971.- 635 с.
3. Пэнлеве П. Лекции о трении. М.: Гостехиздат, 1954.- 316 с.
4. Суслов Г.К. Теоретическая механика. М.-Л.: Гостехиздат, 1946.- 655 с.
5. Чаплыгин С.А. Исследование по динамике неголономных систем. М.-Л.: Гостехтеоретиздат, 1949.- 112 с.
6. Мещерский И.В. Сборник задач по теоретической механике. М.: Наука, 1981.- 480 с.

2. ГРАФИК САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ СТУДЕНТОВ

В самостоятельную работу студентов входит подготовка к текущим занятиям, выполнение индивидуальных заданий (9 заданий) и подготовка к за-

чету. Тематика индивидуальных заданий и вопросы к зачету приведены в рабочей программе.

3. МАТЕРИАЛЫ ДЛЯ ЧТЕНИЯ ЛЕКЦИЙ

МЕХАНИКО – МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА С ВИБРИРУЮЩЕЙ ШЕРОХОВАТОЙ ПЛОСКОСТЬЮ.

1. Опорный объём твердого тела

Движение твердого тела по шероховатой плоскости существенным образом зависит от характера контакта тела с плоскостью. Вследствие деформируемости, а также из-за микронеровностей реальных поверхностей тело, опирающееся на плоскость, может иметь достаточно большое число точек контакта, совокупность которых образует пятна контакта. Эти пятна имеют тем меньшую площадь, чем больше твердость материалов тела и плоскости. Для достаточно твердых материалов, а также в случае, когда тело имеет явно выраженные выпуклости в области контакта с плоскостью, можно считать, что контакт осуществляется в изолированных точках - одной, двух или трех, в зависимости от формы тела. Например, тело формы эллипсоида будет иметь одну точку контакта; болт, опирающийся на плоскость шляпкой и своей стержневой частью, имеет две точки контакта; плоское тело - три точки контакта.

При указанных условиях дискретности контакта движение твердого тела произвольной формы по плоскости будет описываться движением его опорного объёма. Опорный объём является моделью исходного твердого тела с такими же характеристиками; поверхность опорного объёма совпадает с поверхностью эластичной оболочки, мысленно натянутой без прогибов и скручиваний на поверхность исходного тела.

В общем случае поверхность опорного объёма состоит из участков, зон возможного контакта, трех типов: плоских, выпуклых линейчатых и

нелинейчатых. В каждый момент времени объем касается плоскости точками одной из зон возможного контакта или точками границы соседних зон. Тип каждой зоны, а также контур ее границы зависят от числа и расположения точек контакта, в которых будет происходить касание плоскости с исходным твердым телом, если последнее поместить на плоскость соответствующим участком своей поверхности. Участку поверхности тела с тремя точками контакта соответствует плоская зона возможного контакта опорного объема. Зона имеет форму треугольника, вершинами которого являются точки возможного контакта тела с плоскостью. Участку поверхности тела с двумя точками контакта соответствует линейчатая зона возможного контакта опорного объема; при этом точки возможного контакта являются крайними точками отрезка образующей линейчатой зоны. Участок поверхности тела с одной точкой контакта полностью совпадает с соответствующей зоной контакта опорного объема. Указанные зоны возможного контакта покрывают всю поверхность опорного объема.

Движение опорного объема по плоскости может осуществляться в режимах двух типов: основных, во время которых объем соприкасается с плоскостью только одной из зон возможного контакта, и в переходных, во время которых точки контакта перемещаются из одной зоны возможного контакта в другую, происходит опрокидывание опорного объема (режимы, содержащие этапы полета твердого тела, в настоящей работе не рассматриваются).

В основных режимах тело движется в положении близком или совпадающем с одним из положений статического равновесия, которое оно занимало бы на плоскости, если бы последняя была неподвижна. При этом считается, что тело не обладает настолько большой кинетической энергией, когда начинают проявляться его гироскопические свойства, что, как правило, не имеет места в задачах вибрационного перемещения. Предполагается также, что опорный объем, твердого тела не содержит замкнутых круглых цилиндрических, сферических или близких к ним зон возможного контакта,

которым не соответствует хотя бы одно положение устойчивого равновесия тела.

В дальнейшей понятие твердого тела будет отождествляться с понятием его опорного объема.

2. Дифференциальные уравнения относительного движения твердого тела

Пусть твердое тело, инерционными характеристиками которого является масса M и тензор инерции J_C в центре масс C , перемещается по отношению к системе координат $Oxyz$, которая, в свою очередь, движется относительно осей O_1XYZ произвольным образом со скоростью начала координат \bar{v}_0 и угловой скоростью $\bar{\omega}_1$.

Для исследований относительного движения тела добавим ко всем действительным силам $\bar{F}_1, \bar{F}_2, \dots, \bar{F}_n$ переносные и кориолисовы силы инерции, обозначив $\bar{\Phi}_{пер}, \bar{\Phi}_{кор}$ - главные векторы, $\bar{M}_{Спер}, \bar{M}_{Скор}$ - главные моменты относительно центра масс C соответственно переносных и кориолисовых сил инерции.

