

Федеральное агентство по образованию
АМУРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ГОУВПО «АмГУ»

УТВЕРЖДАЮ

Зав. кафедрой КиТО

_____ И.В. Абакумова

« ____ » _____ 2007 г.

ОПТИМИЗАЦИЯ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКИЙ КОМПЛЕКС ПО ДИСЦИПЛИНЕ

для специальности 260704 – «Технология текстильных изделий»

Составитель: И.В.Абакумова

Благовещенск

2007 г.

Печатается по решению
редакционно-издательского совета
факультета прикладных искусств
Амурского государственного
университета

И.В.Абакумова

Оптимизация технологических процессов: Учебно-методический комплекс по дисциплине для специальности 260704 – «Технология текстильных изделий» – Благовещенск: Амурский гос. ун-т, 2007. – с.50

Учебно-методическое пособие предназначено для студентов очной и заочной формы обучения специальности 260704 «Технология текстильных изделий» специализации «Технология трикотажа». Составлено в соответствии с требованиями Государственного образовательного стандарта высшего профессионального образования для специальности 260704 и включает наименование тем, цели и содержание лекций, лабораторных занятий; вопросы для подготовки к работе, методические рекомендации по проведению лабораторной работы; вопросы для итоговой оценки знаний; список рекомендуемой литературы; учебно-методическую карту дисциплины.

1. ЦЕЛИ И ЗАДАЧИ ДИСЦИПЛИНЫ, ЕЕ МЕСТО В УЧЕБНОМ ПРОЦЕССЕ

Программа курса "Оптимизация технологических процессов" составлена в соответствии с требованиями государственного образовательного стандарта высшего профессионального образования. Тематика лекций, лабораторных работ и практических занятий по дисциплине «Оптимизация технологических процессов» разработана для студентов 5 курса (9 семестр) специальности «Технология текстильных изделий», специализации «Технология трикотажа».

Целью данной дисциплины является приобретение навыков решения задач моделирования и оптимизации технологических процессов швейного производства с помощью ЭВМ.

Основной задачей данной дисциплины является обобщение знаний теории технологических процессов на базе современных математических методов с использованием ЭВМ. Изучение данного курса позволит студентам освоить методы моделирования и оптимизации математических зависимостей, адекватно отражающих реальные технологические закономерности, с учетом современных экономических условий производства.

Перечень дисциплин, необходимых для изучения данной дисциплины:

- общепрофессиональные и общетехнологические дисциплины;
- высшая математика;
- методы и средства исследования технологических процессов;
- информатика.

Перечень основных умений и навыков, приобретаемых студентами при изучении дисциплины:

- методы оптимизации для одно- и многофакторных целевых функций, описывающих процессы текстильного производства;
- критерии оптимизации и их выбор при решении различных задач моделирования технологических процессов;

- аналитические и численные методы оптимизации;
- многокритериальные задачи оптимизации;
- методы линейного и нелинейного программирования для процессов текстильного производства;
- специальные виды программирования.

Цель УМКД – систематизация содержания дисциплины с учётом достижения науки, техники и производства, улучшения её методического обеспечения, повышение эффективности и качества занятий, оказание студентам методической помощи в усвоении учебного материала, правильное планирование и организация самостоятельной работы и контроля знаний студентов.

Данное учебно-методическое пособие составлено с учетом рекомендаций учебно-методического отдела АмГУ и включает следующие разделы:

- цели и задачи дисциплины, ее место в учебном процессе;
- содержание дисциплины;
- учебно-методические материалы по дисциплине;
- учебно-методическая карта дисциплины.

2. СОДЕРЖАНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ

2.1 Требование стандарта

СД.06

Стандарт высшего профессионального образования по специальности 260704 (280300) «Технология текстильных изделий», предусматривает, что по завершению обучения студент должен иметь понятие об оптимизации, объекте оптимизации, критерии оптимальности, этапах решения задач оптимизации, видах задач оптимизации технологических процессов, аналитических методах оптимизации, линейном программировании, нелинейном программировании, многокритериальных задачах оптимизации, специальных видах программирования.

2.2 Наименование тем, объем (в часах) лекционных, лабораторных занятий и самостоятельной работы

Номер темы	Раздел курса	Лекции	Лабораторные работы	Практические занятия	Самостоятельная работа
1	Общие вопросы методов оптимизации технологических процессов	2	2	2	6
2	Методы безусловной одномерной оптимизации целевой функции	4	4	4	8
3	Методы безусловной оптимизации многомерной целевой функции	4	4	4	8
4	Линейное программирование	4	4	4	8
5	Нелинейное программирование	2	2	2	8
6	Решение оптимизационных задач специального вида	2	2	2	7
	ИТОГО	18	18	18	45

2.3 План-конспект лекций

Тема 1. Общие вопросы методов оптимизации технологических процессов - 2 часа

Оптимизация – это целенаправленная деятельность для получения наилучших результатов, при выполнении определенных условий.

Решение любой оптимизированной задачи начинается с формулировки требований. Для постановки оптимизированной задачи требуется четкое определение *основных понятий оптимизации*:

1. *объект оптимизации*
2. *независимые (или управляемые) переменные x_1, x_2, \dots, x_n*
3. *целевая функция задачи оптимизации U (или зависимая переменная выходная величина, критерий или параметр оптимизации.*

Вид критерия определяется конкретной задачей. Классификация критериев: экономические, технико-экономические, технологические, статистические и пр.

В зависимости от числа критериев задачи оптимизации могут быть однокритериальными и многокритериальными. Реальные задачи, как правило, сложны и часто требуют учета многих критериев. В этом случае:

1) в качестве целевой функции выбирают один из критериев, а другие играют роль ограничения;

2) построение обобщенного критерия оптимальности (комплексного критерия), как функции множества критериев.

4. *Ограничения задачи оптимизации*
5. *Неуправляемые параметры*
6. *Случайные*
7. *Неопределенные факторы*

Математическая модель оптимизации – целевая функция (1) и совокупность ограничений (2), зависящие от векторов независимых переменных X , неуправляемых параметров A , случайных ε и неопределенных факторов δ .

$$Y = F(X, A, \varepsilon, \delta) \quad (1)$$

$$\left. \begin{aligned} g_1(X, A, \varepsilon, \delta) &\leq 0 \\ g_i(X, A, \varepsilon, \delta) &\leq 0 \\ g_m(X, A, \varepsilon, \delta) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

$X(x_1, x_2, \dots, x_n)$ – вектор независимых переменных;

$A(a_1, a_2, \dots, a_n)$ – вектор неуправляемых параметров.

Задача оптимизации состоит в поиске такого вектора независимых переменных $X^*(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$, который обеспечил бы наивысшую эффективность технологического процесса. Так как в математической модели оптимизации мерой эффективности является целевая функция, наилучшему решению отвечает экстремальное (min, max) значение целевой функции. В связи с этим задачи оптимизации иначе называют задачами максимизации или минимизации.

Допустимое решение задачи оптимизации – набор значений независимых переменных, которые удовлетворяют одновременно всем ограничениям (2) задачи оптимизации. Задача оптимизации имеет смысл, если существует множество допустимых решений.

Оптимальное решение – набор значений независимых переменных $X^*(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$, который не только удовлетворяет всем ограничениям задачи оптимизации (2), но и дает экстремальное значение целевой функции (1).

Математическая модель оптимизации позволяет получить не только оптимальное значение, но и проанализировать влияние различных факторов, входящих в модель, на оптимальное значение. Такой анализ называется анализом на чувствительность решения к вариациям параметров. Проведение такого анализа часто имеет более важное значение, чем получение оптимального решения, так как:

- модель не учитывает всех факторов,
- погрешность числовых значений факторов,

- значения параметров могут изменяться с течением времени.

Основные виды оптимизационных задач

Длительная практика построения оптимизационных моделей и решения задач оптимизации привела к выводу о существовании нескольких *основных видов* задач.

1. *Задача управления запасами.*
 2. *Задача распределения ресурсов.*
 3. *Задача ремонта и замены оборудования.*
 4. *Сетевые задачи.*
 5. *Задачи составления оптимальных расписаний.*
 7. *Задачи оптимизации систем обслуживания.*
- 6. *Комбинированные задачи.*

Тема 2. Методы безусловной одномерной оптимизации целевой функции - 4 часа

Основные классы задач и методы их решения

Использование математической модели оптимизации позволяет рассматривать задачу оптимизации как математическую.

