Министерство науки и высшего образования Российской Федерации

Амурский государственный университет

Л.И. Мороз

СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

Учебное пособие

Благовещенск
2021

ББК 22.193 я 73
М 80

Рекомендовано
учебно-методическим советом университета

Рецензент:
В.В. Еремина, канд.физ.-мат. наук, доц. кафедры информационных и управляющих систем АмГУ, директор общеобразовательного лицея АмГУ, доцент канд. ф.-м. наук, доцент

Мороз Любовь Игоревна
Случайные величины: учебное пособие / Л.И. Мороз – Благовещенск: Амурский гос. ун-т, 2021. – 60 с.

В учебном пособии рассматриваются основные теоретические сведения о случайных величинах, примеры с подробным решением. В пособии приводятся варианты индивидуальных заданий для практических занятий и вопросы для самоконтроля.

Учебное пособие предназначено для студентов высшего образования, обучающихся по направлению подготовки (специальности) 24.03.01 «Ракетные комплексы и космонавтика», 24.05.01 «Проектирование, производство и эксплуатация ракет и ракетно-космических комплексов», а также может быть использовано студентами других направлений подготовки и специальностей, изучающих теорию вероятностей и математическую статистику.

ВВЕДЕНИЕ

Перед любой наукой стоят задачи выявления и исследования закономерностей, характерных для реальных процессов. Математической наукой, изучающей закономерности случайных величин, является теория вероятностей.

Методы теории вероятностей широко применяются в различных отраслях естествознания и техники: в теории надёжности, теории массового обслуживания, в теоретической физике, геодезии, астрономии, теории стрельбы, теории ошибок наблюдений, теории автоматического управления, общей теории связи и во многих других теоретических и прикладных науках. Все это предопределяет необходимость овладения методами теории вероятностей и математической статистики как инструментом статистического анализа и прогнозирования экономических и технологических явлений и процессов. Одним из основных понятий теории вероятностей является понятие случайной величины. Весомый вклад в развитие теории вероятностей внесли труды Д.Кардано, Б.Паскаля, П.Ферма, Х.Гюйгенса, Я. Бернулли, П. Лапласа, С. Пуассона, К. Гаусса и многих других.

Материал, содержащийся в данном пособии, необходим для организации практических занятий и самостоятельной работы студентов. Здесь приводятся необходимые теоретические сведения, подробные решения типовых примеров, контрольные вопросы для самопроверки, а также индивидуальные задания.

Студенты должны научиться применять на практике полученные знания о случайных величинах, уметь формулировать задачи вероятностного характера и применять средства теории вероятностей для их решения. Освоение темы «Случайные величины» является необходимой основой для последующего изучения ряда базовых и профессиональных дисциплин.

1 ОДНОМЕРНЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

1.1 Случайная величина

Одномерной случайной величиной, или просто *случайной величиной* называют величину, которая в результате опыта принимает заранее неизвестное значение.

Пример:

1. Отметка на экзамене
2. Количество домов, сданных в эксплуатацию в текущем месяце.
3. Температура окружающей среды.
4. Продолжительность работы телевизора до выхода из строя.

Случайные величины делятся на дискретные и непрерывные.

Дискретной (прерывной) называют случайную величину, которая принимает отдельные, изолированные друг от друга значения с определенными вероятностями.

Число возможных значений дискретной случайной величины может быть конечным или счетным.

Непрерывной называют случайную величину, которая может принимать любые значения из некоторого конечного или бесконечного промежутка. Число возможных значений непрерывной случайной величины бесконечно.

В приведенных примерах: 1, 2, 4 – дискретные случайные величины, 3 – непрерывная случайные величины. Как правило, случайные величины обозначаются большими буквами, а их возможные значения – маленькими.

1.2 Дискретная случайная величина

Для характеристики случайной величины нужно знать совокупность возможных значений этой величины, а также вероятности, с которыми эти значения могут появиться. Эти данные образуют закон распределения случайной величины.

Законом распределения случайной величины называется любое правило (таблица, функция), позволяющее находить вероятности всевозможных событий, связанных со случайной величиной (например, вероятность того, что она примет какое-то значение или попадет на какой-то интервал).

