Министерство науки и высшего образования Российской Федерации

Амурский государственный университет

Веселова Елена Михайловна

Максимова Надежда Николаевна

Математический анализ. Экстремум функции нескольких переменных

Учебно-методическое пособие

Благовещенск

Издательство АмГУ

2021

УДК 517.272

Рекомендовано

учебно-методическим советом университета

Рецензент:

Сельвинский В.В., доцент кафедры математического анализа и моделирования ФГБОУ ВО «Амурский государственный университет», канд. физ.-мат. наук

Веселова, Е.М., Максимова, Н.Н.

Математический анализ. Экстремум функции нескольких переменных. Учебно-методическое пособие / Е.М. Веселова, Н.Н. Максимова. – Благовещенск: Изд-во АмГУ, 2021. – 39 с.

Данное пособие посвящено применению дифференциального исчисления к исследованию на экстремумы функции многих переменных. Рассмотрены задачи поиска безусловного локального экстремума, поиска условного экстремума, в том числе задача нахождения наибольшего и наименьшего значений функции двух переменных в области. Каждый раздел содержит большое количество подробно разобранных примеров. В конце пособия приведены 30 вариантов индивидуальных заданий для самостоятельной работы.

Учебно-методическое пособие предназначено для студентов, обучающихся по направлениям подготовки 01.03.02 – «Прикладная математика и информатика», 03.03.02 – «Физика», 09.03.01 – «Информатика и вычислительная техника», 09.03.02 – «Информационные системы и технологии», 09.03.02 – «Информационные системы и технологии», 09.03.04 – «Программная инженерия», 24.03.01 – «Ракетные комплексы и космонавтика», 24.05.01 – «Проектирование, производство и эксплуатация ракет и ракетно-космических комплексов» в рамках изучения дисциплины «Математический анализ», а также будет полезно для студентов всех форм и ступеней обучения.

ВВЕДЕНИЕ

Многие вопросы естествознания приводят к рассмотрению такой зависимости между несколькими переменными величинами, при которой значение одной из этих переменных величин полностью определяется значениями остальных переменных. Для изучения такого рода зависимостей вводится понятие функции нескольких переменных и развивается аппарат для исследования таких функций методами дифференциального исчисления. На случай функции нескольких переменных распространяются многие понятия и утверждения, справедливые для функции одной переменной.

Многие из области математики и из других областей науки и техники приводят к вопросу о нахождении максимального или минимального, наибольшего или наименьшего значений некоторых функций, зависящих от одного и более переменных. Во многих задачах требуется исследовать функцию на экстремум в случае, когда переменные функции не являются независимыми, а связаны друг с другом некоторыми добавочными условиями, которые служат ограничениями на их использование. В этом случае возникает специфическая задача для функций нескольких переменных на условный экстремум. Необходимость решения подобного рода задач требует введения понятий локальных экстремумов, условных экстремумов, глобальных экстремумов и методов их нахождения. Главный инструмент в этом вопросе – исследование поведения функции по информации о ее частных производных.

Данное пособие посвящено применению дифференциального исчисления к исследованию на экстремумы функции многих переменных. Рассмотрены задачи поиска безусловного локального экстремума, поиска условного экстремума, в том числе задача нахождения наибольшего и наименьшего значений функции двух переменных в области. Каждый раздел содержит большое количество подробно разобранных примеров. В конце пособия приведены 30 вариантов индивидуальных заданий для самостоятельной работы.

Учебно-методическое пособие предназначено для студентов, обучающихся по направлениям подготовки 01.03.02 – «Прикладная математика и информатика», 03.03.02 – «Физика», 09.03.01 – «Информатика и вычислительная техника», 09.03.02 – «Информационные системы и технологии», 09.03.02 – «Информационные системы и технологии», 09.03.04 – «Программная инженерия», 24.03.01 – «Ракетные комплексы и космонавтика», 24.05.01 – «Проектирование, производство и эксплуатация ракет и ракетно-космических комплексов» в рамках изучения дисциплины «Математический анализ», а также будет полезно для студентов всех форм и ступеней обучения.

Для более подробного изучения теории данного раздела математического анализа читатели могут использовать литературу из библиографического списка.

1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Определение. Если для функции $z = f(x, y)$, определенной в некоторой области, в некоторой окрестности точки $M_0(x_0, y_0)$ верно неравенство

$$f(x_0, y_0) > f(x, y)$$

то говорят, что ***функция*** $z = f(x, y)$ ***в точке M_0 достигает максимума***, а точка M_0 называется ***точкой максимума.***

Определение. Если для функции $z = f(x, y)$, определенной в некоторой области, в некоторой окрестности точки $M_0(x_0, y_0)$ верно неравенство

$$f(x_0, y_0) < f(x, y)$$

то говорят, что ***функция*** $z = f(x, y)$ ***в точке M_0 достигает минимума***, а точка M_0 называется ***точкой минимума.***

Точка $M_0(x_0, y_0)$ называется точкой ***локального экстремума***, если она является либо точкой локального максимума, либо точкой локального минимума.

Теорема (необходимые условия экстремума). Если функция $z = f(x, y)$ в точке $M_0(x_0, y_0)$ имеет экстремум, то в этой точке либо обе ее частные производные первого порядка равны нулю:

$$f'_x(x_0, y_0) = 0, \quad f'_y(x_0, y_0) = 0,$$

либо хотя бы одна из них не существует.

Эту точку $M_0(x_0, y_0)$ будем называть ***критической точкой.***

Точки, в которых все частные производные первого порядка равны нулю, называются ***стационарными точками***.

Эта теорема не является достаточной для исследования вопроса об экстремальных значениях функции, но позволяет находить эти значения в тех случаях, в которых мы заранее уверены в существовании максимума или минимума.

Пример 1. Функция $z = x^2 - y^2$ имеет производные $f'_x = 2x, \quad f'_y = -2y$, которые обращаются в нуль при $x = 0, \ y = 0$. Но эта функция при указанных значениях не имеет ни максимума, ни минимума. Действительно, эта функция равна нулю в начале координат и принимает в как угодно близких точках от начала координат как положительные, так и отрицательные значения.

Для исследования функции в критических точках установим достаточные условия экстремума функции двух переменных.

Теорема (достаточные условия экстремума). Пусть в окрестности критической точки $M_0(x_0, y_0)$ функция $z = f(x, y)$ имеет непрерывные частные производные до второго порядка включительно. Рассмотрим выражение:

$$D(x, y) = f''_{x^2}(x, y) \cdot f''_{y^2}(x, y) - \left[f''_{xy}(x, y)\right]^2,$$

которое называется второй квадратичной формой.

1. Если $D(M_0) > 0$, то в точке $M_0(x_0, y_0)$ функция $z = f(x, y)$ достигает локального экстремума; при этом если $f''_{x^2}(M_0) < 0$ ($f''_{y^2}(M_0) < 0$), то в точке $M_0(x_0, y_0)$ достигается максимум, если $f''_{x^2}(M_0) > 0$ ($f''_{y^2}(M_0) > 0$) – минимум.

2. Если $D(M_0) < 0$, то в точке $M_0(x_0, y_0)$ функция $z = f(x, y)$ не имеет экстремума.

3. В случае, если $D = 0$, вывод о наличии экстремума сделать нельзя (требуются дополнительные исследования).

Пример 2. Исследовать на экстремум функцию двух переменных

$$f(x, y) = 3xy - x^3 - y^3.$$

Решение. Найдем частные производные первого порядка и приравняем их нулю:

$$\begin{cases} f'_x = 3y - 3x^2 = 0, \\ f'_y = 3x - 3y^2 = 0. \end{cases}$$

Найдем решение полученной системы; получаем две стационарные точки $M_0(0{,}0)$ и $M_1(1{,}1)$.

Вычислим частные производные второго порядка и составим вторую квадратичную форму для функции:

$$D(x,y)=(-6x)\cdot(-6y)-3^2=36xy-9.$$

В точке $M_0(0{,}0)$ имеем $D(M_0)=-9<0$, следовательно, в этой точке локальный экстремум не достигается.

