Министерство науки и высшего образования Российской Федерации

Амурский государственный университет

Максимова Надежда Николаевна

Комплексные числа

Учебно-методическое пособие

Благовещенск

Издательство АмГУ

2021

УДК 517.53

Рекомендовано

учебно-методическим советом университета

Рецензент:

Труфанова Т.В., доцент кафедры математического анализа и моделирования
ФГБОУ ВО «Амурский государственный университет», канд. тех. наук

Максимова, Н.Н.

Комплексные числа. Учебно-методическое пособие / Н.Н. Максимова. – Благовещенск: Изд-во АмГУ, 2021. – 47 с.

В пособии излагается математический аппарат комплексных чисел: даны основные понятия и определения, определены действия над комплексными числами в различных формах записи, приведены примеры решения задач на действия с комплексными числами, решение алгебраических уравнений и систем на множестве комплексных чисел и построение областей в комплексной плоскости. Каждый раздел содержит задания для самостоятельной работы.

Учебно-методическое пособие предназначено для студентов, обучающихся по направлениям подготовки 01.03.02 – «Прикладная математика и информатика» (в рамках изучения дисциплины «Комплексный анализ»), 03.03.02 – «Физика» (в рамках изучения дисциплины «Теория функций комплексного переменного»), 09.03.01 – «Информатика и вычислительная техника», 09.03.02 – «Информационные системы и технологии», 09.03.02 – «Информационные системы и технологии», 09.03.04 – «Программная инженерия» (в рамках изучения дисциплины «Линейная алгебра и теория матриц»), а также будет полезно для студентов всех форм и ступеней обучения.

Для более подробного изучения теории комплексных чисел и других разделов комплексного анализа читатели могут использовать литературу из библиографического списка.

ВВЕДЕНИЕ

Первое упоминание о «мнимых» числах как о квадратных корнях из отрицательных чисел относится еще к XVI веку и встречается в работах итальянского математика Джироламо Кордано. Несомненная заслуга этого великого ученого состояла в том, что он допустил существование «несуществующего» числа $\sqrt{-1}$, постулировав правило умножения $\sqrt{-1}\cdot\sqrt{-1}=-1$.

Однако, еще три столетия математики «привыкали» к таким числам, время от времени пытаясь опровергнуть их существование. Только с XIX века, после выхода работ Карла Фридриха Гаусса, посвященных доказательству основной теоремы алгебры, комплексные (от лат. «complexuc» – связь, сочетание) числа окончательно укрепились в математике и науке.

В дальнейшем изучение комплексных чисел стало стремительно развиваться, что привело к возникновению теории функций комплексного переменного. Сейчас комплексный анализ, как дисциплина изучения комплексных числе и функций комплексного аргумента, является фундаментальной математической дисциплиной, без познания которой невозможно изучение других математических и смежных наук.

В пособии излагается математический аппарат комплексных чисел: даны основные понятия и определения, определены действия над комплексными числами в различных формах записи, приведены примеры решения задач на действия с комплексными числами, решение алгебраических уравнений и систем на множестве комплексных чисел и построение областей в комплексной плоскости. Каждый раздел содержит задания для самостоятельной работы.

Учебно-методическое пособие предназначено для студентов, обучающихся по направлениям подготовки 01.03.02 – «Прикладная математика и информатика» (в рамках изучения дисциплины «Комплексный анализ»), 03.03.02 – «Физика» (в рамках изучения дисциплины «Теория функций комплексного переменного»), 09.03.01 – «Информатика и вычислительная техника», 09.03.02 – «Информационные системы и технологии», 09.03.02 – «Информационные системы и технологии», 09.03.04 – «Программная инженерия» (в рамках изучения дисциплины «Линейная алгебра и теория матриц»), а также будет полезно для студентов всех форм и ступеней обучения.

Для более подробного изучения теории комплексных чисел и других разделов комплексного анализа читатели могут использовать литературу из библиографического списка.

1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ КОМПЛЕКСНОГО ЧИСЛА

Определение 1. ***Комплексным числом*** z будем называть упорядоченную пару действительных чисел ***x, y*** записанную в форме

$$z = x + i \cdot y,$$

где x и y – некоторые действительные числа,

i – «мнимая единица», квадрат которой равен –1, то есть $i^2 = -1$ или $i = \sqrt{-1}$.

Множество комплексных чисел, то есть чисел вида $z = x + iy$, обозначается символом ***C***.

Первая компонента комплексного числа z, действительное число x, называется ***действительной частью*** числа z, это обозначается $\operatorname{Re} z = x$.

Вторая компонента, действительное число ***y***, называется ***мнимой частью*** числа z и обозначается $\operatorname{Im} z = y$.

Запись комплексного числа в виде $z = x + iy$ называется ***алгебраической формой*** записи комплексного числа.

Комплексные числа, у которых равна нулю мнимая часть, то есть числа вида

$$z = x + i \cdot 0 = x,$$

являются действительными числами. То есть множество действительных чисел является подмножеством множества комплексных чисел ***C***.

Комплексные числа, у которых равна нулю действительная часть, то есть числа вида

$$z = 0 + i \cdot y = iy,$$

называются мнимыми числами.

Определение 2. Комплексное число вида $\bar{z} = x - i\,y$ называется ***сопряженным*** (комплексно сопряженным) к числу $z = x + i\,y$.

Следует отметить, что если найти сопряженное число к сопряженному комплексному числу, то есть выполнить операцию двойного сопряжения

$$\overline{\left(\bar{z}\right)}=\overline{\left(\overline{x+i\,y}\right)}=\overline{x-i\,y}=x+i\,y,$$

мы вернемся к исходному комплексному числу.

Определение 3. Действительное число $|z|=\sqrt{x^2+y^2}$ называется ***модулем*** комплексного числа $z = x + iy$. Приняты также следующие обозначения модуля комплексного числа: r, ρ.

Геометрически комплексное число $z = x + iy$ изображается как точка или радиус-вектор точки с координатами (x, y) на плоскости. Плоскость, на которой изображаются комплексные числа, называется комплексной плоскостью ***C***.

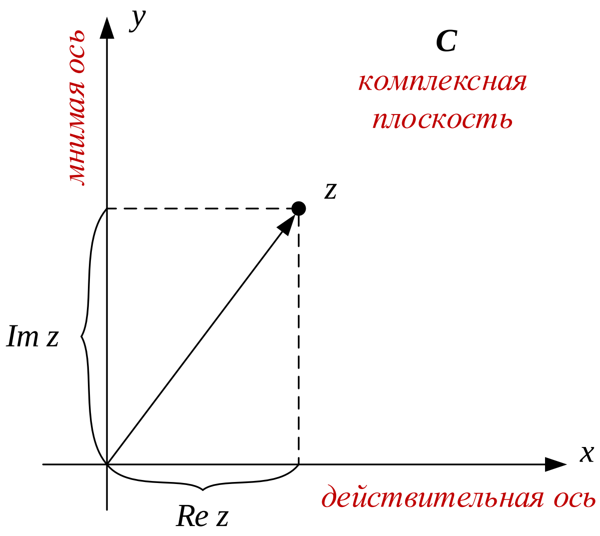

Рисунок 1 – Геометрическое представление комплексного числа

Геометрически модуль комплексного числа $z = x + iy$ является длиной радиус-вектора точки (x, y).

Пример 1. Изобразим на комплексной плоскости числа $z_1=1+2i$, $z_2=-3+i$, $z_3=-4-3i$, $z_4=2-3i$, $z_5=5$, $z_6=-1$, $z_7=4i$, $z_8=-2i$, $z_9=0$.

Решение. Числам $z_1=1+2i$, $z_2=-3+i$, $z_3=-4-3i$ и $z_4=2-3i$ на комплексной плоскости соответствуют точки с координатами (1, 2), (–3, 1), (–4, –3) и (2, –3), расположенные соответственно в первой, второй, третьей и четвертой четвертях. Числам $z_5=5$ и $z_6=-1$ соответствуют точки с координатами (5, 0) и (–1, 0), расположенные на действительной оси. Числа $z_7=4i$ и $z_8=-2i$ – это точки (0, 4) и (0, –2) на мнимой оси. Число $z_9 = 0$ есть точка начала координат. Изображение всех точек представлено на рис. 2.

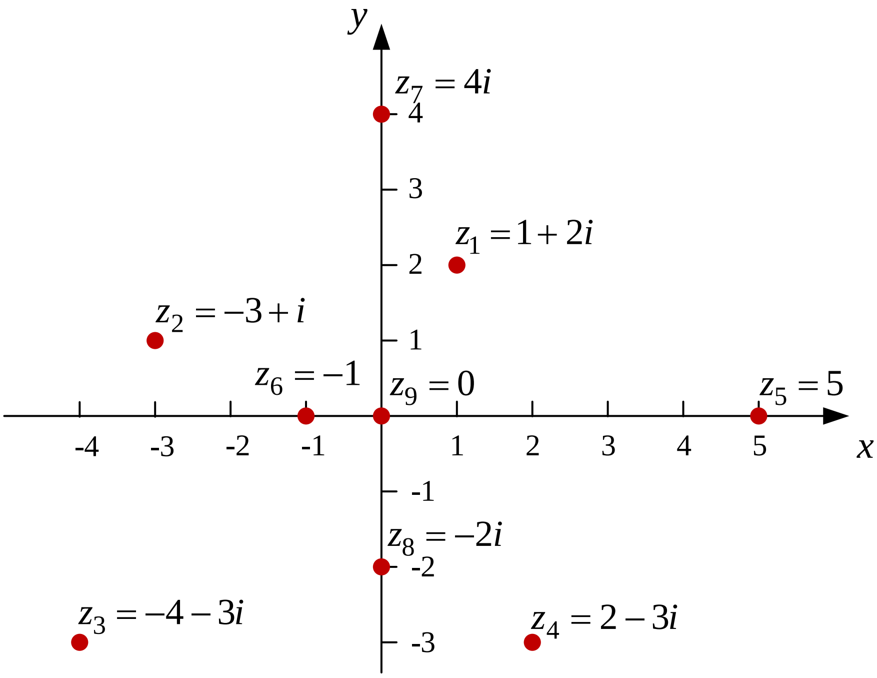

Рисунок 2 – Геометрическая иллюстрация для примера 2

Определение 4. Два комплексных числа $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$ равны тогда и только тогда, когда равны их действительные и мнимые части:

$$z_1 = z_2 \Leftrightarrow \{(x_1 = x_2) \Lambda (y_1 = y_2)\}.$$

Множество комплексных чисел не упорядочено, т.е. для комплексных чисел не вводятся отношения «больше» или «меньше».

Задания для самостоятельной работы

Изобразить на комплексной плоскости следующие комплексные числа $z_1 = -5 + i$, $z_2 = 5 - 6i$, $z_3 = -4 - 2i$, $z_4 = 1 + 8i$, $z_5 = 3i$, $z_6 = -9i$, $z_7 = 5$, $z_8 = -3$.