Формы задания законов распределения случайных величин:

1. Ряд распределения.

Это таблица в верхней строке которой перечислены в порядке возрастания все возможные значения случайной величины X: x_1, x_2, ..., x_n, а в нижней – вероятности этих значений: $p_1, p_2, ..., p_n$, где $p_i = P\{X = x_i\}$.

X	x_1	x_2	......	x_n
P	p_1	p_2	......	p_n

Учтем, что $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$.

Если множество возможных значений случайной величины X бесконечно, то ряд $p_1 + p_2 + ... + p_n + ...$ сходится и его сумма равна 1.

Ряд распределения используется для задания закона распределения только дискретных случайных величин.

2. Многоугольник распределения

Многоугольником распределения вероятностей данной величины называют ломаную, звенья которой соединяют соседние точки (x_i, p_i), как представлено на рисунке 1.1.

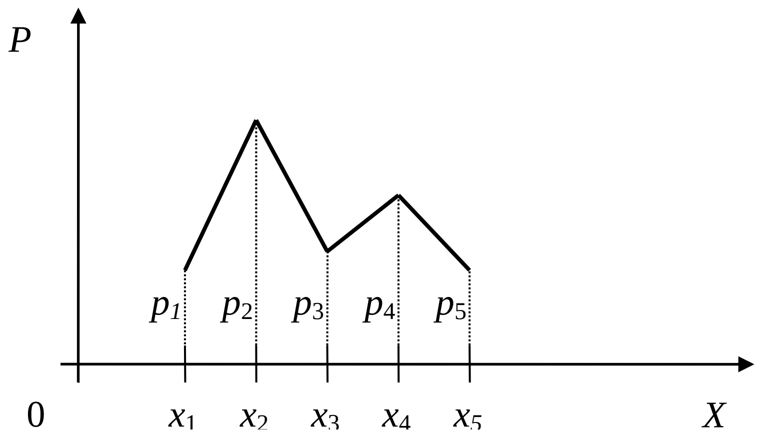


Рис. 1.1. Многоугольник распределения.

3. Функция распределения

Функцией распределения называется функция $F(x)$, определяющая для каждого значения x вероятность того, что случайная величина X примет значение, меньшее x, т.е. $F(x) = P(X < x)$.

Функция $F(x)$ существует как для дискретных, так и непрерывных случайных величин.

Свойства функции распределения:

– $F(x)$ определена на всей числовой прямой R;

– $F(x)$ не убывает, т.е. если $x_1 \le x_2$, то $F(x_1) \le F(x_2)$;

– $F(-\infty)=0$, $F(+\infty)=1$, т.е. $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x)=0$ и $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)=1$;

– $F(x)$ непрерывна справа, т.е. $\lim\limits_{x\to x_0+0} F(x)=F(x_0)$.

Пример: Построить ряд распределения, многоугольник распределения и функцию распределения для случайной величины X, где X – количество домов сданных в срок из четырех строящихся, если вероятность построить дом в срок для каждого дома одинакова и равна 0.9.

Решение. По условию задачи производится четыре независимых опыта (опыт – строительство дома), в каждом из которых может произойти событие «дом построен в срок» с одной и той же вероятностью 0.9. Поэтому для определения вероятности конкретного числа домов, построенных в срок применяем формулу Бернулли. Случайная величина X может принимать значения: 0, 1, 2, 3, 4.

$P_0 = P\{X = 0\} = C_4^0 \cdot 0.9^0 \cdot 0.1^4 = 0.1^4$

$P_1 = P\{X = 1\} = C_4^1 \cdot 0.9 \cdot 0.1^3 = 4 \cdot 0.9 \cdot 0.1^3 = 0.0036$

$P_2 = P\{X = 2\} = C_4^2 \cdot 0.9^2 \cdot 0.1^2 = 0.0486$

$P_3 = P\{X = 3\} = C_4^3 \cdot 0.9^3 \cdot 0.1 = 0.2916$

$P_4 = P\{X = 4\} = C_4^4 \cdot 0.9^4 \cdot 0.1^0 = 0.6561$

1) Ряд распределения

x_i	0	1	2	3	4
p_i	0.0001	0.0036	0.0486	0.2916	0.6561

2) Многоугольник распределения представлен на рисунке 1.2.