Уравнения относительного движения твердого тела составим в форме уравнений Лагранжа:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j, (j = 1, \dots, 6). \quad (2.1)$$

В качестве обобщенных координат q_j выберем координаты центра масс x_c, y_c, z_c и углы Эйлера φ, ψ, θ между осями $Cx'y'z'$, параллельными осям $Oxyz$, и главными осями инерции $C\xi\eta\zeta$ твердого тела.

Обобщенные силы Q_x, Q_y, Q_z , соответствующие обобщенным координатам x_c, y_c, z_c вычисляются как суммы проекций всех действительных сил и сил инерции на оси $Oxyz$:

$$\begin{aligned}
Q_x &= \sum F_{kx} + \Phi_x^{nep} + \Phi_x^{kop}, \\
Q_y &= \sum F_{ky} + \Phi_y^{nep} + \Phi_y^{kop}, \\
Q_z &= \sum F_{kz} + \Phi_z^{nep} + \Phi_z^{kop};
\end{aligned}
\tag{2.2}$$

обобщенные силы $Q_\varphi, Q_\psi, Q_\theta$, соответствующие обобщенным координатам φ, ψ, θ , вычисляется как суммы моментов всех действительных сил и сил инерции относительно осей собственного вращения $C\xi$, прецессии Cz и нутации Cr :

$$\begin{aligned}
Q_\varphi &= \sum M_{C\xi}(\bar{F}_k) + M_{C\xi}^{nep} + M_{C\xi}^{kop}, \\
Q_\psi &= \sum M_{Cz}(\bar{F}_k) + M_{Cz}^{nep} + M_{Cz}^{kop}, \\
Q_\theta &= \sum M_{Cr}(\bar{F}_k) + M_{Cr}^{nep} + M_{Cr}^{kop}.
\end{aligned}
\tag{2.3}$$

Кинетическая энергия T по отношению к осям $Oxyz$ запишется в виде:

$$T = \frac{1}{2} M v_c^2 + \frac{1}{2} (\mathbf{J}_C \bar{\omega}) \bar{\omega}.
\tag{2.4}$$

Проекции вектора угловой скорости $\bar{\omega}$ выражаются известными кинематическими уравнениями Эйлера [95]:

$$\begin{aligned}
\omega_\xi &= \sin\varphi \sin\theta \dot{\psi} + \cos\varphi \dot{\theta}, \\
\omega_\eta &= \cos\varphi \sin\theta \dot{\psi} - \sin\varphi \dot{\theta}, \\
\omega_\zeta &= \cos\theta \dot{\psi} + \dot{\varphi}.
\end{aligned}
\tag{2.5}$$

При переходе от системы координат $C\xi\eta\zeta$ к системе координат $Oxyz$ необходимо использовать матрицу косинусов между этими осями $\{\alpha_{i,j}\}$:

$$\begin{aligned}
\alpha_{11} &= \cos\psi \cos\varphi - \sin\psi \sin\varphi \cos\theta, \\
\alpha_{12} &= -\cos\psi \sin\varphi - \sin\psi \cos\varphi \cos\theta, \\
\alpha_{13} &= \sin\psi \sin\theta, \\
\alpha_{21} &= \sin\psi \cos\varphi + \cos\psi \sin\varphi \cos\theta, \\
\alpha_{22} &= -\sin\psi \sin\varphi - \cos\psi \cos\varphi \cos\theta, \\
\alpha_{23} &= -\cos\psi \sin\theta, \\
\alpha_{31} &= \sin\varphi \sin\theta, \\
\alpha_{32} &= \cos\varphi \sin\theta, \\
\alpha_{33} &= \cos\theta.
\end{aligned} \tag{2.6}$$

Система переносных сил инерции характеризуется главным вектором $\bar{\Phi}_{пер}$ и главным моментом $\bar{M}_{Спер}$. Главный вектор переносных сил инерции равен:

$$\bar{\Phi}_{пер} = -M\bar{a}_{Спер}, \tag{2.7}$$

где

$$\bar{a}_{Спер} = \bar{a}_0 + \bar{\varepsilon}_1 \times \bar{r}_C + \bar{\omega}_1 \times (\bar{\omega}_1 \times \bar{r}_C)$$

- переносное ускорение центра масс;

$$\bar{a}_0 = \frac{\tilde{d}\bar{v}_0}{dt} + \bar{\omega}_1 \times \bar{v}_0$$

- ускорение начала координат O по отношению к осям $Oxyz$; $\bar{\varepsilon}_1 = \frac{d\bar{\omega}_1}{dt}$

- угловое ускорение осей $Oxyz$; \bar{r}_C - радиус-вектор центра масс относительно

точки O ; $\frac{\tilde{d}\bar{v}_0}{dt}$ - относительная производная по времени.

Главный момент переносных сил инерции твердого тела относительно точки C :

$$\bar{M}_C^{nep} = - \int_V \bar{\rho} \times \bar{a}^{nep} dm,$$

где $\bar{\rho}$ - радиус-вектор элементарного объема массой dm относительно точки C

$$\bar{a}^{nep} = \bar{a}_C^{nep} + \bar{\varepsilon}_1 \times \bar{\rho} + \bar{\omega}_1 \times (\bar{\omega}_1 \times \bar{\rho})$$

- переносное ускорение этого же элементарного объема; интеграл берется по всему объему тела V .