В точке $M_1(1{,}1)$ имеем $D(M_0)=27>0$, следовательно, в этой точке локальный экстремум достигается, и, поскольку $f''_{x^2}(M_1)=-6<0$ ($f''_{y^2}(M_1)=-6<0$), то в точке $M_1(1{,}1)$ достигается **локальный максимум**. Значение функции в этой точке (**значение локального максимума**) равно $f(M_1)=1$.

Пример 3. Исследовать на экстремум функцию двух переменных

$u=3x^2y+y^3-12x-15y+3.$

Решение. Найдем частные производные и приравниваем их к нулю:

$$\begin{cases} u'_x=6xy-12=0, \\ u'_y=3x^2+3y^2-15=0. \end{cases}$$

Из первого выразим $y=\dfrac{2}{x}$ и подставим во второе, сокращенное на 3:

$$x^2+\left(\frac{2}{x}\right)^2-5=0 \quad (\times x^2,\ x\neq 0), \qquad\qquad x^4-5x^2+4=0.$$

Из последнего находим $x^2=1$ и $x^2=4$, откуда $x_{1,2}=\pm 1$ и $x_{3,4}=\pm 2$. Тогда $y_{1,2}=\pm 2$ и $y_{3,4}=\pm 1$.

Окончательно получаем четыре стационарные точки

$M_1(1, 2)$, $M_2(-1, -2)$, $M_3(2, 1)$, $M_4(-2, -1)$.

Далее находим частные производные второго порядка

$$u''_{x^2} = 6y, \quad u''_{y^2} = 6y, \quad u''_{xy} = 6x$$

и составляем вторую квадратичную форму

$$D(x, y) = (6y) \cdot (6y) - (6x)^2.$$

Исследуем вторую квадратичную форму в каждой стационарной точке:

1) $D(M_1) = (6 \cdot 2) \cdot (6 \cdot 2) - (6 \cdot 1)^2 = 108 > 0$, следовательно, есть экстремум; т.к. в т. $M_1(1, 2)$ вторые частные производные u''_{x^2}, u''_{y^2} положительные, следовательно, в т. $M_1(1, 2)$ достигается **локальный минимум**; значение **локального минимума** $u(1, 2) = 25$;

2) $D(M_2) = (-6 \cdot 2) \cdot (-6 \cdot 2) - (-6 \cdot 1)^2 = 108 > 0$, следовательно, есть экстремум; т.к. в т. $M_2(-1, -2)$ вторые частные производные u''_{x^2}, u''_{y^2} отрицательные, следовательно, в т. $M_2(-1, -2)$ достигается **локальный максимум**; значение **локального максимума** $u(-1, -2) = 31$;

3) $D(M_3) = (6 \cdot 1) \cdot (6 \cdot 1) - (6 \cdot 2)^2 = -108 < 0$, следовательно, экстремума нет;

4) $D(M_4) = (-6) \cdot (-6) - (-6 \cdot 2)^2 = -108 < 0$, следовательно, экстремума нет.

2. УСЛОВНЫЙ ЭКСТРЕМУМ ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Задача нахождения ***условного экстремума*** ставится, когда переменные x и y, входящие в функцию $z = f(x, y)$, не являются независимыми, т.е. существует некоторое соотношение $\varphi(x, y) = 0$, которое называется ***уравнением связи***.

Тогда из переменных x и y только одна будет независимой, т.к. другая может быть выражена через нее из уравнения связи.

В самом общем случае задача отыскания условного экстремума функции нескольких переменных представляется в виде. Рассмотрим функцию

$$u = f(x_1, x_2, ..., x_n),$$

при условии, что ее аргументы не являются независимыми переменными, а связаны между собой m уравнениями связи ($m < n$):

$$\varphi_i(x_1, x_2, ..., x_n) = 0, \ i = \overline{1, m}.$$

Пусть координаты точки $M_0(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0)$ удовлетворяют уравнениям связи.

Определение. Функция $u = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ имеет в точке M_0 ***условный минимум (максимум)*** при имеющихся условиях связи, если существует такая окрестность точки M_0, что для любой точки M ($M \neq M_0$) этой окрестности, координаты которой удовлетворяют уравнениям связи, выполняется неравенство $f(M) > f(M_0)$ ($f(M) < f(M_0)$).

Иными словами, условный максимум (минимум) – это наибольшее (наименьшее) значение функции в точке M_0 по отношению не ко всем точкам из некоторой окрестности точки M_0, а только к тем из них, которые связаны между собой условиями связи.

Для аналитического решения поставленной задачи поиска условного экстремума функции нескольких переменных выделяют два метода – метод исключения переменных и метод множителей Лагранжа.

2.1. Метод исключения переменных

Задачу об условном экстремуме функции можно решать ***методом исключения части переменных***. Этот метод состоит в том, что из m уравнений условий связи m переменных выражают через остальные n–m переменных (если это возможно), подставляют найденные переменные в функцию $u = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ и решают задачу об экстремуме функции n–m (равно 1 или 2) переменных.

Пример 4. Найти условный экстремум функции $u = xy^2$ относительно заданного уравнения связи $x + 2y - 1 = 0$.

Решение. Из условия связи выразим переменную $x = 1 - 2y$ и подставим в функцию:

$$u(x, y) = u(1-2y, y) = (1-2y)\cdot y^2 = y^2 - 2y^3 = v(y).$$

Получили функцию одного аргумента. Исследуем эту функцию на безусловный экстремум, для этого находим производную и приравниваем ее к нулю:

$$v'(y) = \left(y^2 - 2y^3\right)' = 2y - 6y^2 = 2y(1-3y) = 0;$$

откуда находим $y = 0,\ y = 1/3$ – стационарные точки. Точек разрыва производной нет.

В найденных точках исследуем знак второй производной. Находим $v''(y) = \left(2y - 6y^2\right)' = 2 - 12y$. Тогда:

1) $v''(0) = 2 > 0$, следовательно, при $y = 0$ функция $v(y)$ достигает условного минимума ($v(0) = 0$);

2) $v''(1/3) = -2 < 0$, следовательно, при $y = 1/3$ функция $v(y)$ достигает локального максимума ($v(1/3) = 1/27$).

Окончательно получаем ответ:

точка **условного локального минимума** $M^{\min}(1,0)$, значение условного локального минимумам $u(M^{\min})=0$;

точка **условного локального максимума** $M^{\max}(1/3,1/3)$, значение условного локального максимума $u(M^{\max})=1/3\cdot(1/3)^2=1/27$.

Пример 5. Методом исключения части переменных найти экстремум функции $u=x+y+z^2$ при условиях связи $\begin{cases} z-x=1, \\ y-xz=1. \end{cases}$

Решение. Из условий связи находим

$$z=x+1,\ y=xz+1=x(x+1)+1=x^2+x+1.$$

Подставляя найденные y,z в функцию, приходим к функции одной переменной:

$$u=x+(x^2+x+1)+(x+1)^2=2x^2+4x+2,$$

для которой рассмотрим задачу о безусловном экстремуме.

Поскольку $u'=4x+4=0$ при $x=-1$, то функция $u(x)$ имеет единственную точку возможного экстремума. Поскольку $u''=4>0$ в любой точке, в том числе в точке $x=-1$, функция $u(x)$ имеет минимум в этой точке. Из условий связи находим соответствующие значения y,z: $y=1,\ z=0$.

Итак, функция $u=x+y+z^2$ при заданных условиях связи имеет в точке $M^{\min}(-1,1,0)$ **условный локальный минимум**, причем значение этого минимума $u(M^{\min})=0$.

Пример 6. Методом исключения части переменных найти экстремум функции $u=xy+2xz+2yz$ при условии связи $xyz=108$.

