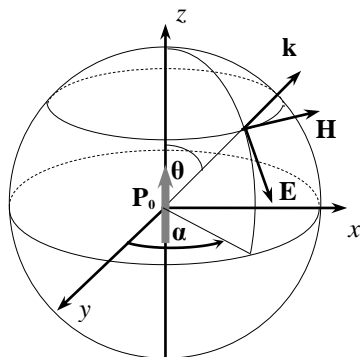


Министерство науки и высшего образования Российской Федерации  
*Амурский государственный университет*

С.В. Барышников, О.В. Зотова, Е.В. Стукова



# Электродинамика

*Учебное пособие*

Благовещенск  
Издательство АмГУ  
2021

УДК 537.8  
ББК 22.313я 73  
Б 26

*Рекомендовано  
учебно-методическим советом университета*

*Рецензент:*

*С.А. Пячин*, профессор кафедры «Физика и теоретическая механика» ФГБОУ ВО «Дальневосточный государственный университет путей сообщения» (г. Хабаровск), д-р физ.-мат. наук, доцент.

***Барышников С.В.***

Электродинамика: учебное пособие /С. В. Барышников, О. В. Зотова, Е. В. Стукова – Благовещенск: Изд-во АмГУ, 2021. – 141 с.

Учебное пособие «Электродинамика» предназначено для студентов, обучающихся по направлению подготовки 03.03.02 – Физика. В пособии излагаются основы теоретической электродинамики.

ББК 22.313я73

В авторской редакции.

© Амурский государственный университет, 2021  
© Барышников С.В., Зотова О.В., Стукова Е.В., 2021

## СОДЕРЖАНИЕ

<b>Предисловие</b> .....	<b>5</b>
<b>Глава 1. Экспериментальные основы электродинамики</b> .....	<b>7</b>
§ 1.1 Электрическое поле .....	7
§ 1.2 Электрический ток и закон сохранения заряда .....	10
§ 1.3 Магнитное поле постоянных токов .....	13
§ 1.4 Электромагнитная индукция .....	17
§ 1.5 Уравнения Максвелла .....	19
§ 1.6 Закон сохранения энергии электромагнитного поля .....	21
<b>Глава 2. Электромагнитное поле в веществе</b> .....	<b>25</b>
§ 2.1 Электронная теория вещества .....	25
§ 2.2 Поляризация вещества .....	27
§ 2.3 Намагничивание вещества .....	29
§ 2.4 Природа магнитных свойств вещества .....	34
§ 2.5 Уравнения Максвелла для материальной среды и система граничных условий .....	37
<b>Глава 3. Потенциалы поля и решения задач электродинамики</b> .....	<b>43</b>
§ 3.1 Описание электромагнитного поля с помощью потенциалов .....	43
§ 3.2 Решение задач электродинамики .....	46
§ 3.3 Разделы электродинамики .....	48
<b>Глава 4. Электрическое поле неподвижных зарядов</b> .....	<b>55</b>
§ 4.1 Потенциальный характер электростатического поля .....	55
§ 4.2 Скалярный потенциал электростатического поля .....	56
§ 4.3 Потенциал системы зарядов .....	57
§ 4.4 Уравнение Лапласа и Пуассона. Свойства скалярного потенциала .....	58
§ 4.5 Потенциал системы зарядов на больших расстояниях .....	60
§ 4.6 Поле диполя .....	63
§ 4.7 Диполь во внешнем электростатическом поле .....	64
§ 4.8 Энергия взаимодействия системы неподвижных зарядов как энергия электростатического поля в диэлектриках .....	66
§ 4.9 Проводники в электростатическом поле .....	68
<b>Глава 5. Стационарное электромагнитное поле</b> .....	<b>73</b>
§ 5.1 Постоянный электрический ток .....	73
§ 5.2 Магнитное поле постоянных токов .....	78
§ 5.3 Контур с током (магнитный диполь) во внешнем магнитном поле .....	82
§ 5.4 Энергия магнитного поля постоянных токов .....	83
§ 5.5 Самоиндукция и взаимоиנדукция .....	85

<b>Глава 6. Квазистационарное электромагнитное поле .....</b>	<b>87</b>
§ 6.1 Условия квазистационарности. Уравнения Максвелла для квазистационарных электромагнитных полей.....	87
§ 6.2 Правила Кирхгофа для цепей переменного тока .....	88
§ 6.3 Квазистационарные процессы в электрических цепях с постоянной эдс .....	89
§ 6.4 Колебательный контур. Собственные колебания .....	91
§ 6.5 Квазистационарные процессы в цепях переменного тока.....	95
§ 6.6 Система проводников с учетом самоиндукции и взаимоиנדукции .....	100
§ 6.7 Скин-эффект .....	103
<b>Глава 7. Электромагнитные волны.....</b>	<b>109</b>
§ 7.1 Переменное электромагнитное поле. Волновое уравнение и свойства электромагнитных волн.....	109
§ 7.2 Отражение и преломление электромагнитных волн на границе раздела двух диэлектрических сред.....	113
§ 7.3 Распространение электромагнитных волн в проводящей среде	118
§ 7.4 Световое давление.....	122
§ 7.5 Распространение электромагнитных волн в диспергирующих средах .....	125
<b>Глава 8. Излучение электромагнитных волн .....</b>	<b>131</b>
§ 8.1 Запаздывающие потенциалы на больших расстояниях от системы токов и зарядов .....	131
§ 8.2. Энергия, излучаемая системой зарядов в пределах малого телесного угла.....	134
§ 8.3 Излучение гармонического осциллятора .....	134
§ 8.4 Классическая теория излучения упруго связанного электрона... 138	
<b>Литература .....</b>	<b>141</b>

## ПРЕДИСЛОВИЕ

*Книга посвящена светлой памяти физика Александра Федоровича Баранова, идеей которого было написание такого пособия. Однако он скончался в 2016 году в возрасте восьмидесяти лет и не успел реализовать свою идею. Поэтому его ученики, спустя пять лет, решились завершить начатую им работу.*

Важность изучения электродинамики определяется многообразием применений электромагнитных явлений, которые в настоящее время прочно вошли в практику. На законах электродинамики базируются электротехнические, радиотехнические, и многочисленные электронные приборы и устройства.

Электродинамические явления играют большую роль и во вселенной. Существующие в межзвездном пространстве магнитные поля ускоряют космические заряженные частицы, вспышки на Солнце сопровождаются существенным изменением магнитного поля вблизи поверхности Солнца, магнитное поле Земли удерживает вблизи Земли заряженные частицы, благодаря чему создаются радиационные пояса и т.д.

Электромагнитное поле представляет одну из форм существования материи. Считается, что его свойства и явления, связанные с ним, адекватно описываются системой уравнений Максвелла. Эти уравнения, как результат обобщения экспериментальных и теоретических исследований, проведенных блестящей плеядой физиков XIX века, были получены Джемсом Клерком Максвеллом.

В современной научной терминологии понятие макроскопической электродинамики в целом совпадает с классической теорией электромагнитного поля, основы которой заложил Д. К. Максвелл в своем фундаментальном труде «Трактат об электричестве и магнетизме» (1873). Г. Герц своими опытами экспериментально подтвердил ее, получив предсказанные Максвеллом электромагнитные волны; он же придал уравнениям Максвелла их современный вид. В теории Максвелла в изящной сжатой форме обобщены основные экспериментальные и теоретические достижения учения об электромагнетизме.

Завершением классической электродинамики явилось открытие материальной природы электромагнитного поля, основная заслуга которого принадлежит А. Эйнштейну. Некоторая, главным образом терминологическая, непоследовательность Эйнштейна в трактовке физической природы электромагнитного поля, была затем устранена С. И. Вавиловым. Дальнейшее развитие теории электромагнитного поля в XX веке –

квантовая электродинамика – связано с именами физиков-теоретиков Ричарда Филиппа Фейнмана, Юлиана Швингера и Синъитиро Томонаги.

В вузах перед курсом основ теоретической физики стоит задача – обобщение и приведение в систему знаний по физике, полученных в процессе её изучения на всех этапах учебного процесса. В работах наших ведущих российских методистов показано, что формирование такой системы должно базироваться на теории. При этом внимание должно быть обращено на обсуждение ведущих физических идей и методов их воплощения в науке и практике. Математический аппарат служит лишь инструментом наглядного представления функционирования системы. Авторы сознательно уклонились от детализации отдельных вопросов, стремясь к систематизированному изложению основных положений электродинамики.

Содержание данного учебного пособия и характер изложения материала сложились в результате многолетнего практического опыта чтения курса «Основы электродинамики» на физико-математическом факультете Благовещенского государственного педагогического университета (ФГБОУ БГПУ) и курса «Электродинамика» инженерно-физическом факультете Амурского государственного университета (ФГБОУ АмГУ). Пособие предназначено для студентов направления подготовки 03.03.02 Физика.

В данном пособии последовательно используется Международная система единиц (СИ), что способствует установлению связей между теоретическим курсом электродинамики и курсом общей физики.

# ГЛАВА 1. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ ОСНОВЫ ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ

*«Необычайно важное значение, обширная, как мир, область применения и изумительная красота этих уравнений побудили Больцмана процитировать: «То был бог, кто написал эти строки...»*

*А. Зоммерфельд*

Любая физическая теория базируется на прочном фундаменте экспериментальных исследований. Электродинамика – не исключение, поэтому первая глава посвящена краткому обзору основных законов электрических и магнитных явлений, лежащих в основе уравнений Максвелла. Эти законы – результат большой экспериментальной работы и, конечно, последующего теоретического их обобщения, проделанных учёными-физиками в XIX веке. Основное внимание при этом будет уделено их математической формулировке с использованием операций векторного анализа.

## § 1.1 Электрическое поле

### 1.1.1 Закон Кулона. Напряжённость электростатического поля

В 1788 г. Шарль Огюстен Кулон на основании тщательно выполненных опытов пришёл к выводу, что сила взаимодействия между двумя заряженными телами пропорциональна произведению их зарядов. Этот основной закон электростатики в настоящее время записывается в следующем виде:

$$\mathbf{F}_{12} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon\epsilon_0} \frac{\mathbf{r}_{12}}{r_{12}^3},$$

где  $\mathbf{F}_{12}$  – сила, с которой заряд  $q_1$  действует на заряд  $q_2$ ;

$\mathbf{r}_{12}$  – вектор, проведённый от  $q_1$  к  $q_2$  ( $r_{12}$  его модуль);

$\epsilon_0$  – электрическая постоянная, появление которой обусловлено выбором системы единиц СИ,  $\epsilon_0 = 10^7/4\pi c^2$  Ф/м;

$\epsilon$  – относительная диэлектрическая проницаемость, характеризующая свойства среды, в которой находится заряд (для вакуума  $\epsilon = 1$ ).

Напряжённость электрического поля, с помощью которой обычно его характеризуют, определяется как сила, действующая на единичный положительный заряд, помещённый в это поле. По закону Кулона напряжённость электрического поля неподвижного точечного заряда  $q$ , находящегося в начале координат, определяется по формуле:

$$\mathbf{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon\epsilon_0} \frac{\mathbf{R}}{R^3}, \quad (1.1)$$

где  $R$  – расстояние от начала координат до точки, в которой вычисляется напряжённость электрического поля.

Если заряд расположен не в начале координат (рис. 1.1), а в точке, радиус-вектор которой  $\mathbf{r}$ , то

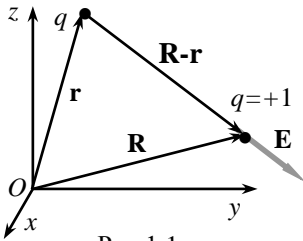


Рис.1.1

$$\mathbf{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0\epsilon} \frac{\mathbf{R} - \mathbf{r}}{|\mathbf{R} - \mathbf{r}|^3} \quad (1.2)$$

### 1.1.2 Электрическое смещение и электростатическая теорема Гаусса

Помимо напряжённости электрического поля  $\mathbf{E}$  для описания электрических полей в различных средах используют вектор *электрического смещения*

$$\mathbf{D} = \epsilon_0\epsilon\mathbf{E}. \quad (1.3)$$

Его ввёл Максвелл, переосмысливая полевые идеи Фарадея с целью представить их в математической форме. В проводниках действие электрического поля вызывало постоянный электрический ток. В диэлектриках, являющихся изоляторами, ток, был невозможен, поэтому постоянное электрическое поле вызывало просто только «смещение электричества» – поляризацию диэлектрика. Если же электрическое смещение с течением времени изменялось, то это приводило к возникновению переменного «тока смещения». Эта гениальная догадка позволила Максвеллу построить замкнутую систему уравнений, описывающих электромагнитные процессы [2].

Найдём поток вектора  $\mathbf{D}$  через замкнутую поверхность для произвольной совокупности зарядов. Для одного точечного заряда  $q$  этот поток равен

$$\Psi = \oint_S \mathbf{D}d\mathbf{S} = \epsilon\epsilon_0 \oint_S \mathbf{E}d\mathbf{S} = \frac{q}{4\pi} \oint_S \frac{(\mathbf{R} - \mathbf{r})d\mathbf{S}}{|\mathbf{R} - \mathbf{r}|^3} = q$$

если заряд находится внутри  $S$ , и

$$\Psi = \oint_S \mathbf{D}d\mathbf{S} = \epsilon\epsilon_0 \oint_S \mathbf{E}d\mathbf{S} = \frac{q}{4\pi} \oint_S \frac{(\mathbf{R} - \mathbf{r})d\mathbf{S}}{|\mathbf{R} - \mathbf{r}|^3} = 0$$

если заряд находится вне  $S$ .



Для совокупности нескольких зарядов в соответствии с **принципом суперпозиции**

$$\mathbf{D} = \sum_k \mathbf{D}_k ,$$

и поток  $\Psi$  равен сумме зарядов, охватываемых поверхностью, по которой проводится интегрирование. Этот вывод составляет содержание **электростатической теоремы Гаусса**: *поток электрического смещения неподвижных зарядов через замкнутую поверхность равен алгебраической*

*сумме зарядов, находящихся внутри этой поверхности*

$$\Psi = \oint_S \mathbf{D} d\mathbf{S} = \sum_k q_k . \quad (1.4)$$

Суммирование по  $k$  в (1.4) проводится только по зарядам, находящимся **внутри объёма**, ограниченного поверхностью  $S$ . Заряды вне объёма дают поток равный нулю.

Перейдём в формуле (1.4) к **непрерывному распределению зарядов**. Разобьём пространственно распределённый заряд на элементарные объёмы с зарядами

$$\Delta q_k = \rho(\mathbf{r}_k) \cdot \Delta V_k \quad (k = 1, 2, \dots, K),$$

где  $\rho(\mathbf{r}_k)$  – объемная плотность зарядов в месте расположения  $k$ -го заряда.

В пределе  $\Delta V_k \rightarrow 0$  (число элементарных объёмов  $K \rightarrow \infty$ ):

$$\lim_{K \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^K \Delta q_k = \lim_{\Delta V_k \rightarrow 0} \sum_{k=1}^K \rho(\mathbf{r}_k) \Delta V_k = \int_V \rho(\mathbf{r}) dV ,$$

где  $V$  – объём, ограниченный поверхностью интегрирования  $S$  в формуле (1.4), которая теперь запишется в виде:

$$\oint_S \mathbf{D} d\mathbf{S} = \int_V \rho(\mathbf{r}) dV . \quad (1.5)$$

По теореме Остроградского – Гаусса левая часть полученного равенства может быть представлена как интеграл от  $\text{div} \mathbf{D}$ :

$$\int_V \text{div} \mathbf{D} dV = \int_V \rho(\mathbf{r}) dV .$$

Полученное интегральное соотношение имеет место независимо от выбора объёма (на поверхность, его ограничивающую, никаких условий не накладывалось), что возможно только в том случае, если равны подинтегральные выражения:

$$\boxed{\operatorname{div} \mathbf{D} = \rho(\mathbf{r})}. \quad (1.6)$$

Выражение (1.6) является *дифференциальной формой электростатической теоремы Гаусса*. Это соотношение вытекает из закона Кулона и с математической точки зрения эквивалентно ему. Однако с физической точки зрения совершён отход от дальнего действия – появилась среда, передающая взаимодействие, – электрическое поле. Взаимодействие заряда с зарядом, как в законе Кулона, заменяется взаимодействием заряда с полем, создаваемым другим зарядом [1].

## § 1.2 Электрический ток и закон сохранения заряда

### 1.2.1 Закон Ома

В 1827 году Георг Симон Ом опубликовал в Берлине работу «Гальваническая цепь, математически разработанная д-ром Г.С. Омом», в котором он, подводя итоги двух лет экспериментальной работы, формулирует свой знаменитый закон: *сила тока в однородном металлическом проводнике прямо пропорциональна напряжению на его концах*

$$I = \frac{U}{R} \quad (1.7)$$

где  $I$  – сила тока;

$U$  – напряжение;

$R$  – сопротивление проводника.

Ранее, Дэви, изучая свойства металлов, заметил, что металлическая проволока обладает *сопротивлением* прохождению тока, *величина которого зависит от качества металла, прямо пропорциональна длине проволоки и обратно пропорциональна её поперечному сечению*

$$dR = \frac{dx}{\gamma(x)S(x)} \quad (1.8)$$

где  $x$  – расстояние вдоль проводника, отсчитываемое от какой-либо его точки, выбранной за начало отсчёта;

$S(x)$  – площадь поперечного сечения проводника;

$\gamma(x)$  – удельная проводимость материала проводника в точке с координатой  $x$ .

Тогда закон (1.7) для напряжения (разности потенциалов) на бесконечно малом линейном участке цепи  $dx$  можно записать в виде:

$$-d\varphi(x) = \frac{I dx}{\gamma(x)S(x)}. \quad (1.9)$$

Сила тока постоянна вдоль проводника.

Введем в рассмотрение *плотность постоянного электрического*

**тока** в сечении проводника с координатой  $x$

$$j(x) = I/S(x), \quad (1.10)$$

и, используя запись закона Ома (1.9) для элементарно малого участка цепи совместно с (1.10), получим:

$$j(x) = -\gamma(x) \frac{d\varphi}{dx}.$$

Полученное выражение имеет смысл проекции на ось  $Ox$  равенства  $\mathbf{j}(\mathbf{r}) = -\gamma(\mathbf{r}) \cdot \text{grad}\varphi(\mathbf{r})$ . Для постоянного тока (как и для поля неподвижных зарядов)  $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\text{grad}\varphi(\mathbf{r})$ , поэтому **закон Ома в дифференциальной форме** можно записать в векторной форме:

$$\boxed{\mathbf{j}(\mathbf{r}) = \gamma(\mathbf{r})\mathbf{E}(\mathbf{r})}. \quad (1.11)$$

### 1.2.2 Токи смещения

Выше уже говорилось о том, что вектор  $\mathbf{D}$  понимается как реальное смещение «электричества» – зарядов, если пользоваться современной терминологией. Это смещение существует и в изоляторах, в которых движение зарядов ограничено, и в проводниках, где помимо зарядов, которые могут перемещаться свободно, также есть «связанные» заряды. Электрическое смещение равно заряду, пересекающему единицу поверхности при действии электрического поля. Если электрическое смещение изменяется с течением времени –  $\partial D/\partial t \neq 0$ , то можно говорить о **токе смещения** через поверхность, которую пересекают заряды.

В пользу этих соображений говорит и размерность производной по времени вектора  $\partial \mathbf{D}/\partial t$ :

$$\left[ \frac{\partial D}{\partial t} \right] = \frac{\text{Заряд}}{\text{Площадь} \cdot \text{Время}} = \frac{\text{Кл}}{\text{м}^2 \cdot \text{с}},$$

которая совпадает с размерностью плотности тока  $j$ . Таким образом, производную  $\partial \mathbf{D}/\partial t$  можно рассматривать как величину, обладающую всеми свойствами плотности тока. Поэтому Максвелл счёл необходимым ввести в рассмотрение **полную плотность тока**  $\mathbf{C}$  (в его обозначении, *Current* (англ.) – ток), равную сумме плотностей токов проводимости  $\mathbf{j}$  и смещения  $\partial \mathbf{D}/\partial t$ :

$$\mathbf{C} = \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}. \quad (1.12)$$

### 1.2.3 Закон сохранения заряда

Выделим в области, в которой находятся заряды, некоторый произвольный объём  $V$ . Его заряд выражается интегралом

$$q = \int_V \rho(\mathbf{r}, t) dV .$$

Пусть в рассматриваемом объёме нет источников или стоков зарядов. Тогда изменение заряда в объёме  $V$

$$\frac{\partial q}{\partial t} = \int_V \frac{\partial \rho(\mathbf{r}, t)}{\partial t} dV \quad (1.13)$$

возможно только за счёт потока зарядов через поверхность  $S$ , ограничивающую  $V$ :

$$\frac{\partial q}{\partial t} = -\oint_S \mathbf{j} d\mathbf{S} = -\int_V \operatorname{div} \mathbf{j} dV . \quad (1.14)$$

Знак минус перед потоком  $\mathbf{j}$  в (1.14) учитывает относительную ориентацию векторов  $\mathbf{j}$  и  $d\mathbf{S} = \mathbf{n}dS$ : если  $\mathbf{j}$  и  $\mathbf{n}$  совпадают по направлению, то  $(\mathbf{j} \cdot \mathbf{n}) > 0$ , но при этом заряд в  $V$  уменьшается ( $\frac{\partial q}{\partial t} < 0$ ), если не совпадают,

то  $(\mathbf{j} \cdot \mathbf{n}) < 0$ , а заряд увеличивается ( $\frac{\partial q}{\partial t} > 0$ ).

Сравнивая соотношения (1.13) и (1.14) получаем:

$$\int_V \frac{\partial \rho(\mathbf{r}, t)}{\partial t} dV = -\int_V \operatorname{div} \mathbf{j} dV . \quad (1.15)$$

Так как выбор объёма произволен, то должны быть равны подинтегральные выражения, что приводит к равенству

$$\operatorname{div} \mathbf{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 . \quad (1.16)$$

Уравнение (1.16) называется «**уравнением непрерывности**» и является математическим выражением **закона сохранения заряда**. Если поток равен нулю, то заряд в объёме сохраняется. В современной интерпретации закон сохранения заряда формулируется следующим образом: *алгебраическая сумма электрических зарядов всех частиц изолированной системы не меняется при происходящих в ней процессах*.

Вопрос об экспериментальном подтверждении закона оказалось возможным поставить только с развитием квантовой электродинамики. В рамках этой теории из строгого закона сохранения заряда следует стабильность электрона и равенство нулю массы фотона. На этих выводах и основывается его экспериментальная проверка. Анализ её результатов приводит к заключению, что «построение физической теории, допускающей нарушение закона сохранения заряда» весьма проблематично.

Подтверждением его служит так же строгое равенство абсолютной величины зарядов электрона и протона.

## § 1.3 Магнитное поле постоянных токов

### 1.3.1 Закон Био – Савара – Лапласа

Датский физик Ганс Христиан Эрстед в 1820 году обнаружил, что ток в прямолинейном проводнике, идущем вдоль меридиана, отклоняет магнитную иглу от направления меридиана. Таким образом, впервые была выявлена связь между электрическими и магнитными явлениями, и уже в конце того же года французский физик Жан Батист Био публикует количественный закон, установленный им в результате совместных с Феликсом Саваром опытов: «сила, действующая на северный или южный магнитный полюс магнита со стороны прямолинейного бесконечно длинного тока, направлена перпендикулярно к расстоянию между проводником и магнитом и по величине обратно пропорциональна этому расстоянию». Позднее был установлен и дифференциальный закон действия элемента тока на магнитный полюс, известный в настоящее время как закон Био и Савара [3].

Современная формулировка закона Био – Савара – Лапласа имеет вид: элемент проводника  $dl$  с током  $I$  создает в некоторой точке  $P$  (рис. 1.2) магнитное поле с индукцией  $d\mathbf{B}$ , определяемой как

$$\mathbf{dB} = \frac{\mu\mu_0 I [dl, \mathbf{R} - \mathbf{r}]}{4\pi |\mathbf{R} - \mathbf{r}|^3}, \quad (1.17)$$

где  $dl$  – вектор, по модулю равный длине  $dl$  элемента проводника и совпадающий по направлению с током;

$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$  Гн/м – магнитная постоянная, определяется выбором системы единиц измерения (в данном случае СИ);

$\mu$  – магнитная проницаемость, характеризующая магнитные свойства вещества.

Теория магнитных явлений первоначально развивалась по аналогии с теорией электрического поля: вводилось понятие магнитных зарядов (положительного, соответствующего северному магнитному полюсу магнита, и отрицательного, сопоставляемого южному), определялись сила взаимодействия зарядов (закон Кулона), соответственно, напряжённость магнитного поля  $\mathbf{H} = (m/4\pi\mu_0 r^3)\mathbf{r}$  магнитного заряда  $m$ , действующего на положительный единичный магнитный заряд, и, наконец, вводилась индукция магнитного

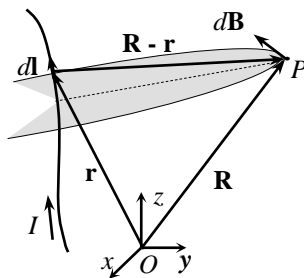


Рис. 1.2

поля  $\mathbf{B} = \mu\mu_0\mathbf{H}$  (по аналогии с индукцией электрического поля  $\mathbf{D} = \epsilon\epsilon_0\mathbf{E}$ ). В связи с отсутствием в природе магнитных зарядов этот подход не оправдал себя: напряжённость магнитного поля не является силой, она соответствует индукции электрического поля. Индукция же магнитного поля, – силовая характеристика магнитного поля, как и напряжённость электрического поля – электрического [4].

Вектор напряжённости магнитного поля  $\mathbf{H}$  связан с вектором индукции  $\mathbf{B}$  так же как для электрического поля  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{D}$ :

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\mu\mu_0} \mathbf{B}. \quad (1.18)$$

Напряжённость линейного замкнутого тока с использованием (1.18) может быть найдена как интеграл:

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\mu\mu_0} \mathbf{B} = \frac{1}{\mu\mu_0} \oint_L d\mathbf{B} = \frac{I}{4\pi} \oint_L \frac{[d\mathbf{l}, \mathbf{R} - \mathbf{r}]}{|\mathbf{R} - \mathbf{r}|^3}. \quad (1.19)$$

### 1.3.2 Закон полного тока

Введём понятие магнитодвижущей силы  $\epsilon_m$ , как циркуляции по замкнутому контуру  $L$  напряжённости магнитного поля, создаваемого линейным током:

$$\epsilon_m = \oint_L \mathbf{H} d\mathbf{l} = \frac{I}{4\pi} \oint_L \oint_{L_1} \frac{d\mathbf{l}_1 [\mathbf{r}, d\mathbf{l}_1]}{r^3}. \quad (1.20)$$

Рассмотрим сначала частный случай (рис. 1.3а), когда контур  $L$  выбран в виде окружности, лежащей в плоскости, перпендикулярной контуру

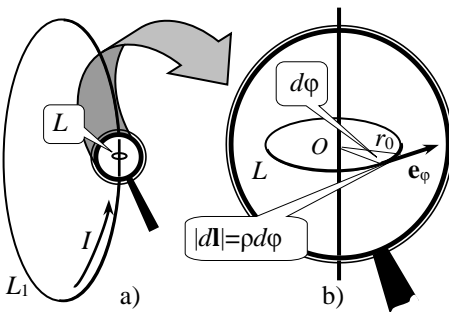


Рис. 1.3

$L_1$ , с центром в точке пересечения этой плоскости с  $L_1$ . Радиус окружности  $r_0$  выберем настолько малым, что участок контура  $L_1$ , которому принадлежит центр окружности можно считать прямолинейным, а его длину  $l \gg r_0$  (рис. 1.3б). Воспользуемся тем, что напряжённость магнитного поля прямолинейного тока:

$$\mathbf{H} = \frac{I}{2\pi r_0} \mathbf{e}_\varphi. \quad (1.21)$$

Циркуляция вектора  $\mathbf{H}$  вдоль данной окружности  $L$  с учётом того, что  $\mathbf{e}_\varphi d\mathbf{l} = |\mathbf{e}_\varphi| dl = dl = r_0 d\varphi$ , вычисляется элементарно:

$$\varepsilon_m = \oint_L \mathbf{H} dl = \frac{I}{2\pi} \oint_L \frac{\mathbf{e}_\pi dl}{r_0} = \frac{I}{2\pi} \oint_L \frac{r_0 d\varphi}{r_0} = \frac{I}{2\pi} \oint_L d\varphi = \frac{I}{2\pi} 2\pi = I.$$

Оказывается, что циркуляция и по любому другому пути интегрирования, сцепляющемуся с контуром  $L$ , будет равна полученному значению для  $L$ , так как по **теореме Ампера** двойной интеграл по сцепляющимся контурам  $L_1$  и  $L$  равен  $4\pi$ :

$$\oint_L \oint_{L_1} \frac{(dl [dl_1, \mathbf{r}])}{r^3} = 4\pi \quad (1.22)$$

и, следовательно, для циркуляции вектора  $\mathbf{H}$  по любому замкнутому контуру, сцепляющемуся с замкнутым контуром тока:

$$\oint_L \mathbf{H} dl = I. \quad (1.23)$$

Для нескольких токов по принципу суперпозиции напряжённость их общего магнитного поля равна векторной сумме напряжённостей магнитных полей отдельных токов:

$$\mathbf{H} = \sum_i \mathbf{H}_i$$

и с учетом (1.23)

$$\oint_L \mathbf{H} dl = \sum_i \oint_L \mathbf{H}_i dl = \sum_k I_k.$$

Сумма в окончательном результате берётся по токам, контуры которых сцеплены с контуром интегрирования  $L$ , причём сила тока берётся со знаком плюс, если его направление образует правовинтовую систему с направлением обхода  $L$ , и со знаком минус в противном случае. Полученное уравнение – математическая формулировка **закона полного тока**:

$$\oint_L \mathbf{H} dl = \sum_k I_k. \quad (1.24)$$

Когда токи не могут считаться линейными, в уравнении (1.24) следует перейти от линейных токов к объёмным:

$$I = \sum_k I_k = \sum_k \int_S \mathbf{j}_k d\mathbf{S} = \int_S \sum_k \mathbf{j}_k d\mathbf{S} = \int_S \mathbf{j} d\mathbf{S}, \quad (\mathbf{j} = \sum_k \mathbf{j}_k),$$

таким образом

$$\oint_L \mathbf{H} dl = \int_S \mathbf{j} d\mathbf{S}. \quad (1.25)$$

Интегрирование проводится по поверхности  $S$ , ограниченной контуром, вдоль которого вычисляется циркуляция. Выбор контура не регламентирован какими-либо условиями и может иметь любой вид, как и по-

верхность, «натянутая» на него. Преобразуя левую часть уравнения (1.25) по теореме Стокса

$$\oint_L \mathbf{H} d\mathbf{l} = \int_S \text{rot } \mathbf{H} d\mathbf{S},$$

можно представить его в виде

$$\int_S \text{rot } \mathbf{H} d\mathbf{S} = \int_S \mathbf{j} d\mathbf{S}, \Rightarrow \int_S (\text{rot } \mathbf{H} - \mathbf{j}) d\mathbf{S} = 0.$$

Так как последний интеграл равен нулю при любом выборе поверхности  $S$ , то в нуль должно обращаться подинтегральное выражение, из чего следует, что

$$\text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{j}. \tag{1.26}$$

Уравнение (1.26) есть *закон полного тока в дифференциальной форме*.

Полученное уравнение (1.26) соответствует закону полного тока *для линейных токов*. Однако его содержание оказывается гораздо глубже. Прежде всего, оно в явном виде обнаруживает вихревой характер магнитного поля создаваемого электрическим током. А во-вторых, им описывается магнитное поле при любом распределении токов, а не только линейных. В-третьих, полный ток, согласно (1.12), складывается из токов проводимости и токов смещения, с учетом этого факта выражение (1.26), примет вид

$$\boxed{\text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}}. \tag{1.27}$$

Таким образом, *переменное электрическое поле порождает вихревое магнитное поле, так же как и электрический ток*.

Соответствующая поправка, учитывающая токи смещения, должна быть внесена и в (1.25):

$$\boxed{\oint_L \mathbf{H} d\mathbf{l} = \int_S \mathbf{j} d\mathbf{S} + \frac{\partial}{\partial t} \int_S \mathbf{D} d\mathbf{S}}. \tag{1.28}$$

В проводниках ток смещения много меньше тока проводимости и, как будет показано впоследствии, им можно пренебречь. В диэлектриках же, наоборот,  $\mathbf{j} = 0$  и полная плотность тока определяется только плотностью тока смещения  $\partial \mathbf{D} / \partial t$ . При этом оказывается, что ток смещения может быть отличен от нуля даже в вакууме, где нет ни вещества, ни связанных с веществом зарядов ( $\epsilon = 1$ ):  $\mathbf{j} = \epsilon_0 (\partial \mathbf{E} / \partial t)$ .



## § 1.4 Электромагнитная индукция

### 1.4.1 Закон электромагнитной индукции Фарадея

Описание физических явлений, связанных с электрическим и магнитным полями, базируется на нескольких фундаментальных законах, открытых в XIX веке в результате многочисленных экспериментальных исследований. Важное место среди них занимает **закон электромагнитной индукции Фарадея**, согласно которому *эдс индукции  $\varepsilon_i$  в замкнутом контуре прямо пропорциональна скорости изменения магнитного потока  $\Phi$  через поверхность  $S$ , ограниченную контуром:*

$$\varepsilon_i = - \frac{d\Phi}{dt}. \quad (1.29)$$

Электродвижущая сила индукции  $\varepsilon_i$  определяется как циркуляция напряженности электрического поля  $\mathbf{E}$  по замкнутому контуру проводника  $L$ :

$$\varepsilon_i = \oint_L \mathbf{E} d\mathbf{l}. \quad (1.30)$$

Поток же  $\Phi$  вектора магнитной индукции  $\mathbf{B}$  через любую поверхность  $S$ , границей которой является этот контур, равен интегралу

$$\Phi = \int_S \mathbf{B} d\mathbf{S}. \quad (1.31)$$

Равенство (1.29) представляет собой математическую запись **закона электромагнитной индукции в интегральной форме** для любого способа изменения потока  $\Phi$ .

Пусть контур  $L$  с течением времени остаётся неизменным. В этом случае вместо полной производной по времени в (1.29) должна фигурировать частная производная:

$$\varepsilon_i = - \frac{\partial \Phi}{\partial t}. \quad (1.32)$$

Для фиксированного контура  $L$  частную производную по  $t$  можно внести под знак интеграла:

$$\oint_L \mathbf{E} d\mathbf{l} = - \int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} d\mathbf{S}. \quad (1.33)$$

Но по теореме Стокса  $\oint_L \mathbf{E} d\mathbf{l} = \int_S \text{rot} \mathbf{E} d\mathbf{S}$ , таким образом:

$$\int_S \text{rot} \mathbf{E} d\mathbf{S} = - \int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} d\mathbf{S}.$$

В силу произвольности поверхности  $S$ , опирающейся на контур  $L$ , должны быть равны подынтегральные выражения

$$\boxed{\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}} \quad (1.34)$$

Полученное уравнение представляет собой *математическую формулировку закона электромагнитной индукции Фарадея в дифференциальной форме*. В ней на первый план выступает другие аспекты закона.

Во-первых, подчёркивается вихревой характер индуцируемого электрического поля. Взаимная ориентация вихрей вектора  $\mathbf{E}$ , векторов  $\operatorname{rot} \mathbf{E}$  и  $-\partial \mathbf{B} / \partial t$  показана на рис.1.4.

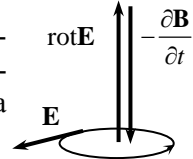


Рис.1.4

Во-вторых, рассматриваемое явление оказывается связанным с процессами, происходящими не только в веществе проводника, но и в вакууме. Проводник лишь играет роль «прибора» для обнаружения появления вихревого электрического поля при возбуждении переменного магнитного поля.

С другой стороны при записи закона в виде дифференциальной уравнения (1.34) не очевиден тот факт, что эдс в проводнике может возникать при изменении потока магнитной индукции не только за счёт изменения индукции магнитного поля  $\mathbf{B}$ , но и в результате деформации или перемещения контура проводника  $L$  (рис. 1.5):

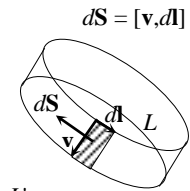


Рис.1.5

$$\varepsilon_i = -\frac{d\Phi}{dt} = -\left(\frac{\partial \Phi}{\partial t}\right)_{L=const} - \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t}\right)_{\mathbf{B}=const}$$

Слагаемые в правой части суммы описывают возникающую ЭДС: первое – при изменении индукции магнитного поля  $\mathbf{B}$  и неизменных форме и положении контура, второе – при перемещении и изменении формы и размеров контура проводника в постоянном магнитном поле. При движении проводника в магнитном поле на единичный положительный заряд ( $|e|=1$ ), будет помимо силы со стороны электрического поля  $\mathbf{F}_э=e\mathbf{E}$  действовать сила Лоренца  $\mathbf{F}_л=q[\mathbf{v}, \mathbf{B}]$ , которую также следует учитывать при вычислении эдс индукции:

$$\begin{aligned} \varepsilon_i &= \oint_L (\mathbf{E} + [\mathbf{v}, \mathbf{B}]) dl = \oint_L \mathbf{E} dl + \oint_L [\mathbf{v}, \mathbf{B}] dl = -\left(\frac{\partial \Phi}{\partial t}\right)_{L=const} - \oint_L \mathbf{B} [\mathbf{v}, dl] = \\ &= -\left(\frac{\partial \Phi}{\partial t}\right)_{L=const} - \oint_{S_{бок}} \mathbf{B} d\mathbf{S} = -\left(\frac{\partial \Phi}{\partial t}\right)_{L=const} - \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t}\right)_{\mathbf{B}=const} = -\frac{d\Phi}{dt}. \end{aligned}$$

## 1.4.2 Отсутствие в природе магнитных зарядов

Уравнение (1.34) имеет важное следствие. Найдём  $\operatorname{div}$  от обеих частей этого уравнения:

$$\operatorname{div} \operatorname{rot} \mathbf{E} = -\operatorname{div} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}.$$

Дивергенция ротора любого вектора тождественно равна нулю, поэтому и  $\operatorname{div}(\partial \mathbf{B}/\partial t) = 0$ . Меняя порядок дифференцирования по времени и по координатам  $-\operatorname{div}(\partial \mathbf{B}/\partial t) = \partial(\operatorname{div} \mathbf{B})/\partial t$  и учитывая, что в общем случае  $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$  – функция координат и времени, а потому возможно  $\partial \mathbf{B}/\partial t \neq 0$ , получим:

$$\boxed{\operatorname{div} \mathbf{B} = 0}. \quad (1.35)$$

Как известно, дивергенция векторного поля даёт плотность его источников или стоков. Полученное уравнение свидетельствует об их отсутствии для магнитного поля или, говоря иными словами, об *отсутствии в природе магнитных зарядов*, следовательно, *магнитные силовые линии нигде не начинаются и нигде не заканчиваются, они либо идут из бесконечности в бесконечность, либо замкнуты сами на себя*. Это означает, что поток вектора  $\mathbf{B}$  через любую замкнутую поверхность равен нулю:

$$\boxed{\oint_S \mathbf{B} d\mathbf{S} = 0}. \quad (1.36)$$

Выражение (1.36) есть *теорема Гаусса для магнитного поля в интегральной форме*, а выражение (1.35) – *теорема Гаусса для магнитного поля в дифференциальной форме*.

Как указал И.Е. Тамм, возможно существование незамкнутых силовых линий в ограниченной области пространства (то есть не идущих из бесконечности в бесконечность). В этом случае силовая линия магнитного поля навивается на тороидальную поверхность, не замыкаясь [5].

## § 1.5 Уравнения Максвелла

Вершиной научного творчества Максвелла стал «Трактат по электричеству и магнетизму» (1873 г.), в котором он подвёл итог не только своим трудам, но и напряжённой экспериментальной и теоретической работе по исследованию электрических и магнитных явлений блестящей плеяды физиков того времени. Поставив в первой работе «О фарадеевских силовых линиях» (1855 – 1856 гг.) перед собой цель «только показать, каким образом непосредственным применением идей и методов Фарадея лучше всего могут быть выяснены взаимные отношения различных классов открытых им явлений», пройдя долгий путь описания электриче-

ских и магнитных явлений с помощью механических моделей, он приходит к представлению об электромагнитном поле. Его теория не была лишена «логических ошибок и непоследовательностей», но, с другой стороны, её положения были подтверждены экспериментально. Поэтому в конце XIX века физики придерживались тезиса, выдвинутого в 1890 г. Герцем: «раз рассуждения и подсчёты, с помощью которых Максвелл пришёл к своей теории электромагнетизма, полны ошибок, которые мы не можем исправить, примем шесть уравнений Максвелла как исходную гипотезу, как постулаты, на которые и будет опираться вся теория электромагнетизма. Главное в теории Максвелла – это уравнения Максвелла» [6].

Нынешняя форма системы уравнений Максвелла была предложена Г. Герцем и О. Хевисайдом. Электрические и магнитные явления описываются, исходя из шести уравнений, и не используют явно представлений о микроскопической структуре вещества. Поведение величин, характеризующих свойства веществ –  $\epsilon$ ,  $\mu$  и  $\gamma$  – устанавливается эмпирически, с помощью непосредственных измерений. Феноменологический характер электродинамики Максвелла позволяет, с одной стороны, получить важные результаты в отношении протекания электрических и магнитных явлений. Однако, с другой стороны, не даёт возможности проникнуть глубже в природу исследуемых явлений.

Дифференциальные уравнения (1.34) и (1.35), как принято, объединяют в первую пару уравнений Максвелла

$$\operatorname{rot} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\frac{\partial \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)}{\partial t}, \quad (1.37)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = 0, \quad (1.38)$$

а об (1.27) и (1.6) говорят как о второй паре

$$\operatorname{rot} \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) + \frac{\partial \mathbf{D}(\mathbf{r}, t)}{\partial t}, \quad (1.39)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{D}(\mathbf{r}, t) = \rho(\mathbf{r}, t). \quad (1.40)$$

Всего в систему уравнений входят пять векторов  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{D}$ ,  $\mathbf{j}$ ,  $\mathbf{B}$  и  $\mathbf{H}$ , т.е. 15 неизвестных функций ( $\rho$  определяется с помощью (1.40) и (1.16)), для нахождения которых имеется только девять дифференциальных уравнений. Чтобы задача была полностью определена, привлекаются «материальные электромагнитные константы» [5]: проводимость  $\gamma$ , диэлектрическая проницаемость  $\epsilon$  и магнитная проницаемость  $\mu$ . Эти константы берутся из «материальных» уравнений (1.3), (1.18) и закона Ома (1.11):

$$\mathbf{D} = \epsilon \epsilon_0 \mathbf{E}, \quad \mathbf{B} = \mu \mu_0 \mathbf{H}, \quad \mathbf{j} = \gamma \mathbf{E}. \quad (1.41)$$

Входящие в уравнения плотности заряда и тока связаны между собой законом сохранения заряда

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{j} = 0. \quad (1.42)$$

Вычисления с использованием уравнений (1.40) – (1.42) позволяют найти уравнение для  $\rho$ :

$$\begin{aligned} \rho = \operatorname{div} \mathbf{D} = \varepsilon_0 \varepsilon \operatorname{div} \mathbf{E} = \varepsilon_0 \varepsilon \operatorname{div}(\mathbf{j}/\gamma) = (\varepsilon_0 \varepsilon / \gamma) \operatorname{div} \mathbf{j} = -(\varepsilon_0 \varepsilon / \gamma) \partial \rho / \partial t \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\gamma}{\varepsilon_0 \varepsilon} \rho = 0. \end{aligned} \quad (1.43)$$

Таким образом,  $\rho$  не является независимой величиной.

После подстановки (1.41) в уравнения (1.37) и (1.39) получают:

$$\begin{cases} \operatorname{rot} \mathbf{E} = -\mu \mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \\ \operatorname{rot} \mathbf{H} = \left( \gamma + \varepsilon \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \right) \mathbf{E} \end{cases}, \quad (1.44)$$

т.е. шесть уравнений для шести неизвестных составляющих векторов  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$ .