Математическую модель задачи оптимизации можно представить в виде:

$$F(X, A, \varepsilon, \delta) \rightarrow \text{extr} \quad (1)$$

$$\begin{cases} g_1(X, A, \varepsilon, \delta) \leq 0 \\ g_m(X, A, \varepsilon, \delta) \geq 0 \end{cases} \quad (2)$$

Случайные ε и неопределенные факторы δ могут отсутствовать в задаче оптимизации.

$X(x_1, x_2, \dots, x_n)$ - вектор управляемых (независимых) переменных.

С математической точки зрения задача оптимизации заключается в поиске такого вектора $X^*(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$, который удовлетворял бы всем ограничениям (2) и обращал в экстремум целевую функцию (1).

Универсальность и эффективность метода решения задачи оптимизации не существует. Способ ее решения зависит от числа независимых переменных, от числа ограничений, от аналитического вида целевой функции и от аналитического вида ограничений.

По этим признакам задачи математического моделирования и оптимизации делятся на классы, для каждого из которых разработаны более или менее эффективные методы решения.

Основные классы задач:

1) *одномерные задачи* оптимизации бывают:

- *условные* - имеют ограничение (2);
- *безусловные* - без ограничений, $X \in (-\infty ; +\infty)$.

$$Y = F(x_1) \rightarrow \text{extr} \quad (1)$$

$$\begin{cases} g_1(x_1) \geq 0 \\ \dots \\ g_m(x_1) = 0 \end{cases} \quad (2)$$

Методы решения данного класса задач зависят от аналитического вида функции (1). Целевая функция может быть одноэкстремальной или многоэкстремальной. Она может быть непрерывной или разрывной. Может быть не дифференцируемой или гладкой (т.е. дифференцируемой необходимое число раз).

В зависимости от особенностей задачи одномерной оптимизации существует *два метода их решения*:

- аналитический – для задач безусловной одномерной оптимизации;
- численный – для задач условной одномерной оптимизации.

2) *многомерные задачи*

$$Y = F(x_1, x_2, \dots, x_n) \rightarrow \text{extr} \quad (1)$$

$$\begin{cases} g_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \geq 0 \\ \dots \\ g_m(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \end{cases} \quad (2)$$

В зависимости от наличия ограничений (2) многомерные задачи бывают также:

- *условные;*
- *безусловные.*

В зависимости от вида ограничений в задачах условной оптимизации различают задачи с:

- ограничениями в виде равенств,
- ограничениями в виде неравенств,
- ограничениями в виде условий целочисленности,
- ограничениями в виде линейной функции,
- ограничениями в виде нелинейной функции.

Существуют различные *методы решения многомерных задач:*

1. аналитический;
2. численный;
3. специальные:
 - a) метод линейного программирования;
 - b) диссоциативно-шаговый метод;
 - c) метод динамического программирования;
 - d) метод нелинейного программирования и др.

Аналитический метод безусловной одномерной оптимизации

$$F(x) \rightarrow \text{extr}$$

$$x \in R^n$$

Этот метод состоит из необходимого и достаточного условия.

Необходимое условие первого порядка существования экстремума всюду дважды дифференцируемой функции $F(x)$ является:

$$\frac{dF(x^*)}{dx} = 0 \quad (1),$$

где x^* - точка экстремума.

Любая точка, в которой выполняется равенство (1) называется *стационарной*. Среди них могут быть точки минимума, максимума, перегиба (если

линия вблизи точки лежит по обе стороны от касательной, то точка называется точкой перегиба).

Для выявления различия указанных точек применяют *достаточное условие* второго порядка.

- 1) если в точке x^* первые $(n-1)$ целевой функции $F(x)=0$, а производная порядка n отлична от нуля, то:
 - a) при нечетном n - в точке x^* будет точка перегиба;
 - b) при четном n - в точке x^* будет точка локального минимума или максимума;
 - c) если четная производная положительная, то x^* - минимум, если отрицательная, то x^* - максимум.

Необходимые условия используются для того, чтобы доказать неоптимальность точки. Если требуется доказать оптимальность точки, то обращаются к достаточному условию, которое является гарантией оптимума.

Тема 3. Методы безусловной оптимизации многомерной целевой функции - 4 часа

Аналитический метод безусловной многомерной оптимизации

$$F = F(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

Из математического анализа известны необходимые условия существования экстремума многомерной функции: если многомерная целевая функция $F(x) = F(x_1, x_2, \dots, x_n)$ дифференцируема в точке X^* , то выполняется следующее соотношение

$$\frac{\partial F(X^*)}{\partial x_j} = 0 \tag{1}$$

где $j=1, 2, \dots, n$

Или в векторной форме:

$$\nabla F(X^*) = 0,$$

где ∇F - градиент.

$$\nabla F(x_1, x_2, \dots, x_n) = \left(\frac{\partial F}{\partial x_1}; \frac{\partial F}{\partial x_2}; \dots; \frac{\partial F}{\partial x_n} \right)$$

X^* - стационарная точка.

Для выявления типа стационарной точки используется необходимое условие второго порядка, которое формулируется: если X^* соответствует локальному минимуму дважды дифференцируемой целевой функции $F(X)$, то выполняется условие

$$\sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 F'(X^*)}{\partial x_i \partial x_j} * (x_i - x_i^*) * (x_j - x_j^*) > 0 \quad (2)$$

где $i=1, 2, \dots, n, j=1, 2, \dots, n$ или в векторной форме:

$$\left[(X - X^*)^T * \mathbf{H}(X^*) * (X - X^*) \right] > 0$$

$\mathbf{H}(X^*)$ – матрица Гессе, вычисляется в точке X^* , она состоит из вторых частных производных. Условие (2) означает неотрицательную определенность матрицы Гессе. Для исследования матрицы Гессе на положительную или отрицательную определенность используют критерий Сильвестра. Согласно этому критерию условие положительной определенности матрицы Гессе:

$$\mathbf{H}(x) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1i} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2i} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{j1} & a_{j2} & \dots & a_{ji} \end{vmatrix}$$

$$i=j=1, 2, \dots, n$$

$$\det_1 = a_{11} > 0$$

$$\det_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0 \quad (3)$$

$$\det_3 > 0 \dots$$

X^* - минимум.

Условие отрицательной определенности является выполнение неравенств: $\det_1 = a_{11} < 0$

$$\det_2 > 0 \tag{4}$$

$$\det_3 < 0$$

X^* - максимум.

Если матрица Гёссе не определена, т.е. не выполняется условие (3) и (4), то X^* не является экстремумом.

Для решения задач аналитическим методом возникает ряд трудностей:

а. Аналитическое представление функции может быть весьма сложным, что затрудняет отыскание частных производных.

б. С увеличением размерности задачи вычислительная процедура резко усложняется, т.к. в этом случае необходимо решить систему уравнений полученных после приравнивания к нулю частных производных.

в. При решении задач часто встречаются многоэкстремальные целевые функции; в этом случае система уравнений имеет большое количество решений. Отыскание всех решений является сложным, т.к. для каждой точки необходимо находить матрицу Гёссе, т.е. вторые частные производные.

г. На практике часто встречаются условия условной оптимизации, т.е. с ограничениями, при этом экстремумы целевой функции могут не входить в область допустимых значений.

д. В практических задачах область целевой функции является дискретной (это в том случае, когда в качестве U выступают объекты (машины, люди)), поэтому целевая функция задана на дискретном множестве точек, а все методы отыскания экстремума, связанные с необходимостью определения производных, используют непрерывность функции.

Алгоритмы численных методов

Алгоритмы численных методов отличаются друг от друга способом направления и шага поиска.

1. Если продолжение поиска оказывается не эффективным или приращение функции $\Delta F = |F(x^{k+1}) - F(x^k)|$ оказывается малым. Точка X , в которой происходит остановка поиска рассматривается как точка экстремума, если

для точки X с необходимой точностью выполняется условие точки экстремума (равенство градиентов нулю) и положительность или отрицательность определителей матрицы Гессе, то точка X^* принимается за решение задачи.

2. если данное условие не выполняется, то необходимо проанализировать причины остановки и выбрать другой алгоритм.

Алгоритм симплекс-метода

Симплексом в n -мерном пространстве называют выпуклый многогранник с минимальным возможным числом вершин $n+1$.

Симплекс называется *правильным*, если его все ребра равны.

