Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Амурский государственный университет»

Институт компьютерных и инженерных наук

Кафедра математического анализа и моделирования

ИНДИВИДУАЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ ПО ТЕМЕ «СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ»

Благовещенск 2024

ББК
В 60

Рекомендовано
учебно-методическим советом университета

Рецензент:

Юрьева Т.А., зав. каф. общей математики и информатики АмГУ, канд.пед.наук., доц.

Составитель : Е. М. Веселова
Индивидуальные задания по теме «Системы линейных алгебраических уравнений»: практикум /Амур. гос. ун-т, Ин-т компьютер. и инж. наук, Каф. мат. анализа и моделирования; сост. Е.М. Веселова. – Благовещенск: АмГУ, 2024. – 32 с.

В практикуме представлены варианты заданий для индивидуальных домашних работ по теме «Системы линейных алгебраических уравнений», изучаемой в рамках раздела «Элементы линейной алгебры» по дисциплине «Линейная алгебра и теория матриц». Даны методические указания по выполнению индивидуальных заданий, приведена краткие теоретические сведения по теме и подробные решения практических задач.

Практикум составлен в соответствии с рабочей программой дисциплины «Линейная алгебра и теория матриц», предназначен для студентов, обучающихся по направлениям подготовки 09.03.01 Информатика и вычислительная техника, 09.03.02 Информационные системы и технологии, 09.03.04 Программная инженерия, 10.03.01 Информационная безопасность, а также может быть использовано студентами других направлений, изучающих вопросы решения систем линейных алгебраических уравнений.

ВВЕДЕНИЕ

Учебно-методическое пособие представляет собой комплекс индивидуальных домашних заданий по теме «Системы линейный алгебраических уравнений» по дисциплине «Линейная алгебра и теория матриц». В пособии изложен краткий теоретических материал по данной теме, а также приведены решения практических заданий. В комплекте индивидуальных домашних заданий сформулировано три задания, в каждом из которых по вариантам представлены практические примеры. Задания включают в себя примеры на решение неоднородных систем линейных алгебраических уравнений, которые имеют единственное решение и бесчисленное множество решений, а также однородные системы линейных алгебраических уравнений.

Важным фактором успешного усвоения материала является самостоятельная работа студента, которая заключается в выполнении индивидуальных домашних заданий. Варианты индивидуальных работ направлены на закрепление теоретического материала и основной задачей их выполнения является получение практических навыков, необходимых при решении систем линейных алгебраических уравнений. Навык решения систем линейных алгебраических уравнений может пригодиться в различных областях и практических заданиях.

1 ОБЩИЕ МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

Для успешного освоения темы «Системы линейных алгебраических указаний» требуются систематическая работа по изучению теоретического материала и рекомендуемой литературы, выполнению домашних заданий. Показателем освоения материала служит успешное решение задач предлагаемого индивидуального задания.

Основное внимание при изучении курса обращено на активную самостоятельную работу студентов, как при подготовке, так и в процессе проведения теоретических и практических занятий. Одна из важнейших целей и задач методической модели учебного процесса – развитие у студентов системного мышления.

Перед началом выполнения индивидуального задания необходимо освоить теоретические основы соответствующего раздела. Для лучшего усвоения теории материал разделен на отдельные темы, в которых излагаются различные методы решения систем линейных алгебраических уравнений. В каждом разделе приведены подробные решения практических примеров, тщательный разбор которых поможет студенту выполнить подобные задания из индивидуального варианта.

После проработки теоретического материала, рассмотрения решенных примеров, студент должен выполнить вариант индивидуального домашнего задания, номер которого указан ведущим преподавателем.

2 КРАТКИЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

1 Основные понятия

Определение: ***Системой линейных алгебраических уравнений***, содержащей m уравнений и n неизвестных, называется система вида

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}, \qquad (1)$$

где числа a_{ij}, $i = \overline{1,m}$, $j = \overline{1,n}$ называются ***коэффициентами*** системы, числа b_i называются ***свободными членами***.

Систему (1) можно записать в виде: $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i$, $i = \overline{1,m}$.

Также систему (1) можно записывать в компактной ***матричной форме***: $A \cdot X = B$, где A матрица коэффициентов системы называется ***основной матрицей***: $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}$ – матрица-столбец из неизвестных x_j,

$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_m \end{pmatrix}$ – матрица-столбец из свободных членов b_i.

Расширенной матрицей системы называется матрица системы, дополненная столбцом свободных членов:

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

<u>Определение</u>: ***Решением системы*** называется n значений неизвестных $x_j = c_j$, $j = \overline{1,n}$, при подстановке которых все уравнения системы обращаются в верные тождества.

<u>Определение</u>: Система линейных уравнений (1) называется ***совместной***, если она имеет хотя бы одно решение. Если система линейных уравнений не имеет ни одного решения, то она называется ***несовместной***.

<u>Определение</u>: Совместная система называется ***определенной***, если она имеет единственное решение, и ***неопределенной***, если она имеет более одного решения. В последнем случае каждое ее решение называется ***частным решением системы***. Совокупность всех частных решений называется ***общим решением***.

Решить систему – это значит выяснить, совместна она или несовместна. Если система совместна, найти ее общее решение.

<u>Определение</u>: Две системы линейных уравнений называются ***эквивалентными (равносильными)***, если каждое решение одной системы является решением другой системы, т.е. они имеют одно и то же общее решение.

Над системами можно совершать элементарные преобразования, приводящие к новым системам равносильным данной.

<u>Определение</u>: Элементарными преобразованиями системы (1) называются:

1) умножение i-го уравнения на число $\lambda \neq 0$ ($i = \overline{1,m}$);

2) прибавление к i-му уравнению j-го уравнения, умноженного на число $\lambda \neq 0$;

3) перестановка i-го и j-го уравнений;

4) уравнения вида $0x_1 + 0x_2 + \ldots + 0x_n = 0$ можно удалять из системы.

2 Правило Крамера

Пусть дана система n линейных уравнений с n неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ .... \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

Или ***в матричной форме***: $A \cdot X = B$.

Основная матрица такой системы квадратная. Определитель этой матрицы называется ***определителем системы***:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & ... & a_{1n} \\ ... & ... & ... \\ a_{n1} & ... & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Если определитель системы отличен от нуля, то система называется ***невырожденной***.

Найдем решение данной системы уравнений в случае $\Delta \neq 0$.