Учитывая, что

$$\begin{aligned} \int_V \bar{\rho} \times \bar{a}_C^{nep} dm &= \bar{\rho}_C \times M \bar{a}_C^{nep} = 0, \\ \int_V \bar{\rho} \times (\bar{\varepsilon}_1 \times \bar{\rho}) dm &= J_C \bar{\varepsilon}_1, \\ \int_V \bar{\rho} \times (\bar{\omega}_1 \times (\bar{\omega}_1 \times \bar{\rho})) dm &= \bar{\omega}_1 \times (J_C \bar{\omega}_1), \end{aligned}$$

получаем:

$$M_C^{nep} = - J_C \bar{\varepsilon}_1 - \bar{\omega}_1 \times (J_C \bar{\omega}_1). \quad (2.8)$$

Система кориолисовых сил инерции характеризуется главным вектором $\bar{\Phi}^{kop}$ и главным моментом \bar{M}_C^{kop} относительно точки C . Главный вектор кориолисовых сил инерции равен:

$$\bar{\Phi}^{kop} = - M \bar{a}_C^{kop}, \quad (2.9)$$

где $\bar{a}_C^{kop} = 2\bar{\omega}_1 \times \bar{v}_C$ - кориолисово ускорение центра масс.

Главный момент кориолисовых сил инерции равен:

$$\bar{M}_C^{kop} = - \int_V \bar{\rho} \times \bar{a}_{kop} dm,$$

где \bar{a}_{kop} - кориолисово ускорение элементарного объема массой dm .

Учитывая, что:

$$\begin{aligned} \bar{\rho} \times \bar{a}_{kop} &= \bar{\rho} \times \bar{a}_{Ckop} + 2(\bar{\omega}_1 \cdot \bar{\rho}) \bar{\rho} \times \bar{\omega}_1, \\ \int_V \bar{\rho} (\bar{\omega}_1 \cdot \bar{\rho}) dm &= -(J_C - JE) \bar{\omega}_1, \end{aligned}$$

получаем:

$$\bar{M}_{Ckop} = -2\bar{\omega}_1 \times [(J_C - JE) \bar{\omega}_1]. \quad (2.10)$$

Здесь: $J = (J_1 + J_2 + J_3)/2$; J_1, J_2, J_3 - главные моменты инерции; E - единичная матрица (тензор).

Уравнения (2.1), (2.2), с учетом (2.3)-(2.10), для координат центра масс x_C, y_C, z_C , и углов Эйлера φ, ψ, θ полностью описывают движение свободного твердого тела относительно осей $Oxyz$. Эти же уравнения сохраняют силу для движения твердого тела по шероховатой плоскости. Уравнения связей, накладываемых на движение твердого тела в этом случае, уменьшают число независимых обобщенных координат и позволяют использовать уравнения (2.1), (2.2) также для определения неизвестных реакций.

Сравнивая формулы (2.8) и (2.10), нетрудно заметить, что в задачах вибрационного перемещения, в которых рассматривается, как правило, медленное относительное движение объекта, влияние переносных сил

инерции на это движение (по крайней мере, на его вращательную часть) является более существенным по сравнению с кориолисовыми силами инерции ввиду

$$|\vec{\omega}_1|_{max} \gg |\vec{\omega}|_{max}.$$

3. Вибрационное поле шероховатой плоскости, совершающей произвольные колебания

В монографии И.И.Блехмана /9/ рассмотрены вопросы синтеза вибрационных полей твердых тел с учетом их упругих свойств. В данном параграфе исследуем структуру и свойства вибрационного поля шероховатой плоскости как абсолютно твердого тела, совершающего произвольные пространственные колебания.

Пусть $Oxyz$ - система координат, связанная с плоскостью так, что ось Oz перпендикулярна плоскости. Ускорение некоторой точки D плоскости имеет вид:

$$\vec{a} = \vec{a}_O + \vec{\varepsilon}_1 \times \vec{r} + \vec{\omega}_1 \times (\vec{\omega}_1 \times \vec{r}),$$

где \vec{a}_O - ускорение точки O ; \vec{r} - радиус-вектор точки D ; $\vec{\omega}_1, \vec{\varepsilon}_1$ - векторы угловой скорости и углового ускорения плоскости.

Ускорение точки D можно разложить на две составляющие: касательную \vec{a}_t и нормальную \vec{a}_n по отношению к плоскости. Проекции векторов \vec{a}_t, \vec{a}_n на оси $Oxyz$ равны соответствующим проекциям вектора полного ускорения:

$$a_{tx} = a_{Ox} - (\omega_{1y}^2 + \omega_{1z}^2)x + (-\varepsilon_{1z} + \omega_{1x}\omega_{1y})y,$$

$$a_{ty} = a_{Oy} - (\omega_{1x}^2 + \omega_{1y}^2)y + (\varepsilon_{1z} + \omega_{1x}\omega_{1y})x,$$

$$a_{nz} = a_{Oz} + (-\varepsilon_{1y} + \omega_{1x}\omega_{1z})x + (\varepsilon_{1x} + \omega_{1y}\omega_{1z})y,$$

где x, y, z - координаты точки D . Множество векторов касательных ускорений точек плоскости образуют поле касательных ускорений,

множество векторов нормальных ускорений - поле нормальных ускорений. Для вибрирующей плоскости указанные поля являются нестационарными и периодическими.