Уравнение

$$\operatorname{div} \mathbf{H} = 0 \quad (1.45)$$

в этом случае играет роль дополнительного ограничения на решение уравнений Максвелла, а  $\rho = \operatorname{div}(\varepsilon \varepsilon_0 \mathbf{E})$  определяет функцию  $\rho$ . Дополнительным ограничением на решения уравнений Максвелла является результат подстановки  $\rho$  в закон сохранения заряда (1.42)

$$\operatorname{div} \left[ \left( \gamma + \varepsilon \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \right) \mathbf{E} \right] = 0. \quad (1.46)$$

Таким образом, математическая задача по нахождению электромагнитного поля оказывается полностью определённой.

### § 1.6 Закон сохранения энергии электромагнитного поля

Дополним материальные уравнения ещё одним результатом исследования электрических явлений – **законом Джоуля – Ленца**: количество теплоты  $Q$ , выделяющейся в единицу времени на участке электрической цепи с сопротивлением  $R$  при протекании по нему постоянного тока  $I$ , равно  $Q_t = RI^2$ .

В дифференциальной форме закон Джоуля – Ленца имеет вид локального соотношения

$$\sigma = \mathbf{jE}, \quad (1.47)$$

где  $\sigma = \frac{dQ_t}{dV}$  – удельная тепловая мощность тока.

При выполнении закона Ома  $\mathbf{j} = \gamma \mathbf{E}$ , выражение (1.47) можно записать в виде  $\sigma = \gamma E^2$ .

Закон Джоуля-Ленца даёт возможность ввести энергетическое описание физической системы, в которой электромагнитное поле совершает работу по перемещению зарядов, в результате чего в системе выделяется тепло  $Q_t$ :

$$-\frac{\partial W}{\partial t} = Q_t + N, \quad (1.48)$$

где  $\partial W/\partial t$  – уменьшение энергии электромагнитного поля в единицу времени (работа, затрачиваемая в единицу времени на возбуждение в цепи электрического тока);

$N$  – изменение энергии системы за счёт других видов её расхода помимо выделения тепла.

Из трёх слагаемых уравнения (1.48) нам известно  $Q_t$ :

$$Q_t = \int_V \mathbf{j} \mathbf{E} dV.$$

Используя уравнение (1.40), выразим плотность тока  $\mathbf{j}$  через  $\mathbf{H}$  и  $\mathbf{D}$  и подставим в подынтегральное выражение для  $Q_t$ :

$$\begin{aligned} \int_V \mathbf{j} \mathbf{E} dV &= \int_V \left( \text{rot } \mathbf{H} - \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) \mathbf{E} dV = \int_V \mathbf{E} \text{rot } \mathbf{H} dV - \int_V \mathbf{E} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} dV = \\ &= - \int_V \text{div} [\mathbf{E}, \mathbf{H}] dV - \int_V \mathbf{H} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} dV - \int_V \mathbf{E} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} dV = \\ &= - \int_V \text{div} [\mathbf{E}, \mathbf{H}] dV - \frac{\partial}{\partial t} \int_V \left( \frac{\mathbf{H} \mathbf{B} + \mathbf{E} \mathbf{D}}{2} \right) dV. \end{aligned}$$

Перепишем полученный результат в соответствии с уравнением баланса энергии (1.48):

$$-\frac{\partial}{\partial t} \int_V \left( \frac{\mathbf{H} \mathbf{B} + \mathbf{E} \mathbf{D}}{2} \right) dV = \int_V \mathbf{j} \mathbf{E} dV + \int_V \text{div} [\mathbf{E}, \mathbf{H}] dV. \quad (1.49)$$

Сравнение с (1.48) позволяет утверждать, что левая часть полученного равенства даёт уменьшение энергии электромагнитного поля:

$$W = \frac{1}{2} \int_V (\mathbf{E} \mathbf{D} + \mathbf{H} \mathbf{B}) dV. \quad (1.50)$$

Согласно (1.50), энергия электромагнитного поля в единице объёма  $w$  равна сумме плотностей энергии электрического  $w_e = \mathbf{E}\mathbf{D}/2$  и магнитного  $w_m = \mathbf{H}\mathbf{B}/2$  полей:

$$w = w_e + w_m = \frac{\mathbf{E}\mathbf{D} + \mathbf{H}\mathbf{B}}{2}. \quad (1.51)$$

Второе слагаемое в формуле (1.49) по теореме Остроградского-Гаусса можно преобразовать в интеграл по поверхности  $S$ , ограничивающей  $V$ :

$$N = \int_V \operatorname{div}[\mathbf{E}, \mathbf{H}] dV = \int_S [\mathbf{E}, \mathbf{H}] dS. \quad (1.52)$$

Этот интеграл учитывает уменьшение энергии в рассматриваемом объёме за счёт потока электромагнитного поля через поверхность  $S$ , ограничивающую рассматриваемый объём.

Таким образом, уравнение баланса для электромагнитной энергии (1.49) принимает вид:

$$-\frac{\partial}{\partial t} \int_V \left( \frac{\mathbf{H}\mathbf{B} + \mathbf{E}\mathbf{D}}{2} \right) dV = \int_V \mathbf{j}\mathbf{E} dV + \int_S [\mathbf{E}, \mathbf{H}] dS, \quad (1.53)$$

Полученное уравнение (1.53) – *математическая формулировка закона сохранения энергии электромагнитного поля*.

При сравнении (1.53) с первым началом термодинамики, согласно которому уменьшение внутренней энергии системы в единицу времени ( $-dU/dt$ ) происходит за счёт выделения тепла  $Q$  и работы  $A$ , совершаемой системой:

$$-\frac{\partial U}{\partial t} = -\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial A}{\partial t} \Rightarrow -\frac{\partial W}{\partial t} = Q_t + N \quad (1.54)$$

Механическая работа совершается различными устройствами, включаемыми в цепь. Сопоставление двух последних равенств позволяет высказать предположение, что энергия к ним транспортируется *потоком электромагнитного поля*  $\mathbf{S} = [\mathbf{E}, \mathbf{H}]$ .

Равенство (1.51) может быть записано в таком же виде, как и закон сохранения заряда. Так как объём, по которому проводится интегрирование, хотя и произволен, но считается постоянным, производная по времени в левой части равенства может быть внесена под знак интеграла, и все три интеграла могут объединены:

$$\int_V \left[ \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\mathbf{H}\mathbf{B} + \mathbf{E}\mathbf{D}}{2} \right) + \mathbf{j}\mathbf{E} + \operatorname{div}[\mathbf{E}, \mathbf{H}] \right] dV = 0.$$

В силу произвольности выбора  $V$  нулю равно подынтегральное выражение:

$$\left[ \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\mathbf{H}\mathbf{B} + \mathbf{E}\mathbf{D}}{2} \right) + \mathbf{j}\mathbf{E} + \operatorname{div}[\mathbf{E}, \mathbf{H}] \right] dV = 0. \quad (1.52)$$

Обозначив  $\mathbf{S} = [\mathbf{E}, \mathbf{H}]$  и учитывая (1.41) и (1.51), выражение (1.52) можно записать в виде:

$$\boxed{\frac{\partial w}{\partial t} + \operatorname{div}\mathbf{S} = -\sigma}. \quad (1.53)$$

В этом уравнении вектор  $\mathbf{S}$ , называемый *вектором Умова-Пойнтинга*, обозначает поток энергии, а  $\sigma$  имеет смысл *объёмной плотности источников энергии* (знак минус перед  $\sigma$  символизирует потери энергии, то есть наличие «стоков» в нашем случае).

*Энергия электромагнитного поля, как всякая экстенсивная величина подчиняется уравнению баланса.*



## ГЛАВА 2. ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ ПОЛЕ В ВЕЩЕСТВЕ

### § 2.1 Электронная теория вещества

Одной из трудностей в понимании природы электрических и магнитных явлений во времена Максвелла была в том, что совершенно неясно было, что такое электричество и электрический ток. Электрон ещё не был открыт, не было ещё даже набросков электронной теории, хотя «атомы» («молекулы») электричества уже появился на страницах публикаций (в частности, начиная с 1862 г., в работах В. Вебера) [2].

В 1889 г. Дж. Дж. Томсон открыл электрон. В связи с этим потребовалась модернизация теории Максвелла. Дело заключается в том, что система уравнений Максвелла (1.37) – (1.40) носит феноменологический характер: она обобщает огромный объём экспериментальных исследований, и на её основе объясняется значительное число электрических и магнитных явлений. Но как вписывается в эту картину электрон? Каково происхождение величин, характеризующих вещество: диэлектрической проницаемости  $\epsilon$ , магнитной проницаемости  $\mu$  и проводимости  $\gamma$ ? Как и почему электрические и магнитные свойства зависят от температуры, от структуры вещества? На эти вопросы можно ответить, только рассматривая процессы на микроскопическом уровне. В конце XIX века это означало обсуждение процессов с точки зрения атомно-молекулярного строения вещества и существования дискретных зарядов в виде электронов и ионов [7].

Введение электрона в теорию электромагнитного поля было осуществлено Г. А. Лоренцом. По Лоренцу – уравнения Максвелла в веществе «...должны быть выведены из уравнений, которые были установлены нами для свободного, т.е. лишённого зарядов эфира, путём введения в них соответствующих изменений, выражающих влияние заряда» [7].

Система уравнений Максвелла для вакуума по Лоренцу (в современных обозначениях с использованием международной системы единиц) может быть записана в виде

$$\operatorname{rot} \mathbf{e} = -\frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t} \quad (2.1)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{b} = 0 \quad (2.2)$$

$$\operatorname{rot} \frac{\mathbf{b}}{\mu_0} = \mathbf{j} + \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{e}}{\partial t} \quad (2.3)$$

$$\operatorname{div} \epsilon_0 \mathbf{e} = \rho \quad (2.4)$$

где  $\mathbf{e}(\mathbf{r}, t)$  – напряжённость электрического поля в вакууме;

$\mathbf{b}(\mathbf{r}, t)$  – индукция магнитного поля в вакууме;

$\rho(\mathbf{r}, t)$  – плотность электрических зарядов;

$\mathbf{j}(\mathbf{r}, t)$  – плотность тока.

Уравнения (2.1) – (2.4) называют *уравнениями Максвелла-Лоренца*.

Они описывают электромагнитное поле, как говорят, на «микроскопическом» уровне, имея в виду то, что фигурирующие в них заряды носят дискретный характер (электроны и ионы).

Логика вывода Лоренцем уравнений Максвелла для электромагнитного поля в веществе на основе электронной теории выглядит следующим образом:

1. Известны уравнения поля, в которых константы  $\epsilon$ ,  $\mu$  и  $\gamma$  находятся опытным путём для каждого вещества.

2. Предполагается, что для вакуума эти уравнения адекватно описывают электромагнитные поля.

3. Введение дискретных зарядов и их токов в уравнения для электромагнитного поля в вакууме производится с использованием аналогии с феноменологическими уравнениями.

4. Микроскопическое поле в объеме отдельного атома меняется очень резко, как в пространстве, так и во времени. С помощью макроскопических измерительных приборов такое поле нельзя зарегистрировать. Поскольку приборы для исследования электромагнитного поля носят макроскопический характер, они взаимодействуют с огромным числом зарядов. Поэтому в результате экспериментов получаются усреднённые значения измеряемых величин. Таким образом, в полученных уравнениях для вакуума (2.1) – (2.4) следует перейти к средним значениям фигурирующих в них величин.

Вводимые для описания макроскопических полей в классической электродинамике величины выступают как средние от соответствующих микроскопических величин. Напряжённость электрического поля  $\mathbf{E}$  есть среднее значение микроскопической напряжённости электрического поля  $\mathbf{e}$  зарядов в вакууме  $\mathbf{E} = \bar{\mathbf{e}}$ , индукция магнитного поля  $\mathbf{B} = \bar{\mathbf{b}}$ .

Усреднение должно проводиться по «физически малым» элементу объёма  $\delta V$  и промежутку времени  $\delta t$ . Среднее значение физической величины  $f(x, y, z, t)$  в точке с координатами  $x$ ,  $y$  и  $z$  в момент времени  $t$  по определению равно:

$$\overline{f(x, y, z, t)} = \frac{1}{\delta V} \frac{1}{\delta t} \int_0^{\delta t} \int_{\delta V} f(x + \xi, y + \eta, z + \zeta, t + \tau) d\xi d\eta d\zeta d\tau \quad (2.5)$$

Поскольку подинтегральное выражение зависит от  $x$ ,  $y$ ,  $z$  и  $t$  как от параметров, то дифференцирование среднего значения функции  $f(x, y, z, t)$  сведётся к вычислению производных по этим переменным от подинтегрального выражения. Таким образом, дифференцирование по координатам и времени и операция усреднения перестановочны:

$$\overline{\frac{\partial f}{\partial x}} = \frac{\partial \bar{f}}{\partial x}, \quad \overline{\frac{\partial f}{\partial y}} = \frac{\partial \bar{f}}{\partial y}, \quad \overline{\frac{\partial f}{\partial z}} = \frac{\partial \bar{f}}{\partial z}, \quad \overline{\frac{\partial f}{\partial t}} = \frac{\partial \bar{f}}{\partial t}. \quad (2.6)$$

Векторные операции, как первого, так и второго порядка представляют собой дифференцирование обычных функций, будь то скаляр или проекции векторов. Поэтому на основании (2.6) они перестановочны с операцией усреднения, в частности имеют место равенства:

$$\overline{\text{grad } f(x, y, z, t)} = \text{grad } \bar{f}(x, y, z, t), \quad \overline{\text{div } \mathbf{A}(x, y, z, t)} = \text{div } \bar{\mathbf{A}}(x, y, z, t), \\ \overline{\text{rot } \mathbf{A}(x, y, z, t)} = \text{rot } \bar{\mathbf{A}}(x, y, z, t), \quad \overline{\Delta f(x, y, z, t)} = \Delta \bar{f}(x, y, z, t).$$

Т.к. процедура усреднения перестановочна с дифференцированием по координатам и времени, поэтому, при применении к уравнениям, с формальной точки зрения не вызывает затруднений. Таким образом, результат усреднения первой пары уравнений (2.1) и (2.2), с учётом сказанного, можно записать сразу:

$$\text{rot } \bar{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, t) = -\frac{\partial \bar{\mathbf{B}}(\mathbf{r}, t)}{\partial t}, \quad (2.7) \\ \text{div } \bar{\mathbf{B}}(\mathbf{r}, t) = 0$$

## § 2.2 Поляризация вещества

Усреднение второй пары уравнений (2.3) и (2.4) требует более подробного рассмотрения средних значений плотности заряда и тока.

В уравнение (2.4) входит плотность заряда. При усреднении необходимо различать заряды связанные и свободные (сторонние). Сторонние заряды могут свободно перемещаться по всему объёму вещества. Полная плотность зарядов  $\rho$  равна сумме плотностей связанных зарядов вещества –  $\rho_g$  (*нем. gebunden* – связанный) и свободных (сторонних) зарядов  $\rho_f$  (*нем. frei* – свободный):

$$\rho = \rho_g + \rho_f. \quad (2.8)$$

Связанные заряды, в отличие от сторонних, не могут свободно перемещаться по всему объёму вещества и должны удовлетворять условию электронейтральности:

$$\int_V \rho_g(\mathbf{r}, t) dV = 0. \quad (2.9)$$

При усреднении уравнения (2.4), за средним значением плотности свободных зарядов сохраняют традиционное обозначение  $\bar{\rho}_f = \rho$ , а среднее значение плотности связанных зарядов выражают через дивергенцию некоторого вектора  $\mathbf{P}$ :

$$\bar{\rho}_g = -\operatorname{div} \mathbf{P}, \quad (2.10)$$

который, в связи с условием (2.9), полагают равным нулю вне объёма, где находятся связанные заряды. В итоге получим:

$$\operatorname{div} \varepsilon_0 \bar{\mathbf{e}} = (\bar{\rho}_f + \bar{\rho}_g) \Rightarrow \operatorname{div} \varepsilon_0 \mathbf{E} = \rho - \operatorname{div} \mathbf{P}.$$

Объединяя  $\operatorname{div} \mathbf{P}$  с  $\operatorname{div} \varepsilon_0 \mathbf{E}$ , получим 4-е уравнение системы уравнений Максвелла:

$$\operatorname{div}(\varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}) = \rho \Rightarrow \operatorname{div} \mathbf{D} = \rho \quad (2.11)$$

Вектор  $\mathbf{D}$ , стоящий под знаком дивергенции и есть вектор электрического смещения (вектор индукции электрического поля):

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}.$$

Осталось выяснить, что представляет собой вектор  $\mathbf{P}$ . Умножим интеграл от вектора  $\mathbf{P}$  по объёму, в котором  $\rho_g \neq 0$ , на произвольный постоянный вектор  $\mathbf{C}$  и воспользуемся равенством  $\operatorname{div}\{(\mathbf{C}, \mathbf{r})\mathbf{P}\} = (\mathbf{C}, \mathbf{r})\operatorname{div} \mathbf{P} + (\mathbf{C}, \mathbf{P})$ , из которого следует, что  $(\mathbf{C}, \mathbf{P}) = \operatorname{div}\{(\mathbf{C}, \mathbf{r})\mathbf{P}\} - (\mathbf{C}, \mathbf{r})\operatorname{div} \mathbf{P}$ :

$$\mathbf{C} \int_V \mathbf{P} dV = \int_V (\mathbf{C}, \mathbf{P}) dV = \int_V \operatorname{div}\{(\mathbf{C}, \mathbf{r})\mathbf{P}\} dV - \int_V (\mathbf{C}, \mathbf{r}) \operatorname{div} \mathbf{P} dV.$$

Интеграл от  $\operatorname{div}\{(\mathbf{C}, \mathbf{r})\mathbf{P}\}$  обращается в нуль, так как по теореме Остроградского – Гаусса он может быть преобразован в интеграл по поверхности окружающей данный объём. Выбирая эту поверхность в области, где  $\mathbf{P} = 0$ , получим, что этот интеграл равен нулю. С учётом определения (2.10) можно записать

$$\mathbf{C} \int_V \mathbf{P} dV = - \int_V (\mathbf{C}, \mathbf{r}) \operatorname{div} \mathbf{P} dV = \int_V (\mathbf{C}, \mathbf{r}) \rho_g dV = \mathbf{C} \int_V \mathbf{r} \rho_g dV.$$

Поскольку  $\mathbf{C}$  произвольный постоянный вектор, то

$$\int_V \mathbf{P} dV = \int_V \mathbf{r} \rho_g(\mathbf{r}) dV. \quad (2.12)$$

Из равенства интегралов следует равенство

$$\mathbf{P} = \rho_g \mathbf{r}, \quad (2.13)$$

которое означает, что вектор  $\mathbf{P}$  равен дипольному моменту единицы объёма вещества, а интеграл (2.12) – дипольному моменту  $\mathbf{P}_e$  всего тела.

С точки зрения электронной теории вещества поляризация возникает под действием внешнего электрического поля. При его возбуждении происходит смещение зарядов: положительных по направлению поля,

отрицательных – против поля. В диэлектриках, в идеальном случае, имеются только связанные заряды. При этом возможны два механизма поляризации. Если молекулы вещества имеют дипольные моменты (так называемые *полярные* диэлектрики), то, поворачиваясь, они ориентируются по направлению этого внешнего поля. Если же у них электрический момент равен нулю (*неполярные* диэлектрики), то возникновение поляризации обязано расхождению связанных положительных и отрицательных зарядов в противоположные стороны – электронная и ионная поляризация. В обоих случаях дипольный момент всего объёма вещества равен сумме дипольных моментов отдельных молекул:  $\mathbf{P}_e = \sum_i \mathbf{p}_i$ . Для количественной характеристики степени поляризации вводится векторная величина – *поляризованность* вещества  $\mathbf{P}$ , равная «отношению суммы электрических моментов  $\sum_i \mathbf{p}_i$  молекул, заключённых в физически малом элементе диэлектрика, содержащем данную точку, к объёму этого элемента»:

$$\mathbf{P} = \frac{1}{\Delta V} \sum_i \mathbf{p}_i \quad (2.14)$$

Поляризованность пропорциональна напряжённости электрического поля:  $\mathbf{P} = \chi_a \mathbf{E}$ .  $\chi_a$  – абсолютная диэлектрическая восприимчивость – физическая величина, характеризующая свойства диэлектрика, скалярная для изотропного вещества и тензорная для анизотропного. Для описания свойств диэлектриков используется также относительная диэлектрическая восприимчивость  $\chi_r$ :

$$\chi_r = \chi / \epsilon_0. \quad (2.15)$$

С использованием относительной диэлектрической восприимчивости векторы поляризованности  $\mathbf{P}$  и электрического смещения  $\mathbf{D}$  можно представить следующим образом:

$$\mathbf{P} = \epsilon_0 \chi_r \mathbf{E}, \quad (2.16)$$

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \epsilon_0 \chi_r \mathbf{E} = \epsilon_0 (1 + \chi_r) \mathbf{E} = \epsilon_0 \epsilon \mathbf{E}. \quad (2.17)$$

В последнем равенстве в соответствии с (1.3) введено обозначение

$$\epsilon = 1 + \chi_r. \quad (2.18)$$

## § 2.3 Намагничивание вещества

### 2.3.1 Токи свободных и связанных зарядов

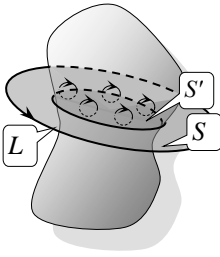
Как уже говорилось выше, в уравнения Максвелла для электромагнитного поля в веществе входят макроскопические величины, являющиеся усреднёнными значениями соответствующих величин, описывающих процессы на атомно-молекулярном уровне. С этой точки зрения напряжённость магнитного поля есть среднее значение истинной «микроско-

пической» напряжённости магнитного поля. Токи свободных  $\mathbf{j}_f$  и связанных зарядов  $\mathbf{j}_g$ , как и заряды, в этом отношении не являются исключением: средняя плотность электрического тока  $\bar{\mathbf{j}}$  равна сумме средних значений плотностей токов свободных и связанных зарядов:

$$\bar{\mathbf{j}} = \bar{\mathbf{j}}_f + \bar{\mathbf{j}}_g. \quad (2.19)$$

Связанные заряды – заряды частиц, из которых состоит вещество, – не могут свободно перемещаться в нём, поэтому их токи локализованы в ограниченных участках пространства и замкнуты. Среднее значение их полного тока через любое поперечное сечение (рис. 2.1) равно нулю:

$$\int_S \bar{\mathbf{j}}_g d\mathbf{S} = 0. \quad (2.20)$$



Введем некоторый вектор  $\mathbf{M}$  отличный от нуля только в веществе, ротор которого равен вектору средней плотности электрического тока связанных зарядов:

$$\bar{\mathbf{j}}_g = \text{rot } \mathbf{M}. \quad (2.21)$$

В этом случае, выбирая в качестве поверхности интегрирования  $S$  поверхность, ограниченную контуром  $L$ , расположенным вне вещества (рис. 2.1), где  $\mathbf{M} = 0$ , получим, используя теорему Стокса, как и положено для тока связанных зарядов

$$\int_S \bar{\mathbf{j}}_g d\mathbf{S} = \int_S \text{rot } \mathbf{M} d\mathbf{S} = \oint_L \mathbf{M} d\mathbf{r} = 0.$$

Для выяснения физического смысла вектора  $\mathbf{M}$  введем в рассмотрение магнитный момент объемного тока.

### 2.3.2 Магнитный момент объемного тока

Для решения задачи о магнитном моменте объемного тока воспользуемся магнитным моментом плоского контура линейного замкнутого тока (рис. 2.2), который по определению равен [8].

$$\mathbf{P}_m = I\mathbf{S}, \quad (2.22)$$

где  $I$  – сила тока,

$\mathbf{S} = \mathbf{n}S$  – вектор площади поверхности, ограниченной его контуром ( $\mathbf{n}$  – нормаль к поверхности  $S$ ).

Это определение остаётся в силе для замкнутого контура любой конфигурации. Вектор площади поверхности можно найти, вы-

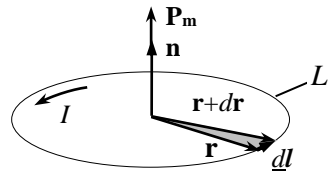


Рис. 2.2

числяя интеграл

$$\mathbf{S} = \int_s d\mathbf{S}, \quad (2.23)$$

в котором  $d\mathbf{S} = (1/2)[\mathbf{r}, d\mathbf{r}]$ .

На рисунке 2.3 бесконечно малый элемент контура тока обозначен  $d\mathbf{l}$  ( $d\mathbf{l} \cong d\mathbf{r}$ ). С использованием представления  $d\mathbf{S}$  в виде векторного произведения в (2.23) можно перейти к интегралу по контуру тока  $L$ :

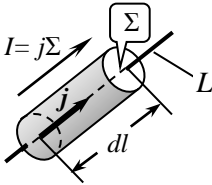


Рис. 2.3

$$\mathbf{S} = \frac{1}{2} \oint_L [\mathbf{r}, d\mathbf{l}]. \quad (2.24)$$

Если отказаться от рассмотрения тока как линейного (т.е. перейти к объемному току), то сила тока в любом поперечном сечении проводника

$$I = \int_{\Sigma} (\mathbf{j}, d\mathbf{\Sigma}), \quad (2.25)$$

где интегрирование проводится по площади поперечного сечения проводника  $\Sigma$  (рис. 2.3).

Для участка проводника элементарной длины  $d\mathbf{l}$  в пределах которого  $\Sigma = \text{const}$

$$I = \mathbf{j} \cdot \Sigma. \quad (2.26)$$

При умножении равенства (2.26) на  $d\mathbf{l}$ , получим

$$I d\mathbf{l} = \mathbf{j} dV \quad (2.27)$$

Равенство (2.26) можно формально трактовать как замену позволяющую осуществлять *переход от линейных токов к объемным*.

После подстановки в (2.22) выражений для  $\mathbf{S}$  и несложных преобразований с учетом (2.27), получим

$$\mathbf{P}_m = \frac{I}{2} \oint_L [\mathbf{r}, d\mathbf{l}] = \frac{1}{2} \int_V [\mathbf{r}, \mathbf{j}] dV. \quad (2.28)$$

Магнитный момент подобно дипольному моменту нейтральной системы зарядов зависит только от свойств самой системы и не зависит от выбора системы отсчета.

### 2.3.3 Связь между магнитным и механическим моментами системы движущихся зарядов

С точки зрения электронной теории плотность зарядов есть сумма вида

$$\rho(\mathbf{r}) = \sum_{i=1}^N q_i \delta^{(3)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i), \quad (2.29)$$

в которой  $\delta^{(3)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) = \delta(x - x_i)\delta(y - y_i)\delta(z - z_i)$  – произведение трёх обычных дельта-функций.

Всякая совокупность замкнутых токов одинаковых зарядов (электронов в атоме) обладает магнитным моментом

$$\mathbf{P}_m = \frac{1}{2} \int_V \rho(\mathbf{r}) [\mathbf{r}, \mathbf{v}] dV = \frac{1}{2} \int_V \left\{ \sum_i q \delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) \right\} [\mathbf{r}, \mathbf{v}] dV = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N q [\mathbf{r}_i, \mathbf{v}_i],$$

где  $N$  – число зарядов в системе;

$\mathbf{v}$  – скорость движения зарядов.

Умножим и разделим правую часть на массу электрона  $m_e$ :

$$\mathbf{P}_m = \frac{q}{2m_e} \sum_{i=1}^N [\mathbf{r}_i, m_e \mathbf{v}_i]. \quad (2.30)$$

Введём обозначения импульса отдельного электрона  $\mathbf{p}_i = m_e \mathbf{v}_i$ , его момента импульса  $\mathbf{L}_i = [\mathbf{r}_i, \mathbf{p}_i]$  и суммарного момента импульса всей совокупности движущихся электронов  $\mathbf{L} = \sum_i [\mathbf{r}_i, \mathbf{p}_i]$ , тогда:

$$\mathbf{P}_m = \frac{e}{2m_e} \mathbf{L} \quad (2.31)$$

Выражение (2.31) показывает, что между магнитным и механическим моментами в атоме существует прямо пропорциональная зависимость.

### 2.3.4 Плотность токов смещения и вектор намагниченности

Найдём магнитный момент совокупности связанных зарядов, с помощью формулы (2.28), в которой положим  $\mathbf{j} = \bar{\mathbf{j}}$ , и с учетом (2.21), выполняя преобразования подынтегрального выражения методом скалярного умножения на произвольный постоянный вектор  $\mathbf{C}$ , получим:

$$\mathbf{P}_m = \frac{1}{2} \int_V [\mathbf{r}, \bar{\mathbf{j}}] dV = \frac{1}{2} \int_V [\mathbf{r}, \text{rot} \mathbf{M}] dV = \int_V \mathbf{M} dV.$$

Из сравнения полученного результата с (2.28) следует, что вектор  $\mathbf{M}$  представляет собой магнитный момент единицы объёма вещества:

$$\mathbf{M} = (1/2) [\mathbf{r}, \bar{\mathbf{j}}]. \quad (2.32)$$

Найденное выражение для плотности  $\bar{\mathbf{j}}_g = \text{rot} \mathbf{M}$  однако не согласуется с законом сохранения зарядов  $\partial \bar{\rho}_g / \partial t + \text{div} \bar{\mathbf{j}}_g = 0$ , который должен выполняться и для связанных зарядов. Подставив в эту формулу выражение (2.10)  $\bar{\rho}_g = -\text{div} \mathbf{P}$ , обнаружим, что ток смещения  $\bar{\mathbf{j}}_g$  должен включать



в себя слагаемое  $\partial \mathbf{P} / \partial t$ :

$$\bar{\mathbf{j}}_g = \text{rot } \mathbf{M} + \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t}. \quad (2.33)$$

Равенство (2.20) при этом сохраняет свою силу:

$$\int_S \bar{\mathbf{j}}_g d\mathbf{S} = \int_S \left( \text{rot } \mathbf{M} + \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} \right) d\mathbf{S} = \int_L \mathbf{M} dl + \int_S \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} d\mathbf{S} = 0,$$

так как, выбрав контур  $L$ , ограничивающий сечение  $S$ , вне вещества, где  $\mathbf{P} = 0$  и  $\mathbf{M} = 0$ , по-прежнему получим нуль.

Теперь можно приступить к усреднению уравнения (2.3):

$$\frac{1}{\mu_0} \text{rot } \bar{\mathbf{b}} = \bar{\mathbf{j}}_f + \bar{\mathbf{j}}_g + \varepsilon_0 \frac{\partial \bar{\mathbf{e}}}{\partial t}.$$

Средние значения микроскопических величин означают:

$$\bar{\mathbf{j}}_f = \mathbf{j} - \text{плотность тока проводимости},$$

$$\bar{\mathbf{j}}_g = \text{rot } \mathbf{M} + \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} - \text{плотность тока связанных зарядов}.$$

После подстановки этих средних значений в обсуждаемое уравнение (2.3) имеем

$$\frac{1}{\mu_0} \text{rot } \mathbf{B} = \mathbf{j} + \text{rot } \mathbf{M} + \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} + \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}.$$

Вводя в полученное соотношение вместо вектора индукции  $\mathbf{B}$  вектор напряжённости магнитного поля

$$\mathbf{H} = (1/\mu_0)\mathbf{B} - \mathbf{M} \quad (2.34)$$

и вектор электрического смещения  $\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$ , получают уравнение (1.39), справедливое для токов в среде:

$$\text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}. \quad (2.35)$$

Равенство (2.34), как правило, записывают в виде

$$\mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{H} + \mathbf{M}). \quad (2.36)$$

Экспериментально установлено, что для многих веществ (исключение составляют парамагнетики при больших значениях  $\mathbf{H}$  и ферромагнетики) намагничённость прямо пропорциональна напряжённости магнитного поля

$$\mathbf{M} = \varkappa \mathbf{H},$$

где  $\varkappa$  – *магнитная восприимчивость* – безразмерная величина, характеризующая свойства вещества намагничиваться в магнитном поле, скалярная для изотропного вещества и тензорная для анизотропного вещества [8].

Тогда (2.36) преобразуется в следующее равенство:

$$\mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{H} + \mathbf{M}) \Rightarrow \mathbf{B} = \mu_0(1 + \varkappa)\mathbf{H} \Rightarrow \mathbf{B} = \mu_0\mu\mathbf{H}, \quad (2.37)$$

где  $\mu = 1 + \varkappa$  – *магнитная проницаемость* – величина безразмерная, скалярная для изотропного вещества, и тензорная для анизотропных веществ [8].

## § 2.4 Природа магнитных свойств вещества

Намагниченность  $\mathbf{M}$  так же как и вектор поляризованности  $\mathbf{P}$  представляет собой сумму магнитных моментов атомов и молекул  $\mathbf{p}_{mk}$  в единице объёма:  $\mathbf{M} = \sum_k \mathbf{p}_{mk}$ . Однако механизм её возникновения отличается

от механизма поляризации, так как в природе нет магнитных зарядов. Естественно, что процесс ориентации уже имеющегося у микрочастиц магнитного момента аналогичен соответствующему процессу для электрического момента. Более того, формулы для напряжённостей электрического  $\mathbf{E}$  и магнитного  $\mathbf{H}$  полей, создаваемых ими, с точностью до постоянных множителей одинаковы при замене  $\mathbf{p} \leftrightarrow \mathbf{p}_m$ , чем, собственно, и объясняется то, что теория магнитного поля первоначально формально стоила по образцу теории электрического поля. Однако объяснение механизма возникновения магнитного момента у атомов и молекул коренным образом отличается от объяснения появления электрического момента. Электрический момент  $\mathbf{p} = q\mathbf{l}$  обязан своим происхождением наличию относительного смещения  $\mathbf{l}$  положительных и отрицательных зарядов, уже имеющему место или возникающему под действием внешнего электрического поля  $\mathbf{p} = \alpha\varepsilon_0\mathbf{E}$  ( $\alpha$  – коэффициент поляризуемости молекулы или атома). Магнитный же момент либо результат наличия (или появления при возбуждении магнитного поля) в веществе круговых микротокков («молекулярных токов» Ампера), либо свойство изначально присутствующее микрочастицам, из которых оно состоит.

В «первом приближении» различают три типа веществ, проявляющих магнитные свойства.

I. *Парамагнетики* – вещества, намагничивающиеся по направлению внешнего магнитного поля, для которых магнитная восприимчивость  $\varkappa > 0$  (соответственно  $\mu > 1$ ).

Пьером Кюри в 1895 году был экспериментально установлен закон для магнитной восприимчивости

$$\varkappa = \lim_{H \rightarrow 0} \frac{M}{H} = \frac{C}{T}, \quad (2.38)$$

где  $T$  – абсолютная температура,

$C$  – константа Кюри, имеющая различные значения для разных веществ.

В рамках электронной теории «молекулярные токи» Ампера интерпретируются как токи электронов в атомах (ионах, молекулах). Если в отсутствие внешнего магнитного поля они имеют отличные от нуля магнитные моменты, то во внешнем магнитном поле они ориентируются по направлению поля. Магнитная восприимчивость такого вещества положительна, но много меньше единицы. По закону Кюри намагниченность таких веществ прямо пропорциональна напряжённости магнитного поля и обратно пропорциональна их температуре. Зависимость от температуры обусловлена разориентирующим действием теплового движения частиц вещества.

II. *Диамagnetики* для которых  $\chi < 0$  (соответственно  $\mu < 1$ ) намагничиваются против направления внешнего магнитного поля.

Спустя десятилетие после экспериментов Кюри Поль Ланжевен объяснил диамagnetизм возникновением индукционных токов в системе связанных зарядов, образующих токи Ампера. Если при отсутствии внешнего магнитного поля магнитные моменты атомов (ионов, молекул) равны нулю, то при возбуждении магнитного поля по закону электромагнитной индукции Фарадея возникают токи, которые создают магнитное поле, направленное против внешнего поля. Таким образом, предполагается, что закон Ленца для замкнутых контуров справедлив при атомных размерах «молекулярных токов Ампера» и объясняет диамagnetизм веществ. У атомов (ионов, молекул) возникают индуцированные магнитные моменты, которые в сумме дают  $\mathbf{M} = \chi \mathbf{H}$ , где  $\chi < 0$ . В принципе диамagnetными свойствами обладают все вещества, но в большинстве случаев диамagnetный эффект перекрывается парамагнитным.

В той же работе 1905 года Ланжевен приводит общую формулу для намагниченности парамагнетиков:

$$M = f\left(\frac{H}{T}\right), \quad (2.39)$$

где  $f(H/T)$  – нечётная функция своего аргумента.

Закон Кюри следует из этой формулы при разложении функции  $f(H/T)$  в ряд Тэйлора по степеням малой величины  $H/T$  и пренебрежении членами ряда, степень которых выше первой.

III. *Ферромагнетики* – вещества, для которых магнитная восприимчивость  $\chi(\mathbf{H}) \gg 1$  ( $\mu(\mathbf{H}) \gg 1$ ) и зависит от напряжённости внешнего магнитного поля.

В отличие от пара- и диамагнетиков намагниченность ферромагнетиков может быть отличной от нуля и при отсутствии внешнего магнитного поля (так называемая спонтанная намагниченность). Намагниченность ферромагнетиков значительно возрастает при приближении к «температуре Кюри», различной для каждого ферромагнитного вещества.

Последовательная теория, объяснявшая основные свойства ферромагнетиков на качественном уровне, была предложена в 1907 году Пьером Вейссом. Им впервые был сделан шаг к пониманию магнетизма как кооперативного явления. Вейсс допустил, что взаимодействие между магнитными моментами может быть эмпирически описано неким «молекулярным полем»  $H_m = bM$ , которое прямо пропорционально намагниченности и действует на каждую молекулу так же как и внешнее поле. В этом случае формула Ланжевена может быть модифицирована:

$$M = f\left(\frac{H + bM}{T}\right), \quad (2.40)$$

и с её помощью можно на качественном уровне объяснить основные свойства ферромагнетиков. Возможность существования спонтанной намагниченности следует из формулы Вейсса, если в ней положить  $H = 0$ . В этом случае  $M$  будет решением трансцендентного уравнения  $M = f(bM/T)$ . Температуру Кюри можно найти, рассмотрев случай высоких температур и разложив функцию  $f$  в ряд по степеням малой величины  $(H + bM)/T$ . Ограничившись первым членом разложения

$$M \approx \frac{C}{T}(H + bM), \quad (2.41)$$

можно установить, что температура Кюри  $T_c$  (при этой температуре  $M/H = \infty$ ) равна  $T_c = C/b$ . Выше температуры Кюри  $T_c$  магнитная восприимчивость вычисляется по обычной формуле  $\chi = \partial M / \partial H$ , которая с учётом (2.41) приводит к закону Кюри – Вейсса, которому удовлетворяют практически все ферромагнетики:

$$\chi = C / (T - T_c). \quad (2.42)$$

Однако оказалось, что для согласования с экспериментом напряжённость «молекулярного» поля  $H_m = bM$  должна принимать чрезвычайно большие значения, которые не наблюдались на опыте. Поэтому в наше время теория Вейсса имеет только историческое значение.

Попытка объяснить ферромагнетизм в электронной теории на основе предположения о существовании «молекулярных токов Ампера» была предпринята Эйнштейном и де Гаазом в 1915 году. В результате проведённых экспериментов было показано, что электронные токи в атомах и

молекулах можно интерпретировать как молекулярные токи Ампера, а магнетизм ферромагнетиков объяснить магнитными моментами этих токов. Однако полученные соотношения между моментом импульса электрона и его магнитным моментом не соответствовали теоретическим предположениям. В дальнейшем, когда был открыт спин у электрона, эти результаты были истолкованы на основе существования собственного магнитного момента у электрона и оказались в согласии с теорией. Впоследствии теория ферромагнетизма была создана на основе квантовой механики.

## § 2.5 Уравнения Максвелла для материальной среды и система граничных условий

### 2.5.1 Усредненная система уравнений Максвелла-Лоренца

Соберем уравнения, получившиеся после усреднения для материальной среды, в одну систему. Уравнения (2.7), (2.11), и (2.35) образуют систему уравнений Максвелла – Лоренца, описывающую электромагнитное поле в среде:

$$\text{I пара} \left\{ \begin{array}{l} \text{rot } \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\frac{\partial \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \end{array} \right. \quad (2.43)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{div } \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = 0 \end{array} \right. \quad (2.44)$$

$$\text{II пара} \left\{ \begin{array}{l} \text{rot } \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) + \frac{\partial \mathbf{D}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \end{array} \right. \quad (2.45)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{div } \mathbf{D}(\mathbf{r}, t) = \rho(\mathbf{r}, t). \end{array} \right. \quad (2.46)$$

Входящие в эти уравнения векторы поля связаны между собой, так называемыми, *материальными уравнениями*:

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E}, \quad \mathbf{H} = \mu_0 \mathbf{H}. \quad (2.47)$$

Кроме того, к системе уравнений (2.43) – (2.46), как и для (1.37) – (1.40), должны быть добавлены уравнения эмпирических законов, дополняющих её и связывающих между собой величины, в неё входящие:

- закон сохранения заряда

$$\partial \rho / \partial t + \text{div } \mathbf{j} = 0, \quad (2.48)$$

- закон Ома

$$\mathbf{j} = \gamma \mathbf{E}, \quad (2.49)$$

- закон Джоуля – Ленца

$$\sigma = \mathbf{jE}. \quad (2.50)$$

Предполагается, что вследствие характера постановки задачи – описание поля точечных зарядов, каким-то образом распределённых в конечной области пространства, – электромагнитное поле должно исчезать

на бесконечно больших расстояниях от системы зарядов:  $\mathbf{E}, \mathbf{D}, \mathbf{H}, \mathbf{B} \rightarrow 0$ , если  $|\mathbf{R}| \rightarrow \infty$ .

Полученные уравнения (2.43) – (2.50) внешне полностью идентичны феноменологическим уравнениям (1.37) – (1.42), (1.47). Однако благодаря обращению к классическим представлениям об атомно-молекулярном строении вещества, их физическое содержание гораздо глубже. Особенно это касается трактовки величин, характеризующих свойства электромагнитного поля в веществе. Их описание на «микроскопическом» уровне сыграло решающую роль в дальнейшем развитии теории и обеспечило успех применения методов квантовой механики в электродинамике.

В некоторых случаях удобнее использовать систему *уравнений Максвелла в интегральной форме*. Это совокупность интегральных уравнений, которые послужили исходным материалом для вывода дифференциальных уравнений (1.37) – (1.40):

$$\oint_L \mathbf{E} d\mathbf{l} = - \int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} d\mathbf{S} \quad (2.51)$$

$$\oint_S \mathbf{B} d\mathbf{S} = 0 \quad (2.52)$$

$$\oint_L \mathbf{H} d\mathbf{l} = \int_S \mathbf{j} d\mathbf{S} + \int_S \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} d\mathbf{S} \quad (2.53)$$

$$\oint_S \mathbf{D} d\mathbf{S} = \int_V \rho(\mathbf{r}) dV \quad (2.54)$$

Так же, как дифференциальные уравнения, они должны дополняться материальными уравнениями (2.47) и уравнениями основных законов (2.48) – (2.50).

Принято объединять уравнения Максвелла в пары: (2.43) и (2.44) (соответственно, (2.51) и (2.52) в интегральной форме) – *первая пара*; (2.45) и (2.46) (в интегральной форме (2.53) и (2.54)), – *вторая пара*.

### 2.5.2 Граничные условия для векторов $\mathbf{E}$ и $\mathbf{D}$

При выводе уравнений (1.37) – (1.40) предполагалось, что среда однородна, то есть каждая из величин  $\gamma$ ,  $\epsilon$  и  $\mu$  имеет постоянное значение, одно и то же для всех точек пространства. В случае, когда пространство делится на области, в которых эти константы различны, векторы электромагнитного поля должны удовлетворять определённым граничным условиям. Рассмотрим сначала поведение на границе раздела векторов  $\mathbf{D}$  и  $\mathbf{E}$  (рис. 2.4).