Решение. Выразим из условия связи одну переменную через две другие $z=\dfrac{108}{xy}$ и подставим в функцию:

$$u(x, y, z) = u\left(x, y, \frac{108}{xy}\right) = xy + 2x \cdot \frac{108}{xy} + 2y \cdot \frac{108}{xy} = xy + \frac{216}{y} + \frac{216}{x} = v(x, y).$$

Полученную функцию двух переменных исследуем на безусловный экстремум. Для этого находим частные производные и приравниваем их к нулю:

$$\begin{cases} v'_x = \left(xy + \dfrac{216}{y} + \dfrac{216}{x}\right)'_x = y - \dfrac{216}{x^2} = 0, \\ v'_y = \left(xy + \dfrac{216}{y} + \dfrac{216}{x}\right)'_y = x - \dfrac{216}{y^2} = 0. \end{cases}$$

Откуда получаем стационарные точки. Из первого уравнения находим $y = \dfrac{216}{x^2}$ и подставляем во второе уравнение:

$$x - \frac{216}{\left(\dfrac{216}{x^2}\right)^2} = 0, \quad x - \frac{x^4}{216} = 0, \qquad x\left(1 - \frac{x^3}{216}\right) = 0.$$

Откуда имеем:

1) $x = 0$ не может быть корнем, поскольку в этой точке производные разрывны и сама функция $v(x, y)$ не определена;

2) $x^3 = 216$, откуда $x = 6$ и $y = 6$.

Получаем стационарную точку функции $v(x, y)$ – $M(6, 6)$.

Находим вторые частные производные

$$v''_{x^2} = \left(y - \frac{216}{x^2}\right)'_x = \frac{432}{x^3}, \quad v''_{xy} = \left(y - \frac{216}{x^2}\right)'_y = 1, \quad v''_{y^2} = \left(x - \frac{216}{y^2}\right)'_x = \frac{432}{y^3},$$

составляем вторую квадратичную форму

$$D(x, y) = \frac{432}{x^3} \cdot \frac{432}{y^3} - 1^2,$$

исследуем ее знак в стационарной точке

$$D(M) = \frac{432}{6^3} \cdot \frac{432}{6^3} - 1^2 = 3 > 0.$$

Следовательно, в стационарной точке $M(6, 6)$ достигается локальный экстремум функции $v(x, y)$. Поскольку $v''_{x^2}(M) = \left.\dfrac{432}{x^3}\right|_M = 2 > 0$, $v''_{y^2}(M) = \left.\dfrac{432}{y^3}\right|_M = 2 > 0$, то в точке $M(6, 6)$ достигается локальный минимум функции $v(x, y)$.

А тогда точкой **условного локального минимума** является точка $M^{\min}(6,6,3)$, значение условного локального минимумам $u(M^{\min}) = 6\cdot 6 + 2\cdot 6\cdot 3 + 2\cdot 6\cdot 3 = 108$ (для проверки этого значения также вычисляем $v(M) = 6\cdot 6 + \dfrac{216}{6} + \dfrac{216}{6} = 108$).

Пример 7. Методом исключения части переменных найти экстремум функции $u = xyz$ при условиях связи $\begin{cases} x + y - z = 3, \\ x - y - z = 8. \end{cases}$

Решение. Выразим из условий связи две переменные через третью. Для этого вычтем из первого второе; получим $2y = –5$, откуда $y = –5/2$; тогда первое и второе уравнение примут вид:

$$\begin{cases} x - 5/2 - z = 3, \\ x + 5/2 - z = 8, \end{cases} \qquad \text{или} \qquad \begin{cases} x - z = 11/2, \\ x - z = 11/2. \end{cases}$$

Далее находим $x = z + 11/2$, $y = –5/2$. Подставляем в функцию

$$u(x, y, z) = u\left(z + \frac{11}{2}, -\frac{5}{2}, z \right) = \left(z + \frac{11}{2} \right)\cdot\left(-\frac{5}{2} \right)\cdot z = -\frac{5}{2}z^2 - \frac{55}{4}z = v(z).$$

Полученную функцию необходимо исследовать на безусловный экстремум. Функция $v(z)$ является квадратичной, ее графиком является парабола, ветви которой направлены вниз, следовательно, абсцисса вершины будет являться точкой локального максимума. Находим

$$z = -\frac{b}{2a} = -\frac{-55/4}{2\cdot(-5/2)} = -\frac{11}{4},$$

далее $x = -\dfrac{11}{4} + \dfrac{11}{2} = \dfrac{11}{4}$, $y = -\dfrac{5}{2}$.

Окончательно получаем, что $M^{\max}\left(\frac{11}{4},-\frac{5}{2},-\frac{11}{4}\right)$ является точкой **условного локального максимума**, значение условного локального максимума $u(M^{\max})=\frac{11}{4}\cdot\left(-\frac{5}{2}\right)\cdot\left(-\frac{11}{4}\right)=\frac{605}{32}$ (проверка $v\left(-\frac{11}{4}\right)=-\frac{5}{2}\cdot\left(-\frac{11}{4}\right)^2-\frac{55}{4}\cdot\left(-\frac{11}{4}\right)=$ $=\frac{-5\cdot 121+2\cdot 55\cdot 11}{32}=\frac{605}{32}$).

2.2. Метод множителей Лагранжа

Метод исключения переменных можно применять, если из условий связи удобно получить выражение одних переменных через другие. В самом общем случае применим ***метод Лагранжа*** (или ***метод множителей Лагранжа***).

Суть метода заключается в следующем: задача об условном экстремуме функции $u=f(x_1,x_2,...,x_n)$ при m условиях связи эквивалентна задаче об обычном экстремуме ***функции Лагранжа***

$$L(x_1,...,x_n,\lambda_1,...,\lambda_m)=f(x_1,x_2,...,x_n)+\sum_{i=1}^{m}\lambda_i\cdot\varphi_i(x_1,...,x_n).$$

коэффициенты λ_i ($i=\overline{1,m}$) – называются ***множителями Лагранжа***.

Необходимые условия условного экстремума выражаются системой $n+m$ уравнений :

$$\begin{cases}\dfrac{\partial L}{\partial x_j}=\dfrac{\partial f}{\partial x_j}+\sum\limits_{i=1}^{m}\lambda_i\cdot\dfrac{\partial\varphi_i}{\partial x_j}=0, & j=\overline{1,n},\\ \dfrac{\partial L}{\partial\lambda_i}=\varphi_i=0, & i=\overline{1,m}.\end{cases}$$

относительно $n+m$ неизвестных $x_1,...,x_n,\lambda_1,...,\lambda_m$. Если $N_0(x_1^0,...,x_n^0,\lambda_1^0,...,\lambda_m^0)$ – решение записанной системы, то $M_0(x_1^0,x_2^0,...,x_n^0)$ является точкой возможного экстремума функции $u=f(x_1,x_2,...,x_n)$ при имеющихся условиях связи. Достаточные условия условного экстремума связаны с изучением знака второго дифференциала функции Лагранжа $d^2L(N_0)$ при продифференцированных и вычисленных в точке $M_0(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0)$ условиях связи:

$$d\varphi_i(M_0) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}(M_0)dx_j = 0, \;\; i = \overline{1,m} \;. \quad (2.1)$$

При этом $dx_1^2 + dx_2^2 + ... + dx_n^2 \neq 0$ (т.е. не обращаются одновременно в нуль).

Следует отметить, что все частные производные функции Лагранжа по переменным λ_i, $i = \overline{1,m}$, будут равны нулю.

Функция $u = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ имеет ***условный максимум*** в точке $M_0(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0)$, если для всевозможных значений $dx_1, dx_2, ..., dx_n$, удовлетворяющих условиям (2.1) и не равных одновременно нулю, выполняется неравенство $d^2L(N_0) < 0$ (квадратичная форма отрицательно определена) и ***условный минимум***, если при этих условиях $d^2L(N_0) > 0$ (квадратичная форма положительно определена), если $d^2L(N_0)$ – знакопеременная квадратичная форма, то в точке M_0 функция $u = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ не имеет условного экстремума.

Пример 8. Найти экстремум функции $f(x, y) = xy$, если уравнение связи $2x + 3y - 5 = 0$.