В задачах вибрационного перемещения существенна ограниченность этих полей в области взаимодействия плоскости с перемещаемым объектом. Если в любой момент времени:

$$|\vec{a}_{On}| < C_1, |\vec{a}_{Ot}| < C_2,$$

где C_1, C_2 - некоторые постоянные, то совокупность полей касательных и нормальных ускорений будем называть вибрационным полем, локально ограниченным в окрестности точки O . Постоянные C_1, C_2 - определяются условиями конкретных задач и могут характеризовать соответственно безотрывность движения перемещаемого объекта и устойчивость этого движения в окрестности точки O .

Ограничение на нормальное ускорение $|\vec{a}_n| < C_1$ выполняется в области:

$$|a_{Oz} + (-\varepsilon_{ly} + \omega_{lx}\omega_{lz})x + (\varepsilon_{lx} + \omega_{ly}\omega_{lz})y| < C_1,$$

то есть в полосе, заключенной между двумя параллельными прямыми и содержащей точку O , шириной:

$$d = 2C_1 / \sqrt{(-\varepsilon_{ly} + \omega_{lx}\omega_{lz})^2 + (\varepsilon_{lx} + \omega_{ly}\omega_{lz})^2}$$

Условие $|\vec{a}_t| < C_2$, выполняется в области:

$$\begin{aligned} & [a_{Ox} - (\omega_{ly}^2 + \omega_{lz}^2)x + (-\varepsilon_{lz} + \omega_{lx}\omega_{ly})y]^2 + \\ & + [a_{Oy} + (\varepsilon_{lz} + \omega_{lx}\omega_{ly})x - (\omega_{lx}^2 + \omega_{ly}^2)y]^2 < C_2^2, \end{aligned}$$

то есть на участке плоскости Oxy , ограниченном некоторым эллипсом, охватывающим точку O .

Наиболее заметно устойчивые режимы движения объекта могут проявляться в окрестности точек плоскости, касательное ускорение которых минимально. Для того чтобы величина касательного ускорения

$$a_r = \sqrt{a_{rx}^2 + a_{ry}^2}$$

была минимальной в точке O , необходимо:

$$\frac{\partial a_r}{\partial x} = \frac{\partial a_r}{\partial y} = 0 \text{ при } x = y = 0.$$

Отсюда получаем систему уравнений для a_{Ox}, a_{Oy} :

$$- a_{Ox}(\omega_{Iy}^2 + \omega_{Iz}^2) + a_{Oy}(\varepsilon_{Iz} + \omega_{Ix}\omega_{Iy}) = 0,$$

$$a_{Ox}(-\varepsilon_{Iz} + \omega_{Ix}\omega_{Iy}) - a_{Oy}(\omega_{Ix}^2 + \omega_{Iz}^2) = 0,$$

главный определитель которой равен

$$\Delta = \omega^2 \omega_{Iz}^2 + \varepsilon_{Iz}^2.$$

В результате имеем:

а) если $\omega_{Iz} \neq 0$, то минимум \vec{a}_r находится в точке O только в случае $a_{Ox} = a_{Oy} = 0$;

б) если $\omega_{Iz} = 0$, то минимум \vec{a}_r находится в точке O также при условии $\vec{a}_{Or} \times \vec{\omega}_I = 0$, то есть когда векторы $\vec{a}_{Or}, \vec{\omega}_I$ коллинеарны.

Заметим, что случай а) имеет меньшее практическое значение, чем случай б), так как наличие составляющей ω_{Iz} увеличивает влияние дестабилизирующего фактора на перемещение объекта; поэтому в дальнейшем считаем $\omega_{Iz} = 0$.

Вибрации шероховатой плоскости оказывают двойное действие на движение твердого тела. С одной стороны, вибрации нивелируют случайный характер зацеплений между микронеровностями соприкасающихся поверхностей. С другой стороны, за счет вибраций можно перемещать твердое тело и разворачивать его в требуемое положение, то есть управлять движением твердого тела.

Влияние вибраций на поступательную часть движения твердого тела достаточно полно отражается теорией вибрационного перемещения материальной частицы. Получим условие, при котором вибрации плоскости могут вызвать разворот тела в требуемое положение. Поле переносных сил инерции будет способствовать ориентации тела в положении ψ_0 , если во все время движения

$$M_{Cz}^{nep} \Big|_{\psi=\psi_0} = 0, \quad \frac{\partial M_{Cz}^{nep}}{\partial \psi} \Big|_{\psi=\psi_0} < 0, \quad (2.11)$$