2. ОПЕРАЦИИ НАД КОМПЛЕКСНЫМИ ЧИСЛАМИ В АЛГЕБРАИЧЕСКОЙ ФОРМЕ

1. ***Суммой*** двух комплексных чисел $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$ называется комплексное число z, определяемое соотношением

$$z = z_1 + z_2 = (x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2).$$

Пример 2. Найти сумму $z_1 + z_2$ комплексных чисел $z_1 = 4 + 5i$ и $z_2 = -3 + i$.

Решение. Находим

$$z_1 + z_2 = (4 + 5i) + (-3 + i) = (4 + (-3)) + (5 + 1)i = 1 + 6i.$$

2. ***Разностью*** двух комплексных чисел $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$ называется комплексное число z, определяемое соотношением

$$z = z_1 - z_2 = (x_1 + iy_1) - (x_2 + iy_2) = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2).$$

Это означает, что геометрически комплексные числа складываются и вычитаются как векторы на плоскости, то есть покоординатно.

Пример 3. Найти разность $z_1 - z_2$ комплексных чисел $z_1 = 4 + 5i$ и $z_2 = -3 + i$.

Решение. Находим

$$z_1 - z_2 = (4 + 5i) - (-3 + i) = (4 - (-3)) + (5 - 1)i = 7 + 4i.$$

Геометрически модуль числа z – длина радиуса вектора точки z; модуль разности чисел z_1 и z_2 равен расстоянию между этими точками:

$$|z_1 - z_2| = |(x_1 + iy_1) - (x_2 + iy_2)| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$

3. ***Произведением*** двух комплексных чисел $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$ называется комплексное число z, определяемое соотношением

$$z = z_1 \cdot z_2 = (x_1 + iy_1) \cdot (x_2 + iy_2) = x_1x_2 + ix_1y_2 + ix_2y_1 + i^2y_1y_2,$$

$$z=(x_1x_2-y_1y_2)+i(x_1y_2+x_2y_1).$$

Пример 4. Найти произведение $z_1\cdot z_2$ комплексных чисел $z_1=4+5i$ и $z_2=-3+i$.

Решение. Находим

$$z_1\cdot z_2=(4+5i)\cdot(-3+i)=4\cdot(-3)+4\cdot i+5i\cdot(-3)+5i\cdot i=$$

$$=-12+4i-15i-5=-17-11i.$$

Легко убедиться, что операции сложения и умножения на множестве комплексных чисел ***C*** имеют свойства, аналогичные аксиомам, которым удовлетворяют операции сложения и умножения действительных чисел.

Найдём произведение сопряжённых чисел:

$$z\cdot\bar{z}=(x+yi)\cdot(x-yi)=\left(x\cdot x-y\cdot(-y)\right)+\left(x\cdot(-y)+y\cdot x\right)i=x^2+y^2=|z|^2.$$

Таким образом, $z\cdot\bar{z}$ – всегда неотрицательное действительное число, причём

$$z\cdot\bar{z}=0\Leftrightarrow z=0.$$

4. ***Частное*** (отношение, деление) двух комплексных чисел $z_1=x_1+iy_1$ и $z_2=x_2+iy_2 (z_2\neq0)$ находится следующим образом:

$$z=\frac{z_1}{z_2}=\frac{x_1+iy_1}{x_2+iy_2}=\left|\begin{array}{l}\text{домножим числитель и знаменатель}\\ \text{на число, сопряженное знаменателю}\end{array}\right|=\frac{(x_1+iy_1)\cdot(x_2-iy_2)}{(x_2+iy_2)\cdot(x_2-iy_2)}=$$

$$=\frac{(x_1x_2+y_1y_2)+i(x_2y_1-x_1y_2)}{x_2^2+y_2^2}=\frac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^2+y_2^2}+i\frac{x_2y_1-x_1y_2}{x_2^2+y_2^2}.$$

Пример 5. Найти отношение $\frac{z_1}{z_2}$ комплексных чисел $z_1=4+5i$ и $z_2=-3+i$.

Решение. Находим

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{4+5i}{-3+i}=\frac{(4+5i)\cdot(-3-i)}{(-3+i)\cdot(-3-i)}=\frac{-12-4i-15i+5}{(-3)^2+1^2}=\frac{-7-19i}{10}=-\frac{7}{10}-\frac{19}{10}i.$$

Пример 6. Найти отношение $\frac{1}{i}$.

Решение. Воспользуемся описанным выше подходом и умножим числитель и знаменатель дроби, на сопряженное к знаменателю число, то есть на (–i); получаем

$$\frac{1}{i}=\frac{1\cdot(-i)}{i\cdot(-i)}=\frac{-i}{1}=-i.$$

Таким образом, получаем, что $\frac{1}{i}=-i$.

5. ***Возведение в натуральную степень*** комплексных чисел в самом общем виде при алгебраической форме записи возможно только для малых значений показателя степени и определяется через умножение комплексного числа само на себя требуемое количество раз или через формулу возведения в натуральную степень двучлена, например,

$$z^2=(x+iy)^2=x^2+2xyi+(iy)^2=(x^2-y^2)+2xyi,$$

$$z^3=(x+iy)^3=x^3+3x^2iy+3x(iy)^2+(iy)^3=(x^3-3xy^2)+i\,(3x^2y-y^3) \text{ и т.д.}$$

Пример 7. Вычислить z^2 и z^3 для комплексного числа $z=-2+3i$.

Решение. Находим

$$z^2=(-2+3i)^2=(-2)^2+2\cdot(-2)\cdot 3i+(3i)^2=4-12i-9=-5-12i,$$

$$z^3=(-2+3i)^3=(-2)^3+3\cdot(-2)^2\cdot 3i+3\cdot(-2)\cdot(3i)^2+(3i)^3=$$

$$=-8+36i+54-27i=46+9i.$$

Стоит отметить, что при возведении в натуральную степень комплексного числа i значения получаемой степени повторяются через четыре номера. Действительно имеем:

$$i^0=1,\qquad i^1=i,\qquad i^2=-1,\qquad i^3=i^2\cdot i=-i,$$

$$i^4=(i^2)^2=(-1)^2=1,\qquad i^5=i^4\cdot i=i,\qquad i^6=i^4\cdot i^2=-1,\qquad i^7=i^4\cdot i^3=-i$$

и т.д.

Продолжая вычисления, можно прийти к следующей формуле

$$i^n = \begin{cases} 1, & \text{при } n = 4k, \\ i, & \text{при } n = 4k+1, \\ -1, & \text{при } n = 4k+2 \\ -i, & \text{при } n = 4k+3, \end{cases}$$

которая справедлива, вообще говоря, для любого целого n.

Пример 8. Вычислим:

$$i^{273} = \left| \begin{matrix} \text{для числа } 273 \text{ найдем наибольшее целое,} \\ \text{кратное четырем и не превосходящее } 273; \\ \text{это число } 272 \end{matrix} \right| = i^{272+1} = i^{272} \cdot i^1 =$$

$$= i^{4\cdot 68} \cdot i = (i^4)^{68} \cdot i = (1)^{68} \cdot i = i;$$

$$i^{-197} = \left| \begin{matrix} \text{для числа } -197 \text{ найдем наибольшее целое,} \\ \text{кратное четырем и не превосходящее } -197; \\ \text{это число } -200 \end{matrix} \right| = i^{-200+3} =$$

$$= i^{-200} \cdot i^3 = i^{-4\cdot 50} \cdot (-i) = (i^4)^{-50} \cdot (-i) = (1)^{-50} \cdot (-i) = -i.$$

В некоторых исключительных случаях можно найти значения больших натуральных степеней от комплексного числа.

Пример 9. Вычислим $(-1+i)^{15}$.

Решение. Сначала найдем

$$(-1+i)^2 = (-1)^2 + 2\cdot(-1)\cdot i + (i)^2 = 1 - 2i - 1 = -2i.$$

Тогда воспользуемся свойствами степеней и запишем

$$(-1+i)^{15} = (-1+i)^{14} \cdot (-1+i) = \left((-1+i)^2\right)^7 \cdot (-1+i) = (-2i)^7 \cdot (-1+i) =$$

$$= (-2)^7 \cdot i^7 \cdot (-1+i) = -2^7 \cdot i^{4+3} \cdot (-1+i) = -2^7 \cdot (-i) \cdot (-1+i) = 2^7 \cdot i \cdot (-1+i) =$$

$$= 2^7 \cdot (-i + i^2) = 2^7 \cdot (-i-1) = -2^7 \cdot (1+i) = -2^7 - 2^7 \cdot i.$$

Задания для самостоятельной работы

Вычислить:

1) $(7-i)\cdot(-2+3i)+(4+i)\cdot(-6-2i)$;

2) $\dfrac{4-5i}{1+2i}+\dfrac{6+7i}{2-3i}+4i-3$;

3) $\dfrac{2-i}{4-7i}+\dfrac{-3+8i}{(2+3i)(1-3i)}$;

4) $(1-2i)^3-(3+i)^2-5+6i$;

5) $\dfrac{3i^{121}-i^{422}-5i^{505}+6i^{235}}{1+3i-2i^{92}}$.

3. ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКАЯ ФОРМА КОМПЛЕКСНОГО ЧИСЛА

Запись комплексного числа в виде $z = x + iy$ называется алгебраической формой комплексного числа.

Изобразим число z как точку на плоскости с декартовыми координатами x, y (рис. 3).

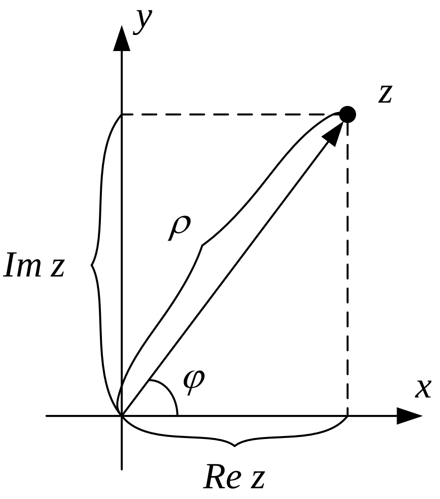

Рисунок 3 – Геометрическое представление

Если теперь перейти к полярным координатам ρ, φ, где

$\rho = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ – полярный радиус или ***модуль комплексного числа*** z (длина радиус-вектора точки z),

φ – полярный угол (угол между положительным направлением оси Ox и радиус-вектора точки z, отсчитываемый против часовой стрелки).

Очевидно, что справедливы формулы

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi, \\ y = \rho\sin\varphi. \end{cases}$$

Определение 5. Угол φ называется ***аргументом комплексного числа*** z и обозначается $\arg z$.

Число $0 = 0 + 0\,i$ – единственное число, модуль которого равен нулю; аргумент для этого числа не определён.

Аргумент комплексного числа определён неоднозначно, с точностью до слагаемых, кратных 2π: если, например, $\varphi = \dfrac{\pi}{6}$, то значения φ, равные $\dfrac{\pi}{6} \pm 2\pi$, $\dfrac{\pi}{6} \pm 4\pi$ и т.д. тоже будут соответствовать числу z.

Значение аргумента, удовлетворяющее условиям $-\pi < \arg z \le \pi$, называют ***главным значением***.

Следует отметить, что в разных источниках по-разному определяют главное значения аргумента комплексного числа; допускаются так же интервалы $0 \le \arg z < 2\pi$ и $-\dfrac{\pi}{2} < \arg z \le \dfrac{3\pi}{2}$.