Решение. Построим функцию Лагранжа $L(x, y, \lambda) = xy + \lambda(2x + 3y - 5)$, вычислим частные производные и приравняем их к нулю:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x} = y + 2\lambda = 0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial y} = x + 3\lambda = 0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = 2x + 3y - 5 = 0. \end{cases} \quad (2.2)$$

Найдем решение этой системы. Из первого уравнения выражаем $y = -2\lambda$, из второго – $x = -3\lambda$, и подставляем в третье уравнение системы (2.2):

$$-6\lambda - 6\lambda - 5 = 0.$$

Откуда находим $\lambda = -\frac{5}{12}$. И далее вычисляем $x = \frac{5}{4}$ и $y = \frac{5}{6}$. Получаем стационарную точку функции Лагранжа $N_0\left(\frac{5}{4}, \frac{5}{6}, -\frac{5}{12}\right)$ и точку возможного условного экстремума $M_0\left(\frac{5}{4}, \frac{5}{6}\right)$. Далее вычисляем вторые частные производные функции Лагранжа по переменным x, y:

$$\frac{\partial^2 L}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 L}{\partial y^2} = 0,\ \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} = 1.$$

Составляем второй дифференциал функции Лагранжа: $d^2 L(N_0) = (dxdy)\big|_{N_0} = dxdy$.

Далее дифференцируем условие связи $d(2x + 3y - 5) = 2dx + 3dy = 0$, откуда находим $dx = -\frac{3}{2}dy (\neq 0)$. Подставляем найденное во второй дифференциал, получаем $d^2 L(N_0) = -\frac{3}{2}dy^2 < 0$, то есть второй дифференциал является отрицательно определенным. Тем самым, в точке $M_0\left(\frac{5}{4}, \frac{5}{6}\right)$ достигается **условный минимум**. Значение этого минимума $f(M_0) = \frac{25}{24}$.

Пример 9. Методом Лагранжа найти экстремум функции $u = x + y + z^2$ при условиях связи $\begin{cases} z - x = 1, \\ y - xz = 1. \end{cases}$

Решение. Составим функцию Лагранжа

$$L(x, y, z, \lambda_1, \lambda_2) = x + y + z^2 + \lambda_1(z - x - 1) + \lambda_2(y - xz - 1)$$

и рассмотрим систему уравнений

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial L}{\partial x} = 1 - \lambda_1 - \lambda_2 z = 0, \\
\dfrac{\partial L}{\partial y} = 1 + \lambda_2 = 0, \\
\dfrac{\partial L}{\partial z} = 2z + \lambda_1 - \lambda_2 x = 0, \\
\dfrac{\partial L}{\partial \lambda_1} = z - x - 1 = 0, \\
\dfrac{\partial L}{\partial \lambda_2} = y - xz - 1 = 0.
\end{cases} \qquad (2.3)
$$

Найдем решение этой системы. Из второго уравнения получаем, что $\lambda_2 = -1$, тогда из остальных уравнений (2.3) получаем:

$$
\begin{cases}
1 - \lambda_1 + z = 0, \\
2z + \lambda_1 + x = 0, \\
z - x - 1 = 0, \\
y - xz - 1 = 0.
\end{cases} \qquad (2.4)
$$

Из первого уравнения системы (2.4) выражаем $\lambda_1 = 1 + z$ и подставляем в остальные уравнения. Имеем

$$
\begin{cases}
x + 3z = -1, \\
x - z = -1, \\
y - xz = 1.
\end{cases} \qquad (2.5)
$$

Вычитая из первого уравнения второе уравнение системы (2.5), получаем $-4z = 0$, откуда находим $z = 0$. Далее определяеем $x = -1$, $y = 1$ и $\lambda_1 = 1$. Окончательно, получаем единственную стационарную точку функции Лагранжа $N_0(-1,1,0,1,-1)$ и точку возможного экстремума функции при заданных условиях связи $M_0(-1,1,0)$.

Вычислим вторые частные производные функции Лагранжа по переменным x, y, z:

$$
\frac{\partial^2 L}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 L}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 L}{\partial y \partial z} = 0,\ \frac{\partial^2 L}{\partial z^2} = 2,\ \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial z} = -\lambda_2.
$$

Тогда получаем второй дифференциал функции Лагранжа

$$d^2L(N_0) = \left(2dz^2 - \lambda_2 dxdz\right)\Big|_{N_0} = 2dz^2 + dxdz\,. \qquad (2.6)$$

Далее, дифференцируем условия связи

$$\begin{cases} d(z-x) = -dx + dz = 0, \\ d(y - xz) = -zdx + dy - xdz = 0, \end{cases}$$

и вычисляем их в точке $M_0(-1,1,0)$. Получаем

$$\begin{cases} -dx + dz = 0, \\ dy + dz = 0. \end{cases}$$

Из первого уравнения находим $dx = dz$ и подставляем в (2.6):

$$d^2L(N_0) = 2dz^2 + dzdz = 4dz^2\,.$$

Очевидно, что $dz \neq 0$ (иначе $dx = 0$ и $dy = 0$, и не выполняется условие $dx_1^2 + dx_2^2 + \ldots + dx_n^2 \neq 0$). Тогда $d^2L(N_0) > 0$, то есть второй дифференциал функции Лагранжа является положительно определенной квадратичной формой Отсюда следует, что функция при заданных условиях связи имеет в точке $M_0(-1,1,0)$ **условный минимум**. Значение этого минимума равно $u(M_0) = 0$.

3. НАИБОЛЬШЕЕ И НАИМЕНЬШЕЕ ЗНАЧЕНИЯ ФУНКЦИИ В ОБЛАСТИ

Если функция $z = f(x, y)$ дифференцируема в ограниченной замкнутой области, то она достигает своего **наибольшего (наименьшего) значения** или в стационарной точке или в граничной точке области.

Для нахождения наибольшего (наименьшего) значения функции в замкнутой области, необходимо:

1) найти стационарные точки, принадлежащие данной области, вычислить значения функции в этих точках;

2) найти наибольшее и наименьшее значения функции на линиях, образующих границу области;

3) из всех найденных значений выбрать наибольшее и наименьшее.

Пример 9. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = x^3 + y^3 - 3xy$ в прямоугольнике $D = \{(x, y):\ 0 \le x \le 2,\ -1 \le y \le 2\}$.

Решение. Изобразим исследуемую область на рис. 1 (прямоугольник *ABCE*).

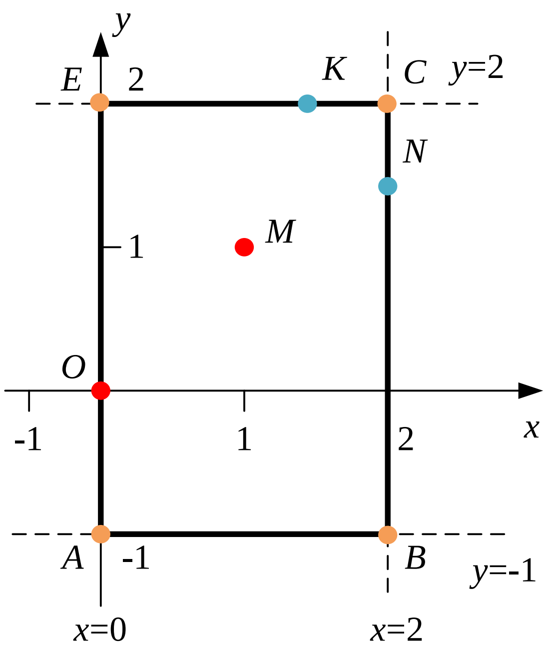

Рисунок 1 – Геометрическая иллюстрация для примера 9

Шаг 1. Найдем стационарные точки функции из системы. Для этого вычислим частные производные первого порядка и приравняем их к нулю:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 - 3y = 0, \\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = 3y^2 - 3x = 0. \end{cases}$$

Получаем две стационарные точки $O(0,0)$ и $M(1,1)$. Обе этих точки принадлежат исследуемой области. Вычисляем значения функции в этих точках $z(O) = 0,\ z(M) = -1$.

Шаг 2. Исследуем функцию на границах области.