или, используя выражение (2.8):

$$B_1 \sin \psi_0 + B_2 \cos \psi_0 + B_3 \sin 2\psi_0 + B_4 \cos 2\psi_0 = 0, \\ B_1 \cos \psi_0 - B_2 \sin \psi_0 + 2B_3 \cos 2\psi_0 - 2B_4 \sin 2\psi_0 < 0,$$

$$\text{где, с учетом } \omega_{Iz} \equiv 0, \quad B_1 = J_{rz} \varepsilon_{Iy} - J_{Iz} \varepsilon_{Ix}, \quad B_2 = J_{rz} \varepsilon_{Ix} + J_{Iz} \varepsilon_{Iy}.$$

$$B_3 = \frac{I}{2} (J_{ll} - J_{rr}) (\omega_{Ix}^2 - \omega_{Iy}^2) + 2J_{rl} \omega_{Ix} \omega_{Iy},$$

$$B_4 = J_{rl} (\omega_{Ix}^2 - \omega_{Iy}^2) - (J_{ll} - J_{rr}) \omega_{Ix} \omega_{Iy}.$$

Здесь J_{rz}, J_{Iz}, \dots - моменты инерции по отношению к осям прямоугольной системы координат $CrIz'$ (ось Cr является осью нутации, ось Cz' параллельна оси Oz). Однако следует иметь в виду, что условие (2.11) является необходимым, но недостаточным для осуществления ориентации тела силами инерции. Для получения достаточных условий нужно учитывать движение центра масс, а также действие статических сил и сил трения.

Одним из примеров локально ограниченного вибрационного поля является вибрационное поле плоскости, совершающей угловые колебания вокруг неподвижной оси, расположенной в этой же плоскости. Если ось Ox направить вдоль оси колебаний плоскости, то проекция момента M_{Cz}^{nep} запишется в виде:

$$M_{Cz}^{nep} = (J_{rz} \cos \psi - J_{lz} \sin \psi) \varepsilon_{Ix} + \left[\frac{I}{2} (J_{ll} - J_{rr}) \sin 2\psi + J_{rl} \cos 2\psi \right] \omega_{Ix}^2.$$

Отсюда видно, что ориентация твердого тела возможна только в том случае, если ось Cz' будет главной осью инерции, при этом $J_{rz} = J_{lz} = 0$. Тогда полагая, без ограничения общности, $J_{rl} = 0$, $J_{ll} > J_{rr}$, нетрудно заметить, что условия (2.11) удовлетворяются при $\psi_0 = \frac{\pi}{2}$.

4. Постановка задач взаимодействия твердого тела с виброплоскостью

Общей задачей исследования движения твердого тела по виброплоскости является поиск устойчивых основных режимов движения и решение вопросов их существования. Наиболее перспективными для практического использования представляются режимы движения, устойчивые по траектории и по относительной ориентации тела.

Всю совокупность параметров системы «твердое тело – виброплоскость» можно разделить на следующие группы: параметры, характеризующие геометрическую форму и инерционные свойства твердого тела; параметры движения виброплоскости; параметры трения в точках контакта тела с плоскостью. Целенаправленным определением выбора параметров и их значений можно обеспечить устойчивость исследуемого движения.

Основные режимы относительного движения твердого тела могут состоять из следующих этапов: покой, скольжение, качение и качение со скольжением. Переходные режимы в дополнение к этим этапам включают также опрокидывание, со скольжением или без него, - перекачивание опорного объема через граничные точки возможного контакта. Переходные режимы движения появляются в силу начальных условий или во время движения при определенных значениях параметров вибрации плоскости,

когда данное статически устойчивое положение твердого тела становится динамически неустойчивым. За переходным режимом движения следует основной режим, как только твердое тело попадает в одно из положений, устойчивых по отношению к данным вибрациям плоскости.

Каждый этап движения описывается нелинейными дифференциальными уравнениями, которые, как правило, не интегрируются в конечном виде. К тому же при переходе от одного этапа движения к другому изменяется структура дифференциальных уравнений (число уравнений, их параметры). Поэтому исследование взаимодействия твердого тела с виброплоскостью прямыми методами интегрирования уравнения движения (приближенными или численными) являются весьма громоздким и практически неосуществимым.

Одним из путей решения проблемы представляется исследование устойчивости отдельных состояний твердого тела по отношению к разовым (начальным) и к постоянно действующим (вибрационным) возмущениям. Здесь можно выделить три типа задач: устойчивость к сдвигу с места (из состояния покоя или при качении), устойчивость к опрокидыванию (из состояния покоя, при качении, скольжении или качении со скольжением), устойчивость движения твердого тела в ориентированном положении.

Положение твердого тела на плоскости определяется его обобщенными координатами q_j ($j=1,2, \dots, s$; s - число степеней свободы). Для решения общей задачи ориентирования необходимо обеспечить, чтобы в течение некоторого промежутка времени $\Delta t = t - t_1$ (t_1 - минимальное время ориентирования) тело находилось в требуемом положении $\{q_j^1\}$ или близком к нему $\{q_j : |q_j - q_j^1| < \varepsilon_j\}$ независимо от своего начального положения $\{q_j^0\}$. Здесь величины ε_j определяются из требований к процессу ориентирования.