Т.к. $\Delta = \det A \neq 0$, то $\exists A^{-1}$ – обратная матрица.

$$A^{-1} \cdot (A \cdot X) = A^{-1} \cdot B, \ (A^{-1} \cdot A) \cdot X = A^{-1} \cdot B, \ E \cdot X = A^{-1} \cdot B, \ X = A^{-1} \cdot B. \quad (2)$$

Отыскание решения системы по формуле (2) называют ***матричным способом*** решения системы.

Применяя формулу для вычисления обратной матрицы, получим равенство:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & ... & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & ... & A_{n2} \\ ... & ... & ... & ... \\ A_{1n} & A_{2n} & ... & A_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ ... \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Выполним умножение матриц:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & ... & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & ... & A_{n2} \\ ... & ... & ... & ... \\ A_{1n} & A_{2n} & ... & A_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ ... \\ b_n \end{pmatrix} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} A_{11}b_1 + & A_{21}b_2 + & ... & + A_{n1}b_n \\ A_{12}b_1 + & A_{22}b_2 + & ... & + A_{n2}b_n \\ ... & ... & ... & ... \\ A_{1n}b_1 + & A_{2n}b_2 + & ... & + A_{nn}b_n \end{pmatrix} =$$

$$=\frac{1}{|A|}\begin{pmatrix}|A_1|\\|A_2|\\\ldots\\|A_n|\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{|A_1|}{|A|}\\\frac{|A_2|}{|A|}\\\ldots\\\frac{|A_n|}{|A|}\end{pmatrix}.$$

Следовательно,

$$x_1=\frac{|A_1|}{|A|},\quad x_2=\frac{|A_2|}{|A|},\quad \ldots,\quad x_n=\frac{|A_n|}{|A|},$$

где $|A_1|=\begin{vmatrix}b_1 & a_{12} & \ldots & a_{1n}\\ b_2 & a_{22} & \ldots & a_{2n}\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ b_n & a_{n2} & \ldots & a_{nn}\end{vmatrix}$, $|A_2|=\begin{vmatrix}a_{11} & b_1 & \ldots & a_{1n}\\ a_{21} & b_2 & \ldots & a_{2n}\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ a_{n1} & b_2 & \ldots & a_{nn}\end{vmatrix}$, …, $|A_n|=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & \ldots & b_n\\ a_{21} & a_{22} & \ldots & b_2\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & b_n\end{vmatrix}$.

Правило Крамера:

Система n линейных уравнений с n неизвестными имеет единственное решение тогда и только тогда, когда определитель матрицы A отличен от нуля, причем решения представимы в виде дроби, в знаменателе которых находится определитель матрицы A, а в числителе находятся определители, полученные из определителя матрицы A путем замены столбца коэффициентов при определенном неизвестном столбцом свободных членов.

Задание 1. Решить систему линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) по формулам Крамера $\begin{cases}13x-15y=7\\ 8x+23y=9\end{cases}$.

Решение: Найдем величину главного определителя Δ матрицы второго порядка, составленной из коэффициентов при неизвестных:

$$\Delta=\begin{vmatrix}13 & -15\\ 8 & 23\end{vmatrix}=13\cdot 23-(-15)\cdot 8=299+120=419.$$

Так как величина определителя Δ отлична от нуля, то система уравнений имеет единственное решение.

Составим определитель второго порядка Δ_x и вычислим его, заменив в определителе Δ первый столбец столбцом свободных членов уравнения:

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 7 & -15 \\ 9 & 23 \end{vmatrix} = 7 \cdot 23 - (-15) \cdot 9 = 161 + 135 = 296.$$

Затем составим определитель второго порядка Δ_y и вычислим его, заменив в определителе Δ второй столбец столбцом свободных членов уравнения:

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 13 & 7 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} = 13 \cdot 9 - 7 \cdot 8 = 117 - 56 = 61.$$

Применив формулы Крамера, получим решение системы:

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{296}{419}, \qquad y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{61}{419}.$$

Ответ: $x = \dfrac{296}{419}, \qquad y = \dfrac{61}{419}.$

Задание 2. Решить систему линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) по формулам Крамера $\begin{cases} 2x + 2y + 3z = 1 \\ x - y = 2 \\ -x + 2y + z = 5 \end{cases}$.

Решение. Составим и вычислим главный определитель системы уравнений, состоящий из коэффициентов при неизвестных:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-1) \cdot 1 + 2 \cdot 0 \cdot (-1) + 3 \cdot 1 \cdot 2 - 3 \cdot (-1) \cdot (-1) - 2 \cdot 1 \cdot 1 - 2 \cdot 0 \cdot 2 =$$
$$= -2 + 0 + 6 - 3 - 2 - 0 = -1.$$

Так как главный определитель системы отличен от нуля, то система уравнений имеет единственное решение.

Далее, найдем определитель Δ_x, заменив в определителе Δ первый столбец столбцом свободных членов:

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & -1 & 0 \\ 5 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1) \cdot 1 + 2 \cdot 0 \cdot 5 + (-2) \cdot 2 \cdot 3 - 3 \cdot (-1) \cdot 5 - 2 \cdot (-2) \cdot 1 - 1 \cdot 0 \cdot 2 =$$
$$= -1 + 0 - 12 + 15 + 4 - 0 = 6.$$

Найдем определитель Δ_y, заменив в определителе Δ второй столбец столбцом свободных членов:

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & 0 \\ -1 & 5 & 1 \end{vmatrix} = 2\cdot(-2)\cdot 1 + 1\cdot 0\cdot(-1) + 1\cdot 5\cdot 3 - 3\cdot(-2)\cdot(-1) - 1\cdot 1\cdot 1 - 0\cdot 5\cdot 2 =$$

$$= -4 + 0 + 15 - 6 - 1 - 0 = 4.$$

Найдем определитель Δ_z, заменив в определителе Δ третий столбец столбцом свободных членов:

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \\ -1 & 2 & 5 \end{vmatrix} = 2\cdot(-1)\cdot 5 + 2\cdot(-2)\cdot(-1) + 1\cdot 1\cdot 2 - 1\cdot(-1)\cdot(-1) - 2\cdot(-2)\cdot 2 - 2\cdot 1\cdot 5 =$$

$$= -10 + 4 + 2 - 1 + 8 - 10 = -7.$$

Применив формулы Крамера, получим решение системы:

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{6}{-1} = -6, \qquad y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{4}{-1} = -4, \qquad z = \frac{\Delta_z}{\Delta} = \frac{-7}{-1} = 7.$$

Ответ: $x = -6, \qquad y = -4, \qquad z = 7.$

3 Критерий совместности СЛАУ. Теорема Кронекера-Капелли

Теорема (Кронекера-Капели): Система линейных алгебраических уравнений совместна тогда и только тогда, когда ранг расширенной матрицы равен рангу основной матрицы, т.е. $rang\, A = rang\, \overline{A} = r$.