Алгоритм:

1. выбирается правильный симплекс, привязанный к начальной точке поиска.
2. определяются вершины симплекса с наихудшим значением целевой функции, исключают эту вершину и вводят новую вершину, получают новый симплекс $F(c)$ – наихудшее значение.
3. симплекс начинает вращаться вокруг одной из своих вершин. В этом случае сжимается длина ребра симплекса и поиск продолжается из наилучшей найденной точки. Сжатие длины симплекса происходит до заданной величины точности поиска ε , точка, которая находится в наилучшей из вершин симплекса, является точкой экстремума.

Тема 4. Линейное программирование - 4 часа

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = c_1 + a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n$$

В линейных моделях целевая функция и ограничения заданы линейными уравнениями, т.к. $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$ - линейная функция, то в общем случае

$\frac{\partial F}{\partial x_1}, \frac{\partial F}{\partial x_2}, \frac{\partial F}{\partial x_n}$ не равны нулю, следовательно, аналитическим методом найти

экстремум точки не возможно. Как правило экстремум точки находится на границе области, которая образована системой ограничений.

Чаще всего методом линейного программирования решают задачи:

- 1) ассортиментные – нахождение оптимального ассортимента изделий, вырабатываемого на предприятии, на данном оборудовании.
- 2) Транспортные – выбор оптимального пути прохождения полуфабрикатов от изготовителя к потребителю.
- 3) Задача оптимального использования сырья.
- 4) Задача использования производственных мощностей - выбор оптимального режима оборудования.

Метод решения задач линейного программирования

I. Геометрический (графический) $F(x_1, x_2)$

II. Симплекс-метод для любой многомерной функции.

Для решения задач линейного программирования необходимо построить математическую модель:

- a) Выбор целевой функции
- b) Выбор независимых переменных
- c) Составление ограничений и целевой функции

Геометрический метод решения задач линейного программирования

I. $F(x_1, x_2) = c_0 + c_1x_1 + c_2x_2 \rightarrow \text{extr}$ (1)

Ограничения

$$\begin{cases} b_0 + b_1x_1 + b_2x_2 \geq 0 \\ a_0 + a_1x_1 + a_2x_2 \leq 0 \\ \dots \end{cases} \quad (2)$$

(1) – целевая функция

(2) – ограничения, которые являются линейными уравнениями.

Алгоритм:

- 1) Т.к. метод графический, то на плоскости (x_1, x_2) строится множество точек (области), удовлетворяющих одновременно всем ограничениям (2)
- 2) Отыскание на построенном графике оптимальной точки, определение ее координат и значений функции в этой точке. При решении задач линейного программирования возможны варианты:

- a) Множество не допускаемых решений не существует, т.е. на плоскости (x_1, x_2) нет точки, которая удовлетворяла бы одновременно всем ограничениям (2). В этом случае решение задачи линейного программирования не существует.
- b) Множество допустимых решений – одна точка, эта же точка является оптимальной.
- c) Множество допустимых решений – замкнутым выпуклым многоугольником. В этом случае оптимальные точки находятся на границе данного многоугольника. Анализируя каждую вершину (ее координаты подставляя в целевую функцию), выбирается оптимальная.
- d) Множество допустимых решений – разомкнутый многоугольник. Оптимальное решение зависит от ориентации линий уровня целевой функции и направления в котором ее значения нарастают. Конечное решение либо существует либо нет. Если конечного решения не существует, то это связано с недостаточной полнотой ограничений.

Выполненный анализ двухмерной линейной задачи программирования позволяет сделать следующие выводы, которые являются общими и для многомерных задач:

- a. Область дополнительного решения не может существовать, если ограничения противоречивы.
- b. Если множество дополнительных решений существует, то оно представляет собой выпуклый, замкнутый (разомкнутый) многоугольник (для многомерных задач - многогранник).
- c. Если множество дополнительных решений существует и оно не ограничено, то это свидетельствует о неполноте модели - отсутствует ограничение препятствующее неограниченному изменению целевой функции.
- d. Если конечное решение существует, то оно находится в одной из вершин многоугольника.

Симплекс-метод решения задач линейного программирования

Рассмотрев графический метод решения задач линейного программирования, мы сделали вывод, что оптимальное значение находится в одной из вершин области допустимых значений. На этом выводе базируется симплекс-метод решения задач линейного программирования, который заключается в следующем:

1. определение вершин области допустимых значений, как точки пересечения ограничений.
2. определение значения целевой функции в каждой вершине.
3. вершина, в которой целевая функция принимает экстремальное (min или max) значение, является оптимальной вершиной.

Для симплекс-метода разработан специальный алгоритм направленного перебора вершин. Этот алгоритм обеспечивает переход от одной вершины к другой в таком направлении, при котором значения целевой функции от вершины к вершине улучшаются.

Алгоритм:

Пусть необходимо найти значения x_1, x_2, \dots, x_n , которые удовлетворяют следующим условиям:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \geq b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \geq b_2 \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \geq b_m \\ x_j \geq 0, j = 1, 2, \dots, n \end{cases} \quad (1)$$

И минимизируют целевую функцию:

$$F = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \rightarrow \min \quad (2)$$

Введем в задачу ряд положительных переменных $x_{n+1}, x_{n+2}, \dots, x_{n+m}$, которые называются базисными, они показывают, на сколько правые части неравенства (1) больше, чем левые, т.е. показывают величину неиспользованного ресурса.

$$\begin{cases} x_{n+1} = b_1 - (a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n) \\ x_{n+2} = b_2 - (a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n) \\ \dots \\ x_{n+m} = b_m - (a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n) \end{cases}$$

Т.о. неравенство (1) превращается в равенство (3):

$$\begin{cases} x_{n+1} + a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ x_{n+2} + a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots \\ x_{n+m} + a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \quad (3)$$

Т.о. задача с ограничениями в виде неравенств (1) сводится к задаче на отыскание неотрицательных значений x_1, x_2, \dots, x_n , которые называются свободными и $x_{n+1}, x_{n+2}, \dots, x_{n+m}$ (базисные), которые удовлетворяют систему линейных уравнений (3) и минимальному значению целевой функции (2), которую можно записать в следующем виде:

$$F = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n + 0 \cdot x_{n+1} + 0 \cdot x_{n+2} + \dots + 0 \cdot x_{n+m} \rightarrow \min .$$

В полученной системе за исходный опорный план можно принять:

1. значения свободных переменных равные нулю $x_1=0, x_2=0, \dots, x_n=0$.
2. $x_{n+1}=b_1, x_{n+2}=b_2, \dots, x_{n+m}=b_m$.

Действительно, с экономической точки зрения, если продукция не выпускается, то величина неиспользуемого ресурса равна запасу данных ресурсов, при этом целевая функция (прибыль) равна нулю $F=0$.

Поскольку первоначальный базис состоит из дополнительно введенных переменных $x_{n+1}, x_{n+2}, \dots, x_{n+m}$, то итерации симплекс-метода сводятся к исключению из базиса базисных переменных и вводу свободных.

Двойственная задача линейного программирования и ее применение

С каждой задачей линейного программирования можно связать некоторую другую задачу, называемую *двойственной*. Первоначальную задачу при этом называют исходной. Оптимальный план одной из задач тесно связан с планом другой задачи.

Рассмотрим двойственную задачу в общей постановке.

Пусть ограничения исходной задачи имеют вид:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \leq b_1 \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \leq b_2 \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \leq b_m \\ x_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, n \end{cases} \quad (1)$$

При этом требуется максимизировать целевую функцию:

$$F = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \rightarrow \max \quad (2)$$

Двойственная для этой задачи будет задача с ограничениями:

$$\begin{cases} a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \dots + a_{m1}y_m \geq c_1 \\ a_{12}y_1 + a_{22}y_2 + \dots + a_{m2}y_m \geq c_2 \\ \dots \\ a_{1n}y_1 + a_{2n}y_2 + \dots + a_{mn}y_m \leq c_n \\ y_j \geq 0, j = 1, 2, \dots, m \end{cases} \quad (3)$$

При этом требуется минимизировать целевую функцию:

$$f = b_1y_1 + b_2y_2 + \dots + b_my_m \rightarrow \min$$

Сравнивая обе задачи, нетрудно заметить, что:

1) Матрица составленная из коэффициентов при переменных в исходной задаче и аналогичная матрица в двойственной задаче получаются друг из друга простой заменой строк столбцами с сохранением их порядка. Такая операция получила название транспонирования.