Граница AE. При $x = 0$ имеем $z(x = 0, y) = y^3 = p(y)$.

Эта функция монотонно возрастает и на концах отрезка [–1, 2] принимает значения

$p(-1) = z(0,-1) = z(A) = -1,$

$p(2) = z(0,2) = z(E) = 8.$

Граница BC. При $x = 2$ имеем $z(x = 2, y) = 8 + y^3 - 6y = s(y)$.

Найдем значения этой функции в стационарной точке и на концах отрезка [–1, 2].

Имеем $s'(y) = 3y^2 - 6 = 0$, откуда $y^2 = 2$, следовательно, $y = \pm\sqrt{2}$.

В исследуемый промежуток включается только $y = \sqrt{2}$, откуда получаем точку $N(2,\sqrt{2})$.

Вычисляем значение функции:

$s(\sqrt{2}) = z(2,\sqrt{2}) = z(N) = 8 - 4\sqrt{2}$,

$s(-1) = z(2,-1) = z(B) = 13,$

$s(2) = z(2,2) = z(C) = 4.$

<u>Граница AB.</u> При $y=-1$ имеем $z(x,y=-1)=x^3-1+3x=q(x)$ и $q'(x)=3x^3+3>0$. Следовательно, функция $q(x)$ монотонно возрастает на отрезке $[0,2]$. Тогда вычисляем

$$q(0)=z(0,-1)=z(A)=-1,$$

$$q(2)=z(2,-1)=z(B)=13.$$

<u>Граница EC.</u> При $y=2$ имеем $z(x,y=2)=x^3+8-6x=g(x)$.

Производная $g'(x)=3x^2-6=0$ при $x=\pm\sqrt{2}$. В исследуемый промежуток включается только $x=\sqrt{2}$, тогда получим точку $K(\sqrt{2},2)$

Вычисляем значение функции:

$$g(\sqrt{2})=z(\sqrt{2},2)=z(K)=8-4\sqrt{2},$$

$$g(0)=z(0,2)=z(E)=8,$$

$$g(2)=z(2,2)=z(C)=4.$$

Шаг 3. Сравнивая все найденные значения функции, заключаем, что

наибольшее значение исследуемой функции в указанной области равно $z_{\max}=13$ и достигается оно в точке $B(2,-1)$,

наименьшее значение исследуемой функции в указанной области равно $z_{\min}=-1$ и достигается оно в точках $M(1,1)$ и $A(0,-1)$.

Пример 10. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $u=x^2-xy+y$ на заданном множестве $S=\{(x,y):\ |x|\le 2,\ |y|\le 3\}$.

Решение. Изобразим область, определенную системой неравенств

$$\begin{cases}|x|\le 2,\\ |y|\le 3,\end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases}-2\le x\le 2,\\ -3\le y\le 3.\end{cases}$$

Область представляет собой прямоугольник *ABCD* (см. рис. 2).

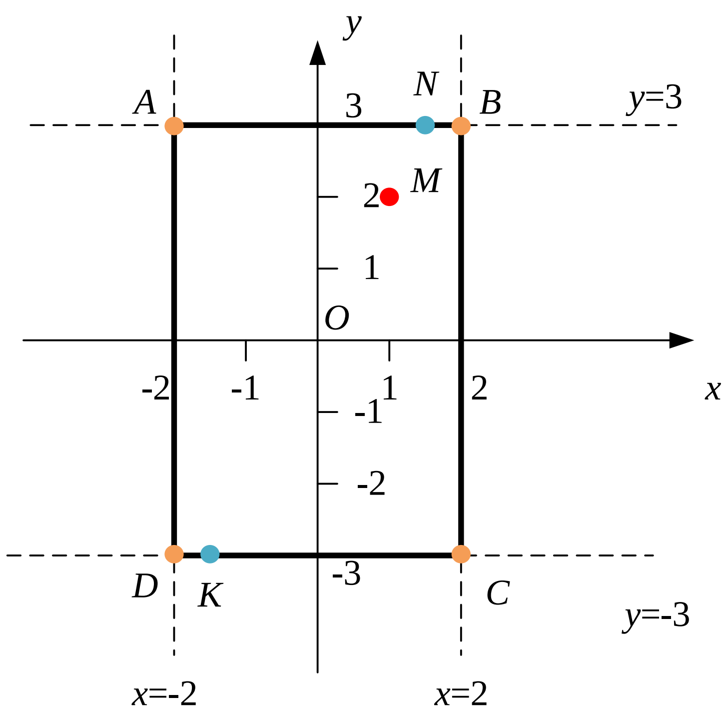

Рисунок 2 – Геометрическая иллюстрация для примера 10

Шаг 1. Находим частные производные, приравниваем их нулю и находим стационарные точки, принадлежащие области:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = \left(x^2 - xy + y\right)'_x = 2x - y = 0, \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = \left(x^2 - xy + y\right)'_y = -x + 1 = 0. \end{cases}$$

Единственная стационарная точка $M(1,\ 2)$ принадлежит области, поэтому вычисляем в ней значение функции:

$$u(M) = u(1, 2) = 1^2 - 1 \cdot 2 + 2 = 1.$$

Шаг 2. Исследуем поведение функции на границе, которая состоит из четырех частей.

<u>Граница *AB*:</u> $y = 3,\ -2 \le x \le 2$.

Имеем $u(x, y = 3) = x^2 - 3x + 3 = p(x)$. Исследуем поведение этой функции при $x \in [-2, 2]$. Найдем производную и приравняем ее к нулю:

$p'(x) = \left(x^2 - 3x + 3\right)' = 2x - 3 = 0$, откуда находим $x = 3/2 \in [-2, 2]$. Тогда вычисляем

$$p(3/2) = u(3/2, 3) = u(N) = \left(x^2 - 3x + 3\right)\Big|_{x=3/2} = 3/4,$$

$$p(-2) = u(-2, 3) = u(A) = \left(x^2 - 3x + 3\right)\Big|_{x=-2} = 13,$$

$$p(2) = u(2, 3) = u(B) = \left(x^2 - 3x + 3\right)\Big|_{x=2} = 1.$$

Граница *DA*: $x = -2,\ -3 \le y \le 3$.

Имеем $u(x = -2, y) = 4 + 2y + y = 3y + 4 = s(y)$. Исследуем поведение этой функции при $y \in [-3, 3]$. Функция $s(y) = 3y + 4$ является линейной и, как следствие, монотонной (стационарных точек нет). Вычисляем

$$s(-3) = u(-2, -3) = u(D) = (3y + 4)\big|_{y=-3} = -5,$$

$$s(3) = u(-2, 3) = u(A) = (3y + 4)\big|_{y=3} = 13.$$

Граница *DC*: $y = -3,\ -2 \le x \le 2$.

Имеем $u(x, y = -3) = x^2 + 3x - 3 = q(x)$. Исследуем поведение этой функции при $x \in [-2, 2]$. Найдем производную и приравняем ее к нулю: $q'(x) = \left(x^2 + 3x - 3\right)' = 2x + 3 = 0$, откуда находим $x = -3/2 \in [-2, 2]$. Тогда вычисляем

$$q(-3/2) = u(-3/2, -3) = u(K) = \left(x^2 + 3x - 3\right)\Big|_{x=-3/2} = -21/4,$$

$$q(-2) = u(-2, -3) = u(D) = \left(x^2 + 3x - 3\right)\Big|_{x=-2} = -5,$$

$$q(2) = u(2, -3) = u(C) = \left(x^2 + 3x - 3\right)\Big|_{x=2} = 7.$$

Граница *CB*: $x = 2,\ -3 \le y \le 3$.

Имеем $u(x=2, y) = 4-2y+y = -y+4 = g(y)$. Исследуем поведение этой функции при $y \in [-3, 3]$. Функция $g(y) = -y+4$ является линейной и, как следствие, монотонной (стационарных точек нет). Вычисляем

$$g(-3) = u(2,-3) = u(C) = \left(-y+4\right)\Big|_{y=-3} = 7,$$

$$g(3) = u(2,3) = u(B) = \left(-y+4\right)\Big|_{y=3} = 1.$$

Шаг 3. Сравнивая полученные значения, находим, что:

наименьшее значение равно –21/4 и достигается в точке *K*(–3/2, –3),

наибольшее значение равно 13 и достигается в точке *A*(–2, 3).

