

Министерство науки и высшего образования РФ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
АМУРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
(ФГБОУ ВО «АмГУ»)

Математика

сборник учебно-методических материалов специальности

29.02.10 - Конструирование, моделирование и технология изготовления
изделий легкой промышленности (по видам)

Благовещенск 2024

*Печатается по решению
редакционно-издательского совета
факультета СПО
Амурского государственного университета*

Составитель: Черепанова К.О.

Математика: сборник учебно-методических материалов для специальности СПО 29.02.10 - Конструирование, моделирование и технология изготовления изделий легкой промышленности (по видам) / Амур. гос. ун-т, Факультет среднего профессионального образования; сост. К.О. Черепанова – Благовещенск: АмГУ, 2024. – 50 с.

© Амурский государственный университет, 2023

© ЦМК общеобразовательных и естественнонаучных дисциплин, 2023

© Черепанова К.О., составление

1. Краткое изложение лекционного материала

Лекция – одна из базовых форм обучения обучающихся. Углубляясь в значение термина, можно сказать, что лекцией следует называть такой способ изложения информации, который имеет стройную логическую структуру, выстроен с позиций системности, а также глубоко и ясно раскрывает предмет.

В зависимости от задач, назначения и стиля проведения различают несколько основных видов лекций: вводная, информационная, обзорная, проблемная, визуализационная, бинарная, конференция, консультация. Лекция, особенно проблемного характера, дополняет учебники и учебные пособия. Она оказывает существенное эмоциональное влияние на обучающихся, будит мысль, формирует интерес и желание глубоко разобраться в освещаемых лектором проблемах.

Введение

Лекция 1.

Математика в науке, технике, экономике, информационных технологиях и практической деятельности. Цели и задачи изучения математики в учреждениях среднего профессионального образования.

План лекции:

1. Вступительное слово преподавателя
2. Математика в науке, технике, экономике, информационных технологиях и практической деятельности.
3. Цели и задачи изучения математики в учреждениях среднего профессионального образования
4. Стартовая диагностика

Раздел 1. Натуральные и целые числа. Множество действительных чисел

Лекция 2.

Множество, операции над множествами и их свойства. Диаграммы Эйлера -Венна. Применение теоретико-множественного аппарата для решения задач.

План лекции:

1. Определение множества. Примеры множеств.
2. Классификация множеств.
3. Свойства множеств.
4. Операции над множествами.
5. Диаграммы Эйлера-Венна.
6. Применение теоретико-множественного аппарата для решения задач.

Лекция 3.

Рациональные числа. Обыкновенные и десятичные дроби, проценты, бесконечные периодические дроби. Действительные числа. Иррациональные числа. Приближённые вычисления, правила округления, прикидка и оценка результата вычислений.

План лекции:

1. Определение натуральных, целых, рациональных и действительных чисел.
2. Обыкновенные и десятичные дроби, бесконечные периодические дроби.
3. Определение иррациональных чисел.
4. Определение процента. Нахождение процента от числа.
5. Приближённые вычисления.
6. Правила округления.
7. Прикидка и оценка результата вычислений.

Раздел 2. Комплексные числа

Лекция 4.

Комплексные числа. Алгебраическая и тригонометрическая формы записи комплексного числа. Изображение комплексных чисел на координатной плоскости.

План лекции:

1. Определение комплексного числа. Алгебраическая форма записи комплексного числа.
2. Изображение комплексных чисел на координатной плоскости.
3. Сложение, умножение и деление комплексных чисел.
4. Тригонометрическая формы записи комплексного числа.

Раздел 3. Многочлены. Уравнения и неравенства. Системы линейных уравнений

Лекция 5.

Многочлены от одной переменной. Деление многочлена на многочлен с остатком. Теорема Безу. Многочлены с целыми коэффициентами.

План лекции:

1. Определение многочлена от одной переменной.
2. Деление многочлена на многочлен с остатком.
3. Теорема Безу.
4. Определение многочлена с целыми коэффициентами.

Лекция 6.

Решение систем линейных уравнений. Матрица системы линейных уравнений. Определитель матрицы 2×2 , его геометрический смысл и свойства; вычисление его значения; применение определителя для решения системы линейных уравнений.

План лекции:

1. Определение системы линейных уравнений.
2. Методы решения систем уравнений.
3. Определение матрицы. Составление матрицы для линейных уравнений.
4. Определитель матрицы 2×2 , его геометрический смысл и свойства; вычисление его значения.
5. Применение определителя для решения системы линейных уравнений.

Лекция 7.

Решение прикладных задач с помощью системы линейных уравнений.

План лекции:

1. Алгоритм решения задач с помощью систем линейных уравнений.
2. Примеры решения задач с помощью систем линейных уравнений.
3. Решение прикладных задач с помощью системы линейных уравнений.

Раздел 5. Функции и графики. Показательные и логарифмические уравнения

Лекция 9.

Функция, способы задания функции. Взаимно обратные функции. Композиция функций. График функции. Область определения и множество значений функции. Нули функции. Промежутки знакопостоянства. Чётные и нечётные функции. Периодические функции. Промежутки монотонности функции. Максимумы и минимумы функции. Наибольшее и наименьшее значение функции на промежутке

План лекции:

1. Определение функции. Способы задания функции.
2. Определение графика функции.
3. Определение взаимно обратных функций.
4. Композиция функций.

5. Область определения и множество значений функции.
6. Нули функции.
7. Промежутки знакопостоянства.
8. Чётные и нечётные функции.
9. Периодические функции.
10. Промежутки монотонности функции.
11. Максимумы и минимумы функции.
12. Наибольшее и наименьшее значение функции на промежутке.

Лекция 10.

Элементарные преобразования графиков функций.

План лекции:

1. Графики элементарных функций.
2. Параллельный перенос графика функции по оси ox .
3. Параллельный перенос графика функции по оси oy .
4. Сжатие/растяжение графика функции вдоль оси ox .
5. Сжатие/растяжение графика функции вдоль оси oy .
6. Симметрия графика функции относительно оси ox .
7. Симметрия графика функции относительно оси oy .

Лекция 11.

Степенная функция с натуральным и целым показателем. Её свойства и график. Свойства и график корня n -ой степени как функции обратной степени с натуральным показателем.

План лекции:

1. Степенная функция с натуральным показателем. Её свойства и график.
2. Степенная функция с целым показателем. Её свойства и график.
3. Свойства и график корня n -ой степени как функции обратной степени с натуральным показателем.

Лекция 12.

Показательная функция, её свойства и график. Использование графика функции для решения уравнений.

План лекции:

1. Показательная функция, её свойства и график.
2. Использование графика функции для решения уравнений.

Лекция 13.

Логарифмическая функция, её свойства и график. Использование графика функции для решения уравнений.

План лекции:

1. Логарифмическая функция, её свойства и график.
2. Использование графика функции для решения.

Раздел 6. Иррациональные, показательные и логарифмические неравенства

Лекция 14.

Основные методы решения показательных и логарифмических неравенств. Основные методы решения иррациональных неравенств

План лекции:

1. Основные методы решения показательных неравенств.
2. Основные методы решения неравенств.
3. Основные методы решения иррациональных неравенств.

Раздел 7. Системы рациональных, иррациональных показательных и логарифмических уравнений. Задачи с параметрами

Лекция 15.

Система и совокупность уравнений. Равносильные системы и системы-следствий.

План лекции:

1. Система уравнений.
2. Совокупность уравнений.
3. Равносильные системы и системы-следствий.

Лекция 16.

Применение уравнений, систем и неравенств к решению математических задач и задач из различных областей науки и реальной жизни, интерпретация полученных результатов.

План лекции:

1. Применение уравнений к решению математических задач и задач из различных областей науки и реальной жизни, интерпретация полученных результатов.
2. Применение систем уравнений к решению математических задач и задач из различных областей науки и реальной жизни, интерпретация полученных результатов.
3. Применение неравенств к решению математических задач и задач из различных областей науки и реальной жизни, интерпретация полученных результатов.

Лекция 17.

Рациональные, иррациональные, показательные, логарифмические и тригонометрические уравнения, неравенства и системы с параметрами.

План лекции:

1. Рациональные уравнения, неравенства и системы с параметрами.
2. Иррациональные уравнения, неравенства и системы с параметрами.
3. Показательные уравнения, неравенства и системы с параметрами.
4. Логарифмические уравнения, неравенства и системы с параметрами.
5. Тригонометрические уравнения, неравенства и системы с параметрами.

Раздел 8. Тригонометрические выражения и уравнения. Графики тригонометрических функций. Тригонометрические неравенства

Лекция 18.

Синус, косинус, тангенс и котангенс числового аргумента. Арксинус, арккосинус и арктангенс числового аргумента

План лекции:

1. Определение синуса, косинуса, тангенса и котангенса числового аргумента.
2. Арксинус, арккосинус и арктангенс числового аргумента.

Лекция 19.

Тригонометрическая окружность, определение тригонометрических функций числового аргумента. Основные тригонометрические формулы

План лекции:

1. Тригонометрическая окружность.
2. Определение тригонометрических функций числового аргумента.
3. Основные тригонометрические формулы.

Лекция 20.

Решение тригонометрических уравнений

План лекции:

1. Решение уравнений вида $\cos x = a$.
2. Решение уравнений вида $\sin x = a$.
3. Решение уравнений вида $\operatorname{tg} x = a$.

1. Тригонометрические уравнения – это уравнения, в которых переменная находится под знаком тригонометрических функций. Например: $\cos t = 0,5$, $\sin t = -0,2$.

Решим с помощью единичной окружности тригонометрическое уравнение $\cos t = \frac{1}{2}$.

Знаем, абсцисса точки на единичной окружности – это $\cos t$.

Итак, чертим прямоугольную систему координат, указываем направление координатных осей, отмечаем начало отчета, единичный отрезок, чертим окружность радиусом один единичный отрезок. Далее поскольку $\cos t$ – это абсцисса точки на окружности, то есть координата x , то чертим прямую $x = \frac{1}{2}$ – рисунок 1.

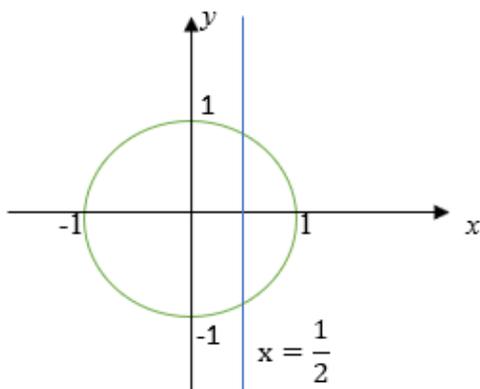


рисунок 1

Получили две точки пересечения единичной окружности и прямой $x = \frac{1}{2}$. Эти точки и есть корни уравнения $\cos t = \frac{1}{2}$.

Для того, чтобы найти значения корней, необходимо ответить на вопрос: косинус какого угла равен $\frac{1}{2}$, то есть найти $\arccos \frac{1}{2}$ (согласно определению арккосинуса числа).

$\arccos \frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}$ – это значение точки на окружности, которая расположена в первой координатной четверти (рисунок 2).

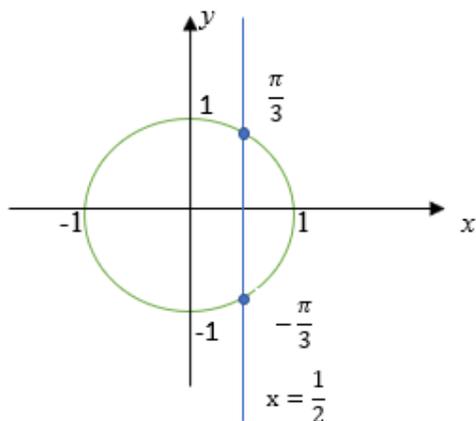


рисунок 2

Вспомните, по окружности можно «пойти» против движения часовой стрелки – в положительном направлении, и по часовой стрелке – в отрицательном направлении. Если идти в отрицательном направлении, то получится, что значение точки на окружности, которая расположена в четвертой координатной четверти равно $-\frac{\pi}{3}$ (рисунок 2).

Но на окружности каждой точке соответствует бесконечное множество значений. В одну и ту же точку на окружности можно попасть пройдя один полный оборот, то есть 2π , потом пройдя два полных оборота, то есть 4π и т.д.

Поэтому будут две серии корней в уравнении $\cos t = \frac{1}{2}$.

$$t_1 = \frac{\pi}{3} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z};$$

$$t_2 = -\frac{\pi}{3} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Или корни уравнения $\cos t = \frac{1}{2}$ можно записать так: $t = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$.

$n \in \mathbb{Z}$ – это значит, что n – число, то есть $\dots -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3 \dots$.

Итак, получается, что решение уравнение $\cos t = \frac{1}{2}$ можно записать следующим образом:

$$\cos t = \frac{1}{2},$$

$$t = \pm \arccos \frac{1}{2} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z},$$

$$t = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Ответ: $t = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$.

Обратите внимание, что уравнение $\cos t = a$ будет иметь корни, если $a \in [-1; 1]$, если a не принадлежит этому отрезку, то уравнение $\cos t = a$ не будет иметь корней.

Итак, решим уравнение $\cos t = a$, где $a \in [-1; 1]$.

Посмотрите выше, решая уравнение $\cos t = \frac{1}{2}$, у нас получилось, что $t = \pm \arccos \frac{1}{2} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$.

Корни уравнения $\cos t = a$, где $a \in [-1; 1]$ можно записать аналогично:

$$t = \pm \arccos a + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Итак, корни уравнения вида $\cos t = a$, где $a \in [-1; 1]$ можно найти по формуле:

$$t = \pm \arccos a + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Если $a = -1; 0; 1$, то это частные случаи и общую формулу для нахождения корней уравнения вида $\cos t = a$, где $a \in [-1; 1]$ не применяют.

Если $\cos t = -1$, то $t = \pi + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$.

Если $\cos t = 0$, то $t = \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$.

Если $\cos t = 1$, то $t = 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$.

- Решим с помощью единичной окружности тригонометрическое уравнение $\sin t = \frac{1}{2}$.

Напоминаю, что ордината точки на единичной окружности – это $\sin t$.

Итак, чертим прямоугольную систему координат, указываем направление координатных осей, отмечаем начало отчета, единичный отрезок, чертим окружность

радиусом один единичный отрезок. Далее поскольку $\sin t$ – это ордината точки на окружности, то есть координата y , то чертим прямую $y = \frac{1}{2}$ (рисунок 3).