Если $r = n$ (ранг совместной системы равен числу неизвестных), то система имеет единственное решение, т.е. является определенной.

Если $r < n$ (ранг совместной системы меньше числа неизвестных), то система имеет бесчисленное множество решений, т.е. является неопределенной.

Правило решения произвольной СЛАУ:

1. Найти ранги основной и расширенной матриц системы. Если $rang\, A \neq rang\, \overline{A}$, то система несовместна.

2. Если $rang\, A = rang\, \overline{A}$, то система совместна. Найти какой-либо базисный минор порядка r. Взять r уравнений, из коэффициентов которых состав-

лен базисный минор (остальные уравнения отбросить). Неизвестные, коэффициенты которых входят в базисный минор, называют ***базисными (главными)*** оставляют слева, а остальные $n-r$ неизвестных называют ***свободными*** и переносят в правые части уравнений.

3. Найти выражения главных неизвестных через свободные. Получено общее решение системы.

4. Придавая свободным неизвестным произвольные значения, можно найти частные решения исходной системы уравнений.

4 Метод Гаусса

Одним из наиболее универсальных и эффективных методов решения СЛАУ является метод Гаусса, состоящий в последовательном исключении неизвестных.

Пусть дана система уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}.$$

Процесс решения состоит из двух этапов:

1 этап – прямой ход: система приводится к трапециевидному или треугольному виду.

2 этап – обратный ход: последовательное определение неизвестных из трапециевидной или треугольной системы.

Задание 3. Решить систему линейных алгебраических уравнений методом Гаусса: $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = -7 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 14 \\ -x_1 - x_2 + 5x_3 = -18 \end{cases}$.

Решение:

Проверим критерий совместности.

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \\ -1 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$ – основная матрица системы.

$$\overline{A}=\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 & -7 \\ 1 & 2 & -3 & 14 \\ -1 & -1 & 5 & -18 \end{pmatrix}$$ – расширенная матрица системы.

Проверим критерий совместности. Найдем ранги основной и расширенной матриц системы:

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 & -7 \\ 1 & 2 & -3 & 14 \\ -1 & -1 & 5 & -18 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 14 \\ 2 & -3 & 1 & -7 \\ -1 & -1 & 5 & -18 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 14 \\ 0 & -7 & 7 & -35 \\ 0 & 1 & 2 & -4 \end{pmatrix} \to$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 14 \\ 0 & -1 & 1 & -5 \\ 0 & 1 & 2 & -4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 14 \\ 0 & -1 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 3 & -9 \end{pmatrix}$$

$rang A = 3,\ rang \overline{A} = 3$

Так как $rang A = rang \overline{A} = r = 3$ – система совместна.

Сравним ранг r с числом неизвестных n: $r=3,\ n=3$. Система определенная (т.е. имеет единственное решение), т.к. $r=n$.

1 этап: прямой ход – выполнили при нахождении рангов матриц.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 14 \\ 0 & -1 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 3 & -9 \end{pmatrix}$$

Запишем системы уравнений соответствующую данной матрице:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 14 \\ -x_2 + x_3 = -5 \\ 3x_3 = -9 \end{cases}$$

2 этап: обратный ход

Последовательно выражаем неизвестные из уравнений системы.

Из третьего уравнения системы $x_3 = -3$.

Из второго уравнения системы выражаем, подставляя найденное значение неизвестной x_3: $x_2 = x_3 + 5 = -3 + 5 = 2$.

Из первого уравнения системы находим неизвестную x_1, подставляя найденные значения неизвестных x_2, x_3: $x_1 = -2x_2 + 3x_3 + 14 = -4 - 9 + 14 = 1$.

Ответ: $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ или $x_1 = 1,\ x_2 = 2,\ x_3 = -3$.

Проверка: Подставим найденные значения неизвестных в первое уравнение системы: $2x_1 - 3x_2 + x_3 = -7,\ 2 - 6 - 3 = -7,\ -7 = -7$ – верное тождество.

Задание 4. Решить систему линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) тремя способами (методом Крамера, методом обратной матрицы, методом Гаусса): $\begin{cases} 3x - 2y + 3z = -2 \\ x - 2y + 2z = 1 \\ x + 5y - 2z = -4 \end{cases}$.

Решение:

Проверим критерий совместности:

$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 3 \\ 1 & -2 & 2 \\ 1 & 5 & -2 \end{pmatrix}$ – основная матрица системы.

$\overline{A} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 3 & -2 \\ 1 & -2 & 2 & 1 \\ 1 & 5 & -2 & -4 \end{pmatrix}$ – расширенная матрица системы.

Найдем ранги основной и расширенной матрицы:

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 & 3 & -2 \\ 1 & -2 & 2 & 1 \\ 1 & 5 & -2 & -4 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 3 & -2 & 3 & -2 \\ 0 & 4 & -3 & -5 \\ 0 & -17 & 9 & 10 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 3 & -2 & 3 & -2 \\ 0 & 4 & -3 & -5 \\ 0 & 0 & -15 & -45 \end{pmatrix}$$

$rang\overline{A} = 3,\ rangA = 3$. Т.к. ранги основной и расширенной матриц равны, то система совместна.

$r = 3,\ n = 3$, т.е. $r = n$ – система определенная (имеет единственное решение).

1 способ решения: правило Крамера

$$A=\begin{pmatrix}3 & -2 & 3\\ 1 & -2 & 2\\ 1 & 5 & -2\end{pmatrix}$$ – основная матрица системы.

$$\Delta=\det A=\begin{vmatrix}3 & -2 & 3\\ 1 & -2 & 2\\ 1 & 5 & -2\end{vmatrix}=12+15-4-(-6+30+4)=23-28=-5\neq 0$$ – матрица невырожденная.

$$\Delta_x=\begin{vmatrix}-2 & -2 & 3\\ 1 & -2 & 2\\ -4 & 5 & -2\end{vmatrix}=15;\ x=\frac{\Delta_x}{\Delta}=\frac{15}{-5}=-3.$$

$$\Delta_y=\begin{vmatrix}3 & -2 & 3\\ 1 & 1 & 2\\ 1 & -4 & -2\end{vmatrix}=-5;\ y=\frac{\Delta_y}{\Delta}=\frac{-5}{-5}=1.$$

$$\Delta_z=\begin{vmatrix}3 & -2 & -2\\ 1 & -2 & 1\\ 1 & 5 & -4\end{vmatrix}=-15;\ z=\frac{\Delta_z}{\Delta}=\frac{-15}{-5}=3.$$

Ответ: $x=-3,\ y=1,\ z=3$ или $\begin{pmatrix}-3\\ 1\\ 3\end{pmatrix}$

Проверка: $-3-2+6=1,\ 1=1$ – верное тождество.