Для обозначения всех значений аргумента комплексного числа z применяется символ $\operatorname{Arg} z$: $\operatorname{Arg} z = \arg z + 2k\pi,\ k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$.

Далее представим комплексное число в виде

$$z = x + iy = |z| \cdot \left(\frac{x}{|z|} + i \cdot \frac{y}{|z|} \right) = |z| \cdot (\cos\varphi + i \cdot \sin\varphi).$$

Определение 6. Запись комплексного числа в виде

$$z = |z| \cdot (\cos(\arg z) + i \cdot \sin(\arg z)) = |z| \cdot (\cos\varphi + i \cdot \sin\varphi)$$

называется ***тригонометрической формой числа***.

Переход от тригонометрической формы к алгебраической очевиден в силу формул

$$x = |z| \cdot \cos\varphi,\ x = |z| \cdot \sin\varphi.$$

Алгоритм для перехода от алгебраической формы к тригонометрической следующий:

Вычисляется модуль комплексного числа по формуле $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Затем составляется система для определения аргумента

$$\begin{cases} \cos\varphi = \dfrac{x}{|z|}, \\ \sin\varphi = \dfrac{y}{|z|}. \end{cases}$$

Если полученные значения табулированы (определяются из таблицы значений косинуса и синуса основных углов), то записывается соответствующее значение.

В противном случае можно воспользоваться общей формулой (если главное значение аргумента определяется их промежутка $-\pi < \arg z \le \pi$):

$$\varphi = \arg z = \begin{cases} \operatorname{arctg}(y/x), & x > 0; \\ \operatorname{arctg}(y/x) + \pi, & x < 0,\ y > 0; \\ \operatorname{arctg}(y/x) - \pi, & x < 0,\ y < 0; \\ -\pi/2, & x = 0,\ y < 0; \\ 0, & x > 0,\ y = 0; \\ \pi/2, & x = 0,\ y > 0; \\ \pi, & x < 0,\ y = 0; \\ \text{не определён}, & x = 0,\ y = 0. \end{cases}$$

При решении задач на перевод алгебраически заданного комплексного числа в тригонометрическую форму следует изобразить это число на комплексной плоскости $\boldsymbol{C}$ и, таким образом, контролировать полученный результат.

Пример 10. Записать в тригонометрической форме числа

$z_1 = -1 + \sqrt{3}i$, $z_2 = 1 - i$, $z_3 = -3 - \sqrt{3}i$, $z_4 = 3i$, $z_5 = 1 + 2i$.

Решение. 1. Для первого комплексного числа $z_1 = -1 + \sqrt{3}i$ вычисляем модуль $|z_1| = \sqrt{(-1)^2 + (\sqrt{3})^2} = 2$. Аргумент определим из системы

$$\begin{cases} \cos\varphi = \dfrac{x}{|z|} = -\dfrac{1}{2}, \\ \sin\varphi = \dfrac{y}{|z|} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}; \end{cases}$$

данным значениям косинуса и синуса соответствует угол $\varphi_1 = \dfrac{2\pi}{3}$, который и является аргументом данного комплексного числа.

Тогда окончательно приходим к тригонометрической форме

$$z_1 = 2 \cdot \left(\cos\frac{2\pi}{3} + i \cdot \sin\frac{2\pi}{3} \right).$$

2. Для комплексного числа $z_2 = 1 - i$ вычисляем модуль $|z_2| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$. Аргумент определим из системы

$$\begin{cases} \cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \\ \sin\varphi = -\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}; \end{cases}$$

данным значениям косинуса и синуса соответствует угол $\varphi_2 = -\frac{\pi}{4}$.

Тогда окончательно приходим к тригонометрической форме

$$z_2 = \sqrt{2} \cdot \left(\cos\left(-\frac{\pi}{4} \right) + i \cdot \sin\left(-\frac{\pi}{4} \right) \right).$$

Следует отметить, что тригонометрическая форма $z_2 = \sqrt{2} \cdot \left(\cos\frac{7\pi}{4} + i \cdot \sin\frac{7\pi}{4} \right)$ также является допустимой, если главное значение аргумента будет определяться из промежутка $0 \le \arg z < 2\pi$.

3. Для комплексного числа $z_3 = -3 - \sqrt{3}i$ находим модуль $|z_3| = \sqrt{(-3)^2 + (-\sqrt{3})^2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$. Тогда

$$\begin{cases} \cos\varphi = -\frac{3}{2\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \\ \sin\varphi = -\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = -\frac{1}{2}; \end{cases}$$

данным значениям косинуса и синуса соответствует угол $\varphi_3 = -\frac{5\pi}{6}$.

Тогда получаем тригонометрическую форму

$$z_3 = 2\sqrt{3} \cdot \left(\cos\left(-\frac{5\pi}{6} \right) + i \cdot \sin\left(-\frac{5\pi}{6} \right) \right).$$

Также допустимой является тригонометрическая форма

$$z_3 = 2\sqrt{3} \cdot \left(\cos\frac{7\pi}{6} + i \cdot \sin\frac{7\pi}{6} \right).$$

4. Для комплексного числа $z_4 = 3i$ находим модуль $|z_4| = \sqrt{0^2 + 3^2} = 3$. Тогда

$$\begin{cases} \cos\varphi = 0, \\ \sin\varphi = 1, \end{cases}$$

и $\varphi_4 = \frac{\pi}{2}$. Тригонометрическая форма имеет вид $z_4 = 3 \cdot \left(\cos\frac{\pi}{2} + i \cdot \sin\frac{\pi}{2} \right)$;

5) для комплексного числа $z_5 = 1 + 2i$ находим модуль $|z_5| = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$. Тогда

$$\begin{cases} \cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{5}}, \\ \sin\varphi = \frac{2}{\sqrt{5}}. \end{cases}$$

Данные значения косинуса и синуса не табулированы, поэтому аргумент вычисляем по формуле $\varphi_5 = arctg\frac{2}{1} = arctg\,2$ (комплексное число $z_5 = 1 + 2i$ расположено в первой четверти).

Окончательно приходим к тригонометрической форме

$$z_5 = \sqrt{5} \cdot (\cos(arctg\,2) + i \cdot \sin(arctg\,2)).$$

Задания для самостоятельной работы

Привести комплексные числа в тригонометрическую форму:

1) $z = \sqrt{6} - \sqrt{2}i$; 2) $z = 8 + 8i$; 3) $z = -9\sqrt{3} + 9i$.

4. ОПЕРАЦИИ НАД КОМПЛЕКСНЫМИ ЧИСЛАМИ В ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКОЙ ФОРМЕ

В тригонометрической форме легко вычисляются произведение, деление и возведение в степень комплексных чисел. Кроме того, из комплексных чисел можно извлекать корни натуральных степеней. При этом сложение и вычитание комплексных чисел в тригонометрической форме не производится, для этого предварительно необходимо перевести их в алгебраическую форму.

Рассмотрим подробно указанные выше операции над комплексными числами в тригонометрической форме.

1. ***Произведение комплексных чисел***

Пусть $z_1 = |z_1| \cdot (\cos\varphi_1 + i \cdot \sin\varphi_1)$, $z_2 = |z_2| \cdot (\cos\varphi_2 + i \cdot \sin\varphi_2)$. Тогда

$$z_1 \cdot z_2 = (|z_1| \cdot (\cos\varphi_1 + i \cdot \sin\varphi_1)) \cdot (|z_2| \cdot (\cos\varphi_2 + i \cdot \sin\varphi_2)) =$$

$$= (|z_1| \cdot |z_2|) \cdot ((\cos\varphi_1 + i \cdot \sin\varphi_1) \cdot (\cos\varphi_2 + i \cdot \sin\varphi_2)) =$$

$$= (|z_1| \cdot |z_2|) \cdot ((\cos\varphi_1 \cdot \cos\varphi_2 - \sin\varphi_1 \cdot \sin\varphi_2) + i \cdot (\cos\varphi_1 \cdot \sin\varphi_2 + \sin\varphi_1 \cdot \cos\varphi_2)) =$$

$$= (|z_1| \cdot |z_2|) \cdot (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \cdot \sin(\varphi_2 + \varphi_2)).$$

Вывод: ***при умножении комплексных чисел их модули перемножаются, а аргументы складываются.***

2. ***Деление комплексных чисел***

Если $z_2 \neq 0$ и тригонометрическая форма имеет вид $z_2 = |z_2| \cdot (\cos\varphi_2 + i \cdot \sin\varphi_2)$, то сопряженное число представимо в виде

$$\bar{z}_2 = |z_2| \cdot (\cos\varphi_2 - i \cdot \sin\varphi_2) = |z_2| \cdot (\cos(-\varphi_2) + i \cdot \sin(-\varphi_2)),$$

т.е. операция сопряжения не меняет модуль числа и изменяет знак его аргумента, поэтому при делении комплексных чисел в тригонометрической форме получим

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \cdot \bar{z}_2}{z_2 \cdot \bar{z}_2} = \frac{|z_1| \cdot |\bar{z}_2| \cdot (\cos\varphi_1 + i \cdot \sin\varphi_1) \cdot (\cos(-\varphi_2) + i \cdot \sin(-\varphi_2))}{|z_2| \cdot |\bar{z}_2|} =$$

$$=\frac{|z_1|}{|z_2|}\cdot\left(\cos(\varphi_1-\varphi_2)+i\cdot\sin(\varphi_1-\varphi_2)\right).$$

Вывод: ***модуль частного равен отношению модуля числителя к модулю знаменателя, аргумент частного равен разности аргументов числителя и числителя.***

3. ***Возведение в степень***

Пусть $z=|z|\cdot(\cos\varphi+i\cdot\sin\varphi)$. Тогда, пользуясь формулой произведения комплексных чисел, получим

$$z^2=|z|^2\cdot(\cos 2\varphi+i\cdot\sin 2\varphi),$$

$$z^3=z^2\cdot z=|z|^3\cdot(\cos 3\varphi+i\cdot\sin 3\varphi),\ \ldots.$$

Продолжая вычисления, придем к формуле

$$z^n=|z|^n\cdot(\cos n\varphi+i\cdot\sin n\varphi),$$

которая называется ***формулой Муавра*** и которая справедлива, вообще говоря, для любых целых *n*.

С помощью этой формулы легко вычислять высокие степени комплексных чисел и выводить формулы для синусов и косинусов кратных углов.

Пример 11. Даны комплексные числа $z_1=-1+\sqrt{3}i$, $z_2=1-i$, $z_3=-3-\sqrt{3}i$. Вычислить $z_1\cdot z_2$, $\frac{z_2}{z_3}$, z_3^4, $\frac{z_1\cdot z_3}{z_2^2}$.