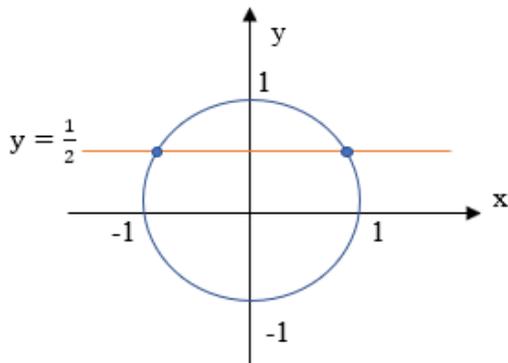


рисунок 3

Получили две точки пересечения единичной окружности и прямой $y = \frac{1}{2}$. Эти точки и есть корни уравнения $\sin t = \frac{1}{2}$.

Для того, чтобы найти значения корней, необходимо ответить на вопрос: синус какого угла равен $\frac{1}{2}$, то есть найти $\arcsin \frac{1}{2}$ (согласно определению арксинуса числа).

$\arcsin \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$ - это значение точки на окружности, которая расположена в первой координатной четверти (рисунок 4).

Для того, чтобы найти значение второй точки пересечения, которая расположена во второй координатной четверти, необходимо выполнить действие $\pi - \arcsin \frac{1}{2} = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$ (рисунок 4).

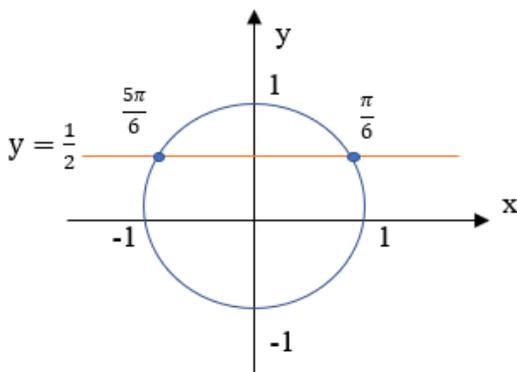


рисунок 4

Напоминаю, что на окружности каждой точке соответствует бесконечное множество значений. В одну и ту же точку на окружности можно попасть через один полный оборот, то есть 2π , потом через два полных оборота, то есть через 4π и т.д.

Поэтому будут две серии корней в уравнении $\sin t = \frac{1}{2}$.

$$t_1 = \frac{\pi}{6} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z};$$

$$t_2 = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Итак, получается, что решение уравнение $\sin t = \frac{1}{2}$ можно записать следующим образом:

$$\sin t = \frac{1}{2},$$

$$t_1 = \arcsin \frac{1}{2} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z},$$

$$t_2 = \pi - \arcsin \frac{1}{2} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z},$$

$$t_1 = \frac{\pi}{6} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z},$$

$$t_2 = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Ответ:

$$t_1 = \frac{\pi}{6} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z},$$

$$t_2 = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Обратите внимание, что уравнение $\sin t = a$ будет иметь корни, если $a \in [-1; 1]$, если a не принадлежит этому отрезку, то уравнение $\sin t = a$ не будет иметь корней.

Итак, решим уравнение $\sin t = a$, где $a \in [-1; 1]$.

Посмотрите выше, решая уравнение $\sin t = \frac{1}{2}$, у нас получилось, что

$$t_1 = \arcsin \frac{1}{2} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z},$$

$$t_2 = \pi - \arcsin \frac{1}{2} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Корни уравнения $\sin t = a$, где $a \in [-1; 1]$ можно записать аналогично:

$$t_1 = \arcsin a + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z},$$

$$t_2 = \pi - \arcsin a + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z},$$

Итак, корни уравнения вида $\sin t = a$, где $a \in [-1; 1]$ можно найти по формулам:

$$t_1 = \arcsin a + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z},$$

$$t_2 = \pi - \arcsin a + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Частные случаи:

$$\sin t = -1, \quad \text{то } t = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

$$\sin t = 0, \quad \text{то } t = \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

$$\sin t = 1, \quad \text{то } t = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

3. Решим уравнение $\operatorname{tg} t = \sqrt{3}$.

Итак, чертим прямоугольную систему координат, указываем направление координатных осей, отмечаем начало отчета, единичный отрезок, чертим окружность радиусом один единичный отрезок. Далее проводим линию тангенсов (рисунок 5).

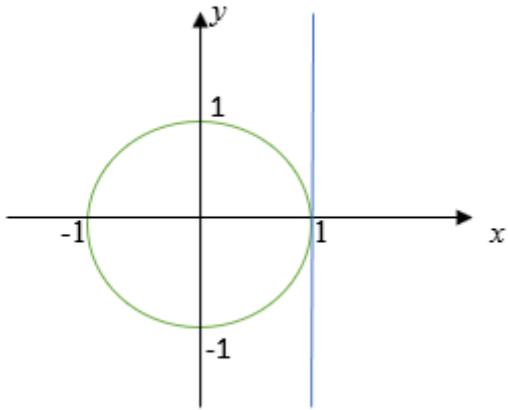


рисунок 5

На линии тангенсов отмечаем значение $\sqrt{3}$. Проводим прямую, проходящую через начало координат и точку на линии тангенсов, которой соответствует значение $\sqrt{3}$ (рисунок 6).

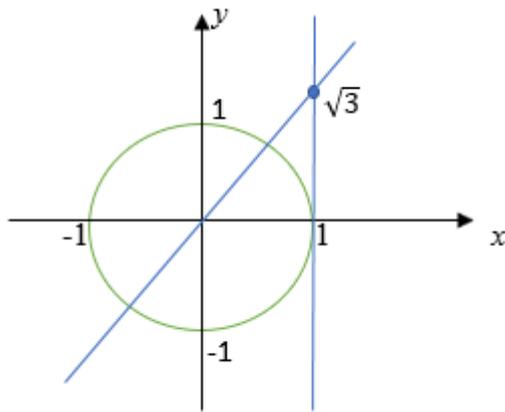


рисунок 6

Прямая, проходящая через начало координат и точку на линии тангенсов, которой соответствует значение $\sqrt{3}$, пересекает окружность в двух точках. Значения на окружности в этих точках и являются решением уравнения $\operatorname{tg} t = \sqrt{3}$ (рисунок 7). Точке на окружности, которая находится в первой координатной плоскости, соответствует значение $\frac{\pi}{3}$ согласно определению арктангенса.

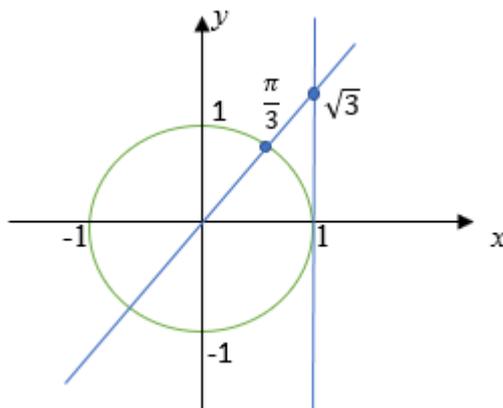


рисунок 7

Значение второй точки на окружности, которое является решением уравнения $\operatorname{tg} t = \sqrt{3}$, можно получить из первого значения, прибавив к нему целое количество π .

Решение уравнения $\operatorname{tg} t = \sqrt{3}$ можно записать следующим образом:

$$\operatorname{tg} t = \sqrt{3},$$

$$t = \operatorname{arctg} \sqrt{3} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z},$$

$$t = \frac{\pi}{3} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Ответ: $t = \frac{\pi}{3} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$.

Теперь можем записать формулу нахождения корней уравнений вида $\operatorname{tg} t = a$.

$$\operatorname{tg} t = a, \text{ то } t = \operatorname{arctg} a + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Нет единой формулы для нахождения корней тригонометрических уравнений. От того какая тригонометрическая функция в уравнении, зависит какую именно формулу нахождения корней нужно применить. Не обязательно учить наизусть все формулы нахождения корней тригонометрических уравнений, можно решать такие уравнения с помощью единичной окружности.

Лекция 21.

Решение тригонометрических неравенств

План лекции:

1. Решение неравенств с $\cos x$.
2. Решение неравенств с $\sin x$.
3. Решение неравенств с $\operatorname{tg} x$.
4. Решение неравенств с $\operatorname{ctg} x$.

Лекция 22.

Тригонометрические функции, их свойства и графики

План лекции:

1. Функция вида $y = \sin x$, ее свойства и график.
2. Функция вида $y = \cos x$, ее свойства и график.
3. Функция вида $y = \operatorname{tg} x$, ее свойства и график.
4. Функция вида $y = \operatorname{ctg} x$, ее свойства и график.

Раздел 9. Последовательности и прогрессии

Лекция 23.

Последовательности, способы задания последовательностей. Монотонные и ограниченные последовательности. Предел последовательности. История анализа бесконечно малых

План лекции:

1. Определение последовательности. Способы задания последовательностей.
2. Монотонные и ограниченные последовательности.
3. Предел последовательности.
4. История анализа бесконечно малых.

1. Функцию вида $y = f(x)$, где $x \in \mathbb{N}$ называют **функцией натурального аргумента или числовой последовательностью** и обозначают $y = f(n)$, или $y_1, y_2, y_3, \dots, y_n$, или (y_n) .

Способы задания последовательности:

- словесный способ (т.е. правило задания последовательности описано с помощью математических терминов).

Например, 1) последовательность простых чисел: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 2) последовательность четных положительных чисел: 2, 4, 6, 8, 3) последовательность положительных чисел, кратных 5: 5, 10, 15, 20,

- аналитический способ (т.е. указана формула n-го члена последовательности, при помощи которой можно найти абсолютно любой член числовой последовательности). Например, 1) $y_n = n^2$ – это аналитическое задание последовательности 1, 4, 9, 16, ..., n^2, \dots 2) $y_n = C$. Здесь идет речь о последовательности C, C, C, \dots, C, \dots . Такую последовательность называют постоянной (или стационарной).

-**рекуррентный способ** задания числовой последовательности состоит в том, что указывают правило, позволяющее вычислить n-ый член последовательности, если известны ее предыдущие члены.

2. Последовательность y_n называют **возрастающей**, если каждый ее член больше предыдущего: $y_1 < y_2 < y_3 < \dots < y_n < y_{n+1} < \dots$. Например, 1, 3, 5, 7, ..., $2n-1, \dots$ - возрастающая последовательность.

Последовательность y_n называют **убывающей**, если каждый ее член меньше предыдущего: $y_1 > y_2 > y_3 > \dots > y_n > y_{n+1} > \dots$. Например, $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots, \frac{1}{n}, \dots$ - убывающая последовательность.

Возрастающие и убывающие последовательности объединяют общим термином – **монотонные последовательности**.

3. Рассмотрим две числовые последовательности (y_n) и (x_n) .

$$(y_n): 1, 3, 5, 7, 9, \dots, 2n - 1, \dots;$$

$$(x_n): 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots, \frac{1}{n}, \dots$$

Изобразим члены этих последовательностей точками на числовой прямой.

На рисунке 1 изображены точками члены последовательности y_n :

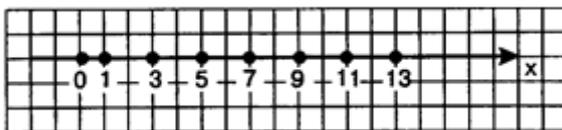


рисунок 1

На рисунке 2 изображены точками члены последовательности x_n :

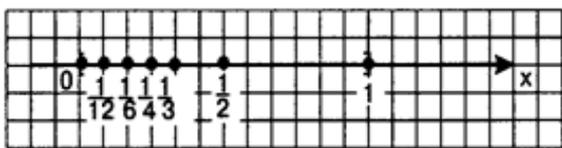


рисунок 2

Обратите внимание на то, что все члены последовательности (x_n) как бы «сгущаются» около точки 0, а у последовательности (y_n) такой «точки сгущения» нет. В подобных случаях математики говорят так: последовательность (x_n) **сходится**, а последовательность (y_n) **расходится**.

Математики не используют термин «точка сгущения» для членов заданной последовательности, они используют термин «предел последовательности».

Число b называют **пределом последовательности** (x_n) , если в любой заранее выбранной окрестности точки b содержатся все члены последовательности, начиная с некоторого номера.

В этом случае пишут: $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = b$ (читают: предел последовательности (x_n) при стремлении n к бесконечности равен b).

Для рассмотренной выше последовательности $x_n = \frac{1}{n}$ можно записать соотношение $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n}\right) = 0$.

Следует отметить, что предел стационарной последовательности равен значению любого члена последовательности: $\lim_{n \rightarrow \infty} C = C$. Например, дана последовательность $2, 2, 2, \dots, 2, \dots$. Это стационарная последовательность, значит $\lim_{n \rightarrow \infty} 2 = 2$.

Для вычисления пределов последовательностей в более сложных случаях используются указанные выше соотношения и следующая теорема.

Теорема: если $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = b$, $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = c$, то

- 1) Предел суммы равен сумме пределов: $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) = b + c$.
- 2) Предел произведения равен произведению пределов: $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n \cdot y_n) = b \cdot c$.
- 3) Предел частного равен частному пределов: $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{x_n}{y_n}\right) = \frac{b}{c}$, $c \neq 0$.
- 4) Постоянный множитель можно вынести за знак предела: $\lim_{n \rightarrow \infty} (kx_n) = kb$.

Рассмотрим несколько примеров вычисления пределов последовательностей.

Вычислим пределы последовательностей:

а) $x_n = \frac{1}{n^2}$; б) $z_n = \frac{k}{n^4}$; в) $t_n = \frac{2}{n} - \frac{5}{n^2} + 3$; г) $y_n = \frac{2n^2 + 3}{n^2 + 4}$.

Решение:

а) $x_n = \frac{1}{n^2} = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n}$ т. е. нужно применить теорему о пределе произведения.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^2}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n}\right) \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n}\right) = 0 \cdot 0 = 0.$$

б) $z_n = \frac{k}{n^4} = k \cdot \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n}$ т. е. нужно применить

теоремы о вынесении множителя и о пределе произведения.

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} z_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{k}{n^4}\right) = k \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^4}\right) = k \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n}\right) = \\ &= k \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n}\right) = k \cdot 0 \cdot 0 \cdot 0 \cdot 0 = 0. \end{aligned}$$

То есть для любого натурального показателя m и любого коэффициента k справедливо равенство $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{k}{n^m}\right) = 0$.