<u>2 способ решения: метод обратной матрицы</u>

$A\cdot X=B$, где $A=\begin{pmatrix}3 & -2 & 3\\ 1 & -2 & 2\\ 1 & 5 & -2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-2\\ 1\\ -4\end{pmatrix}$, $X=\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}$

$X=A^{-1}\cdot B$,

$\det A=\begin{vmatrix}3 & -2 & 3\\ 1 & -2 & 2\\ 1 & 5 & -2\end{vmatrix}=-5\neq 0$ следовательно, существует обратная матрица для основной матрицы системы.

$$A^{-1} = -\frac{1}{5}\begin{pmatrix} -6 & 4 & 7 \\ 11 & -9 & -17 \\ 2 & -3 & -4 \end{pmatrix}^T = -\frac{1}{5}\begin{pmatrix} -6 & 11 & 2 \\ 4 & -9 & -3 \\ 7 & -17 & -4 \end{pmatrix}.$$

$$X = A^{-1}\cdot B = -\frac{1}{5}\begin{pmatrix} -6 & 11 & 2 \\ 4 & -9 & -3 \\ 7 & -17 & -4 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} = -\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 15 \\ -5 \\ -15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Ответ: $X = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

3 способ решения: метод Гаусса

$$\begin{cases} 3x - 2y + 3z = -2 \\ x - 2y + 2z = 1 \\ x + 5y - 2z = -4 \end{cases}$$

1 этап: прямой ход

Система приведена к трапециевидному виду при нахождении рангов матриц:

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 & 3 & -2 \\ 0 & 4 & -3 & -5 \\ 0 & 0 & -15 & -45 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 3x - 2y + 3z = -2 \\ 4y - 3z = -5 \\ -15z = -45 \end{cases}$$

2 этап: обратный ход

Из третьего уравнения $-15z = -45$ выражаем $z = 3$.

Из второго уравнения выражаем $4y = 3z - 5$, $4y = 3\cdot 3 - 5$, $4y = 4$, $y = 1$.

Из первого уравнения выражаем неизвестную x: $3x - 2y + 3z = -2$,

$3x = 2y - 3z - 2$, $3x = 2 - 9 - 2$, $3x = -9$, $x = -3$.

Ответ: $x = -3$, $y = 1$, $z = 3$ или $\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

Задание 5. Решить СЛАУ: $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 5 \end{cases}$.

Решение:

Проверим критерий совместности. Для этого найдем ранги основной и расширенной матриц системы.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 2 & 5 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & -1 & -4 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Ранг основной матрицы равен 2 (число ненулевых строк в основной матрице).

Ранг расширенной матрицы равен 3 (число ненулевых строк в расширенной матрице системы).

Ранги основной и расширенной матрицы неравны. Следовательно, система несовместна.

Ответ: нет решений, система несовместна.

Задание 6. Решить СЛАУ $\begin{cases} x + y + z = 3 \\ 2x + 2y + 2z = 6 \end{cases}$

Решение:

Находим ранги основной и расширенной матриц системы:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 2 & 6 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ранг основной матрицы системы равен 1, ранг расширенной матрицы системы равен 1. Т.к. ранги основной и расширенной матриц равны, то система совместна.

$r = 1,\ n = 3$. Т.к. $r < n$ система неопределенная, т.е. имеет бесчисленное множество решений.

Найдем общее решение системы: $x + y + z = 3$.

Базисных переменных будет 1, т.к. как ранг равен 1, свободных переменных будет $n - r = 3 - 1 = 2$.

1 вариант записи общего решения: $x+y+z=3$, $x=3-y-z$. Базисная переменная x, а свободные переменные y, z.

Общее решение системы представим в виде $\begin{pmatrix} 3-y-z \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

Частное решение системы: $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

Проверка:

$x+y+z=3$, $3+1-1=3$, $3=3$ - верное тождество.

2 вариант записи общего решения: $x+y+z=3$, $y=3-x-z$. Базисная переменная y, а свободные переменные x, z.

Общее решение системы представим в виде $\begin{pmatrix} x \\ 3-x-z \\ z \end{pmatrix}$.

Частное решение системы: $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

Задание 7. Решить СЛАУ $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 4x_3 = 0 \\ 3x_1 + 5x_2 - 7x_3 = 8 \\ 4x_1 - 5x_2 - 6x_3 = 1 \end{cases}$

Решение:

Проверим критерий совместности:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -4 & 0 \\ 3 & 5 & -7 & 8 \\ 4 & -5 & -6 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & 1 & -4 & 0 \\ 0 & 7 & -2 & 16 \\ 0 & -7 & 2 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & 1 & -4 & 0 \\ 0 & 7 & -2 & 16 \\ 0 & 0 & 0 & 17 \end{pmatrix}.$$

Ранг основной матрицы равен 2, ранг расширенной матрицы равен 3.

Т.к. ранги основной и расширенной матриц не равны, система не совместна.

Ответ: не имеет решений или система не совместна.

Задание 8. Решить СЛАУ $\begin{cases} 4x_1 - x_2 - 3x_3 + 2x_4 = -1 \\ 8x_1 - 5x_2 - 6x_3 + 3x_4 = 2 \\ 12x_1 - 7x_2 - 9x_3 + 5x_4 = 3 \end{cases}$

Решение:

Находим ранги основной и расширенной матриц:

$$\begin{pmatrix} 4 & -1 & -3 & 2 & -1 \\ 8 & -5 & -6 & 3 & 2 \\ 12 & -7 & -9 & 5 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 4 & -1 & -3 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 0 & -1 & 4 \\ 0 & -4 & 0 & -1 & 6 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 4 & -1 & -3 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Ранги основной и расширенной матрицы равны $r = 3$. Следовательно, система совместна.

$n = 4$.