Решение. Данные комплексные числа в тригонометрической форме имеют вид

$$z_1=2\cdot\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\cdot\sin\frac{2\pi}{3}\right),$$

$$z_2=\sqrt{2}\cdot\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\cdot\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right),$$

$$z_3=2\sqrt{3}\cdot\left(\cos\left(-\frac{5\pi}{6}\right)+i\cdot\sin\left(-\frac{5\pi}{6}\right)\right).$$

Тогда находим:

1) $z_1 \cdot z_2 = \left(2 \cdot \left(\cos\frac{2\pi}{3} + i \cdot \sin\frac{2\pi}{3} \right) \right) \cdot \left(\sqrt{2} \cdot \left(\cos\left(-\frac{\pi}{4} \right) + i \cdot \sin\left(-\frac{\pi}{4} \right) \right) \right) =$

$$= 2\sqrt{2} \cdot \left(\cos\left(\frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{4} \right) + i \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{4} \right) \right) = 2\sqrt{2} \cdot \left(\cos\frac{5\pi}{12} + i \cdot \sin\frac{5\pi}{12} \right);$$

2) $\frac{z_2}{z_3} = \frac{2 \cdot \left(\cos\frac{2\pi}{3} + i \cdot \sin\frac{2\pi}{3} \right)}{2\sqrt{3} \cdot \left(\cos\left(-\frac{5\pi}{6} \right) + i \cdot \sin\left(-\frac{5\pi}{6} \right) \right)} =$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \left(\cos\frac{9\pi}{6} + i \cdot \sin\frac{9\pi}{6} \right) = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \left(\cos\frac{3\pi}{2} + i \cdot \sin\frac{3\pi}{2} \right) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \left(\cos\left(\frac{3\pi}{2} - 2\pi \right) + i \cdot \sin\left(\frac{3\pi}{2} - 2\pi \right) \right) = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \left(\cos\left(-\frac{\pi}{2} \right) + i \cdot \sin\left(-\frac{\pi}{2} \right) \right) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \left(0 + i \cdot (-1) \right) = -\frac{1}{\sqrt{3}} \cdot i;$$

3) $z_3^4 = \left(2\sqrt{3} \cdot \left(\cos\left(-\frac{5\pi}{6} \right) + i \cdot \sin\left(-\frac{5\pi}{6} \right) \right) \right)^4 =$

$$= \left(2\sqrt{3} \right)^4 \cdot \left(\cos\left(4 \cdot \left(-\frac{5\pi}{6} \right) \right) + i \cdot \sin\left(4 \cdot \left(-\frac{5\pi}{6} \right) \right) \right) =$$

$$= 144 \cdot \left(\cos\left(-\frac{10\pi}{3} + 2\pi \right) + i \cdot \sin\left(-\frac{10\pi}{3} + 2\pi \right) \right) =$$

$$= 144 \cdot \left(\cos\frac{2\pi}{3} + i \cdot \sin\frac{2\pi}{3} \right) = 144 \cdot \left(\cos\frac{2\pi}{3} + i \cdot \sin\frac{2\pi}{3} \right) =$$

$$= 144 \cdot \left(-\frac{1}{2} + i \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = -72 + 72\sqrt{3} \cdot i;$$

4) $$\frac{z_1\cdot z_3}{z_2^2}=\frac{\left(2\cdot\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\cdot\sin\frac{2\pi}{3}\right)\right)\cdot\left(2\sqrt{3}\cdot\left(\cos\left(-\frac{5\pi}{6}\right)+i\cdot\sin\left(-\frac{5\pi}{6}\right)\right)\right)}{\left(\sqrt{2}\cdot\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\cdot\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)\right)^2}=$$

$$=\frac{2\cdot 2\sqrt{3}}{\left(\sqrt{2}\right)^2}\cdot\frac{\cos\left(\frac{2\pi}{3}-\frac{5\pi}{6}\right)+i\cdot\sin\left(\frac{2\pi}{3}-\frac{5\pi}{6}\right)}{\left(\cos\left(-\frac{2\pi}{4}\right)+i\cdot\sin\left(-\frac{2\pi}{4}\right)\right)}=$$

$$=2\sqrt{3}\cdot\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}-\frac{5\pi}{6}+\frac{\pi}{2}\right)+i\cdot\sin\left(\frac{2\pi}{3}-\frac{5\pi}{6}+\frac{\pi}{2}\right)\right)=$$

$$=2\sqrt{3}\cdot\left(\cos\frac{2\pi}{6}+i\cdot\sin\frac{2\pi}{6}\right)=2\sqrt{3}\cdot\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\cdot\sin\frac{\pi}{3}\right)=$$

$$=2\sqrt{3}\cdot\left(\frac{1}{2}+i\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\sqrt{3}+3\cdot i\,.$$

4. ***Извлечение корня n-ой степени*** из комплексного числа z.

По определению, любое число w, такое, что $w^n = z$, называется корнем n-ой степени из числа z.

Пусть $z=|z|\cdot(\cos(\arg z)+i\cdot\sin(\arg z))$, $w=|w|\cdot(\cos(\arg w)+i\cdot\sin(\arg w))$.

Тогда

$$w^n=|w|^n\cdot(\cos(n\arg w)+i\cdot\sin(n\arg w))=|z|\cdot(\cos(\arg z)+i\cdot\sin(\arg z)).$$

Комплексные числа, записанные в тригонометрической форме, равны, если их модули равны, а аргументы отличаются на слагаемое, кратное 2π. Поэтому из последнего соотношения получаем систему

$$\begin{cases}|w|^n=|z|,\\ n\arg w=\arg z+2\pi k,\end{cases}$$

откуда выражаем

$$\begin{cases} |w| = \sqrt[n]{|z|}, \\ \arg w = \dfrac{\arg z + 2\pi k}{n}. \end{cases}$$

Обозначим $\arg z = \varphi$ и окончательно придем к формуле

$$w = \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z| \cdot (\cos\varphi + i \cdot \sin\varphi)} = \sqrt[n]{|z|} \cdot \left(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i \cdot \sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n} \right),\ k = 0,1,\ldots,n-1.$$

Следует отметить, что существует ровно *n* различных значений корня *n*-й степени из комплексного числа, которые определяются для значений $k = 0,1,\ldots,n-1$. Действительно, для *k*, *k*+*n*, *k*+2*n* и т.д. будем получать одинаковые значения выражения $\sqrt[n]{|z|} \cdot \left(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i \cdot \sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n} \right)$ в силу периодичности тригонометрических функций.

Эти разные значения обозначают w_k, $k = 0,1,\ldots,n-1$; при их вычислении принято брать значение аргумента $0 \le \varphi < 2\pi$. На комплексной плоскости числа w_k, $k = 0,1,\ldots,n-1$ образуют правильный *n*-угольник, вписанный в круг с центром в начале координат и радиусом $\sqrt[n]{|z|}$; аргументы «соседних» значений w_k и w_{k+1} отличаются на величину $\frac{2\pi k}{n}$.

Пример 12. Вычислить $\sqrt[4]{-1+\sqrt{3}i}$.

Решение. Комплексное число, стоящее под знаком корня, в тригонометрической форме имеет вид

$$z = -1 + \sqrt{3}i = 2 \cdot \left(\cos\frac{2\pi}{3} + i \cdot \sin\frac{2\pi}{3} \right).$$

Запишем общую формулу для вычисления всех значений

$$w_k = \sqrt[4]{-1+\sqrt{3}i} = \sqrt[4]{2 \cdot \left(\cos\frac{2\pi}{3} + i \cdot \sin\frac{2\pi}{3} \right)} =$$

$$= \sqrt[4]{2} \cdot \left(\cos\frac{\frac{2\pi}{3} + 2\pi k}{4} + i \cdot \sin\frac{\frac{2\pi}{3} + 2\pi k}{4} \right),\ k = 0,1,2,3.$$

Далее находим

$$w_0=\sqrt[4]{2}\cdot\left(\cos\frac{\frac{2\pi}{3}+0}{4}+i\cdot\sin\frac{\frac{2\pi}{3}+0}{4}\right)=\sqrt[4]{2}\cdot\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\cdot\sin\frac{\pi}{6}\right)=$$

$$=\sqrt[4]{2}\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+i\cdot\frac{1}{2}\right),$$

$$w_1=\sqrt[4]{2}\cdot\left(\cos\frac{\frac{2\pi}{3}+2\pi}{4}+i\cdot\sin\frac{\frac{2\pi}{3}+2\pi}{4}\right)=\sqrt[4]{2}\cdot\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\cdot\sin\frac{2\pi}{3}\right)=$$

$$=\sqrt[4]{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}+i\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\right),$$

$$w_2=\sqrt[4]{2}\cdot\left(\cos\frac{\frac{2\pi}{3}+4\pi}{4}+i\cdot\sin\frac{\frac{2\pi}{3}+4\pi}{4}\right)=\sqrt[4]{2}\cdot\left(\cos\frac{7\pi}{6}+i\cdot\sin\frac{7\pi}{6}\right)=$$

$$=\sqrt[4]{2}\cdot\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}-i\cdot\frac{1}{2}\right),$$

$$w_3=\sqrt[4]{2}\cdot\left(\cos\frac{\frac{2\pi}{3}+6\pi}{4}+i\cdot\sin\frac{\frac{2\pi}{3}+6\pi}{4}\right)=\sqrt[4]{2}\cdot\left(\cos\frac{5\pi}{3}+i\cdot\sin\frac{5\pi}{3}\right)=$$

$$=\sqrt[4]{2}\cdot\left(\frac{1}{2}-i\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

Таким образом, получили четыре различных значения $\sqrt[4]{-1+\sqrt{3}i}$, которые можно представить как тригонометрической, так и в алгебраической формах. На комплексной плоскости полученные значения выражения $\sqrt[4]{-1+\sqrt{3}i}$ образуют правильный четырехугольник (квадрат), вписанный в окружность с центром в начале координат и радиусом $\sqrt[4]{2}$ (рис. 4).

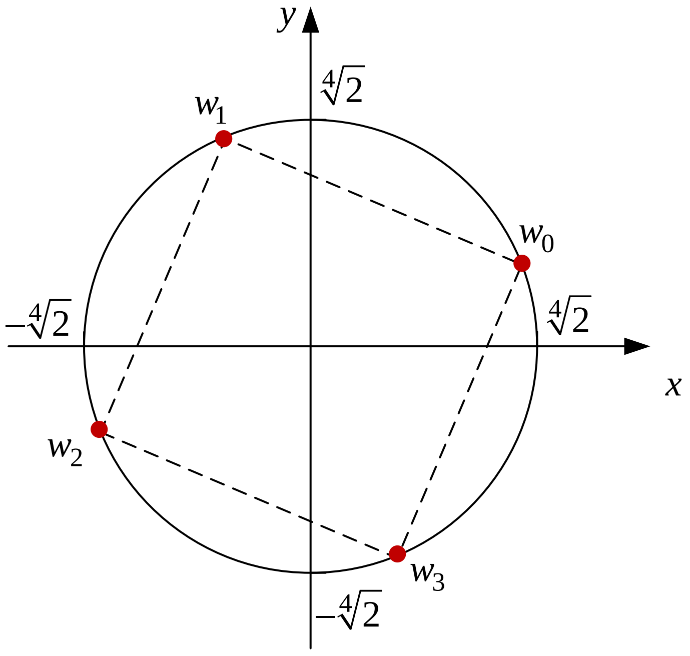

Рисунок 4 – Геометрическая иллюстрация для примера 12

Задания для самостоятельной работы

Выполнить действия над комплексными числами в тригонометрической форме:

1) $\left(2+2\sqrt{3}i\right)\cdot\left(-3+3i\right)$;

2) $\dfrac{2+2\sqrt{3}i}{4-4i}$;

3) $\left(\dfrac{1-i}{1+i}\right)^6$;

4) $\dfrac{\left(1+\sqrt{3}i\right)^{13}}{\left(-1+i\right)^{21}}$;

5) $\sqrt[4]{-16i}$;

6) $\sqrt[3]{-2\sqrt{3}-2i}$.