в) применим теорему о пределе суммы:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{n} - \frac{5}{n^2} + 3\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{n}\right) - \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{5}{n^2}\right) + \lim_{n \rightarrow \infty} 3 = 0 - 0 + 3 = 3.$$

г) Преобразуем выражение, задающее последовательность. Для этого разделим числитель и знаменатель дроби почленно на n^2 . Получим:

$$y_n = \frac{2n^2 + 3}{n^2 + 4} = \frac{\frac{2n^2}{n^2} + \frac{3}{n^2}}{\frac{n^2}{n^2} + \frac{4}{n^2}} = \frac{2 + \frac{3}{n^2}}{1 + \frac{4}{n^2}} \text{ т. е. применяем теорему о пределе частного,}$$

потом теорему о сумме предела.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2 + \frac{3}{n^2}}{1 + \frac{4}{n^2}} \right) = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(2 + \frac{3}{n^2} \right)}{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{4}{n^2} \right)} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} 2 + \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3}{n^2} \right)}{\lim_{n \rightarrow \infty} 1 + \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{4}{n^2} \right)} = \frac{2 + 0}{1 + 0} = 2.$$

4. **Бесконечно малая величина** – величина, настолько близкая к нулю, что её невозможно обнаружить средствами арифметики обычных целых чисел.

Первые известные публикации о бесконечно малых принадлежат Архимеду. В сочинении «Метод механических теорем» он предложил свою версию интегрального исчисления, но низкий уровень математики в последующие столетия помешал дальнейшему развитию его идей.

Исаак Ньютон уделил большое внимание бесконечно малым в своём сочинении «Method of Fluxions» (написано около 1671 года, при жизни не опубликовано). Идеи Ньютона быстро вошли в моду, на что епископ Джордж Беркли ответил ядовитым памфлетом. В число скептиков входили также Исаак Барроу и Мишель Ролль. После работ Коши и Вейерштрасса проблема построения числовой системы, включающей бесконечно малые и бесконечно большие, перестала волновать аналитиков. Однако в XX веке такими системами заинтересовались логики в связи с некоторыми вопросами теории множеств (в частности, об ультрафильтрах).

Лекция 24.

Арифметическая и геометрическая прогрессии. Бесконечно убывающая геометрическая прогрессия. Сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии.

План лекции:

1. Арифметическая прогрессия.
2. Геометрическая прогрессия.
3. Бесконечно убывающая геометрическая прогрессия.
4. Сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии.

Раздел 10. Непрерывные функции. Производная

Лекция 25.

Непрерывные функции и их свойства. Точка разрыва. Асимптоты графиков функций. Свойства функций непрерывных на отрезке.

План лекции:

1. Непрерывные функции и их свойства.
2. Свойства непрерывных функций на отрезке.
3. Точка разрыва.
4. Асимптоты графиков функций.

Лекция 26.

Производные элементарных функций. Производная суммы, произведения, частного и композиции функций

План лекции:

1. Определение производной функции.
2. Производные элементарных функций.
3. Производная суммы функций.
4. Производная произведения функций.
5. Производная частного функций.
6. Производная композиции функций.

Лекция 27.

Первая и вторая производные функции. Геометрический и физический смысл производной. Уравнение касательной к графику функции

План лекции:

1. Первая и вторая производные функции.
2. Геометрический смысл производной.
3. Физический смысл производной.
4. Определение касательной к графику функции.
5. Уравнение касательной к графику функции.

Раздел 11. Исследование функций с помощью производной

Лекция 28.

Применение производной к исследованию функций на монотонность и экстремумы и для нахождения наибольшего и наименьшего значения непрерывной функции на отрезке

План лекции:

1. Алгоритм исследования функций на монотонность и экстремумы с помощью производной.
2. Алгоритм нахождения наибольшего и наименьшего значения непрерывной функции на отрезке с помощью производной.

Раздел 12. Первообразная и интеграл

Лекция 29.

Первообразная, основное свойство первообразных. Первообразные элементарных функций. Правила нахождения первообразных. Интеграл. Геометрический смысл интеграла. Вычисление определённого интеграла по формуле Ньютона - Лейбница

План лекции:

1. Первообразная, основное свойство первообразных.
2. Первообразные элементарных функций.
3. Правила нахождения первообразных.
4. Интеграл.
5. Геометрический смысл интеграла.
6. Вычисление определённого интеграла по формуле Ньютона - Лейбница.

Лекция 30.

Применение интеграла для нахождения площадей плоских фигур и объёмов геометрических тел.

План лекции:

1. Применение интеграла для нахождения площадей плоских фигур.
2. Применение интеграла для нахождения объёмов геометрических тел

Лекция 31.

Примеры решений дифференциальных уравнений.

План лекции:

1. Определение дифференциальных уравнений.
2. Виды дифференциальных уравнений.
3. Примеры решений дифференциальных уравнений.

Лекция 32.

Математическое моделирование реальных процессов с помощью дифференциальных уравнений

План лекции:

1. Определение математического моделирования реальных процессов.
2. Математическое моделирование реальных процессов с помощью дифференциальных уравнений.

Раздел 13. Введение в стереометрию

Лекция 33.

История развития стереометрии как науки и её роль в развитии современных инженерных и компьютерных технологий. Основные пространственные фигуры. Понятия стереометрии: точка, прямая, плоскость, пространство. Основные правила изображения на рисунке плоскости, параллельных прямых (отрезков), середины отрезка. Понятия: пересекающиеся плоскости, пересекающиеся прямая и плоскость; полупространство. Аксиомы стереометрии и первые следствия из них. Способы задания прямых и плоскостей в пространстве. Обозначения прямых и плоскостей.

План лекции:

1. История развития стереометрии как науки и её роль в развитии современных инженерных и компьютерных технологий.
2. Основные пространственные фигуры. Понятия стереометрии: точка, прямая, плоскость, пространство. Обозначения прямых и плоскостей.
3. Основные правила изображения на рисунке плоскости, параллельных прямых (отрезков), середины отрезка.
4. Понятия: пересекающиеся плоскости, пересекающиеся прямая и плоскость; полупространство.
5. Аксиомы стереометрии и первые следствия из них.
6. Способы задания прямых и плоскостей в пространстве.

Лекция 34.

Многогранники, изображение простейших пространственных фигур, несуществующих объектов. Сечения. Изображение сечений пирамиды, куба и призмы, которые проходят через их рёбра. Метод следов для построения сечений. Построение сечений в пирамиде, кубе по трём точкам на рёбрах.

План лекции:

1. Многогранники, изображение простейших пространственных фигур, несуществующих объектов.
2. Определение сечения многогранника.
3. Изображение сечений пирамиды, куба и призмы, которые проходят через их рёбра.
4. Метод следов для построения сечений.
5. Построение сечений в пирамиде, кубе по трём точкам на рёбрах.

Лекция 35.

Повторение планиметрии. Теорема о пропорциональных отрезках. Подобие треугольников. Теорема Менелая. Расчёты в сечениях на выносных чертежах.

План лекции:

1. Теорема о пропорциональных отрезках.
2. Подобие треугольников.
3. Теорема Менелая.
4. Расчёты в сечениях на выносных чертежах.

Раздел 14. Взаимное расположение прямых в пространстве

Лекция 36.

Взаимное расположение прямых в пространстве. Скрещивающиеся прямые. Признаки скрещивающихся прямых. Параллельные прямые в пространстве. Теорема о существовании и единственности прямой параллельной данной прямой, проходящей через точку пространства и не лежащей на данной прямой. Лемма о пересечении параллельных прямых плоскостью. Параллельность трёх прямых. Теорема о трёх параллельных прямых. Теорема о скрещивающихся прямых.

План лекции:

1. Взаимное расположение прямых в пространстве.
2. Скрещивающиеся прямые. Признаки скрещивающихся прямых.
3. Теорема о скрещивающихся прямых.
4. Параллельные прямые в пространстве. Теорема о существовании и единственности прямой параллельной данной прямой, проходящей через точку пространства и не лежащей на данной прямой.
5. Лемма о пересечении параллельных прямых плоскостью.
6. Параллельность трёх прямых. Теорема о трёх параллельных прямых.

Лекция 37.

Параллельное проектирование. Основные свойства параллельного проектирования. Изображение разных фигур в параллельной проекции. Центральная проекция.

План лекции:

1. Параллельное проектирование.
2. Основные свойства параллельного проектирования. Изображение разных фигур в параллельной проекции.
3. Центральная проекция.

Раздел 15. Параллельность прямых и плоскостей в пространстве

Лекция 38.

Понятия: параллельность прямой и плоскости в пространстве. Признак параллельности прямой и плоскости. Свойства параллельности прямой и плоскости

План лекции:

1. Понятия: параллельность прямой и плоскости в пространстве.
2. Признак параллельности прямой и плоскости.
3. Свойства параллельности прямой и плоскости

Лекция 39.

Построение сечения, проходящего через данную прямую на чертеже и параллельного другой прямой. Расчёт отношений. Параллельная проекция, применение для построения сечений куба и параллелепипеда

План лекции:

1. Построение сечения, проходящего через данную прямую на чертеже и параллельного другой прямой.
2. Расчёт отношений.
3. Параллельная проекция, применение для построения сечений куба и параллелепипеда.

Лекция 40.

Свойства параллелепипеда и призмы. Параллельные плоскости. Признаки параллельности двух плоскостей. Теорема о параллельности и единственности плоскости, проходящей через точку, не принадлежащую данной плоскости и следствия из неё

План лекции:

1. Свойства параллелепипеда и призмы.
2. Параллельные плоскости. Признаки параллельности двух плоскостей.
3. Теорема о параллельности и единственности плоскости, проходящей через точку, не принадлежащую данной плоскости и следствия из неё.

Раздел 16. Перпендикулярность прямых и плоскостей в пространстве

Лекция 41.

Перпендикулярность прямой и плоскости. Признак перпендикулярности прямой и плоскости. Теорема о существовании и единственности прямой, проходящей через точку пространства и перпендикулярной к плоскости. Плоскости и перпендикулярные им прямая в многогранниках. Построение перпендикуляра из точки на прямую

План лекции:

1. Перпендикулярность прямой и плоскости. Признак перпендикулярности прямой и плоскости.
2. Теорема о существовании и единственности прямой, проходящей через точку пространства и перпендикулярной к плоскости.
3. Плоскости и перпендикулярные им прямая в многогранниках.
4. Построение перпендикуляра из точки на прямую.

Лекция 42. Перпендикуляр и наклонная. Теорема о трёх перпендикулярах (прямая и обратная). Угол между скрещивающимися прямыми. Поиск перпендикулярных прямых с помощью перпендикулярных плоскостей

План лекции:

1. Перпендикуляр, наклонная, проекция наклонной на плоскость.
2. Теорема о трёх перпендикулярах (прямая и обратная).
3. Угол между скрещивающимися прямыми.
4. Поиск перпендикулярных прямых с помощью перпендикулярных плоскостей.

Раздел 17. Углы и расстояния

Лекция 43.

Повторение: угол между прямыми на плоскости, тригонометрия в произвольном треугольнике, теорема косинусов. Повторение: угол между скрещивающимися прямыми в

пространстве. Геометрические методы вычисления угла между прямыми в многогранниках.

План лекции:

1. Угол между прямыми на плоскости.
2. Теорема косинусов.
3. Теорема синусов.
4. Угол между скрещивающимися прямыми в пространстве.
5. Геометрические методы вычисления угла между прямыми в многогранниках.

Лекция 44.

Двугранный угол. Свойство линейных углов двугранного угла. Перпендикулярные плоскости. Свойства взаимно перпендикулярных плоскостей. Признак перпендикулярности плоскостей; теорема о прямой пересечения двух плоскостей перпендикулярных третьей плоскости

План лекции:

1. Определение двугранного угла.
2. Линейный угол двугранного угла. Свойство линейных углов двугранного угла.
3. Перпендикулярные плоскости. Свойства взаимно перпендикулярных плоскостей.
4. Признак перпендикулярности плоскостей.
5. Теорема о прямой пересечения двух плоскостей перпендикулярных третьей плоскости.

Лекция 45.

Трёхгранный угол, неравенства для трёхгранных углов. Теорема Пифагора, теоремы косинусов и синусов для трёхгранного угла

План лекции:

1. Определение трёхгранный угла, неравенства для трёхгранных углов.
2. Теорема Пифагора для трёхгранного угла.
3. Теорема косинусов для трёхгранного угла.
4. Теорема синусов для трёхгранного угла.

Раздел 18. Многогранники

Лекция 46.

Многогранник и его элементы. Пирамида. Виды пирамид. Правильная пирамида. Призма. Прямая и наклонная призмы. Правильная призма. Прямой параллелепипед, прямоугольный параллелепипед, куб. Выпуклые многогранники. Теорема Эйлера. Правильные и полуправильные многогранники

План лекции:

1. Многогранник и его элементы.
2. Пирамида. Виды пирамид. Правильная пирамида.
3. Призма. Прямая и наклонная призмы. Правильная призма.
4. Прямой параллелепипед, прямоугольный параллелепипед, куб.
5. Выпуклые многогранники.
6. Теорема Эйлера.
7. Правильные и полуправильные многогранники

Раздел 19. Векторы в пространстве

Лекция 47. Понятие вектора на плоскости и в пространстве. Сумма и разность векторов, правило параллелепипеда, умножение вектора на число, разложение вектора по базису трёх векторов, не лежащих в одной плоскости. Скалярное произведение, вычисление угла между векторами в пространстве. Простейшие задачи с векторами

План лекции:

1. Понятие вектора на плоскости и в пространстве.
2. Сумма и разность векторов.
3. Правило параллелепипеда.
4. Умножение вектора на число.
5. Разложение вектора по базису трёх векторов, не лежащих в одной плоскости.
6. Скалярное произведение, вычисление угла между векторами в пространстве.
7. Простейшие задачи с векторами

Раздел 20. Движения

Лекция 48. Движения пространства. Отображения. Движения и равенство фигур. Общие свойства движений. Виды движений: параллельный перенос, центральная симметрия, зеркальная симметрия, поворот вокруг прямой. Преобразования подобия. Прямая и сфера Эйлера.

План лекции:

1. Движения пространства. Отображения.
2. Движения и равенство фигур.
3. Общие свойства движений.
4. Виды движений: параллельный перенос, центральная симметрия, зеркальная симметрия, поворот вокруг прямой.
5. Преобразования подобия.
6. Прямая и сфера Эйлера.