Решение задачи о сдвиге и об опрокидывании позволяет определить область существования основных режимов движения. Задача об

опрокидывании к тому же совпадает с задачей первичной ориентации твердого тела на виброплоскости /82/. Она заключается в том, чтобы перевести тело из первоначального статически устойчивого положения равновесия в требуемое устойчивое положение, различимое с первоначальным. Это можно достигнуть в отдельных случаях таким подбором параметров виброплоскости, при котором все статически устойчивые положения равновесия, кроме требуемого, становятся неустойчивыми по отношению к выбранным вибрациям. Задача вторичной ориентации определяется так же созданием вибрационного поля, обеспечивающего наряду со стабильностью перемещения тела устойчивость его ориентированного положения.

В настоящей работе исследуются только основные режимы движения. Под математической моделью взаимодействия твердого тела с виброплоскостью понимается совокупность систем дифференциальных уравнений для каждого этапа движения и условий перехода от одного этапа движения к другому. В последующих главах определяются полные математические модели, а также общие закономерности безотрывного движения твердых тел отдельно для каждого из случаев трех, двух и одной точек контакта с виброплоскостью. При этом считается, что коэффициенты трения покоя и скольжения совпадают, трение качения и верчения пренебрежимо малы.

4. ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Мещерский И.В. Сборник задач по теоретической механике. М.: Наука, 1981.- 480 с.

1. В шахте опускается равноускоренно лифт массы 280 кг. В первые 10 с он проходит 35 м. Найти натяжение каната, на котором висит лифт.

2. Горизонтальная платформа, на которой лежит груз массой 1 кг, опускается вертикально вниз с ускорением 4 м/с^2 . Найти силу давления, производимого грузом на платформу во время их совместного спуска.

3. К телу массы 3 кг, лежащему на столе, привязали нить, другой конец которой прикреплен к точке A . Какое ускорение надо сообщить точке A , поднимая тело вверх по вертикали, чтобы нить оборвалась, если она рвется при натяжении $T = 42 \text{ н}$?

4. Камень массы 0,3 кг, привязанный к нити длины 1 м, описывает окружность в вертикальной плоскости. Определить наименьшую угловую скорость ω камня, при которой произойдет разрыв нити, если сопротивление ее разрыву равно 9 н.

5. Гирия массы 0,2 кг подвешена к концу нити длины 1 м; вследствие толчка гирия получила горизонтальную скорость 5 м/с. Найти натяжение нити непосредственно после толчка.

6. Автомобиль массы 1000 кг движется по выпуклому мосту со скоростью $u = 10 \text{ м/с}$. Радиус кривизны в середине моста $\rho = 50 \text{ м}$. Определить силу давления автомобиля на мост в момент прохождения его через середину моста.

7. В поднимающейся кабине подъемной машины производится взвешивание тела на пружинных весах. При равномерном движении кабины показание пружинных весов равно 50 н, при ускоренном – 51 н. Найти ускорение кабины.

8. Масса кузова трамвайного вагона 10000 кг. Масса тележки с колесами 1000 кг. Определить силу наибольшего и наименьшего давления вагона на рельсы горизонтального прямолинейного участка пути, если на ходу кузов совершает на рессорах вертикальные гармонические колебания по закону $x = 0,02 \sin 10t$.

9. Движение материальной точки массы 0,2 кг выражается уравнениями $x = 3 \cos 2\pi t$ см, $y = 4 \sin \pi t$ см (t - в сек). Определить проекции силы, действующей на точку, в зависимости от ее координат.

10. Груз массы 1000 кг перемещается вместе с тележкой вдоль горизонтальной фермы мостового крана со скоростью 1 м/с. Расстояние центра тяжести груза до точки подвеса 5 м. При внезапной остановке тележки груз по инерции будет продолжать движение и начнет качаться около точки подвеса. Определить наибольшее натяжение каната при качании груза.

11. Грузовой автомобиль массы 6000 кг въезжает на паром со скоростью 6 м/с. Заторможенный с момента въезда на паром автомобиль остановился, пройдя 10 м. Считая движение автомобиля равнозамедленным, найти натяжение каждого из двух канатов, которыми паром привязан к берегу. При решении задачи пренебречь массой и ускорением парома.

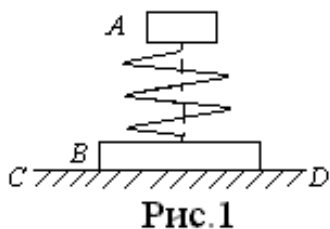


Рис. 1

12. Грузы A и B веса $P_A = 20$ н и $P_B = 40$ н соединены между собой пружиной, как показано на рисунке. Груз A совершает свободные колебания по вертикальной прямой с амплитудой 1 см и периодом 0,25

с. Вычислить силу наибольшего и наименьшего давления грузов A и B на опорную поверхность CD .

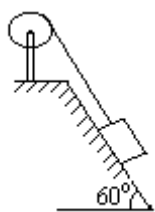


Рис. 2

13. Груз массы $M = 600$ кг посредством ворота поднимают по наклонному шурфу, составляющему угол 60° с горизонтом. Коэффициент трения груза о поверхность шурфа равен 0,2. Ворота радиуса 0,2 м вращается по закону $\varphi = 0,4 t^2$.

Найти натяжение троса, как функцию времени и значение этого натяжения через 2 с после начала подъема.