Матрица исходной задачи:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Матрица двойственной задачи:

$$A' = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

2) В исходной задаче: n - переменных и m - ограничений.

В двойственной задаче: m - переменных и n - ограничений.

3) В правых частях систем ограничений (1) и (3) каждой из задач стоят коэффициенты целевой функции, взятой из другой задачи.

4) В систему ограничений исходной задачи входят неравенства типа \leq , причем в задаче требуется максимизировать функцию F . В систему ограничений двойственной задачи входят неравенства типа \geq , причем в двойственной задаче требуется минимизировать целевую функцию f . Исходная и двойственная задача образуют пару задач, называемую в линейном программировании двойственной парой.

За исходную задачу можно взять любую задачу из этой пары, для дальнейшего расчета это несущественно.

Составим таблицу, которая облегчает составление математической модели двойственной задачи:

	x_1	x_2	x_3	...	x_n	b_1
y_1	a_{11}	a_{12}	a_{13}	...	a_{1n}	b_1
y_2	a_{21}	a_{22}	a_{23}	...	a_{2n}	b_2
y_3	a_{31}	a_{32}	a_{33}	...	a_{3n}	b_3
...
y_m	a_{m1}	a_{m2}	a_{m3}	...	a_{mn}	b_m
c_i	c_1	c_2	c_3	...	c_n	

В первой строке таблицы записываются все переменные исходной задачи.

В первом столбце таблицы – все переменные двойственной задачи.

В последней строке – коэффициенты целевой функции исходной задачи.

В последнем столбце - коэффициенты целевой функции двойственной задачи.

В прямоугольнике, ограниченном указанными строками и столбцами, записана матрица исходной задачи. Чтобы получить, например, первое огра-

значение двойственной задачи, надо найти сумму произведений чисел стоящих в столбце под x_1 , на соответствующие переменные первого столбца.

$$a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + \dots + a_{m1}y_m \geq c_1$$

Аналогично составляются и остальные ограничения для двойственной задачи. При этом устанавливается такое соответствие:

- 1) Переменной x_1 исходной задачи соответствует первое ограничение двойственной задачи, переменной x_2 – второе ограничение и т.д.
- 2) Переменной y_1 двойственной задачи соответствует первое ограничение исходной задачи, переменной y_2 – второе ограничение и т.д.

Выражение для целевой функции двойственной задачи получается как сумма произведений переменных первого столбца на соответствующие числовые значения последнего столбца.

Если система ограничений исходной задачи на максимум, кроме неравенства типа \leq , содержит неравенства типа \geq , то перед построением двойственной задачи левые и правые части неравенства типа \geq необходимо умножить на -1 , и поменять знак на \leq .

А в задаче на минимум неравенства типа \leq необходимо умножить на -1 (левые и правые части) и поменять знак на \geq .

Если в исходной задаче имеются ограничения, заданные неравенствами, то каждое из них заменяется двумя ограничениями неравенствами, а затем в зависимости от типа задач поступают, как было сказано выше.

Ограничения в исходной задаче на максимум должны быть типа \leq , а в задаче на минимум – типа \geq .

Итак, в рассмотренном случае минимальное значение целевой функции двойственной задачи f в точности равно максимальному значению целевой функции F исходной задачи. Это и верно в общем случае.

Теоремы двойственности:

Теорема 1: если одна из задач двойственной пары имеет оптимальное решение, то другая задача также имеет решение, причем максимальное зна-

чения целевой функции исходной задачи и минимальное значения целевой функции двойственной задачи численно равны.

Теорема 2: если в оптимальном плане исходной задачи значение какой-либо переменной строго >0 , то соответствующее ограничение двойственной задачи при подстановке в него оптимального плана становится равенством. Верно и обратное, если некоторое ограничение двойственной задачи при подстановке оптимального плана обращается в строгое неравенство, то соответствующее значение переменной решения исходной задачи обращается в ноль.

Сформулированные теоремы двойственности находят широкое применение. Эти теоремы позволяют, например, решение задачи линейного программирования (которые вызывают затруднение при реализации) свести к решению двойственной задачи. Такое сведение обычно полезно и выгодно, если число ограничений исходной задачи велико и значительно превышает число переменных x .

Если одно из ограничений имеет вид равенства, задача называется несимметричной.

Если все ограничения имеют вид неравенства задача называется симметричной.

Существенно отметить, что переменная двойственной задачи, соответствующая равенству системы ограничений исходной задачи, может принимать и отрицательное значение.

Теоремы двойственности оказываются справедливыми, как для симметричных, так и для несимметричных двойственных задач.

Тема 5. Нелинейное программирование - 2 часа

Задачи нелинейного программирования в отличие от задач линейного программирования общего решения не имеют.

Задача нелинейного программирования с ограничениями-неравенствами и условиями неотрицательности переменных имеет вид:

$$F(X) = F(x_1, \dots, x_j, \dots, x_n) \rightarrow \min \quad (1)$$

$$g_i = g(x_1, \dots, x_j, \dots, x_n) \leq b_i \quad (2)$$

$$x_j \geq 0 \quad (3)$$

$$i = 1, 2, \dots, m, \quad j = 1, 2, \dots, n$$

Данная оптимизационная модель является моделью нелинейного программирования, если целевая функция (1) или ограничения (2), или и то и другое нелинейны.

При графическом методе решения задач нелинейного программирования оптимальная точка X^* может находиться как на границе области, образованной ограничениями g_i , так и внутри этой области. Другой важной особенностью задач нелинейного программирования является их возможная многоэкстремальность. Наличие кроме глобального экстремума локальных экстремумов осложняет решение оптимизационной задачи.

В качестве задач нелинейного программирования обычно формулируются задачи проектирования оборудования (проектные) и технологии текстильного производства (производственные). В проектном варианте модели имеют место ограничения, отражающие следующие условия: требования к качественным характеристикам продукции, технологически допустимый диапазон режимных факторов и регламента обслуживания. В производственном варианте задач к ним добавляются конструктивные ограничения (по прочности и надежности узлов), а также ограничения, отражающие требования к производительности оборудования, расходу энергии, ресурсов и др. В качестве целевой функции (критерия оптимальности) выбирают: производительность оборудования, стоимость обработки единицы продукции, какой-либо обобщенный критерий, характеризующий качество продукции.

Графоаналитический метод решения задач нелинейного программирования:

- задачи с линейной целевой функцией и нелинейной системой ограничений;
- задачи с нелинейной целевой функцией и линейной системой ограничений;
- задачи с нелинейной целевой функцией и нелинейной системой ограничений;
- оптимизационные задачи нелинейного программирования с ограничениями типа линейных неравенств;
- оптимизационные задачи нелинейного программирования с ограничениями-равенствами и метод неопределенных множителей Лагранжа;
- методы штрафных функций;
- метод допустимых направлений;
- методы случайного поиска.

Тема 6. Решение оптимизационных задач специального вида – 2 часа

Диссоциативно-шаговый метод поиска оптимума

Часто в результате активного эксперимента, проводимого по матрицам (планам), в которых кодированные переменные (факторы) используются на трех уровнях (-1; 0; +1), получают полиномиальные модели второго порядка:

$$F(X) = F(x_1, \dots, x_j, \dots, x_n) = b_0 + \sum_{j=1}^n b_j x_j + \sum_{j=1}^n b_{jj} x_j^2 + \sum_{j \neq i} b_{ji} x_j x_i \quad (1)$$

Допустимая область для целевой функции $F(X)$ представляет собой гиперкуб - $-1 \leq x_j \leq +1$.

Диссоциативно-шаговый метод поиска оптимума, предложенный В.А.Вознесенским и А.Ф.Ковальчуком основан на двух принципах:

- 1) при $n-1$ переменных, находящихся на постоянных уровнях, гиперповерхность превращается в параболу;
- 2) закрепление $n-1$ переменных производится не на любых, а на оптимальных уровнях.

В основе диссоциативно-шагового метода лежит принцип диссоциации (распада) многомерной целевой функции $F(x_1, \dots, x_j, \dots, x_n)$ на n взаимосвязанных квазиодномерных целевых функций $W_j, j=1, \dots, n$ и шаговый анализ последних. При этом квазиодномерная модель на первом этапе выбирается так, чтобы она давала однозначный (или содержащий альтернативу) ответ по определению $x_{j\text{наиб}}$ или $x_{j\text{max}}$, обеспечивающий наибольшее значение $F(X)$. После подстановки $x_{j\text{наиб}}$ в оставшиеся квазиодномерные модели делается следующий шаг.