5. ПОКАЗАТЕЛЬНАЯ ФОРМА КОМПЛЕКСНОГО ЧИСЛА

Ряд Маклорена для функции $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots$ сходится к функции при любом действительном *x*. Запишем это разложение для $x = i\varphi$:

$$e^{i\varphi} = 1 + i\varphi + \frac{(i\varphi)^2}{2!} + \frac{(i\varphi)^3}{3!} + \frac{(i\varphi)^4}{4!} + \frac{(i\varphi)^5}{5!} \ldots + \frac{(i\varphi)^n}{n!} + \ldots$$

Степени числа *i*: $i^2 = -1$, $i^3 = i^2\, i = -i$, $i^4 = i^2\, i^2 = 1$, $i^5 = i^4\, i = i$, $i^6 = i^2 = -1$, далее значения степеней повторяются. Поэтому

$$e^{i\varphi} = 1 + i\varphi - \frac{\varphi^2}{2!} - \frac{i\varphi^3}{3!} + \frac{\varphi^4}{4!} + \frac{i\varphi^5}{5!} - \frac{\varphi^6}{6!} \ldots + i^n \frac{\varphi^n}{n!} + \ldots =$$

$$= \left(1 - \frac{\varphi^2}{2!} + \frac{\varphi^4}{4!} - \frac{\varphi^6}{6!} + \ldots\right) + i\left(\varphi - \frac{\varphi^3}{3!} + \frac{\varphi^5}{5!} - \frac{\varphi^7}{7!} + \ldots\right).$$

В круглых скобках стоят ряды Маклорена для $\cos\varphi$ и $\sin\varphi$, которые сходятся для любого действительного φ. Таким образом получаем

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi.$$

Формула называется ***формулой Эйлера***.

Воспользовавшись тригонометрической формой записи комплексного числа, получим

$$z = |z| \cdot (\cos\varphi + i \cdot \sin\varphi) = |z| \cdot e^{i\varphi}.$$

Определение 5. Представление комплексного числа *z* в виде

$$z = |z| \cdot e^{i \cdot \operatorname{Arg} z} = |z| \cdot e^{i \cdot \arg z} = |z| \cdot e^{i \cdot \varphi}$$

называется ***показательной формой*** записи комплексного числа.

В этой форме умножение, деление, возведение в степень и извлечение корня комплексных чисел выполняются и интерпретируются также легко, как и в тригонометрической.

1. ***Произведение*** $z_1 \cdot z_2 = \left(|z_1| \cdot e^{i\varphi_1}\right) \cdot \left(|z_2| \cdot e^{i\varphi_2}\right) = \left(|z_1| \cdot |z_2|\right) \cdot e^{i(\varphi_2 + \varphi_2)}$.

2. ***Деление*** $\frac{z_1}{z_2}=\frac{|z_1|\cdot e^{i\varphi_1}}{|z_2|\cdot e^{i\varphi_2}}=\frac{|z_1|}{|z_2|}\cdot e^{i(\varphi_1-\varphi_2)}$.

3. ***Возведение в степень*** $z^n=|z|^n\cdot e^{in\varphi}$ (**формула Муавра**).

4. ***Извлечение корня n-ой степени***

$$w=\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{|z|\cdot e^{i\varphi}}=\sqrt[n]{|z|}\cdot e^{i\cdot\frac{\varphi+2\pi k}{n}},\ k=0,1,...,n-1.$$

Пример 13. Записать в показательной форме числа

$z_1=-1+\sqrt{3}i$, $z_2=1-i$, $z_3=-3-\sqrt{3}i$, $z_4=3i$, $z_5=1+2i$.

Решение. Для данных комплексных чисел уже найдены модуль и аргумент (пример 10), поэтому здесь запишем показательную форму:

$$z_1=2\cdot e^{i\cdot\frac{2\pi}{3}},$$

$$z_2=\sqrt{2}\cdot e^{-i\cdot\frac{\pi}{4}} \quad \text{или} \quad z_2=\sqrt{2}\cdot e^{i\cdot\frac{7\pi}{4}},$$

$$z_3=2\sqrt{3}\cdot e^{-i\cdot\frac{5\pi}{6}} \quad \text{или} \quad z_3=2\sqrt{3}\cdot e^{i\cdot\frac{7\pi}{6}},$$

$$z_4=3\cdot e^{i\cdot\frac{\pi}{2}},$$

$$z_5=\sqrt{5}\cdot e^{i\cdot arctg 2}.$$

Задания для самостоятельной работы

Выполнить действия над комплексными числами в показательной форме:

1) $\left(2+2\sqrt{3}i\right)\cdot\left(-3+3i\right)$;

2) $\frac{2+2\sqrt{3}i}{4-4i}$;

3) $\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^6$;

4) $\frac{\left(1+\sqrt{3}i\right)^{13}}{\left(-1+i\right)^{21}}$;

5) $\sqrt[4]{-16i}$;

6) $\sqrt[3]{-2\sqrt{3}-2i}$.

6. РЕШЕНИЕ НЕКОТОРЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ И СИСТЕМ НА МНОЖЕСТВЕ КОМПЛЕКСНЫХ ЧИСЕЛ

В данном разделе рассмотрим примеры решения некоторых алгебраических уравнений и систем, используя основные понятия и формулы из теории комплексных чисел.

Пример 14. При каких действительных x и y справедливы равенства:

1) $(1+2i)x+(5i-3)y=2-3i$;

2) $\dfrac{y+ix}{x+iy}=\dfrac{4+x}{4i+1}$;

3) $(-1+i)\sin x+i\cos y=\cos x$.

Решение. 1) в левой части уравнения сгруппируем слагаемые действительной и мнимой частей

$$(x-3y)+i(2x+5y)=2-3i$$

и приравняем их к соответствующим действительным и мнимым частям справа; получим следующую систему уравнений

$$\begin{cases} x-3y=2, \\ 2x+5y=-3. \end{cases}$$

Находим решение данной системы и получаем ответ $x=\dfrac{1}{11}$, $y=-\dfrac{7}{11}$;

2) преобразуем уравнение следующим образом:

$$(y+ix)(4i+1)=(4+x)(x+iy),$$

$$(y-4x)+i(x+4y)=(4x+x^2)+i(4y+xy);$$

теперь приравняем действительные и мнимые части и придем к системе

$$\begin{cases} y-4x=4x+x^2, \\ x+4y=4y+xy, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} y=8x+x^2, \\ x(y-1)=0. \end{cases}$$

Из второго уравнения системы получаем:

$x = 0$, тогда $y = 0$, но это невозможно, так как в этом случае в правой части исходного уравнения в знаменателе получится ноль;

$y = 1$, тогда подстановка этого уравнения в первое уравнение дает следующее:

$$x^2+8x-1=0,\quad D=64+4=68=\left(2\sqrt{17}\right)^2,\quad x_{1,2}=\frac{-8\pm2\sqrt{17}}{2}=-4\pm\sqrt{17}.$$

Окончательно получаем две пары ответов: $x_1=-4-\sqrt{17}$, $y_1=1$ и $x_2=-4+\sqrt{17}$, $y_2=1$.

3) приравняем действительные и мнимые части в левой и правой частях уравнения, придем к системе:

$$\begin{cases}-\sin x=\cos x,\\ \sin x+\cos y=0.\end{cases}$$

Первое уравнение можно записать в виде $\frac{\sin x}{\cos x}=tgx=-1$, откуда получаем значения $x=-\frac{\pi}{4}+\pi k,\ k\in Z$. Подстановка этих значений во второе уравнение дает

$$\cos y=-\sin x=-\sin\left(-\frac{\pi}{4}+\pi k\right)=\sin\frac{\pi}{4}\cos\pi k=(-1)^k\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Откуда при четных $k=2n$ находим $\cos y=\frac{\sqrt{2}}{2}$ и $y=\pm\frac{\pi}{4}+2\pi n,\ n\in Z$; при нечетных $k=2n+1$ получаем $\cos y=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ и $y=\pm\frac{3\pi}{4}+2\pi n,\ n\in Z$.

Окончательно получаем четыре пары ответов (x, y):

$$(x_1,\ y_1)=\left(-\frac{\pi}{4}+2\pi n,\ -\frac{\pi}{4}+2\pi n\right),\ n\in Z,$$

$$(x_2,\ y_2)=\left(-\frac{\pi}{4}+2\pi n,\ \frac{\pi}{4}+2\pi n\right),\ n\in Z,$$

$$(x_3,\ y_3)=\left(\frac{3\pi}{4}+2\pi n,\ -\frac{3\pi}{4}+2\pi n\right),\ n\in Z,$$

$$(x_4,\ y_4)=\left(\frac{3\pi}{4}+2\pi n,\ \frac{3\pi}{4}+2\pi n\right),\ n\in Z.$$

Пример 15. Найти решение уравнения $z^5+31=0$.

Решение. Для решения этого уравнения выразим $z=\sqrt[5]{-32}$ и найдем все возможные корни с использованием формулы из раздела 4. Представим число под корнем в тригонометрической форме и запишем

$$z=\sqrt[5]{-32}=\sqrt[5]{32\cdot(\cos\pi+i\sin\pi)}=\sqrt[5]{32}\cdot\left(\cos\frac{\pi+2\pi k}{5}+i\sin\frac{\pi+2\pi k}{5}\right)=$$

$$=2\cdot\left(\cos\frac{\pi+2\pi k}{5}+i\sin\frac{\pi+2\pi k}{5}\right),\ k=0,1,2,3,4.$$

Из последнего выражения получаем пять различных корней уравнения:

$$z_0=2\cdot\left(\cos\frac{\pi}{5}+i\sin\frac{\pi}{5}\right),$$

$$z_1=2\cdot\left(\cos\frac{3\pi}{5}+i\sin\frac{3\pi}{5}\right),$$

$$z_2=2\cdot(\cos\pi+i\sin\pi)=-2,$$

$$z_3=2\cdot\left(\cos\frac{7\pi}{5}+i\sin\frac{7\pi}{5}\right)б$$

$$z_4=2\cdot\left(\cos\frac{9\pi}{5}+i\sin\frac{9\pi}{5}\right).$$

Пример 16. Найти решения уравнений:

1) $z^2-(4+i)z+10+2i=0$;

2) $z^2-5z+7-i=0$;

3) $(3+i)z^2+(1-i)z-6i=0$;

4) $z^5+z^4+z^3+z^2+z+1=0$.

Решение. Каждое из уравнений является квадратным, поэтому для их решения следует вычислить дискриминант по известной формуле алгебры. Однако в случае комплексных корней уравнений теперь допускается извлечение корня из отрицательных чисел и из чисел, являющихся комплексными.