Для выяснения того, что происходит на границе раздела с вектором электрического смещения применим теорему Гаусса для электростатического поля в среде (2.54) к окрестности элемента поверхности, разделяющей две области с различными значениями диэлектрической проницаемости  $\epsilon_2$

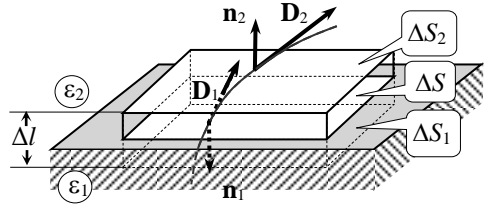


Рис. 2.4

и  $\epsilon_1$ . Выберем эту окрестность в виде прямоугольного параллелепипеда, со сторонами высота  $\Delta l$  которого много меньше линейных размеров основания  $\Delta S$ . Так как  $\Delta l \ll \sqrt{\Delta S}$ , то  $S_{бок} \sim \Delta l \cdot \sqrt{\Delta S} \ll \Delta S_1 = \Delta S_2$ . Поток вектора  $\mathbf{D}$  через поверхность параллелепипеда будет равен сумме потоков сквозь нижнюю, верхнюю и боковую поверхность:

$$\oint_S \mathbf{D} d\mathbf{S} = \oint_S (\mathbf{D}, \mathbf{n}) dS = \int_{\Delta S_1} (\mathbf{D}, \mathbf{n}_1) dS + \int_{\Delta S_2} (\mathbf{D}, \mathbf{n}_2) dS + \int_{\Delta S_{бок}} (\mathbf{D}, \mathbf{n}) dS$$

Так как боковая поверхность может быть сделана сколь угодно малой за счёт выбора  $\Delta l \rightarrow 0$ , то интегралом по боковой поверхности можно пренебречь. Тогда:

$$\oint_S \mathbf{D} d\mathbf{S} \approx -D_{n1} \Delta S_1 + D_{n2} \Delta S_2 = (D_{n2} - D_{n1}) \Delta S$$

(вектор  $\mathbf{D}$  направлен против  $\mathbf{n}_1$ , поэтому  $(\mathbf{D}, \mathbf{n}_1) = -D_{n1}$ ).

Интеграл в правой части (2.54) представляет заряд, заключённый в рассматриваемом объёме:

$$\int_V \rho(\mathbf{r}) dV = \Delta q.$$

Отсюда следует, что  $(D_{n2} - D_{n1}) \Delta S = \Delta q$  и  $D_{n2} - D_{n1} = \Delta q / \Delta S$ . При переходе в последнем равенстве к пределу  $\Delta S \rightarrow 0$  получаем граничные условия для вектора  $\mathbf{D}$  при переходе из одной среды в другую:

$$D_{n2} - D_{n1} = \sigma, \tag{2.55}$$

где  $\sigma = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} (\Delta q / \Delta S)$  – поверхностная плотность заряда.

При переходе через границу раздела двух сред нормальная составляющая вектора  $\mathbf{D}$  испытывает скачок равный плотности поверхностного заряда на границе их раздела. Это свойство вектора  $\mathbf{D}$  согласуется с его интерпретацией как величины заряда, прошедшего через единицу поверхности, перпендикулярной напряжённости электрического поля при его возбуждении.

Обратимся к вопросу о поведении вектора  $\mathbf{E}$  в ситуации аналогичной рассмотренной для вектора  $\mathbf{D}$  на границе двух сред. Воспользуемся для этой цели уравнением (2.51):

$$\oint_L \mathbf{E} d\mathbf{l} = - \int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} d\mathbf{S}.$$

Для вычисления интеграла по замкнутому контуру проведём на поверхности раздела отрезок прямой линии, и в качестве контура интегрирования  $L$  выберем прямоугольник  $abcd$ , как показано на рисунке 2.5. Стороны его параллельны этому отрезку, а  $da$  и  $bc$  перпендикулярны поверхности, разделяющей тела. Пусть длина  $ab$  и  $cd$  намного больше длины двух других сторон:  $l_0 \gg \Delta l$ . Направление единичных векторов:  $\boldsymbol{\tau}$  – по касательной, а  $\mathbf{n}$  – перпендикулярно к границе раздела. Тогда циркуляция вектора  $\mathbf{E}$  равна:

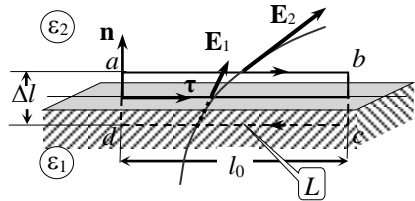


Рис.2.5

$$\oint_L \mathbf{E} d\mathbf{l} = \int_a^b \mathbf{E} d\mathbf{l} + \int_b^c \mathbf{E} d\mathbf{l} + \int_c^d \mathbf{E} d\mathbf{l} + \int_d^a \mathbf{E} d\mathbf{l} \approx (E_{2\tau} - E_{1\tau}) l_0.$$

Выбор размеров сторон произволен, поэтому интегралы вдоль  $bc$  и  $da$  можно сделать сколь угодно малыми (в пределе  $\Delta l \rightarrow 0$  они вообще обращаются в нуль) и пренебречь ими. По тем же соображениям пренебрегают и интегралом в правой части равенства, так как  $S = l_0 \cdot \Delta l \rightarrow 0$  при  $\Delta l \rightarrow 0$ . Окончательно имеем, что  $(E_{2\tau} - E_{1\tau}) l_0 = 0$ , откуда следует граничное условие для тангенциальных составляющих вектора напряжённости электрического поля:

$$E_{1\tau} = E_{2\tau}. \tag{2.56}$$

*Тангенциальные составляющие напряженности электрического поля непрерывны на границе раздела двух сред с различными диэлектрическими проницаемостями.*

### 2.5.3 Граничные условия для векторов $\mathbf{V}$ и $\mathbf{H}$

Граничные условия для нормальной составляющей вектора  $\mathbf{V}$  получаются в результате дословного повторения обсуждения поведения вектора  $\mathbf{D}$ . Совершенно аналогично выбирается окрестность границы раздела (сравните рис. 2.6 с рис. 2.4), и применяется теорема Гаусса для магнитного поля (2.52):



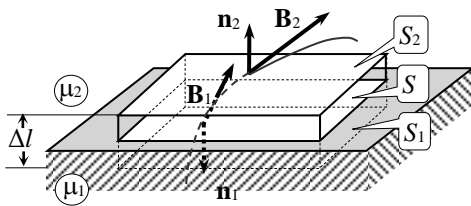


Рис.2.6

с вектором  $\mathbf{H}$ , обратимся к уравнению (2.53):

$$\oint_L \mathbf{H} d\mathbf{l} = \int_S \mathbf{j} d\mathbf{S} + \int_S \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} d\mathbf{S}.$$

Рассмотрим циркуляцию вектора  $\mathbf{H}$ , по контуру  $abcd$  (рис. 2.7 сравните с рис. 2.5). Единичные векторы направлены:  $\boldsymbol{\tau}$  – по касательной, а  $\mathbf{n}$  – перпендикулярно к границе раздела. Вектор  $\mathbf{N}=[\mathbf{n}, \boldsymbol{\tau}]$  ортогонален к поверхности прямоугольника  $abcd$ . Как и при вычислении циркуляции вектора  $\mathbf{E}$  получим оценку:

$$\oint_L \mathbf{H} d\mathbf{l} \approx (H_{2\tau} - H_{1\tau}) l_0.$$

В правой части закона полного тока (2.53) первый интеграл даёт силу тока  $I$ , протекающего через поверхность, «натянутую» на контур  $abcd$ :

$$I = \int_{S_{abcd}} \mathbf{j} d\mathbf{S} = \int_{S_{abcd}} j_N dS,$$

вторым же интегралом можно пренебречь, так как поток вектора  $\mathbf{D}$  через поверхность стремится к нулю при выборе  $\Delta l \rightarrow 0$ . В результате получаем:

$$(H_{2\tau} - H_{1\tau}) l_0 \approx I. \quad (2.58)$$

При  $\Delta l \rightarrow 0$  равенство становится точным. В этом пределе отношение  $I/l_0 = i_N$  – проекции вектора **линейной плотности тока** на направление нормали  $\mathbf{N}$  к площади поперечного сечения проводника:

$$i_N = \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{I}{l_0} = \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{1}{l_0} \int_{S_{abcd}} j_N dS \quad (2.59)$$

**Линейная плотность тока** ( $i$ ) – векторная величина, равная пределу произведения плотности тока, протекающего в тонком слое у поверхности тела, к толщине этого слоя, когда последний стремится к нулю. Век-

$$\oint_S \mathbf{B} d\mathbf{S} = 0.$$

Нормальные составляющие вектора индукции магнитного поля непрерывны:

$$B_{1n} = B_{2n}. \quad (2.57)$$

Для выяснения того, что происходит на границе раздела

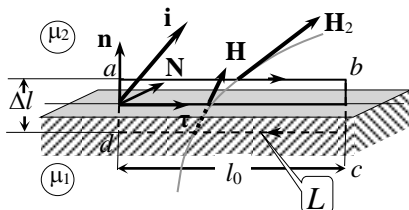


Рис.2.7

тор  $\mathbf{i}$  перпендикулярен направлению, в котором выбирают тангенциальные составляющие напряженности магнитного поля.

Граничное условие для тангенциальной составляющей вектора  $\mathbf{H}$  теперь можно записать в виде:

$$H_{2\tau} - H_{1\tau} = i_N. \quad (2.60)$$

Если воспользоваться определением вектора нормали  $\mathbf{N} = [\mathbf{n}, \boldsymbol{\tau}]$ , то

$$i_N = (\mathbf{i}, \mathbf{N}) = (\mathbf{i}, [\mathbf{n}, \boldsymbol{\tau}]) = (\boldsymbol{\tau}, [\mathbf{i}, \mathbf{n}]),$$

$$H_{2\tau} - H_{1\tau} = (\boldsymbol{\tau}, (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1)),$$

граничное условие (2.60) можно записать в векторном виде:

$$\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1 = [\mathbf{i}, \mathbf{n}]. \quad (2.61)$$

*При переходе через границу раздела двух сред тангенциальная составляющая вектора  $\mathbf{H}$  испытывает скачок равный плотности поверхностного тока на границе их раздела.*

## ГЛАВА 3. ПОТЕНЦИАЛЫ ПОЛЯ И РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ

### § 3.1 Описание электромагнитного поля с помощью потенциалов

#### 3.1.1 Векторный и скалярный потенциалы

При рассмотрении электромагнитных полей во многих случаях оказывается проще вместо уравнений Максвелла иметь дело с уравнениями в частных производных второго порядка, к которым их можно свести. Эти уравнения содержат меньшее число неизвестных функций и методы их решения хорошо известны. Такой переход совершается посредством введения вспомогательных функций – векторного и скалярного потенциалов, через которые выражаются напряжённость электрического и индукция магнитного полей.

Сначала вводится произвольный вектор  $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ , через который выражается вектор  $\mathbf{B}$ :

$$\mathbf{B} = \text{rot}\mathbf{A}. \quad (3.1)$$

Уравнение системы (1.38) при этом будет удовлетворяться автоматически, так как  $\text{div}\text{rot}\mathbf{A} = 0$  для любого вектора. Вектор  $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$  называют *векторным потенциалом*.

Подстановка (3.1) в первое уравнение системы (1.37)

$$\text{rot}\mathbf{E} = -\frac{\partial}{\partial t}(\text{rot}\mathbf{A}) \Rightarrow \text{rot}\mathbf{E} = -\left(\text{rot}\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}\right) \Rightarrow \text{rot}\left(\mathbf{E} + \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}\right) = 0$$

позволяет на основании равенства, справедливого для любой функции  $\varphi(\mathbf{r}, t)$ ,  $\text{rot}\text{grad}\varphi(\mathbf{r}, t) = 0$ , выразить напряжённость электрического поля  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$  в виде суммы градиента функции  $\varphi(\mathbf{r}, t)$  – *скалярного потенциала*, и производной по времени произвольного вектора  $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ :

$$\mathbf{E} = -\text{grad}\varphi - \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}. \quad (3.2)$$

Знак «минус» перед градиентом обусловлен историческим обстоятельством – определением вектора напряжённости электрического поля как силы, действующей на положительный единичный заряд.

#### 3.1.2 Уравнения Даламбера и калибровка Лоренца

Используя материальные уравнения и соотношения (3.1) и (3.2) для  $\mathbf{B}$  и  $\mathbf{E}$ , получают выражения для векторов  $\mathbf{H}$  и  $\mathbf{D}$  через введённые функции  $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$  и  $\varphi(\mathbf{r}, t)$ :

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\mu\mu_0}\mathbf{B} = \frac{1}{\mu\mu_0}\text{rot}\mathbf{A}(\mathbf{r}, t), \quad (3.3)$$

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \varepsilon \mathbf{E} = -\varepsilon_0 \varepsilon (\text{grad} \varphi(\mathbf{r}, t) + \partial \mathbf{A} / \partial t). \quad (3.4)$$

Подстановка  $\mathbf{H}$  и  $\mathbf{D}$  из (3.3) и (3.4) в оставшиеся уравнения Максвелла (1.39) и (1.40) даёт:

$$\begin{cases} \frac{1}{\mu \mu_0} \text{rot rot } \mathbf{A} = \mathbf{j} + \varepsilon \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \left( -\text{grad } \varphi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right), \\ \varepsilon \varepsilon_0 \text{div} \left( -\text{grad } \varphi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = \rho. \end{cases}$$

Преобразуем эти уравнения с учётом того, что дифференцирование по времени и по координатам можно менять местами, а так же что  $\text{rot rot } \mathbf{A} = \text{grad div } \mathbf{A} - \Delta \mathbf{A}$  и  $\text{div grad } \varphi = \Delta \varphi$ :

$$\begin{cases} \text{grad div } \mathbf{A} - \Delta \mathbf{A} = \mu \mu_0 \mathbf{j} - \varepsilon \varepsilon_0 \mu \mu_0 \left( \text{grad } \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) - \varepsilon \varepsilon_0 \mu \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} \\ -\text{div grad } \varphi - \frac{\partial}{\partial t} (\text{div } \mathbf{A}) = \frac{1}{\varepsilon \varepsilon_0} \rho. \end{cases} \quad (3.5)$$

Функции  $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$  и  $\varphi(\mathbf{r}, t)$  изначально были выбраны произвольно, что позволяет потребовать выполнения для них дополнительного условия, благодаря которому уравнения (3.5) трансформируются в независимые уравнения для каждой из этих функций в отдельности. Это достигается при выполнении *условия Лоренца*:

$$\text{div } \mathbf{A} + \varepsilon \varepsilon_0 \mu \mu_0 \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0. \quad (3.6)$$

С учетом условия Лоренца в первом уравнении системы (3.5) тогда обратится в нуль сумма

$$\text{grad div } \mathbf{A} + \varepsilon \varepsilon_0 \mu \mu_0 \text{grad } \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0 \Rightarrow \text{grad} \left( \text{div } \mathbf{A} + \varepsilon \varepsilon_0 \mu \mu_0 \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) = 0,$$

получающаяся при группировке соответствующих слагаемых в левой и правой его частях.

Во втором уравнении системы (3.5) произведем замену согласно равенству  $\text{div } \mathbf{A} = -\varepsilon \varepsilon_0 \mu \mu_0 (\partial \varphi / \partial t)$ .

В результате проведенных преобразований получим дифференциальные уравнения в частных производных второго порядка для векторного  $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$  и скалярного  $\varphi(\mathbf{r}, t)$  потенциалов:

$$\Delta \mathbf{A} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} - \mu \mu_0 \mathbf{j}, \quad (3.7)$$

$$\Delta\varphi = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} - \frac{1}{\varepsilon\varepsilon_0} \rho, \quad (3.8)$$

где  $1/v^2 = \varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0$ .

Очевидно, что уравнения для  $\mathbf{A}(\mathbf{r},t)$ , и  $\varphi(\mathbf{r},t)$  являются уравнениями одного и того же типа – *неоднородными дифференциальными уравнениями второго порядка*, называемыми **уравнениям Даламбера**.

Если найдено решение уравнений для потенциалов, векторы индукции магнитного поля  $\mathbf{B}$  и напряжённости электрического поля  $\mathbf{E}$  определяются с помощью равенств (3.3) и (3.4).

### 3.1.3 Калибровочные соотношения

Непосредственный физический смысл при описании электромагнитного поля имеют только напряжённости электрического и магнитного полей. **Векторный и скалярный потенциалы носят вспомогательный характер и определены неоднозначно**. В частности, индукция магнитного поля  $\mathbf{B} = \text{rot}\mathbf{A}$  не изменится при замене  $\mathbf{A}$  на  $\mathbf{A}' + \text{grad}\psi$ , где  $\psi(\mathbf{r},t)$  – произвольная функция координат и времени:

$$\mathbf{B} = \text{rot}\mathbf{A} = \text{rot}[\mathbf{A}' + \text{grad}\psi(\mathbf{r},t)] = \text{rot}\mathbf{A}'.$$

Если подставить  $\mathbf{A}=\mathbf{A}'+\text{grad}\psi$  в выражение для  $\mathbf{E}$  (3.2.), то напряжённость электрического поля при этом получит добавку, обусловленную наличием производной по  $t$ :

$$\mathbf{E} = -\text{grad}\varphi - \partial\mathbf{A}/\partial t = -\text{grad}\varphi - \partial\mathbf{A}'/\partial t - \text{grad}(\partial\psi/\partial t).$$

Однако, если одновременно с  $\mathbf{A}=\mathbf{A}'+\text{grad}\psi$  ввести потенциал  $\varphi = \varphi' - \partial\psi/\partial t$ , то напряжённость электрического поля останется прежней

$$\mathbf{E} = -\text{grad}\varphi - \partial\mathbf{A}/\partial t = -\text{grad}\varphi' - \partial\mathbf{A}'/\partial t.$$

Таким образом, при замене

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}' + \text{grad}\psi, \quad \varphi = \varphi' - \frac{\partial\psi}{\partial t} \quad (3.9)$$

напряжённость электрического и индукция магнитного полей остаются прежними. Это их свойство называется **калибровочной** или **градиентной инвариантностью**, а преобразование (3.9) **калибровочным**. Чтобы уравнения (3.7) и (3.8) сохраняли свой вид при этом преобразовании необходимо выполнение условия Лоренца (3.6). При подстановке (3.9) в (3.6)

$$\text{div}\mathbf{A}' + \Delta\psi + \varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0 \frac{\partial\varphi'}{\partial t} - \varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0 \frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = 0 \quad (3.10)$$

выясняется, что условие Лоренца для  $\mathbf{A}'(\mathbf{r},t)$  и  $\varphi'(\mathbf{r},t)$  выполняется, если

функция  $\psi(\mathbf{r}, t)$  удовлетворяет волновому уравнению:

$$\Delta\psi + \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0. \quad (3.11)$$

Неоднозначность определения потенциалов даёт возможность вместо условия Лоренца налагать на них другие условия. Например, часто встречается требование выполнения условия  $\operatorname{div}\mathbf{A} = 0$ . Это так называемая *кулоновская калибровка*. Тогда второе уравнение в (3.5) преобразуется к виду:

$$\Delta\varphi = -\frac{1}{\varepsilon_0} \rho \quad (3.12)$$

Уравнение (3.12) для скалярного потенциала называется *уравнением Пуассона* и является *основным уравнением электростатики*, что и объясняет название «кулоновская» калибровка.

Возможно наложение и других условий на потенциалы. Однако значительно чаще других используется условие Лоренца, так как в этом случае уравнения для  $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$  и  $\varphi(\mathbf{r}, t)$  однотипны, и поэтому достаточно решить только уравнение для скалярного потенциала, а векторный потенциал получить формальной заменой  $\rho$  на  $\mathbf{j}$ .

## § 3.2 Решение задач электродинамики

### 3.2.1 Прямая и обратная задачи

По аналогии с механикой различают прямую (или основную) и обратную задачи электродинамики.

Под *прямой задачей электродинамики* понимают задачу по отысканию потенциалов  $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$  и  $\varphi(\mathbf{r}, t)$  или векторов электромагнитного поля  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ ,  $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ ,  $\mathbf{D}(\mathbf{r}, t)$  и  $\mathbf{H}(\mathbf{r}, t)$ , если известны плотности зарядов  $\rho(\mathbf{r}, t)$  и электрического тока  $\mathbf{j}(\mathbf{r}, t)$ . С математической точки зрения она сводится к нахождению общего решения системы уравнений Максвелла или связанных с ними уравнений для векторного и скалярного потенциалов (уравнений Даламбера).

*Обратная задача* – нахождение плотности зарядов  $\rho(\mathbf{r}, t)$  и плотности электрического тока  $\mathbf{j}(\mathbf{r}, t)$  по известным характеристикам электромагнитного поля. Несомненно, что решение обратной задачи проще, чем прямой, поскольку оно сводится к простому дифференцированию заданных функций.

Гораздо труднее решение прямой задачи. Проблемы возникают по той простой причине, что реализация интегрирования как системы уравнений Максвелла (1.37) – (1.40) так и уравнений Даламбера (3.7) – (3.8) значительно сложнее.

### 3.2.2 Единственность решения уравнений Максвелла

В начале данного параграфа было показано, что задача по нахождению решения уравнений Максвелла является вполне определённой. Покажем, что при заданных начальных и граничных условиях имеется единственное решение.

Начальные условия:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)|_{t=0} = \mathbf{E}_0(\mathbf{r}), \quad \mathbf{H}(\mathbf{r}, t)|_{t=0} = \mathbf{H}_0(\mathbf{r}). \quad (3.13)$$

Граничные условия:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)|_s = \mathbf{E}_s(t), \quad \mathbf{H}(\mathbf{r}, t)|_s = \mathbf{H}_s(t). \quad (3.14)$$

Предположим, что при заданных начальных и граничных условиях уравнения Максвелла имеют два решения:  $\mathbf{E}'(\mathbf{r}, t)$ ,  $\mathbf{H}'(\mathbf{r}, t)$  и  $\mathbf{E}''(\mathbf{r}, t)$ ,  $\mathbf{H}''(\mathbf{r}, t)$ .

Подставив эти решения в уравнения Максвелла (1.37) – (1.40) и вычитая соответствующие уравнения одной системы из уравнений другой, получим:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{rot}(\mathbf{E}' - \mathbf{E}'') = -\frac{\partial(\mathbf{B}' - \mathbf{B}'')}{\partial t}, \\ \text{div}(\mathbf{B}' - \mathbf{B}'') = 0, \\ \text{rot}(\mathbf{H}' - \mathbf{H}'') = \frac{\partial(\mathbf{D}' - \mathbf{D}'')}{\partial t}, \\ \text{div}(\mathbf{D}' - \mathbf{D}'') = 0. \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \\ \text{div} \mathbf{B} = 0, \\ \text{rot} \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \\ \text{div} \mathbf{D} = 0. \end{array} \right. \quad (3.15)$$

Очевидно, что

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}'(\mathbf{r}, t) - \mathbf{E}''(\mathbf{r}, t) \quad \text{и} \quad \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{H}'(\mathbf{r}, t) - \mathbf{H}''(\mathbf{r}, t)$$

также будут решением уравнений Максвелла, но при  $\rho(\mathbf{r}, t) = 0$  и  $\mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = 0$  и нулевых граничных и начальных условиях

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)|_{t=0} = \mathbf{H}(\mathbf{r}, t)|_{t=0} = 0 \quad \text{и} \quad \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)|_s = \mathbf{H}(\mathbf{r}, t)|_s = 0. \quad (3.16)$$

Воспользуемся уравнением баланса электромагнитной энергии (1.53)

$$-\frac{\partial}{\partial t} \int_V \frac{\mathbf{H}\mathbf{B} + \mathbf{E}\mathbf{D}}{2} dV = \int_V \mathbf{j}\mathbf{E} dV + \oint_S [\mathbf{E}, \mathbf{H}] dS$$

и примем в нем за поверхность интегрирования граничную поверхность  $S$ , с учетом (3.16) правая часть уравнения баланса обратится в нуль:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int \left( \frac{\mathbf{H}\mathbf{B} + \mathbf{E}\mathbf{D}}{2} \right) dV = 0. \quad (3.17)$$

Из этого равенства следует

$$\int_V \frac{\mathbf{H}\mathbf{B} + \mathbf{E}\mathbf{D}}{2} dV = const \Rightarrow \int_V \frac{\mu\mu_0 H^2 + \varepsilon\varepsilon_0 E^2}{2} dV \Big|_{t=0} = 0. \quad (3.18)$$

Поскольку подынтегральное выражение в полученном интеграле положительно, то  $\mathbf{H} = 0$  и  $\mathbf{E} = 0$ , что означает тождественность обоих решений:

$$\mathbf{E}'(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}''(\mathbf{r}, t) \text{ и } \mathbf{H}'(\mathbf{r}, t) = \mathbf{H}''(\mathbf{r}, t).$$

Таким образом, доказано, что *при заданных начальных и граничных условиях решение уравнений Максвелла единственно.*

### § 3.3 Разделы электродинамики

В зависимости от физических условий в электродинамике выделяют несколько разделов, в каждом из которых имеют определённую специфику, как постановка проблем, так и методы их решения.

#### 3.3.1 Электростатика и магнитостатика

Как и в механике простейшая ситуация в электродинамике имеет место в статическом случае, когда заряды неподвижны. В этом случае электрический ток отсутствует  $\mathbf{j} = 0$ , электромагнитное поле не зависит от времени и все производные по времени от векторов поля обращаются в нуль. Запишем систему уравнений (2.43)–(2.46) при сформулированных условиях:

$$\begin{cases} \operatorname{rot} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = 0 \\ \operatorname{div} \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = 0 \\ \operatorname{rot} \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = 0 \\ \operatorname{div} \mathbf{D}(\mathbf{r}, t) = \rho(\mathbf{r}). \end{cases} \quad (3.19)$$

Таким образом, в статическом случае уравнения Максвелла распадаются на две несвязанных друг с другом системы:

для статического электрического поля (*электростатика*)

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = 0, \quad \operatorname{div} \mathbf{D} = \rho, \quad \mathbf{D} = \varepsilon\varepsilon_0 \mathbf{E}, \quad (3.20)$$

и статического магнитного поля (*магнитостатика*)

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = 0, \quad \operatorname{div} \mathbf{B} = 0, \quad \mathbf{B} = \mu\mu_0 \mathbf{H}. \quad (3.21)$$

- *Электростатика.* Если в системе уравнений (3.20), положить  $\mathbf{E} = -\operatorname{grad} \phi$  и подставить в  $\mathbf{D} = \varepsilon\varepsilon_0 \mathbf{E}$ , а затем полученное выражение для  $\mathbf{D}$  подставить в уравнение  $\operatorname{div} \mathbf{D} = \rho$ , то получим уравнение Пуассона (3.12) (*основное уравнением электростатики*).

Не составляет большого труда записать общее решение этого уравнения. Пусть задано распределение зарядов  $\rho(\mathbf{r}) \neq 0$ , локализованных в



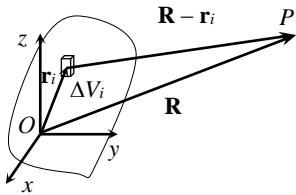


Рис.3.1

объёме  $V$  (рис. 3.1). Из школьного курса физики известно выражение для потенциала поля точечного заряда, находящегося в начале координат:  $\varphi(R)=q/4\pi\epsilon_0\epsilon R$ . Следуя стандартной процедуре, разбиваем заряд, распределённый в  $V$  на бесконечно малые элементы  $\Delta q_i = \rho\Delta V_i$ , потенциал каждого из них, как и для точечного, равен  $\varphi_i = \rho\Delta V_i/4\pi\epsilon_0\epsilon R_i$ . Согласно принципу суперпозиции

$$\varphi = \sum_i \frac{\rho\Delta V_i}{4\pi\epsilon\epsilon_0 R_i},$$

и с учетом, что  $R_i = |\mathbf{R} - \mathbf{r}_i|$ :

$$\varphi(\mathbf{R}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0\epsilon} \sum_i \frac{\rho\Delta V_i}{|\mathbf{R} - \mathbf{r}_i|}.$$

Перейдём к пределу  $\Delta V_i \rightarrow 0$ :

$$\varphi(\mathbf{R}) = \frac{1}{4\pi\epsilon\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\mathbf{r})dV(\mathbf{r})}{|\mathbf{R} - \mathbf{r}|}. \quad (3.23)$$

• *Магнитостатика.* Основные уравнения магнитостатики с учётом материального уравнения (2.36) имеют вид:

$$\text{rot } \mathbf{H} = 0, \quad \text{div } \mathbf{B} = 0, \quad \mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{H} + \mathbf{M}). \quad (3.24)$$

Из первых двух уравнений следует, что  $\mathbf{H} = 0$ , а из последнего –  $\mathbf{B} = \mu_0\mathbf{M}$ , где  $\mathbf{M}$  – постоянный вектор (магнитный момент постоянного магнита). Таким образом, статическое магнитное поле – поле постоянных магнитов. Так как магнитных зарядов в природе не существует, то векторный потенциал постоянного магнитного поля должен определяться вектором  $\mathbf{M} = \sum_k \mathbf{p}_{mk}$ , где суммирование проводится по магнитным моментам атомов (молекул, ионов) в единице объёма вещества.

### 3.3.2 Стационарное электромагнитное поле

В отличие от статического случая плотность электрического тока  $\mathbf{j} \neq 0$  при равенстве нулю всех производных по времени. Такие поля называются *стационарными*. Уравнения Максвелла в этом случае образуют систему:

$$\begin{cases} \text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{j}, & \text{rot } \mathbf{E} = 0, \\ \text{div } \mathbf{B} = 0, & \text{div } \mathbf{D} = \rho. \end{cases} \quad (3.25)$$

Поскольку по условию  $\partial\rho/\partial t = 0$ , то из закона сохранения заряда следует *условие стационарности*

$$\operatorname{div} \mathbf{j} = 0.$$

В связи с потерями энергии необходима затрата работы для поддержания постоянного тока в цепи. Эта работа совершается силами, не имеющими отношения к кулоновской напряжённости поля  $\mathbf{E}$ , (например за счёт энергии ветра, текущей воды, химических реакций и т.д.), и, как правило, сосредоточенными на ограниченном участке цепи, их называют «*сторонними*», сопоставляемые им ЭДС и напряжённость поля обозначают, соответственно,  $\varepsilon_{cm}$  и  $\mathbf{E}_{cm}$ .

В этом случае уже существует связь между электрическим и магнитным полями:

$$\begin{cases} \mathbf{j} = \gamma(\mathbf{E} + \mathbf{E}_{cm}), \\ \operatorname{rot} \mathbf{H} = \gamma(\mathbf{E} + \mathbf{E}_{cm}) \end{cases} \quad (3.26)$$

В принципе, слагаемое  $\mathbf{E}_{cm}$  должно быть добавлено к  $\mathbf{E}$  и в уравнение  $\mathbf{D} = \varepsilon\varepsilon_0\mathbf{E}$ , однако наиболее существенную роль она играет именно в законе Ома (первое уравнение в (3.26)).

Для магнитного поля, как обычно,  $\mathbf{B} = \operatorname{rot} \mathbf{A}$ ,  $\mathbf{H} = (1/\mu\mu_0)\mathbf{B} = 1/\mu\mu_0\operatorname{rot} \mathbf{A}$  и  $\operatorname{rot} \mathbf{H} = (1/\mu\mu_0)\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{A} = -(1/\mu\mu_0)\Delta \mathbf{A}$ . В последнем случае на основании условия Лоренца учтено, что  $\operatorname{div} \mathbf{A} = 0$ . Подстановка  $\operatorname{rot} \mathbf{H}$  в (3.25) приводит к уравнению Пуассона для  $\mathbf{A}$ :

$$\Delta \mathbf{A} = -\mu\mu_0 \mathbf{j}, \quad (3.27)$$

общее решение которого можно записать по аналогии с (3.23):

$$\mathbf{A}(\mathbf{R}) = \frac{\mu\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r})dV}{|\mathbf{R} - \mathbf{r}|}. \quad (3.28)$$

### 3.3.3 Квазистационарное поле

При рассмотрении переменных токов небольших частот  $\omega$ , в уравнениях Максвелла можно пренебречь магнитными полями, обусловленными токами смещения:  $\partial\mathbf{D}/\partial t \ll \mathbf{j} = \gamma\mathbf{E}$ , но при этом учитывать изменяющееся магнитное поле. Получающаяся система уравнений описывает свойства *квазистационарных токов* (почти стационарных):

$$\begin{cases} \operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{j}, & \operatorname{div} \mathbf{B} = 0, & \mathbf{B} = \mu\mu_0 \mathbf{H}, & \mathbf{j} = \gamma(\mathbf{E} + \mathbf{E}_{cm}), \\ \operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, & \operatorname{div} \mathbf{D} = \rho, & \mathbf{D} = \varepsilon\varepsilon_0 \mathbf{E}. \end{cases} \quad (3.29)$$

Из приведённого выше неравенства вытекает критерий применимости методов теории квазистационарных токов: если предположить пери-

одическую зависимость от времени  $\mathbf{D}=\varepsilon\varepsilon_0\mathbf{E}_0e^{i\omega t}$ , то должно выполняться неравенство

$$\varepsilon\varepsilon_0\omega \ll \gamma. \quad (3.30)$$

Данное неравенство выполняется для проводников и полупроводников в достаточно большом диапазоне частот (от  $3 \cdot 10^{-3}$  до  $4 \cdot 10^4$  Гц).

Условие квазистационарности выполняется для токов в электрических цепях, если длина свободного пробега электронов проводимости много меньше длины электромагнитных волн, что соответствует условию малости линейных размеров электрических цепей по сравнению с длиной электромагнитных волн при заданных частотах:

$$l \ll \lambda \rightarrow \omega \ll c/l. \quad (3.31)$$

В самом деле, для промышленных электрических цепей с частотами  $\omega \sim 314 \text{ с}^{-1}$  (50 Гц), например в пределах города ( $l \sim 10$  км), отношение  $c/l \sim 3 \cdot 10^4 \text{ с}^{-1}$ , что много больше, чем  $\omega$ . В таких случаях магнитное поле *вне проводника* можно описывать уравнениями статического поля

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0, \operatorname{rot} \mathbf{H} = 0. \quad (3.32)$$

*Внутри проводника* поле определяется уравнениями:

$$\begin{cases} \operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, & \operatorname{div} \mathbf{B} = 0, \\ \operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{j}, & \mathbf{j} = \gamma(\mathbf{E} + \mathbf{E}_{cm}). \end{cases} \quad (3.33)$$

Связь между электрическими и магнитными величинами становится весьма существенной.

Квазистационарные явления тесно связаны с процессами, характеризующимися высокими частотами и, соответственно, наличием электромагнитных волн. Одно и то же явление можно описывать с помощью основных квазистационарных уравнений и на основе волновых уравнений.

### 3.3.4 Переменное электромагнитное поле

В общем случае учитываются все временные изменения, тогда уравнения Максвелла (1.37) – (1.40) приводят к существованию электромагнитных волн. Чтобы показать это воспользуемся уравнениями для векторного и скалярного потенциалов (3.7) и (3.8).

Пусть движущиеся заряды сосредоточены в ограниченной области пространства  $V$ , плотности заряда и тока равны, соответственно,  $\rho(\mathbf{r},t)$  и  $\mathbf{j}(\mathbf{r},t)$ . Будем искать решение уравнения (3.7) во всём пространстве, считая его заполненным однородным веществом с диэлектрической и магнитной проницаемостями  $\varepsilon$  и  $\mu$ .

Разобьём объём, в котором находятся заряды на элементарные объёмы, заряд каждого из которых равен  $dq(\mathbf{r},t)$ , и найдём потенциал  $d\varphi(\mathbf{r},t)$  заряда сосредоточенного в  $dV$ .

Сначала определим потенциал *на небольшом расстоянии от заряда*  $dq$ , таком, что можно пренебречь запаздыванием электромагнитного поля при распространении от  $dq(\mathbf{r},t) = \rho(\mathbf{r},t)dV$  до точки поля  $\mathbf{R} - \mathbf{r}$  (обозначения см. на рис. 3.1). Пренебрегая второй производной по времени в уравнении (3.7) получим основное уравнение электростатики для точечного заряда, решение которого хорошо известно:

$$d\varphi(|\mathbf{R} - \mathbf{r}|,t) = \frac{dq(|\mathbf{R} - \mathbf{r}|,t)}{4\pi\epsilon\epsilon_0|\mathbf{R} - \mathbf{r}|}. \quad (3.34)$$

Вне объёма  $V \mathbf{j} = 0$  и (3.7) превращается в волновое уравнение:

$$\Delta\varphi(|\mathbf{R} - \mathbf{r}|,t) = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2\varphi(|\mathbf{R} - \mathbf{r}|,t)}{\partial t^2}. \quad (3.35)$$

На *больших расстояниях* от начала координат  $|\mathbf{r}| \ll |\mathbf{R}|$  и в (3.35) можно пренебречь  $\mathbf{r}$  по сравнению с  $\mathbf{R}$ :

$$\Delta\varphi(R,t) = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2\varphi(R,t)}{\partial t^2}.$$

В этом приближении потенциал не зависит от сферических углов  $\theta$  и  $\alpha$ , поэтому, записывая градиент потенциала в сферических координатах, получим:

$$\frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial R} \left( R^2 \frac{\partial\varphi}{\partial R} \right) = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}. \quad (3.36)$$

Введём вместо  $\varphi(R,t)$  функцию  $u(R,t)$ :

$$\varphi(R,t) = u(R,t)/R, \quad (3.37)$$

для которой предыдущее уравнение (3.36) превратится в обычное уравнение свободных колебаний струны:

$$\frac{\partial^2 u(R,t)}{\partial R^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 u(R,t)}{\partial t^2}.$$

Этому уравнению удовлетворяет сумма двух любых произвольных функций вида

$$u(R,t) = f_1(t - R/v) + f_2(t + R/v),$$

в которой первая функция представляет возмущение, идущее от области, в которой сосредоточены заряды, – расходящуюся электромагнитную волну, а вторая – сходящуюся электромагнитную волну. Вторую функцию следует приравнять нулю, так как нет никаких физических причин

для появления электромагнитных волн, приходящих извне к объёму  $V$ , поэтому:

$$\varphi(R,t) = [f_1(t - R/v)]/R \quad (3.38)$$

Сравнивая (3.38) и (3.34), можно заключить, что скалярный потенциал  $d\varphi(R,t)$  электромагнитного поля, создаваемого зарядом  $dq(R,t)$  будет определяться выражением:

$$d\varphi(R,t) = \frac{dq(t - R/v)}{4\pi\epsilon\epsilon_0 R} = \frac{\rho(\mathbf{r}, t - R/v)dV}{4\pi\epsilon\epsilon_0 R}$$

Наконец, возвращаясь от  $R$  к  $|\mathbf{R} - \mathbf{r}|$  и интегрируя по всему объёму  $V$ , находим общее решение поставленной задачи:

$$\varphi\left(t - \frac{|\mathbf{R} - \mathbf{r}|}{v}\right) = \frac{1}{4\pi\epsilon\epsilon_0 v} \int_V \frac{\rho(\mathbf{r}, t - |\mathbf{R} - \mathbf{r}|/v)}{|\mathbf{R} - \mathbf{r}|} dV. \quad (3.39)$$

Необходимо, чтобы решение ещё удовлетворяло соответствующим граничным и начальным условиям. Для решения каждого из уравнений (3.6) и (3.7) необходимо задание граничных и начальных условий. При поисках решения в конечной области пространства граничные условия сводятся к требованиям непрерывности потенциалов и поведению векторов поля, вытекающих из граничных условий (2.55) и (2.57) для  $\mathbf{D}$  и  $\mathbf{B}$ , на границе раздела. В ситуации, когда надо найти решение во всём пространстве предполагается, что на бесконечно большом расстоянии от системы зарядов поле стремится к нулю.

Уравнения для проекций  $\mathbf{A}(\mathbf{r},t)$  на координатные оси в декартовых прямоугольных координатах имеют тот же вид, что и уравнение для  $\varphi(\mathbf{r},t)$ :

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 A_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial z^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 A_x}{\partial t^2} + \mu\mu_0 j_x, \\ \frac{\partial^2 A_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial z^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 A_y}{\partial t^2} + \mu\mu_0 j_y, \\ \frac{\partial^2 A_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 A_z}{\partial t^2} + \mu\mu_0 j_z, \end{cases} \quad (3.40)$$

поэтому по аналогии с решением уравнения для скалярного потенциала можно записать решения для отдельных проекций векторного потенциала. Общее решение в векторном виде:

$$\mathbf{A}(\mathbf{R}, t) = \frac{\mu\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\rho\left(\mathbf{r}, t - \frac{|\mathbf{R} - \mathbf{r}|}{v}\right)}{|\mathbf{R} - \mathbf{r}|} dV \quad (3.41)$$

Таким образом, электромагнитное поле в заданной точке в момент времени  $t$  определяется значением потенциалов в момент времени  $t - |\mathbf{R} - \mathbf{r}|/v$ , т.е. с запаздыванием.

Для квазистационарных токов запаздыванием  $|\mathbf{R} - \mathbf{r}|/v$  можно пренебречь:

$$\varphi(t, \mathbf{R}) = \frac{1}{4\pi\epsilon\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(t, \mathbf{r})}{|\mathbf{R} - \mathbf{r}|} dV, \quad \mathbf{A}(\mathbf{R}, t) = \frac{\mu\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}, t)}{|\mathbf{R} - \mathbf{r}|} dV. \quad (3.42)$$

При  $|\mathbf{r}| \ll |\mathbf{R}|$ , в так называемой волновой зоне, запаздывание можно учесть, разлагая подынтегральное выражение по степеням малой величины  $r/R$ :

$$\varphi(\mathbf{R}_0, t) = \frac{1}{\epsilon_0\epsilon R_0} \int_V \rho(\mathbf{r}, t - R_0/c) dV - \frac{1}{\epsilon_0\epsilon} \int_V \frac{\mathbf{R}_0\mathbf{r}}{R_0} \frac{\partial}{\partial R_0} \frac{\rho(\mathbf{r}, t - R_0/c)}{R_0} dV \quad (3.43)$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{R}_0, t) = \frac{\mu_0\mu}{cR} \int_V \mathbf{j}(\mathbf{r}, t - R/c) dV - \frac{\mu_0\mu}{c} \int_V \frac{\mathbf{R}\mathbf{r}}{R} \frac{\partial}{\partial R} \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}, t - R/c)}{R} dV \quad (3.44)$$

## ГЛАВА 4. ЭЛЕКТРИЧЕСКОЕ ПОЛЕ НЕПОДВИЖНЫХ ЗАРЯДОВ

Развитие электродинамики началось с изучения взаимодействия между неподвижными электрическими зарядами и между неподвижными постоянными магнитами. Огромное влияние на формирование теоретических представлений о характере этих взаимодействий оказала механика Ньютона, в частности, развитая Лапласом на базе закона всемирного тяготения теория потенциала. В электростатике её методы адекватно описывали все наблюдаемые явления. Применение же теории потенциалов к магнитным взаимодействиям столкнулось с фактически непреодолимыми трудностями. Эти трудности были преодолены с созданием теории электромагнитного поля Максвеллом.

**Статическим** называется электромагнитное поле, создаваемое неподвижными зарядами. В статическом случае, *все характеристики поля не зависят от времени и токи отсутствуют ( $\mathbf{j}=0$ )*, а система Максвелла принимает вид:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot}\mathbf{E} &= 0 & \operatorname{rot}\mathbf{H} &= 0 \\ \operatorname{div}\mathbf{D} &= \rho & \operatorname{div}\mathbf{B} &= 0 \end{aligned}$$

Т.е. магнитное поле отсутствует, а электрическое определяется первой парой уравнений и граничными условиями:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot}\mathbf{E} &= 0 & E_{\tau}^1 &= E_{\tau}^2 \\ \operatorname{div}\mathbf{D} &= \rho & D_n^1 - D_n^2 &= \sigma \end{aligned} \quad (4.1)$$

### § 4.1 Потенциальный характер электростатического поля

Векторное поле, ротор которого равен нулю, называется **потенциальным**.

*Электростатическое поле является потенциальным,* поскольку для него выполняется условие:  $\operatorname{rot}\mathbf{E}=0$ .