14. Самолет, пикируя отвесно, достиг скорости 300 м/с, после чего летчик стал выводить самолет из пике, описывая дугу окружности радиуса 600 м в вертикальной плоскости. Масса летчика 80 кг. Какая наибольшая сила прижимает летчика к креслу?

15. Камень падает в шахту без начальной скорости. Звук от удара камня о дно шахты услышан через 6,5 с от момента начала его падения. Скорость звука равна 330 м/с. Найти глубину шахты.

16. Тяжелое тело спускается по гладкой плоскости, наклоненной под углом 30° к горизонту. Найти за какое время тело пройдет путь 9,6 м. Если в начальный момент его скорость равнялась 2 м/с.

17. Тело массы m вследствие полученного толчка прошло по негладкой горизонтальной плоскости за 5 с расстояние $s=24,5$ м и остановилось. Определить коэффициент трения f .

18. За какое время и на каком расстоянии может быть остановлен тормозом вагон трамвая, идущий по горизонтальному пути со скоростью 10 м/с, если сопротивление движению, развиваемое при торможении, составляет 0,3 от веса вагона?

19. Тяжелая точка поднимается по негладкой наклонной плоскости, составляющей угол $\alpha=30^\circ$ с горизонтом. В начальный момент скорость точки равнялась $u_0=15$ м/с. Коэффициент трения $f=0,1$. Какой путь пройдет точка до остановки? За какое время точка пройдет этот путь?

20. Самолет летит горизонтально. Сопротивление воздуха пропорционально квадрату скорости и равно 0,5 н при скорости в 1 м/с. Сила тяги постоянна, равна 30760 н и составляет угол в 10° с направлением полета. Определить наибольшую скорость полета.

20. Тело массы 1 кг движется под действием движется под действием переменной силы $F=10(1-t)$ н, где t – время в секундах. Через сколько секунд тело остановится, если начальная скорость тела равна 20 м/с и сила совпадает по направлению со скоростью тела? Какой путь пройдет тело до остановки?

21. Самолет А летит на высоте 4000 м над землей с горизонтальной скоростью 140 м/с (рис.3). На каком расстоянии x , измеряемом по горизонтальной прямой от данной точки В, должен быть сброшен с самолета

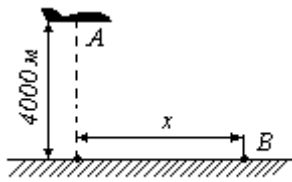


Рис.3

без начальной относительной скорости какой-либо груз для того, чтобы он упал в эту точку? Сопротивлением воздуха пренебречь.

22. Железнодорожный поезд движется по горизонтальному и прямолинейному участку пути. При торможении развивается сила сопротивления, равная 0,1 веса поезда. В момент начала торможения скорость поезда равняется 20 м/с. Найти время торможения и тормозной путь.

23. По шероховатой наклонной плоскости, составляющей с горизонтом угол 30° , спускается тяжелое тело без начальной скорости. Определить, в течение какого времени тело пройдет путь длины 39,2 м, если коэффициент трения равен 0,2.

24. Каков должен быть коэффициент трения колес заторможенного автомобиля о дорогу, если при скорости езды 20 м/с он останавливается через 6 с после начала торможения.

25. Определить наименьшую работу, которую надо затратить для того, чтобы поднять на 5 м тело массы 2 т, двигая его по наклонной плоскости, составляющей с горизонтом угол в 30° . Коэффициент трения 0,5.

26. По наклонной плоскости, составляющей с горизонтом угол 30° , спускается без начальной скорости тяжелое тело; коэффициент трения равен 0,1. Какую скорость будет иметь тело, пройдя 2 м от начала движения?

27. Материальная точка массы 3 кг двигалась по горизонтальной прямой влево со скоростью 5 м/с. К точке приложили постоянную силу, направленную вправо. Действие силы прекратилось через 30 с, и тогда скорость точки оказалась равной 55 м/с и направленной вправо. Найти величину этой силы и совершенную ею работу.

28. Брус начинает двигаться с начальной скоростью u_0 по горизонтальной шероховатой плоскости и проходит до полной остановки расстояние s . Определить коэффициент трения скольжения, считая, что сила трения пропорциональна нормальному давлению.

29. Пружина имеет в ненапряженном состоянии длину 20 см. Сила, необходимая для изменения ее длины на 1 см, равна 1,96 Н. С какой скоростью вылетит из трубки шарик массы 30 г, если пружина была сжата до длины 10 см? Трубка расположена горизонтально.

30. Груз массы 1 кг подвешен на нити длины 0,5 м в неподвижной точке. В начальный момент груз отклонен от вертикали на угол 60° , и ему сообщена скорость в вертикальной плоскости по перпендикуляру к нити вниз, равная 2,1 м/с. Определить натяжение нити в наинизшем положении и отсчитываемую по вертикали высоту, на которую груз поднимается над этим положением.