Пример 11. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $u = x^2 - 2xy + 3$ на заданном множестве $S = \left\{(x, y):\ y - x \le 1,\ x \le 0,\ y \ge -1\right\}$.

Решение. Изобразим область, определенную системой неравенств

$$\begin{cases} y - x \le 1, \\ x \le 0, \\ y \ge -1. \end{cases}$$

Неравенство $x \le 0$ определяет левую полуплоскость (левее прямой $x = 0$); неравенство $y \ge -1$ определяет полуплоскость, лежащую выше прямой $y = -1$; неравенство $y - x \le 1$ определяет полуплоскость, лежащую ниже и правее прямой $y - x = 1$. Окончательно получаем треугольник *ABC* (рис. 3), где *A*(–2, –1), *B*(0, 1), *C*(0, –1).

Шаг 1. Находим стационарные точки функции, для найдем частные производные и приравняем их к нулю:

$$\begin{cases} u'_x = \left(x^2 - 2xy + 3\right)'_x = 2x - 2y = 0, \\ u'_y = \left(x^2 - 2xy + 3\right)'_y = -2x = 0. \end{cases}$$

Находим стационарную точку *O*(0, 0). Данная точка принадлежит исследуемой области; вычисляем значение функции в ней: $u(O) = \left(x^2 - 2xy + 3\right)\Big|_O = 3$.

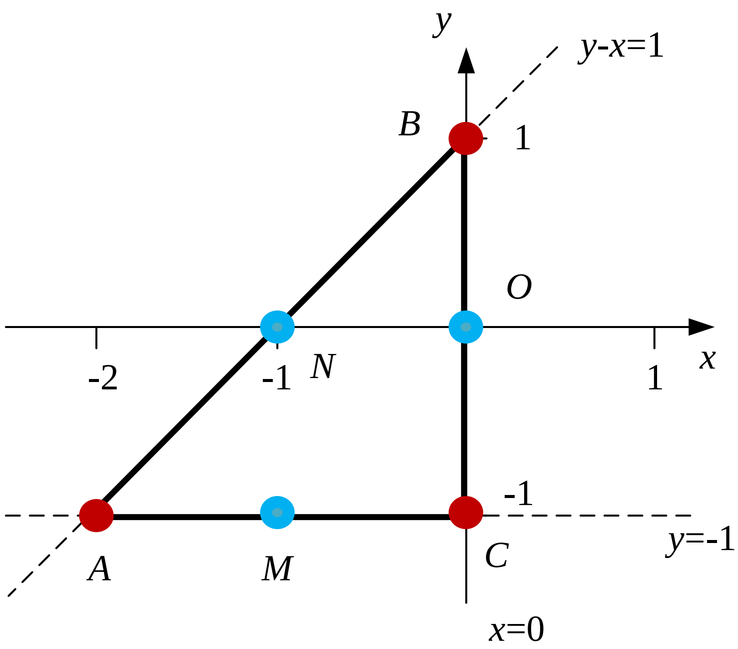

Рисунок 3 – Геометрическая иллюстрация для примера 11

Шаг 2. Исследуем поведение функции на границе области.

<u>Граница АС.</u> $y=-1,\ -2\le x\le 0$.

Имеем $u(x,y)=u(x,-1)=x^2-2x\cdot(-1)+3=x^2+2x+3=v(x)$; найдем наибольшее и наименьшее значение этой функции при $-2\le x\le 0$.

Найдем производную и приравняем ее к нулю $v'(x)=\left(x^2+2x+3\right)'=2x+2=0$, откуда $x=-1\in[-2,0]$.

Вычисляем

$v(-1)=u(-1,-1)=u(M)=2$,

$v(-2)=u(-2,-1)=u(A)=3$,

$v(0)=u(0,-1)=u(C)=3$.

<u>Граница АВ.</u> $y=x+1,\ -2\le x\le 0$ (или $x=y-1,\ -1\le y\le 1$).

Имеем $u(x,y)=u(x,x+1)=x^2-2x\cdot(x+1)+3=-x^2-2x+3=p(x)$; найдем наибольшее и наименьшее значение этой функции при $-2\le x\le 0$.

Найдем производную и приравняем ее к нулю $p'(x)=\left(-x^2-2x+3\right)'=-2x-2=0$, откуда $x=-1\in[-2,0]$.

Вычисляем

$p(-1) = u(-1, 0) = u(N) = 4$,

$p(-2) = u(-2, -1) = u(A) = 3$,

$p(0) = u(0, 1) = u(B) = 3$.

Граница СВ. $x = 0,\ -1 \le y \le 1$.

Имеем $u(x, y) = u(0, y) = x^2 - 2xy + 3 = 3$, т.е. на этой границе функция сохраняет постоянное значение, равное 3.

Шаг 3. Окончательно получаем:

наименьшее значение равно 2 и достигается в точке $M(-1, -1)$,

наибольшее значение равно 4 и достигается в точке $N(-1, 0)$.

ИНДИВИДУАЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

Вариант 1

1. Исследовать на локальные экстремумы функцию

$f(x, y) = y\sqrt{x} - 2y^2 - x + 14y$.

2. Используя метод исключения переменных и метод множителей Лагранжа исследовать на условный экстремум функцию $f(x, y) = x^2 y$ относительно условия связи $x + y - 2 = 0$.

3. Найти наибольшее и наименьшее значение функции $f(x, y) = 3x + y - xy$ в области, ограниченной линиями $y = x$, $y = -x$, $x = 4$.

Вариант 2

1. Исследовать на локальные экстремумы функцию

$f(x, y) = x^3 + 8y^3 - 6xy + 5$.

2. Используя метод исключения переменных и метод множителей Лагранжа исследовать на условный экстремум функцию $f(x, y) = \dfrac{y}{x^2}$ относительно условия связи $y - x + 1 = 0$.

3. Найти наибольшее и наименьшее значение функции $f(x, y) = xy - x - 2y$ в области, ограниченной линиями $y = x$, $y = -1$, $x = 3$.

Вариант 3

1. Исследовать на локальные экстремумы функцию

$f(x, y) = x^3 + y^2 - 6xy - 39x + 18y + 20$.

2. Используя метод исключения переменных и метод множителей Лагранжа исследовать на условный экстремум функцию $f(x, y) = 2x + 16y$ относительно условия связи $xy + y^2 - 7 = 0$.

3. Найти наибольшее и наименьшее значение функции $f(x, y) = x^2 + 2xy - 4x + 8y$ в области, ограниченной линиями $y = -x$, $y = 8$, $x = -2$.

Вариант 4

1. Исследовать на локальные экстремумы функцию

$f(x, y) = 2x^3 + 2y^3 - 6xy + 5$.

2. Используя метод исключения переменных и метод множителей Лагранжа исследовать на условный экстремум функцию $f(x, y) = 2x + 4y$ относительно условия связи $2xy + y^2 - 3 = 0$.

3. Найти наибольшее и наименьшее значение функции $f(x, y) = 5x^2 - 3xy + y^2$ в области, ограниченной линиями $y = 1 - x$, $y = -1$, $x = -1$.

Вариант 5

1. Исследовать на локальные экстремумы функцию

$f(x, y) = 3x^3 + 3y^3 - 9xy + 10$.

2. Используя метод исключения переменных и метод множителей Лагранжа исследовать на условный экстремум функцию $f(x, y) = 3x - 6y$ относительно условия связи $y^2 - xy - 1 = 0$.

3. Найти наибольшее и наименьшее значение функции $f(x, y) = x^2 + 2xy - y^2 - 4x$ в области, ограниченной линиями $y = x + 1$, $y = 0$, $x = 3$.

Вариант 6

1. Исследовать на локальные экстремумы функцию

$f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy + 7$.