В самом общем случае для квадратного уравнения вида

$$az^2+bz+c=0,$$

где z – это комплексное число, формулы для корней имеют вид

$$z = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}, \quad D = b^2 - 4ac;$$

при этом корень из дискриминанта принимает два разных значения, эти значения вычисляются с использованием формулы извлечения корней из комплексных чисел (раздел 4).

Рассмотрим отдельно каждое уравнение:

1) найдем дискриминант

$$D = (-4-i)^2 - 4(10+2i) = 16 + 8i - 1 - 40 - 8i = -25;$$

тогда $\sqrt{D} = \sqrt{-25} = \pm 5i$ и корни уравнения имеют вид $z_{1,2} = \dfrac{4 + i \pm 5i}{2}$ или $z_1 = 2 - 2i$ и $z_2 = 2 + 3i$;

2) найдем дискриминант

$$D = (-5)^2 - 4(7-i) = 25 - 28 + 4i = -3 + 4i.$$

При вычислении значения $\sqrt{D}$ получим, что значение аргумента комплексного числа $-3+4i$ будет выражаться через арктангенс.

Следует отметить, что в некоторых случаях для извлечения квадратного корня из комплексного числа удобно пользоваться следующей формулой

$$\sqrt{a+ib} = \pm\left(\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}} + i \cdot \frac{b}{|b|} \cdot \sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}}\right),$$

где под корнем квадратным понимается обычное арифметическое значение корня из действительного числа.

Так для данного примера, применив эту формулу для вычисления корня из дискриминанта, получим

$$\sqrt{D} = \sqrt{-3+4i} = \pm\left(\sqrt{\frac{\sqrt{(-3)^2+4^2}-3}{2}} + i \cdot \frac{4}{|4|} \cdot \sqrt{\frac{\sqrt{(-3)^2+4^2}+3}{2}}\right) =$$

$$=\pm\left(\sqrt{\frac{5-3}{2}}+i\cdot\sqrt{\frac{5+3}{2}}\right)=\pm(1+2i);$$

в результате получаем следующие корни уравнения

$$z_{1,2}=\frac{5\pm(1+2i)}{2} \quad \text{или} \quad z_1=3+i \text{ и } z_2=2-i;$$

3) вычислим дискриминант уравнения

$$D=(-1+i)^2-4(3+i)(-6i)=1-2i-1+72i-24=-24+70i$$

и корень из него по указанной выше формуле

$$\sqrt{D}=\sqrt{-24+70i}=\pm\left(\sqrt{\frac{\sqrt{(-24)^2+70^2}-24}{2}}+i\cdot\frac{70}{|70|}\cdot\sqrt{\frac{\sqrt{(-24)^2+70^2}+24}{2}}\right)=$$

$$=\pm\left(\sqrt{\frac{74-24}{2}}+i\cdot\sqrt{\frac{74+24}{2}}\right)=\pm(5+7i).$$

Тогда находим корни уравнения:

$$z_1=\frac{-1+i-5-7i}{2(3+i)}=\frac{-3-3i}{3+i}=\frac{(-3-3i)(3-i)}{(3+i)(3-i)}=\frac{-12-6i}{10}=-\frac{6}{5}-\frac{3}{5}i,$$

$$z_2=\frac{-1+i+5+7i}{2(3+i)}=\frac{2+4i}{3+i}=\frac{(2+4i)(3-i)}{(3+i)(3-i)}=\frac{10+10i}{10}=1+i;$$

4) сгруппируем попарно слагаемые в левой части уравнения и разложим на множители:

$$(z^5+z^4)+(z^3+z^2)+(z+1)=0,$$

$$z^4(z+1)+z^2(z+1)+(z+1)=0,$$

$$(z^4+z^2+1)(z+1)=0.$$

Из последнего уравнения получаем значение первого корня $z_1=-1$ и биквадратное уравнение $z^4+z^2+1=0$.

Выполним замену $z^2=t\in C$ и получим квадратное уравнение $t^2+t+1=0$, дискриминант которого равен $D=1^2-4\cdot1=-3$. Получаем два значения $t_1=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$ и $t_2=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$. Извлекая корни из полученных значений, получаем

$$t_{2,3}=\sqrt{-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i}=\sqrt{\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}}=$$

$$=\cos\frac{\frac{4\pi}{3}+2\pi k}{2}+i\sin\frac{\frac{4\pi}{3}+2\pi k}{2},\ k=0,1,$$

$$t_2=\cos\frac{4\pi}{6}+i\sin\frac{4\pi}{6}=\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i,$$

$$t_3=\cos\frac{10\pi}{6}+i\sin\frac{10\pi}{6}=\cos\frac{5\pi}{3}+i\sin\frac{5\pi}{3}=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i,$$

$$t_{4,5}=\sqrt{-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i}=\sqrt{\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}}=$$

$$=\cos\frac{\frac{2\pi}{3}+2\pi k}{2}+i\sin\frac{\frac{2\pi}{3}+2\pi k}{2},\ k=0,1,$$

$$t_4=\cos\frac{2\pi}{6}+i\sin\frac{2\pi}{6}=\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i,$$

$$t_5=\cos\frac{8\pi}{6}+i\sin\frac{8\pi}{6}=\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i.$$

Пример 17. Найти решение системы уравнений

$$\begin{cases}(2+i)z_1+(3+i)z_2=i,\\(1+2i)z_1+(-1+i)z_2=1+i.\end{cases}$$

Решение. Данная система является системой линейных уравнений с комплексными коэффициентами относительно комплексных неизвестных. Для ее решения можно применить любой из известных методов линейной алгебры. Воспользуемся методом Крамера и вычислим следующие определители

$$\Delta=\begin{vmatrix}2+i & 3+i\\1+2i & -1+i\end{vmatrix}=(2+i)(-1+i)-(3+i)(1+2i)=-4-6i,$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} i & 3+i \\ 1+i & -1+i \end{vmatrix} = i(-1+i)-(3+i)(1+i) = -3-5i,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2+i & i \\ 1+2i & 1+i \end{vmatrix} = (2+i)(1+i)-i(1+2i) = 3+2i.$$

Тогда находим неизвестные по формулам

$$z_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-3-5i}{-4-6i} = \frac{(-3-5i)(-4+6i)}{(-4-6i)(-4+6i)} = \frac{42+2i}{52} = \frac{21}{26} + \frac{1}{26}i,$$

$$z_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{3+2i}{-4-6i} = \frac{(3+2i)(-4+6i)}{(-4-6i)(-4+6i)} = \frac{-24+10i}{52} = -\frac{12}{26} + \frac{5}{26}i.$$

Задания для самостоятельной работы

Найти решения следующих уравнений и систем:

1) $z^6 + 64i = 0$; 2) $z^4 + 12z^2 + 52 = 0$;

3) $\begin{cases} -2z_1 + iz_2 = 5-3i, \\ (i-1)z_1 - 3z_2 = 5+4i. \end{cases}$

7. ЗАДАНИЕ КРИВЫХ И ОБЛАСТЕЙ НА КОМПЛЕКСНОЙ ПЛОСКОСТИ

Теория комплексных чисел позволяет решать многие задачи геометрии, доказывать тригонометрические и геометрические соотношения. Также с помощью равенств и неравенств, содержащих комплексный аргумент, удобно задавать линии и обрасти на комплексной плоскости.

Для того, чтобы изобразить линию или область, в соответствующее равенство или неравенство вместо комплексного числа z следует подставить одно из его возможных представлений (алгебраическое, тригонометрическое или показательное) и выполнить соответствующие действия.

Так как $|z-z_0|=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}$ равен расстоянию между точками z и z_0, то можно получить следующие типичные случаи:

1) $|z-z_0|=R$ – уравнение окружности радиуса R с центром в точке z_0;

2) $|z-z_0|\le R$ или $|z-z_0|<R$ – замкнутая или открытая область, ограниченная этой окружностью, т.е. круг радиуса R с центром в точке z_0, включающий или не включающий свою границу (в зависимости от типа неравенства);

3) $|z-z_0|\ge R$ или $|z-z_0|>R$ – закрытая открытая область, состоящая из точек, находящихся вне круга радиуса R с центром в z_0; круг включен или не включен в эту область (в зависимости от типа неравенства);

4) $|z-z_1|+|z-z_2|=2a$ – эллипс, построенный на точках z_1 и z_2, рассматриваемых как фокусы (большая полуось равна $2a$, малая – $\sqrt{a^2-\frac{|z_1-z_2|^2}{4}}$). Области, лежащие внутри и вне эллипса, описываются соответствующими неравенствами;

5) $\big||z-z_1|-|z-z_2|\big|=2a$ – гипербола с фокусами в точках z_1 и z_2; расстояние между фокусами $2c=|z_1-z_2|$, между вершинами $2a$. Уравнение $|z-z_1|-|z-z_2|=2a$ даёт ветвь гиперболы, расположенную ближе к фокусу z_2;

неравенство $|z-z_2|-|z-z_1|>2a$– открытую область, содержащую фокус z_1 и ограниченную соответствующей ветвью гиперболы;

6) $\operatorname{Re} z=a$ (или $x=a$) – прямая, параллельная оси *Oy*. $\operatorname{Re} z\geq a$ – область, лежащая справа от этой прямой (включая прямую); $\operatorname{Re} z<a$ – область слева от прямой (прямая не включена в область). $\operatorname{Im} z=b$ (или $y=b$) – прямая параллельная оси *Ox*; $\operatorname{Im} z\geq b$, $\operatorname{Im} z<b$ – области, расположенные выше и ниже этой прямой;

7) $argz=\alpha$ – луч, выходящий из точки $z=0$ под углом α к оси *Ox*. $arg(z-z_0)=\alpha$ – луч, выходящий из точки z_0 под углом α к оси *Ox*. $\alpha\leq arg(z-z_0)\leq\beta$ – область, расположенная между лучами, выходящими из точки z_0.

Пример 18. Изобразить на комплексной плоскости множества точек, удовлетворяющее условиям:

1) $|z|=2\operatorname{Re} z-1$;

2) $|z-1+2i|=|z|$;

3) $\dfrac{|2z+i|}{|z-3|}=1$;

4) $|z+2i|+|z-2i|=5$;

5) $\operatorname{Im}((1-i)(z+i))=0$.