В потенциальном поле работа сил по перемещению заряда из одной точки в другую зависит не от пути, по которому производится перемещение, а только от положения начальной и конечной точек.

Докажем это для электростатического поля. Пусть задано поле  $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ , выберем в нем две точки А и В (рис. 4.1) и вычислим работу по перемещению единичного положительного заряда  $q_0$  вдоль замкну-

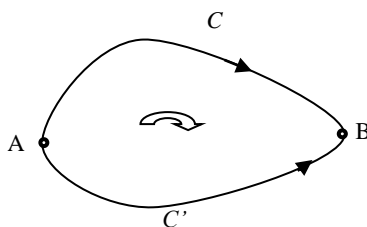


Рис. 4.1

того контура ACBC'.

$$\frac{A}{q_0} = \oint_{ACBC'} \mathbf{E} d\mathbf{l} = \int_C \mathbf{E} d\mathbf{l} - \int_{C'} \mathbf{E} d\mathbf{l} \quad (4.2)$$

С другой стороны по теореме Стокса:

$$\oint_{ACBC'} \mathbf{E} d\mathbf{l} = \int_S \text{rot} \mathbf{E} d\mathbf{S} = 0 \quad (4.3)$$

где S - поверхность, натянутая на контур ACBC'.

Тогда:

$$\int_C \mathbf{E} d\mathbf{l} - \int_{C'} \mathbf{E} d\mathbf{l} = 0 \Rightarrow \int_C \mathbf{E} d\mathbf{l} = \int_{C'} \mathbf{E} d\mathbf{l} \quad (4.4)$$

где C и C' произвольны, то есть мы доказали, что работа перемещения заряда для потенциального поля не зависит от пути перемещения.

### § 4.2 Скалярный потенциал электростатического поля

Независимость работы сил электростатического поля от формы пути перемещения заряда обуславливает существование такой скалярной функции, разностью значений которой, в конечной и начальной точках пути, определяется эта работа. Такой функцией является **скалярный потенциал**  $\varphi(\mathbf{r})$ .

Используя выражение связывающее напряженность электрического поля с потенциалами  $\mathbf{E} = -\text{grad} \varphi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$  для случая электростатического поля (где производные по времени любых характеристик поля равны нулю) можно записать соотношение, дающее связь между напряженностью и потенциалом:

$$\mathbf{E} = -\text{grad} \varphi(\mathbf{r}). \quad (4.5)$$

На основании (4.5) можем записать:

$$\int_A^B \mathbf{E} d\mathbf{l} = - \int_A^B (\text{grad} \varphi(\mathbf{r}) d\mathbf{l}) = - \int_A^B d\varphi(\mathbf{r}) = \varphi(A) - \varphi(B) \quad (4.6)$$

где учтено, что:

$$(\text{grad} \varphi d\mathbf{l}) = \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy + \frac{\partial \varphi}{\partial z} dz \right) = d\varphi$$

Равенство (4.6) показывает, что работа по перемещению заряда между двумя точками электростатического поля, действительно выражается через разность потенциалов этих точек:



$$A = q_0 \int_A^B \mathbf{E} d\mathbf{l} = -q_0 \int_A^B d\varphi(r) = q_0(\varphi(A) - \varphi(B))$$

Потенциал является вспомогательной величиной, его числовое значение не имеет прямого физического смысла, и не может быть измерено. Физический смысл имеет лишь разность потенциалов, которая может быть определена экспериментально. Эта разность потенциалов не изменится, если значению потенциала во всех точках пространства прибавить одну и ту же величину ( $C = \text{const}$ ):

$$\varphi(A) + C - (\varphi(B) + C) = \varphi(A) - \varphi(B)$$

Таким образом, можно сказать, что *потенциал определен лишь с точностью до аддитивной постоянной, значение которой выбрано произвольно.*

Для удобства расчетов потенциал какой-то точки берется за нуль, тогда все остальные точки поля будут определены однозначно. Такая операция называется **нормировкой потенциала**.

В практической электротехнике за  $\varphi=0$  берется потенциал земли. В теоретической физике полагают, что потенциал, создаваемый зарядами конечной величины, на бесконечности обращается в нуль:

$$\varphi(\infty) = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\varphi(A) = \int_A^{\infty} \mathbf{E} d\mathbf{l}} \quad (4.7)$$

### § 4.3 Потенциал системы зарядов

Определим сначала потенциал поля созданного одним точечным зарядом, находящимся в начале координат. Напряженность поля такого заряда (известно из курса общей физики):

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon\epsilon_0} \frac{q}{R^2} \frac{\mathbf{R}}{R},$$

где  $\mathbf{R}$  - радиус вектор, определяющий положение точки поля с потенциалом  $\varphi$ .

Тогда потенциал

$$\varphi(R) = \int_R^{\infty} \frac{1}{4\pi\epsilon\epsilon_0} \frac{q}{R^3} (\mathbf{R} d\mathbf{l}) = \frac{q}{4\pi\epsilon\epsilon_0} \int_R^{\infty} \frac{dR}{R^2} = \frac{q}{4\pi\epsilon\epsilon_0 R} \quad (4.8)$$

где для интегрирования выбран путь по радиус-вектору ( $d\mathbf{l} = d\mathbf{R}$ ).

Для электрического поля системы точечных зарядов справедлив **принцип суперпозиции**: напряжённость электрического поля, создаваемого совокупностью зарядов  $q_1, q_2, q_3 \dots, q_N$ , равна сумме напряжённостей электрических полей отдельных зарядов:  $\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 + \dots + \mathbf{E}_N$ .

Представляя напряжённости поля отдельных зарядов как градиенты соответствующих потенциалов

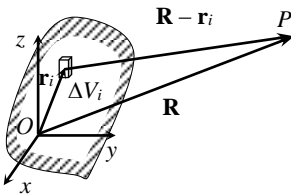


Рис.4.2

$$\mathbf{E} = -\text{grad } \varphi = \sum_{i=1}^N \mathbf{E}_i = -\sum_{i=1}^N \text{grad } \varphi_i,$$

получим, что потенциал системы точечных зарядов равен сумме потенциалов отдельных зарядов:

$$\varphi = \sum_i \varphi_i = \frac{1}{4\pi\epsilon\epsilon_0} \sum_i \frac{q_i}{R_i} \quad (4.9)$$

где  $R_i = |\mathbf{R}_i| = |\mathbf{R} - \mathbf{r}_i|$  – расстояние от заряда  $q_i$  до точки поля, где вычисляется потенциал  $\varphi(\mathbf{R})$  (рис. 4.2). Если её координаты обозначить  $(X, Y, Z)$ , а координаты зарядов  $(x_i, y_i, z_i)$ , то:

$$\varphi(X, Y, Z) = \frac{1}{4\pi\epsilon\epsilon_0} \sum_i \frac{q_i}{\sqrt{(X - x_i)^2 + (Y - y_i)^2 + (Z - z_i)^2}} \quad (4.10)$$

В случае непрерывного распределения зарядов, весь объем разбиваем на бесконечно малые объемы  $\Delta V_i$ , так чтобы  $q_i = \rho_i \Delta V_i$  можно было рассматривать как точечный заряд. В пределе  $\Delta V_i \rightarrow 0$ , тогда:

$$\begin{aligned} \varphi(X, Y, Z) &= \frac{1}{4\pi\epsilon\epsilon_0} \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \sum_i \frac{\rho_i \Delta V_i}{R_i} = \frac{1}{4\pi\epsilon\epsilon_0} \int_V \frac{\rho_i dV}{R_i} = \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(x_i, y_i, z_i) dx dy dz}{\sqrt{(X - x_i)^2 + (Y - y_i)^2 + (Z - z_i)^2}} \end{aligned} \quad (4.11)$$

Если заряд распределен по поверхности с поверхностной плотностью заряда  $\sigma$ , аналогично рассуждая, получаем:

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon\epsilon_0} \int_S \frac{\sigma_i dS}{R_i} \quad (4.12)$$

#### § 4.4 Уравнение Лапласа и Пуассона. Свойства скалярного потенциала

Иногда задачи электростатики проще решить, если исходить из дифференциальных уравнений для потенциалов. В Главе 3 было показано, что при наложении кулоновской калибровки ( $\text{div} \mathbf{A} = 0$ ) скалярный потенциал подчиняется уравнению:

$$\Delta \varphi = -\frac{\rho}{\epsilon_0 \epsilon} \quad (4.13)$$

которое является *основным уравнением электростатики* и носит название *уравнения Пуассона*. Это уравнение выполняется для тех точек пространства, где есть *свободные* заряды.

В той области пространства, где свободные заряды отсутствуют ( $\rho = 0$ ), это уравнение переходит в *уравнение Лапласа*

$$\boxed{\Delta\varphi = 0} \quad (4.14)$$

Потенциал электростатического поля обладает важными свойствами:

1) Потенциал – непрерывная функция координат: в противном случае в точках разрыва непрерывности напряжённость электрического поля была бы бесконечно большой, что невозможно.

2) Если заряды расположены в конечной области пространства и плотность распределения заряда  $\rho$  конечна, то потенциал не может обращаться в бесконечность, что можно установить, записав (4.11) в сферических координатах:

$$\begin{aligned} \varphi(r, \psi, \theta) &= \frac{1}{4\pi\epsilon\epsilon_0} \int_V \rho(r_i, \psi_i, \theta_i) \frac{r_i^2 \sin\theta_i d\theta_i d\psi_i dr_i}{r_i} = \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon\epsilon_0} \int_V \rho(r_i, \psi_i, \theta_i) r_i \sin\theta_i d\theta_i d\psi_i dr_i \end{aligned} \quad (4.15)$$

Отсюда видно, что если  $\rho$  во всех точках конечна и заряды расположены в конечной области пространства, то и потенциал конечная величина. Так как потенциал всюду конечен, а значит и производные потенциала  $\varphi$  по координатам должны быть всюду конечны (т.к. как бесконечность этих производных означала бы бесконечность напряженности электрического поля, что физически бессмысленно). Конечность производных означает непрерывность  $\varphi$ . Следовательно, потенциал непрерывная функция и на границе раздела сред

$$\varphi^1 = \varphi^2. \quad (4.16)$$

Следует отметить, что потенциал может обращаться в бесконечность в точке нахождения точечного заряда, поскольку точечный заряд имеет бесконечно малый размер и плотность заряда в этой точке обращается в бесконечность.

3) Потенциал может достигать своего максимального или минимального значения только на границе поля. В противном случае, окружив точку экстремума малой замкнутой поверхностью, на которой производная по нормали  $\partial\varphi/\partial n = (\text{grad}\varphi, \mathbf{n}) \neq 0$  (для максимума она отрицательна:

напряжённость поля  $\mathbf{E} = -\text{grad}\varphi$  направлена в сторону уменьшения потенциала, для минимума – положительна), получим, что:

$$\oint_S \frac{\partial\varphi}{\partial n} dS = \oint_S (\text{grad}\varphi, \mathbf{n}) dS = \oint_S \text{grad}\varphi, d\mathbf{S} = \int_V \text{div grad}\varphi dV = \int_V \Delta\varphi dV \neq 0 \Rightarrow \Delta\varphi \neq 0,$$

но, согласно уравнению Лапласа,  $\Delta\varphi = 0$ , что противоречит исходному предположению.

С этим фактом связана *невозможность существования устойчивой статической конфигурации электрических зарядов, поскольку равновесие достигается при минимуме энергии зарядов (теорема Ирншоу)*, соответственно при минимуме потенциала, достижение которого внутри электростатического поля невозможно.

### § 4.5 Потенциал системы зарядов на больших расстояниях

Рассмотрим систему  $n$  зарядов  $q_1, q_2, \dots, q_i, \dots, q_n$  локализованная в некоторой области пространства (рис. 4.3). Начало координат  $O$  выберем где-либо в пределах системы зарядов. Введем обозначения:  $\mathbf{R}$  – радиус-вектор, задающий положение точки  $A$ ;  $\mathbf{r}_i$  – радиус-вектор, определяющий положение заряда  $q_i$  в системе;  $\mathbf{R}_i = (\mathbf{R} - \mathbf{r}_i)$  – вектор, проведенный от заряда  $q_i$  к точке  $A$ .

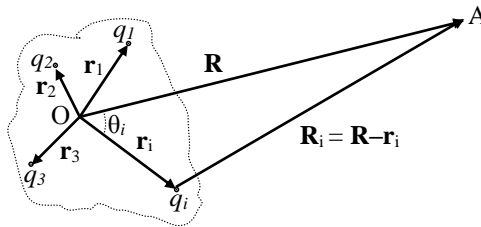


Рис.4.3

Пусть точка  $A$  находится на таком удалении от системы, что размеры системы оказываются много меньше расстояния до точки  $A$ , т.е.  $r_i \ll R$ .

В силу принципа суперпозиции, потенциал в точке  $A$  можно записать в виде:

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{q_1}{R_1} + \frac{q_2}{R_2} + \frac{q_3}{R_3} + \dots + \frac{q_n}{R_n} \right) \quad (4.17)$$

где  $R_1 = |\mathbf{R} - \mathbf{r}_1|, \dots, R_n = |\mathbf{R} - \mathbf{r}_n|$ .

Потенциал  $\varphi_i$ , создаваемый зарядом  $q_i$  в точке А можно записать как:

$$\varphi_i = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_i}{|\mathbf{R} - \mathbf{r}_i|} = \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{R^2 + r_i^2 - 2Rr_i \cos\theta_i}},$$

где в силу малости  $r_i$  можно пренебречь  $r_i^2$  по сравнению с  $R^2$  и тогда:

$$\varphi_i = \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0 R \sqrt{1 - \frac{2r_i}{R} \cos\theta_i}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_i}{R} \left(1 - \frac{2r_i}{R} \cos\theta_i\right)^{-\frac{1}{2}}. \quad (4.18)$$

В (4.19) множитель в степени  $-1/2$  можно разложить в ряд вида

$$(1-x)^{-m} = 1 + mx + \frac{m(m+1)}{2!} x^2 + \frac{m(m+1)(m+2)}{3!} x^3 + \dots,$$

после чего выражение для потенциала  $\varphi_i$  примет вид

$$\begin{aligned} \varphi_i &= \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0 R} \left[ 1 + \frac{1}{2} \frac{2r_i}{R} \cos\theta_i + \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot 4r_i^2}{2R^2} \cos^2\theta_i + \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{2} \cdot 8r_i^3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot R^3} \cos^3\theta_i + \dots \right] = \\ &= \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0 R} \left[ 1 + \frac{r_i}{R} \cos\theta_i + \frac{3}{2} \frac{r_i^2}{R^2} \cos^2\theta_i + \frac{5}{2} \frac{r_i^3}{R^3} \cos^3\theta_i + \dots \right]. \end{aligned}$$

Тогда выражение для результирующего потенциала  $\varphi$  поля, созданного в точке А всеми зарядами системы, согласно (4.9), запишется в виде

$$\begin{aligned} \varphi = \sum_{i=1}^n \varphi_i &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[ \sum_{i=1}^n \frac{q_i}{R} + \sum_{i=1}^n \frac{q_i r_i}{R^2} \cos\theta_i + \frac{3}{2} \sum_{i=1}^n \frac{q_i r_i^2}{R^3} \cos^2\theta_i + \right. \\ &\left. + \frac{5}{2} \sum_{i=1}^n \frac{q_i r_i^3}{R^4} \cos^3\theta_i + \dots \right] \quad (4.19) \end{aligned}$$

Эта формула представляет собой потенциал произвольной системы зарядов в точке А, который можно представить как сумму потенциалов:

$$\varphi = \varphi_I + \varphi_{II} + \varphi_{III} + \dots \quad (4.20)$$

Выясним физический смысл слагаемых в (4.20). Согласно (4.19) первое слагаемое имеет вид

$$\varphi_I = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 R} \sum_{i=1}^n q_i = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R} \quad (4.21)$$

Уравнение (4.21) выражает потенциал поля, созданного точечным зарядом, расположенным в начале координат, величина которого равна алгебраической сумме всех зарядов системы.

Таким образом, потенциал системы зарядов на больших расстояниях от нее в первом приближении равен потенциалу точечного заряда, расположенного в начале координат и равного алгебраической сумме всех зарядов системы.

Второй член разложения (4.20) имеет вид:

$$\varphi_{II} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 R^2} \sum_{i=1}^n q_i r_i \cos\theta_i = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 R^2} \sum_{i=1}^n p_i \cos\theta_i$$

или 
$$\varphi_{II} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^n \frac{\mathbf{p}_i \mathbf{R}}{R^3} = \frac{(\mathbf{P}\mathbf{R})}{4\pi\epsilon_0 R^3}, \tag{4.22}$$

где учтено, что  $\sum_{i=1}^n \mathbf{p}_i = \mathbf{P}$  – полный дипольный момент системы зарядов.

Таким образом,  $\varphi_{II}$  – представляет собой потенциал поля электрического диполя с моментом  $\mathbf{P}$ , помещенного в начало координат, т.е. если система в целом электронейтральна ( $\sum_{i=1}^n q_i = 0$ ), то главным членом разложения будет **дипольный потенциал** (4.22), а напряженность электрического поля будет определяться дипольным моментом системы зарядов.

Третий член разложения (4.20):

$$\varphi_{III} = \frac{3}{8\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^n \frac{q_i r_i^2}{R^3} \cos^2\theta \tag{4.23}$$

называется **квадрупольным потенциалом**.

Квадрупольный потенциал является наиболее значимым при  $Q=0$  и  $\mathbf{P}=0$ . Моделями квадруполя могут служить система четырех зарядов  $(+q, -q, +q, -q)$  (примеры *a* и *c* на рис. 4.4) или два противоположно направленных диполя (примеры *b* и *d* на рис. 4.4).

Модельный характер этих объектов проявляется в том, что их размеры должны быть бесконечно малыми (иными словами, они должны быть точечными образованиями). Если их размеры конечны, то поле вблизи них будет отличаться от поля квадруполя, это будет просто поле четырёх расположенных рядом зарядов (или двух диполей).

Таким образом, потенциал произвольной системы зарядов на больших расстояниях может быть представлен в виде суммы потенциалов

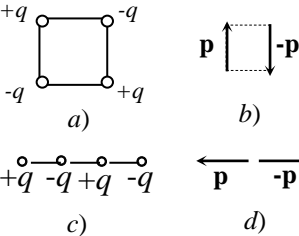


Рис.4.4

точечного заряда, диполя, квадруполь, октуполь и т.д. (последующие члены ряда представляют собой мультиполи более высоких порядков, поле которых очень быстро убывает с расстоянием). Этот метод в теории поля называют *методом разложения на мультиполи*.

Электрическое поле любой электронейтральной молекулы можно представить в виде суперпозиции потенциалов мультиполей, сохраняя в разложении (4.20) в зависимости от характера вычислений необходимое число слагаемых. Так, например, притяжение молекул в газах и конденсированных молекулярных телах объясняется взаимодействием их дипольных моментов.

### § 4.6 Поле диполя

В первом приближении электрические свойства электронейтральной системы определяются ее дипольным моментом.

Простейшей моделью диполя является система из двух разноименных равных по модулю точечных зарядов, расположенных на малом расстоянии друг от друга. Напряженность поля диполя можно найти как:

$$\mathbf{E} = -\text{grad } \varphi_{II}(\mathbf{R}),$$

тогда, с учетом (4.22), можно записать

$$\mathbf{E} = -\text{grad} \left( \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{(\mathbf{P}\mathbf{R})}{R^3} \right) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \text{grad} \frac{(\mathbf{P}\mathbf{R})}{R^3} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{3(\mathbf{P}\mathbf{R})\mathbf{R}}{R^5} - \frac{\mathbf{P}}{R^3} \right). \quad (4.24)$$

Согласно полученному выражению (4.24), напряженность поля диполя убывает  $\sim \frac{1}{R^3}$ .

Запишем напряженность поля диполя в сферической системе координат, считая  $R=r$ .

$$\mathbf{E} = -\text{grad} \varphi_{II} = -\frac{\partial \varphi_{II}}{\partial R} \mathbf{e}_r - \frac{1}{R} \frac{\partial \varphi_{II}}{\partial \theta} \mathbf{e}_\theta \quad (4.25)$$

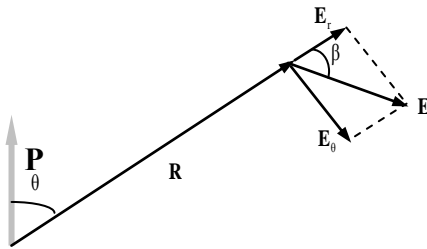


Рис.4.5

Поле диполя имеет аксиальную симметрию, потому вектор  $\mathbf{E}$  имеет две составляющих (рис.4.5):

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_r + \mathbf{E}_\theta = E_r \mathbf{e}_r + E_\theta \mathbf{e}_\theta.$$

Записывая выражение для дипольного потенциала в виде (4.22) и подставляя его в (4.25),

получим:

$$\mathbf{E} = -\text{grad}\varphi_{II} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{2P\cos\theta}{R^3} \mathbf{e}_r + \frac{P\sin\theta}{R^3} \mathbf{e}_\theta \right). \quad (4.26)$$

Из (4.26) следует вывод о направлении вектора  $\mathbf{E}$ : на линии совпадающей с осью диполя ( $\theta=0$ ) вектор напряженности совпадает по направлению с дипольным моментом; на линии перпендикулярной к оси диполя ( $\theta=90^\circ$ ) вектор напряженности направлен противоположно дипольному моменту; при  $0 < \theta < 90^\circ$  вектор напряженности образует с вектором  $\mathbf{R}$  угол  $\beta$ :

$$\text{tg}\beta = \frac{E_\theta}{E_r} = \frac{1}{2} \text{tg}\theta. \quad (4.27)$$

Из (4.26) очевидно, что составляющие вектора  $\mathbf{E}$  имеют вид

$$\begin{cases} E_r = -\frac{\partial\varphi_{II}}{\partial R} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2P\cos\theta}{R^3} \\ E_\theta = -\frac{1}{R} \frac{\partial\varphi_{II}}{\partial\theta} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{P\sin\theta}{R^3} \end{cases}. \quad (4.28)$$

Из сравнения составляющих  $E_r$  и  $E_\theta$  следует, что *при одном и том же значении  $R$  напряженность на оси диполя вдвое больше напряженности на перпендикуляре к его оси.*

На основании (4.28) можно определить модуль вектора напряженности поля диполя:

$$\begin{aligned} E &= \sqrt{E_r^2 + E_\theta^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sqrt{\left(\frac{2P\cos\theta}{R^3}\right)^2 + \left(\frac{P\sin\theta}{R^3}\right)^2} = \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{P}{R^3} \sqrt{4\cos^2\theta + \sin^2\theta} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{P}{R^3} \sqrt{4\cos^2\theta + 1 - \cos^2\theta} = \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{P}{R^3} \sqrt{1 + 3\cos^2\theta} \end{aligned} \quad (4.29)$$

### § 4.7 Диполь во внешнем электростатическом поле

На постоянный по величине дипольный момент  $\mathbf{P}$  во внешнем электрическом поле  $\mathbf{E}(\mathbf{r})$  будет действовать момент силы  $\mathbf{M} = [\mathbf{R}, \mathbf{F}]$ , где сила, на основе общих принципов механики, может быть найдена как взятый с минусом градиент потенциальной энергии диполя  $\mathbf{W}$  во внешнем поле:

$$\mathbf{F} = -\text{grad } W.$$

Найдем сначала потенциальную энергию диполя, находящегося во внешнем электростатическом поле. Энергия одного заряда  $W = q\varphi(\mathbf{r})$ . Тогда энергия двух зарядов будет равна:



$$W = q^{(+)}\varphi(\mathbf{r} + \mathbf{l}) + q^{(-)}\varphi(\mathbf{r}) = q(\varphi(\mathbf{r} + \mathbf{l}) - \varphi(\mathbf{r}))$$

Если размеры диполя малы по сравнению с неоднородностью поля, то, раскладывая в ряд Тейлора  $\varphi(\mathbf{r} + \mathbf{l})$  и ограничиваясь членами первого порядка по  $\mathbf{l}$ , можно записать:

$$\varphi(\mathbf{r} + \mathbf{l}) = \varphi(\mathbf{r}) + \frac{d\varphi(\mathbf{r})}{d\mathbf{r}} \mathbf{l} + \dots,$$

где:  $\frac{d\varphi(\mathbf{r})}{d\mathbf{r}} = \text{grad } \varphi(\mathbf{r}) = -\mathbf{E}$ .

Тогда

$$W = q(\varphi(\mathbf{r} + \mathbf{l}) - \varphi(\mathbf{r})) = -q\mathbf{l}\mathbf{E} = -(\mathbf{PE}),$$

т.е. потенциальная энергия диполя, находящегося во внешнем электрическом поле

$$W = -(\mathbf{PE}) = -PE\cos\alpha. \quad (4.30)$$

Рассмотрим диполь в однородном электрическом поле, для которого  $\mathbf{E} = \text{const}$ , т.е. вектор  $\mathbf{E}$  в любой точке пространства имеет одни и те же направление и модуль.

Найдём силу, действующую на дипольный момент  $\mathbf{P}$ , который составляет угол  $\alpha$  с направлением силовых линий (рис. 4.6). Выберем систему координат так, чтобы ось  $Oz$  совпадала по направлению с вектором  $\mathbf{E}$ , а радиус-вектор  $\mathbf{r} = \mathbf{R}$  был коллинеарен с  $\mathbf{P}$ .

В этом случае угол  $\alpha$ , фигурирующий в выражении для потенциальной энергии (4.30), совпадает с углом  $\theta$  в сферических координатах. Тогда сила  $\mathbf{F}$ , действующая на дипольный момент  $\mathbf{P}$ , может быть вычислена в сферических координатах:

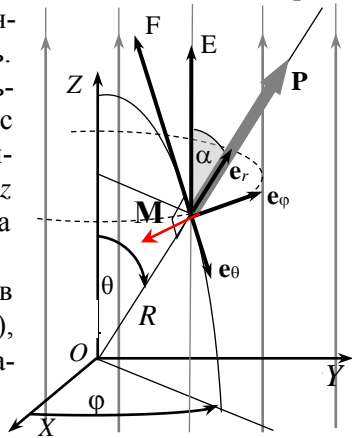


Рис.4.6

$$\mathbf{F} = -\text{grad}W = \text{grad}(PE\cos\theta) = \mathbf{e}_\theta PE \frac{1}{R} \frac{\partial \cos\theta}{\partial \theta} = -\mathbf{e}_\theta \frac{PE\sin\theta}{R}.$$

Так как сила  $\mathbf{F}$  направлена в противоположную сторону вектору  $\mathbf{e}_\theta$ , то она стремится уменьшить угол между векторами  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{P}$ , т.е. установить диполь по направлению внешнего поля.

Произведение  $PE\sin\theta$  определяет модуль момента силы, действующий на дипольный момент  $\mathbf{P}$  в электрическом поле на этом основании можно записать

$$\mathbf{M} = [\mathbf{R}, \mathbf{F}] = -[\mathbf{R}, \mathbf{e}_\theta] \frac{PE \sin \theta}{R} = -[\mathbf{R}e_{r'}, \mathbf{e}_\theta] \frac{PE \sin \theta}{R} = -\mathbf{e}_\varphi PE \sin \theta \quad (4.31)$$

На основании (4.31) можно сделать вывод о том, что в *однородном электростатическом поле в любой его точке на дипольный момент действует один и тот же момент силы  $\mathbf{M} = [\mathbf{P}, \mathbf{E}]$ , стремящийся развернуть его по направлению поля.*

Рассмотрим теперь диполь в неоднородном электрическом поле, в котором  $\mathbf{E} = \mathbf{E}(\mathbf{r})$  и  $\alpha = \alpha(\mathbf{r})$ . В этом случае сила, действующая на дипольный момент, представляет собой сумму двух слагаемых:

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= -\text{grad}W = \text{grad}(PE(\mathbf{r}) \cos \alpha(\mathbf{r})) = \\ &= PE(\mathbf{r}) \text{grad} \cos \alpha(\mathbf{r}) + P \cos \alpha(\mathbf{r}) \text{grad} E(\mathbf{r}) \end{aligned} \quad (4.32)$$

Первое слагаемое в (4.32) аналогично выражению для силы, действующей на дипольный момент в однородном электрическом поле и стремящейся развернуть его по направлению поля, что приводит к появлению момента силы. Второе слагаемое в (4.32) даёт силу, направленную в сторону возрастания напряжённости поля. Таким образом, *неоднородное электростатическое поле, стремится развернуть находящийся в нем диполь по направлению поля и втянуть его в область с большей напряжённостью.*

#### § 4.8 Энергия взаимодействия системы неподвижных зарядов как энергия электростатического поля в диэлектриках

Найдём энергию взаимодействия совокупности  $N$  точечных зарядов  $q_1, q_2, q_3, \dots, q_i, \dots, q_N$ . Радиус-векторы зарядов  $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3, \dots, \mathbf{r}_i, \dots, \mathbf{r}_N$ .

Энергия любого из них, например  $q_i$ , во внешнем электрическом поле может быть определена как произведение заряда на потенциал электрического поля  $\varphi(\mathbf{r}_i)$  в точке, где находится этот заряд:

$$W_i = q_i \varphi(\mathbf{r}_i). \quad (4.33)$$

Очевидно, что  $\varphi(\mathbf{r}_i)$  равен сумме потенциалов полей всех зарядов системы за исключением самого заряда  $q_i$ :

$$\varphi(\mathbf{r}_i) = \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^N \varphi(|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_k|) = \frac{1}{4\pi\epsilon\epsilon_0} \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^N \frac{q_k}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_k|}. \quad (4.34)$$

Подставляя выражение для потенциала (4.34) в формулу для энергии заряда  $q_i$  (4.33), и затем, суммируя по всем зарядам в совокупности, найдём энергию их взаимодействия:

$$W = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N q_i \varphi(\mathbf{r}_i), \quad (4.35)$$

$$W = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^N q_i \varphi(|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_k|) = \frac{1}{8\pi\epsilon\epsilon_0} \sum_{i=1}^N \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^N \frac{q_i q_k}{|\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_i|}. \quad (4.36)$$

Коэффициент  $\frac{1}{2}$  введен, так как в сумме встречаются слагаемые типа:  $q_i q_k / |\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_k|$  и  $q_k q_i / |\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_i|$ , и, таким образом, энергия взаимодействия каждой пары зарядов учитывается дважды.

В случае непрерывного распределения зарядов, весь объем разбиваем на бесконечно малые объемы  $\Delta V_i$ , так чтобы  $q_i = \rho_i \Delta V_i$  можно было рассматривать как точечный заряд. В пределе  $\Delta V_i \rightarrow 0$ , тогда энергия согласно (4.35), равна:

$$W = \frac{1}{2} \lim_{\Delta V_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^{\infty} \rho_i \Delta V_i \varphi(\mathbf{r}_i) = \frac{1}{2} \int_V \rho \varphi dV \quad (4.37)$$

Последний интеграл позволяет представить *энергию взаимодействия зарядов как энергию созданного ими электрического поля, локализованного в окружающем их пространстве* ( $V \rightarrow \infty$ ).

В качестве доказательства справедливости данного утверждения можно привести следующие рассуждения. Учитывая, что

$$\operatorname{div}(\varphi \mathbf{D}) = \mathbf{D} \operatorname{grad} \varphi + \varphi \operatorname{div} \mathbf{D} = -\mathbf{E} \mathbf{D} + \varphi \rho,$$

где для электростатического поля

$$\operatorname{grad} \varphi = -\mathbf{E} \quad \text{и} \quad \operatorname{div} \mathbf{D} = \rho,$$

имеем

$$\varphi \rho = \operatorname{div}(\varphi \mathbf{D}) + \mathbf{E} \mathbf{D}.$$

Подставив полученное выражение для  $\varphi \rho$  в (4.37), получим:

$$W = \frac{1}{2} \int_V \rho \varphi dV = \frac{1}{2} \int_V \operatorname{div} \varphi \mathbf{D} dV + \frac{1}{2} \int_V \mathbf{E} \mathbf{D} dV.$$

Первый интеграл может быть преобразован по теореме Остроградского-Гаусса в интеграл по бесконечно удалённой поверхности, который обращается в нуль, так как поле на бесконечности исчезает. В итоге энергия взаимодействия зарядов оказывается равной энергии электростатического поля в окружающем их пространстве:

$$W = \frac{1}{2} \int_V \mathbf{E} \mathbf{D} dV \quad (4.38)$$

Произведение  $\mathbf{E} \mathbf{D} / 2$  имеет смысл *плотности энергии электростатического поля*.

Вывод (4.38) фактически дублирует результаты первой главы, где получены общие формулы (1.38) и (1.39) для энергии электромагнитного поля. В случае электростатического поля в (1.38) и (1.39)  $\mathbf{B} = \mathbf{H} = 0$ .

В случае непрерывного распределения зарядов по поверхности, аналогично рассуждая, можно записать:

$$W = \frac{1}{2} \oint_S \alpha \varphi dS = \frac{1}{2} \int_V \mathbf{E} \mathbf{D} dV, \quad (4.39)$$

где интеграл берется по всем поверхностям, на которых свободный поверхностный заряд отличен от нуля.

В случае непрерывного распределения зарядов по поверхности и объему, также можно показать что:

$$W = \frac{1}{2} \int_V \rho \varphi dV + \frac{1}{2} \oint_S \alpha \varphi dS = \int_V \frac{\mathbf{D} \mathbf{E}}{2} dV. \quad (4.40)$$

## § 4.9 Проводники в электростатическом поле

*Проводниками* называются вещества, основным свойством которых является электропроводность, то есть способность проводить под действием постоянного электрического поля не изменяющийся во времени ток. Такая способность проводников объясняется наличием у них свободных носителей заряда.

### 4.9.1 Свойства электростатического поля проводников

В случае электростатики заряды неподвижны и токи отсутствуют ( $\mathbf{j}=0$ ), и из закона Ома  $\mathbf{j}=\gamma\mathbf{E}$  следует, что внутри проводника электрическое поле отсутствует, т.е.  $\mathbf{E}=0$ .

Поскольку внутри проводника  $\mathbf{E}=0$ , то и  $\operatorname{div} \mathbf{D} = \operatorname{div} \varepsilon \varepsilon_0 \mathbf{E} = 0$ , а из уравнения Максвелла

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = \rho \Rightarrow \rho=0,$$

т.е. *внутри проводника объемные заряды отсутствуют.*

Если проводнику передан заряд, то за короткий промежуток времени он распределяется по поверхности проводника, так чтобы суммарное поле внутри проводника стало равным нулю.

Исходя из уравнения непрерывности, можно получить уравнение для изменения объемной плотности заряда во времени. После подстановки в уравнение непрерывности материальных уравнений  $\mathbf{j}=\gamma\mathbf{E}$  и  $\mathbf{E} = \frac{\mathbf{D}}{\varepsilon_0}$ ,

а также уравнения Максвелла  $\operatorname{div} \mathbf{D}=\rho$ , получим дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{\gamma}{\varepsilon_0} \rho,$$

которое после разделения переменных принимает вид:

$$\frac{\partial \rho}{\rho} = -\frac{1}{\tau} \partial t, \quad (4.41)$$

где  $\tau = \varepsilon\varepsilon_0/\gamma$  – параметр, который называется **временем релаксации** – время, за которое система приходит в состояние равновесия.

Решение уравнения (4.41) имеет вид:

$$\rho = \rho_0 \exp(-t/\tau).$$

В силу того, что для проводников  $\tau \ll 1$ , в них за очень короткий промежуток времени объемная плотность заряда становится равной нулю и все заряды переходят на поверхность.

### 4.9.2 Поле вблизи поверхности проводника

Напряженность электрического поля вне проводника вблизи его поверхности (рис. 4.7), может быть найдено из граничных условий:

$$E_\tau^{(2)} = E_\tau^{(1)} \quad \text{и} \quad D_n^{(2)} - D_n^{(1)} = \sigma.$$

В случае проводника  $E_\tau^{(1)} = 0$ , тогда из первого граничного условия  $E_\tau^{(2)} = 0$ . Это говорит о том, что тангенциальная составляющая вблизи поверхности проводника отсутствует и *силовые линии электрического поля перпендикулярны поверхности проводника*. Отсутствие тангенциальной составляющей поля вблизи поверхности очевидно, т.к. наличие такой составляющей должно привести в движение заряды вдоль поверхности проводника, т.е. к появлению электрического тока.

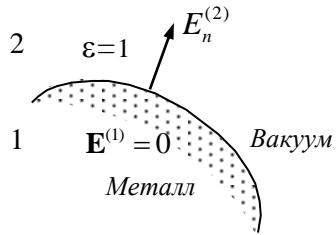


Рис.4.7

Так как объемные заряды в проводнике отсутствуют, то  $\text{div} \mathbf{D}^{(1)} = \rho = 0$  и, следовательно  $D_n^{(1)} = 0$ , откуда на основании второго граничного условия  $D_n^{(2)} = \sigma$ , а следовательно

$$E_n^{(2)} = \frac{\sigma}{\varepsilon\varepsilon_0}. \quad (4.42)$$

Электрическое поле в каждой точке проводника является суммой двух полей: создаваемого поверхностными зарядами самого проводника и внешнего электрического поля. Заряды на поверхности проводника всегда перераспределяются таким образом, чтобы скомпенсировать действие внешнего поля. Если внутри проводника вырезать полость, то поле внутри неё равно нулю. В этом случае говорят, что проводник **экранирует**

*ет пространство* в полости от поля, являясь *экраном*. Этим обычно пользуются для устройства *электростатической защиты*.

Могут встретиться два случая электростатической защиты. Первый связан с необходимостью создать в сильном электростатическом поле область, куда внешнее поле не проникало бы. Например, нужно «обезопасить» от воздействия поля какой-либо прибор, тогда его помещают в металлическую оболочку. Другая ситуация связана с тем, что поле желательно заключить в определенные пространственные границы, вне которых его напряженность равнялось бы нулю. Например, установку, создающую сильное электростатическое поле, необходимо экранировать от обслуживающего персонала. В этом случае установку помещают внутри замкнутой металлической сетки, которую обязательно заземляют. Потенциал сетки будет равен потенциалу земли. В пространстве вне области, ограниченной сеткой, поле, создаваемое установкой, практически отсутствует.

### 4.9.3 Потенциал и емкость проводника

Равенство нулю тангенциальной составляющей на поверхности проводника  $E_t = (\text{grad}\varphi)_t = 0$  означает, что потенциал проводника на его поверхности (а также и в его объёме) принимает постоянное значение  $\varphi(x,y,z) = \text{const}$ .

Таким образом, из условия  $E=0$  внутри проводника следует, что *все точки проводника имеют одинаковый потенциал*. Поэтому можно говорить о *потенциале проводника*.

С помощью соотношения  $D_n^{(2)} = \sigma$  можно найти полный заряд проводника:

$$q = \oint_S \sigma(x,y,z)dS = \oint_S D_n dS = \varepsilon_0 \oint_S E_n dS = -\varepsilon_0 \oint_S (\text{grad}\varphi)_n dS ,$$

так как  $(\text{grad}\varphi)_n = \partial\varphi/\partial n$ , то заряд проводника выражается через потенциал как

$$q = -\varepsilon_0 \oint_S \frac{\partial\varphi}{\partial n} dS \cdot \tag{4.43}$$

При внесении проводника во внешнее электрическое поле его заряд остаётся прежним, происходит только его перераспределение по поверхности, так, что электрическое поле существует только снаружи проводника. Это явление называется *электростатической индукцией*.

Очевидно, что потенциал на поверхности проводника зависит от формы и заряда проводника, а также от присутствия вблизи других про-

водников и зарядов. Величина, дающая связь между потенциалом и его зарядом называется **ёмкостью**:

$$\varphi = \frac{q}{C}, \quad q = \varphi C. \quad (4.44)$$

Для проводника в форме сферы радиуса  $R$ , находящегося в среде с диэлектрической проницаемостью  $\varepsilon$ , потенциал  $\varphi = q/4\pi\varepsilon\varepsilon_0R$  и  $C = 4\pi\varepsilon\varepsilon_0R$ .

В общем случае, если имеется система из  $N$  проводников, то потенциал каждого проводника не связан с зарядом этого проводника простой связью (4.44). Для системы из  $N$  проводников, потенциалы которых  $\varphi_i$ , а заряды  $q_i$ , в силу принципа суперпозиции:

$$\varphi_i = \sum_{k=1}^N S_{ik} q_k, \quad (4.45)$$

где  $S_{ik}$  – коэффициенты, называемые **потенциальными**. Они зависят от формы и размеров проводников, а также их взаимного расположения и диэлектрических свойств среды в которой находятся.

Решая эту систему алгебраических уравнений относительно  $q_k$ , получим:

$$q_k = \sum_{i=1}^N C_{ki} \varphi_i \quad (4.46)$$

Коэффициенты  $C_{ki}$  являются элементами матрицы обратной матрице коэффициентов  $S_{ik}$ :

$$C_{ki} = \{S^{-1}\}_{ki}$$

Коэффициенты  $C_{ki}$  – зависят от формы проводников и расстояния между ними и при одинаковых индексах  $C_{ii}$  называются **коэффициентами ёмкости** или просто **ёмкостями проводников** ( $C_{ii}$  всегда положительны), а при различных значениях индексов  $C_{ki}$  – **коэффициентами электростатической индукции** ( $C_{ki}$  – либо отрицательны, либо равны нулю).

#### 4.9.4 Энергия электростатического поля системы проводников

Вычислим энергию поля  $W$  системы  $N$  заряженных проводников, находящихся в объеме  $V$ , для этого в выражении (4.38) введем  $\mathbf{ED} = \varepsilon\varepsilon_0\mathbf{E}$  и  $\mathbf{E} = -\text{grad}\varphi$ :

$$W = \int_V \frac{\mathbf{ED}}{2} dV = -\frac{\varepsilon\varepsilon_0}{2} \int_V (\mathbf{E}, \text{grad}\varphi) dV. \quad (4.47)$$

Учитывая, что  $\operatorname{div}(\mathbf{E}\varphi) = \mathbf{E}\operatorname{grad}\varphi + \varphi\operatorname{div}\mathbf{E}$  и то, что  $\varepsilon\varepsilon_0\operatorname{div}\mathbf{E} = \rho$ , а для проводников  $\rho = 0$  получим:

$$W = -\frac{\varepsilon\varepsilon_0}{2} \int_V \operatorname{div}(\mathbf{E}\varphi) dV = -\frac{\varepsilon\varepsilon_0}{2} \oint_S \mathbf{E}\varphi d\mathbf{S}.$$

В силу того, что заряды распределяются только по поверхности проводника, то интеграл, взятый по поверхности  $S$ , окружающей систему проводников, можно заменить на сумму интегралов по поверхности каждого  $i$ -го проводника:

$$\begin{aligned} W &= -\frac{\varepsilon\varepsilon_0}{2} \oint_S \mathbf{E}\varphi d\mathbf{S} = -\frac{\varepsilon\varepsilon_0}{2} \sum_{i=1}^N \oint_{S_i} \mathbf{E}_i \varphi_i d\mathbf{S}_i = \frac{\varepsilon\varepsilon_0}{2} \sum_{i=1}^N \oint_{S_i} E_{ni} \varphi_i dS_i = \\ &= \frac{\varepsilon\varepsilon_0}{2} \sum_{i=1}^N \varphi_i \oint_{S_i} E_{ni} dS_i = \frac{\varepsilon\varepsilon_0}{2} \sum_{i=1}^N \varphi_i \oint_{S_i} \sigma_i dS_i = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \varphi_i q_i. \end{aligned}$$

Таким образом, энергия поля системы  $N$  заряженных проводников определяется так же, как и для совокупности точечных зарядов

$$W = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N q_i \varphi_i, \quad (4.48)$$

с учетом соотношения (4.46) имеем

$$W = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \varphi_i q_i = \frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^N C_{ik} \varphi_i \varphi_k. \quad (4.49)$$

Из последнего равенства при варьировании потенциалов следует, что  $C_{ik} = C_{ki}$ .