2. Используя метод исключения переменных и метод множителей Лагранжа исследовать на условный экстремум функцию $f(x, y) = \dfrac{x}{y^2}$ относительно условия связи $x - y + 2 = 0$.

3. Найти наибольшее и наименьшее значение функции $f(x, y) = 3x^3 - xy^2 + y^2$ в области, ограниченной линиями $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$, $y = 6$.

Вариант 7

1. Исследовать на локальные экстремумы функцию

$f(x, y) = x\sqrt{y} - x^2 - y + 6x + 3$.

2. Используя метод исключения переменных и метод множителей Лагранжа исследовать на условный экстремум функцию $f(x, y) = 4x + 8y$ относительно условия связи $y^2 - 2xy + 5 = 0$.

3. Найти наибольшее и наименьшее значение функции $f(x, y) = 3x + 6y - x^2 - xy - y^2$ в области, ограниченной линиями $x = 0$, $x = 2$, $y = 0$, $y = -2$.

Вариант 8

1. Исследовать на локальные экстремумы функцию

$f(x, y) = 4x^3 - y^3 + 3y + 24x^2 + 36x - 5$.

2. Используя метод исключения переменных и метод множителей Лагранжа исследовать на условный экстремум функцию $f(x, y) = 2xy^2$ относительно условия связи $x + y + 4 = 0$.

3. Найти наибольшее и наименьшее значение функции $f(x, y) = 2x^2 - 4xy + y^2 - 4x + 3$ в области, ограниченной линиями $x + y + 4 = 0$, $x = 0$, $y = 0$.

Вариант 9

1. Исследовать на локальные экстремумы функцию

$f(x, y) = xy(6 - x - y)$.

2. Используя метод исключения переменных и метод множителей Лагранжа исследовать на условный экстремум функцию $f(x, y) = x^2 + y^2$ относительно условия связи $3x + 2y - 6 = 0$.

3. Найти наибольшее и наименьшее значение функции $f(x, y) = x^2 + 4xy - 2y^2 - 6x - 1$ в области, ограниченной линиями $x + y - 3 = 0$, $y = 0$, $x = 0$.

Вариант 10

1. Исследовать на локальные экстремумы функцию

$f(x, y) = x^3 + 8y^3 - 6xy + 1$.

2. Используя метод исключения переменных и метод множителей Лагранжа исследовать на условный экстремум функцию $f(x, y) = xy^2$ относительно условия связи $x + y - 2 = 0$.

3. Найти наибольшее и наименьшее значение функции $f(x, y) = x^2 + 2xy - 10$ в области, ограниченной линиями $y = x^2 - 4$, $y = 0$.

Вариант 11

1. Исследовать на локальные экстремумы функцию

$f(x, y) = y\sqrt{x} - y^2 - x + 6y$.

2. Используя метод исключения переменных и метод множителей Лагранжа исследовать на условный экстремум функцию $f(x, y) = x^2 - y^2$ относительно условия связи $2x - y - 3 = 0$.

3. Найти наибольшее и наименьшее значение функции $f(x, y) = xy - 2x - y$ в области, ограниченной линиями $y = x$, $x = 0$, $x + y = 4$.

Вариант 12

1. Исследовать на локальные экстремумы функцию

$f(x, y) = xy(12 - x - y)$.

2. Используя метод исключения переменных и метод множителей Лагранжа исследовать на условный экстремум функцию $f(x, y) = x^2 y$ относительно условия связи $2x + y - 1 = 0$.

3. Найти наибольшее и наименьшее значение функции $f(x, y) = \frac{1}{2}x^2 - xy + y$ в области, ограниченной линиями $y = 2x^2$, $y = 8$.

Вариант 13

1. Исследовать на локальные экстремумы функцию

$f(x, y) = x^3 - 3x^2 - y^2 + 10y - 4$.

2. Используя метод исключения переменных и метод множителей Лагранжа исследовать на условный экстремум функцию $f(x, y) = 2x - 3y$ относительно условия связи $x^2 + y^2 - 13 = 0$.

3. Найти наибольшее и наименьшее значение функции $f(x, y) = 3x^2 + 3y^2 - 2x - 2y + 2$ в области, ограниченной линиями $x + y - 1 = 0$, $y = 0$, $x = 0$.

Вариант 14

1. Исследовать на локальные экстремумы функцию

$f(x, y) = x^2 - 4x - 4y^3 + 12y^2 - 5$.

2. Используя метод исключения переменных и метод множителей Лагранжа исследовать на условный экстремум функцию $f(x, y) = 4x + 2y$ относительно условия связи $2xy + x^2 - 3 = 0$.

Вариант 15

1. Исследовать на локальные экстремумы функцию

$f(x, y) = x^3 + 8y^2 - 12xy + 1$.

2. Используя метод исключения переменных и метод множителей Лагранжа исследовать на условный экстремум функцию $f(x, y) = \dfrac{y}{x^2}$ относительно условия связи $y - x + 2 = 0$.

3. Найти наибольшее и наименьшее значение функции $f(x, y) = 2x^2 - 2xy + \dfrac{5}{2}y^2 - 2x$ в области, ограниченной линиями $x = 0$, $x = 2$, $y = 0$, $y = 2$.

Вариант 16

1. Исследовать на локальные экстремумы функцию

$f(x, y) = 3x^3 + 3y^3 - 9x - 9y^2 + 1$.

2. Используя метод исключения переменных и метод множителей Лагранжа исследовать на условный экстремум функцию $f(x, y) = 6 - 5x - 4y$ относительно условия связи $x^2 - y^2 = 9$.

3. Найти наибольшее и наименьшее значение функции $f(x, y) = 2x^2 + 2y^2 - 2x - 2y + 1$ в области, ограниченной линиями $x - y + 1 = 0$, $y = 0$, $x = 2$.

Вариант 17

1. Исследовать на локальные экстремумы функцию

$f(x, y) = 2x^3 - 2y^2 - 6x + 4y + 6$.

2. Используя метод исключения переменных и метод множителей Лагранжа исследовать на условный экстремум функцию $f(x, y) = 6x - 3y$ относительно условия связи $x^2 - xy - 1 = 0$.

3. Найти наибольшее и наименьшее значение функции $f(x, y) = 2x^2 + 2xy - \frac{1}{2}y^2 - 4x$ в области, ограниченной линиями $y = 3x$, $y = 0$, $x = 2$.

Вариант 18

1. Исследовать на локальные экстремумы функцию

$f(x, y) = x^3 - 2y^2 - 3x + 6y + 7$.

2. Используя метод исключения переменных и метод множителей Лагранжа исследовать на условный экстремум функцию $f(x, y) = -x - y$ относительно условия связи $\frac{x^2}{4} + y^2 = 5$.

3. Найти наибольшее и наименьшее значение функции $f(x, y) = x^2 - 2xy - y^2 + 4x + 1$ в области, ограниченной линиями $x + y - 1 = 0$, $y = 0$, $x = -3$.

Вариант 19

1. Исследовать на локальные экстремумы функцию

$f(x, y) = x^3 - 4y^2 - 3x + 4y - 2$.

2. Используя метод исключения переменных и метод множителей Лагранжа исследовать на условный экстремум функцию $f(x, y) = 2xy^2$ относительно условия связи $x + 2y - 1 = 0$.

3. Найти наибольшее и наименьшее значение функции $f(x, y) = xy - 3x - 2y$ в области, ограниченной линиями $x = 4$, $y = x$, $y = 2x$.

Вариант 20

1. Исследовать на локальные экстремумы функцию

$f(x, y) = x^3 - 4y^3 - 3x + 12y + 7$.

2. Используя метод исключения переменных и метод множителей Лагранжа исследовать на условный экстремум функцию $f(x, y) = \dfrac{x}{y^2}$ относительно условия связи $x - y + 1 = 0$.

3. Найти наибольшее и наименьшее значение функции $f(x, y) = x^2 + xy - 2$ в области, ограниченной линиями $y = 4x^2 - 4$, $y = 0$.