Раздел 21. Аналитическая геометрия

Лекция 49. Координаты вектора на плоскости и в пространстве, скалярное произведение векторов, вычисление угла между векторами в пространстве. Уравнение прямой, проходящей через две точки. Уравнение плоскости, нормаль, уравнение плоскости в отрезках

План лекции:

1. Координаты вектора на плоскости и в пространстве.
2. Скалярное произведение векторов, вычисление угла между векторами в пространстве.
3. Уравнение прямой, проходящей через две точки.
4. Уравнение плоскости, нормаль, уравнение плоскости в отрезках.

Лекция 50.

Векторное произведение. Линейные неравенства, линейное программирование

План лекции:

1. Векторное произведение.
2. Линейные неравенства, линейное программирование

Лекция 51. Аналитические методы расчёта угла между прямыми и плоскостями в многогранниках. Формула расстояния от точки до плоскости в координатах.

План лекции:

1. Аналитические методы расчёта угла между прямыми и плоскостями в многогранниках.
2. Формула расстояния от точки до плоскости в координатах.

Раздел 22. Объём многогранника

Лекция 52.

Вычисление объёмов тел с помощью определённого интеграла

План лекции:

1. Вычисление объёмов тел с помощью определённого интеграла

Лекция 53. Объём наклонной призмы, пирамиды. Отношение объёмов пирамид с общим углом

План лекции:

1. Объём наклонной призмы.
2. Объём пирамиды.
3. Отношение объёмов пирамид с общим углом

Раздел 23. Тела вращения

Лекция 54.

Цилиндрическая поверхность, образующие цилиндрической поверхности. Цилиндр. Прямой круговой цилиндр. Площадь поверхности цилиндра

План лекции:

1. Определение цилиндрической поверхности.
2. Определение цилиндра, его элементы.
3. Прямой круговой цилиндр.
4. Площадь поверхности цилиндра

Лекция 55.

Коническая поверхность, образующие конической поверхности. Конус. Сечение конуса плоскостью, параллельной плоскости основания. Усечённый конус. Изображение конусов и усечённых конусов. Площадь боковой поверхности и полной поверхности конуса

План лекции:

1. Коническая поверхность.
2. Конус, его элементы.
3. Сечение конуса плоскостью, параллельной плоскости основания. Усечённый конус.
4. Изображение конусов и усечённых конусов.
5. Площадь боковой поверхности и полной поверхности конуса

Лекция 56.

Сфера и шар. Пересечение сферы и шара с плоскостью. Касание шара и сферы плоскостью. Вид и изображение шара. Симметрия сферы и шара

План лекции:

1. Сфера и шар.
2. Пересечение сферы и шара с плоскостью.
3. Касание шара и сферы плоскостью.
4. Вид и изображение шара.
5. Симметрия сферы и шара

Лекция 57.

Уравнение сферы. Площадь сферы и её частей

План лекции:

1. Уравнение сферы.
2. Площадь сферы и её частей

Лекция 58.

Различные комбинации тел вращения и многогранников

План лекции:

1. Комбинации тел вращения и многогранников

Раздел 24. Площади поверхности и объёмы круглых тел

Лекция 59.

Объём цилиндра. Теорема об объёме прямого цилиндра. Площади боковой и полной поверхности цилиндра

План лекции:

1. Объём цилиндра.
2. Теорема об объёме прямого цилиндра.
3. Площади боковой и полной поверхности цилиндра

Лекция 60.

Вычисление объёмов тел с помощью определённого интеграла

План лекции:

1. Вычисление объёмов тел с помощью определённого интеграла

Лекция 61.

Объём конуса. Площади боковой и полной поверхности конуса

План лекции:

1. Объём конуса.
2. Площади боковой и полной поверхности конуса

Лекция 62.

Объём шара и шарового сектора. Теорема об объёме шара. Площадь сферы

План лекции:

1. Объём шара.
2. Объём шарового сектора.
3. Теорема об объёме шара.
4. Площадь сферы.

Раздел 25. Элементы теории графов

Лекция 63.

Граф, связный граф, представление задачи с помощью графа. Степень (валентность) вершины. Путь в графе. Цепи и циклы. Графы на плоскости. Дерево случайного эксперимента

План лекции:

1. Определение графа. Связный граф, представление задачи с помощью графа.
2. Степень (валентность) вершины графа.
3. Путь в графе. Цепи и циклы.
4. Графы на плоскости.
5. Дерево случайного эксперимента

Раздел 26. Случайные опыты, случайные события и вероятности событий

Лекция 64.

Случайные эксперименты (опыты) и случайные события. Элементарные события (исходы). Вероятность случайного события. Вероятности событий в опытах с равно возможными элементарными событиями

План лекции:

1. Случайные эксперименты (опыты) и случайные события.
2. Элементарные события (исходы).
3. Вероятность случайного события.
4. Вероятности событий в опытах с равно возможными элементарными событиями

Раздел 27. Операции над множествами и событиями. Сложение и умножение вероятностей. Условная вероятность. Независимые события

Лекция 65.

Пересечение, объединение множеств и событий, противоположные события. Формула сложения. Вероятностей. Умножение вероятностей

План лекции:

1. Операции над множествами: пересечение, объединение множеств и событий, противоположные события.
2. Формула сложения вероятностей.
3. Умножение вероятностей

Лекция 66. Условная вероятность. Формула условной вероятности. Формула полной вероятности. Формула Байеса. Независимые события

План лекции:

1. Условная вероятность. Формула условной вероятности.
2. Формула полной вероятности.
3. Формула Байеса.
4. Независимые события

Раздел 28. Элементы комбинаторики

Лекция 67.

Комбинаторное правило умножения. Перестановки и факториал. Число сочетаний. Треугольник Паскаля. Формула бинома Ньютона

План лекции:

1. Комбинаторика.
2. Комбинаторное правило умножения.
3. Перестановки и факториал.
4. Число сочетаний.
5. Треугольник Паскаля.
6. Формула бинома Ньютона

Раздел 29. Серии последовательных испытаний. Испытания Бернулли. Случайный выбор из конечной совокупности

Лекция 68. Бинарный случайный опыт (испытание), успех и неудача. Независимые испытания. Серия независимых испытаний до первого успеха. Серия независимых испытаний Бернулли. Случайный выбор из конечной совокупности

План лекции:

1. Бинарный случайный опыт (испытание), успех и неудача.

2. Независимые испытания. Серия независимых испытаний до первого успеха. Серия независимых испытаний Бернулли.
3. Случайный выбор из конечной совокупности

Раздел 30. Случайные величины и распределения

Лекция 69. Случайная величина. Распределение вероятностей. Диаграмма распределения. Операции над случайными величинами. Примеры распределений

План лекции:

1. Случайная величина.
2. Распределение вероятностей.
3. Диаграмма распределения.
4. Операции над случайными величинами.
5. Примеры распределений

Лекция 70. Бинарная случайная величина. Геометрическое распределение. Биномиальное распределение. Математическое ожидание случайной величины. Совместное распределение двух случайных величин. Независимые случайные величины

План лекции:

1. Бинарная случайная величина.
2. Геометрическое распределение.
3. Биномиальное распределение.
4. Математическое ожидание случайной величины.
5. Совместное распределение двух случайных величин.
6. Независимые случайные величины

Лекция 71. Свойства математического ожидания. Математическое ожидание бинарной случайной величины. Математическое ожидание геометрического и биномиального распределений

План лекции:

1. Свойства математического ожидания.
2. Математическое ожидание бинарной случайной величины.
3. Математическое ожидание геометрического и биномиального распределений

Лекция 72. Дисперсия и стандартное отклонение. Дисперсия бинарной случайной величины. Свойства дисперсии. Математическое ожидание произведения и дисперсия суммы независимых случайных величин. Дисперсия биномиального распределения

План лекции:

1. Дисперсия и стандартное отклонение.
2. Дисперсия бинарной случайной величины. Свойства дисперсии.
3. Математическое ожидание произведения и дисперсия суммы независимых случайных величин.
4. Дисперсия биномиального распределения

2. Методические указания к практическим занятиям

Практическая работа должна прививать обучающимся «**умение учиться**», которое предполагает полноценное освоение всех компонентов учебной деятельности (познавательные и учебные мотивы; учебная цель; учебная задача; учебные действия и операции) и выступает существенным фактором повышения эффективности освоения обучающимися предметных знаний, умений и формирования компетенций, образа мира и ценностно-смысловых оснований личностного морального выбора, побуждать молодёжь принимать активную гражданскую позицию, усиливать личностное развитие и безопасную социальную включённость в жизнь общества, что позволит в дальнейшем легко адаптироваться в трудовом коллективе.

Задачей преподавателя при проведении практических работ является грамотное и доступное разъяснение принципов и правил проведения работ, побуждение обучающихся к самостоятельной работе, определения места изучаемой дисциплины в дальнейшей профессиональной работе будущего выпускника.

Цель практической работы – научить обучающихся самостоятельно производить необходимые действия для достижения желаемого результата.

Прежде чем приступить к выполнению практической работы, обучающемуся необходимо ознакомиться с теоретическим материалом, соответствующим данной теме.

Выполнение практической работы целесообразно разделить на несколько этапов:

- формулировка и обоснование цели работы;
- определение теоретического аппарата, применительно к данной теме;
- выполнение заданий;
- анализ результата; выводы.

Примерные темы практических работ

1. Натуральные и целые числа. Применение признаков делимости целых чисел, НОД и НОК, остатков по модулю, алгоритма Евклида для решения задач в целых числах.

План практической работы:

- 1) Повторить теорию по данной теме.
- 2) Разобрать примеры выполнения заданий.
- 3) Самостоятельно письменно в тетради выполнить задания практической работы.
- 4) Сдать тетрадь с выполненными заданиями преподавателю.

2. Арифметические операции с действительными числами. Модуль действительного числа и его свойства. Приближённые вычисления, правила округления, прикидка и оценка результата вычислений.

План практической работы:

- 1) Повторить теорию по данной теме.
- 2) Разобрать примеры выполнения заданий.
- 3) Самостоятельно письменно в тетради выполнить задания практической работы.
- 4) Сдать тетрадь с выполненными заданиями преподавателю.

3. Арифметические операции с комплексными числами. Формула Муавра. Корни n -ой степени из комплексного числа.

План практической работы:

- 1) Повторить теорию по данной теме.
- 2) Разобрать примеры выполнения заданий.
- 3) Самостоятельно письменно в тетради выполнить задания практической работы.
- 4) Сдать тетрадь с выполненными заданиями преподавателю.

4. Основные методы решения целых уравнений и неравенств. Теорема Виета.

План практической работы:

- 1) Повторить теорию по данной теме.
- 2) Разобрать примеры выполнения заданий.

- 3) Самостоятельно письменно в тетради выполнить задания практической работы.
 - 4) Сдать тетрадь с выполненными заданиями преподавателю.
5. Решение систем линейных уравнений. Матрица системы линейных уравнений. Определитель матрицы 2×2 , его геометрический смысл и свойства; вычисление его значения; применение определителя для решения системы линейных уравнений.

План практической работы:

- 1) Повторить теорию по данной теме.
 - 2) Разобрать примеры выполнения заданий.
 - 3) Самостоятельно письменно в тетради выполнить задания практической работы.
 - 4) Сдать тетрадь с выполненными заданиями преподавателю.
6. Решение прикладных задач с помощью системы линейных уравнений.
- Цель: формирование навыка решения задач профессиональной направленности с помощью систем линейных уравнений.

Задачи:

- повторить методы решения систем линейных уравнений;
- повторить алгоритм решения систем линейных уравнений методом Крамера;
- составить алгоритм решения задач с помощью системы линейных уравнений;
- самостоятельно решить задач профессиональной направленности с помощью систем линейных уравнений.

Методические рекомендации:

Система двух линейных уравнений с двумя неизвестными имеет вид

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1; \\ a_2x + b_2y = c_2. \end{cases}$$

Решить систему – это значит решить две задачи:

1. Определить, имеет ли система линейных уравнений решения и сколько их.
2. Найти все существующие решения.

Один из методов решения систем уравнений – метод Крамера.

Пусть дана система двух линейных уравнений с двумя неизвестными:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1; \\ a_2x + b_2y = c_2. \end{cases}$$

Число, равное $a_1b_2 - a_2b_1 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$, называется определителем второго порядка.

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} - \text{определитель второго порядка.}$$

Вертикальные линии – знак определителя.

Символ Δ – «дельта» - обозначение определителя.

a_1, a_2 - коэффициенты перед переменной x .

b_1, b_2 - коэффициенты перед переменной y .

Определители при переменных Δ_x и Δ_y получаются из определителя системы путем замены соответствующего столбика столбиком из свободных членов:

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix} = c_1b_2 - c_2b_1;$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} = a_1c_2 - a_2c_1.$$

Возможны случаи:

- 1) $\Delta \neq 0$ – система имеет единственное решение:
 $x = \frac{\Delta_x}{\Delta}; y = \frac{\Delta_y}{\Delta}.$

- 2) $\Delta = 0$, но $\Delta_x \neq 0$ или $\Delta_y \neq 0$ – система не имеет решения.
 3) $\Delta = 0$, и $\Delta_x = 0$, и $\Delta_y = 0$ – система имеет множество решений.

Алгоритм решения задач с помощью систем уравнений:

- 1) построить математическую модель;
- 2) выполнить действия с составленной моделью;
- 3) ответить на вопрос задачи.

Рассмотрим пример решения задачи с помощью системы линейных уравнений.

На 1 платье и 3 сарафана пошло 9 м ткани, а на 3 таких же платья и 5 сарафанов - 19 м ткани. Сколько ткани требуется на 1 платье и сколько на 1 сарафан?

Решение:

Пусть x метров ткани понадобится на одно платье, y метров – ткани на сарафан.

Учитывая условие задачи, можно составить систему уравнений:

$$\begin{cases} x + 3y = 9; \\ 3x + 5y = 19. \end{cases}$$

Решим систему методом Крамера.

$$1) \quad \Delta = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 5 - 9 = -4.$$

$\Delta \neq 0$ – система имеет единственное решение.

$$2) \quad \Delta_x = \begin{vmatrix} 9 & 3 \\ 19 & 5 \end{vmatrix} = 45 - 57 = -12;$$

$$3) \quad \Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 9 \\ 3 & 19 \end{vmatrix} = 19 - 27 = -8.$$

$$4) \quad x = \frac{-12}{-4} = 3; \quad y = \frac{-8}{-4} = 2$$

Ответ: 3 метра ткани требуется на 1 платье и 2 метра – на 1 сарафан.