Т.к. $r < n$ система неопределенная. Базисных переменных будет 3, а свободных переменных $n - r = 4 - 3 = 1$.

$$\begin{cases} 4x_1 - x_2 - 3x_3 + 2x_4 = -1 \\ -3x_2 - x_4 = 4 \\ x_4 = 2 \end{cases}$$

Из третьего уравнения системы $x_4 = 2$. Из второго уравнения выражаем

$-3x_2 = 4 + x_4$, $-3x_2 = 4 + 2$, $-3x_2 = 6$, $x_2 = -2$.

Первое уравнение системы: $4x_1 - x_2 - 3x_3 + 2x_4 = -1$, $4x_1 - (-2) - 3x_3 + 2 \cdot 2 = -1$,

$4x_1 - 3x_3 = -1 - 6$, $4x_1 - 3x_3 = -7$

1 вариант:

Из первого уравнения выразим x_1: $4x_1 - 3x_3 = -7$, $4x_1 = -7 + 3x_3$,

$$x_1 = \frac{-7 + 3x_3}{4} = \frac{3}{4}x_3 - \frac{7}{4}.$$

Базисные переменные x_1, x_2, x_4. Свободная переменная x_3.

Общее решение системы $\begin{pmatrix} \dfrac{-7 + 3x_3}{4} \\ -2 \\ x_3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{3}{4}x_3 - \dfrac{7}{4} \\ -2 \\ x_3 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Частное решение системы: $\begin{pmatrix} -\frac{7}{4} \\ -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

Проверка:

$4x_1 - x_2 - 3x_3 + 2x_4 = -1,\ 4\cdot\left(-\frac{7}{4}\right) - (-2) - 3\cdot 0 + 2\cdot 2 = -1,\ -7+2+4=-1,\ -1=-1$ - верное тождество, следовательно, общее решение системы получено верно.

5 Система линейных однородных уравнений

Пусть дана система линейных однородных уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

В матричной форме однородная система имеет вид $A\cdot X = O$.

Однородная система уравнений всегда совместна, она имеет ***нулевое*** (***тривиальное) решение*** $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$.

Ненулевое решение однородная система уравнений имеет только в том случае, когда ранг ее основной матрицы меньше числа неизвестных, т.е. $r < n$.

Теорема: Для того, чтобы однородная система с n неизвестными имела ненулевые решения, необходимо и достаточно, чтобы ее определитель был равен нулю, т.е. $\Delta = 0$.

Задание 9. Решить однородную систему линейных алгебраических уравнений $\begin{cases} x_1 - 2x_2 - 3x_3 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 0 \\ 5x_1 - 3x_2 - 8x_3 = 0 \end{cases}$

Решение:

Данная система является однородной. Однородная система совместна всегда, т.е. имеет тривиальное решение (или нулевое).

1 способ:

Найдем ранг основной матрицы:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 5 & -3 & -8 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 0 & 7 & 7 \\ 0 & 7 & 7 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 0 & 7 & 7 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ранг основной матрицы равен 2, меньше числа неизвестных 3. Следовательно, однородная система имеет ненулевое решение.

2 способ:

Однородная система имеет ненулевое решение, если определитель основной матрицы равен нулю.

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 5 & -3 & -8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 0 & 7 & 7 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot 7 \cdot 0 = 0.$$

Следовательно, однородная система имеет ненулевое решение.

Исходная система эквивалентна следующей системе:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 - 3x_3 = 0 \\ 7x_2 + 7x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 - 3x_3 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

Выберем базисные переменные:

1) Могут ли быть базисными переменные $x_1,\ x_2$?

Для ответа на этот вопрос, необходимо составить и вычислить определить из коэффициентов при этих переменных.

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \ \Rightarrow x_1,\ x_2 \text{ - могут быть базисными.}$$

2) Могут ли быть базисными переменные $x_1,\ x_3$?

$$\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \Rightarrow x_1,\ x_3 \text{ - могут быть базисными.}$$

1 вариант:

Возьмем за базисные переменные $x_1,\ x_2$. Тогда x_3 – свободная переменная.

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 - 3x_3 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

Из второго уравнения системы выражаем x_2: $x_2 = -x_3$.

Из первого уравнения системы выражаем x_1: $x_1 = 2x_2 + 3x_3 = 2\cdot(-x_3) + 3x_3 = x_3$.

Общее решение системы: $\begin{pmatrix} x_3 \\ -x_3 \\ x_3 \end{pmatrix}$.

Частное решение: $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

2 вариант:

Возьмем за базисные переменные $x_1,\ x_3$. Тогда x_2 – свободная переменная.

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 - 3x_3 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

Из второго уравнения системы выражаем x_3: $x_3 = -x_2$.

Из первого уравнения системы выражаем x_1:

$x_1 = 2x_2 + 3x_3 = 2\cdot x_2 + 3\cdot(-x_2) = -x_2$.

Общее решение системы: $\begin{pmatrix} -x_2 \\ x_2 \\ -x_2 \end{pmatrix}$. Частное решение: $\begin{pmatrix} -7 \\ 7 \\ -7 \end{pmatrix}$.

Проверка:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 - 3x_3 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 0 \\ 5x_1 - 3x_2 - 8x_3 = 0 \end{cases}$$

В любое из уравнений системы подставляем частное решение:

$x_1 - 2x_2 - 3x_3 = 0$, $-7 - 2\cdot 7 - 3\cdot(-7) = 0$, $-7 - 14 + 21 = 0$, $-21 + 21 = 0$, $0 = 0$, т.е. получили верное тождество.

Задание 10. Решить СЛАУ $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 0 \\ x_1 + 3x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + 3x_2 - 5x_4 = 0 \end{cases}$.

Решение:

Данная система является однородной. Однородная система совместна всегда, т.е. имеет тривиальное решение (или нулевое).

Имеет ли данная система ненулевое решение?

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & -3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & -5 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -2 & 2 \\ 0 & -1 & 4 & -6 \\ 0 & 2 & 1 & -7 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 6 & -10 \\ 0 & 0 & 3 & -9 \end{pmatrix} \to$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 6 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

Ранг основной матрицы равен 4, т.е. равен числу неизвестных системы. Следовательно, данная система не имеет ненулевого решения. Она имеет только тривиальное (нулевое) решение.

Итак, общая схема решения неоднородной системы линейных алгебраических уравнений:

Найти ранги основной и расширенной матриц. • $rang\, A \neq rang\, \overline{A} \to$ система несовместна; • $rang\, A = rang\, \overline{A} \to$ система совместна: 1) $r = n$, $\det A \neq 0 \Rightarrow$ метод обратной матрицы формулы Крамера метод Гаусса 2) $r < n \Rightarrow$ общее решение (базисные и свободные переменные)

3 ВАРИАНТЫ ИНДИВИДУАЛЬНЫХ ДОМАШНИХ ЗАДАНИЙ

Задание 1

Проверить совместность системы линейных алгебраических уравнений и в случае совместности найти её решение:

а) методом Крамера;

б) методом обратной матрицы;

в) методом Гаусса.