Вариант 21

1. Исследовать на локальные экстремумы функцию

$f(x, y) = x^2 - 4y^3 - 2x + 12y + 5$.

2. Используя метод исключения переменных и метод множителей Лагранжа исследовать на условный экстремум функцию $f(x, y) = 1 - 4x - 8y$ относительно условия связи $x^2 - 8y^2 = 8$.

3. Найти наибольшее и наименьшее значение функции $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$ в области, ограниченной линиями $x = -1$, $x = 2$, $y = -1$, $y = 2$.

Вариант 22

1. Исследовать на локальные экстремумы функцию

$f(x, y) = x^3 - 6x^2 + 9x - 2y^2 + 6y + 8$.

2. Используя метод исключения переменных и метод множителей Лагранжа исследовать на условный экстремум функцию $f(x, y) = 16x + 2y$ относительно условия связи $xy + x^2 - 7 = 0$.

3. Найти наибольшее и наименьшее значение функции $f(x, y) = x^3 + y^3 + 3xy$ в области, ограниченной линиями $x = -2$, $x = 1$, $y = -2$, $y = 1$.

Вариант 23

1. Исследовать на локальные экстремумы функцию

$f(x, y) = x^2 - 2x - 4y^3 + 24y^2 - 36y + 18$.

2. Используя метод исключения переменных и метод множителей Лагранжа исследовать на условный экстремум функцию $f(x, y) = 2x^2 + 2y^2 - 1$ относительно условия связи $2x + 3y - 6 = 0$.

3. Найти наибольшее и наименьшее значение функции $f(x, y) = 4(x - y) - x^2 - y^2$ в области, ограниченной линиями $x + 2y = 4$, $x - 2y = 4$, $x = 0$.

Вариант 24

1. Исследовать на локальные экстремумы функцию

$f(x, y) = x^3 - 6x^2 + 9x - 2y^2 + 2y + 9$.

2. Используя метод исключения переменных и метод множителей Лагранжа исследовать на условный экстремум функцию $f(x, y) = 3x - 2y$ относительно условия связи $x^2 + y^2 - 13 = 0$.

3. Найти наибольшее и наименьшее значение функции $f(x, y) = x^2 - y^2 + 2xy - 4x$ в области, ограниченной линиями $x = 3$, $y = x + 1$, $y = 0$.

Вариант 25

1. Исследовать на локальные экстремумы функцию

$f(x, y) = 3x^3 + 9x^2 + 3y^3 - 18y^2 + 27y - 17$.

2. Используя метод исключения переменных и метод множителей Лагранжа исследовать на условный экстремум функцию $f(x, y) = 8x + 4y$ относительно условия связи $x^2 - 2xy + 5 = 0$.

3. Найти наибольшее и наименьшее значение функции $f(x, y) = 6xy - 9x^2 - 9y^2 + 4x + 4y$ в области, ограниченной линиями $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$, $y = 2$.

Вариант 26

1. Исследовать на локальные экстремумы функцию

$f(x, y) = 2x^3 + 12x^2 + 18x - 2y^2 + 8y + 4$.

2. Используя метод исключения переменных и метод множителей Лагранжа исследовать на условный экстремум функцию $f(x, y) = 2y^2 - 2x^2 + 1$ относительно условия связи $x - 2y - 3 = 0$.

3. Найти наибольшее и наименьшее значение функции $f(x, y) = x^2 + 2xy - y^2 - 2x + 2y$ в области, ограниченной линиями $x = 2$, $y = 0$, $y = x + 2$.

Вариант 27

1. Исследовать на локальные экстремумы функцию

$f(x, y) = 3x^3 - 9x^2 + 9x - 3y^2 - 6y + 9xy - 4$.

2. Используя метод исключения переменных и метод множителей Лагранжа исследовать на условный экстремум функцию $f(x, y) = 6 - 4x - 5y$ относительно условия связи $y^2 - x^2 = 9$.

3. Найти наибольшее и наименьшее значение функции $f(x, y) = 5x^2 - 3xy + y^2 + 4$ в области, ограниченной линиями $x = -1$, $x = 2$, $y = -1$, $y = 1$.

Вариант 28

1. Исследовать на локальные экстремумы функцию

$f(x, y) = x^3 + 3x^2 + 15x + 8y^2 - 28y - 12xy + 21.$

2. Используя метод исключения переменных и метод множителей Лагранжа исследовать на условный экстремум функцию $f(x, y) = 2x + 2y$ относительно условия связи $x^2 + \dfrac{y^2}{4} = 5.$

3. Найти наибольшее и наименьшее значение функции $f(x, y) = x^2 + 2xy - y^2 + 4x$ в области, ограниченной линиями $x + y + 3 = 0$, $x = 0$, $y = 0$.

Вариант 29

1. Исследовать на локальные экстремумы функцию

$f(x, y) = x^3 - 4y^2 - 3x^2 - 4y + 2$.

2. Используя метод исключения переменных и метод множителей Лагранжа исследовать на условный экстремум функцию $f(x, y) = 1 - 8x - 4y$ относительно условия связи $y^2 - 8x^2 = 8$.

3. Найти наибольшее и наименьшее значение функции $f(x, y) = -2x^2 + 4xy + y^2 - 4x$ в области, ограниченной линиями $x = 0$, $y = 2$, $y = -x$.

Вариант 30

1. Исследовать на локальные экстремумы функцию

$f(x, y) = x^3 - 4y^3 - 3x - 24y^2 - 36y - 1.$

2. Используя метод исключения переменных и метод множителей Лагранжа исследовать на условный экстремум функцию $f(x, y) = x^2y^2$ относительно условия связи $x + y - 2 = 0.$

3. Найти наибольшее и наименьшее значение функции $f(x, y) = -x^2 - 2xy + y^2 + 4x$ в области, ограниченной линиями $x + y - 3 = 0,$ $x = 0$, $y = 0$.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1 Берман, Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа: учебное пособие / Г.Н. Берман. – 6-е изд., стер. – Санкт-Петербург: Лань, 2017. – 492 с.

2 Демидович, Б.П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу: учебное пособие для вузов / Б.П. Демидович. – 23-е изд., стер. – Санкт-Петербург: Лань, 2021. – 624 с.

3 Лунгу, К.Н. Сборник задач по высшей математике. 1 курс. / К.Н. Лунгу, Д.Т. Письменный, С.Н. Федин, Ю.А. Шевченко. – 7-е изд. – М.: Айрис-пресс, 2008. – 576 с.

4 Письменный, Д.Т. Конспект лекций по высшей математике: полный курс / Д.Т. Письменный. – 10-е изд., испр. – М.: Айрис-пресс, 2011. – 608 с.

5 Поповский, Э.Е. Функции нескольких переменных. Типовой расчет: учеб.-метод. пособие для студентов всех специальностей / Э.Е. Поповский, П.П. Скачков. − Екатеринбург: УрГУПС, 2010. − 44 с.

6 Сборник задач по математическому анализу: учебное пособие / Л.Д. Кудрявцев, А.Д. Кутасов, В.И. Чехлов, М.И. Шабунин. – 2-е изд., перераб. – Москва: ФИЗМАТЛИТ. – Том 3: Функции нескольких переменных. – 2003. – 472 с.

7 Сборник индивидуальных заданий по высшей математике: Учеб. Пособие. В 3 ч. Ч. 2 / А.П. Рябушко, В.В. Бархатов, В.В. Державец, И.Е. Юруть; Под общ. ред. А.П. Рябушко. – Мн.: Выш. шк., 1991. – 359 с.

СОДЕРЖАНИЕ

Елена Михайловна Веселова,

кандидат физико-математических наук,

доцент кафедры математического анализа и моделирования

Надежда Николаевна Максимова,

кандидат физико-математических наук, доцент,

и.о. зав. кафедрой математического анализа и моделирования

Математический анализ. Экстремум функции нескольких переменных. Учебно-методическое пособие

Изд-во АмГУ. Подписано к печати __.__.2021. Формат 60x84/16.

Усл. печ. л. 2,26.

Тираж __. Заказ __.

Отпечатано в типографии АмГУ.