Письменно в тетради решите следующие задачи с помощью систем линейных уравнения.

Задача 1.

Одна швея выполняет плановое задание за 1 месяц, другая выполняет то же задание за 2 месяца, третья – за 3 месяца, четвертая – за 4 месяца. Сколько времени потребуется для совместного выполнения задания?

Задача 2.

Имеются два одинаковых куска разных тканей. Стоимость всего первого куска на 126 руб. больше стоимости второго. Стоимость четырех метров ткани из первого куска на 135 р. превышает стоимость трех метров ткани из второго куска. Покупательница приобрела 3 м ткани из первого куска и 4 м ткани из второго куска и заплатила за все 382р 50 коп. Сколько метров ткани было в каждом из этих кусков? Какова стоимость одного метра ткани каждого куска?

Задача 3.

Одна бригада должна сшить 810 костюмов, другая же за этот срок 900 костюмов. Первая закончила выполнение заказа за 3 дня, а вторая за 6 дней до срока. Какое количество костюмов в день шила каждая бригада, если вторая шила в день на 4 костюма больше первой?

Задача 4.

Швея сшила 96 наволочек за 6 дней, каждый день она шила поровну. За сколько дней она может сшить 64 наволочки при той же норме выработки в день (при такой же производительности)?

Задача 5.

При раскрое детской одежды закройщица в 1-й час работы выпускает 12 заготовок, во 20й час на 2 заготовки больше. Сколько заготовок она выпустит за 6 часов работы?

Задача 6.

В куске было 25 м ткани. Хватит ли этой ткани, чтобы сшить 8 платьев, расходуя на каждое по 3 м?

Задача 7.

В одном куске 5 м ткани, в другом 7 м такой же ткани. За оба куска заплатили 36000 р. Сколько стоит каждый кусок ткани?

Критерии оценивания практической работы:

- оценка «отлично» выставляется, если практические задания решены правильно, с обоснованием применяемых теоретических положений и сопровождается необходимым анализом и интерпретацией полученных результатов;
- оценка «хорошо» выставляется, если практические задания решены с отдельными недостатками, не влияющими на окончательный результат;
- оценка «удовлетворительно» выставляется, если практические задания решены со значительными ошибками;
- оценка «неудовлетворительно» выставляется, если практические задания решены с большим числом ошибок, либо совсем не решены

7. Степень с целым показателем. Бином Ньютона. Степень с рациональным показателем и её свойства.

План практической работы:

- 1) Повторить теорию по данной теме.
- 2) Разобрать примеры выполнения заданий.
- 3) Самостоятельно письменно в тетради выполнить задания практической работы.
- 4) Сдать тетрадь с выполненными заданиями преподавателю.

8. Арифметический корень натуральной степени и его свойства. Преобразования числовых выражений, содержащих степени и корни.

План практической работы:

- 1) Повторить теорию по данной теме.
- 2) Разобрать примеры выполнения заданий.
- 3) Самостоятельно письменно в тетради выполнить задания практической работы.
- 4) Сдать тетрадь с выполненными заданиями преподавателю.

9. Иррациональные уравнения. Основные методы решения иррациональных уравнений. Равносильные переходы в решении иррациональных уравнений.

План практической работы:

- 1) Повторить теорию по данной теме.
- 2) Разобрать примеры выполнения заданий.
- 3) Самостоятельно письменно в тетради выполнить задания практической работы.
- 4) Сдать тетрадь с выполненными заданиями преподавателю.

10. Линейная, квадратичная и дробно-линейная функции. Элементарное исследование и построение графиков этих функций.

План практической работы:

- 1) Повторить теорию по данной теме.
- 2) Разобрать примеры выполнения заданий.
- 3) Самостоятельно письменно в тетради выполнить задания практической работы.
- 4) Сдать тетрадь с выполненными заданиями преподавателю.

11. Показательные уравнения. Основные методы решения показательных уравнений.

План практической работы:

- 1) Повторить теорию по данной теме.
- 2) Разобрать примеры выполнения заданий.
- 3) Самостоятельно письменно в тетради выполнить задания практической работы.
- 4) Сдать тетрадь с выполненными заданиями преподавателю.

12. Логарифмические уравнения. Основные методы решения логарифмических уравнений. Равносильные переходы в решении логарифмических уравнений.

План практической работы:

- 1) Повторить теорию по данной теме.
 - 2) Разобрать примеры выполнения заданий.
 - 3) Самостоятельно письменно в тетради выполнить задания практической работы.
 - 4) Сдать тетрадь с выполненными заданиями преподавателю.
- 13. Основные методы решения показательных и логарифмических неравенств.**
План практической работы:
- 1) Повторить теорию по данной теме.
 - 2) Разобрать примеры выполнения заданий.
 - 3) Самостоятельно письменно в тетради выполнить задания практической работы.
 - 4) Сдать тетрадь с выполненными заданиями преподавателю.
- 14. Основные методы решения иррациональных неравенств**
- 15. Графические методы решения иррациональных, показательных и логарифмических уравнений и неравенств.**
План практической работы:
- 1) Повторить теорию по данной теме.
 - 2) Разобрать примеры выполнения заданий.
 - 3) Самостоятельно письменно в тетради выполнить задания практической работы.
 - 4) Сдать тетрадь с выполненными заданиями преподавателю.
- 16. Основные методы решения систем и совокупностей рациональных, иррациональных, показательных и логарифмических уравнений.**
План практической работы:
- 1) Повторить теорию по данной теме.
 - 2) Разобрать примеры выполнения заданий.
 - 3) Самостоятельно письменно в тетради выполнить задания практической работы.
 - 4) Сдать тетрадь с выполненными заданиями преподавателю.
- 17. Построение и исследование математических моделей реальных ситуаций с помощью уравнений, систем уравнений и неравенств с параметрами.**
План практической работы:
- 1) Повторить теорию по данной теме.
 - 2) Разобрать примеры выполнения заданий.
 - 3) Самостоятельно письменно в тетради выполнить задания практической работы.
 - 4) Сдать тетрадь с выполненными заданиями преподавателю.
- 18. Преобразование тригонометрических выражений.**
План практической работы:
- 1) Повторить теорию по данной теме.
 - 2) Разобрать примеры выполнения заданий.
 - 3) Самостоятельно письменно в тетради выполнить задания практической работы.
 - 4) Сдать тетрадь с выполненными заданиями преподавателю.
- 19. Решение тригонометрических уравнений.**
План практической работы:
- 1) Повторить теорию по данной теме.
 - 2) Разобрать примеры выполнения заданий.
 - 3) Самостоятельно письменно в тетради выполнить задания практической работы.
 - 4) Сдать тетрадь с выполненными заданиями преподавателю.
- 20. Отбор корней тригонометрических уравнений с помощью тригонометрической окружности.**
План практической работы:
- 1) Повторить теорию по данной теме.
 - 2) Разобрать примеры выполнения заданий.
 - 3) Самостоятельно письменно в тетради выполнить задания практической работы.
 - 4) Сдать тетрадь с выполненными заданиями преподавателю.

21. Последовательности, способы задания последовательностей. Монотонные и ограниченные последовательности. Предел последовательности.

План практической работы:

- 1) Повторить теорию по данной теме.
- 2) Разобрать примеры выполнения заданий.
- 3) Самостоятельно письменно в тетради выполнить задания практической работы.
- 4) Сдать тетрадь с выполненными заданиями преподавателю.

22. Арифметическая и геометрическая прогрессии. Бесконечно убывающая геометрическая прогрессия. Сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии.

План практической работы:

- 1) Повторить теорию по данной теме.
- 2) Разобрать примеры выполнения заданий.
- 3) Самостоятельно письменно в тетради выполнить задания практической работы.
- 4) Сдать тетрадь с выполненными заданиями преподавателю.

23. Формула сложных процентов. Использование прогрессии для решения реальных задач прикладного характера.

План практической работы:

- 1) Повторить теорию по данной теме.
- 2) Разобрать примеры выполнения заданий.
- 3) Самостоятельно письменно в тетради выполнить задания практической работы.
- 4) Сдать тетрадь с выполненными заданиями преподавателю.

24. Применение свойств непрерывных функций для решения задач.

План практической работы:

- 1) Повторить теорию по данной теме.
- 2) Разобрать примеры выполнения заданий.
- 3) Самостоятельно письменно в тетради выполнить задания практической работы.
- 4) Сдать тетрадь с выполненными заданиями преподавателю.

25. Метод интервалов для решения неравенств.

План практической работы:

- 1) Повторить теорию по данной теме.
- 2) Разобрать примеры выполнения заданий.
- 3) Самостоятельно письменно в тетради выполнить задания практической работы.
- 4) Сдать тетрадь с выполненными заданиями преподавателю.

26. Производные элементарных функций. Производная суммы, произведения, частного и композиции функций.

План практической работы:

- 1) Повторить теорию по данной теме.
- 2) Разобрать примеры выполнения заданий.
- 3) Самостоятельно письменно в тетради выполнить задания практической работы.
- 4) Сдать тетрадь с выполненными заданиями преподавателю.

27. Первая и вторая производные функции. Геометрический и физический смысл производной. Уравнение касательной к графику функции.

План практической работы:

- 1) Повторить теорию по данной теме.
- 2) Разобрать примеры выполнения заданий.
- 3) Самостоятельно письменно в тетради выполнить задания практической работы.
- 4) Сдать тетрадь с выполненными заданиями преподавателю.

28. Применение производной к исследованию функций на монотонность и экстремумы.

План практической работы:

- 1) Повторить теорию по данной теме.
- 2) Разобрать примеры выполнения заданий.
- 3) Самостоятельно письменно в тетради выполнить задания практической работы.

- 4) Сдать тетрадь с выполненными заданиями преподавателю.
- 29.** Нахождение наибольшего и наименьшего значения непрерывной функции на отрезке.
План практической работы:
- 1) Повторить теорию по данной теме.
 - 2) Разобрать примеры выполнения заданий.
 - 3) Самостоятельно письменно в тетради выполнить задания практической работы.
 - 4) Сдать тетрадь с выполненными заданиями преподавателю.
- 30.** Применение производной для нахождения наилучшего решения в прикладных задачах, для определения скорости и ускорения процесса, заданного формулой или графиком. Композиция функций.
План практической работы:
- 1) Повторить теорию по данной теме.
 - 2) Разобрать примеры выполнения заданий.
 - 3) Самостоятельно письменно в тетради выполнить задания практической работы.
 - 4) Сдать тетрадь с выполненными заданиями преподавателю.
- 31.** Интеграл. Геометрический смысл интеграла. Вычисление определённого интеграла по формуле Ньютона – Лейбница.
План практической работы:
- 1) Повторить теорию по данной теме.
 - 2) Разобрать примеры выполнения заданий.
 - 3) Самостоятельно письменно в тетради выполнить задания практической работы.
 - 4) Сдать тетрадь с выполненными заданиями преподавателю.
- 32.** Применение интеграла для нахождения площадей плоских фигур и объёмов геометрических тел.
План практической работы:
- 1) Повторить теорию по данной теме.
 - 2) Разобрать примеры выполнения заданий.
 - 3) Самостоятельно письменно в тетради выполнить задания практической работы.
 - 4) Сдать тетрадь с выполненными заданиями преподавателю.
- 33.** Понятия стереометрии: точка, прямая, плоскость, пространство. Понятия: пересекающиеся плоскости, пересекающиеся прямая и плоскость; полупространство. Аксиомы стереометрии и первые следствия из них. Способы задания прямых и плоскостей в пространстве.
План практической работы:
- 1) Повторить теорию по данной теме.
 - 2) Разобрать примеры выполнения заданий.
 - 3) Самостоятельно письменно в тетради выполнить задания практической работы.
 - 4) Сдать тетрадь с выполненными заданиями преподавателю.
- 34.** Сечения. Изображение сечений пирамиды, куба и призмы, которые проходят через их рёбра. Изображение пересечения полученных плоскостей. Раскрашивание построенных сечений разными цветами. Метод следов для построения сечений. Свойства пересечений прямых и плоскостей. Построение сечений в пирамиде, кубе по трём точкам на рёбрах. Создание выносных чертежей и запись шагов построения.
План практической работы:
- 1) Повторить теорию по данной теме.
 - 2) Разобрать примеры выполнения заданий.
 - 3) Самостоятельно письменно в тетради выполнить задания практической работы.
 - 4) Сдать тетрадь с выполненными заданиями преподавателю.
- 35.** Теорема о пропорциональных отрезках. Подобие треугольников. Теорема Менелая. Расчёты в сечениях на выносных чертежах.
План практической работы:
- 1) Повторить теорию по данной теме.

- 2) Разобрать примеры выполнения заданий.
 - 3) Самостоятельно письменно в тетради выполнить задания практической работы.
 - 4) Сдать тетрадь с выполненными заданиями преподавателю.
- 36.** Угол с сонаправленными сторонами. Угол между прямыми.
- План практической работы:
- 1) Повторить теорию по данной теме.
 - 2) Разобрать примеры выполнения заданий.
 - 3) Самостоятельно письменно в тетради выполнить задания практической работы.
 - 4) Сдать тетрадь с выполненными заданиями преподавателю.
- 37.** Задачи на доказательство и исследование, связанные с расположением прямых в пространстве.
- План практической работы:
- 1) Повторить теорию по данной теме.
 - 2) Разобрать примеры выполнения заданий.
 - 3) Самостоятельно письменно в тетради выполнить задания практической работы.
 - 4) Сдать тетрадь с выполненными заданиями преподавателю.
- 38.** Геометрические задачи на вычисление и доказательство, связанные с параллельностью прямых и плоскостей в пространстве.
- План практической работы:
- 1) Повторить теорию по данной теме.
 - 2) Разобрать примеры выполнения заданий.
 - 3) Самостоятельно письменно в тетради выполнить задания практической работы.
 - 4) Сдать тетрадь с выполненными заданиями преподавателю.
- 39.** Свойства параллельных плоскостей: о параллельности прямых пересечения при пересечении двух параллельных плоскостей третьей; об отрезках параллельных прямых, заключённых между параллельными плоскостями; о пересечении прямой с двумя параллельными плоскостями.
- План практической работы:
- 1) Повторить теорию по данной теме.
 - 2) Разобрать примеры выполнения заданий.
 - 3) Самостоятельно письменно в тетради выполнить задания практической работы.
 - 4) Сдать тетрадь с выполненными заданиями преподавателю.
- 40.** Повторение: теорема Пифагора на плоскости, тригонометрия прямоугольного треугольника. Свойства куба и прямоугольного параллелепипеда. Вычисление длин отрезков в кубе и прямоугольном параллелепипеде.
- План практической работы:
- 1) Повторить теорию по данной теме.
 - 2) Разобрать примеры выполнения заданий.
 - 3) Самостоятельно письменно в тетради выполнить задания практической работы.
 - 4) Сдать тетрадь с выполненными заданиями преподавателю.
- 41.** Признак перпендикулярности прямой и плоскости. Перпендикуляр и наклонная. Теорема о трёх перпендикулярах (прямая и обратная).
- План практической работы:
- 1) Повторить теорию по данной теме.
 - 2) Разобрать примеры выполнения заданий.
 - 3) Самостоятельно письменно в тетради выполнить задания практической работы.
 - 4) Сдать тетрадь с выполненными заданиями преподавателю.
- 42.** Ортогональное проектирование. Построение сечений куба, призмы, правильной пирамиды с помощью ортогональной проекции. Симметрия в пространстве относительно плоскости. Плоскости симметрий в многогранниках.
- План практической работы:
- 1) Повторить теорию по данной теме.