Метод динамического программирования

Метод динамического программирования, разработанный в середине 50-х годов американским математиком Р.Беллманом, предназначен для решения задач нелинейного программирования, обладающих определенными структурными особенностями, позволяющими применять этот метод. Применение метода динамического программирования для этого класса задач дает значительные преимущества перед другими методами решения задач нелинейного программирования.

Сущность метода динамического программирования заключается в разделении исходной оптимизационной задачи на последовательность более простых, рекуррентно связанных между собой оптимизационных задач. При этом решение одной из задачи открывает возможность решения второй задачи, решение второй – возможность решения третьей и т. д.

Таким образом, решение исходной задачи разбивается на отдельные этапы – шаги, связанные между собой в цепь. Особенность метода динамического программирования состоит в том, что решение каждой отдельной задачи дает не единственное решение, а некоторое множество «условно» оптимальных решений, через которые и устанавливается связь между этапами. Поэтому после решения всех задач, на которые была разделена исходная задача оптимизации, необходимо совершить второй «проход» по этим задачам, чтобы из совокупности «условно» оптимальных решений выделить оптимальное решение исходной задачи.

2.4 Лабораторные занятия. Самостоятельная работа студентов

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА N 1

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПАРАБОЛИЧЕСКОЙ ОДНОФАКТОРНОЙ РЕГРЕССИОННОЙ МОДЕЛИ (МОДЕЛИ ВТОРОГО ПОРЯДКА)

Параболические однофакторные регрессионные модели имеют вид:

$$Y = a_0 + a_1 \cdot x + a_{11} \cdot x^2$$

Они описывают многие явления и процессы в текстильной и легкой промышленности.

Для рассматриваемой модели коэффициенты регрессии можно определить по методу наименьших квадратов, решив систему уравнений:

$$\begin{cases} a_0 N + a_1 \sum_{i=1}^N x + a_{11} \sum_{i=1}^N x^2 = \sum_{i=1}^N y \\ a_0 \sum_{i=1}^N x + a_1 \sum_{i=1}^N x^2 + a_{11} \sum_{i=1}^N x^3 = \sum_{i=1}^N xy \\ a_0 \sum_{i=1}^N x^2 + a_1 \sum_{i=1}^N x^3 + a_{11} \sum_{i=1}^N x^4 = \sum_{i=1}^N x^2 y \end{cases}$$

где N - общее число опытов.

Величины $\sum_{i=1}^N x$, $\sum_{i=1}^N x^2$, $\sum_{i=1}^N xy$ и т.д., входящие в уравнения, определяются по данным эксперимента и для удобства расчета сводятся в таблицу:

N	x	y	x ²	x ³	x ⁴	xy	x ² y
1							
2							
3							
4							
...							
Сумма:							

Для решения системы уравнений:

Ввести ограничения для всех уравнений системы. Если при вводе задачи возникает необходимость в изменении или удалении внесенных ограничений, то это делается с помощью команд **Изменить...**, **Удалить**.

После ввода последнего ограничения вместо **Добавить...** ввести **ОК**.

После нажатия кнопки **Выполнить** найденные значения переменных x_1 , x_2 , x_3 будут находиться в искомым ячейках.

Задание.

1. Найти зависимость между коэффициентом крутки α льняной пряжи и средней разрывной нагрузкой P (в дан) по данным эксперимента:

2. Определить уравнение регрессии и оценить его достоверность для исходных данных, приведенных в таблице, используя функцию **ЛИНЕЙН()** и функцию **ЛГРФПРИБЛ()**.

Таблица 7

Зависимость прочности от крутки пряжи

α	P
0,5	3,5
0,6	4,8
0,8	6,5
1,0	7,1
1,2	6,6
1,3	5,8
1,5	4,1

3. Определить коэффициенты уравнения регрессии в форме пользователя. Сделать выводы.

4. Построить график по данным эксперимента, построить на графике линию тренда и вывести уравнение регрессии и коэффициент детерминации.

5. Найти коэффициент крутки α , при котором льняная пряжа имеет наибольшую прочность.

Самостоятельная работа

1. Определить уравнение регрессии с помощью функций ЛИНЕЙН(), ЛГРФПРИБЛ() и в форме пользователя. Определить границы, в которых справедливо данное уравнение.
2. Оценить адекватность полученной регрессионной зависимости (R^2).
3. Определить расчетные значения y по полученному уравнению регрессии. Сравнить с фактическими значениями y , сделать выводы.
4. Определить достоверность величины коэффициента детерминации R^2 . Сделать выводы.
5. Определить коэффициенты Стьюдента для всех коэффициентов регрессии: b и m_i .
6. Определить значение вероятности β для всех коэффициентов регрессии.
7. Определить вероятность того, что значения коэффициентов регрессии достоверны. Сделать выводы.
8. Определить коэффициенты регрессии для данной математической модели по методу наименьших квадратов, решив систему уравнений.
9. Построить график для данной зависимости, построить на графике линию тренда и вывести уравнение регрессии и коэффициент детерминации.
10. Найти оптимальные значения величины X .
11. Сравнить полученные математический зависимости, сделать выводы.

Для следующих вариантов задания:

Вариант 1

Зависимость коэффициента вариации по относительному разрывному удлинению от величины крутки для полипропиленовых швейных ниток из пряжи

25 текс x2 в 2 сложения

Заправочная крутка, K, кр/м	100	150	200	250	300	350	400	450	500
Коэффициент вариации по относительному разрывному удлинению, CV _ε , %	8,429	7,258	6,336	6,118	6,019	6,587	6,93	7,011	7,032

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА N 2

ЛОГИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

В Excel имеются логические функции, список которых можно увидеть, нажав на кнопку **Мастера функций** и выбрав в диалоговом окне функцию **Логические**.

При решении ряда задач значение ячейки необходимо вычислять одним из нескольких способов в зависимости от того, выполняется или нет некоторое условие или несколько условий.

1. Логическая функция ЕСЛИ

ЕСЛИ (<логическое выражение>;<выражение1>;<выражение2>),

где <логическое выражение> - условное выражение, которое принимает одно из двух значений: “Истина” или “Ложь”;

<выражение1> - значение, которое принимает функция, если <логическое выражение> = “Истина”;

<выражение2> - значение, которое принимает функция, если <логическое выражение> = “Ложь”.

Пример.

В ячейку A3 нужно записать максимальное из двух чисел, содержащихся в ячейках A1 и A2. Формула, введенная в ячейку A3, будет иметь вид:

=ЕСЛИ(A1>A2;A1;A2)

В качестве <выражения1> или <выражения2> можно записать вложенную функцию **ЕСЛИ**. Число вложенных **ЕСЛИ** не должно превышать семи. На месте логического выражения можно использовать одну из логических функций **И** или **ИЛИ**.

2. Логическая функция И

И (<логическое выражение 1>;<логическое выражение2>;...),

В скобках может быть указано до пятидесяти логических выражений. Функция **И** принимает значение “Истина”, если одновременно все логические выражения истинны.

Пример.

Определить, входит ли в заданный диапазон (5;10) число, содержащееся в ячейке А1. Ответ должен быть получен в ячейке Н1. Формула, введенная в ячейку Н1, будет иметь вид:

= **ЕСЛИ** (**И** (А1>5; А1<10); “число принадлежит заданному диапазону”; “число не принадлежит заданному диапазону”)

3. Логическая функция ИЛИ

ИЛИ (<логическое выражение 1>;<логическое выражение2>;...),

В скобках может быть указано также до пятидесяти логических выражений. Функция **ИЛИ** принимает значение “Истина”, если хотя бы одно из логических выражений истинно.

Пример.

Определить, входит ли в диапазон (∞ ; 5) и (10; ∞) число, содержащееся в ячейке А1. Ответ должен быть получен в ячейке Н1. Формула, введенная в ячейку Н1, будет иметь вид:

= **ЕСЛИ** (**ИЛИ** ($A1 < 5$; $A1 > 10$); “число принадлежит заданному диапазону”; “число не принадлежит заданному диапазону”).

Задание.

Найти крутку, при которой льняная пряжа имеет наибольшую прочность, используя уравнение, полученное в лабораторной работе № 1. Поиск вести с точностью $\varepsilon=0,1$ на интервале $(0;2)$, используя метод золотого сечения, метод деления пополам, метод с использованием производной.