## ГЛАВА 5. СТАЦИОНАРНОЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ ПОЛЕ

### § 5.1 Постоянный электрический ток

#### 5.1.1 Электродинамика стационарного электромагнитного поля

Стационарное электромагнитное поле создаётся постоянным электрическим током, характеризующимся плотностью электрического тока  $\mathbf{j} \neq 0$ . Как и в электростатике, все величины, характеризующие поле, по-прежнему не зависят от времени, и уравнения Максвелла для стационарного случая принимают вид:

$$\begin{cases} \operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{j}, & \operatorname{rot} \mathbf{E} = 0, \\ \operatorname{div} \mathbf{B} = 0, & \operatorname{div} \mathbf{D} = \rho. \end{cases} \quad (5.1)$$

Материальные уравнения  $\mathbf{D} = \varepsilon \varepsilon_0 \mathbf{E}$  и  $\mathbf{B} = \mu \mu_0 \mathbf{H}$ , а также закон Ома  $\mathbf{j} = \gamma \mathbf{E}$  и закон Джоуля — Ленца  $w_T = \gamma E^2$  остаются неизменными.

Входящие в уравнения плотности заряда  $\rho$  и тока  $\mathbf{j}$  связаны между собой законом сохранения заряда

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{j} = 0,$$

который должен удовлетворять *условию стационарности*  
 $\operatorname{div} \mathbf{j} = 0$ .

Как известно, для поддержания постоянного тока в цепи необходима затрата работы. Эта работа совершается *сторонними силами*, как правило, сосредоточенными на ограниченном участке цепи. В этом случае уже существует связь между электрическим и магнитным полями:

$$\begin{cases} \mathbf{j} = \gamma(\mathbf{E} + \mathbf{E}_{cm}), \\ \operatorname{rot} \mathbf{H} = \gamma(\mathbf{E} + \mathbf{E}_{cm}) \end{cases} \quad (5.2)$$

Строго слагаемое  $\mathbf{E}_{cm}$  должно быть добавлено к  $\mathbf{E}$  и в уравнение  $\mathbf{D} = \varepsilon \varepsilon_0 \mathbf{E}$ , однако наиболее существенную роль она играет именно в законе Ома.

#### 5.1.2 Условия существования постоянного тока

Для получения постоянного тока в цепи необходимо постоянно поддерживать исходную разность потенциалов ( $\varphi_1 - \varphi_2$ ). Это достигается с помощью *сторонних сил*, которые должны быть *неэлектростатической природы*.

Приборы, в которых на электрические заряды действуют сторонние силы, называются *источниками тока*. В аккумуляторах, например, сторонние силы возникают в результате химической реакции взаимодействия электродов с электролитом, в генераторах сторонними являются силы, действующие на заряды, движущиеся в магнитном поле и т.д.

Именно в источниках тока, благодаря работе сторонних сил, создаётся генерируемая энергия, которая затем расходуется в электрической цепи.

Одна из основных характеристик источника – его *электродвижущая сила* (эдс)  $\mathcal{E}$  – работа, которую совершают сторонние силы  $\mathbf{F}_{cm}$  при перемещении положительного единичного заряда:

$$\mathcal{E} = A/q. \quad (5.3)$$

Поле сторонних сил, также как и электростатическое поле, условно характеризуется вектором напряжённости  $\mathbf{E}_{ст}$ :

$$\mathbf{E}_{ст} = \mathbf{F}_{ст}/q. \quad (5.4)$$

Если источник тока включен на участке цепи 1-2, то работа сторонних сил по перемещению заряда  $q$  на этом участке будет равна:

$$A = \int_{1 \rightarrow 2} (\mathbf{F}_{cm}, d\mathbf{l}) = q \int_{1 \rightarrow 2} (\mathbf{E}_{cm}, d\mathbf{l}),$$

разделив эту работу на величину переносимого заряда, получим эдс источника

$$\frac{A}{q} = \mathcal{E} = \int_{1 \rightarrow 2} (\mathbf{E}_{cm}, d\mathbf{l}). \quad (5.5)$$

Для замкнутого контура ЭДС, как правило, определяют в другом виде. Напряжённость электрического поля в проводнике, подключенного к источнику тока, равна сумме кулоновской и сторонней составляющих:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_\rho + \mathbf{E}_{cm} = -\text{grad}\phi + \mathbf{E}_{cm},$$

тогда:

$$\oint_L (\mathbf{E}_\rho + \mathbf{E}_{cm}) d\mathbf{l} = \oint_L (-\text{grad}\phi + \mathbf{E}_{cm}) d\mathbf{l} = \underbrace{\oint_L (-\text{grad}\phi) d\mathbf{l}}_{=0} + \oint_L \mathbf{E}_{cm} d\mathbf{l} = \oint_L \mathbf{E}_{cm} d\mathbf{l} = \mathcal{E}$$

Так как интеграл по замкнутому контуру от  $\text{grad}\phi$  обращается в нуль, то приходим к эквивалентному определению эдс:

$$\mathcal{E} = \oint_L \mathbf{E}_{cm} d\mathbf{l}. \quad (5.6)$$

Таким образом, эдс – есть работа, совершаемая полем сторонних сил по перемещению единичного положительного заряда по замкнутому контуру.

### 5.1.3 Закон Ома для неоднородного участка цепи (обобщенный закон Ома)

В теории постоянных токов при рассмотрении электрических цепей используется представление о *линейных токах*, для которых площадь поперечного сечения много меньше их линейных размеров. В этом случае не рассматривается распределение электрического тока по сечению, и

при отсутствии разветвлений в цепи сила тока одна и та же в любой точке цепи, а плотность электрического тока можно в этой точке считать совпадающей по направлению с элементом контура тока.

Участки цепи, где движение носителей заряда происходит под действием только электростатической (кулоновской) силы  $\mathbf{F}_э = q\mathbf{E}_э$ , называются **однородными**. Связь разности потенциалов на концах такого участка с силой тока даётся законом Ома в интегральной форме  $I = \frac{\Phi_1 - \Phi_2}{R_{12}}$ , а

связь напряженности поля с плотностью тока – законом Ома в дифференциальной форме  $\mathbf{j} = \gamma\mathbf{E}$ .

По-другому обстоят дела на участке контура, где на заряды действует не только электростатическая, но и сторонняя сила:

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_э + \mathbf{F}_{cm} = q(\mathbf{E}_э + \mathbf{E}_{cm}). \quad (5.7)$$

Такой участок контура, где наряду с электростатической силой действуют и сторонние силы, называют **неоднородным**.

Пропорциональность плотности тока напряженности сохранится и в случае неоднородного участка цепи, но теперь напряженности поля равна сумме напряженностей электростатического поля  $\mathbf{E}$  и поля сторонних сил  $\mathbf{E}_{cm}$ :

$$\mathbf{j} = \gamma(\mathbf{E}_э + \mathbf{E}_{cm}). \quad (5.8)$$

Это уравнение – **закон Ома в локальной дифференциальной форме для неоднородного участка цепи**.

Для вывода закона Ома в интегральной форме рассмотрим незамкнутый участок линейного тока (рис. 5.1), к которому приложено напряжение.

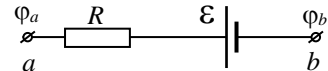


Рис.5.1.

Будем считать, что сечение проводников  $S(x)$  и удельная проводимость  $\gamma(x)$  – функции координаты  $x$ , отсчитываемой от точки  $a$  цепи. Для линейных токов размеры сечения много меньше размеров цепи, поэтому можно принять, что  $\mathbf{j} \parallel d\mathbf{l}$ ,  $\mathbf{E}_э \parallel d\mathbf{l}$  и  $\mathbf{E}_{cm} \parallel d\mathbf{l}$  и следовательно  $(\mathbf{j} \cdot d\mathbf{l}) = jdx$ ,  $(\mathbf{E}_э \cdot d\mathbf{l}) = E_э dx$  и  $(\mathbf{E}_{cm} \cdot d\mathbf{l}) = E_{cm} dx$ . Умножим (5.8) скалярно на  $\frac{S(x)d\mathbf{l}}{\gamma(x)S(x)}$

$$\frac{S(x) j dx}{\gamma(x)S(x)} = (E_э + E_{cm}) dx,$$

и проинтегрируем на участке  $a-b$

$$\int_a^b \frac{S(x) \mathbf{j}}{\gamma(x)S(x)} dx = \int_a^b (E_{\text{э}} + E_{\text{см}}) dx,$$

получим с учетом (5.6)

$$I \int_a^b \frac{dx}{\gamma(x)S(x)} = - \int_a^b \text{grad} \varphi dx + \mathcal{E}.$$

Учитывая ранее найденное соотношение (4.6), и то, что для линейного проводника сопротивление малого участка  $dR = \frac{dx}{\gamma(x)S(x)}$ , результат интегрирования принимает вид

$$IR = \varphi_a - \varphi_b + \mathcal{E} \quad (5.9)$$

Таким образом, приходим к установленному эмпирически Омом закону для участка цепи, на котором включена сторонняя эдс:

### 5.1.4 Правила Кирхгофа

Рассмотренные нами законы постоянного тока позволяют рассчитать токи в сложных разветвлённых электрических цепях. Расчёты упрощаются, если пользоваться правилами Кирхгофа.

**Первое правило Кирхгофа** – правило токов относится к узлам цепи, то есть, к таким точкам схемы, где сходятся не менее трёх проводников (рис. 5.2.). Правило токов гласит: *алгебраическая сумма токов, сходящихся в узле, равняется нулю*:

$$\boxed{\sum_{i=1}^n I_i = 0}. \quad (5.10)$$

При составлении соответствующего уравнения, токи, втекающие в узел, берутся с одним знаком (например, со знаком «плюс»), а вытекающие из него – с противоположным знаком (в данном случае – со знаком «минус»).

Так, для узла  $A$  (рис. 5.2) можно записать:

$$I_1 - I_2 - I_3 = 0.$$

Первое правило Кирхгофа является следствием условия стационарности постоянных токов  $\text{div} \mathbf{j} = 0$ . В самом деле, если окружить узел цепи замкнутой поверхностью  $S$ , то тогда по определению электрический ток через эту поверхность равен с

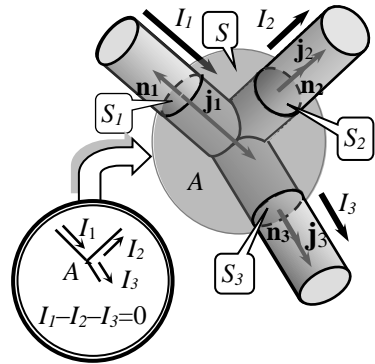


Рис.5.2

одной стороны:

$$I = \oint_S \mathbf{j} d\mathbf{S} = \oint_S \sum_k \mathbf{j}_k d\mathbf{S} = \sum_k \int_{S_k} \mathbf{j}_k d\mathbf{S} = \int_{S_1} \mathbf{j}_1 d\mathbf{S} + \int_{S_2} \mathbf{j}_2 d\mathbf{S} + \int_{S_3} \mathbf{j}_3 d\mathbf{S} = -I_1 + I_2 + I_3,$$

с другой стороны – по теореме Остроградского-Гаусса и в силу выполнения условия стационарности  $\text{div} \mathbf{j} = 0$ :

$$\oint_S \mathbf{j} d\mathbf{S} = \int_V \text{div} \mathbf{j} dV = 0.$$

Таким образом, получаем уравнение  $I_1 - I_2 - I_3 = 0$ , ранее составленное по первому правилу Кирхгофа.

**Второе правило Кирхгофа** справедливо для любого замкнутого контура разветвлённой цепи: *в любом замкнутом контуре алгебраическая сумма напряжений на участках контура равна алгебраической сумме эдс, встречающихся в этом контуре*

$$\sum_i I_i R_i = \sum_k \mathcal{E}_k. \quad (5.11)$$

Второе правило Кирхгофа является следствием закона Ома для неоднородного участка цепи. Проще всего показать его справедливость на конкретном примере.

Пусть имеется сложная разветвлённая цепь. Выделим в ней замкнутый контур 1-2-3-1, изображённый на рис. 5.3. Введём обозначения:  $R_i$  – сопротивления отдельных участков контура ( $i = 1, 2, 3$ );  $\mathcal{E}_k$  – эдс, включённые в контур ( $k = 1, 2, \dots, 5$ ).

Выберем направление обхода контура: в нашем примере – по часовой стрелке. При составлении уравнения по правилу (5.11) эдс источника берётся со знаком «плюс», если он создаёт ток, совпадающий с направлением обхода, в противном случае эдс в уравнении считается отрицательной, т.е. для схемы на рис. 5.3 правая часть уравнения будет иметь вид  $\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 + \mathcal{E}_3 - \mathcal{E}_4 + \mathcal{E}_5$ .

**Ветвью** называется участок электрической цепи между двумя соседними узлами, содержащий только последовательное соединение элементов. Контур на рис. 5.3 состоит из трех ветвей. Обозначим в ветвях контура токи  $I_1, I_2, I_3$  и выберем им направления (произвольно). При составлении уравнения по второму правилу Кирхгофа токи, совпадающие с направле-

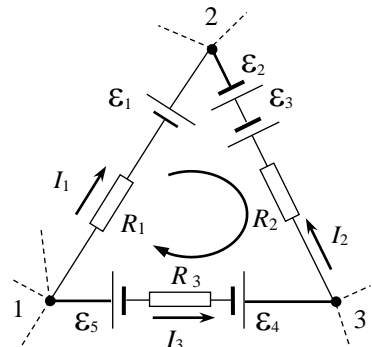


Рис.5.3

нием обхода, берутся со знаком «плюс», токи противоположного направления – со знаком «минус». Обычно для сложных цепей заранее не удаётся угадать, каково реальное направление токов в отдельных ветвях, но в ходе решения, в случае неправильного выбора, значение тока получится со знаком «минус».

С учетом сформулированного правила знаков для токов, запишем левую часть уравнения, составленного по правилу (5.11):  $I_1R_1 - I_2R_2 - I_3R_3$ . Таким образом, для рассматриваемого контура второе правило Кирхгофа приводит к уравнению

$$I_1R_1 - I_2R_2 - I_3R_3 = \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 + \mathcal{E}_3 - \mathcal{E}_4 + \mathcal{E}_5.$$

Теперь составим уравнения для отдельных ветвей по закону Ома для неоднородного участка с учетом правил знаков:

$$\begin{aligned} I_1R_1 &= \varphi_1 - \varphi_2 + \mathcal{E}_1 && \text{— для участка } 1 \rightarrow 2, \\ -I_2R_2 &= \varphi_2 - \varphi_3 + \mathcal{E}_2 + \mathcal{E}_3 && \text{— для участка } 2 \rightarrow 3, \\ -I_3R_3 &= \varphi_3 - \varphi_1 - \mathcal{E}_4 + \mathcal{E}_5 && \text{— для участка } 3 \rightarrow 1. \end{aligned}$$

Суммируя правые и левые части этих уравнений, получим для рассматриваемого контура уравнение, составленное ранее непосредственно по второму правилу Кирхгофа:

$$I_1R_1 - I_2R_2 - I_3R_3 = \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 + \mathcal{E}_3 - \mathcal{E}_4 + \mathcal{E}_5.$$

## § 5.2 Магнитное поле постоянных токов

Для стационарного поля система уравнений Максвелла распадается на две пары независимых уравнений, одна из которых описывает электрическое, другая – магнитное поле:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{E} &= 0 && \operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{j} \\ \operatorname{div} \mathbf{D} &= \rho && \operatorname{div} \mathbf{B} = 0 \end{aligned} \quad (5.12)$$

Для описания магнитного поля постоянных токов достаточно двух уравнений Максвелла и граничных условий

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{H} &= \mathbf{j} && B_n^1 - B_n^2 = 0 \\ \operatorname{div} \mathbf{B} &= 0 && H_t^1 - H_t^2 = i_N \end{aligned} \quad (5.13)$$

### 5.2.1 Векторный потенциал для поля стационарных токов

При решении задач вместо векторов  $\mathbf{B}$  и  $\mathbf{H}$  часто удобнее использовать векторный потенциал магнитного поля  $\mathbf{A}$ :  $\mathbf{B} = \operatorname{rot} \mathbf{A}$ .

Учитывая, что

$$\mathbf{H} = (1/\mu\mu_0)\mathbf{B} = (1/\mu\mu_0)\operatorname{rot} \mathbf{A},$$

тогда

$$\operatorname{rot}\mathbf{H} = (1/\mu\mu_0)\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{A} = (1/\mu\mu_0)(\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{A} - \Delta\mathbf{A}).$$

В стационарном поле  $\operatorname{div}\mathbf{A}=0$  (условие Лоренца), и подстановка полученного выражения для  $\operatorname{rot}\mathbf{H}$  в уравнение Максвелла  $\operatorname{rot}\mathbf{H}=\mathbf{j}$  приводит к уравнению Пуассона для векторного потенциала

$$\Delta\mathbf{A} = -\mu\mu_0\mathbf{j}, \quad (5.14)$$

общее решение которого можно записать по аналогии с решением уравнения Пуассона для скалярного потенциала (3.23), т.е. в виде

$$\mathbf{A}(\mathbf{R}) = \frac{\mu\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r})dV}{|\mathbf{R}-\mathbf{r}|}. \quad (5.15)$$

### 5.2.2 Интегральная форма закона Био – Савара – Лапласса

Вычислим индукцию магнитного поля, пользуясь векторным потенциалом в виде (5.15):

$$\mathbf{B} = \operatorname{rot}\mathbf{A} = \frac{\mu\mu_0}{4\pi} \operatorname{rot} \left( \int_V \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r})}{|\mathbf{R}-\mathbf{r}|} dV \right) = \frac{\mu\mu_0}{4\pi} \int_V \operatorname{rot} \left( \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r})}{|\mathbf{R}-\mathbf{r}|} \right) dV \quad (5.16)$$

Для преобразования подынтегрального выражения воспользуемся известной из векторного анализа формулой  $\operatorname{rot}(\varphi\mathbf{A}) = \varphi\operatorname{rot}\mathbf{A} + [\operatorname{grad}\varphi, \mathbf{A}]$ , тогда

$$\operatorname{rot} \left( \frac{1}{|\mathbf{R}-\mathbf{r}|} \mathbf{j}(\mathbf{r}) \right) = \frac{1}{|\mathbf{R}-\mathbf{r}|} \operatorname{rot}\mathbf{j}(\mathbf{r}) + \left[ \operatorname{grad} \left( \frac{1}{|\mathbf{R}-\mathbf{r}|} \right), \mathbf{j}(\mathbf{r}) \right]. \quad (5.17)$$

где

$$\operatorname{grad} \left( \frac{1}{|\mathbf{R}-\mathbf{r}|} \right) = - \left( \frac{1}{|\mathbf{R}-\mathbf{r}|^2} \right) \mathbf{R}-\mathbf{r} = - \frac{\mathbf{R}-\mathbf{r}}{|\mathbf{R}-\mathbf{r}|^3}.$$

Таким образом, второе слагаемое в (5.17) принимает вид

$$\left[ \operatorname{grad} \left( \frac{1}{|\mathbf{R}-\mathbf{r}|} \right), \mathbf{j}(\mathbf{r}) \right] = - \left[ \frac{\mathbf{R}-\mathbf{r}}{|\mathbf{R}-\mathbf{r}|^3}, \mathbf{j}(\mathbf{r}) \right] = \frac{[\mathbf{j}(\mathbf{r}), (\mathbf{R}-\mathbf{r})]}{|\mathbf{R}-\mathbf{r}|^3}. \quad (5.18)$$

Подставляя (5.18) в (5.17), и учитывая, что операция ротор берется по координатам точки, где вычисляется поле, а  $\mathbf{j}(\mathbf{r})$  зависит от координат точек интегрирования и поэтому  $\operatorname{rot}\mathbf{j}(\mathbf{r})=0$ , получим **закон Био – Савара – Лапласса в интегральной форме**

$$\mathbf{B} = \frac{\mu\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{[\mathbf{j}(\mathbf{r}), (\mathbf{R}-\mathbf{r})]}{|\mathbf{R}-\mathbf{r}|^3} dV \quad (5.19)$$

Для случая линейных токов, учитывая, что  $\mathbf{j}(\mathbf{r})dV \equiv Idl$ , получим

$$\mathbf{B} = \frac{\mu\mu_0}{4\pi} I \int_L \frac{[d\mathbf{l}, (\mathbf{R} - \mathbf{r})]}{|\mathbf{R} - \mathbf{r}|^3} \quad (5.20)$$

### 5.2.3 Магнитное поле системы движущихся зарядов на больших расстояниях

Рассмотрим магнитное поле создаваемое системой стационарно движущихся зарядов на больших расстояниях от этой системы. Введем систему координат с началом где-нибудь внутри системы зарядов (рис. 5.4).

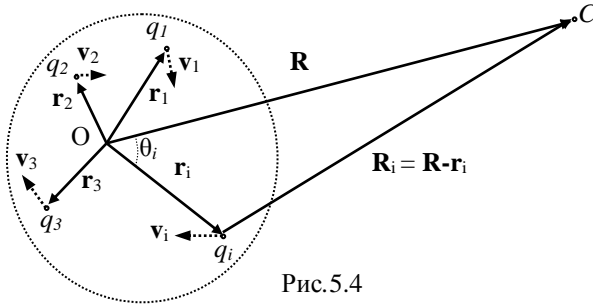


Рис.5.4

Вычислим векторный потенциал в точке  $C$  которая находится на большом расстоянии от начала координат т.е.  $|\mathbf{R}| \gg |\mathbf{r}_i|$ .

Движение каждого заряда в системе эквивалентно элементарному току. Векторный потенциал каждого  $i$ -ого элементарного тока в точке, находящейся на большом расстоянии от начала координат определяется как

$$\mathbf{A}_i = \frac{\mu \cdot \mu_0}{4\pi} \frac{[\mathbf{p}_{mi}, \mathbf{R}]}{R^3} \quad (5.21)$$

Равенство (5.21) получается из (5.15), где для интеграла предварительно осуществляется переход к линейным токам согласно (2.27), т.е. производится замена  $\mathbf{j}(\mathbf{r})dV \equiv I d\mathbf{l}$  с переходом от интегрирования по объему к циркуляции по замкнутому контуру  $L$ . В последующем применяется прием умножения интеграла на постоянный вектор  $\mathbf{c}$ , и преобразование с помощью теоремы Стокса. Далее производится упрощение пренебрежением  $\mathbf{r}$  по сравнению с  $\mathbf{R} - \mathbf{r}$ , т.е.  $\mathbf{R} - \mathbf{r} \approx \mathbf{R}$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{c} \int_V \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r})}{|\mathbf{R} - \mathbf{r}|} dV &\equiv c I \oint_L \frac{d\mathbf{r}}{|\mathbf{R} - \mathbf{r}|} = I \oint_L \left( \frac{\mathbf{c}}{|\mathbf{R} - \mathbf{r}|}, d\mathbf{r} \right) = I \int_S (\text{rot}_{\mathbf{r}} \frac{\mathbf{c}}{|\mathbf{R} - \mathbf{r}|}, d\mathbf{S}) = \\ &= I \int_S \left( \frac{[\mathbf{R} - \mathbf{r}, \mathbf{c}]}{|\mathbf{R} - \mathbf{r}|^3}, d\mathbf{S} \right) \cong I c \left[ \int_S d\mathbf{S}, \frac{\mathbf{R}}{R^3} \right] = \mathbf{c} \frac{[I\mathbf{S}, \mathbf{R}]}{R^3} \end{aligned} \quad (5.22)$$



После сокращения левой и правой части выражения (5.22) на постоянный вектор  $\mathbf{c}$  и введения обозначения для магнитного момента тока  $\mathbf{p}_m = I\mathbf{S}$ , подставляя (5.22) в (5.15) получаем (5.21).

Для всей системы токов, согласно принципу суперпозиции

$$\mathbf{A} = \frac{\mu\mu_0}{4\pi} \sum_i \frac{[\mathbf{p}_{mi}, \mathbf{R}]}{R^3} = \frac{\mu\mu_0}{4\pi} \frac{[\mathbf{P}_m, \mathbf{R}]}{R^3}, \quad (5.23)$$

где  $\mathbf{P}_m = \sum \mathbf{p}_{mi}$  – суммарный магнитный момент системы токов.

Тогда для вектора магнитной индукции поля в точке, удаленной на большое расстояние от системы токов получаем

$$\mathbf{B} = \frac{\mu \cdot \mu_0}{4\pi} \text{rot}_{\mathbf{R}} \left\{ \frac{[\mathbf{P}_m, \mathbf{R}]}{R^3} \right\} = \frac{\mu \cdot \mu_0}{4\pi} \text{rot}_{\mathbf{R}} \left[ \mathbf{P}_m, \frac{\mathbf{R}}{R^3} \right], \quad (5.24)$$

где  $\text{rot}_{\mathbf{R}}$  означает, что дифференцирование здесь проводится по координатам точки наблюдения (точка  $\mathbf{C}$  на рис. 5.4), поэтому все  $\mathbf{r}_i$  а вместе с ними  $\mathbf{p}_{mi}$  и  $\mathbf{P}_m$ , при этом фиксированы.

По известной из векторного анализа формуле:

$$\text{rot}[\mathbf{ab}] = [\nabla[\mathbf{ab}]] = (\mathbf{b}\nabla)\mathbf{a} - (\mathbf{a}\nabla)\mathbf{b} + \mathbf{a}(\nabla\mathbf{b}) - \mathbf{b}(\nabla\mathbf{a})$$

запишем

$$\text{rot} \left[ \mathbf{P}_m \frac{\mathbf{R}}{R^3} \right] = \left( \frac{\mathbf{R}}{R^3} \nabla_{\mathbf{R}} \right) \mathbf{P}_m - (\mathbf{P}_m \nabla_{\mathbf{R}}) \frac{\mathbf{R}}{R^3} + \mathbf{P}_m \left( \nabla_{\mathbf{R}} \frac{\mathbf{R}}{R^3} \right) - \frac{\mathbf{R}}{R^3} (\nabla_{\mathbf{R}} \mathbf{P}_m).$$

Так как дифференцирование проводится по координатам точки поля, то:

$$\begin{aligned} \left( \frac{\mathbf{R}}{R^3} \nabla_{\mathbf{R}} \right) \mathbf{P}_m &= 0; & \frac{\mathbf{R}}{R^3} (\nabla_{\mathbf{R}} \mathbf{P}_m) &= 0; & \mathbf{P}_m \left( \nabla_{\mathbf{R}} \frac{\mathbf{R}}{R^3} \right) &= 0; \\ (\mathbf{P}_m \nabla_{\mathbf{R}}) \frac{\mathbf{R}}{R^3} &= \frac{3(\mathbf{P}_m \mathbf{R})\mathbf{R}}{R^5} - \frac{\mathbf{P}_m}{R^3}. \end{aligned} \quad (5.25)$$

Таким образом, подставляя (5.25) в (5.24) для вектора магнитной индукции поля в точке, удаленной на большое расстояние от системы токов окончательно получим:

$$\mathbf{B} = \frac{\mu\mu_0}{4\pi} \left\{ \frac{3(\mathbf{P}_m \mathbf{R})\mathbf{R}}{R^5} - \frac{\mathbf{P}_m}{R^3} \right\} \quad (5.26)$$

Соотношение (5.26) определяет индукцию магнитного поля через магнитный момент системы. Выражение с точностью до постоянного множителя имеет такой же вид, как и напряженность электрического поля электрического диполя:

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{3(\mathbf{P}\mathbf{R})\mathbf{R}}{R^5} - \frac{\mathbf{P}}{R^3} \right).$$

### § 5.3 Контур с током (магнитный диполь) во внешнем магнитном поле

Свойства магнитного момента тока полностью аналогичны свойствам электрического диполя. Это следует из сравнения выражения определяющего индукцию магнитного поля через магнитный момент системы и выражения напряженности электрического поля электрического диполя. Тогда механическую энергию витка с током, приобретенную им при его повороте в магнитном поле, можно записать по аналогии с выражением (4.30) для энергии электрического диполя во внешнем электрическом поле, т.е.:

$$W = -(\mathbf{P}_m \mathbf{B}) = -P_m B \cos \alpha, \quad (5.27)$$

где  $\alpha$  – угол между векторами  $\mathbf{P}_m$  и  $\mathbf{B}$ .

Сила  $\mathbf{F}$ , действующая на виток, на основе общих принципов механики может быть найдена как взятый с минусом градиент потенциальной энергии ( $\mathbf{F} = -\text{grad}W$ ), а момент силы как векторное произведение  $\mathbf{M} = [\mathbf{r}, \mathbf{F}]$ .

Рассмотрим магнитный диполь в однородном магнитном поле, для которого  $\mathbf{B} = \text{const}$ , т.е. вектор  $\mathbf{B}$  в любой точке пространства имеет одни и те же направление и модуль (рис. 5.5).

Поместим в произвольную точку поля  $C$  магнитный диполь так, чтобы магнитный момент  $\mathbf{P}_m$  составлял угол  $\alpha$  с направлением магнитных силовых линий, и найдём силу, действующую на диполь со стороны магнитного поля.

Выберем систему координат так, чтобы ось  $Oz$  совпадала по направлению с вектором  $\mathbf{B}$ , а радиус-вектор  $\mathbf{r}$  был коллинеарен с  $\mathbf{P}_m$ . В этом случае угол  $\alpha$ , входящий в выражение для потенциальной энергии (5.27), совпадает с углом  $\theta$  в сферических координатах. Соответственно, сила  $\mathbf{F}$ , действующая на магнитный момент  $\mathbf{P}_m$  может быть вычислена как градиент потенциальной энергии в сферических координатах:

$$\mathbf{F} = \text{grad}(P_m B \cos \theta) = \mathbf{e}_\theta P_m B \frac{1}{r} \frac{\partial \cos \theta}{\partial \theta} = -\mathbf{e}_\theta \frac{P_m B \sin \theta}{r}. \quad (5.28)$$

Так как, согласно (5.28),  $\mathbf{F}$  направлена в противоположную сторону вектору  $\mathbf{e}_\theta$ , то она стремится уменьшить угол между  $\mathbf{B}$  и  $\mathbf{P}_m$ .

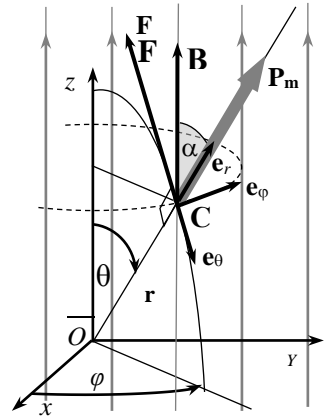


Рис.5.5

Произведение  $P_m B \sin \theta$  есть модуль момента этой силы:

$$\begin{aligned} \mathbf{M} = [\mathbf{r}, \mathbf{F}] &= -[\mathbf{r}, \mathbf{e}_\theta] \frac{P_m B \sin \theta}{r} = -[r \mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta] \frac{P_m B \sin \theta}{r} = \\ &= -\mathbf{e}_\varphi P_m B \sin \theta = [\mathbf{P}_m, \mathbf{B}] \end{aligned} \quad (5.29)$$

Из (5.29) следует, что в однородном магнитном поле в любой его точке на магнитный момент действует один и тот же момент силы  $\mathbf{M} = [\mathbf{P}_m, \mathbf{B}]$ , стремящийся развернуть его по направлению поля.

Рассмотрим теперь магнитный диполь в неоднородном магнитном поле, в котором  $\mathbf{B} = \mathbf{B}(\mathbf{r})$  и  $\alpha = \alpha(\mathbf{r})$ . В этом случае сила, действующая на магнитный момент, представляет собой сумму двух слагаемых:

$$\mathbf{F} = \text{grad}\{P_m B(\mathbf{r}) \cos \theta(\mathbf{r})\} = P_m B(\mathbf{r}) \text{grad} \cos \theta(\mathbf{r}) + P_m \cos \theta(\mathbf{r}) \text{grad} B(\mathbf{r}). \quad (5.30)$$

Первое слагаемое аналогично выражению для силы, действующей на магнитный момент в однородном магнитном поле и стремящейся развернуть его по направлению поля, что приводит существованию момента силы (5.29).

Второе слагаемое даёт силу, направленную в сторону возрастания индукции магнитного поля. Именно наличием этой силы объясняется притягивание железных предметов магнитом.

Сила  $\mathbf{F}$ , определяемая (5.30), целиком сводится ко второму слагаемому, если магнитный момент будет развернутым по направлению магнитного поля и угол  $\alpha$  окажется равным нулю:

$$\mathbf{F} = P_m \cdot \text{grad} B(\mathbf{r}) \quad (5.31)$$

Таким образом, сила, действующая на элементарный ток в заданном неоднородном магнитном поле, полностью определяется магнитным моментом этого тока. Она тем больше, чем значительнее неоднородность магнитного поля. В однородном магнитном поле эта сила равна нулю.

## § 5.4 Энергия магнитного поля постоянных токов

### 5.4.1 Энергия, выраженная через плотность тока и векторный потенциал

Ранее в §1.6 было показано, что полная энергии электромагнитного поля определяется как

$$W = \frac{1}{2} \int_V (\mathbf{DE} + \mathbf{HB}) dV.$$

Для стационарного магнитного поля можно записать

$$W_m = \frac{1}{2} \int_V (\mathbf{H}\mathbf{B}) dV = \int_V w_m dV \quad (5.32)$$

где  $w_m = \mathbf{H}\mathbf{B}/2$  – плотность энергии магнитного поля в среде.

Преобразуем выражение (5.32), подставив в него  $\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}$ , и используя соотношение  $\mathbf{H} \text{rot } \mathbf{A} = \text{div}[\mathbf{A}, \mathbf{H}] + \mathbf{A} \text{rot } \mathbf{H}$ .

Для постоянного тока  $\text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{j}$ , поэтому

$$W_m = \frac{1}{2} \int_V (\mathbf{H}, \mathbf{B}) dV = \frac{1}{2} \int_V (\mathbf{H}, \text{rot } \mathbf{A}) dV = \frac{1}{2} \int_V \text{div}[\mathbf{A}, \mathbf{H}] dV + \frac{1}{2} \int_V (\mathbf{A}, \mathbf{j}) dV. \quad (5.33)$$

С помощью теоремы Остроградского – Гаусса преобразуем первый интеграл в (5.33):

$$\int_V \text{div}[\mathbf{A}, \mathbf{H}] dV = \oint_S [\mathbf{A}, \mathbf{H}] dS.$$

Если все токи расположены в конечной области пространства, то на большом расстоянии от них, при  $R \rightarrow \infty$ :  $A \sim 1/R^2$  согласно (5.23) и  $H \sim 1/R^3$  согласно (5.26). Следовательно, на больших расстояниях подынтегральное выражение убывает  $\sim 1/R^5$ . Поскольку поверхность интегрирования растет  $S \sim R^2$ , то, интеграл при  $S \rightarrow \infty$  убывает  $\sim 1/R^3$ . Поэтому при удалении  $S$  на бесконечно большое расстояние (т.е. при  $R \rightarrow \infty$ ) интеграл  $\oint_S [\mathbf{A}, \mathbf{H}] dS \rightarrow 0$ .

Таким образом, на основании (5.33) энергия магнитного поля может быть записана с использованием плотности тока  $\mathbf{j}$  и векторного потенциала  $\mathbf{A}$ :

$$W_m = \frac{1}{2} \int_V (\mathbf{A}, \mathbf{j}) dV. \quad (5.34)$$

Выражение (5.34) имеет смысл *энергии взаимодействия магнитного поля с током*. В этом случае интегрирование ведется по объему области, занимаемой током.

Если в (5.34) вместо потенциала  $\mathbf{A}$  подставить его выражение через плотность тока  $\mathbf{j}'$ , создающего поле

$$\mathbf{A} = \frac{\mu\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \frac{\mathbf{j}' dV'}{R}, \quad (5.35)$$

то получим энергию магнитного поля, как *энергию взаимодействия элементов тока*:

$$W = \frac{\mu\mu_0}{8\pi} \iint_{VV'} \frac{(\mathbf{j}\mathbf{j}')}{R} dV dV' \quad (5.36)$$

где  $R$  – расстояние между элементами объема  $dV$  и  $dV'$ .

При переходе к системе линейных токов интеграл в выражении (5.34) сводится к сумме интегралов по объемам отдельных проводников, которые пронумерованы индексом  $i$ :

$$W = \frac{1}{2} \sum_i \int_{V_i} (\mathbf{A}\mathbf{j}) dV_i \quad (5.37)$$

Учитывая, что при переходе к линейным токам, можно записать:  $\mathbf{j}dV_i = jS_i dl_i = I_i dl_i$ , получим:

$$W = \frac{1}{2} \sum_i I_i \int_{L_i} (\mathbf{A}dl_i), \quad (5.38)$$

где  $I_i$  – полный ток, протекающий по  $i$ -му проводнику,  
 $L_i$  – длина  $i$ -го проводника.

### 5.4.2 Энергия магнитного поля постоянного тока, выраженная через поток магнитной индукции

В случае замкнутого проводника, воспользовавшись теоремой Стокса можно записать:

$$\oint_{L_i} (\mathbf{A}dl_i) = \int_{S_i} (\text{rot}\mathbf{A}d\mathbf{S}_i) = \int_{S_i} \mathbf{B}d\mathbf{S}_i = \Phi_i$$

где  $\Phi_i$  – поток магнитной индукции через поверхность  $S_i$ , натянутую на контур  $L_i$   $i$ -го проводника.

Это обстоятельство позволяет представить формулу энергии магнитного поля системы линейных токов (5.38) для случая замкнутых токов в виде:

$$W = \frac{1}{2} \sum_i^N I_i \Phi_i \quad (5.39)$$

В частности, при наличии одного проводника:  $W = \frac{I\Phi}{2}$ .

### § 5.5 Самоиндукция и взаимоиנדукция

Воспользуемся формулой для энергии взаимодействия элементов тока (5.36):

$$W = \frac{\mu\mu_0}{8\pi} \iint_{V, V'} \frac{(\mathbf{j}\mathbf{j}')}{R} dV dV',$$

и обобщим ее на энергию взаимодействия системы проводников:

$$W = \frac{\mu\mu_0}{8\pi} \sum_{i,k} \iint_{V_i, V_k} \frac{\mathbf{j}_i \mathbf{j}_k}{R_{ik}} dV_i dV_k, \quad (5.40)$$

где  $\mathbf{j}_i, \mathbf{j}_k$  – плотности токов, текущих по  $i$ -му и  $k$ -му проводникам,

$R_{ik}$  – расстояние между элементами объема  $dV_i$  и  $dV_k$  соответствующих проводников.

Для линейных токов (5.38) примет вид:

$$W = \frac{\mu\mu_0}{8\pi} \sum_{i,k} I_k I_i \int_{L_i} \int_{L_k} \frac{(d\mathbf{l}_i d\mathbf{l}_k)}{R_{ik}} = \frac{1}{2} \sum_{i,k} L_{ik} I_k I_i, \quad (5.41)$$

где для линейных проводников  $L_{ik} = \frac{\mu\mu_0}{4\pi} \int_{L_i} \int_{L_k} \frac{d\mathbf{l}_i d\mathbf{l}_k}{R_{ik}}$

В общем случае:

$$L_{ik} = \frac{\mu\mu_0}{4\pi} \frac{1}{I_i I_k} \int_{V_i} \int_{V_k} \frac{\mathbf{j}_i \mathbf{j}_k}{R_{ik}} dV_i dV_k \quad (5.42)$$

$L_{ik}$  – коэффициенты, которые зависят только от формы проводников и их взаимного расположения, но не зависят от силы тока (при изменении силы тока числитель и знаменатель в (5.42) изменяются в одинаковое число раз). Коэффициенты  $L_{ik}$  для заданной системы постоянны.

Коэффициент  $L_{ik}$  при  $i \neq k$  называется *взаимоиндукцией*  $i$ -го и  $k$ -го проводников, а при  $i = k$  – *самоиндукцией* (или *индуктивностью*) соответствующего проводника.

Например: для системы двух линейных проводников энергию можно записать как:

$$W = \frac{L_1 I_1^2}{2} + \frac{L_2 I_2^2}{2} + L_{12} I_1 I_2,$$

для одного проводника

$$W = \frac{LI^2}{2}.$$

Сравнивая это выражение с формулой для вычисления энергии магнитного поля через магнитный поток  $W = \frac{I\Phi}{2}$ , получим:

$$\Phi = LI \quad \text{или} \quad L = \Phi/I.$$

Таким образом, зная поток магнитной индукции, который создается известным током, протекающим по проводнику, можно вычислить индуктивность проводника.

## ГЛАВА 6. КВАЗИСТАЦИОНАРНОЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ ПОЛЕ

### § 6.1 Условия квазистационарности. Уравнения Максвелла для квазистационарных электромагнитных полей

В третьей главе (§3.3) уже отмечалось, что квазистационарным называется электромагнитное поле, которое изменяется со временем достаточно медленно, так, что значения характеристик полей в данной точке будут находиться в одной фазе с их значениями в любой другой точке внутри системы. Это приводит к тому, что в пределах рассматриваемой области можно пренебречь эффектами запаздывания, обусловленными конечной скоростью распространения электромагнитных процессов:

$$T \gg \Delta t = \frac{l}{v}, \quad (6.1)$$

где  $T$  – период движения в системе, т.е. время, характеризующее процессы, обусловленные изменяющимся электромагнитным полем, в частности, время релаксации или период;

$\Delta t$  – время запаздывания, затрачиваемое на распространение электромагнитного возмущения со скоростью  $v$  на расстояние  $l$  (где  $l$  – размер системы).

Как правило, неравенство (6.1) выполняется для электрических цепей, линейные размеры которых малы по сравнению с длиной электромагнитных волн при заданных частотах:

$$\lambda \gg l. \quad (6.1a)$$

Требование (6.1 и 6.1a), будем называть *первым условием квазистационарности*.

При изучении электромагнитных явлений в веществе для квазистационарных полей, помимо требования (6.1 и 6.1a), должно выполняться *второе условие квазистационарности*

$$j \gg \frac{\partial D}{\partial t}, \quad (6.2)$$

т.е. при выполнении неравенства (6.2) изменение поля происходит настолько медленно, что в области пространства, занятого проводящей средой можно пренебречь током смещения по сравнению с током проводимости.

Если электромагнитное поле изменяется с частотой  $\omega$ , т.е.  $E = E_0 e^{i\omega t}$ , то условие (6.2) можно переписать в виде

$$\omega \ll \gamma / \epsilon \epsilon_0 \quad \text{или} \quad T \gg \epsilon \epsilon_0 / \gamma. \quad (6.3)$$

В квазистационарном случае, система уравнений Максвелла примет вид:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} & \operatorname{rot} \mathbf{H} &= \mathbf{j}, \\ \operatorname{div} \mathbf{D} &= \rho, & \operatorname{div} \mathbf{B} &= 0. \end{aligned} \quad (6.4)$$

Отличие уравнений Максвелла для квазистационарного поля от поля стационарных токов сводится к учету явлений электромагнитной индукции. При расчётах цепей с квазистационарными токами это приводит к включению в число сторонних ЭДС электродвижущей силы индукции.

К квазистационарным электромагнитным полям относится большинство полей, рассматриваемых в электротехнике, а также многие поля, встречающиеся в радиотехнике.

## § 6.2 Правила Кирхгофа для цепей переменного тока

Поскольку квазистационарные электромагнитные поля, порождаемые переменными токами, определяются значением токов в данный момент времени (*мгновенных значений токов*  $I(t)$ ), то при расчётах таких цепей, оказывается возможным использовать правила Кирхгофа для стационарных токов.