- 2) Разобрать примеры выполнения заданий.
 - 3) Самостоятельно письменно в тетради выполнить задания практической работы.
 - 4) Сдать тетрадь с выполненными заданиями преподавателю.
- 43. Перпендикуляр и наклонная. Теорема о трёх перпендикулярах (прямая и обратная).**
План практической работы:
- 1) Повторить теорию по данной теме.
 - 2) Разобрать примеры выполнения заданий.
 - 3) Самостоятельно письменно в тетради выполнить задания практической работы.
 - 4) Сдать тетрадь с выполненными заданиями преподавателю.
- 44. Признак перпендикулярности прямой и плоскости как следствие симметрии. Правильные многогранники Расчёт расстояний от точки до плоскости. Способы опустить перпендикуляры: симметрия, сдвиг точки по параллельной прямой. Сдвиг по непараллельной прямой, изменение расстояний.**
План практической работы:
- 1) Повторить теорию по данной теме.
 - 2) Разобрать примеры выполнения заданий.
 - 3) Самостоятельно письменно в тетради выполнить задания практической работы.
 - 4) Сдать тетрадь с выполненными заданиями преподавателю.
- 45. Прямоугольный параллелепипед; куб; измерения, свойства прямоугольного параллелепипеда. Теорема о диагонали прямоугольного параллелепипеда и следствие из неё.**
План практической работы:
- 1) Повторить теорию по данной теме.
 - 2) Разобрать примеры выполнения заданий.
 - 3) Самостоятельно письменно в тетради выполнить задания практической работы.
 - 4) Сдать тетрадь с выполненными заданиями преподавателю.
- 46. Стереометрические и прикладные задачи, связанные с взаимным расположением прямых и плоскости. Пара параллельных плоскостей на скрещивающихся прямых, расстояние между скрещивающимися прямыми в простых ситуациях.**
План практической работы:
- 1) Повторить теорию по данной теме.
 - 2) Разобрать примеры выполнения заданий.
 - 3) Самостоятельно письменно в тетради выполнить задания практической работы.
 - 4) Сдать тетрадь с выполненными заданиями преподавателю.
- 47. Опускание перпендикуляров, вычисление расстояний от точки до точки; прямой; плоскости. Вычисление расстояний между скрещивающимися прямыми с помощью перпендикулярной плоскости.**
План практической работы:
- 1) Повторить теорию по данной теме.
 - 2) Разобрать примеры выполнения заданий.
 - 3) Самостоятельно письменно в тетради выполнить задания практической работы.
 - 4) Сдать тетрадь с выполненными заданиями преподавателю.
- 48. Сумма и разность векторов, правило параллелепипеда, умножение вектора на число, разложение вектора по базису трёх векторов, не лежащих в одной плоскости. Скалярное произведение, вычисление угла между векторами в пространстве. Простейшие задачи с векторами.**
План практической работы:
- 1) Повторить теорию по данной теме.
 - 2) Разобрать примеры выполнения заданий.
 - 3) Самостоятельно письменно в тетради выполнить задания практической работы.
 - 4) Сдать тетрадь с выполненными заданиями преподавателю.
- 49. Геометрические задачи на применение движения.**

План практической работы:

- 1) Повторить теорию по данной теме.
- 2) Разобрать примеры выполнения заданий.
- 3) Самостоятельно письменно в тетради выполнить задания практической работы.
- 4) Сдать тетрадь с выполненными заданиями преподавателю.

50. Координаты вектора на плоскости и в пространстве, скалярное произведение векторов, вычисление угла между векторами в пространстве.

План практической работы:

- 1) Повторить теорию по данной теме.
- 2) Разобрать примеры выполнения заданий.
- 3) Самостоятельно письменно в тетради выполнить задания практической работы.
- 4) Сдать тетрадь с выполненными заданиями преподавателю.

51. Уравнение прямой, проходящей через две точки. Уравнение плоскости, нормаль, уравнение плоскости в отрезках.

План практической работы:

- 1) Повторить теорию по данной теме.
- 2) Разобрать примеры выполнения заданий.
- 3) Самостоятельно письменно в тетради выполнить задания практической работы.
- 4) Сдать тетрадь с выполненными заданиями преподавателю.

52. Векторное произведение. Линейные неравенства, линейное программирование.

План практической работы:

- 1) Повторить теорию по данной теме.
- 2) Разобрать примеры выполнения заданий.
- 3) Самостоятельно письменно в тетради выполнить задания практической работы.
- 4) Сдать тетрадь с выполненными заданиями преподавателю.

53. Аналитические методы расчёта угла между прямыми и плоскостями в многогранниках. Формула расстояния от точки до плоскости в координатах. Нахождение расстояний от точки до плоскости в кубе и правильной пирамиде.

План практической работы:

- 1) Повторить теорию по данной теме.
- 2) Разобрать примеры выполнения заданий.
- 3) Самостоятельно письменно в тетради выполнить задания практической работы.
- 4) Сдать тетрадь с выполненными заданиями преподавателю.

54. Объём тела. Объём прямоугольного параллелепипеда. Задачи об удвоении куба, о квадратуре куба; о трисекции угла. Стереометрические задачи, связанные с объёмом прямоугольного параллелепипеда. Прикладные задачи, связанные с вычислением объёма прямоугольного параллелепипеда.

План практической работы:

- 1) Повторить теорию по данной теме.
- 2) Разобрать примеры выполнения заданий.
- 3) Самостоятельно письменно в тетради выполнить задания практической работы.
- 4) Сдать тетрадь с выполненными заданиями преподавателю.

55. Объём прямой призмы. Стереометрические задачи, связанные с вычислением объёмов прямой призмы. Прикладные задачи, связанные с объёмом прямой призмы.

План практической работы:

- 1) Повторить теорию по данной теме.
- 2) Разобрать примеры выполнения заданий.
- 3) Самостоятельно письменно в тетради выполнить задания практической работы.
- 4) Сдать тетрадь с выполненными заданиями преподавателю.

56. Стереометрические задачи, связанные с объёмами наклонной призмы, пирамиды.

План практической работы:

- 1) Повторить теорию по данной теме.

- 2) Разобрать примеры выполнения заданий.
 - 3) Самостоятельно письменно в тетради выполнить задания практической работы.
 - 4) Сдать тетрадь с выполненными заданиями преподавателю.
- 57.** Прикладные задачи по теме «Объёмы тел», связанные с объёмом наклонной призмы, пирамиды. Применение объёмов.
- План практической работы:
- 1) Повторить теорию по данной теме.
 - 2) Разобрать примеры выполнения заданий.
 - 3) Самостоятельно письменно в тетради выполнить задания практической работы.
 - 4) Сдать тетрадь с выполненными заданиями преподавателю.
- 58.** Вычисление расстояния до плоскости.
- План практической работы:
- 1) Повторить теорию по данной теме.
 - 2) Разобрать примеры выполнения заданий.
 - 3) Самостоятельно письменно в тетради выполнить задания практической работы.
 - 4) Сдать тетрадь с выполненными заданиями преподавателю.
- 59.** Стереометрические задачи на доказательство и вычисление, построением сечений цилиндра, конуса. Прикладные задачи, связанные с цилиндром.
- План практической работы:
- 1) Повторить теорию по данной теме.
 - 2) Разобрать примеры выполнения заданий.
 - 3) Самостоятельно письменно в тетради выполнить задания практической работы.
 - 4) Сдать тетрадь с выполненными заданиями преподавателю.
- 60.** Уравнение сферы. Площадь сферы и её частей.
- План практической работы:
- 1) Повторить теорию по данной теме.
 - 2) Разобрать примеры выполнения заданий.
 - 3) Самостоятельно письменно в тетради выполнить задания практической работы.
 - 4) Сдать тетрадь с выполненными заданиями преподавателю.
- 61.** Стереометрические задачи на доказательство и вычисление, связанные со сферой и шаром, построением их сечений плоскостью. Прикладные задачи, связанные со сферой и шаром.
- План практической работы:
- 1) Повторить теорию по данной теме.
 - 2) Разобрать примеры выполнения заданий.
 - 3) Самостоятельно письменно в тетради выполнить задания практической работы.
 - 4) Сдать тетрадь с выполненными заданиями преподавателю.
- 62.** Решение задач по теме "Тела и поверхности вращения".
- План практической работы:
- 1) Повторить теорию по данной теме.
 - 2) Разобрать примеры выполнения заданий.
 - 3) Самостоятельно письменно в тетради выполнить задания практической работы.
 - 4) Сдать тетрадь с выполненными заданиями преподавателю.
- 63.** Вычисление объёмов тел с помощью определённого интеграла.
- План практической работы:
- 1) Повторить теорию по данной теме.
 - 2) Разобрать примеры выполнения заданий.
 - 3) Самостоятельно письменно в тетради выполнить задания практической работы.
 - 4) Сдать тетрадь с выполненными заданиями преподавателю.
- 64.** Стереометрические задачи, связанные с вычислением объёмов цилиндра, конуса.
- План практической работы:
- 1) Повторить теорию по данной теме.

- 2) Разобрать примеры выполнения заданий.
 - 3) Самостоятельно письменно в тетради выполнить задания практической работы.
 - 4) Сдать тетрадь с выполненными заданиями преподавателю.
- 65.** Прикладные задачи по теме "Объёмы и площади поверхностей тел".
План практической работы:
- 1) Повторить теорию по данной теме.
 - 2) Разобрать примеры выполнения заданий.
 - 3) Самостоятельно письменно в тетради выполнить задания практической работы.
 - 4) Сдать тетрадь с выполненными заданиями преподавателю.
- 66.** Стереометрические задачи, связанные с вычислением объёмов шара, шарового сегмента, шарового сектора.
План практической работы:
- 1) Повторить теорию по данной теме.
 - 2) Разобрать примеры выполнения заданий.
 - 3) Самостоятельно письменно в тетради выполнить задания практической работы.
 - 4) Сдать тетрадь с выполненными заданиями преподавателю.
- 67.** Прикладные задачи по теме "Объёмы тел", связанные с объёмом шара и площадью сферы. Соотношения между площадями поверхностей и объёмами подобных тел.
План практической работы:
- 1) Повторить теорию по данной теме.
 - 2) Разобрать примеры выполнения заданий.
 - 3) Самостоятельно письменно в тетради выполнить задания практической работы.
 - 4) Сдать тетрадь с выполненными заданиями преподавателю.
- 68.** Подобные тела в пространстве. Изменение объёма при подобии.
План практической работы:
- 1) Повторить теорию по данной теме.
 - 2) Разобрать примеры выполнения заданий.
 - 3) Самостоятельно письменно в тетради выполнить задания практической работы.
 - 4) Сдать тетрадь с выполненными заданиями преподавателю.
- 69.** Стереометрические задачи, связанные с вычислением объёмов тел и площадей поверхностей.
План практической работы:
- 1) Повторить теорию по данной теме.
 - 2) Разобрать примеры выполнения заданий.
 - 3) Самостоятельно письменно в тетради выполнить задания практической работы.
 - 4) Сдать тетрадь с выполненными заданиями преподавателю.
- 70.** Вероятность случайного события. Вероятности событий в опытах с равно возможными элементарными событиями.
План практической работы:
- 1) Повторить теорию по данной теме.
 - 2) Разобрать примеры выполнения заданий.
 - 3) Самостоятельно письменно в тетради выполнить задания практической работы.
 - 4) Сдать тетрадь с выполненными заданиями преподавателю.
- 71.** Формула сложения вероятностей Умножение вероятностей. Формула полной вероятности.
План практической работы:
- 1) Повторить теорию по данной теме.
 - 2) Разобрать примеры выполнения заданий.
 - 3) Самостоятельно письменно в тетради выполнить задания практической работы.
 - 4) Сдать тетрадь с выполненными заданиями преподавателю.
- 72.** Комбинаторное правило умножения. Перестановки и факториал. Число сочетаний. Треугольник Паскаля. Формула бинома Ньютона.

План практической работы:

- 1) Повторить теорию по данной теме.
- 2) Разобрать примеры выполнения заданий.
- 3) Самостоятельно письменно в тетради выполнить задания практической работы.
- 4) Сдать тетрадь с выполненными заданиями преподавателю.

73. Бинарный случайный опыт (испытание), успех и неудача. Независимые испытания. Серия независимых испытаний до первого успеха. Серия независимых испытаний Бернулли. Случайный выбор из конечной совокупности.

План практической работы:

- 1) Повторить теорию по данной теме.
- 2) Разобрать примеры выполнения заданий.
- 3) Самостоятельно письменно в тетради выполнить задания практической работы.
- 4) Сдать тетрадь с выполненными заданиями преподавателю.

74. Дисперсия и стандартное отклонение. Дисперсия бинарной случайной величины. Свойства дисперсии. Математическое ожидание произведения и дисперсия суммы независимых случайных величин. Дисперсия биномиального распределения.

План практической работы:

- 1) Повторить теорию по данной теме.
- 2) Разобрать примеры выполнения заданий.
- 3) Самостоятельно письменно в тетради выполнить задания практической работы.
- 4) Сдать тетрадь с выполненными заданиями преподавателю.

75. Неравенство Чебышёва. Теорема Чебышёва. Теорема Бернулли. Закон больших чисел. Выборочный метод исследований.

План практической работы:

- 1) Повторить теорию по данной теме.
- 2) Разобрать примеры выполнения заданий.
- 3) Самостоятельно письменно в тетради выполнить задания практической работы.
- 4) Сдать тетрадь с выполненными заданиями преподавателю.