Самостоятельная работа

1. Для математической модели, найденной при выполнении самостоятельной работы в лабораторной работе №1, найти оптимальные значения переменной X (*min* или *max* в зависимости от условий задачи). Поиск вести с точностью $\varepsilon=0,1$ на интервале $(min; max)$, используя метод золотого сечения, метод деления пополам, метод с использованием производной.

2. В тетрадь записать алгоритм для метода золотого сечения, метода деления пополам и метода с использованием производной с использованием логических функций.

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА N 3

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Задание.

Определить, в каком количестве надо выпускать продукцию четырех типов, для изготовления которой требуются ресурсы трех видов: трудовые, сырье, финансы, чтобы прибыль, полученная от реализации данной продукции, была максимальной. Количество ресурса каждого вида, необходимое для выпуска единицы продукции данного типа, а также прибыль, получаемая от реализации единицы каждого типа продукции, и наличие располагаемого ресурса приведены в табл. 1.

Производственное задание

Ресурс	Продукция 1	Продукция 2	Продукция 3	Продукция 4	Наличие
Трудовые	1	1	1	1	16
Сырье	6	5	4	3	110
Финансы	4	6	10	13	100
Прибыль	60	70	120	130	max

1. Построение математической модели

Для решения поставленной задачи необходимо построить ее математическую модель.

1. Выберем целевую функцию задачи: F – прибыль, полученная от реализации всей продукции.

2. Выберем управляемые переменные:

X_1 - количество выпускаемой продукции 1-го типа;

X_2 - количество выпускаемой продукции 2-го типа;

X_3 - количество выпускаемой продукции 3-го типа;

X_4 - количество выпускаемой продукции 4-го типа.

3. Составим ограничения для всех видов ресурса:

$$X_1 + X_2 + X_3 + X_4 \leq 16$$

$$6X_1 + 5X_2 + 4X_3 + 3X_4 \leq 110$$

$$4X_1 + 6X_2 + 10X_3 + 13X_4 \leq 100$$

$$X_1 \geq 0, X_2 \geq 0, X_3 \geq 0, X_4 \geq 0 \text{ – условие неотрицательности.}$$

4. Составим целевую функцию задачи:

$$F = 60X_1 + 70X_2 + 120X_3 + 130X_4 \rightarrow \max$$

2. Ввод условий задачи

1. Для решения данной задачи в EXCEL необходимо ввести условия в следующей форме:

			<u>Переменные</u>				
	X_1	X_2	X_3	X_4			
Значение							
Нижн.гр.							
Верх.гр.							
Коэф.в ЦФ					ЦФ		
			<u>Ограничения</u>				
					Левая часть	Знак	Правая часть
Трудовые							
Сырье							
Финансы							

Весь текст в таблице является комментарием и на решение задачи не влияет.

2. В созданную форму необходимо ввести исходные данные:

			<u>Переменные</u>				
	X_1	X_2	X_3	X_4			
<u>Значение</u>							
Нижн.гр.							
Верх.гр.							
<u>Коэф.в ЦФ</u>	60	70	120	130	<u>ЦФ</u>		
			<u>Ограничения</u>				
					Левая часть	Знак	Правая часть
Трудовые	1	1	1	1		≤	16
Сырье	6	5	4	3		≤	110
Финансы	4	6	10	13		≤	100

3. В созданную форму ввести зависимости из математической модели.

3.1. Ввести зависимость для целевой функции. Для этого поместить курсор в ячейку, обозначенную ЦФ, вызвать **Мастер функций**, в окне Категория выбрать **Математические**, в окне **Функции** выбрать СУММПРОИЗВ:

в массив 1 - ввести номера ячеек, где будут находиться **Значения** переменных X_1, X_2, X_3, X_4 ;

в массив 2 - номера ячеек, где находятся **Коэф.в ЦФ** этих переменных.

3.2. Ввести зависимости для левых частей ограничений. Для этого поместить курсор в ячейку для левой части соответствующего ограничения, выбрать функцию СУММПРОИЗВ:

в массив 1 - ввести номера ячеек, где будут находиться **Значения** переменных X_1, X_2, X_3, X_4 ;

в массив 2 - номера ячеек, где находятся коэффициенты при данных переменных в соответствующих ограничениях.

3. Поиск решения

1. Для поиска решения установить курсор в ячейку **ЦФ**, в главном меню выбрать пункт **Сервис, Поиск решения**. На экране появится диалоговое окно **Поиск решения**.

2. В окне **Установить целевую ячейку** – ввести адрес ячейки **ЦФ**. Выбрать максимальное или минимальное значение целевой функции.

3. В поле **Изменяя ячейки** – ввести адреса ячеек, где будут находиться вместо **Значения** переменных X_1, X_2, X_3, X_4 .

4. В окне **Ограничения** с помощью кнопки **Добавить...** последовательно ввести все ограничения задачи линейного программирования. В данной задаче левая часть ограничений по ресурсам должна быть \leq правой части. Последовательно устанавливая курсор в ячейки, где будут находиться **Значения** переменных X_1, X_2, X_3, X_4 . ввести условие неотрицательности переменных. После ввода последнего ограничения **Добавить...** ввести **ОК**. Если при вводе задачи возникает необходимость в изменении или удалении внесенных ограничений, то это делается с помощью кнопок **Изменить...**, **Удалить**.

4. Решение задачи

После ввода данных выбрать кнопку **Параметры...**, на экране диалоговое окно **Параметры поиска решения**. С помощью команд, находящихся в этом диалоговом окне, можно вводить условия для решения задач оптимизации всех классов. Вместе с тем, команды, используемые по умолчанию, подходят для решения большей части практических задач.

Максимальное время служит для назначения времени в секундах, выделяемого на поиск решения задачи. В поле можно ввести время, не превышающее 32767 с (более 9 часов). Значение 100 с, используемое по умолчанию, подходит для решения большинства задач.

Предельное число итераций служит для назначения числа итераций. Используемое по умолчанию значение 100 подходит для решения большинства задач.

Установить флажок **Линейная модель**, что обеспечивает применение симплекс-метода.

После задания всех параметров поиска решения выбрать **ОК**.

В диалоговом окне **Поиск решения** выбрать кнопку **Выполнить**. На экране появится диалоговое окно **Результаты поиска решения**: Решение найдено. Все ограничения и условия оптимальности выполнены. После нажатия **ОК** результаты оптимального решения появятся в исходной таблице:

$$X_1=10, X_2=0, X_3=6, X_4=0.$$

При этом максимальная прибыль будет составлять $F=1320$, а количество использованных ресурсов равно:

трудовых – 16;

сырья – 84;

финансов – 100.

Таково оптимальное решение рассматриваемой задачи распределения ресурсов.

5. Анализ оптимального решения

Анализ оптимального решения начинается после успешного решения задачи, когда на экране появляется диалоговое окно **Результаты поиска решения**. С помощью этого диалогового окна можно вызвать отчеты трех типов:

- результаты;
- устойчивость;
- пределы.

Все отчеты вызываются на новом листе, на ярлычке которого указано название отчета.

Отчет по результатам состоит из трех таблиц:

- таблица 1 приводит сведения о целевой функции. В столбце Исходно приведены значения целевой функции до начала вычислений;
- таблица 2 приводит значения искомых переменных, полученные в результате решения задачи;
- таблица 3 показывает результаты оптимального решения для ограничений и для граничных условий.

Для ограничений в графе Формула приведены зависимости, которые были введены в диалоговое окно Поиск решения. В графе Значение приведены величины использованного ресурса; в графе Разница показано количество неиспользованного ресурса. Если ресурс используется полностью, то в графе Состояние указывается «связанное»; при неполном использовании ресурса в этой графе указывается «не связан».

Для Граничных условий приводятся аналогичные величины с той лишь разницей, что вместо величины неиспользованного ресурса показана разность между значением переменной в найденном оптимальном решении и заданным для нее граничным условием.

Отчет по устойчивости состоит из двух таблиц.

В таблице 1 приводятся следующие значения для переменных:

- результат решения задачи;

- редуцированная стоимость, т.е. дополнительные двойственные переменные, которые показывают, насколько изменится целевая функция при принудительном включении единицы этой продукции в оптимальное решение;
- коэффициенты целевой функции;
- предельные значения приращения коэффициентов целевой функции, при которых сохраняется набор переменных, входящих в оптимальное решение.