Первое правило остается таким же, как и для постоянных токов, так как закон сохранения заряда справедлив для любых ситуаций. Согласно первому правилу Кирхгофа *алгебраическая сумма мгновенных значений токов, сходящихся в любом узле цепи равна нулю*:

$$\boxed{\sum_{i=1}^n I_i(t) = 0}. \quad (6.5)$$

Второе правило, однако, необходимо модифицировать. Для замкнутого контура сколь угодно сложной электрической цепи квазистационарного тока по-прежнему можно составить уравнение по второму правилу, но уже для мгновенных значений токов, напряжений и эдс, в том числе и эдс индукции  $\varepsilon_{i_{\text{инд}}}(t) = -\frac{d\Phi}{dt}$ . *Сумма мгновенных значений падений напряжения в замкнутом контуре равна сумме мгновенных значений эдс, действующих в этом контуре*.

$$\boxed{\sum_i U_i(t) = \sum_i \varepsilon_i(t) + \sum_i \varepsilon_{i_{\text{инд}}}(t)}. \quad (6.6)$$

В простейшем варианте для замкнутого линейного контура (рис. 6.1), где  $L$  и  $C$  – соответственно индуктивность катушки и ёмкость



конденсатора, включённых последовательно с резистором сопротивлением  $R$  и источником переменной эдс  $\varepsilon(t)$ , действующей в контуре, по второму правилу Кирхгофа (6.6) можно записать:

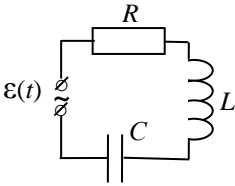


Рис. 6.1

$$RI(t) + U_C(t) = \varepsilon(t) + \varepsilon_{инд}(t). \quad (6.7)$$

В левой части равенства стоит сумма мгновенных значений падения напряжения на резисторе  $U_R(t) = RI(t)$  и разности потенциалов на обкладках конденсатора  $U_C(t)$ , в правой – сумма эдс источника  $\varepsilon(t)$  и эдс самоиндукции

$$\varepsilon_{инд}(t) = -L \frac{dI(t)}{dt}.$$

### § 6.3 Квазистационарные процессы в электрических цепях с постоянной эдс

Даже в простейшей электрической цепи с постоянной эдс возникает необходимость обсуждения квазистационарных процессов. Речь идёт о процессах *установления стационарного состояния при включении источника эдс*.

#### 6.3.1 Цепь с постоянной эдс без индуктивности

Рассмотрим схему на рис. 6.2, представив, что точки  $a$  и  $b$  являются контактами ключа.

При незамкнутом ключе ток в цепи равен нулю, и из закона Ома для неоднородного участка цепи следует:  $U_C + \varphi_a - \varphi_b = \varepsilon$ . Если конденсатор не заряжен  $U_C=0$  и  $\varphi_a - \varphi_b = \varepsilon$ .

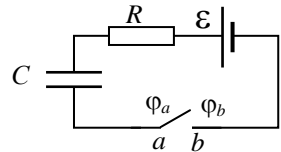


Рис. 6.2

Если теперь замкнуть ключ, то  $\varphi_a - \varphi_b = 0$ , и для стационарного состояния роль разрыва в цепи играет конденсатор, напряжении на котором  $U_C = \varepsilon$ .

При замыкании ключа происходит зарядка конденсатора. Разность потенциалов на его обкладках увеличивается от нуля до  $\varepsilon$ , а заряд от нуля до  $q = \varepsilon \cdot C$ .

Предположим, что выполняется условие квазистационарности (6.1), приняв за характерное время процесса  $T$  время зарядки конденсатора. По второму правилу Кирхгофа после замыкания ключа:

$$RI(t) + U_C(t) = \varepsilon.$$

В этом уравнении  $I(t) = dq(t)/dt$  и  $U_C(t) = q(t)/C$ , что позволяет записать его в виде:

$$R \frac{dq(t)}{dt} + \frac{1}{C} q(t) = \varepsilon. \quad (6.8)$$

Решение данного неоднородного дифференциального уравнения с учётом начального условия  $q(t)|_{t=0}=0$  позволяет найти зависимость от времени заряда и тока в цепи:

$$q(t) = \varepsilon C (1 - e^{-\frac{t}{RC}}), \quad (6.9)$$

$$I(t) = \frac{\varepsilon}{R} e^{-\frac{t}{RC}}, \quad (6.10)$$

$$U_C(t) = \varepsilon \left( 1 - e^{-\frac{t}{RC}} \right), \quad (6.11)$$

где  $RC = \tau$  – **время релаксации**, т.е. характерное время процесса перехода системы в стационарное состояние.

Приняв в (6.1)  $T \approx \tau$  – характерное время процесса, легко убедиться, что условие квазистационарности выполняется в широком диапазоне значений  $R$  и  $C$ .

### 6.3.2 Система токов без индуктивностей с постоянными эдс

При наличии нескольких таких цепей необходимо учесть их взаимное влияние, обусловленное тем, что потенциалы проводников зависят от зарядов других проводников (см. (4.45) и (4.46)).

$$\varphi_i = \sum_{k=1}^N S_{ik} q_k \quad (i = 1, 2, \dots, N). \quad q_k = \sum_{i=1}^N C_{ki} \varphi_i, \quad (k = 1, 2, \dots, N).$$

где коэффициенты  $C_{ki}$  являются элементами матрицы обратной матрице коэффициентов  $S_{ik}$ :  $C_{ki} = \{S^{-1}\}_{ki}$ .

Для статического и стационарного состояний ничего принципиально нового при этом не возникает, но для процессов перехода в стационарное состояние учёт ёмкостной связи игнорировать нельзя. По второму правилу Кирхгофа к падению напряжения на активных сопротивлениях следует добавить разности потенциалов на обкладках конденсаторов. В выражения для этих разностей потенциалов должны будут войти различные ёмкостные коэффициенты, учитывающие взаимную электростатическую индукцию заряженных проводников. Однако, энергия электрического поля вне конденсаторов много меньше энергии поля внутри конденсаторов, и ею, как правило, пренебрегают, что соответствует исключению из выражения для энергии (4.49) слагаемых с  $i \neq k$ . Следствием этого является сохранение в уравнениях, составленных по второму правилу

Кирхгофа для любого контура, системы только тех слагаемых, для которых  $i=k$ , то есть обусловленных ёмкостями конденсаторов, входящих только в рассматриваемый контур. Таким образом, электрические цепи системы оказываются несвязанными друг с другом, а процессы в них являются независимыми от процессов в других контурах.

### 6.3.3 Индуктивность в контуре с постоянной эдс

Рассмотрим влияние индуктивности на квазистационарные процессы в простейшей цепи с постоянной эдс (рис. 6.3).

Согласно второму правилу Кирхгофа (6.7) для цепи после замыкания ключа:

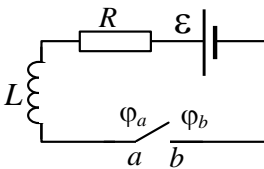


Рис. 6.3

$$L \frac{dI}{dt} + RI = \varepsilon. \quad (6.12)$$

Его решение при начальном условии  $I(t)|_{t=0}=0$  описывает процесс перехода в стационарное состояние

$$I(t) = \frac{\varepsilon}{R} \left( 1 - e^{-\frac{R}{L}t} \right). \quad (6.13)$$

При  $t \rightarrow +\infty$  ток  $I(t)$  увеличивается от нуля до постоянного значения в стационарном состоянии  $I = \varepsilon/R$ . Время перехода в стационарное состояние  $\tau = L/R$  не зависит от значения эдс и тем больше, чем больше коэффициент самоиндукции (индуктивность контура)  $L$ .

### § 6.4 Колебательный контур. Собственные колебания

Колебательный контур – это электрическая цепь, состоящая из последовательно соединённых резистора сопротивлением  $R$ , катушки индуктивностью  $L$  и конденсатора ёмкостью  $C$  (рис. 6.4).

Когда ключ  $K$  находится в положении 1 конденсатор заряжается от источника с эдс  $\varepsilon$  до значения заряда на обкладках  $q_0$ . Если теперь переключить его в положение 2, то в цепи возникнут колебания заряда  $q$ , тока  $I$  и напряжения на конденсаторе  $U_C$  в результате процесса перезарядки конденсатора с некоторым периодом  $T$ .

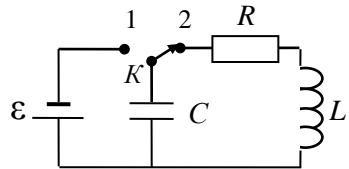


Рис. 6.4

Для получения закона изменения заряда в контуре воспользуемся вторым правилом Кирхгофа (6.7) для схемы на рис.6.4 (ключ замкнут в положении 2):

$$RI(t) + L \frac{dI(t)}{dt} + U_c(t) = 0.$$

Учитывая, что  $I = \frac{dq(t)}{dt}$  и  $U_C(t) = \frac{q(t)}{C}$ , получим дифференциальное уравнение

$$L \frac{d^2q(t)}{dt^2} + R \frac{dq(t)}{dt} + \frac{q(t)}{C} = 0. \quad (6.14)$$

#### 6.4.1 Колебательный контур с $R=0$

Если в уравнение (6.14) сопротивление  $R$  положить равным нулю, то получим дифференциальное уравнение

$$L \frac{d^2q(t)}{dt^2} + \frac{q(t)}{C} = 0,$$

которое можно привести к виду

$$\frac{d^2q(t)}{dt^2} + \omega_0^2 q(t) = 0, \quad (6.15)$$

где  $\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$ .

Общее решение уравнения (6.15) хорошо известно

$$q(t) = B_1 e^{i\omega_0 t} + B_2 e^{-i\omega_0 t}.$$

Из начальных условий  $q(t)|_{t=0} = q_0 = \text{const}$ ,  $I(t)|_{t=0} = 0$  получаем уравнения  $B_1 + B_2 = q_0$  и  $B_1 - B_2 = 0$ , из которых следует  $B_1 = B_2 = q_0/2$ , с учетом чего можно записать

$$q(t) = \frac{q_0}{2} (e^{i\omega_0 t} + e^{-i\omega_0 t}) = q_0 \cos \omega_0 t.$$

Таким образом, заряд на обкладках конденсатора изменяется по гармоническому закону, т.е. в контуре с  $R=0$  будут существовать **незатухающие гармонические колебания** с частотой

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}},$$

которую называют **собственной частотой** колебательного контура.

Колебания, происходящие только за счёт внутренних энергетических ресурсов системы, называются **собственными** или **свободными**. В рассматриваемом контуре такие колебания происходят за счет энергии заряженного конденсатора.

### 6.4.2 Колебательный контур с $R \neq 0$

Если сопротивлением резистора  $R$  пренебречь нельзя, то дифференциальное уравнение (6.14) можно привести к виду

$$\frac{d^2 q(t)}{dt^2} + 2\delta \frac{dq(t)}{dt} + \omega_0^2 q(t) = 0, \quad (6.16)$$

где  $\delta = \frac{R}{2L}$  — коэффициент затухания.

Следуя общим правилам решения линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами, полагаем  $q(t) = e^{rt}$  и находим для  $r$  характеристическое уравнение

$$r^2 + 2\delta r + \omega_0^2 = 0, \quad (6.17)$$

корни которого  $r_{1,2} = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}$ .

Общее решение уравнения (6.16) будет иметь вид

$$q(t) = B_1 e^{r_1 t} + B_2 e^{r_2 t} = B_1 e^{-(\delta - \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2})t} + B_2 e^{-(\delta + \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2})t}. \quad (6.18)$$

Для удобства введём новое обозначение  $\omega = \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}$ . Связь величин

$\delta$ ,  $\omega_0$  и  $\omega$  формально можно представить в виде сторон прямоугольного треугольника (рис. 6.5), гипотенуза которого  $\omega_0$  остается неизменной (при  $L = \text{const}$  и  $C = \text{const}$ ), а вершина прямого угла перемещается по дуге при изменении  $R$  (и соответственно  $\delta$ ).

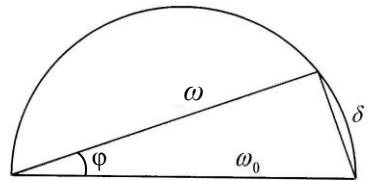


Рис. 6.5

Обсудим процессы, происходящие в колебательном контуре при различных вариантах значений её параметров: а)  $\omega_0^2 > \delta^2$ ; б)  $\omega_0^2 < \delta^2$ ; в)  $\omega_0^2 = \delta^2$ .

а) Если  $\omega_0^2 > \delta^2$ , то решением уравнения (6.17) являются два комплексно сопряженных значения  $r$ , и (6.18) будет иметь вид

$$q(t) = B_1 e^{-(\delta - i\omega)t} + B_2 e^{-(\delta + i\omega)t}. \quad (6.19)$$

Из начальных условий  $q(t)|_{t=0} = q_0 = \text{const}$ ,  $I(t)|_{t=0} = 0$  определяем  $B_1$  и  $B_2$ :

$$B_1 = \frac{q_0(\delta + i\omega)}{2i\omega} \quad \text{и} \quad B_2 = \frac{q_0(-\delta + i\omega)}{2i\omega}.$$

Подставим найденные  $B_1$  и  $B_2$  в (6.19) и найдем закон изменения заряда

$$\begin{aligned}
 q(t) &= \frac{q_0(\delta + i\omega)}{2i\omega} e^{-(\delta - i\omega)t} + \frac{q_0(-\delta + i\omega)}{2i\omega} e^{-(\delta + i\omega)t} = \\
 &= q_0 e^{-\delta t} \left[ \frac{(e^{i\omega t} + e^{-i\omega t})}{2} + \frac{\delta}{\omega} \frac{(e^{i\omega t} - e^{-i\omega t})}{2i} \right] = q_0 e^{-\delta t} [\cos \omega t + \operatorname{tg} \varphi \cdot \sin \omega t] = \\
 &= \frac{q_0 e^{-\delta t}}{\cos \varphi} [\cos \varphi \cdot \cos \omega t + \sin \varphi \cdot \sin \omega t] = \frac{q_0 \omega_0 e^{-\delta t}}{\omega} \cos(\omega t - \varphi).
 \end{aligned}$$

Здесь введены  $\cos \varphi = (\operatorname{tg}^2 \varphi + 1)^{-1/2} = \omega / \omega_0$  и  $\operatorname{tg} \varphi = \delta / \omega$ .

Окончательно закон изменения заряда имеет вид:

$$q(t) = \frac{q_0 \omega_0}{\omega} e^{-\delta t} \cos(\omega t - \varphi).$$

Полученное выражение описывает *затухающие колебания*. Их можно рассматривать как гармонические колебания с экспоненциально убывающей амплитудой (рис. 6.6). Скорость убывания амплитуды определяется показателем  $\delta$ , а частота колебаний  $\omega$  меньше частоты свободных колебаний  $\omega_0$ .

Кроме коэффициента затухания  $\delta$  для характеристики затухающих колебаний пользуются логарифмическим декрементом затухания, который равен натуральному логарифму отношения амплитуд колебаний, взятых через период:

$$\Theta = \ln \frac{q_0 e^{-\delta t}}{q_0 e^{-\delta(t+T)}} = \delta T.$$

б) Если  $\omega_0^2 < \delta^2$ ; тогда оба значе-

ния  $r$  в (6.17) действительные и отрицательные, и уравнение (6.18) примет вид

$$q(t) = B_1 e^{-(\delta - \omega)t} + B_2 e^{-(\delta + \omega)t}.$$

Определяя  $B_1$  и  $B_2$  из начальных условий  $q(t)|_{t=0} = q_0$ ,  $I(t)|_{t=0} = 0$ , легко показать, что заряд в контуре будет изменяться по закону

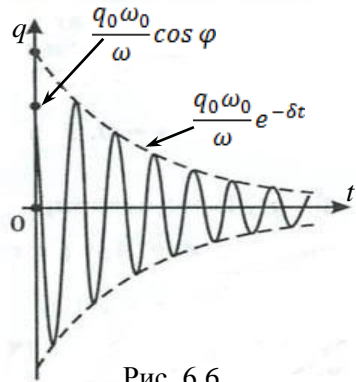


Рис. 6.6

$$q(t) = \frac{q_0}{2\omega} \left( (\delta + \omega)e^{-(\delta - \omega)t} + (-\delta + \omega)e^{-(\delta + \omega)t} \right).$$

Очевидно, что в этом случае процесс в колебательном контуре состоит в убывании заряда, т.е. в асимптотическом (при  $t \rightarrow \infty$ ) приближении заряда к нулевому значению ( $q=0$ ). Этот тип колебания называют *апериодическим затуханием*.

Если затухание столь значительно, что  $\delta^2 \gg \omega_0^2$ , то в этом случае падение напряжения на сопротивлении  $IR$  много больше эдс индукции и уравнение (6.14) примет вид

$$\frac{dq}{dt} + \frac{1}{CR}q = 0 \quad \text{или} \quad \frac{dq}{q} = -\frac{1}{CR}dt \quad (6.20)$$

Решением (6.20) будет

$$q(t) = q_0 e^{-\frac{t}{\tau}},$$

где  $\tau = RC$  – называется *временем релаксации*, которое показывает за какое время заряд на конденсаторе уменьшится в  $e$  раз.

в) При  $\delta^2 = \omega_0^2$  происходит переход от периодического процесса к апериодическому. Этот режим называется критическим и соответствующее этому режиму *критическое сопротивление*  $R_{кр}$  можно найти из условия:

$$\frac{R_{кр}^2}{4L^2} = \frac{1}{LC} \quad \Rightarrow \quad R_{кр} = 2\sqrt{\frac{L}{C}}.$$

## § 6.5 Квазистационарные процессы в цепях переменного тока

В широком смысле *переменный ток* – любой ток, изменяющийся со временем. Однако чаще данный термин применяют к квазистационарным токам, изменяющимся со временем по гармоническому закону.

*Квазистационарным* называют такой ток, для которого время установления одинакового значения по всей цепи значительно меньше периода колебаний, т.е. выполняются первое условие квазистационарности (6.1).

### 6.5.1 Векторная интерпретация и комплексное представление периодически изменяющихся электрических величин

Гармонические колебания оказалось очень удобно представлять с помощью *вращающихся векторов* (рис. 6.7), т.е. колебанию некоторой величины  $A$  с угловой частотой  $\omega$  в момент времени  $t$  сопоставляется вектор с модулем равным амплитуде колебания  $A$ , образующий с осью

Ох угол  $\psi = \omega t + \psi_0$ , равный его фазе  $\psi$  ( $\psi_0$  – начальная фаза в момент времени  $t=0$ ).

С течением времени  $t$  этот вектор равномерно вращается с угловой скоростью  $\omega$  против часовой стрелки, а проекции его конца на координатные оси  $Ox$  и  $Oy$  совершают гармонические колебания:  $x = A \cos(\omega t + \psi_0)$  и  $y = A \sin(\omega t + \psi_0)$ .

Синусоидальные эдс, напряжения и токи, имеющие постоянную циклическую частоту  $\omega$  также принято изображать векторами, составляющими с осью  $Ox$  углы равные их фазам ( $\psi = \omega t + \psi_0$ ), а модули векторов определяются амплитудами соответствующих величин. Так как фазы этих величин меняются с частотой  $\omega$ , то соответствующие векторы вращаются с угловой скоростью  $\omega$  против часовой стрелки.

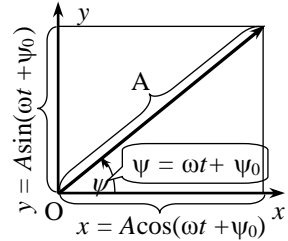


Рис. 6.7

Например, эдс, действующая в цепи переменного тока и изменяющаяся по закону  $\varepsilon(t) = \varepsilon_0 \cos(\omega t + \psi_0)$  может быть представлена вектором  $\varepsilon$  с модулем  $\varepsilon_0$  составляющим с осью  $Ox$  угол  $\psi = \omega t + \psi_0$ . Проекция этого вектора на ось абсцисс дает **мгновенное значение эдс**  $\varepsilon(t) = \varepsilon_0 \cos(\omega t + \psi_0)$ . Векторное представление гармонически изменяющейся величины дает возможность представить такой вектор на комплексной плоскости (рис. 6.8) и сопоставить ему комплексное число

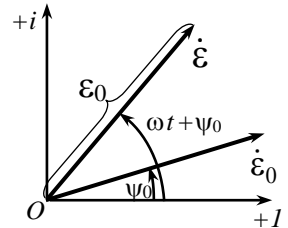


Рис. 6.8

$$\dot{\varepsilon} = \varepsilon_0 e^{i(\omega t + \psi_0)} = \dot{\varepsilon}_0 e^{i\omega t},$$

где  $\dot{\varepsilon}_0 = \varepsilon_0 e^{i\psi_0}$  – **комплексная амплитуда**.

Действительная часть комплексной эдс, есть закон изменения этой величины с течением времени  $\varepsilon(t) = \varepsilon_0 \cos(\omega t + \psi_0)$ , определяющий мгновенное значение эдс.

Совокупность векторов токов и напряжений цепи называется **векторной диаграммой** этой цепи. Она позволяет заменить алгебраическое сложение или вычитание синусоидальных токов (или напряжений) графическим сложением векторов, что облегчает решение задач на расчет простых цепей синусоидального тока.

Комплексное представление гармонически изменяющихся переменных токов, напряжений и эдс позволяет решать задачи на расчет сложных разветвленных цепей переменного тока, где построение векторных диа-



грамм является трудоемкой задачей. Также метод комплексных амплитуд широко применяется при анализе процессов распространения электромагнитных волн в различных средах.

### 6.5.2 Вынужденные колебания. Закон Ома для цепи переменного тока

Квазистационарный ток можно рассматривать как **вынужденные электромагнитные колебания** в колебательном контуре.

Рассмотрим электрическую цепь (рис. 6.9) содержащую конденсатор ёмкостью  $C$ , резистор сопротивлением  $R$  и катушку индуктивностью  $L$ , к которой подключена сторонняя эдс, изменяющаяся периодически по закону  $\varepsilon(t) = \varepsilon_0 \cos(\omega t + \psi_0)$ .

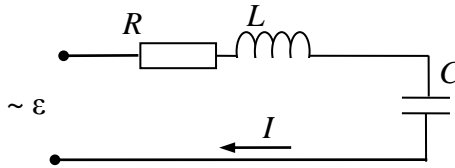


Рис. 6.9

Согласно второму правилу Кирхгофа (6.6) для такого контура можно записать

$$L \frac{dI(t)}{dt} + RI(t) + \frac{1}{C_k} \int I(t) dt = \varepsilon(t), \quad (6.21)$$

где  $L \frac{dI(t)}{dt} = -\varepsilon_{инд}(t) = U_L(t)$  – напряжение на индуктивности;

$\frac{1}{C} \int I(t) dt = U_C(t)$  – напряжение на ёмкости;

$RI(t) = U_R(t)$  – напряжение на резисторе.

Так как эдс в цепи изменяется по гармоническому закону, то и ток также изменяется периодически с той же частотой  $\omega$ , тогда в уравнении (6.21) ток и эдс можно представить в комплексной форме  $\dot{\varepsilon} = \dot{\varepsilon}_0 e^{i\omega t}$ ,  $\dot{I} = \dot{I}_0 e^{i\omega t}$ . Подставляя эти выражения в (6.21), получаем

$$\left( R + i\omega L + \frac{1}{i\omega C} \right) \dot{I}_0 = \dot{\varepsilon}_0, \quad (6.22)$$

где  $\dot{\varepsilon}_0 = \varepsilon_0 e^{i\psi_{0\varepsilon}}$  и  $\dot{I}_0 = I_0 e^{i\psi_{0I}}$  – комплексные амплитуды эдс и тока;

$\psi_{0\varepsilon}$  и  $\psi_{0I}$  – начальные фазы эдс и тока соответственно.

Полученное выражение (6.22) можно переписать в виде

$$\dot{I}_0 \underline{Z} = \dot{\epsilon}_0, \quad \text{или} \quad \boxed{\dot{I}_0 = \frac{\dot{\epsilon}_0}{\underline{Z}}}. \quad (6.23)$$

Величина  $\underline{Z}$  в (6.23) называется **импедансом** (или **комплексным сопротивлением**) участка цепи (контура) и согласно (6.22) определяется как

$$\boxed{\underline{Z} = R + i \left( \omega L - \frac{1}{\omega C} \right)}, \quad (6.24)$$

а также  $\underline{Z}$  может быть записано в виде

$$\underline{Z} = Z e^{i\varphi},$$

где  $Z = \sqrt{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2}$  – модуль импеданса;

$\varphi = \arctg \frac{(\omega L - 1/\omega C)}{R}$  – аргумент импеданса, определяющий сдвиг

фаз между эдс и током в контуре ( $\varphi = \psi_{0\epsilon} - \psi_{0I}$ ).

Действительная часть импеданса – **активное сопротивление**  $R$ , мнимая – **реактивное сопротивление**  $X = X_L - X_C = \omega L - 1/\omega C$ .

Уравнение (6.23) представляет собой **законом Ома для замкнутой цепи переменного тока** с последовательным соединением резистивного ( $R$ ), индуктивного ( $L$ ) и ёмкостного ( $C$ ) элементов (рис. 6.7).

На основании приведенных выше рассуждений о выполнении правил Кирхгофа для мгновенных значений переменных напряжений, эдс и токов можно записать, что для участка цепи переменного тока, не содержащего эдс, справедливо  $\dot{I}_0 e^{i\omega t} \underline{Z} = \dot{U}_0 e^{i\omega t}$ , таким образом, **закон Ома для однородного участка цепи переменного тока**, можно записать в виде

$$\boxed{\dot{I}_0 = \frac{\dot{U}_0}{\underline{Z}}}. \quad (6.25)$$

### 6.5.3 Резонанс в цепи переменного тока

Если в рассмотренной выше цепи переменного тока (рис. 6.9), менять частоту  $\omega$  сторонней эдс, оставляя её амплитуду  $\epsilon_0$  неизменной, то при  $\omega=0$ , амплитуда тока  $I_0 = 0$ . Это легко объяснить на основании закона Ома (6.23): модуль импеданса  $Z$  согласно (6.24), становится бесконечно большим для постоянного тока, так как при этом  $X_C = \frac{1}{\omega C} \rightarrow \infty$ .

Ток будет стремиться к нулю и в случае неограниченного роста частоты колебаний, так как при  $\omega \rightarrow \infty$ ,  $X_L = \omega L \rightarrow \infty$  и амплитуда тока  $I_0 \rightarrow 0$ .

В промежутке между этими предельными значениями частоты, амплитуда тока  $I_0$  проходит через максимум (рис. 6.10). Очевидно, это достигается при минимальном значении  $Z$ , когда реактивное сопротивление контура  $X=X_L-X_C=0$ :

$$\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) = 0. \tag{6.26}$$

Решая (6.26) относительно  $\omega$ , определяем, что максимум амплитуды тока наступает при частоте, равной частоте собственных незатухающих колебаний контура:

$$\omega_0^2 = \frac{1}{LC}. \tag{6.27}$$

При этой частоте  $\omega_0$ , называемой **резонансной**, контур выступает как чисто активное сопротивление, т.е.  $Z=R$  и амплитуда тока будет определяться только величиной активного сопротивления:

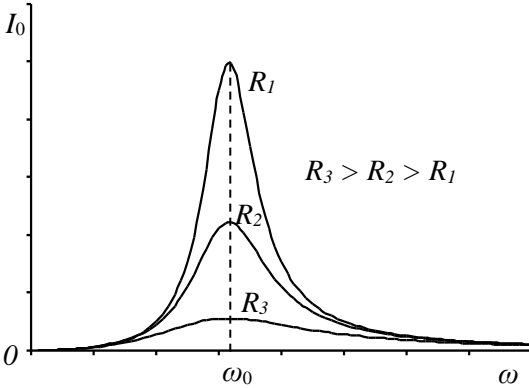


Рис. 6.10

$$I_{0max} = \frac{\mathcal{E}_o}{R}. \tag{6.28}$$

Приведенные на рис. 6.10. частотные зависимости амплитуды силы тока  $I_0(\omega)$  для разных  $R$  называются **резонансными кривыми**.

Анализ частотной зависимости фазового сдвига (аргумента импеданса)

$$\varphi = \arctg \frac{(\omega L - 1/\omega C)}{R}$$

приводит к выводу, который графически представлен на рис. 6.11. При резонансной частоте равной резонансной  $\omega=\omega_0$  разность фаз между током и эдс в контуре равна нулю ( $\varphi = 0$ ).

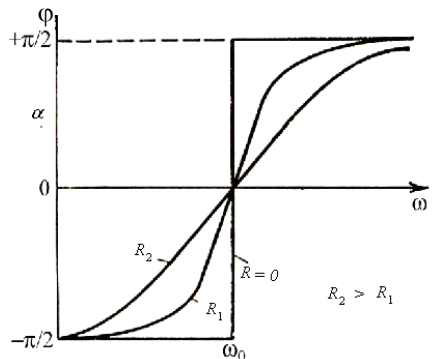


Рис.6.11

Этот важный частный случай вынужденных колебаний называется **резонансом напряжений**. Именно резонанс напряжений используется в радиотехнике при настройке приемников на сигнал станции определенной частоты.

### § 6.6 Система проводников с учетом самоиндукции и взаимои- ндукции

Явление электромагнитной индукции обуславливает взаимное влияние токов, протекающих по различным проводникам, и взаимное влияние различных элементов тока, протекающего по одному и тому же проводнику. Вследствие этого ток, протекающий по некоторому участку цепи, нельзя рассматривать изолированно от токов, протекающих по другим участкам цепи и по другим проводникам.

Рассмотрим систему из  $N$  линейных токов. Воспользуемся законом Ома в дифференциальной форме

$$\mathbf{j} = \gamma(\mathbf{E} + \mathbf{E}^{cmop}), \quad (6.29)$$

применив его к  $i$ -му проводнику.

Разделим обе части уравнения (6.29) на  $\gamma$ , и определим циркуляцию по замкнутому контуру  $i$ -го проводника:

$$\oint_{L_i} \frac{\mathbf{j}_i d\mathbf{l}}{\gamma} = \oint_{L_i} \mathbf{E}_i d\mathbf{l} + \oint_{L_i} \mathbf{E}_i^{cmop} d\mathbf{l}. \quad (6.30)$$

Первый интеграл будет равен:

$$\oint_{L_i} \frac{\mathbf{j}_i d\mathbf{l}}{\gamma} = \oint_{L_i} \frac{\mathbf{j}_i S d\mathbf{l}}{\gamma S} = I_i \oint_{L_i} dR = I_i R_i, \quad (6.31)$$

где  $S$  – площадь поперечного сечения проводника;

$R_i$  – полное сопротивление замкнутого контура;

$I_i$  – ток, текущий в этом проводнике.

Два других интеграла представляют собой эдс, в том числе эдс индукции. С учетом этого (6.30) можно записать в виде

$$I_i R_i = \varepsilon_i^{cmop} - \frac{\partial \Phi_i}{\partial t}, \quad (6.32)$$

где  $\Phi_i$  – магнитный поток в  $i$  – ом контуре, созданный всеми токами системы:  $\Phi_i = \sum_k L_{ki} I_k$ , ( $k=1,2,\dots,N$ ).

Окончательно получаем

$$I_i R_i = \varepsilon_i^{cmop} - \sum_k L_{ki} \frac{\partial I_k}{\partial t}, \quad k=1,2,\dots,N. \quad (6.33)$$

При выводе соотношения (6.33) было сделано предположение, что проводники неподвижны. Закон электромагнитной индукции Фарадея констатирует возникновение ЭДС индукции в проводнике при изменении потока магнитной индукции, как за счёт изменения индукции магнитного поля, так и в результате деформации или перемещения контура проводника:

$$\mathcal{E}_i = -\frac{d\Phi}{dt} = -\left(\frac{\partial\Phi}{\partial t}\right)_{L=\text{const}} - \left(\frac{\partial\Phi}{\partial t}\right)_{\mathbf{B}=\text{const}}$$

Поэтому *в общем случае закон Ома для системы квазистационарных токов (без ёмкостей)* примет вид:

$$I_i R_i = \mathcal{E}_i^{\text{сноп}} - \sum_k L_{ki} \frac{dI_k}{dt}; \quad k=1,2,\dots,N. \quad (6.34)$$

Здесь коэффициенты  $L_{ki}$  называемые *коэффициентами взаимной индукции* (или *взаимной индуктивностью*) считаются постоянными величинами, а частная производная заменена на полную, так как в этих уравнениях время – единственная переменная, от которой явно зависит сила тока  $I_i$ . Таким образом, соотношение (6.34) представляет собой систему  $N$  уравнений для  $N$  неизвестных:  $I_1, I_2, \dots, I_N$ . При заданных начальных условиях эта система имеет однозначное решение.

Рассмотрим некоторые примеры цепей переменного тока, где возникает необходимость учитывать взаимное влияние токов.

### 6.6.1 Последовательное соединение индуктивных катушек

Пусть две катушки сопротивлениями  $R_1$  и  $R_2$ , индуктивностями  $L_1$  и  $L_2$ , и взаимной индуктивностью  $L_{12}$  соединены последовательно (рис. 6.12).

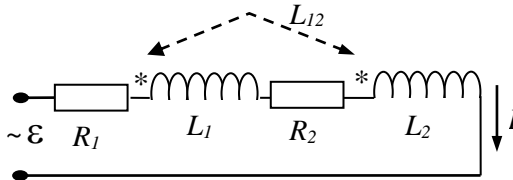


Рис.6.12

Согласно уравнению (6.34) можно записать

$$I(t)R_1 + L_{11} \frac{dI(t)}{dt} + L_{12} \frac{dI(t)}{dt} + I(t)R_2 + L_{22} \frac{dI(t)}{dt} + L_{21} \frac{dI(t)}{dt} = \mathcal{E}(t)$$

или

$$I(t)R_1 + L_{11} \frac{dI(t)}{dt} + I(t)R_2 + L_{22} \frac{dI(t)}{dt} \pm L_{12} \frac{dI(t)}{dt} = \varepsilon(t).$$

Если сторонняя эдс изменяется по гармоническому закону  $\varepsilon = \varepsilon_0 e^{i\omega t}$ , то и ток изменяются по такому же закону  $I = I_0 e^{i\omega t}$ , и с учетом этого получим

$$I_0 = \frac{\varepsilon_0}{R_1 + R_2 + i\omega(L_{11} + L_{22} \pm 2L_{12})}.$$

Знак коэффициента  $L_{12}$  зависит от взаимного расположения катушек. Если токи в катушках направлены так, что магнитные потоки катушек в любой момент времени складываются (согласное включение) – берется «плюс», если вычитаются (встречное включение) – берется «минус».

### 6.6.2 Две независимые катушки на общем сердечнике (трансформатор)

Трансформатор представляет собой две катушки, намотанные на замкнутом сердечнике из материала с большой магнитной проницаемостью. Благодаря этому потоки магнитной индукции, создаваемые текущими по проводам токами, практически полностью сосредоточены внутри сердечника (рис. 6.13).

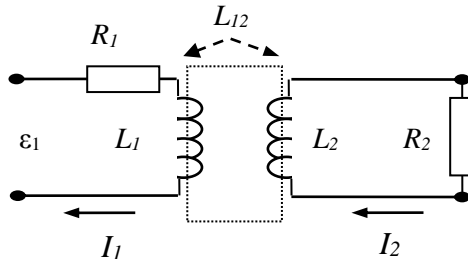


Рис. 6.13

Обмотка, к которой подключен источник сторонних эдс, называется первичной, а другая – вторичной, к ней подключается нагрузка. Для каждой цепи первичной и вторичной обмотки уравнения (6.34) принимают вид:

$$I_1(t)R_1 = \varepsilon_1(t) - \frac{d\Phi_1(t)}{dt} \quad I_2(t)R_2 = - \frac{d\Phi_2(t)}{dt} \quad (6.35)$$

где  $R_1$  – активное сопротивление первичной обмотки;

$R_2$  – активное сопротивление вторичной обмотки и нагрузки, которая для упрощения считается чисто активной.

Обычно активное сопротивление первичной обмотки мало и падение напряжения на ней много меньше сторонней эдс, т.е.  $|I_1 R_1| \ll |\varepsilon_1|$ . Поэтому первое уравнение в (6.35) упрощается к виду:

$$\varepsilon_1(t) = \frac{d\Phi_1(t)}{dt} \tag{6.36}$$

Во всех практически интересных случаях активное сопротивление вторичной обмотки много меньше активного сопротивления нагрузки. Поэтому сопротивление  $R_2$  в (6.35) можно считать равным сопротивлению нагрузки, а  $U_2(t) = I_2(t) R_2$  – равным напряжению на клеммах вторичной обмотки трансформатора. Тогда можно написать

$$U_2(t) = -\frac{d\Phi_2(t)}{dt} \tag{6.37}$$

Пусть сторонняя эдс изменяется по гармоническому закону  $\varepsilon(t) = \varepsilon_0 e^{i\omega t}$ , тогда и все другие величины изменяются по такому же закону. Вследствие того, что весь магнитный поток заключен внутри сердечника, то каждый из витков первичной и вторичной обмоток охватывает один и тот же поток  $\Phi(t) = \Phi_0 e^{i\omega t}$ , тогда полные потоки, охватываемые первичной и вторичной обмотками, равны:

$$\Phi_1(t) = \Phi(t) N_1 = \Phi_0 N_1 e^{i\omega t}, \quad \Phi_2(t) = \Phi(t) N_2 = \Phi_0 N_2 e^{i\omega t}, \tag{6.38}$$

где  $N_1$  и  $N_2$  число витков в первичной и во вторичной обмотках соответственно.

Подстановка (6.38) в (6.36) и (6.37) даёт:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_1(t) &= \frac{d\Phi_1(t)}{dt} = i\omega \Phi_0 N_1 e^{i\omega t} \\ U_2(t) &= -\frac{d\Phi_2(t)}{dt} = -i\omega \Phi_0 N_2 e^{i\omega t} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \boxed{\frac{U_{02}}{\varepsilon_{01}} = -\frac{N_2}{N_1}} \tag{6.39}$$

Таким образом, амплитуда напряжения во вторичной обмотке во столько раз больше (меньше) амплитуды эдс в первичной, во сколько раз число витков во вторичной обмотке больше (меньше), чем в первичной.

## § 6.7 Скин-эффект

### 6.7.1 Сущность явления и его качественное объяснение

При протекании постоянного тока по однородному проводнику ток распределяется равномерно по его сечению. В случае же переменных токов картина меняется – плотность тока у поверхности проводника увеличивается, а в центре – уменьшается. Это явление концентрации переменного тока у поверхности проводника называется **скин-эффектом**. Скин-

эффект обуславливается электромагнитным взаимодействием бесконечно малых элементов тока.

Пусть переменный ток течет по бесконечному прямому цилиндрическому проводнику (рис. 6.14). Допустим для определенности, что в некоторый момент времени ток течет в направлении, указанном на рисунке стрелкой, и сила тока возрастает.

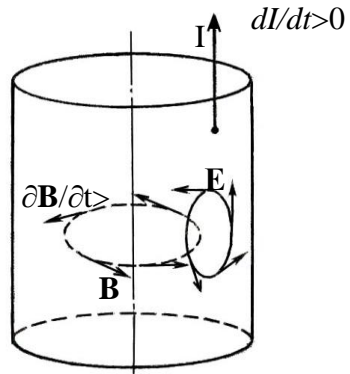


Рис. 6.14

Линии магнитного поля тока являются концентрическими окружностями с центром на оси проводника. При возрастании силы тока форма линий индукции не изменяется, но значение индукции в каждой точке увеличивается. Следовательно, при изменении силы тока индукция магнитного поля в каждой точке сохраняется по направлению, но изменяется по значению, и вектора  $\mathbf{B}$  и  $\partial\mathbf{B}/\partial t$  совпадают по направлению. Поэтому производная  $\partial\mathbf{B}/\partial t$  направлена по касательной к соответствующей линии индукции магнитного поля.

По закону электромагнитной индукции  $\text{rot}\mathbf{E} = -\partial\mathbf{B}/\partial t$ , изменяющееся магнитное поле порождает вихревое электрическое поле, причем силовые линии этого электрического поля лежат в плоскости, перпендикулярной вектору  $\partial\mathbf{B}/\partial t$ . Направление положительного обхода вдоль линии напряженности электрического поля и направление вектора  $\partial\mathbf{B}/\partial t$  составляют левовинтовую систему при  $(\partial\mathbf{B}/\partial t) > 0$ , и правовинтовую систему при  $(\partial\mathbf{B}/\partial t) < 0$ .

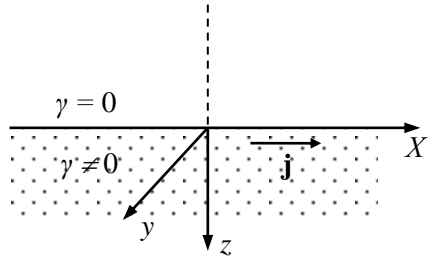
Как это непосредственно видно из рис. 6.14, направление вихревого поля  $\mathbf{E}$  таково, что оно усиливает силу тока у поверхности проводника и ослабляет ее внутри проводника. Благодаря этому плотность тока у поверхности проводника увеличивается, а к центру проводника уменьшается.

Был проанализирован случай увеличения силы тока. Нетрудно убедиться, что в случае уменьшения силы тока направление вихревого электрического поля таково, что плотность тока также увеличивается от центра проводника к его поверхности.



### 6.7.2 Элементарная теория скин-эффекта

Для упрощения вычислений возьмем бесконечный однородный проводник, занимающий полупространство  $Z \geq 0$  (рис. 6.15). Ток течет в направлении оси  $X$  параллельно поверхности проводника, совпадающей с плоскостью  $XY$ .



Предполагая по-прежнему выполненным условие квазистационарности  $j \gg \frac{\partial D}{\partial t}$ , запишем уравнения

Максвелла в однородной проводящей среде:

$$\text{rot}\mathbf{E} = -\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t} = -\mu\mu_0 \frac{\partial\mathbf{H}}{\partial t}, \quad (6.40)$$

$$\text{rot}\mathbf{H} = \mathbf{j} = \gamma\mathbf{E}, \quad (6.41)$$

$$\text{div}\mathbf{B} = 0,$$

$$\text{div}\mathbf{D} = 0 \text{ (так как в проводниках } \rho=0\text{)}.$$

Применим операцию  $\text{rot}$  к уравнению (6.40):

$$\text{rotrot}\mathbf{E} = -\text{rot}\left(\mu\mu_0 \frac{\partial\mathbf{H}}{\partial t}\right),$$

где  $\text{rotrot}\mathbf{E} = \text{graddiv}\mathbf{E} - \Delta\mathbf{E}$  и  $\text{div}\mathbf{E}=0$  (так как  $\text{div}\mathbf{D}=0$ ),

$$\text{rot}\left(\mu\mu_0 \frac{\partial\mathbf{H}}{\partial t}\right) = \mu\mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \text{rot}\mathbf{H} = \mu\mu_0 \frac{\partial}{\partial t} (\gamma\mathbf{E}) = \mu\mu_0\gamma \frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}.$$

Таким образом, получим уравнение электрического поля

$$\Delta\mathbf{E} = \mu\mu_0\gamma \frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}. \quad (6.42)$$

Такое же уравнение получается и для магнитного поля, если из (6.41) выразить  $\mathbf{E}$  и подставить в (6.40):

$$\text{rotrot}\mathbf{H} = -\mu\mu_0\gamma \frac{\partial\mathbf{H}}{\partial t},$$

учитывая что  $\text{rotrot}\mathbf{H} = \text{graddiv}\mathbf{H} - \Delta\mathbf{H}$  и  $\text{div}\mathbf{H} = 0$  (т.к.  $\text{div}\mathbf{B}=0$ ), получаем уравнение магнитного поля

$$\Delta\mathbf{H} = \mu\mu_0\gamma \frac{\partial\mathbf{H}}{\partial t}. \quad (6.43)$$

Ограничимся решением уравнений поля в простейшем случае переменного тока, текущего в проводнике, заполняющем полупространство

$z > 0$ . Направление тока вдоль оси  $x$  и его зависимость от времени считаются заданными:

$$j_x = j_{ox}(z)e^{i\omega t}, \quad j_y = j_z = 0. \quad (6.44)$$

Заметим, что  $j_x$  не может зависеть от  $x$  в силу уравнения непрерывности.

Из закона Ома  $\mathbf{j} = \gamma \mathbf{E}$  следует, что напряженность должна удовлетворять условию

$$E_x = E_{ox}(z)e^{i\omega t}, \quad E_y = E_z = 0. \quad (6.45)$$

Подставляя (6.45) в (6.42) получим

$$\frac{\partial^2 E_{ox}(z)}{\partial z^2} = i\omega\gamma\mu_0 E_{ox}(z), \quad (6.46)$$

где обозначим  $\omega\gamma\mu_0 = 2k^2$ , ( $k$  – действительное число).

Общее решение однородного дифференциального уравнения второго порядка (6.46) имеет вид

$$E_{ox}(z) = B_1 e^{r_1 z} + B_2 e^{r_2 z}, \quad (6.47)$$

где  $r_{1,2} = \pm \sqrt{i2k^2} = \pm k(1+i)$ .