76. Оценка среднего и дисперсии генеральной совокупности с помощью выборочных характеристик. Оценивание вероятностей событий по выборке.

План практической работы:

- 1) Повторить теорию по данной теме.
- 2) Разобрать примеры выполнения заданий.
- 3) Самостоятельно письменно в тетради выполнить задания практической работы.
- 4) Сдать тетрадь с выполненными заданиями преподавателю.

77. Последовательность одиночных независимых событий. Пример задачи, приводящей к распределению Пуассона.

План практической работы:

- 1) Повторить теорию по данной теме.
- 2) Разобрать примеры выполнения заданий.
- 3) Самостоятельно письменно в тетради выполнить задания практической работы.
- 4) Сдать тетрадь с выполненными заданиями преподавателю.

78. Ковариация двух случайных величин. Коэффициент корреляции. Совместные наблюдения двух величин. Выборочный коэффициент корреляции. Различие между линейной связью и причинно- следственной связью. Линейная регрессия.

План практической работы:

- 1) Повторить теорию по данной теме.
- 2) Разобрать примеры выполнения заданий.
- 3) Самостоятельно письменно в тетради выполнить задания практической работы.
- 4) Сдать тетрадь с выполненными заданиями преподавателю.

3.Методические рекомендации к устному опросу

Устный опрос — метод контроля, позволяющий не только опрашивать и контролировать знания обучающихся, но и сразу же поправлять, повторять и закреплять знания, умения и навыки.

Устный опрос позволяет поддерживать контакт с обучающимися, корректировать их мысли; развивает устную речь (монологическую, диалогическую); развивает навыки выступления перед аудиторией.

Принято выделять два вида устного опроса:

- фронтальный (охватывает сразу несколько обучающихся);
- индивидуальный (позволяет сконцентрировать внимание на одном обучающимся).

4.Методические рекомендации к письменному опросу

Письменный опрос более лояльный, чем устный, так как дает обучающемуся время сосредоточиться, менять порядок заданий (например, начать отвечать с более легких вопросов).

К приемам письменного опроса относятся все диктанты, проверочные, самостоятельные и контрольные работы. Но есть еще несколько приемов, которые можно использовать на всех уроках.

Блиц-контрольная — содержит небольшое количество заданий и рассчитана на 5-10 минут. Отличие от обычной контрольной в том, что не нужно оформлять задания как обычно. Требуется лишь ответ. Можно проводить на этапе проверки домашнего задания или на этапе усвоения новых знаний.

Фактологический диктант — требует только кратких ответов. Обучающимся раздаются рабочие листы с 5-6 базовыми вопросами. Диктант проводится быстро, в хорошем темпе. Работы проверяются выборочно, но можно проверить и все. Очень удобно проводить такой диктант на этапе повторения, пройденного перед объяснением новой темы.

Тестирование с помощью компьютера. Специальные программы позволяют провести тестирование в режиме онлайн. Результат сразу выводится на монитор. Очень удобно, когда требуется быстро проверить готовность группы к восприятию новой темы или проверить, насколько точно они поняли новый материал.

5.Методические рекомендации для выполнения самостоятельной работы

Для успешного усвоения материала обучающийся должен кроме аудиторной работы заниматься самостоятельно. Самостоятельная работа является активной учебной деятельностью, направленной на качественное решение задач самообучения, самовоспитания и саморазвития. Самостоятельная работа обучающихся выполняется без непосредственного участия преподавателя, но по его заданию и в специально отведенное для этого время. Условиям эффективности самостоятельной работы обучающихся является ее систематическое выполнение.

Целью самостоятельной работы по учебному предмету является закрепление полученных теоретических и практических знаний, выработка навыков самостоятельной работы и умения применять полученные знания. Самостоятельная работа направлена на углубление и закрепление знаний и умений, комплекса профессиональных компетенций, повышение творческого потенциала. Самостоятельная работа заключается в проработке тем лекционного материала, поиске и анализе литературы из учебников, учебно-методических пособий и электронных источников информации по заданной проблеме, изучении тем, вынесенных на самостоятельную проработку, подготовке к лабораторным работам, выполнению творческих индивидуальных работ.

Формой итогового контроля по предмету является экзамен. Обучающиеся получают допуск к экзамену только после выполнения всех видов самостоятельной

работы и защиты практических работ, предусмотренных рабочей программой предмета. Обучающиеся, не выполнившие все виды самостоятельной работы, являются задолжниками и к экзамену не допускаются.

Виды самостоятельной работы при изучении учебного предмету:

- подготовка докладов;
- решение задач;
- подготовка к устному ответу.

6.Методические рекомендации по составлению информационных сообщений (докладов)

Информационное сообщение (доклад) – это результат процессов преобразования формы и содержания документов с целью их изучения, извлечения необходимых сведений, а также их оценки, сопоставления, обобщения и представления в устной форме (защиты)

Требования к оформлению

Объем информационных сообщений (докладов) – до 5 полных страниц текста, набранного в текстовом редакторе Word, шрифтом – Times New Roman, 14 шрифтом с одинарным межстрочным интервалом, параметры страницы – поля со всех сторон по 20 мм.

Ссылки на литературу концевые, 10 шрифтом. В названии следует использовать заглавные буквы, полужирный шрифт, при этом не следует использовать переносы; выравнивание осуществлять по центру страницы. Данные об авторе указываются 14 шрифтом (курсивом) в правом верхнем углу листа.

7.Методические рекомендации к проведению занятий с использованием активных и интерактивных форм

Федеральный государственный образовательный стандарт среднего профессионального образования (ФГОС СПО) одним из требований к условиям реализации основных образовательных программ обязывает использовать в учебном процессе активные и интерактивные формы проведения занятий в сочетании с внеаудиторной работой с целью формирования и развития профессиональных навыков обучающихся.

Внедрение активных и интерактивных форм обучения – одно из важнейших направлений совершенствования подготовки обучающихся.

Активные методы обучения – формы обучения, направленные на развитие у обучаемых самостоятельного мышления и способности квалифицированно решать нестандартные профессиональные задачи. Цель обучения – развивать мышление обучаемых, вовлечение их в решение проблем, расширение и углубление знаний и одновременное развитие практических навыков и умения мыслить, размышлять, осмысливать свои действия.

Интерактивное обучение – это специальная форма организации познавательной деятельности. Она имеет в виду вполне конкретные и прогнозируемые цели:

повышение эффективности образовательного процесса, достижение высоких результатов;

- усиление мотивации к изучению дисциплины;
- формирование и развитие профессиональных навыков обучающихся;
- формирование коммуникативных навыков;
- развитие навыков анализа и рефлексивных проявлений;

- развитие навыков владения современными техническими средствами и технологиями восприятия и обработки информации;
- формирование и развитие умения самостоятельно находить информацию и определять ее достоверность;
- сокращение доли аудиторной работы и увеличение объема самостоятельной работы студентов.

Интерактивные формы применяются при проведении аудиторных занятий, при самостоятельной работе обучающихся и других видах учебных занятий, а также при повышении квалификации.

Занятия с применением активных и интерактивных форм проведения занятий
Занятия с применением интерактивных технологий – **мозговой штурм.**

Занятие по теме: «Интеграл. Геометрический смысл интеграла. Вычисление определённого интеграла по формуле Ньютона – Лейбница».

Метод мозгового штурма является одним из способов поиска новых идей. Он представляет собой способ решения проблемы или задачи на базе стимулирования творческой активности. В ходе проведения мозгового штурма студенты высказывают большое количество вариантов решения, а затем из высказанных идей отбираются наиболее перспективные, удачные, практичные. Его применение способно значительно повысить активность всех студентов, так как в работу включаются все ребята. В ходе работы студенты получают возможность продемонстрировать свои знания и задуматься о возможных вариантах решения задачи. При этом они учатся коротко и максимально четко выражать свои мысли, анализировать их. Метод мозговой атаки предполагает объединение усилий нескольких людей, и возможность развивать идеи друг друга.

Цели: систематизация знаний по теме «Первообразная и интеграл», формирование навыков выполнения заданий по данной теме.

Задачи:

дидактические:

- формирование учебно-познавательной и информационной компетенций, посредством обобщения, систематизации знаний по теме «Первообразная. Интеграл», формирования навыков нахождения площади криволинейной трапеции несколькими способами.

развивающие:

- формирование информационной, общекультурной компетенций через развитие познавательной активности, интереса к предмету, творческих способностей учащихся, расширение кругозора, развитие математической речи.

воспитательные:

- формирование коммуникативной компетенции и компетенции личностного самосовершенствования, посредством работы над коммуникативными навыками, умением работать в сотрудничестве, над воспитанием таких личностных качеств, как организованность, дисциплинированность

1. Организационный момент

Сегодня у нас урок - соревнование. Сегодня вы будете работать в группах, попытайтесь показать всё, чему вы научились. Группа делится на две команды.

2. Разминка

Каждая группа отвечает по порядку, если группа не ответила на вопрос, вопрос и право отвечать переходят к другой команде

1. Как называется процесс нахождения первообразной?

2. Для одной функции сколько существует первообразных?

3. Чем отличается первообразная от неопределенного интеграла?
 4. Если $F(x)$ – первообразная для $f(x)$, то каким равенством связаны они между собой?
 5. В честь кого названа формула, по которой вычисляют значение определенного интеграла?

6. Назовите пределы интегрирования $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin x dx$.

7. Назовите подынтегральную функцию $\int_1^4 \frac{x+1}{\sqrt{x}} dx$.

8. Найдите интеграл

$$\int \sin x dx =$$

$$\int \cos x dx =$$

$$\int x^k dx =$$

$$\int k dx =$$

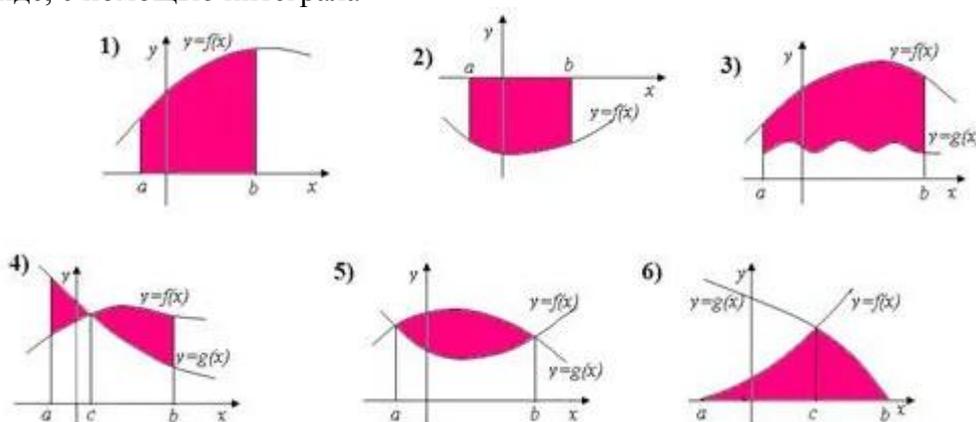
$$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx =$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx =$$

9. Что такое криволинейная трапеция?

10. Можно ли с помощью интеграла найти площадь криволинейной трапеции?

11. Назовите формулу, по которой можно найти площадь фигуры, изображенной на слайде, с помощью интеграла



3. Выполнение заданий «Мозгового штурма»

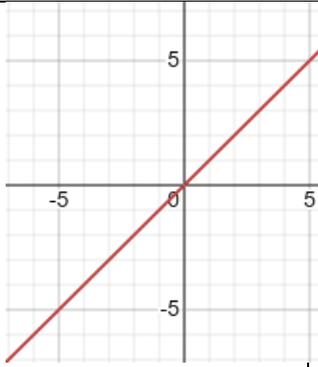
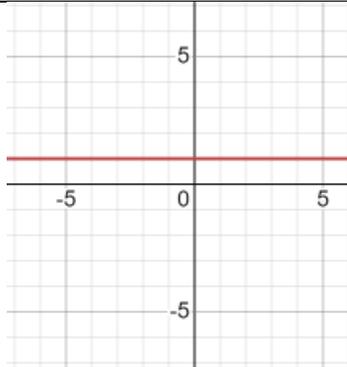
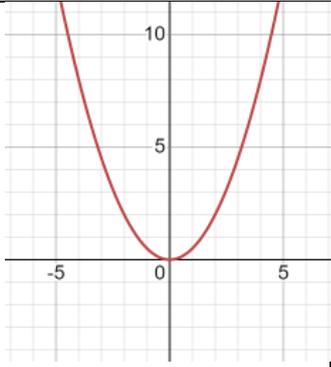
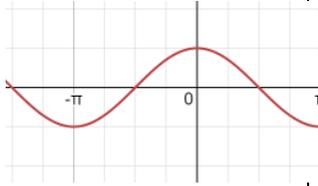
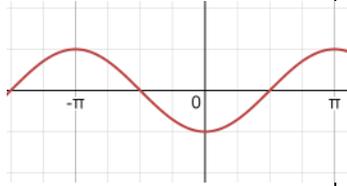
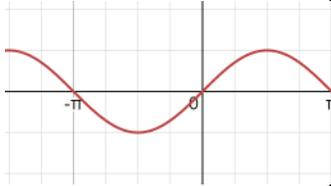
Задание 1

На слайде таблица, состоящая из трех столбов: «Первообразная», «Функция», «Производная» и хаотично изображены их графики. Преподаватель говорит студентам, что произошла путаница.

Задание состоит в том, чтобы помочь «родственникам найти друг друга»: необходимо переместить графики в соответствующий столбик.

Под каждым есть подсказка в виде отрывка из стихотворений известных поэтов. Если «родственники» найдены верно, то под графиками одного семейства будут отрывки из стихов одного и того же поэта.