Решение. Поскольку соотношения являются равенствами, то каждое из них будет описывать некоторую кривую на комплексной плоскости. Для того, чтобы определить тип кривой, в уравнение подставим $z=x+iy$ и выполним соответствующие операции. Рассмотрим каждое соотношение:

1) получаем $|x+iy|=2\operatorname{Re}(x+iy)-1$, откуда $\sqrt{x^2+y^2}=2x-1$. При условии $2x-1\geq 0$ или $x\geq 1/2$ возведем левую и правую часть равенства в квадрат и преобразуем:

$$x^2+y^2=(2x-1)^2,$$

$$x^2+y^2=4x^2-4x+1,$$

$$3x^2-4x-y^2=-1,$$

$$3\left(x^2-2x\cdot\frac{2}{3}+\frac{4}{9}\right)-y^2=-1+\frac{4}{3},$$

$$3\left(x-\frac{2}{3}\right)^2-y^2=\frac{1}{3},$$

$$\frac{\left(x-\frac{2}{3}\right)^2}{\left(\frac{1}{3}\right)^2}-\frac{y^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2}=1.$$

Последнее уравнение представляет собой уравнение гиперболы с центром в точке $\left(\frac{2}{3},0\right)$ и полуосями $\frac{1}{3}$ и $\frac{1}{\sqrt{3}}$ (рис. 5). С учетом условия $x\geq 1/2$ кривая, которая описывается соотношением $|z|=2\operatorname{Re}z-1$, – это часть правая ветвь гиперболы (отмечена на рис. 5 жирной линией);

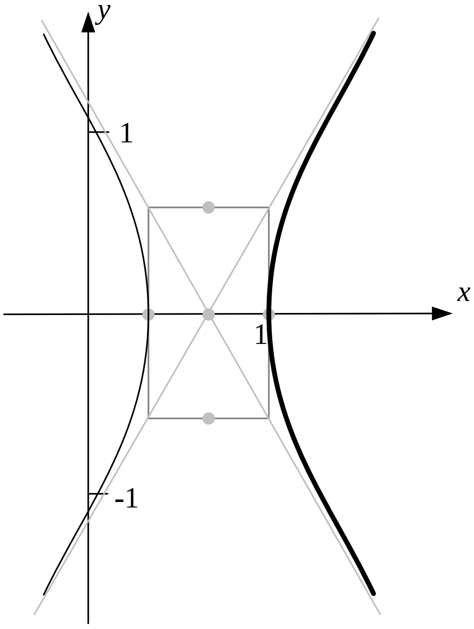

Рисунок 5 – Геометрическая иллюстрация для примера 18, 1)

2) равенство $|z-1+2i|=|z|$ определяет геометрическое место точек, равноудаленных от точек $1-2i$ и 0, что соответствует прямой. В уравнение подставим $z=x+iy$ и преобразуем его:

$$|x+iy-1+2i|=|x+iy|,$$

$$|(x-1)+i(y+2)|=|x+iy|,$$

$$\sqrt{(x-1)^2+(y+2)^2}=\sqrt{x^2+y^2},$$

$$(x-1)^2+(y+2)^2=x^2+y^2,$$

$$x^2-2x+1+y^2+4y+4=x^2+y^2,$$

откуда получаем уравнение прямой $2x-4y=5$ (рис. 6). На рисунке для наглядности также отмечены точки $1-2i$ и 0-;

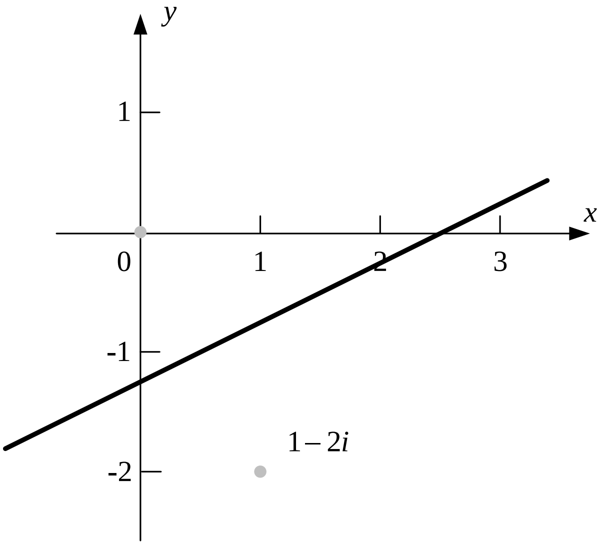

Рисунок 6 – Геометрическая иллюстрация для примера 18, 2)

3) в предположении, что $z\neq 3$, умножим левую и правую часть уравнения $\dfrac{|2z+i|}{|z-3|}=1$ на $|z-3|$ и аналогично преобразуем полученное уравнение:

$$|2(x+iy)+i|=|x+iy-3|,$$

$$|2x+i(2y+1)|=|(x-3)+iy|,$$

$$\sqrt{(2x)^2+(2y+1)^2}=\sqrt{(x-3)^2+y^2},$$

$$4x^2+4y^2+4y+1=x^2-6x+9+y^2,$$

$$3x^2+6x+3y^2+4y=8,$$

$$x^2+2x+y^2+\frac{4}{3}y=\frac{8}{3},$$

$$\left(x^2+2x+1\right)+\left(y^2+2y\cdot\frac{2}{3}+\frac{4}{9}\right)=\frac{8}{3}+1+\frac{4}{9},$$

откуда приходим к уравнению $(x+1)^2+\left(y+\frac{2}{3}\right)^2=\frac{37}{9}$, которое определяет окружность с центром в точке $\left(-1,-\frac{2}{3}\right)$ и радиусом $\frac{\sqrt{37}}{3}$. Следует отметить, что точка $z=3$ данной окружности не принадлежит, а, следовательно, данное уравнение на координатной плоскости задает указанную окружность (рис. 7);

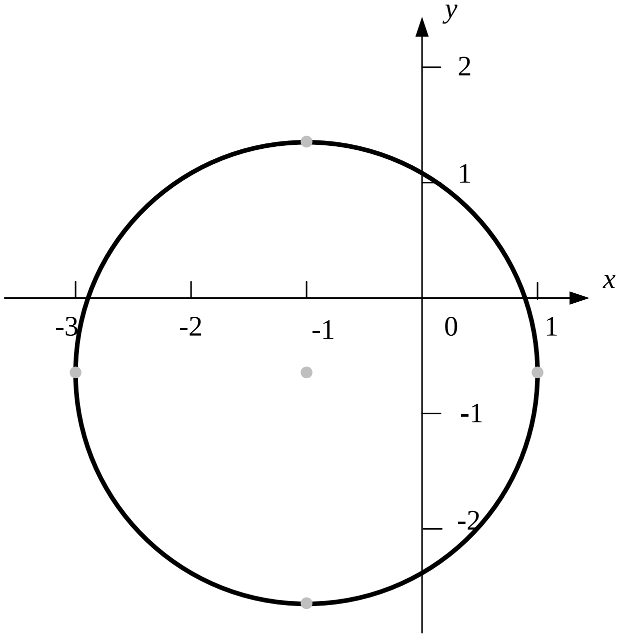

Рисунок 7 – Геометрическая иллюстрация для примера 18, 3)

4) рассмотрим следующий пример. Аналогично заменим комплексную переменную ее алгебраической формой и преобразуем уравнение, избавившись от корней:

$$|x+iy+2i|+|x+iy-2i|=5,$$

$$\sqrt{x^2+(y+2)^2}+\sqrt{x^2+(y-2)^2}=5,$$

$$\sqrt{x^2+(y+2)^2}=5-\sqrt{x^2+(y-2)^2}\ .$$

Левую и правую часть последнего уравнения возведем в квадрат при условии, что $5-\sqrt{x^2+(y-2)^2}\geq 0$, что задает круг $x^2+(y-2)^2\leq 25$ с центром в точке (0, 2) и радиуса 5; получим:

$$x^2+(y+2)^2=25-10\sqrt{x^2+(y-2)^2}+x^2+(y-2)^2,$$

$$x^2+(y+2)^2=25-10\sqrt{x^2+(y-2)^2}+x^2+(y-2)^2$$

$$10\sqrt{x^2+(y-2)^2}=25-8y\,.$$

Далее при условии, что $25-8y\geq 0$ или $y\leq 25/8$, возведем в квадрат левую и правую часть:

$$100(x^2+(y-2)^2)=625-400y+64y^2,$$

$$100x^2+36y^2=225.$$

Окончательно приходим к уравнению $\dfrac{x^2}{(3/2)^2}+\dfrac{y^2}{(5/2)^2}=1$, задающее уравнение эллипса с центром в начале координат и полуосями $\dfrac{3}{2}$ и $\dfrac{5}{2}$ (рис. 8). Следует отметить, что данный эллипс целиком включается в область, определенную неравенствами $x^2+(y-2)^2\leq 25$ и $y\leq 25/8$;

5) рассмотрим последнее уравнение и аналогично преобразуем его:

$$\mathrm{Im}((1-i)(x+iy+i))=0\,,$$

$$\mathrm{Im}\big((1-i)(x+i(y+1))\big)=0,$$

$$\mathrm{Im}\big((x+y+1)+i(y+1-x)\big)=0\,.$$

Из последнего уравнения получаем уравнение прямой $y+1-x=0$ или $y=x-1$ (рис. 9).

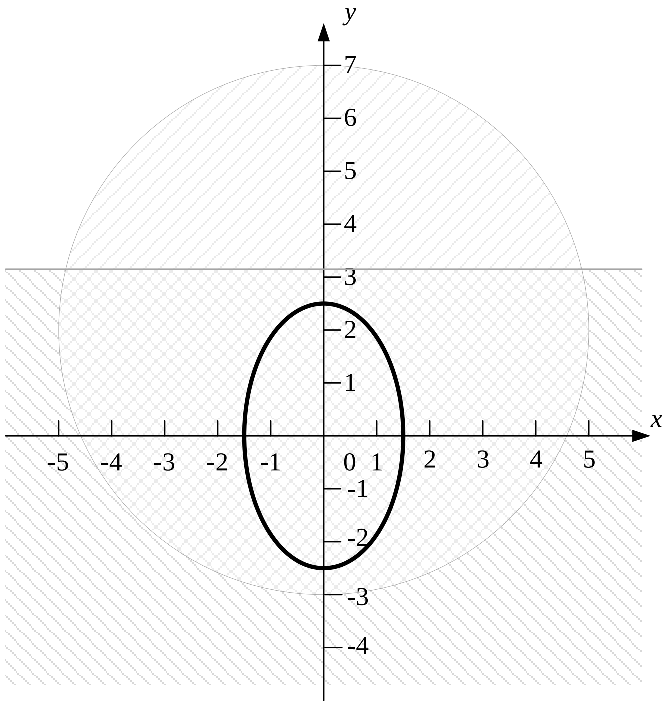

Рисунок 8 – Геометрическая иллюстрация для примера 18, 4)

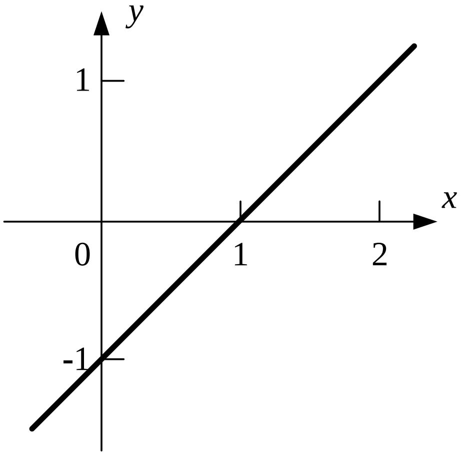

Рисунок 9 – Геометрическая иллюстрация для примера 18, 5)

Пример 19. Изобразить на комплексной плоскости множества точек, удовлетворяющее условиям:

1) $|1+z|>|3i-z|$;

2) $\begin{cases} |z|\ge 1, \\ \dfrac{\pi}{3}\le \arg z\le \dfrac{2\pi}{3}, \end{cases}$;