Так как первое слагаемое в (6.47) неограниченно возрастает при  $z \rightarrow \infty$ , что лишено физического смысла, то поэтому следует принять  $B_1 = 0$ , тогда

$$E_{ox}(z) = B_2 e^{r_2 z} = E_0 e^{-kz(1+i)}, \quad (6.48)$$

здесь учтено, что при  $z=0$   $B_2 = E_{ox}(0) = E_0$  – амплитуда напряженности электрического поля на поверхности проводника.

Таким образом, подставляя (6.48) в (6.45) окончательно получаем

$$\begin{aligned} E_x(z) &= E_{ox}(z)e^{i\omega t} = E_0 e^{-kz(1+i)} e^{i\omega t} = E_0 e^{-kz} e^{i(\omega t - kz)} = \\ &= E_0 e^{-kz} \cos(\omega t - kz), \end{aligned} \quad (6.49)$$

где  $k = \sqrt{\frac{\omega\gamma\mu_0}{2}}$ .

Полученное уравнение (6.49) есть уравнение плоской бегущей волны с запаздыванием фазы в зависимости от координаты и быстро затухающей вдоль оси  $z$  (т.е. по направлению внутрь проводника). Так как  $j_x = \gamma E_x$ , то:

$$j_x(z) = j_0 e^{-kz} \cos(\omega t - kz). \quad (6.50)$$

Соотношение (6.50) показывает, что плотность тока при удалении от поверхности проводника убывает, причем скорость этого убывания характеризуется экспоненциальным множителем  $e^{-kz}$ .

Уменьшение плотности тока в  $e$  раз происходит на глубине  $z=1/k=\Delta$  от поверхности:

$$\Delta = \frac{1}{k} = \sqrt{\frac{2}{\omega\gamma\mu\mu_0}}. \quad (6.51)$$

Зная распределение плотности тока, а вместе с ним и электрического поля в проводнике, можно найти распределение магнитного поля. Магнитное поле оказывается перпендикулярным электрическому и убывает вглубь проводника по тому же закону, что и электрическое. Таким образом, электромагнитное поле и соответственно весь ток в проводнике оказываются локализованными в тонком поверхностном слое толщиной порядка  $\Delta$ . Поэтому **скин-эффект** – это локализация поля в тонком поверхностном слое проводника, а величина  $\Delta$  – **толщина скин-слоя**.

Результат, полученный нами для случая упрощенной модели проводника, имеет общий характер. При любой геометрической конфигурации проводников поле в них оказывается локализованным в скин-слое.

Известно, что активное сопротивление проводника обратно пропорционально площади поперечного сечения. В результате скин-эффекта весь переменный ток концентрируется вблизи поверхности цилиндрического проводника, что эквивалентно тому, что весь ток течет по полому проводнику и сопротивление этого проводника равно сопротивлению полого цилиндра с соответствующей толщиной стенок, т.е. больше, чем сопротивление сплошного цилиндрического проводника.

Из выражения (6.51) для толщины скин-слоя ясно, что при увеличении частоты толщина цилиндрического слоя, в котором течет ток, уменьшается ( $\Delta \sim 1/\omega$ ), а сопротивление току соответственно увеличивается.

Таким образом, главной токопроводящей частью провода для токов большой частоты является поверхностный слой, поэтому сердцевину можно сделать из дешевого материала с низкой проводимостью, а оболочку – из металла с хорошей проводимостью (который, как правило, дороже). Основное назначение сердцевины в этом случае состоит в придании прочности проводнику. Использование таких проводов во многих случаях оказывается экономически и технически выгодным. В связи с чем в радиотехнике на высоких частотах используются медные проводники покрытые серебром, а на средних частотах в линиях связи применяются биметаллические провода (стальные покрытые медью).

Как было показано ранее, энергия магнитного поля связана с индуктивностью проводника  $L$  и силой тока  $I$  соотношением

$$W = \frac{LI^2}{2}. \quad (6.52)$$

Если ток течет по полуму цилиндру, то магнитное поле в цилиндрической полости равно нулю, а поле вне цилиндра такое же, как и в случае, когда этот ток течет по сплошному цилиндрическому проводнику. Следовательно, энергия магнитного поля, создаваемого током, текущим по полуму цилиндрическому проводнику, меньше, чем энергия магнитного поля, создаваемого током той же силы, текущим по сплошному цилиндрическому проводнику.

При скин-эффекте ток концентрируется вблизи поверхности проводника. Следовательно, магнитное поле вне проводника имеет то же значение, как и при отсутствии скин-эффекта, а поле внутри проводника уменьшается. Поэтому благодаря скин-эффекту энергия магнитного поля уменьшается. Поскольку при этом полный ток, протекающий по проводнику, не изменяется, то уменьшение полной энергии согласно (6.52) может произойти только за счет уменьшения индуктивности  $L$ . Таким образом, индуктивность проводника зависит от частоты и с увеличением частоты переменного тока уменьшается.

## ГЛАВА 7. ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ВОЛНЫ

### § 7.1 Переменное электромагнитное поле. Волновое уравнение и свойства электромагнитных волн

Как было показано ранее, в зависимости от физических условий, в электродинамике выделяют несколько разделов, в каждом из которых имеется определённая специфика, как постановка проблем, так и методы их решения.

В общем случае (при отсутствии ограничений) учитываются все временные изменения, т.е. система уравнений Максвелла имеет исходный вид:

$$\operatorname{rot} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\frac{\partial \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)}{\partial t}, \quad (\text{I})$$

$$\operatorname{div} \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = 0 \quad (\text{II})$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) + \frac{\partial \mathbf{D}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \quad (\text{III})$$

$$\operatorname{div} \mathbf{D}(\mathbf{r}, t) = \rho(\mathbf{r}, t). \quad (\text{IV})$$

В этом случае уравнения Максвелла (I)–(IV) приводят к выводу о существовании электромагнитных волн.

Чтобы доказать это, рассмотрим некоторую область пространства с однородной изотропной диэлектрической средой ( $\epsilon = \text{const}$ ,  $\mu = \text{const}$ ,  $\gamma = 0$ ) вдали от зарядов и токов (т.е. внутри области  $\rho = 0$  и  $\mathbf{j} = 0$ ). Для такой области система уравнений Максвелла принимает вид:

$$\operatorname{rot} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\frac{\partial \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)}{\partial t}, \quad (\text{I})$$

$$\operatorname{div} \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = 0 \quad (\text{II})$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \frac{\partial \mathbf{D}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \quad (\text{III}')$$

$$\operatorname{div} \mathbf{D}(\mathbf{r}, t) = 0 \quad (\text{IV}')$$

Источником электромагнитного поля будем считать участок среды где  $\rho \neq 0$ ,  $\mathbf{j} \neq 0$ , т.е. для рассматриваемой области пространства источник электромагнитного поля внешний.

Продифференцируем обе части уравнения (III') по времени, учитывая, что  $\mathbf{D} = \epsilon_0 \epsilon \mathbf{E}$ :

$$\operatorname{rot} \frac{\partial \mathbf{H}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = \epsilon \epsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2} \quad (*)$$

Выразим  $\frac{\partial \mathbf{H}(\mathbf{r}, t)}{\partial t}$  из (I), учитывая, что  $\mathbf{B} = \mu \mu_0 \mathbf{H}$ :

$$\frac{\partial \mathbf{H}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = -\frac{1}{\mu\mu_0} \operatorname{rot} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t),$$

и подставим в (\*):  $\operatorname{rot} \frac{\partial \mathbf{H}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = -\frac{1}{\mu\mu_0} \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{\mu\mu_0} \Delta \mathbf{E}(\mathbf{r}, t).$

Таким образом выражение (\*) принимает вид:

$$\Delta \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mu\mu_0 \varepsilon \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2} \quad (7.1)$$

Аналогично рассуждая, можно получить выражение для  $\mathbf{H}$ , которое вследствие симметрии уравнений (I) и (III) имеет такой же вид, как и (7.1), т.е.:

$$\Delta \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \mu\mu_0 \varepsilon \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{H}(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2} \quad (7.2)$$

Очевидно, что в однородной изотропной среде, где нет ни токов, ни зарядов, векторы поля подчиняются **волновым уравнениям** (7.1) и (7.2), и *электромагнитное поле*, которое ими описывается, *может распространяться в виде электромагнитных волн.*

Эти уравнения были получены Максвеллом в 1863 г. Исходя из полученных уравнений, он предсказал возможность существования электромагнитных волн, которые экспериментально удалось получить Герцу только более двадцати лет спустя, в 1888 году.

Из математического анализа известно, что решением волновых уравнений типа (7.1) и (7.2) будет уравнение плоской волны вида:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{i(\alpha t - \mathbf{k}\mathbf{r})}, \quad (7.3)$$

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_0 e^{i(\alpha t - \mathbf{k}\mathbf{r})}. \quad (7.4)$$

Это легко проверить методом подстановки: если соотношения (7.3) и (7.4) подставить в (7.1) и (7.2) соответственно, то они должны удовлетворять этим уравнениям. Однако, для того, чтобы (7.3) и (7.4) удовлетворяли системе уравнений Максвелла, на них должны накладываться некоторые дополнительные условия.

Подставим (7.3) и (7.4) в систему уравнений Максвелла, преобразованную с учетом материальных уравнений  $\mathbf{D} = \varepsilon_0 \varepsilon \mathbf{E}$  и  $\mathbf{V} = \mu_0 \mu \mathbf{H}$  к виду:

$$\begin{aligned}
\operatorname{rot} \mathbf{E} &= -\mu\mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \\
\operatorname{div} \mathbf{H} &= 0 \\
\operatorname{rot} \mathbf{H} &= \varepsilon\varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \\
\operatorname{div} \mathbf{E} &= 0.
\end{aligned}
\tag{7.5}$$

Вычислим  $\operatorname{rot} \mathbf{E}$  и  $\operatorname{rot} \mathbf{H}$ , где  $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{i(\omega t - \mathbf{k}\mathbf{r})}$  и  $\mathbf{H} = \mathbf{H}_0 e^{i(\omega t - \mathbf{k}\mathbf{r})}$

$$\begin{aligned}
\operatorname{rot} \mathbf{E} &= \operatorname{rot} \mathbf{E}_0 e^{i(\omega t - \mathbf{k}\mathbf{r})} = -i[\mathbf{k}\mathbf{E}], \\
\operatorname{rot} \mathbf{H} &= \operatorname{rot} \mathbf{H}_0 e^{i(\omega t - \mathbf{k}\mathbf{r})} = -i[\mathbf{k}\mathbf{H}].
\end{aligned}$$

Вычислим  $\operatorname{div} \mathbf{E}$  и  $\operatorname{div} \mathbf{H}$ :

$$\begin{aligned}
\operatorname{div} \mathbf{E} &= \operatorname{div} \left( \mathbf{E}_0 e^{i(\omega t - \mathbf{k}\mathbf{r})} \right) = -i(\mathbf{k}\mathbf{E}), \\
\operatorname{div} \mathbf{H} &= \operatorname{div} \left( \mathbf{H}_0 e^{i(\omega t - \mathbf{k}\mathbf{r})} \right) = -i(\mathbf{k}\mathbf{H}).
\end{aligned}$$

Найдем производные по времени:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} &= \frac{\partial \left( \mathbf{H}_0 e^{i(\omega t - \mathbf{k}\mathbf{r})} \right)}{\partial t} = i\omega \mathbf{H}_0 e^{i(\omega t - \mathbf{k}\mathbf{r})} = i\omega \mathbf{H}, \\
\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} &= \frac{\partial \left( \mathbf{E}_0 e^{i(\omega t - \mathbf{k}\mathbf{r})} \right)}{\partial t} = i\omega \mathbf{E}_0 e^{i(\omega t - \mathbf{k}\mathbf{r})} = i\omega \mathbf{E}.
\end{aligned}$$

С учетом полученных выражений запишем систему уравнений Максвелла:

$$[\mathbf{k}\mathbf{E}] = \omega\mu\mu_0 \mathbf{H} \tag{7.6}$$

$$(\mathbf{k}\mathbf{H}) = 0 \tag{7.7}$$

$$[\mathbf{k}\mathbf{H}] = -\omega\varepsilon\varepsilon_0 \mathbf{E} \tag{7.8}$$

$$(\mathbf{k}\mathbf{E}) = 0 \tag{7.9}$$

Из (7.6) можно заключить, что вектор, являющийся результатом векторного произведения  $[\mathbf{k}\mathbf{E}]$  совпадает по направлению с вектором  $\mathbf{H}$ .

Из уравнения (7.7) следует, что вектора  $\mathbf{k}$  и  $\mathbf{H}$  взаимно перпендикулярны (т.к. их скалярное произведение равно нулю).

Из (7.8) – что вектор, являющийся результатом векторного произведения  $[\mathbf{k}\mathbf{H}]$  направлен против вектора  $\mathbf{E}$ .

Из (7.9), вытекает, что  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{k}$  тоже взаимно перпендикулярны.

Совместно все равенства (7.6) – (7.9) могут быть справедливы только в том случае, когда вектора  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{H}$  и  $\mathbf{k}$  образуют правую тройку векторов (рис. 7.1)

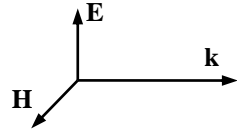


Рис. 7.1

Вектор  $\mathbf{k}$  (*волновой вектор*) определяет направление распространения волны. Вектора  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  лежат в плоскости, перпендикулярной вектору  $\mathbf{k}$ . Отсюда следует, что *электромагнитная волна является поперечной волной*.

Учитывая взаимную перпендикулярность векторов  $\mathbf{H}$  и  $\mathbf{E}$ , перепишем (7.6) и (7.8) в скалярном виде:

$$kE = \omega\mu_0 H, \quad (7.10)$$

$$kH = \omega\epsilon_0 E. \quad (7.11)$$

Таким образом, отношение численных значений векторов  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  от времени не зависит, т.е. эти *векторы обладают одинаковыми фазами и изменяются синхронно (синфазно)*.

Разделив (7.10) на (7.11) почленно, получим:

$$\frac{E}{H} = \frac{\mu_0 H}{\epsilon_0 E} \Rightarrow \frac{\epsilon_0 E^2}{2} = \frac{\mu_0 H^2}{2}$$

или

$$\boxed{\frac{ED}{2} = \frac{HB}{2}}. \quad (7.12)$$

Из (7.12) следует, что в электромагнитной волне плотность энергии электрического поля равна плотности энергии магнитного поля, а между модулями векторов  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  существует следующая связь:

$$\boxed{\sqrt{\epsilon_0} E = \sqrt{\mu_0} H}. \quad (7.13)$$

Определим скорость распространения электромагнитной волны, для этого выразим  $\frac{E}{H}$  из (7.10) и (7.13), и приравняем результаты:

$$\frac{E}{H} = \frac{\omega\mu_0}{k} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}}.$$

Учитывая, что модуль волнового вектора определяется как  $k = \frac{\omega}{v}$ , то:



$$v\mu\mu_0 = \sqrt{\frac{\mu\mu_0}{\varepsilon\varepsilon_0}} \Rightarrow v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0}} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}, \quad (7.14)$$

где  $c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}$  – скорость распространения электромагнитных волн в вакууме,

при подстановке численных значений констант  $\varepsilon_0$  и  $\mu_0$  получаем  $c = 2,99792458 \cdot 10^8 \approx 3 \cdot 10^8$  м/с.

## § 7.2 Отражение и преломление электромагнитных волн на границе раздела двух диэлектрических сред

### 7.2.1 Геометрическая оптика. Законы отражения и преломления света

Первоначально оптика развивалась как геометрическая, в соответствии с представлениями которой свет представлял собой лучи, исходящие от источника света или из глаза наблюдателя. С развитием волновой теории света и в связи с обнаружением его электромагнитной природы было установлено, что свет представляет собой поток электромагнитных волн. Описание распространения света в рамках геометрической оптики применимо лишь в тех случаях, когда длина волны  $\lambda$  мала по сравнению с характеристическими размерами задачи  $l$ :  $\lambda \ll l$ .

Рассмотрим электромагнитную волну, падающую на границу раздела двух диэлектриков, отличающихся величиной диэлектрической проницаемости ( $\varepsilon_1 \neq \varepsilon_2$ ),  $\mu_1 = \mu_2 = 1$ . Поверхность раздела будем считать плоской (рис. 7.2).

Пусть на эту поверхность, которую мы выберем, как плоскость  $z=0$ , падает плоская электромагнитная волна. Запишем векторы поля для падающей, отраженной и преломленных волн. Для простоты примем, что вектор  $\mathbf{k}$  лежит в плоскости  $(xoz)$ .

Для падающей волны:

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \mathbf{E}_0 e^{i(\omega t - \mathbf{k}\mathbf{r})} = \mathbf{E}_0 e^{i(\omega t - kx \cos \alpha - kz \cos \gamma)} \\ \mathbf{H} &= \mathbf{H}_0 e^{i(\omega t - \mathbf{k}\mathbf{r})} = \mathbf{H}_0 e^{i(\omega t - kx \cos \alpha - kz \cos \gamma)}, \end{aligned} \quad (7.15)$$

где  $\cos \alpha$ ,  $\cos \beta$  и  $\cos \gamma$  – направляющие косинусы волнового вектора.

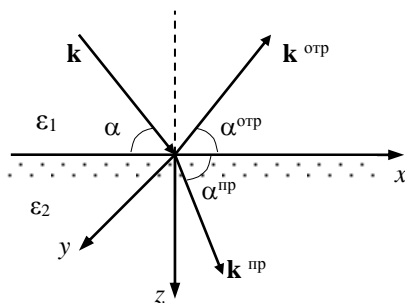


Рис. 7.2

Поскольку  $\mathbf{k}$  лежит в плоскости ( $xoz$ ), то  $\cos\beta = 0$ .

Для отраженной волны:

$$\begin{aligned}\mathbf{E}^{omp} &= \mathbf{E}_0^{omp} e^{i(\omega^{omp}t - \mathbf{k}^{omp}\mathbf{r})} = \\ &= \mathbf{E}_0^{omp} e^{i(\omega^{omp}t - k^{omp}x \cos\alpha^{omp} - k^{omp}y \cos\beta^{omp} - k^{omp}z \cos\gamma^{omp})} \\ \mathbf{H}^{omp} &= \mathbf{H}_0^{omp} e^{i(\omega^{omp}t - \mathbf{k}^{omp}\mathbf{r})} = \\ &= \mathbf{H}_0^{omp} e^{i(\omega^{omp}t - k^{omp}x \cos\alpha^{omp} - k^{omp}y \cos\beta^{omp} - k^{omp}z \cos\gamma^{omp})}\end{aligned}\quad (7.16)$$

Для преломленной волны:

$$\begin{aligned}\mathbf{E}^{np} &= \mathbf{E}_0^{np} e^{i(\omega^{np}t - \mathbf{k}^{np}\mathbf{r})} = \mathbf{E}_0^{np} e^{i(\omega^{np}t - k^{np}x \cos\alpha^{np} - k^{np}y \cos\beta^{np} - k^{np}z \cos\gamma^{np})} \\ \mathbf{H}^{np} &= \mathbf{H}_0^{np} e^{i(\omega^{np}t - \mathbf{k}^{np}\mathbf{r})} = \mathbf{H}_0^{np} e^{i(\omega^{np}t - k^{np}x \cos\alpha^{np} - k^{np}y \cos\beta^{np} - k^{np}z \cos\gamma^{np})}\end{aligned}\quad (7.17)$$

На границе раздела вектора поля должны удовлетворять условию:  $E_\tau^{(1)} = E_\tau^{(2)}$  и  $H_\tau^{(1)} = H_\tau^{(2)}$ . Поскольку все условия для векторов  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  одинаковы, можно рассмотреть граничные условия для одного вектора (например,  $\mathbf{E}$ ), а для второго будет аналогично.

Согласно принципу суперпозиции, полное (результатирующее) электрическое поле в первой среде будет:  $\mathbf{E}^{(1)} = \mathbf{E} + \mathbf{E}^{omp}$ , а во второй  $\mathbf{E}^{(2)} = \mathbf{E}^{np}$ . Тогда граничные условия для вектора  $\mathbf{E}$  будут иметь вид:  $E_\tau + E_\tau^{omp} = E_\tau^{np}$  или, с учетом, что на границе раздела  $z=0$  и, подставляя это условие в (7.15), (7.16) и (7.17), получим:

$$\begin{aligned}E_{0\tau} e^{i(\alpha - kx \cos\alpha)} + E_{0\tau}^{omp} e^{i(\omega^{omp}t - k^{omp}x \cos\alpha^{omp} - k^{omp}y \cos\beta^{omp})} = \\ = E_{0\tau}^{np} e^{i(\omega^{np}t - k^{np}x \cos\alpha^{np} - k^{np}y \cos\beta^{np})}\end{aligned}\quad (7.18)$$

Данное равенство должно выполняться в любой момент времени, для произвольных координат  $x$  и  $y$ . Это возможно только в том случае, когда коэффициенты при независимых переменных будут равны между собой, т.е.:

$$\text{коэффициенты при } t: \quad \omega = \omega^{omp} = \omega^{np} \quad (7.19)$$

$$\text{коэффициенты при } x: \quad k \cos\alpha = k^{omp} \cos\alpha^{omp} = k^{np} \cos\alpha^{np} \quad (7.20)$$

$$\text{коэффициенты при } y: \quad k^{omp} \cos\beta^{omp} = k^{np} \cos\beta^{np} = 0 \quad (7.21)$$

Условие (7.19) означает, что *при отражении и преломлении волны от границы раздела диэлектрических сред её частота не изменяется.*

Условие (7.21) показывает, что *падающая, отраженная и преломленная волны лежат в одной плоскости.*

Соотношение (7.20) можно разделить на два условия. С учетом того, что:

$$k = \frac{\omega}{v} = \frac{\omega\sqrt{\epsilon_1}}{c}, \quad k^{omp} = \frac{\omega}{v^{omp}} = \frac{\omega\sqrt{\epsilon_1}}{c}, \quad k^{np} = \frac{\omega}{v^{np}} = \frac{\omega\sqrt{\epsilon_2}}{c},$$

получим

$$\frac{\omega\sqrt{\epsilon_1}}{c} \cos \alpha = \frac{\omega\sqrt{\epsilon_1}}{c} \cos \alpha^{omp} \quad \text{или} \quad \cos \alpha = \cos \alpha^{omp} \Rightarrow \alpha = \alpha^{omp}. \quad (7.22)$$

Откуда получаем известный из оптики **закон отражения** – *угол падения равен углу отражения.*

Второе равенство будет иметь вид

$$\frac{\omega\sqrt{\epsilon_1}}{c} \cos \alpha = \frac{\omega\sqrt{\epsilon_2}}{c} \cos \alpha^{np} \quad \text{или} \quad \frac{\cos \alpha}{\cos \alpha^{np}} = \frac{\sqrt{\epsilon_2}}{\sqrt{\epsilon_1}}. \quad (7.23)$$

Соотношение (7.23) определяет **закон преломления.**

В оптике обычно пользуются не направляющими косинусами, а углами между направлением луча и нормалью к границе раздела сред  $\theta$ ,  $\theta^{np}$  и  $\theta^{omp}$  (рис. 7.3)  $\alpha = \frac{\pi}{2} - \theta$  и  $\alpha^{np} = \frac{\pi}{2} - \theta^{np}$ . Тогда, подставив эти соотношения в (7.23) получаем

$$\frac{\sin \theta}{\sin \theta^{np}} = \frac{\sqrt{\epsilon_2}}{\sqrt{\epsilon_1}} = n_{21} = \frac{n_2}{n_1}, \quad (7.24)$$

где  $n_1 = \sqrt{\epsilon_1}$  – абсолютный показатель преломления среды 1;

$n_2 = \sqrt{\epsilon_2}$  – абсолютный показатель преломления среды 2;

$n_{21}$  – относительный показатель преломления двух сред.

Таким образом, из волновой теории света были получены законы отражения и преломления, известные из геометрической оптики, и показано, как и почему показатель преломления свя-

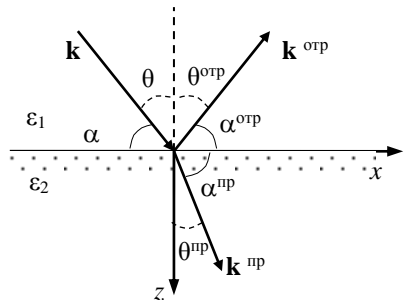


Рис. 7.3

зан с диэлектрической проницаемостью среды.

### 7.2.2 Интенсивность отраженной и преломленной волны. Формулы Френеля

Более детальное рассмотрение граничных условий позволяет определить соответствие между амплитудами падающей, отраженной и преломленной волн. Эти соотношения были получены Френелем в 1820 г. из общих представлений о свете и волновом процессе.

Для вывода формул Френеля ограничимся простейшим случаем нормального падения электромагнитной волны на плоскую границу раздела двух сред (рис.7.4):

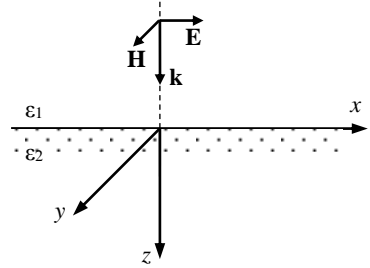


Рис. 7.4

$$E_y = E_z = 0; \quad E_x = E_0 e^{i(\omega t - kz)}. \quad (7.25)$$

Воспользуемся связью между векторами **E** и **H**:

$$\sqrt{\varepsilon_0} E = \sqrt{\mu_0} H \Rightarrow H = \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} E.$$

Так как  $H_x = H_z = 0$  и  $E_y = E_z = 0$ , то

$$H_y = \sqrt{\frac{\varepsilon_1 \varepsilon_0}{\mu_0 \mu_0}} E_0 e^{i(\omega t - kz)}.$$

Проекции векторов **E** и **H** отраженной волны:

$$E_x^{omp} = E_0^{omp} e^{i(\omega t + kz)},$$

$$H_y^{omp} = -\sqrt{\frac{\varepsilon_1 \varepsilon_0}{\mu_0 \mu_0}} E_0^{omp} e^{i(\omega t + kz)}.$$

Знак «минус» в  $H_y^{omp}$  следует из того, что вектора **k**, **E** и **H** так же образуют правую тройку векторов, как в падающей, так и в отраженной волне (рис. 7.5).

Проекции векторов **E** и **H** преломленной волны (рис. 7.6):

$$E_x^{np} = E_0^{np} e^{i(\omega t - kz)},$$

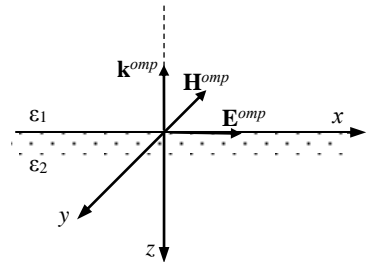


Рис. 7.5

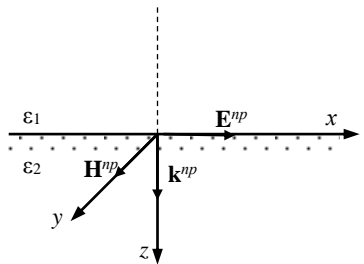


Рис. 7.6

$$H_y^{np} = \sqrt{\frac{\varepsilon_2 \varepsilon_0}{\mu \mu_0}} E_0^{np} e^{i(\omega t - kz)}.$$

Для определения амплитуд  $E_0^{omp}$  и  $E_0^{np}$  воспользуемся составленным с учетом граничных условий уравнением (7.18), в котором для случая нормального падения волны на границу раздела сред следует принять  $E_\tau = E_x$ ,  $H_\tau = H_y$ , направляющие косинусы волновых векторов падающей, отраженной и преломленной волны равны нулю, а также  $\omega = \omega^{omp} = \omega^{np}$ , тогда:

$$\begin{cases} E_\tau^{(1)} = E_\tau^{(2)} \\ H_\tau^{(1)} = H_\tau^{(2)} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} E_0 + E_0^{omp} = E_0^{np} \\ \sqrt{\varepsilon_1} E_0 - \sqrt{\varepsilon_1} E_0^{omp} = \sqrt{\varepsilon_2} E_0^{np} \end{cases} \quad (7.26)$$

Решая систему уравнений (7.26) для амплитуды отраженной волны получаем:

$$E_0 (\sqrt{\varepsilon_1} - \sqrt{\varepsilon_2}) - E_0^{omp} (\sqrt{\varepsilon_1} + \sqrt{\varepsilon_2}) = 0,$$

$$E_0^{omp} = \frac{\sqrt{\varepsilon_1} - \sqrt{\varepsilon_2}}{\sqrt{\varepsilon_1} + \sqrt{\varepsilon_2}} E_0,$$

и, учитывая, что  $n_{21} = \sqrt{\varepsilon_2} / \sqrt{\varepsilon_1}$ , можно записать

$$\boxed{E_0^{omp} = \frac{1 - n_{21}}{1 + n_{21}} E_0}. \quad (7.27)$$

Аналогично находим амплитуду преломленной волны  $E_0^{np}$ :

$$2E_0 \sqrt{\varepsilon_1} = E_0^{np} (\sqrt{\varepsilon_1} + \sqrt{\varepsilon_2}),$$

$$E_0^{np} = \frac{2\sqrt{\varepsilon_1}}{\sqrt{\varepsilon_1} + \sqrt{\varepsilon_2}} E_0,$$

$$\boxed{E_0^{np} = \frac{2}{1 + n_{21}} E_0}. \quad (7.28)$$

Выражения (7.27) и (7.28) называются **формулами Френеля**.

Чтобы определить, какая часть энергии отражается, а какая проходит во вторую среду, воспользуемся вектором Умова-Пойтинга.

Обозначим через  $|\mathbf{S}|$ ,  $|\mathbf{S}^{omp}|$ ,  $|\mathbf{S}^{np}|$  среднее за период значение плотности энергии падающей, отраженной и преломленной волн:

$$|\overline{\mathbf{S}}| = |[\overline{\mathbf{E}\mathbf{H}}]| = \sqrt{\frac{\varepsilon_1 \varepsilon_0}{\mu \mu_0}} E_0^2 \overline{\cos^2 \omega t} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\varepsilon_1 \varepsilon_0}{\mu \mu_0}} E_0^2,$$

$$|\overline{\mathbf{S}^{omp}}| = |[\overline{\mathbf{E}^{omp} \mathbf{H}^{omp}}]| = \sqrt{\frac{\varepsilon_1 \varepsilon_0}{\mu \mu_0}} (E_0^{omp})^2 \overline{\cos^2 \omega t} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\varepsilon_1 \varepsilon_0}{\mu \mu_0}} (E_0^{omp})^2$$

используя (7.27), получим:

$$|\overline{\mathbf{S}^{omp}}| = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\varepsilon_1 \varepsilon_0}{\mu \mu_0}} \left( \frac{1-n_{21}}{1+n_{21}} \right)^2 E_0^2 = \left( \frac{1-n_{21}}{1+n_{21}} \right)^2 |\overline{\mathbf{S}}|.$$

$$|\overline{\mathbf{S}^{np}}| = |[\overline{\mathbf{E}^{np} \mathbf{H}^{np}}]| = \sqrt{\frac{\varepsilon_2 \varepsilon_0}{\mu \mu_0}} (E_0^{np})^2 \overline{\cos^2 \omega t} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\varepsilon_2 \varepsilon_0}{\mu \mu_0}} (E_0^{np})^2,$$

используя (7.28), получим:

$$|\overline{\mathbf{S}^{np}}| = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\varepsilon_2 \varepsilon_0}{\mu \mu_0}} \left( \frac{2}{1+n_{21}} \right)^2 E_0^2 = \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}} \left( \frac{2}{1+n_{21}} \right)^2 |\overline{\mathbf{S}}| = n_{21} \left( \frac{2}{1+n_{21}} \right)^2 |\overline{\mathbf{S}}|$$

Отношение

$$R = \frac{|\overline{\mathbf{S}^{omp}}|}{|\overline{\mathbf{S}}|} = \left( \frac{1-n_{21}}{1+n_{21}} \right)^2 = \left( \frac{\sqrt{\varepsilon_1} - \sqrt{\varepsilon_2}}{\sqrt{\varepsilon_1} + \sqrt{\varepsilon_2}} \right)^2 \quad (7.29)$$

называется **коэффициентом отражения** и показывает, какая часть энергии падающей волны отражается.

Отношение

$$D = \frac{|\overline{\mathbf{S}^{np}}|}{|\overline{\mathbf{S}}|} = \frac{4n_{21}}{(1+n_{21})^2} = \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}} \left( \frac{2\sqrt{\varepsilon_1}}{\sqrt{\varepsilon_1} + \sqrt{\varepsilon_2}} \right)^2 \quad (7.30)$$

называется **коэффициентом пропускания** и показывает, какая часть энергии падающей волны проходит во вторую среду.

Нетрудно показать, что  $D+R=1$ .

### § 7.3 Распространение электромагнитных волн в проводящей среде

Пусть плоская электромагнитная волна падает на металл или полупроводник

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{i(\omega t - \mathbf{k}\mathbf{r})}, \quad (7.31)$$

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_0 e^{i(\omega t - \mathbf{k}\mathbf{r})}. \quad (7.32)$$

Запишем систему Максвелла с условием того, что  $\gamma \neq 0$ :

$$\begin{aligned}
\operatorname{rot} \mathbf{E} &= -\mu\mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \\
\operatorname{div} \mathbf{H} &= 0 \\
\operatorname{rot} \mathbf{H} &= \mathbf{j} + \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \\
\operatorname{div} \mathbf{E} &= 0.
\end{aligned}
\tag{7.33}$$

Подставив в эту систему соотношения (7.31) и (7.32), получим уравнения вида:

$$i[\mathbf{kE}] = i\omega\mu\mu_0 \mathbf{H} \tag{7.34}$$

$$i(\mathbf{kH}) = 0 \tag{7.35}$$

$$i[\mathbf{kH}] = -\mathbf{j} - i\omega\varepsilon\varepsilon_0 \mathbf{E} \tag{7.36}$$

$$i(\mathbf{kE}) = 0 \tag{7.37}$$

В уравнении (7.36) плотность тока выразим из закона Ома  $\mathbf{j} = \gamma \mathbf{E}$ :

$$i[\mathbf{kH}] = -(\gamma + i\omega\varepsilon\varepsilon_0) \mathbf{E} \quad \text{или} \quad i[\mathbf{kH}] = -i\omega\varepsilon_0 \left( \frac{\gamma}{i\omega\varepsilon_0} + \varepsilon \right) \mathbf{E}.$$

Введем обозначение:

$$\varepsilon^* = \varepsilon + \frac{\gamma}{i\omega\varepsilon_0} = \varepsilon - i \frac{\gamma}{\omega\varepsilon_0},$$

тогда система (7.33) примет вид:

$$\begin{aligned}
\operatorname{rot} \mathbf{E} &= -\mu\mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \\
\operatorname{div} \mathbf{H} &= 0 \\
\operatorname{rot} \mathbf{H} &= \varepsilon^* \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \\
\operatorname{div} \mathbf{E} &= 0.
\end{aligned}
\tag{7.38}$$

Сравнивая полученную систему уравнений с соответствующими уравнениями для диэлектрической среды (7.6) – (7.9), видим, что уравнения не меняются, лишь только в третьем уравнении системы (7.38) вместо диэлектрической проницаемости среды  $\varepsilon$ , как в (7.8), стоит **комплексная диэлектрическая проницаемость  $\varepsilon^*$** .

Все последующие вычисления для волновых процессов в проводящих средах по форме совпадают с вычислениями для плоских волн в диэлектрике, надо только во всех соотношениях заменить  $\varepsilon$  на  $\varepsilon^*$ . В результате

такой замены, в частности, волновое число (модуль волнового вектора  $\mathbf{k}$ ) заменяется комплексной величиной  $k^*$

$$k = \frac{\omega\sqrt{\varepsilon\mu}}{c} \Rightarrow k^* = \frac{\omega\sqrt{\varepsilon^*\mu}}{c}. \quad (7.39)$$

Представим  $k^*$  в виде комплексного числа  $k^* = k - ih$ , возведем его в квадрат и выделим действительную и мнимую части, которые обозначим как  $a$  и  $b$  соответственно:

$$k^2 - i2kh - h^2 = a - ib.$$

Приравнявая  $a$  и  $b$  к действительной и мнимой части соответственно, находим:

$$\begin{cases} k^2 - h^2 = a \\ 2kh = b \end{cases}.$$

Из системы уравнений получаем биквадратное уравнение

$$k^2 - \frac{b^2}{4k^2} = a \Rightarrow 4k^4 - 4ak^2 - b^2 = 0, \Rightarrow k^4 - ak^2 - \frac{b^2}{4} = 0,$$

решение которого имеет вид:

$$k^2 = \frac{a}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \frac{b^2}{4}}. \quad (7.40)$$

Также возведем в квадрат формулу комплексного волнового числа (7.39), и выделим действительную и мнимую части, обозначив их  $a$  и  $b$  соответственно:

$$(k^*)^2 = \frac{\omega^2 \varepsilon^* \mu}{c^2} = \frac{\omega^2 \mu}{c^2} \left( \varepsilon - i \frac{\gamma}{\omega \varepsilon_0} \right) = \frac{\omega^2 \mu \varepsilon}{c^2} - i \frac{\omega \mu \gamma}{c^2 \varepsilon_0} \equiv a - ib \quad (7.40')$$

Учитывая, что  $k^2 > 0$ , и заменяя  $a$  и  $b$  в (7.40) на их значения из (7.40'), получим:

$$k^2 = \frac{a}{2} \left[ 1 + \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}} \right] = \frac{\omega^2 \mu \varepsilon}{2c^2} \left[ 1 + \sqrt{1 + \left( \frac{\gamma}{\varepsilon \varepsilon_0 \omega} \right)^2} \right]. \quad (7.41)$$

$$h^2 = k^2 - a = \frac{\omega^2 \mu \varepsilon}{2c^2} \left[ 1 + \sqrt{1 + \left( \frac{\gamma}{\varepsilon \varepsilon_0 \omega} \right)^2} \right] - \frac{\omega^2 \mu \varepsilon}{c^2};$$



$$h^2 = \frac{\omega^2 \mu \varepsilon}{2c^2} \left[ \sqrt{1 + \left( \frac{\gamma}{\varepsilon_0 \omega} \right)^2} - 1 \right]. \quad (7.42)$$

В предельном случае, когда проводимость среды мала ( $\frac{\gamma}{\varepsilon_0 \omega} \ll 1$ ),

получаем выражение для волнового вектора при распространении электромагнитной волны в диэлектрике:

$$k^2 = \frac{\omega^2 \mu \varepsilon}{c^2} \quad \Rightarrow \quad k = \frac{\omega \sqrt{\mu \varepsilon}}{c} \quad \text{и} \quad h \approx 0.$$

Запишем уравнения плоской волны распространяющейся вдоль оси  $z$  с учетом комплексного характера волнового числа

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{i(\omega t - k^* z)} = \mathbf{E}_0 e^{i[\omega t - (k - ih)z]} = \mathbf{E}_0 e^{-hz} e^{i(\omega t - kz)} \quad (7.43)$$

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_0 e^{i(\omega t - k^* z)} = \mathbf{H}_0 e^{i[\omega t - (k - ih)z]} = \mathbf{H}_0 e^{-hz} e^{i(\omega t - kz)} \quad (7.44)$$

Из соотношений (7.43) и (7.44) видно, что *при распространении волны в проводящей среде волна затухает* (рис. 7.7). **Степень затухания** определяется величиной  $\gamma / \varepsilon_0 \omega$ .

Это объясняется тем, что падающая на поверхность проводника электромагнитная волна, индуцирует в нем значительные токи проводимости, при наличии которых происходит преобразование электрической энергии волны в джоулеву теплоту.

Так как в глубине проводника поле быстро затухает, то естественно ожидать, что поверхность проводника должна обладать значительными отражающими свойствами. Для нахождения коэффициента отражения необходимо в формуле (7.29)  $\varepsilon$  заменить на  $\varepsilon^*$ . Если на поверхность проводника волна падает из вакуума, то  $\varepsilon_1 = 1$  и  $\sqrt{\varepsilon_2^*} = (n - ip)$ . С учетом того, что для проводящих сред  $n \approx p \gg 1$ , приближенные вычисления дают выражение для коэффициента отражения электромагнитных волн от поверхности проводника:

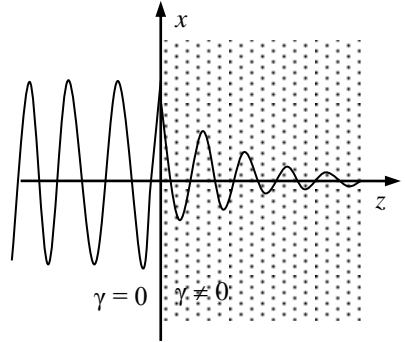


Рис.7.7

$$R = \left( \frac{1 - n^*}{1 + n^*} \right)^2 = \left| \frac{1 - n + ip}{1 + n - ip} \right|^2 = 1 - 2\sqrt{\frac{\omega \varepsilon_o}{\gamma}}$$

Данное соотношение носит название формулы Гегена и Рубенса. Результаты расчета по этой формуле хорошо согласуются с опытными данными для отражений от поверхности металлических проводников электромагнитных волн, лежащих в диапазоне радиочастот и частот инфракрасной части спектра. При более высоких частотах соотношения классической макроскопической электродинамики оказываются неприменимыми.

Высокое значение коэффициента отражения в оптической области частот обуславливает характерный металлический блеск. В предельном случае для проводника с бесконечно большой проводимостью коэффициент отражения  $R = 1$ . Это означает, что электромагнитное поле высокой частоты вовсе не проникает в глубь такого проводника.

#### § 7.4 Световое давление

Тела, помещенные в поле электромагнитной волны, испытывают в этом поле механические силы, которые принято называть световым давлением. Свет, распространяясь в однородной прозрачной среде, не оказывает давления на эту среду. *Давление связано либо с поглощением, либо с изменением направления распространения света.*

Ограничимся рассмотрением простейшего случая нормального падения электромагнитной волны на поверхность поглощающей среды (допустим, проводника или полупроводника) (рис.7.8). Давление в этом случае обусловлено тем, что электрическое поле волны возбуждает в среде периодические токи проводимости, которые подвергаются воздействию силы Лоренца со стороны магнитного поля той же световой волны.

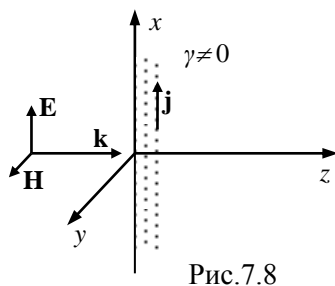


Рис.7.8

Сила Лоренца, действующая на единицу объема среды

$$\mathbf{f}_L = \rho[\mathbf{v}\mathbf{B}] = [\mathbf{j}\mathbf{B}].$$

Учитывая, что  $\mathbf{j}$  и  $\mathbf{B}$  перпендикулярны, получаем, что эта сила будет направлена вдоль оси  $z$  и по модулю равна

$$f_L = \mu\mu_0 jH \quad (7.45)$$

С учетом того, что  $j = \gamma E$  и  $H = E\sqrt{\varepsilon\varepsilon_0/\mu\mu_0}$  соотношение (7.45) примет вид

$$f_{\perp} = \mu\mu_0\gamma E^2 \sqrt{\frac{\varepsilon\varepsilon_0}{\mu\mu_0}} = \gamma E^2 \sqrt{\varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0}. \quad (7.46)$$

Под  $E$  здесь понимается напряженность электрического поля в среде (т.е. с учетом отражения и поглощения). Воспользовавшись результатами, полученными ранее для волн в проводящей среде и законами Френеля, можем записать, что если в падающей волне  $\mathbf{E} = \mathbf{E}_o e^{i(\omega t - kz)}$ , то в проводящей среде

$$\mathbf{E} = \frac{2}{(1+n^*)} \mathbf{E}_o e^{-hz} e^{i(\omega t - kz)},$$

где  $n^*$  – комплексный показатель преломления.