В таблице 2 приводятся аналогичные значения для ограничений:

- величина использованных ресурсов;
- теневая цена, т.е. двойственная оценка, которая показывает, как изменится целевая функция при изменении ресурсов на единицу;
- значения приращения ресурсов, при которых сохраняется оптимальный набор переменных, входящих в оптимальное решение.

Отчет по пределам показывает, в каких пределах может изменяться выпуск продукции, вошедшей в оптимальное решение, при сохранении структуры оптимального решения:

- приводится значение X_i в оптимальном решении;
- приводятся нижние пределы изменения значений X_i .

Кроме этого, в отчете указаны значения целевой функции при выпуске данного типа продукции на нижнем пределе. Так, при значении 720 видно, что $F=c_1 X_1 + c_3 X_3=60*0+120*6=720$.

Далее приводятся верхние пределы изменения X_i и значения целевой функции при выпуске продукции, вошедшей в оптимальное решение на верхних пределах. Поэтому везде

$$F=c_1 X_1 + c_3 X_3=60*10+120*6=1320.$$

Самостоятельная работа

1. Составить математическую модель задачи линейного программирования.

2. Решить задачу линейного программирования с помощью электронной таблицы Excel.

3. Получить и проанализировать отчеты по результатам, по устойчивости и по пределам.

4. Решить задачу линейного программирования графическим методом.

5. Решить задачу линейного программирования симплекс-методом.

6. Составить двойственную задачу линейного программирования.

7. Решить двойственную задачу линейного программирования с помощью электронной таблицы Excel.

8. Решить двойственную задачу линейного программирования симплекс-методом.

Для следующих вариантов задания:

Вариант 1

Два трикотажных предприятия производят продукцию из пряжи 3-х типов. Запасы пряжи для этих предприятий составляют соответственно:

1-го типа – 50 кг, 2-го типа – 25 кг, 1-го типа – 10 кг.

Первое предприятие для изготовления условной единицы продукции по цене 10 \$, использует соответственно 0,2 кг, 0,1 кг и 0,2 кг пряжи указанных типов соответственно.

Для второго предприятия цена продукции равна 15 \$, а удельные потребности в пряже составляют 0,4 кг, 0,3 кг и 0,1 кг пряжи указанных типов соответственно.

Определить плановые задания для предприятий, которые обеспечивали бы максимальную стоимость производимой продукции.

2.5. Практические занятия

1. Аналитический метод определения оптимума в задачах безусловной одномерной оптимизации – 2 часа.

2. Численные методы определения оптимума. Метод деления пополам или дихотомический поиск. Метод золотого сечения. Метод с использованием производной целевой функции – 4 часа.

3. Аналитический метод определения оптимума в задачах безусловной многомерной оптимизации – 2 часа.

4. Численные методы определения оптимума. Симплекс-метод – 2 часа.

5. Геометрический метод решения задач линейного программирования – 2 часа.

6. Симплекс-метод решения задач линейного программирования – 2 часа.

7. Двойственная задача линейного программирования – 2 часа.

8. Решение транспортной задачи методом линейного программирования – 2 часа.

9. Диссоциативно-шаговый метод определения оптимума многомерной целевой функции – 2 часа.

2.6. Курсовая работа

Курсовая работа по данной дисциплине представляет собой разработку одной из реальных оптимизационных задач швейного производства с целью практического применения полученных знаний при решении конкретных задач. Цель курсовой работы заключается в построении математической модели процесса и выборе наиболее эффективных математических методов оптимизации.

Курсовая работа содержит необходимые в соответствии с требованиями нормоконтроля разделы.

Структура курсовой работы

ВВЕДЕНИЕ(указывается цель и задачи курсовой работы)

1. МОДЕЛИРОВАНИЕ И ОПТИМИЗАЦИЯ ОДНОМЕРНОЙ ЦЕЛЕВОЙ ФУНКЦИИ

- 1.1 Моделирование одномерной целевой функции
 - 1.1.1 Определение уравнения линейной регрессии (расчет коэффициентов регрессии, оценка достоверности уравнения регрессии, оценка достоверности коэффициентов регрессии)
 - 1.1.2 Определение уравнения нелинейной регрессии
 - 1.1.3 Определение уравнения нелинейной регрессии в форме пользователя (графическое представление уравнения регрессии)
- 1.2 Оптимизация одномерной целевой функции
 - 1.2.1 Аналитический метод определение оптимума одномерной целевой функции
 - 1.2.2 Численный метод деления пополам определение оптимума одномерной целевой функции
 - 1.2.3. Численный метод золотого сечения определение оптимума одномерной целевой функции
 - 1.2.4 Численный метод с использованием производной определение оптимума одномерной целевой функции
 - 1.2.5. Численный метод Фибоначчи определение оптимума одномерной целевой функции
 - 1.2.6 Определение оптимума одномерной целевой функции с помощью электронной таблицы Excel
- 2. МОДЕЛИРОВАНИЕ И ОПТИМИЗАЦИЯ МНОГОМЕРНОЙ ЦЕЛЕВОЙ ФУНКЦИИ
 - 2.1 Моделирование многомерной целевой функции
 - 2.1.1 Определение уравнения линейной регрессии (расчет коэффициентов регрессии, оценка достоверности уравнения регрессии, оценка достоверности коэффициентов регрессии)
 - 2.1.2 Определение уравнения нелинейной регрессии
 - 2.1.3 Определение уравнения нелинейной регрессии в форме пользователя (графическое представление уравнения регрессии)
 - 2.2 Оптимизация многомерной целевой функции

2.2.1 Аналитический метод определение оптимума многомерной целевой функции

2.2.2 Диссоциативно-шаговый метод определение оптимума многомерной целевой функции

2.2.3 Определение оптимума многомерной целевой функции с помощью электронной таблицы Excel

3. МОДЕЛИРОВАНИЕ И ОПТИМИЗАЦИЯ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ С ПОМОЩЬЮ МЕТОДА ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

3.1 Построение математической модели задачи линейного программирования

3.2 Графический метод решения задачи линейного программирования

3.3 Симплекс-метод решения задачи линейного программирования

3.4 Решение двойственной задачи линейного программирования

3.5 Решение задачи линейного программирования с помощью электронной таблицы Excel

ЗАКЛЮЧЕНИЕ (делаются выводы по работе)

ПРИЛОЖЕНИЯ

ГРАФИК ВЫПОЛНЕНИЯ КУРСОВОЙ РАБОТЫ

№ недели	Дата	Раздел курсовой работы
1,2	1.09-10.09	Выдача задания к курсовой работе
3,4	11.09-23.09	1.1 Моделирование одномерной целевой функции 1.2 Оптимизация одномерной целевой функции
		Контрольная точка 1
5,6	25.09-7.10	2.1 Моделирование многомерной целевой функции
7,8	9.10-21.10	2.2 Оптимизация многомерной целевой функции
		Контрольная точка 2
9,10	23.10-4.11	3.1 Построение математической модели задачи линейного программирования 3.2 Графический метод решения задачи

		линейного программирования
11,12	6.11-18.11	3.3 Симплекс-метод решения задачи линейного программирования
13,14	20.11-2.12	3.4 Решение двойственной задачи линейного программирования
15	4.12-9.12	3.5 Решение задачи линейного программирования с помощью электронной таблицы Excel
		Контрольная точка 3
16	11.12-16.12	Оформление курсовой работы
17,18	18.12-30.12	Защита курсовой работы

2.7. Контроль знаний студентов

2.7.1. Перечень форм контроля

Промежуточный контроль знаний студентов осуществляется при подготовке к работе, выполнении и сдаче каждого задания лабораторной работы, а так же во время контрольных точек при выполнении курсовой работы.

В качестве заключительного контроля знаний студентов в 9 семестре служат курсовая работа и экзамен. К экзамену допускаются студенты при выполнении и защите всех лабораторных работ.

2.7.2. Оценка знаний студентов

Нормы оценки знаний предполагают учет индивидуальных особенностей студентов, дифференцированный подход к обучению, проверке знаний, умений.

В устных ответах студентов на экзамене и при защите курсовой работы учитываются: глубина знаний, полнота знаний и владение необходимыми умениями (в объеме полной программы); осознанность и самостоятельность применения знаний и способов учебной деятельности, логичность изложения материала, включая обобщения, выводы (в соответствии с заданным вопросом), соблюдение норм литературной речи.

2.7.3. Критерии оценки

Оценка знаний на экзамене и при защите курсовой работы производится по четырех балльной системе.