Первообразная	Функция	Производная

		
<p>«Я помню чудное мгновенье...»</p>	<p>«Любви, надежды, тихой славы Недолго тешил нас обман...»</p>	<p>«Я Вас любил: Любовь еще быть может...»</p>
		
<p>«Отговорила роща золотая...»</p>	<p>«Не жалею, не зову, не плачу...»</p>	<p>«Мне осталась одна забава ...»</p>

Задание 2

Найдите интеграл

1 команда	2 команда
1. $\int x dx$ (1б)	1. $\int \frac{1}{7} dx$ (1б)
2. $\int \frac{x}{5} dx$ (1б)	2. $\int \frac{x dx}{2}$ (1б)
3. $\int x^5 dx$ (1б)	3. $\int x^7 dx$ (1б)
4. $\int 7x^6 dx$ (1б)	4. $\int \frac{x^5 dx}{5}$ (1б)
5. $\int 10 \sin 5x dx$ (2б)	5. $\int 3 \cos 3x dx$ (2б)
6. $\int 3(5x+1)^2 dx$ (2б)	6. $\int 4(5-6x)^3 dx$ (2б)
7. $\int \frac{5 dx}{\sqrt{5x-7}}$ (3б)	7. $\int \frac{3 dx}{(8-7x)^4}$ (3б)

Задание 3

Команды выполняют задание и один из представителей команды объясняет решение. За каждое правильное решение интеграла 1 балл.

Вычислите несколькими способами:

а) $\int_2^4 (1-x)dx$; б) $\int_0^3 (2x+1)dx$;

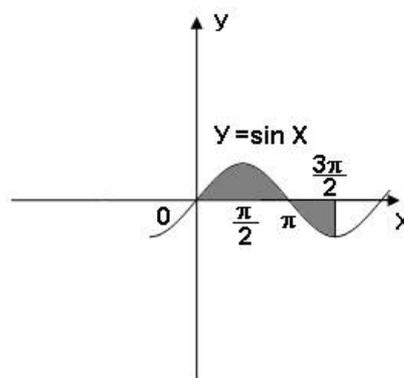
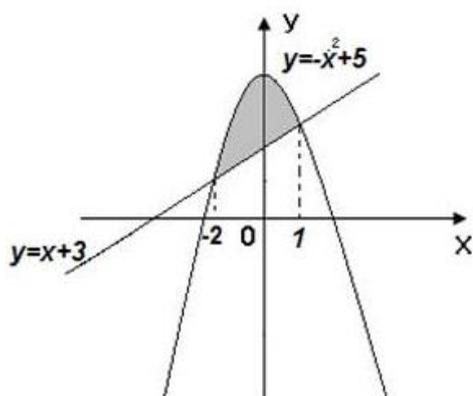
в) $\int_{-1}^0 \sqrt[3]{1-2x} dx$; г) $\int_4^5 \frac{dx}{(x-3)^3}$; д) $\int_2^3 (5x-7)^{-\frac{2}{3}}$.

Задание 4

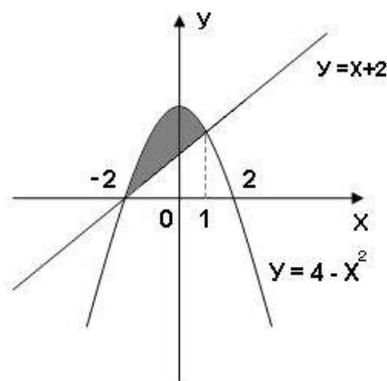
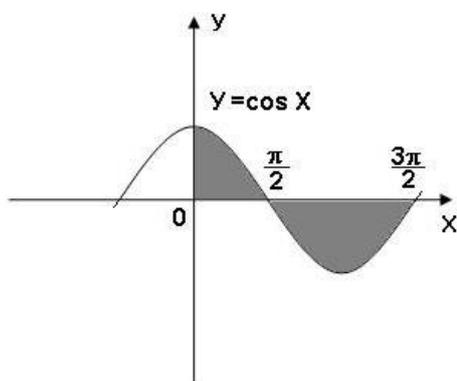
Командам необходимо выполнить задание и объяснить решение. Каждая команда сообща выполняет задание. Один представитель от команды объясняет решение. За каждое верно выполненное задание 2 балла.

Найдите площадь фигур, с помощью интеграла

Задание для команды 1



Задание для команды 2



4. Подведение итогов, подсчет набранных командами баллов. Выставление оценок.

Занятия с применением интерактивных технологий - работа в малых группах.

Групповая работа как форма коллективной учебной деятельности есть способ организации совместных усилий учащихся, по решению поставленной на уроке учебно-познавательной задачи. При организации групповой работы можно придерживаться следующих этапов. Подготовка к выполнению группового задания (постановка познавательной задачи; инструктаж о последовательности работы; раздача дидактического материала по группам). Групповая работа (знакомство с материалом,

планирование работы в группе; распределение заданий внутри группы; индивидуальное выполнение задания; обсуждение индивидуальных результатов работы в группе; обсуждение общего задания; подведение итогов группового задания, выводы). Заключительная часть (презентация группового решения поставленной задачи; анализ познавательной задачи; рефлексия; общий вывод о работе в группе и достижении поставленной задачи).

Практическое занятие по теме: «Линейная, квадратичная и дробно-линейная функции. Элементарное исследование и построение графиков этих функций».

Цели: систематизация знаний по теме «Линейная, квадратичная и дробно-линейная функции. Элементарное исследование и построение графиков этих функций», формирование навыков выполнения заданий по данной теме.

Задачи:

дидактические:

- формирование учебно-познавательной и информационной компетенций, посредством обобщения, систематизации знаний по теме «Линейная, квадратичная и дробно-линейная функции. Элементарное исследование и построение графиков этих функций»;

развивающие:

- формирование информационной, общекультурной компетенций через развитие познавательной активности, интереса к предмету, творческих способностей учащихся, расширение кругозора, развитие математической речи;

воспитательные:

- формирование коммуникативной компетенции и компетенции личностного самосовершенствования, посредством работы над коммуникативными навыками, умением работать в сотрудничестве, над воспитанием таких личностных качеств, как организованность, дисциплинированность.

Группу студентов делим на подгруппы по 2-4 человека.

1) Вступительная речь преподавателя

2) Группам необходимо найти соответствующую информацию для функций: линейной, квадратичной и дробно-линейной (найти соответствия).

Название функции	Формула	График	Примеры
Линейная	$y = kx + b, k \neq 0$	прямая	$y = 2x - 5$
Квадратичная	$y = ax^2 + bx + c, a \neq 0$	парабола	$y = \frac{-2x + 1}{x - 3}$
Дробно-линейная	$y = \frac{ax+b}{cx+d}, c \neq 0, ad \neq bc$	гипербола	$y = \frac{1}{3}x - 1$
			$y = 7x$
			$y = 2 - x$
			$y = 2x^2 - 5x + 4$
			$y = \frac{x - 3}{6}$
			$y = 1 - x^2$

			$y = \frac{7x + 3}{2x - 5}$ $y = x^2 - 4$ $y = \frac{4x - 1}{3x + 5}$ $y = (2 - x)^2$
--	--	--	---

Проверка выполненного задания с ответами на слайде. 1 верное соответствие
1 балл.

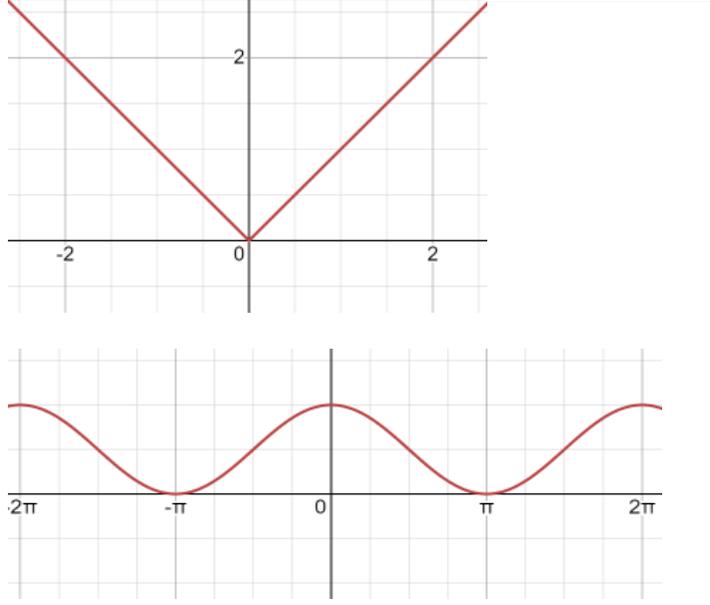
3) Студентам необходимо устно ответить на вопросы:

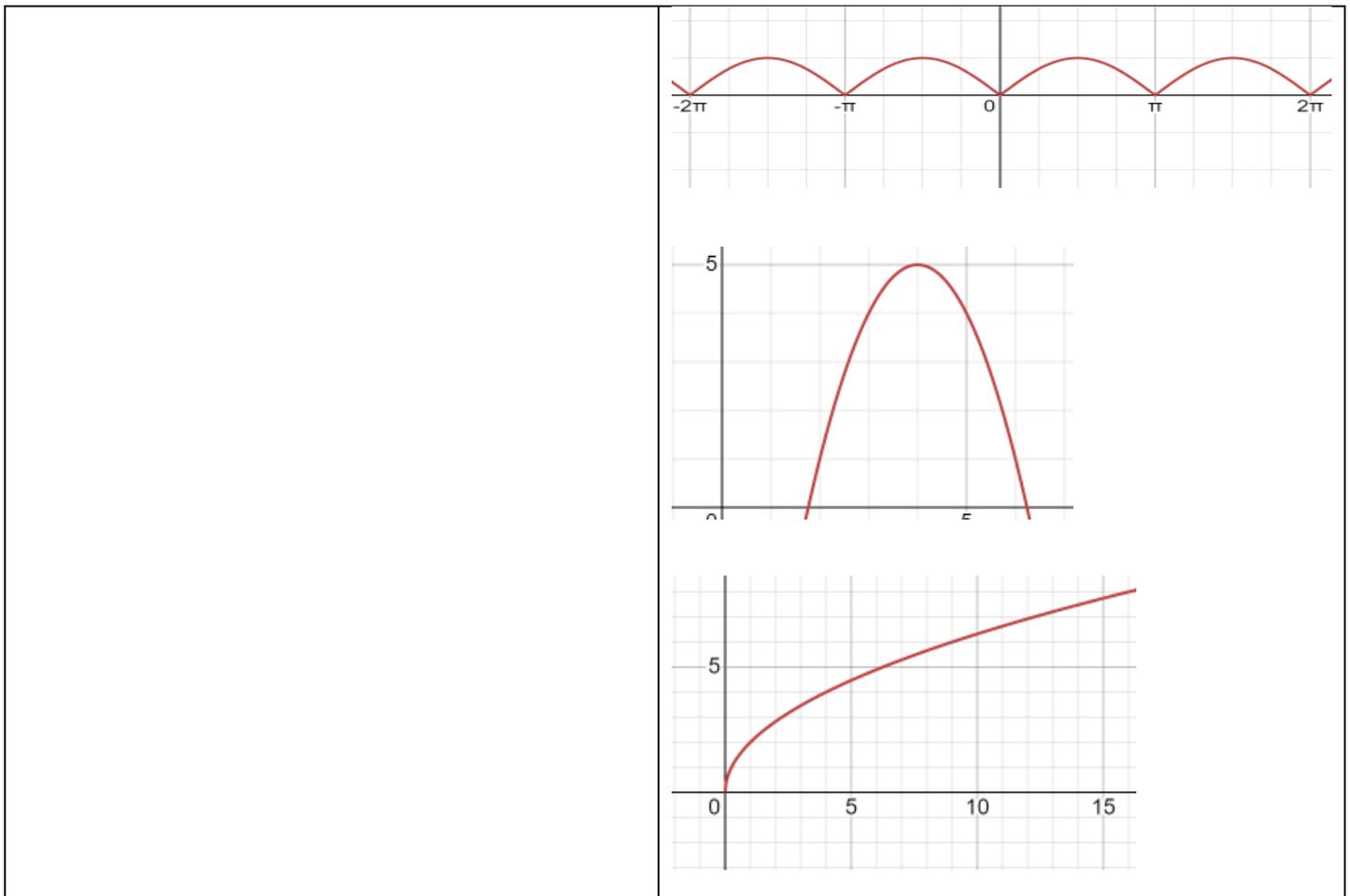
- Что такое область определения функции?
- Что такое область значения функции?
- Какая функция называется убывающей?
- Какая функция называется возрастающей?
- Какая функция называется четной?
- Какая функция называется нечетной?
- Как определить координаты точек пересечения с осью Ox ?
- Как определить координаты точек пересечения с осью Oy ?
- Какая точка называется точкой максимума?
- Какая точка называется точкой минимума?

За каждый правильный ответ - 1 балл.

4) Необходимо соотнести пословицы, поговорки и их графические интерпретации:

•

Формулировка пословицы, поговорки	Графическая интерпретация
<ul style="list-style-type: none"> • Чем дальше в лес, тем больше дров. • Каши маслом не испортишь. • Пересев хуже недосева. • Выше меры конь не скачет. • Любишь с горки кататься, люби и саночки возить. • Как аукнется, так и откликнется. дальше будешь. 	



Одно верное соответствие 1 балл.

5) Каждой группе необходимо выбрать по одной линейной, квадратичной, дробно-линейной функции и построить графики выбранных функций и определить их область определения и область значения, промежутки монотонности, точки пересечения с осями координат.

$$y = 12 - 5x,$$

$$y = x^2 - 10x - 24,$$

$$y = -x^2 - 4x,$$

$$y = 2 - 3x,$$

$$y = 3x + 4,$$

$$y = 2x^2 - 5x,$$

$$y = -x^2 + 6x - 2,$$

$$y = \frac{1}{3}x + 5,$$

$$y = -x^2 - 2x - 3,$$

$$y = (1 - x)^2,$$

$$y = \frac{3x + 6}{x + 2},$$

$$y = \frac{2x - 4}{x - 2},$$

$$y = \frac{4x - 1}{x - 1},$$

$$y = \frac{3x + 13}{x + 1}.$$

6) Вычислите координаты точек пересечения графиков функций:

- $y = x^2 - 4x, y = 9 - 4x,$
- $y = \frac{4}{x}, y = x - 2,$
- $y = -\frac{2}{x}, y = -x + 1,$
- $y = 6 - x^2 - 5x, y = 8 - 2x.$

Проверка выполненного задания с ответами на слайде. 1 верное соответствие
1 балл.

7) Подведение итогов.

СОДЕРЖАНИЕ

1. Краткое изложение лекционного материала	3
2. Методические указания к практическим занятиям	26
3. Методические рекомендации к устному опросу	39
4. Методические рекомендации к письменному опросу	39
5. Методические рекомендации для выполнения самостоятельной работы	39
6. Методические рекомендации по составлению информационных сообщений (докладов)	40
7. Методические рекомендации к проведению занятий с использованием активных и интерактивных форм	40

Черепанова Кристина Олеговна
Преподаватель ФСПО АмГУ