И соотношение (7.46) можно переписать в виде

$$f_{\perp} = \sqrt{\varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0} \frac{4\gamma}{|1+n^*|^2} E_o^2 e^{-2hz} e^{i2(\omega t - kz)}.$$

Найдем среднее значение силы  $f_{\perp}$  за период:

$$\overline{f_{\perp}} = \sqrt{\varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0} \frac{4\gamma}{|1+n^*|^2} E_o^2 e^{-2hz} \overline{\cos^2(\omega t - kz)},$$

учитывая, что  $\overline{\cos^2(\omega t - kz)} = 1/2$  получим

$$\overline{f_{\perp}} = \sqrt{\varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0} \frac{2\gamma}{|1+n^*|^2} E_o^2 e^{-2hz}.$$

В виду наличия множителя  $e^{-2hz}$  сила весьма быстро убывает при удалении от поверхности вглубь полупроводника, так что эту силу можно считать сосредоточенной на поверхности и заменить приложенным к этой поверхности давлением.

$$p = \int_0^{\infty} \overline{f_{\perp}} dz = \sqrt{\varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0} \frac{2\gamma}{|1+n^*|^2} E_o^2 \int_0^{\infty} e^{-2hz} dz = \frac{\gamma k}{\omega h |1+n^*|^2} E_o^2,$$

где учтено, что  $\sqrt{\varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0} = 1/v$  и  $v = \omega/k$ .

Подставляя в выражение для давления  $p$  значение  $h = \frac{\omega\mu\gamma}{2kc^2\varepsilon_0}$  (его можно получить из уравнения  $2kh=b$  (приведено в §7.3), приравняв его к мнимой части выражения (7.40')), а так же учитывая  $H = \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu\mu_0}}E$ , получим:

$$p = \frac{\gamma k}{\omega h |1+n^*|^2} E_0^2 = \frac{2}{|1+n^*|^2} \frac{1}{c} HE = \frac{2}{c|1+n^*|^2} \bar{S}. \quad (7.47)$$

Из (7.47) следует, что *давление пропорционально плотности энергии падающей волны и коэффициенту поглощения.*

Световое давление объясняется с позиций закона сохранения импульса. Если бы тело было свободным, то под действием светового давления оно приобрело бы ускорение в направлении движения волны, т. е. увеличился бы его импульс. Приращение импульса одного тела связано с убылью импульса других частей системы. В нашем случае убывает импульс электромагнитного поля.

Давление, оказываемое электромагнитной волной на поглощающее волну тело, равно импульсу, передаваемому волной телу в единицу времени и на единицу поверхности. При падении волны по нормали к поверхности и ее полном поглощении поверхностью давление равно:

$$p = \frac{1}{c} \bar{S} = \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0} EH$$

С учетом того, что для падающей волны  $\sqrt{\varepsilon_0}E = \sqrt{\mu_0}H$ ,  $E\varepsilon_0 = D$  и  $H\mu_0 = B$  получаем

$$p = \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0} \left( \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} \frac{E^2}{2} + \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} \frac{H^2}{2} \right) = \left( \frac{ED}{2} + \frac{HB}{2} \right) = w$$

Следовательно, давление электромагнитной волны в этом случае численно равно плотности энергии волны падающей на поверхность.

В случае полного отражения от поверхности тела импульс волны меняется на противоположный и поверхности тела передается импульс в два раза больший, чем при полном поглощении. Соответственно, и давление в этом случае будет в два раза больше ( $p = 2w$ ).

## § 7.5 Распространение электромагнитных волн в диспергирующих средах

При анализе распространения и преломления света в диэлектриках предполагалось, что диэлектрическая проницаемость  $\epsilon$  является постоянной величиной, т.е. не являющейся функцией координат и времени. Вопрос о возможной зависимости этой величины от частоты электромагнитных волн не возникал, поскольку обсуждались лишь монохроматические волны какой-то конкретной частоты. Однако для разных частот  $\epsilon$  может быть различной. Это явление называется **частотной дисперсией**. Если диэлектрическая проницаемость зависит от частоты, то от частоты будет зависеть показатель преломления среды ( $n = \sqrt{\epsilon}$ ) и скорость распространения волн ( $v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon\epsilon_0\mu\mu_0}} = \frac{c}{\sqrt{\epsilon\mu}}$ ).

Явление дисперсии, как разложение белого света в спектр было открыто Ньютоном в 1672 году. Классическая теория дисперсии была создана Лоренцом в 1880 году.

### 7.5.1 Классическая теория дисперсии света

Пусть на диэлектрик падает электромагнитная волна. Под действием электрического поля волны электроны будут отклоняться от положения равновесия. Если вектор  $\mathbf{E}$  волны направлен по оси  $x$  и меняется во времени по закону  $E_x = E_{0x}e^{i\omega t}$ , тогда на электрон действует сила  $F_x = eE_{0x}e^{i\omega t}$ .

При отклонении электрона в атоме от положения равновесия возникает сила, стремящаяся вернуть его к этому положению. Если отклонение от положения равновесия мало, то возвращающую силу можно считать упругой,  $f = -kx$ . Уравнение движения электрона под действием этих сил будет иметь вид:

$$m\ddot{x} = -kx - \gamma\dot{x} + eE_x, \quad (7.48)$$

где  $m$  – масса электрона;

$\gamma\dot{x} \equiv \gamma \frac{dx}{dt}$  – сила радиационного трения, характеризующая затухания за счет излучения колеблющегося электрона;

$m\ddot{x} \equiv m \frac{d^2x}{dt^2}$  – равнодействующая всех сил.

Решение уравнения (7.48) будем искать в виде  $x = x_0 e^{i\omega t}$ , тогда  $\dot{x} = i\omega x_0 e^{i\omega t}$  и  $\ddot{x} = -\omega^2 x_0 e^{i\omega t}$ . Подставляя эти значения в (7.48), получим

$$-m\omega^2 x = -kx - i\gamma\omega x + eE_x,$$

$$x\left(-\omega^2 + \frac{k}{m} + i\frac{\gamma\omega}{m}\right) = \frac{e}{m} E_x.$$

Введем обозначения  $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$  и  $\gamma' = \frac{\gamma}{m}$ , тогда

$$x\left(-\omega^2 + \omega_0^2 + i\gamma'\omega\right) = \frac{e}{m} E_x. \quad (7.49)$$

В отсутствие затухания ( $\gamma=0$ ) и внешнего поля ( $E_x=0$ ) уравнение (7.49) примет вид

$$x\left(-\omega^2 + \omega_0^2\right) = 0 \Rightarrow \omega = \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}.$$

Откуда следует, что  $\omega_0$  – это действительно собственная частота колебаний упруго связанного электрона. Если  $E_x \neq 0$  и  $\gamma' \neq 0$ , то смещение электрона из положения равновесия будет определяться соотношением:

$$x = \frac{e}{m\left(-\omega^2 + \omega_0^2 + i\gamma'\omega\right)} E_x. \quad (7.50)$$

Смещение заряда  $e$  на расстояние  $x$  приводит к возникновению дипольного момента

$$\mathbf{p} = e\mathbf{x} \Rightarrow \mathbf{P} = \mathbf{p}N = eN\mathbf{x}, \quad (7.51)$$

где  $\mathbf{P}$  – вектор поляризации;

$N$  – число электронов в единице объема.

С учетом (7.50) соотношение (7.51) примет вид

$$\mathbf{P} = \frac{e^2 N}{m\left(-\omega^2 + \omega_0^2 + i\gamma'\omega\right)} \mathbf{E}. \quad (7.52)$$

Сравнивая (7.52) с известной формулой связи поляризации и напряженности  $\mathbf{P} = \alpha \varepsilon_0 \mathbf{E}$ , где  $\alpha$  – диэлектрическая восприимчивость, получаем

$$\alpha^* = \frac{e^2 N}{\varepsilon_0 m\left(-\omega^2 + \omega_0^2 + i\gamma'\omega\right)}$$

или

$$\varepsilon^* = 1 + \alpha^* = 1 + \frac{e^2 N}{m\varepsilon_o(-\omega^2 + \omega_o^2 + i\gamma'\omega)} \quad (7.53)$$

Формула (7.53), полученная Лоренцом, показывает, что *диэлектрическая проницаемость не есть константа, а зависит от частоты и является комплексной величиной*

$$\varepsilon^* = 1 + \frac{e^2 N}{m\varepsilon_o(-\omega^2 + \omega_o^2 + i\gamma'\omega)} = \varepsilon' - i\varepsilon''.$$

Выделим действительную и мнимую части  $\varepsilon^*(\omega)$ :

$$\varepsilon' = 1 + \frac{e^2 N}{m\varepsilon_o} \frac{(\omega_o^2 - \omega^2)}{(-\omega^2 + \omega_o^2)^2 + (\gamma'\omega)^2},$$

$$\varepsilon'' = \frac{e^2 N}{m\varepsilon_o} \frac{\omega\gamma'}{(-\omega^2 + \omega_o^2)^2 + (\gamma'\omega)^2}.$$

Действительная часть диэлектрической проницаемости показывает во сколько раз напряженность в среде меньше чем в вакууме. Мнимая часть характеризует потери.

Непосредственный физический смысл имеет отношение  $\varepsilon''/\varepsilon' = \operatorname{tg}\delta$ , которое называется *тангенсом диэлектрических потерь*:  $\delta$  – сдвиг фаз между реактивной и активной составляющими тока в среде, а  $\operatorname{tg}\delta$  показывает, какая часть падающей мощности электромагнитной волны переходит в тепло.

### 7.5.2 Нормальная дисперсия света

Выразим коэффициент преломления  $n^*$  через диэлектрическую проницаемость  $\varepsilon^*$ :

$$n^* = \sqrt{\varepsilon^*} = \left[ 1 + \frac{e^2 N}{m\varepsilon_o(-\omega^2 + \omega_o^2 + i\gamma'\omega)} \right]^{\frac{1}{2}}.$$

Для большинства прозрачных диэлектриков  $n \approx 1$  в этом случае мы можем воспользоваться формулой приближенного вычисления

$$\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{1}{2}x,$$

тогда

$$n^* \approx 1 + \frac{e^2 N}{2m\varepsilon_o(-\omega^2 + \omega_o^2 + i\gamma'\omega)}. \quad (7.54)$$

Записывая комплексный показатель преломления в виде  $n^* \approx n_o - ip$ , и, выделяя из (7.54) действительную и мнимую часть, получим:

$$n_o = 1 + \frac{e^2 N}{2m\epsilon_o} \frac{(\omega_o^2 - \omega^2)}{(\omega_o^2 - \omega^2)^2 + (\gamma'\omega)^2}, \quad (7.55)$$

$$p = \frac{e^2 N}{2m\epsilon_o} \frac{\gamma'\omega}{(\omega_o^2 - \omega^2)^2 + (\gamma'\omega)^2}.$$

Наличие мнимой части в комплексном показателе преломления связано с поглощением электромагнитной волны. Действительная часть описывает явление дисперсии.

Для большинства веществ в оптической области затухание мало  $\gamma'\omega \ll (\omega_o^2 - \omega^2)$  тогда:

$$n \approx n_o = 1 + \frac{e^2 N}{2m\epsilon_o} \frac{1}{(\omega_o^2 - \omega^2)}. \quad (7.56)$$

При всех предыдущих выводах мы предполагали, что в атоме имеется один тип электронов с собственной частотой колебаний  $\omega_o$ . Однако, в действительности, не все электроны в атоме удерживаются в положении равновесия одинаковыми упругими силами и, следовательно, не все они имеют одинаковые частоты собственных колебаний. Обозначим  $N_i$  – число электронов в единице объема, собственная частота колебания которых  $\omega_{oi}$ . Тогда формулу (7.56) можно обобщить:

$$n(\omega) = 1 + \frac{e^2}{2m\epsilon_o} \sum_i \frac{N_i}{(\omega_{oi}^2 - \omega^2)}. \quad (7.57)$$

На рис. 7.9 представлена зависимость  $n(\omega)$  (*дисперсионной кривая*). Во всей прозрачной области показатель преломления растет с увеличением частоты. Для малых частот ( $\omega \ll \omega_{oi}$ ) формула (7.57) дает статическое значение показателя преломления.

$$n = 1 + \frac{e^2}{2m\epsilon_o} \sum_i \frac{N_i}{\omega_{oi}^2}.$$

Для очень больших частот ( $\omega \gg \omega_{oi}$ ) показатель преломления стремится к единице, оста-

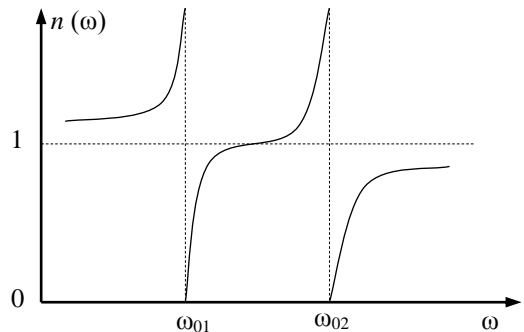


Рис. 7.9



ваясь меньше, поскольку все члены в сумме (7.56) отрицательны. Это означает, что для очень коротковолнового излучения диэлектрик является оптически менее плотной средой, чем вакуум, так что может наблюдаться полное отражение. Оно наблюдается для рентгеновского излучения. Для жесткого рентгеновского излучения ( $\omega \gg \omega_{oi}$ ) формула (7.57) принимает вид

$$n = 1 - \frac{e^2}{2m\epsilon_0\omega} \sum_i N_i.$$

Таким образом, в этом случае характер связи электронов в атоме не играет никакой роли, а показатель преломления определяется лишь общим числом электронов.

### 7.5.3 Аномальная дисперсия

Дисперсионная кривая на рис. 7.9 получена на основании формулы (7.56), которая выведена из (7.55) при пренебрежении затуханием  $\gamma'\omega \ll (\omega_o^2 - \omega^2)$ . Если учесть затухание, то в точке  $\omega = \omega_o$  дисперсионная кривая  $n(\omega)$  изменяется непрерывно, а не так, как изображено на рис. 7.9.

Построим дисперсионные кривые  $n(\omega)$  и  $p(\omega)$  для случая, когда имеется одна резонансная частота  $\omega_o$  и затуханием нельзя пренебрегать. Исходя из (7.55) получаем:

$$\text{при } \omega \approx 0: n_o \approx 1 + \frac{e^2 N}{2m\epsilon_0\omega_o^2} \quad \text{и} \quad p \approx 0;$$

$$\text{при } \omega \approx \omega_o: n_o \approx 1 \quad \text{и} \quad p = p_{\max} = \frac{e^2 N}{2m\epsilon_0\gamma'\omega};$$

$$\text{при } \omega \gg \omega_o: n_o \approx 1 - \frac{e^2 N}{2m\epsilon_0} \frac{1}{\omega^2 + (\gamma')^2} \quad \text{и} \quad p \approx 0.$$

Вид дисперсионной кривой вблизи резонансной частоты будет иметь вид, показанный на рисунке 7.10. На участках  $ab$  и  $cd$  коэффициент преломления с ростом частоты растет – нормальная дисперсия. На участке  $bc$  коэффициент преломления с увеличением частоты уменьшается. Это убывание показателя преломления с увеличением частоты называется **аномальной дисперсией**. Как следует из графика, **область аномальной дисперсии сопровождается значительным поглощением**.

Для случая нормального падения электромагнитной волны на плоскую границу раздела двух сред, согласно (7.25) можно записать

$$E_y = E_z = 0; E_x = E_0 e^{i(\omega t - kz)}.$$

В случае поглощающей среды (при  $\mu=1$ )

$$k = \frac{\omega}{v} = \frac{\omega \sqrt{\epsilon^*}}{c} = \frac{\omega}{c} n^* = \frac{\omega}{c} (n_0 - ip),$$

тогда

$$E_x = E_0 e^{i\left(\omega t - \left(\frac{\omega}{c} n_0 - i \frac{\omega}{c} p\right) z\right)} = E_0 e^{-\frac{\omega}{c} p z} e^{i\left(\omega t - \frac{\omega}{c} n_0 z\right)},$$

где  $\frac{\omega}{c} p = \delta$  – коэффициент затухания.

Таким образом, мнимая часть в комплексном показателе преломления определяет затухание электромагнитной волны в диэлектрике. Этот процесс вызван тем, что при прохождении через среду волна совершает работу над отдельными атомами вещества, передавая им энергию, и тем самым возбуждая вынужденные колебания электронов. Колеблющиеся электроны рассеивают приобретенную энергию по всем направлениям в виде энергии излучения, тем самым часть энергии волны поглощается диэлектриком.

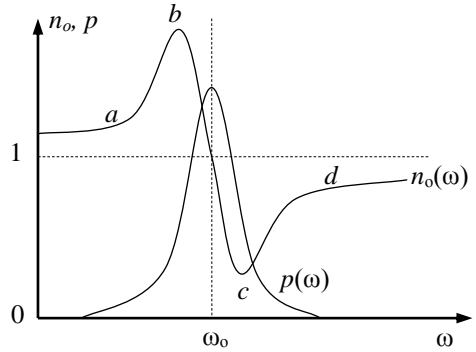


Рис. 7.10

## ГЛАВА 8. ИЗЛУЧЕНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН

### § 8.1 Запаздывающие потенциалы на больших расстояниях от системы токов и зарядов

В главе 3 для характеристики полей были введены понятия потенциалов поля  $\varphi$  и  $\mathbf{A}$ , и показано, что в общем случае переменного электромагнитного поля эти потенциалы подчиняются дифференциальным уравнениям

$$\Delta\varphi = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - \frac{1}{\epsilon\epsilon_0} \rho, \quad (8.1)$$

$$\Delta\mathbf{A} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} - \mu\mu_0 \mathbf{j}, \quad (8.2)$$

Как уже было отмечено, электромагнитные волны распространяются с конечной скоростью  $v = c/\sqrt{\epsilon\mu}$ . Поэтому величина векторов поля в какой-либо момент времени определяется не тем распределением  $\rho$  и  $\mathbf{j}$ , которое наблюдается в данный момент, а распределением их в некоторый предыдущий момент. Изменение векторов поля запаздывает во времени на величину  $r/v$  равную времени распространения электромагнитного процесса со скоростью  $v$  на расстояние  $r$  от источника до точки наблюдения.

Рассмотрим излучение локализованной в ограниченном объеме системы зарядов и токов, распределение которых зависит от координат и времени (рис.8.1).

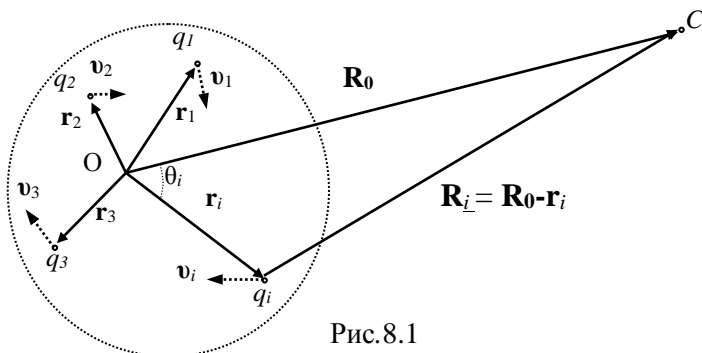


Рис.8.1

Решением уравнений Даламбера (8.1) и (8.2) для потенциалов в точке наблюдения являются интегральные уравнения вида:

$$\varphi(x, y, z, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon\epsilon_0} \int_{V'} \frac{\rho(x', y', z', t')}{R} dV' \quad (8.3)$$

$$\mathbf{A}(x, y, z, t) = \frac{\mu\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \frac{\mathbf{j}(x', y', z', t')}{R} dV' \quad (8.4)$$

где  $x, y, z$  – координаты точки наблюдения (рис.8.1);

$x', y', z'$  – координаты элемента тока или заряда, являющегося источником поля;

$R = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}$  – расстояние от источника поля (заряда или тока) до точки наблюдения;

$t' = t - R/v$  – момент времени в который значения  $\mathbf{A}$  и  $\varphi$  в точке нахождения источника поля ( $x', y', z'$ ) имеют те же значения что и в точке наблюдении (т.С) в момент времени  $t$ .

В общем случае от излучающей системы зарядов должна распространяться сферическая волна. Однако, если мы рассматриваем потенциал (или волновое поле) на достаточно большом расстоянии, то в пределах малого телесного угла сферическую волну можно считать плоской. Поскольку для расчета вектора  $\mathbf{S}$  в плоской волне достаточно задать один вектор поля, то мы можем ограничиться вычислением векторного потенциала  $\mathbf{A}$ .

Для рассматриваемой системы дискретных зарядов мы должны от интегрирования в (8.4) перейти к суммированию, тогда

$$\mathbf{A}(\mathbf{R}_0, t) = \frac{\mu\mu_0}{4\pi} \sum_{i=1}^N \frac{q_i \mathbf{v}_i(t')}{R_i} \quad (8.5)$$

где  $t' = t - R/v$ .

Вводя обозначения  $\mathbf{m} = \frac{\mathbf{R}_0}{R_0}$ , и, полагая  $r_i^2 \ll R_0^2$ , воспользовавшись теоремой косинусов, получим:

$$\begin{aligned} R_i &= \sqrt{R_0^2 - 2R_0 r_i \cos \theta_i + r_i^2} = R_0 \left( 1 - \frac{2r_i \cos \theta_i}{R_0} \right)^{1/2} \cong \\ &\cong R_0 - r_i \cos \theta_i = R_0 - (\mathbf{m} \mathbf{r}_i) \\ &R_i = R_0 - (\mathbf{m} \mathbf{r}_i). \end{aligned} \quad (8.6)$$

Подставляя (8.6) в (8.5), получим

$$\mathbf{A}(\mathbf{R}_0, t) = \frac{\mu\mu_0}{4\pi} \sum_{i=1}^N \frac{q_i \mathbf{v}_i \left( t - \frac{R_0 - (\mathbf{m}\mathbf{r}_i)}{v} \right)}{R_0 - (\mathbf{m}\mathbf{r}_i)} \quad (8.7)$$

Член  $\frac{\mathbf{m}\mathbf{r}_i}{v}$  определяет запаздывание волны, распространяющейся от точки с координатами  $(x', y', z')$  в т.О. По порядку величины этот член равен  $l/v$ , где  $l$  – характерный линейный размер системы.

Чтобы можно было во все моменты времени пренебречь запаздыванием  $\frac{\mathbf{m}\mathbf{r}_i}{v}$  необходимо, чтобы характерный для токов и зарядов период изменения  $T$  намного превосходил наибольшее время запаздывания в системе: т.е.  $l/v \ll T$ , или  $l \ll vT$ , а значит и  $l \ll \lambda$ , что означает выполнение условия квазистационарности.

Если условие квазистационарности соблюдено в пределах системы, то членом  $\frac{\mathbf{m}\mathbf{r}_i}{v}$  можно пренебречь и тогда можно записать:

$$t' = t - \frac{R_0}{v} \equiv \tau. \quad (8.8)$$

Пренебрегая величиной  $(\mathbf{m}\mathbf{r}_i)$  по сравнению с  $R_0$ , и учитывая, что  $\mathbf{v}_i(\tau) = \frac{d\mathbf{r}_i(\tau)}{d\tau}$ , получаем:

$$\mathbf{A}(\mathbf{R}_0, t) = \frac{\mu\mu_0}{4\pi R_0} \frac{d}{d\tau} \sum_{i=1}^N q_i \mathbf{r}_i(\tau), \quad (8.9)$$

где  $\sum_{i=1}^N q_i \mathbf{r}_i(\tau) = \mathbf{P}(\tau)$  – дипольный момент системы зарядов.

Тогда

$$\mathbf{A}(\mathbf{R}_0, t) = \frac{\mu\mu_0}{4\pi R_0} \dot{\mathbf{P}}(\tau). \quad (8.10)$$

Таким образом, векторный потенциал произвольной системы движущихся зарядов (в том числе и нейтральной) на больших расстояниях от нее однозначно определяется скоростью изменения вектора электрического дипольного момента этой системы  $\mathbf{P}(\tau)$ .

Диполь, дипольный момент которого изменяется со временем, называют *осциллятором* или *вибратором*. Поле нейтральной системы заря-

дов (например, атомов и молекул) на больших расстояниях от нее совпадает с полем осциллятора, дипольный момент которого равен дипольному моменту системы.

### § 8.2. Энергия, излучаемая системой зарядов в пределах малого телесного угла

На большом расстоянии в пределах малого телесного угла волну можно считать плоской. Для плоской волны:

$$\begin{aligned} \mathbf{S} &= [\mathbf{E}\mathbf{H}]; \quad \sqrt{\varepsilon_0} \mathbf{E} = \sqrt{\mu\mu_0} \mathbf{H}; \quad \mathbf{E} = \sqrt{\frac{\mu\mu_0}{\varepsilon_0}} \mathbf{H}; \\ \mathbf{S} &= \left( \sqrt{\frac{\mu\mu_0}{\varepsilon_0}} H^2 \right) \mathbf{m} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu\mu_0}} (\mu\mu_0 H^2) \mathbf{m} = \\ &= v\mu\mu_0 H^2 \mathbf{m} \end{aligned} \quad (8.11)$$

где  $\mathbf{m}=\mathbf{R}_0/R_0$  – единичный вектор, совпадающий по направлению с волновым вектором  $\mathbf{k}$ .

Для нахождения  $\mathbf{S}$  в точке наблюдения выразим  $\mathbf{H}$  через векторный потенциал  $\mathbf{A}$ , используя (8.10):

$$\mathbf{B} = \text{rot}\mathbf{A} = \frac{\mu\mu_0}{4\pi R_0} \text{rot} \left\{ \dot{\mathbf{P}} \left( t - \frac{R_0}{v} \right) \right\} = -\frac{\mu\mu_0}{4\pi R_0 v} [\mathbf{m}\ddot{\mathbf{P}}]. \quad (8.12)$$

Из соотношения (8.12) следует, что

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu\mu_0} = -\frac{1}{4\pi R_0 v} [\mathbf{m}\ddot{\mathbf{P}}] \quad (8.13)$$

Подставляя (8.13) в уравнение (8.11), получаем:

$$\mathbf{S} = \frac{\mu\mu_0 v}{(4\pi R_0 v)^2} [\mathbf{m}\ddot{\mathbf{P}}]^2 \mathbf{m} = \frac{\mu\mu_0}{16\pi^2 v} [\mathbf{m}\ddot{\mathbf{P}}]^2 \frac{1}{R_0^2} \mathbf{m}. \quad (8.14)$$

Вычислим поток энергии через площадку  $d\sigma$ :

$$dW = \mathbf{S}d\sigma = \frac{\mu\mu_0}{16\pi^2 v} [\mathbf{m}\ddot{\mathbf{P}}]^2 \frac{d\sigma}{R_0^2} \mathbf{m} = \frac{\mu\mu_0}{16\pi^2 v} [\mathbf{m}\ddot{\mathbf{P}}]^2 d\Omega, \quad (8.15)$$

где  $d\sigma/R_0^2 = d\Omega$  – элемент телесного угла.

### § 8.3 Излучение гармонического осциллятора

Как известно, первый генератор электромагнитных волн был построен Герцем в 1888 году и получил название вибратора (а также осциллятора или переменного диполя).

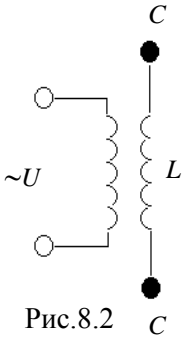


Рис.8.2

Простейший осциллятор состоит из двух металлических шаров емкостью  $C$  и индуктивностью  $L$ . (рис.8.2). Ко второй катушке подведен сигнал от генератора высокочастотных колебаний. В такой системе индуцируется переменный дипольный момент

$$\mathbf{P}(t) = q(t)\mathbf{l} = q_0\mathbf{l} \cos \omega t = \mathbf{P} \cos \omega t, \quad (8.16)$$

где  $\omega$  – частота колебаний генератора.

Вычислим энергию, излучаемую вибратором, пользуясь формулой (8.15) предыдущего параграфа.

Для этого будем пользоваться сферической системой координат (рис.8.3 а). В этом случае

$$dW = \frac{\mu\mu_0}{16\pi^2\nu} [\mathbf{m}\ddot{\mathbf{P}}]^2 d\Omega = \frac{\mu\mu_0}{16\pi^2\nu} \ddot{P}^2 \sin^3 \theta d\theta d\varphi, \quad (8.17)$$

где  $d\Omega = \sin \theta d\theta d\alpha$  и  $[\mathbf{m}\ddot{\mathbf{P}}]^2 = \ddot{P}^2 \sin^2 \theta$ .

Уравнение (8.17) показывает, что для диполя энергия, излученная в каком-либо направлении, сильно зависит от угла  $\theta$ . При  $\theta = 0$  излучения нет, в направлении  $\theta = \pi/2$  – оно максимально. Диаграмма излучения  $W(\theta)$  будет иметь вид, представленный на рис. 8.3 б.

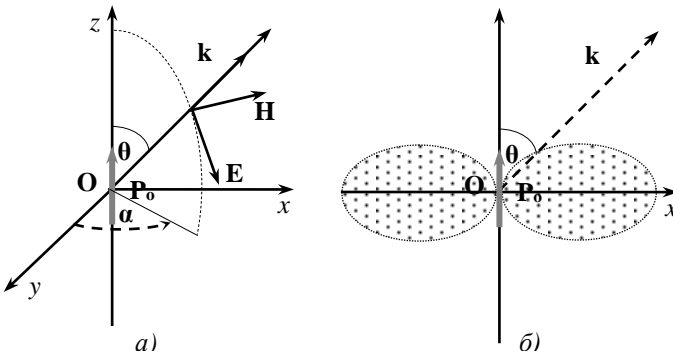


Рис. 8.3

Полная мощность, излучаемая по всем направлениям, будет равна:

$$W = \oint dW = \int_{\theta=0}^{\pi/2} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \frac{\mu\mu_0}{16\pi^2\nu} \ddot{P}^2 \sin^3 \theta d\theta d\varphi = \frac{\mu\mu_0}{16\pi^2\nu} \ddot{P}^2 \int_0^{\pi/2} \sin^3 \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi =$$

$$= \frac{\mu\mu_0}{8\pi\nu} \ddot{P}^2 \int_0^{\pi/2} (1 - \cos^2 \theta) \sin \theta d\theta = \frac{\mu\mu_0}{8\pi\nu} \ddot{P}^2 \left( -\cos \theta \Big|_0^{\pi/2} + \frac{\cos^3 \theta}{3} \Big|_0^{\pi/2} \right) = \frac{\mu\mu_0}{12\pi\nu} \ddot{P}^2$$

Так как  $P = P_0 \cos \omega t$  и  $\ddot{P} = P_0 \omega^2 \cos \omega t$ , то

$$W = \frac{\mu\mu_0}{12\pi\nu} P_0^2 \omega^4 \cos^2 \omega t \quad (8.18)$$

Это полная энергия, излучаемая осциллятором.

Из численного значения и направления вектора Умова – Пойтинга можно определить значение и направление векторов поля в сферической волне. Для этого поместим диполь в начало сферической системы координат (рис. 8.4).

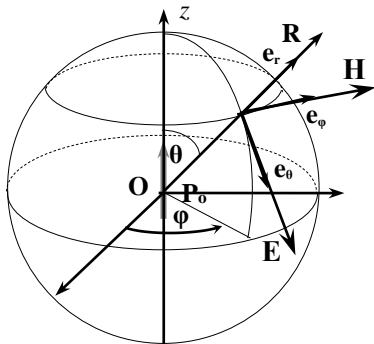


Рис. 8.4.

Электрический вектор  $\mathbf{E}$  имеет составляющую по углу  $\theta$ , т.е., силовые линии совпадают с меридианами. Магнитные линии имеют составляющие только по координате  $\varphi$ , тогда можно записать

$$E_r = E_\varphi = 0; \quad H_r = H_\theta = 0.$$

Значения  $E_\theta$  и  $H_\varphi$  находим из выражения для вектора Умова-Пойтинга (8.14) где, учитывая, что  $[\mathbf{m}\ddot{\mathbf{P}}]^2 = \ddot{P}^2 \sin^2 \theta$  и

$\ddot{P} = P_0 \omega^2 \cos \omega t$ , получим:

$$\mathbf{S} = \left( \frac{\mu\mu_0}{16\pi^2\nu} \frac{P_0^2}{R_0^2} \omega^4 \cos^2 \omega t \sin^2 \theta \right) \mathbf{m}. \quad (8.19)$$

С другой стороны

$$\mathbf{S} = [\mathbf{E}\mathbf{H}] = \left( \sqrt{\frac{\varepsilon\varepsilon_0}{\mu\mu_0}} E^2 \right) \mathbf{m}. \quad (8.20)$$

Из выражений (8.19) и (8.20) имеем:



$$\frac{\mu\mu_0}{16\pi^2\nu} \frac{P_0^2}{R_0^2} \omega^4 \cos^2 \omega t \sin^2 \theta = \sqrt{\frac{\varepsilon\varepsilon_0}{\mu\mu_0}} E^2,$$

$$E^2 = \frac{\mu\mu_0 \sqrt{\mu\mu_0}}{16\pi^2\nu \sqrt{\varepsilon\varepsilon_0}} \frac{P_0^2}{R_0^2} \omega^4 \cos^2 \omega t \sin^2 \theta =$$

$$= \frac{\omega^4 P_0^2}{(\varepsilon\varepsilon_0)^2 \nu^4 16\pi^2 R_0^2} \cos^2 \omega t \sin^2 \theta$$

На больших расстояниях от осциллятора (при  $R \gg \lambda$  в так называемой *волновой зоне*) необходимо учесть эффект запаздывания, таким образом, значение вектора напряженности электрического поля

$$E = E_\theta = \frac{\omega^2 P_0}{4\pi\nu^2 R_0 \varepsilon\varepsilon_0} \sin \theta \cos \left( \left( t - \frac{R}{\nu} \right) \omega \right). \quad (8.21)$$

Учитывая, что  $\sqrt{\varepsilon\varepsilon_0} E = \sqrt{\mu\mu_0} H$ , находим

$$H_\varphi = H = \sqrt{\frac{\varepsilon\varepsilon_0}{\mu\mu_0}} \frac{\omega^2 P_0}{4\pi\nu^2 R_0 \varepsilon\varepsilon_0} \sin \theta \cos \left( \left( t - \frac{R}{\nu} \right) \omega \right)$$

или

$$H = H_\varphi = \frac{\omega^2 P_0}{4\pi R_0 \nu} \sin \theta \cos \left( \left( t - \frac{R}{\nu} \right) \omega \right). \quad (8.22)$$

Как видно из выражений (8.21) и (8.22), напряженность полей в волновой зоне убывает пропорционально первой степени расстояния.

Сравним полученный результат с полем статического диполя (4.28):

$$\left\{ \begin{aligned} E_r &= -\frac{\partial \varphi_{II}}{\partial R} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{2P \cos \theta}{R^3}, & E_\theta &= -\frac{1}{R} \frac{\partial \varphi_{II}}{\partial \theta} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{P \sin \theta}{R^3} \end{aligned} \right.$$

Поле статического диполя убывает пропорционально третьей степени расстояния. Более медленное убывание  $\mathbf{H}$  и  $\mathbf{E}$  волнового поля (по сравнению со статическими полями) объясняется излучением энергии. Практическое значение этого вывода заключается в возможности передачи сигналов на большие расстояния.

Подводя итог рассмотрению излучения линейного гармонического осциллятора в вакууме, можно сделать следующие **выводы**.

1) Средняя мощность излучения, согласно пропорциональна квадрату амплитуды его электрического (дипольного) момента и четвертой степени его частоты. В силу последнего обстоятельства для радиосвязи использу-

ются электромагнитные волны сравнительно большой частоты, а в электротехнике – медленнопеременные токи, энергия излучения которых ничтожно мала.

2) Средняя излучаемая мощность, согласно(8.19), пропорциональна квадрату амплитуды дипольного момента осциллятора  $P_0$ , а  $P = ql$ , где  $l$  – длина антенны излучателя (осциллятора), поэтому для передатчиков используются длинные антенны.

3) Осциллятор непрерывно излучает электромагнитную энергию, которая, согласно (8.18), без потерь переносится в отдельные участки пространства. Вследствие отсутствия потерь, поток энергии через любую окружающую осциллятор поверхность протекает один и тот же. Если в качестве такой поверхности выбрана сфера с центром в точке, в которой локализован осциллятор, то в волновой зоне амплитуды напряженностей поля  $E$  и  $H$ , согласно (8.21) и (8.22 ) пропорциональны  $1/R$ , а модуль вектора Умова – Пойтинга  $\sim 1/R^2$ . Таким образом, становится понятным, почему поток энергии в единицу времени переносимой электромагнитной волной  $N = S \cdot 4\pi R^2$  не зависит от  $R$ .

#### § 8.4 Классическая теория излучения упруго связанного электрона

Рассмотрим вопрос об излучении упруго связанного колеблющегося электрона. Наиболее простым вариантом такой модели является атом с одним электроном, положение которого совпадает с центром атома. При возбуждении атома (электронным ударом, тепловым движением, воздействием света) электрон смещается из положения равновесия.

Пусть во время возбуждения электрон был оттянут до границы атома, т.е. удален от положения равновесия на расстояние  $a$ . Уравнение движения такого электрона

$$m\ddot{x} + kx = 0. \quad (8.23)$$

Решение этого уравнения имеет вид

$$x = a \cos \omega t .$$

Полная энергия колеблющегося электрона складывается из кинетической  $m\dot{x}^2/2$  и потенциальной  $kx^2/2$  энергий:

$$\begin{aligned} E &= \frac{ma^2\omega^2 \sin^2 \omega t}{2} + \frac{ka^2 \cos^2 \omega t}{2} = \\ &= \frac{a^2m}{2} \left( \omega^2 \sin^2 \omega t + \frac{k}{m} \cos^2 \omega t \right) = \frac{a^2m\omega^2}{2} , \end{aligned} \quad (8.24)$$

здесь учтено, что собственная частота упругих колебаний  $\omega^2 = \frac{k}{m}$ .

Очевидно, что это максимальная энергия, которой может обладать электрон, оставаясь в атоме.

Исходя из (8.18), запишем формулу для средней мощности, излучаемой вибратором

$$\bar{W} = \frac{\mu\mu_0}{12\pi c} P_0^2 \omega^4, \quad (8.25)$$

Дипольный момент атома  $P_0 = ea$ .

Из выражения (8.24) следует, что

$$a^2 = \frac{2}{m\omega^2} E, \quad (8.26)$$

тогда

$$\begin{aligned} \bar{W} &= \frac{\mu_0 e^2 \omega^4}{12\pi c} \frac{2}{m\omega^2} E = \frac{2\mu_0 e^2 \omega^2}{12\pi m c} E, \\ \bar{W} &= \frac{\mu_0 e^2 \omega^2}{6\pi m c} E. \end{aligned} \quad (8.27)$$

Это решение не является точным, поскольку электрон излучает, а, следовательно, его энергия убывает и амплитуда уменьшается (это называется *радиационным трением*).

Изменение излучения в случае слабого затухания можно учесть следующим образом: поскольку излучение происходит за счет убыли энергии электрона, то можно записать

$$\bar{W} = -\frac{dE}{dt} \quad \text{или} \quad \frac{dE}{dt} = -\frac{\mu_0 e^2 \omega^2}{6\pi m c} E. \quad (8.28)$$

Обозначим  $\frac{\mu_0 e^2 \omega^2}{6\pi m c} = \gamma$ , тогда  $\frac{dE}{dt} = -\gamma E$ .

Разделяя переменные  $\frac{dE}{E} = -\gamma dt$ , и интегрируя, получаем:

$$\begin{aligned} \ln E &= -\gamma t + \ln C \\ \ln \frac{E}{C} &= -\gamma t \Rightarrow E = Ce^{-\gamma t}. \end{aligned}$$

Постоянную интегрирования  $C$  находим с из начальных условий: при  $t = 0$  (момент возбуждения)  $E(0) = E_0$ , следовательно  $C = E_0$ . Таким образом, получаем закон излучения

$$E = E_0 e^{-\gamma t}. \quad (8.29)$$

Подставляя (8.29) в (8.27) получим

$$\overline{W} = \frac{\mu_0 e^2 \omega^2}{6\pi m c} E_0 e^{-\gamma t} \quad (8.30)$$

Это закон излучения в интегральной форме.

Из (8.29) и (8.30) очевидно, что энергия возбуждаемого электрона и средняя мощность излучения убывают с течением времени по экспоненциальному закону.

В оптике большое значение имеет величина

$$\tau = \frac{1}{\gamma} = \frac{6\pi m c}{\mu_0 e^2 \omega^2}, \quad (8.31)$$

называемая *средним временем жизни возбужденного атома*.

Очевидно, что при  $t = \tau$  энергия электрона уменьшается в  $e \approx 2,7$  раза. Таким образом, средняя продолжительность жизни возбужденного атома представляет собой промежуток времени до момента, когда энергия электрона, полученная им при возбуждении, убывает вследствие излучения в  $e$  раз (т.е. до 37 % своего начального значения).

При излучении видимого света  $\omega \cong 10\pi \cdot 10^{14} \text{ с}^{-1}$  средняя продолжительность жизни атома, рассчитанная по формуле (8.31), оказывается равной  $\tau \cong 10^{-8} \text{ с}$ .

Выражая смещение  $x$  возбужденного электрона через энергию, воспользовавшись выражением (8.26), получим:

$$x = a \cos \omega t = \left( \frac{2E}{m\omega^2} \right)^{\frac{1}{2}} \cos \omega t = \left( \frac{2E_0}{m\omega^2} \right)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{\gamma}{2}t} \cos \omega t = a e^{-\frac{\gamma}{2}t} \cos \omega t, \quad (8.32)$$

$$x = a e^{-\frac{\gamma}{2}t} \cos \omega t.$$

Т.е. затухающее колебание не является периодическим и будет определяться набором частот с определенным распределением. Отсюда вытекает важное представление о «структуре» световых волн. Каждый атом излучает в виде импульса или цуга волн.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Кудрявцев, П.С. История физики / П.С. Кудрявцев. – Т. I: От древности до Менделеева. – М.: Государственное учебно-педагогическое издательство министерства просвещения РСФСР, 1956. – Изд. 2-е. – 564 с.
2. Кудрявцев, П. С.. История физики / П. С. Кудрявцев. – Т. II: От Менделеева до открытия квант (1870 – 1900 гг.). – М.: Государственное учебно-педагогическое издательство министерства просвещения РСФСР, 1956. – 488 с.
3. Спасский, Б. И. История физики / Б. И. Спасский. – М.: Издательство Московского университета, 1963. – Ч. 1. – 332 с.
4. Зоммерфельд, А. Электродинамика / А. Зоммерфельд; [Перевод с немецкого. Под редакцией С. А. Элькинда]. – М.: Издательство иностранной литературы, 1958. – 504 с.
5. Тамм И. Е. Основы теории электричества. – Изд. 8-е. – М.: Изд-во «Наука», 1966. – 624 с.
6. Льюцци Марио. История физики / Марио Льюцци. Перевод с итальянского Э.Л. Бурштейна. – М.: Изд-во «Мир», 1970. – 464 с.
7. Лоренц, Г. А. Теория электронов / Г. А. Лоренц. Пер. с англ. проф. М. В. Савостьяновой. Под ред. чл.-корр. АН ССР Т. П. Кравца. – Изд. 2-е, испр. и доп. – М.: Гос. изд-во техн.-теор. лит-ры, 1956. – 472 с.
8. Чертов, А.Г. Физические величины (Терминология, определения, обозначения, размерности, единицы) / А. Г. Чертов. – М.: Высшая школа, 1990. – 335 с.
9. Физическая энциклопедия. – Т. 2. – М.: «Советская энциклопедия», 1990. – 704 с.: ил.
10. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика: Учеб. пособие для вузов. – В 10 т. – Т. II. Теория поля. – Издание 8-е, стереотипное. Под редакцией Л. П. Питаевского. – М., ФИЗМАТЛИТ, 2003. – 536 с.
11. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика: Учеб. пособие для вузов. – В 10 т. – Т. VIII. Электродинамика сплошных сред. – Издание 8-е, стереотипное. Под редакцией Л. П. Питаевского. – М., ФИЗМАТЛИТ, 2003. – 656 с.
12. Пеннер Д.И., Угаров В.А. Электродинамика и специальная теория относительности: Уч. пособие для студентов физ.-мат. фак. пед. ин-тов. – М.: Просвещение, 1980. – 271 с.