Оценка "пять" – материал усвоен в полном объеме; изложен логично; основные умения сформулированы и устойчивы; выводы и обобщения точны.

Оценка "четыре" – в усвоении материала незначительные пробелы, изложение недостаточно систематизированное; отдельные умения недостаточно устойчивы; в выводах и обобщениях допускаются некоторые неточности.

Оценка "три" – в усвоении материала имеются пробелы: материал излагается несистематизированно; отдельные умения недостаточно сформулированы; выводы и обобщения аргументированы слабо; в них допускаются ошибки.

Оценка "два" – основное содержание материала не усвоено, выводов и обобщений нет.

2.8. Перечень экзаменационных вопросов

1. Математическая модель технологического процесса. Методы получения математических моделей технологических процессов.
2. Моделирование технологических процессов на ЭВМ.
3. Математическая модель и виды моделирования.
4. Основные понятия, используемые в задачах оптимизации технологических процессов.
5. Критерии оптимизации. Классификация критериев оптимизации.
6. Виды оптимизационных задач.
7. Основные классы задач оптимизации и методы их решения.
8. Аналитический метод определения оптимума в задачах безусловной одномерной оптимизации.
9. Численные методы определения оптимума. Метод деления пополам или дихотомический поиск.
10. Численные методы определения оптимума. Метод золотого сечения.

11. Численные методы определения оптимума. Метод с использованием производной целевой функции.

12. Аналитический метод определения оптимума в задачах безусловной многомерной оптимизации.

13. Симплекс-метод поиска оптимума многомерной целевой функции.

14. Геометрический метод решения задач линейного программирования.

15. Симплекс-метод решения задач линейного программирования.

16. Двойственная задача линейного программирования и ее применение.

17. Решение транспортной задачи методом линейного программирования.

18. Нелинейное программирование.

19. Диссоциативно-шаговый метод поиска оптимума.

20. Метод динамического программирования.

Пример задач к экзамену

Для выпуска двух видов изделий используется три вида ресурсов. Известны запасы ресурсов, количество ресурсов и прибыль на единицу продукции

<i>Вид сырья</i>	Запасы ресурсов	Количество ресурсов на единицу продукции	
		P1	P2
C1	20	2	5
C2	40	8	5
C3	30	5	6
Прибыль от единицы продукции		50	40

Необходимо так спланировать производство, чтобы прибыль, получаемая от реализации продукции, была наибольшей.

1. Решить задачу графическим методом.

2. Решить задачу симплекс-методом.

3. Решить задачу с использованием Excel.

3. УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКИЕ МАТЕРИАЛЫ ПО ДИСЦИПЛИНЕ.

РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

3.1. Основная литература

1. Севостьянов П.А. Математические методы обработки данных. Учебное пособие для вузов, - М.: МГТУ им. А.Н.Косыгина, 2004.
2. Севостьянов А.Г., Севостьянов П.А. Моделирование технологических процессов,- М.: Легкая и пищевая промышленность, 1984.
3. Севостьянов А.Г., Севостьянов П.А. Оптимизация механико-технологических процессов текстильной промышленности,- М.: Легпромбытиздат, 1991.
4. Вентцель Е.С. Теория вероятностей и ее инженерное приложение: Учебное пособие. Рек. МО РФ. - М.: Высшая школа, 2000.

3.2. Дополнительная литература

1. Севостьянов А.Г. Методы и средства исследования механико-технологических процессов текстильной промышленности, - М.: Легкая и пищевая промышленность, 1980.
2. Тюрин Ю.Н., Макаров А.А. Статистический анализ данных на компьютере/ Под ред. Фигурнова В.Э. - М.: ИНФРА, 1998.
3. Орвис В.Дж. EXCEL для ученых, инженеров и студентов: Пер. с англ. - Киев: Юниор, 1999.
4. Рыжиков Ю.И. Решение научно-технических задач на персональном компьютере: Для студентов и инженеров. -Спб.: КОРОНА принт, 2000.
5. Васильев О.В., Аргучинцев А.В. Методы оптимизации в задачах и упражнениях: Учебное пособие. - М.: Физматлит, 1999.
6. Н.Джонсон, Ф.Лион Статистика и планирование эксперимента в технике и науке. Методы обработки данных.- М.: Издательство «Мир», 1990.

3.3 Методическое обеспечение дисциплины

1. Абакумова И.В., Рыбакова Л.В., Садовская М.Н. Построение математических моделей средствами Excel. Учебно-методическое пособие. Амурский гос.ун-т, Благовещенск, 2000.
2. Абакумова И.В., Тибенко Т.А., Сухова Т.Н. Обработка данных средствами Excel. Учебно-методическое пособие. Амурский гос.ун-т, Благовещенск, 2006.

3.4 Технические средства обеспечения дисциплины

- 1.Компьютер.
- 2.Электронная таблица MS Excel.

4. УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКАЯ КАРТА ДИСЦИПЛИНЫ ДЛЯ СПЕЦИАЛЬНОСТИ 260704

9 семестр

№ недели	№ темы лекции	Вопросы, рассматриваемые в лекции	№ практического занятия	№ лабораторной работы	Самостоятельная работа студентов		
					содержание	часы	форма контроля
1	2	3	4	5	6	7	8
1, 2	1	Общие вопросы методов оптимизации технологических процессов	1	1	1. Построение математической модели по индивидуальному заданию. 2. Оформление отчета в тетради 3. Выполнение индивидуального практического задания	6	Защита лабораторной работы с предоставлением отчета и индивидуального задания.
3, 4, 5, 6	2	Методы безусловной одномерной оптимизации целевой функции	2	1, 2	1. Построение математической модели по индивидуальному заданию. 2. Оформление отчета в тетради 3. Выполнение индивидуального практического задания	8	Защита лабораторной работы с предоставлением отчета и индивидуального задания.
7, 8 9, 10	3	Методы безусловной оптимизации многомерной целевой функции	3, 4	2	1. Расчет оптимальных значений математической модели. 2. Оформление отчета в тетради. 3. Выполнение индивидуального практического задания	8	Защита лабораторной работы с предоставлением отчета и индивидуального задания.
11, 12 13, 14	4	Линейное программирование	5, 6	3	1. Построение математической модели по индивидуальному заданию. 2. Оформление отчета в тетради 3. Выполнение индивидуального практического задания	8	Защита лабораторной работы с предоставлением отчета и индивидуального задания.
15, 16	5	Нелинейное программирование	7, 8	3	1. Построение математической модели по индивидуальному заданию. 2. Оформление отчета в тетради 3. Выполнение индивидуального практического задания	8	Защита лабораторной работы с предоставлением отчета и индивидуального задания.
17, 18	6	Решение оптимизационных задач специального вида	9	3	1. Построение математической модели по индивидуальному заданию. 2. Оформление отчета в тетради 3. Выполнение индивидуального практического задания	7	Защита лабораторной работы с предоставлением отчета и индивидуального задания.

СОДЕРЖАНИЕ

1. Цели и задачи дисциплины, ее место в учебном процессе	3
2. Содержание дисциплины	5
2.1 Требование стандарта	5
2.2 Наименование тем, объем (в часах) лекционных, лабораторных занятий и самостоятельной работы	5
2.3 План-конспект лекций	6
2.4 Лабораторные занятия. Самостоятельная работа студентов	26
Лабораторная работа № 1. Определение параболической одно-факторной регрессионной модели (модели второго порядка)	26
Лабораторная работа № 2. Логические функции	30
Лабораторная работа № 3. Решения задач линейного программирования	32
2.5. Практические занятия	39
2.6. Курсовая работа	40
2.7. Контроль знаний студентов	43
2.7.1. Перечень форм контроля	43
2.7.2. Оценка знаний студентов	43
2.7.3. Критерии оценки	43
2.8. Перечень экзаменационных вопросов	44
3. Учебно-методические материалы по дисциплине. Рекомендуемая литература	46
3.1. Основная литература	46
3.2. Дополнительная литература	46
3.3 Методическое обеспечение дисциплины	47
3.4 Технические средства обеспечения дисциплины	47
4. Учебно-методическая карта дисциплины для специальности 260704	48

Ирина Валентиновна Абакумова,

доцент кафедры конструирования и технологии одежды АмГУ

Оптимизация технологических процессов

Учебно-методический комплекс по дисциплине для специальности 260704 –
«Технология текстильных изделий»