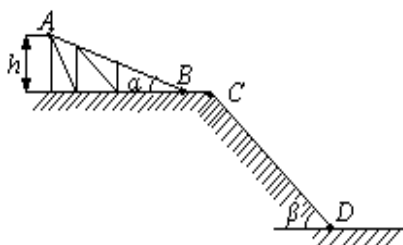


Рис. 4

31. Лыжник при прыжке с трамплина спускается с эстакады AB , наклоненной под углом 30° к горизонту. Перед отрывом он проходит небольшую горизонтальную площадку BC , длиной которой при расчете пренебрегаем. В момент отрыва лыжник толчком сообщает себе вертикальную составляющую скорости $u_y = 1$ м/с. Высота эстакады $h = 9$ м, коэффициент трения лыж о снег $f = 0,08$, линия приземления CD образует угол $\beta = 45^\circ$ с горизонтом. Определить дальность полета лыжника, пренебрегая сопротивлением воздуха.

Примечание. Дальностью полета считать длину, измеряемую от точки C до точки приземления лыжника на линии CD .

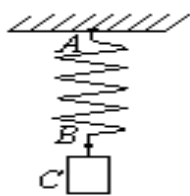


Рис. 5

32. Пружина AB , закрепленная одним концом в точке A , такова, что для удлинения ее на 1 м необходимо приложить в точке B при статической нагрузке силу 19,6 Н. В некоторый момент к нижнему концу B недеформированной пружины подвешивают гирю C массы 0,1 кг и отпускают ее без начальной скорости. Пренебрегая массой пружины, написать уравнение дальнейшего движения гири и указать амплитуду и

период ее колебаний, отнеся движение к оси, проведенной вертикально вниз из положения статического равновесия гири.

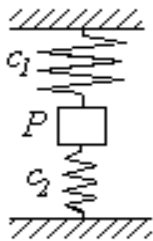


Рис. 8

33. К пружине, коэффициент жесткости которой равен 19,6 Н/м, были подвешены два груза массами $m_1=0,5$ кг и $m_2=0,8$ кг. Система находилась в покое в положении статического равновесия, когда груз m_2 убрали. Найти уравнение движения, частоту и период колебаний оставшегося груза.

34. Груз массы $m_1= 2$ кг, подвешенный к пружине, коэффициент жесткости которой $c=98$ Н/м находится в равновесии. В некоторый момент к грузу добавили груз $m_2=0,8$ кг. Определить уравнение движения и период колебаний двух грузов.

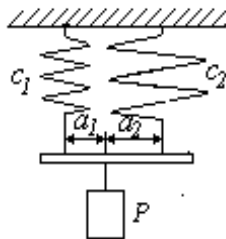


Рис. 7

35. Определить период свободных колебаний груза массы m , прикрепленного к двум параллельно включенным пружинам, и коэффициент жесткости пружины, эквивалентной данной двойной пружине, если груз расположен так, что удлинения обеих пружин, обладающих заданными коэффициентами жесткости c_1 и c_2 , одинаковы.

36. Определить период свободных колебаний груза массы m , зажатого между двумя пружинами с разными коэффициентами жесткости c_1 и c_2 .

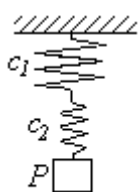


Рис. 9

37. Определить коэффициент жесткости c пружины, эквивалентной двойной пружине, состоящей из двух последовательно включенных пружин с разными коэффициентами жесткости c_1 и c_2 , и указать также период колебаний груза массы m , подвешенного на указанной двойной пружине.

Ответы: (1) 2548 н; (2) 6 н; (3) 4,2 м/с²; (4) 4,5 с⁻¹; (5) 7 н; (6) 7800 н; (7) 0,2 м/с²; (8) 128 кН, 88 кН; (9) -0,0789 н, -0,0197 н; (10) 10000 н; (11) 5400 н; (12) 72,8 н, 47,2 н; (13) 5,68+0,288t кН; 6,3 кН; (14) 175 м; (15) 1,61 с; (17) 0,2; (18) 3,4 с; 17 м; (19) 246 м/с; (20) 3,24 с; 61 м; (21) 4000 м; (22) 20,4 с; 204 м;

(23) 5 с; (24) 0,34; (25) 183 кДж; (26) 4 м/с; (27) 6 Н; 4,5 кДж; (28) $u_0^2 / (2g)$;
 (29) 8 м/с; (30) 28,4 Н; 47,5 см; (31) 47,4 м; (32) $-0,05\text{Cos}14t$ м; 5 см; 0,45 с;
 (33) $0,4\cdot\text{Cos}(6,26t)$ м; 2π с⁻¹; 1 с; (34) $-0,08\cdot\text{Cos}(5,916t)$; 1,062 с; (35)
 $2\pi(m/(c_1+c_2))^{1/2}$; $c=c_1+c_2$; $a_1/a_2=c_2/c_1$; (36)

5. КАРТА КАДРОВОЙ ОБЕСПЕЧЕННОСТИ ДИСЦИПЛИНЫ

Лекторы: доцент, к.ф.-м.н. Сельвинский В.В

Практические занятия: доцент, к.ф.-м.н. Сельвинский В.В.,

ОГЛАВЛЕНИЕ

№		стр.
1.	Рабочая программа	3
2.	График самостоятельной работы студентов	12
3.	Материалы для чтения лекций	13
4.	Задачи для самостоятельного решения	26
5.	Карта кадровой обеспеченности дисциплины	33