Номер варианта	***Постановка задачи***	***Номер варианта***	***Постановка задачи***
1	$\begin{cases} x-3y-8z=-10 \\ -2x+5y+7z=10 \\ 4x-y+3z=6 \end{cases}$	**16**	$\begin{cases} 2x+y+3z=12 \\ x-y+7z=-6 \\ x-2y+z=-14 \end{cases}$
2	$\begin{cases} x-2y+3z=-16 \\ -x+y+5z=7 \\ 3x-2y+4z=-12 \end{cases}$	**17**	$\begin{cases} 2x-y+z=-3 \\ 3x+2y+2z=6 \\ x-2y+z=-6 \end{cases}$
3	$\begin{cases} x+y+z=8 \\ -x+2y+2z=10 \\ x-y+2z=-4 \end{cases}$	**18**	$\begin{cases} 2x+y+z=11 \\ x+2y+2z=16 \\ x+y+3z=9 \end{cases}$
4	$\begin{cases} 3x-4y+2z=-1 \\ 5x+2y-2z=6 \\ 8x-2y=5 \end{cases}$	**19**	$\begin{cases} 2x+y+3z=7 \\ 2x+3y+z=1 \\ 3x+2y+z=6 \end{cases}$
5	$\begin{cases} 2x-y+2z=3 \\ x+y+2z=-4 \\ 4x+y+4z=-3 \end{cases}$	**20**	$\begin{cases} 3x-y+z=12 \\ x+2y+4z=6 \\ 5x+y+2z=3 \end{cases}$
6	$\begin{cases} 3x+2y-4z=8 \\ 2x+4y-5z=1 \\ 5x+6y-9z=2 \end{cases}$	**21**	$\begin{cases} 2x-y+3z=-4 \\ x+3y-z=11 \\ x-2y+2z=-7 \end{cases}$
7	$\begin{cases} 8x+3y-6z=-4 \\ x+y-z=2 \\ 4x+y-3z=-5 \end{cases}$	**22**	$\begin{cases} 4x+y-3z=9 \\ x+y-z=-2 \\ 8x+3y-6z=12 \end{cases}$

Номер варианта	***Постановка задачи***	***Номер варианта***	***Постановка задачи***
8	$\begin{cases} 2x+3y+4z=33 \\ 7x-5y=24 \\ 4x+11z=39 \end{cases}$	**23**	$\begin{cases} 2x+3y+4z=12 \\ 7x-5y+z=-33 \\ 4x+z=-7 \end{cases}$
9	$\begin{cases} x+4y-z=6 \\ 5y+4z=-20 \\ 3x-2y+5z=-22 \end{cases}$	**24**	$\begin{cases} 3x-2y+4z=21 \\ 3x+4y-2z=9 \\ 2x-y-z=10 \end{cases}$
10	$\begin{cases} -8x+z=-12 \\ x+y+z=-2 \\ -7x+6z=-31 \end{cases}$	**25**	$\begin{cases} 4x+2y+3z=-11 \\ -y-2z=1 \\ -6x+5y+3z=0 \end{cases}$
11	$\begin{cases} 4x+7y+6z=23 \\ 5x-5y+6z=-11 \\ 2x-4y+2z=-10 \end{cases}$	**26**	$\begin{cases} -6x-y+4z=-21 \\ x-3y+2z=13 \\ 6x+2y-5z=18 \end{cases}$
12	$\begin{cases} -2x-2y+7z=24 \\ -4x-3y+4z=25 \\ 5x+y+2z=-9 \end{cases}$	**27**	$\begin{cases} -4x-8y+5z=-6 \\ -3x+y-2z=-14 \\ -y+z=1 \end{cases}$
13	$\begin{cases} -7x+3y+7z=-37 \\ 5x+8y-z=59 \\ -7x-4y+4z=-59 \end{cases}$	**28**	$\begin{cases} -x+7y-6z=-3 \\ 2x+5y-3z=-14 \\ -7x-2y=24 \end{cases}$
14	$\begin{cases} -x-2y+2z=-17 \\ -7x+y-7z=4 \\ -x+y-2z=7 \end{cases}$	**29**	$\begin{cases} -x+z=2 \\ 2x-3y-z=3 \\ -5x-y+5z=11 \end{cases}$
15	$\begin{cases} 3x-2z=9 \\ 3x-8y+2z=29 \\ -x+z=-4 \end{cases}$	**30**	$\begin{cases} -4x+4y+7z=5 \\ 2x-5z=5 \\ -2x-y+8z=-11 \end{cases}$

Задание 2

Исследовать совместность системы линейных алгебраических уравнений и найти её общее решение:

Номер варианта	***Постановка задачи***	***Номер варианта***	***Постановка задачи***
1	$\begin{cases} 5x_1 + x_2 - x_4 = -9 \\ 3x_1 - 3x_2 + x_3 + 4x_4 = -7 \\ 3x_1 - 2x_3 + x_4 = -16 \\ 6x_1 - 4x_2 + 2x_4 = -32 \end{cases}$	**16**	$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 10 \\ 2x_1 + 4x_2 + 6x_3 + 2x_4 = 20 \\ 3x_1 + 6x_2 + 9x_3 + 3x_4 = 30 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 5 \end{cases}$
2	$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 0 \\ x_2 + 2x_3 - x_4 = 2 \\ x_1 - x_2 - x_4 = -1 \\ -x_2 - 2x_3 + x_4 = -2 \end{cases}$	**17**	$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 4 \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 8 \\ 3x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 3x_4 = 12 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 5 \end{cases}$
3	$\begin{cases} 2x_1 + x_3 + 4x_4 = 9 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 8 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 5 \\ -x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = -8 \end{cases}$	**18**	$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 6 \\ 2x_1 + 4x_2 + 6x_3 + 2x_4 = 12 \\ 3x_1 + 6x_2 + 9x_3 + 3x_4 = 18 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 2 \end{cases}$
4	$\begin{cases} 2x_1 - 6x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 12 \\ x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 7x_4 = 12 \\ 3x_1 + 5x_2 + 7x_3 + x_4 = 0 \\ 6x_1 - 18x_2 + 6x_3 + 6x_4 = 36 \end{cases}$	**19**	$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 = 7 \\ 4x_1 + 6x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 14 \\ 3x_1 + 9x_2 + 3x_3 + 3x_4 = 21 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_4 = 4 \end{cases}$
5	$\begin{cases} x_1 + 5x_2 = 2; \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 4 \\ 3x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 = 6 \\ 3x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 = 6 \end{cases}$	**20**	$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ 2x_1 - 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 2 \\ 3x_1 - 3x_2 + 3x_3 + 3x_4 = 3 \\ x_1 - x_2 + 0.5x_3 = 0 \end{cases}$
6	$\begin{cases} x_1 - 4x_2 - x_4 = 2 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 1 \\ 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 6x_4 = 2 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = -4 \end{cases}$	**21**	$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 10 \\ 2x_1 + 6x_2 + 4x_3 + 8x_4 = 20 \\ 3x_1 + 9x_2 + 6x_3 + 12x_4 = 30 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 = 5 \end{cases}$