3) $\begin{cases} |z-3+5i|<2, \\ -6 \le \operatorname{Im} z \le -1. \end{cases}$

Решение. Поскольку соотношения являются неравенствами, то каждое из них будет описывать некоторую область на комплексной плоскости. Тип неравенства определяет будет область открытой или закрытой. Рассмотрим каждый случай:

1) в неравенстве выполним замену $z = x + iy$ и преобразуем соотношение:

$$|1+x+iy| > |3i-x-iy|,$$

$$\sqrt{(1+x)^2+y^2} > \sqrt{(-x)^2+(3-y)^2},$$

$$(1+x)^2+y^2 > (-x)^2+(3-y)^2,$$

$$1+2x+x^2+y^2 > x^2+9-6y+y^2,$$

$$x+3y-4>0.$$

Последнее неравенство задает область на комплексной плоскости, лежащую выше прямой $x+3y-4=0$, при этом сама прямая в область не включается, поскольку неравенство строгое (рис. 10);

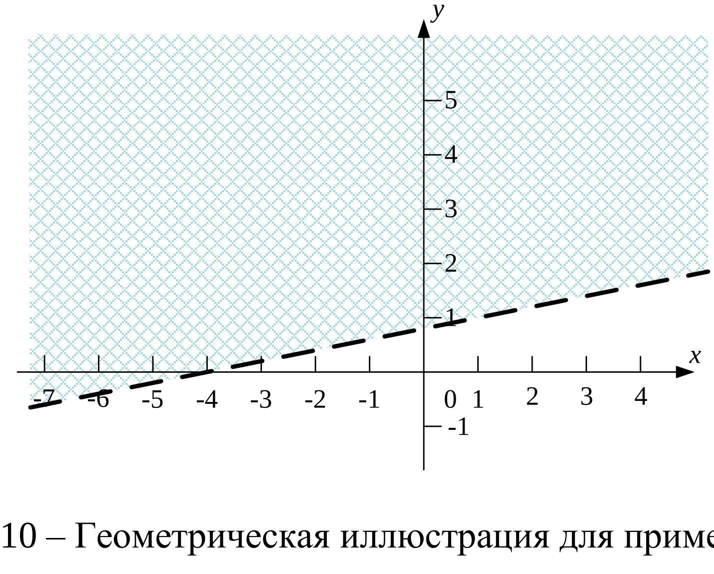

Рисунок 10 – Геометрическая иллюстрация для примера 19, 1)

2) рассмотрим отдельно каждое из неравенств, входящее в систему. Так неравенство $|z| \ge 1$ задает область, лежащую вне единичной окружности, вклю-

чая саму окружность; второе неравенство $\frac{\pi}{3} \le \arg z \le \frac{2\pi}{3}$ определяет область между лучами, соответствующими аргументам $\varphi = \frac{\pi}{3}$ и $\varphi = \frac{2\pi}{3}$, включая точки на самих лучах. Итоговое множество представляет собой пересечение указанных областей (рис. 11);

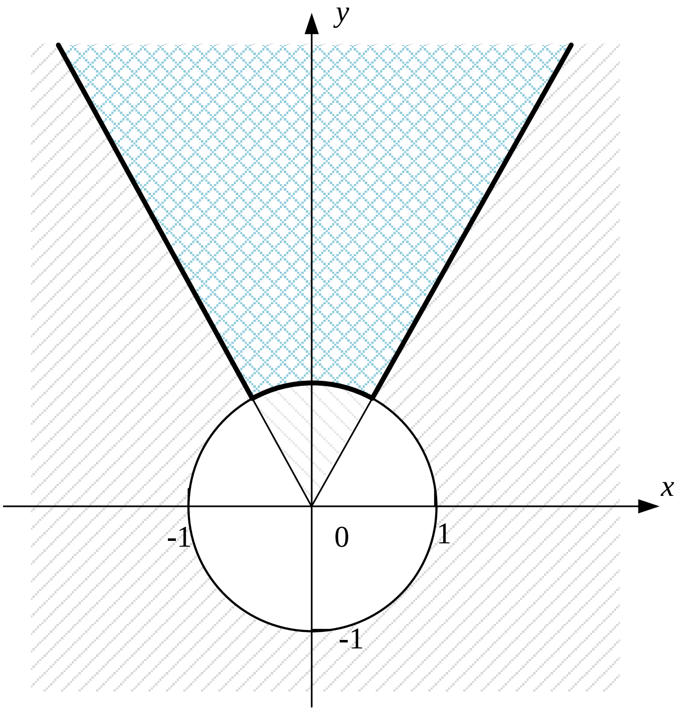

Рисунок 11 – Геометрическая иллюстрация для примера 19, 2)

3) аналогично рассмотрим отдельно каждое из неравенств. Первое соотношение $|z - 3 + 5i| < 2$ задает открытый (без границы) круг с центром в точке $(3, -5)$ и радиуса 2; второе неравенство $-6 \le \operatorname{Im} z \le -1$ можно записать в виде $-6 \le y \le -1$, оно задает горизонтальную полосу, ограниченную снизу и сверху прямыми $y = -6$ и $y = -1$ соответственно (сами прямые в область включаются). Окончательная область, полученная пересечением указанных множеств, изображена на рис. 12.

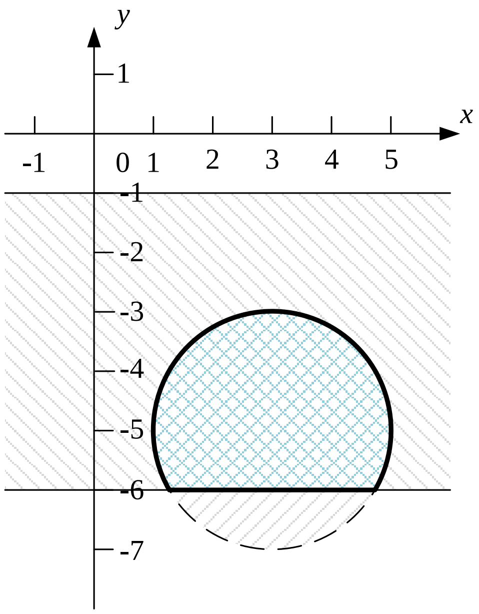

Рисунок 12 – Геометрическая иллюстрация для примера 19, 2)

Задания для самостоятельной работы

Изобразить на комплексной плоскости множества точек, удовлетворяющее условиям:

1) $|z+i| = |3-4z|$;

2) $\operatorname{Re}\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{1}{2}$;

3) $|z+2| - |z-2| = 5$;

4) $\operatorname{Im}\left(z^2\right) = 4$;

5) $\begin{cases} \operatorname{Im}(iz) \geq 2, \\ 4\operatorname{Re} z - \operatorname{Im}\left(z^2\right) \leq 0; \end{cases}$

6) $\begin{cases} |z+i| \leq 4, \\ |z-1| > 4; \end{cases}$

7) $\operatorname{Re}\left(z^2 - 2z\right) > 2 + 4\operatorname{Im} z$;

8) $\begin{cases} \operatorname{Re} z - 3\operatorname{Im} z < 3, \\ -\frac{\pi}{4} < \arg z < \frac{\pi}{2}. \end{cases}$

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1 Александрова, Е.Б. Теория функций комплексного переменного. Учебное пособие / Е.Б. Александрова, Свенцицкая Т.А., Тимофеева Л.Н., под ред. Г.Г. Хамова. – СПб: Изд-во РГПУ им. А.И. Герцена, 2006. – 168 с.

2 Араманович, И.Г. Функции комплексного переменного. Операционное исчисление. Теория устойчивости / И.Г. Араманович, Г.Л. Лунц, Л.Э. Эльсгольц. – М.: Наука, главная редакция физико-математической литературы, 1968. – 416 с.

3 Бугров, Я.С. Высшая математика в 3 т. Том 3. В 2 кн. Книга 2. Ряды. Функции комплексного переменного: учебник для вузов / Я.С. Бугров, С.М. Никольский. – 7-е изд., стер. – М.: Издательство Юрайт, 2020. – 219 с.

4 Волковыский, Л.И. Сборник задач по теории функции комплексного переменного. Учебное пособие. / Л.И. Волковыский, Г.Л. Лунц, И.Г. Арамонович. – 4-е изд., испр. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002. – 312 с.

5 Гончар, А.В. Практикум по теории функций комплексного переменного / А.В. Гончар. – Нижний Новгород: Изд-во Нижегородского государственного университета им. Н.И. Лобачевского, 2005. – 51 с.

6 Краснов, М.Л. Функции комплексного переменного. Операционное исчисление. Теория устойчивости / М.Л. Краснов, А.И. Киселев, Г.И. Макаренко. – М.: Главная редакция физико-математической литературы изд-ва «Наука», 1971. – 256 с.

7 Литвин, Н.В. Упражнения к конспекту лекций по теории функций комплексного переменного / Н.В. Литвин. – Мариуполь: ПГТУ, 2004. – 56 с.

8 Пантелеев, А.В. Теория функций комплексного переменного и операционное исчисление в примерах и задачах: учебное пособие / А.В. Пантелеев, А.С. Якимова. – СПб.: Лань, 2015. – 447 с.

9 Понарин, Я.П. Алгебра комплексных чисел в геометрических задачах: Книга для учащихся математических классов школ, учителей и студентов педагогических вузов / Я.П. Понарин. – М.: МЦНМО, 2004. – 160 с.

10 Привалов, И.И. Введение в теорию функций комплексного переменного: учебник для вузов / И.И. Привалов. – М.: Издательство Юрайт, 2019. – 402 с.

11 Сборник задач по высшей математике: с контрольными работами. 2 курс: учеб. пособие / К.Н. Лунгу и др.; под ред. С.Н. Федина. – 6-е изд. – М.: Айрис-пресс, 2007. – 591 с.

12 Свешников, А.Г., Теория функций комплексного переменного: учебник для вузов / А.Г. Свешников, А.Н. Тихонов. – 6-е изд., стереот. – М. ФИЗМАТЛИТ, 2005. – 336 с.

13 Старков, В.Н. Задачи по теории функций комплексного переменного. Ученое пособие / В.Н. Старков. – СПБ: Изд-во Санкт-Петербургского государственного университета, 1998. – 96 с.

14 Шабат, Б.В. Введение в комплексный анализ. Часть 1 / Б.В. Шабат. – М.: Наука, 1976. – 321 с.

СОДЕРЖАНИЕ

Введение 3

1. Определение комплексного числа 5

2. Операции над комплексными числами в алгебраической форме 8

3. Тригонометрическая форма комплексного числа 13

4. Операции над комплексными числами в тригонометрической форме 18

5. Показательная форма комплексного числа 25

6. Решение некоторых алгебраических уравнений и систем на множестве комплексных чисел 27

7. Задание кривых и областей на комплексной плоскости 34

Библиографический список 44

Надежда Николаевна Максимова,

кандидат физико-математических наук, доцент,

и.о. зав. кафедрой математического анализа и моделирования

Комплексные числа. Учебно-методическое пособие

Изд-во АмГУ. Подписано к печати __.__.2021. Формат 60x84/16.

Усл. печ. л. 2,73.

Тираж __. Заказ __.

Отпечатано в типографии АмГУ.