Номер варианта	***Постановка задачи***	***Номер варианта***	***Постановка задачи***
7	$\begin{cases} 4x_1 - 2x_2 + x_3 - 4x_4 = 3 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 1 \\ 3x_1 - x_3 + x_4 = -3 \\ 4x_1 - 2x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 2 \end{cases}$	**22**	$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 5 \\ 6x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 10 \\ 9x_1 + 6x_2 + 3x_3 + 3x_4 = 15 \\ 3x_1 + 2x_2 + 0.5x_3 = 2 \end{cases}$
8	$\begin{cases} 4x_1 + x_2 - x_4 = -9 \\ x_1 - 3x_2 + 4x_3 = -7 \\ \quad 3x_2 - 2x_3 + 4x_4 = 12 \\ -4x_1 - x_2 + x_4 = 9 \end{cases}$	**23**	$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 0 \\ 3x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 3x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 = -1 \end{cases}$
9	$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 1 \\ 2x_1 - x_2 - 3x_4 = 2 \\ 4x_1 - 2x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 2 \\ 3x_1 - x_3 + x_4 = -3 \end{cases}$	**24**	$\begin{cases} 4x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 8 \\ 8x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 6x_4 = 16 \\ 12x_1 + 3x_2 + 6x_3 + 9x_4 = 24 \\ 4x_1 + x_2 + 2x_3 = 4 \end{cases}$
10	$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 8 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 5 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = -1 \\ x_1 + x_2 - x_3 + 3x_4 = 10 \end{cases}$	**25**	$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 3 \\ 2x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 6 \\ 3x_1 + 6x_2 + 3x_3 + 3x_4 = 9 \\ x_1 + 2x_2 = 1 \end{cases}$
11	$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 4 \\ 3x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 6 \\ 3x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 = 6 \\ 3x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 = 6 \end{cases}$	**26**	$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 = -2 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 - 5x_4 = 8 \\ 3x_1 - 6x_2 + 3x_3 - 12x_4 = -6 \\ 2x_1 - x_2 + 6x_3 - 3x_4 = 7 \end{cases}$
12	$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 5x_3 + x_4 = 8 \\ x_1 - 3x_2 - 6x_4 = 9 \\ \quad 2x_2 - x_3 + 2x_4 = -5 \\ 4x_1 + 2x_2 - 10x_3 + 2x_4 = 16 \end{cases}$	**27**	$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 + 2x_4 = -3 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = 3 \\ x_1 - 3x_2 - x_3 - 3x_4 = 0 \\ 4x_1 - 2x_2 + 4x_3 + 4x_4 = -6 \end{cases}$
13	$\begin{cases} x_1 + 5x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 20 \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 = 9 \\ 2x_1 + 10x_2 + 6x_4 - 8x_4 = 40 \\ 3x_2 - 5x_3 = 1 \end{cases}$	**28**	$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 1 \\ 3x_1 - x_2 - x_3 - 2x_4 = -4 \\ 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 6x_4 = 2 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = -4 \end{cases}$

Номер варианта	*Постановка задачи*	*Номер варианта*	*Постановка задачи*
14	$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 7x_4 = 12 \\ 3x_1 + 5x_2 + 7x_3 + x_4 = 0 \\ 5x_1 + 7x_2 + x_3 + 3x_4 = 4 \\ 10x_1 + 14x_2 + 2x_3 + 6_4 = 8 \end{cases}$	**29**	$\begin{cases} x_2 - 3x_3 + 4x_4 = -5 \\ x_1 - 2x_3 + 3x_4 = -4 \\ 3x_1 - 6x_2 + 9x_4 = -12 \\ 4x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 5 \end{cases}$
15	$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 5 \\ 2x_1 + 4x_2 + 6x_3 + 8x_4 = 10 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 1 \\ 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = -5 \end{cases}$	**30**	$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 6 \\ x_1 - x_2 - 2x_3 - 3x_4 = 8 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 4 \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = -8 \end{cases}$

Задание 3

Найти ненулевое решение однородной системы линейных алгебраических уравнений, если оно существует:

Номер варианта	***Постановка задачи***	***Номер варианта***	***Постановка задачи***
1	$\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3=0 \\ 2x_1+4x_2+6x_3=0 \\ -x_1-2x_2-3x_3=0 \end{cases}$	**16**	$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=0 \\ 2x_1+2x_2+2x_3=0 \\ -x_1-x_2-x_3=0 \end{cases}$
2	$\begin{cases} x_1-2x_2+x_3=0 \\ 2x_1-4x_2+2x_3=0 \\ -x_1+2x_2+x_3=0 \end{cases}$	**17**	$\begin{cases} x_1-2x_2+x_3=0 \\ 2x_1-4x_2+2x_3=0 \\ 3x_1-6x_2+3x_3=0 \end{cases}$
3	$\begin{cases} 2x_1+x_2-x_3=0 \\ 4x_1+2x_2-2x_3=0 \\ -x_1-0.5x_2+0.5x_3=0 \end{cases}$	**18**	$\begin{cases} 3x_1+6x_2+9x_3=0 \\ x_1+2x_2+3x_3=0 \\ 2x_1+4x_2+6x_3=0 \end{cases}$
4	$\begin{cases} x_1+3x_2+4x_3=0 \\ 2x_1+6x_2+8x_3=0 \\ -x_1-3x_2-4x_3=0 \end{cases}$	**19**	$\begin{cases} x_1-x_2+x_3=0 \\ 3x_1-3x_2+3x_3=0 \\ -2x_1+2x_2-2x_3=0 \end{cases}$
5	$\begin{cases} 4x_1+2x_2-x_3=0 \\ 8x_1+4x_2-2x_3=0 \\ 2x_1+x_2-0.5x_3=0 \end{cases}$	**20**	$\begin{cases} x_1+2x_2+2x_3=0 \\ 3x_1+6x_2+6x_3=0 \\ 2x_1+4x_2+4x_3=0 \end{cases}$
6	$\begin{cases} 5x_1-2x_2+x_3=0 \\ 10x_1-4x_2+2x_3=0 \\ 3x_1-1.2x_2+0.6x_3=0 \end{cases}$	**21**	$\begin{cases} 2x_1+5x_2+3x_3=0 \\ 4x_1+10x_2+6x_3=0 \\ -x_1-2.5x_2-1.5x_3=0 \end{cases}$
7	$\begin{cases} x_1+2x_2+x_3=0 \\ 2x_1+4x_2+2x_3=0 \\ -x_1-2x_2-x_3=0 \end{cases}$	**22**	$\begin{cases} 2x_1-x_2+x_3=0 \\ 4x_1-2x_2+2x_3=0 \\ -x_1+0.5x_2-0.5x_3=0 \end{cases}$
8	$\begin{cases} 3x_1+2x_2+x_3=0 \\ 6x_1+4x_2+2x_3=0 \\ -x_1-\frac{2}{3}x_2-\frac{1}{3}x_3=0 \end{cases}$	**23**	$\begin{cases} x_1-x_2+2x_3=0 \\ 3x_1-3x_2+6x_3=0 \\ 2x_1-2x_2+4x_3=0 \end{cases}$

Номер варианта	***Постановка задачи***	***Номер варианта***	***Постановка задачи***
9	$\begin{cases} 4x_1 + x_2 - 2x_3 = 0 \\ 8x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 0 \\ -x_1 - 0.25x_2 + 0.5x_3 = 0 \end{cases}$	**24**	$\begin{cases} x_1 + 4x_2 + 5x_3 = 0 \\ 2x_1 + 8x_2 + 10x_3 = 0 \\ -x_1 - 4x_2 - 5x_3 = 0 \end{cases}$
10	$\begin{cases} 5x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 0 \\ 10x_1 + 6x_2 + 4x_3 = 0 \\ -x_1 - 0.6x_2 - 0.4x_3 = 0 \end{cases}$	**25**	$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 0 \\ 4x_1 + 6x_2 + 2x_3 = 0 \\ -x_1 - 1.5x_2 - 0.5x_3 = 0 \end{cases}$
11	$\begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 + 6x_3 = 0 \\ -x_1 - x_2 - 3x_3 = 0 \end{cases}$	**26**	$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 0 \\ 6x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 0 \\ -x_1 + \frac{1}{3}x_2 - \frac{2}{3}x_3 = 0 \end{cases}$
12	$\begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 + 6x_3 = 0 \\ -3x_1 - 3x_2 - 9x_3 = 0 \end{cases}$	**27**	$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 - 4x_2 + 2x_3 = 0 \\ -3x_1 + 6x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases}$
13	$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 0 \\ -x_1 - 2x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases}$	**28**	$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 0 \\ 4x_1 - 6x_2 + 8x_3 = 0 \\ -x_1 + 1.5x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases}$
14	$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + x_3 = 0 \\ 6x_1 + 8x_2 + 2x_3 = 0 \\ -x_1 - \frac{4}{3}x_2 - \frac{1}{3}x_3 = 0 \end{cases}$	**29**	$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ 2x_1 - 4x_2 + 6x_3 = 0 \\ -x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0 \end{cases}$
15	$\begin{cases} 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 0 \\ 8x_1 + 10x_2 + 12x_3 = 0 \\ 2x_1 + 2.5x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases}$	**30**	$\begin{cases} x_1 - 2x_2 - 3x_3 = 0 \\ 2x_1 - 4x_2 - 6x_3 = 0 \\ -x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases}$

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1 Александров, П. С. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры / П. С. Александров. – 5- е изд., стер. – Санкт-Петербург: Лань, 2023. – 512 с. – ISBN 978-5-507-47185-0. – Текст: электронный // Лань: электронно-библиотечная система. – URL: https:// e.lanbook.com/ book/339014.

2 Беклемишев, Д. В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры: учебник для вузов / Д. В. Беклемишев. – 20-е изд., стер. – Санкт-Петербург: Лань, 2024. – 448 с. – ISBN 978-5-507-49779-9. – Текст: электронный // Лань: электронно-библиотечная система. – URL: https:// e.lanbook.com/ book/402917.

3 Горлач, Б. А. Линейная алгебра: учебное пособие / Б. А. Горлач. – Санкт-Петербург: Лань, 2022. – 480 с. – ISBN 978-5-8114-1427-7. – Текст: электронный // Лань: электронно-библиотечная система. – URL: https:// e.lanbook.com/ book/210983.

4 Ивлева, А. М. Линейная алгебра. Аналитическая геометрия: учебное пособие / А. М. Ивлева, П. И. Прилуцкая, И. Д. Черных. – Новосибирск: Новосибирский государственный технический университет, 2014. – 180 с. – ISBN 978-5-7782-2409-4. – Текст: электронный // Цифровой образовательный ресурс IPR SMART: [сайт]. – URL: https:// www.iprbookshop.ru/45380.html.

5 Кряквин, В. Д. Линейная алгебра в задачах и упражнениях: учебное пособие / В. Д. Кряквин. – 3- е изд., испр. – Санкт-Петербург: Лань, 2022. – 592 с. – ISBN 978-5-8114-2090-2. – Текст: электронный // Лань: электронно-библиотечная система. – URL: https:// e.lanbook.com/ book/212276.

6 Сборник задач по аналитической геометрии и линейной алгебре / Л. А. Беклемишева, Д. В. Беклемишев, А. Ю. Петрович, И. А. Чубаров. – 10-е изд., стер. – Санкт-Петербург: Лань, 2023. – 496 с. – ISBN 978-5-507-48139-2. – Текст: электронный // Лань: электронно-библиотечная система. – URL: https:// e.lanbook.com/ book/341228.

СОДЕРЖАНИЕ

Веселова Елена Михайловна,
доцент кафедры МАиМ АмГУ, канд. физ.-мат. наук, доцент

Индивидуальные задания по теме «Системы линейных алгебраических уравнений». *Практикум*

Изд-во АмГУ.