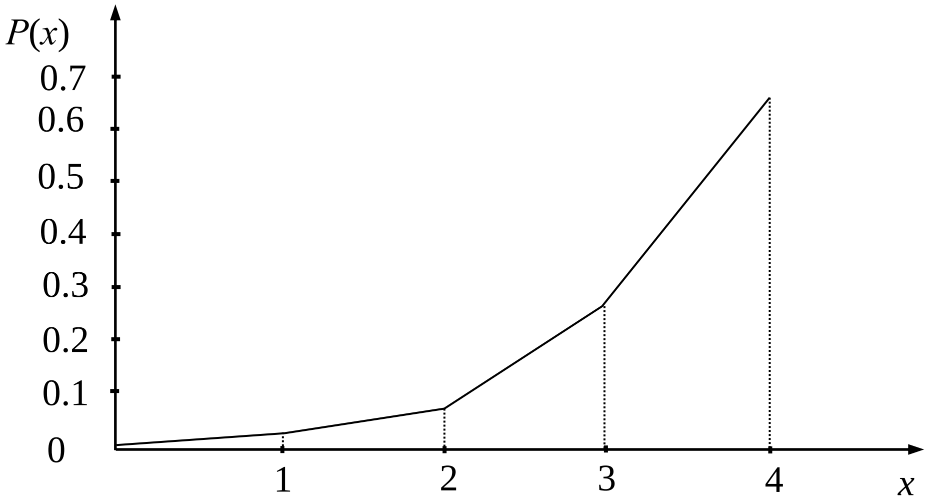


Рис. 1.2. Многоугольник распределения.

3) На рисунке 1.3 построена функция распределения

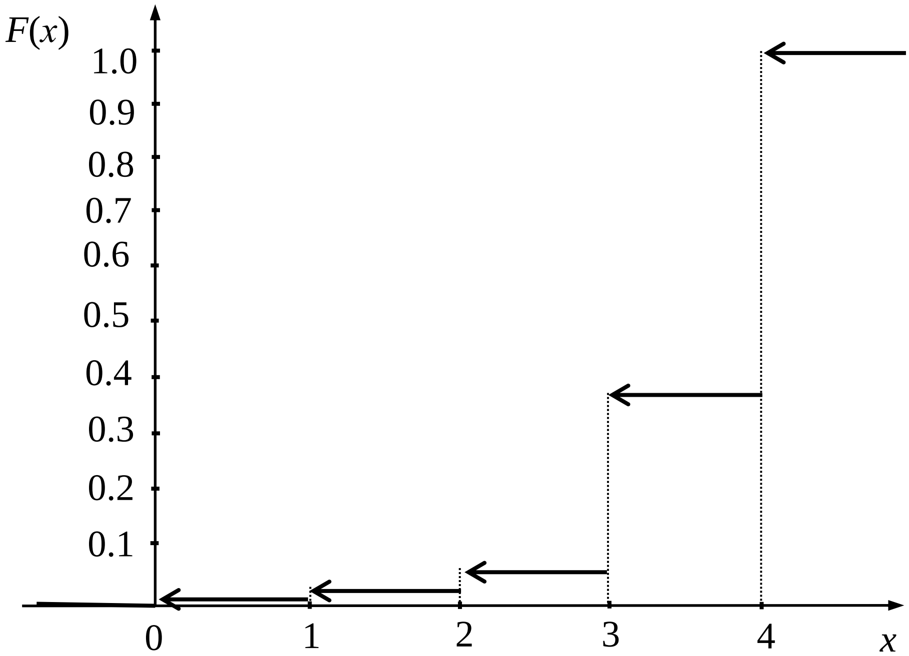


Рис. 1.3. Функция распределения.

$x \le 0$ $\quad F(x) = P(X < x) = 0,$

$0 < x \le 1$ $\quad F(x) = P(\ X < x) = P(X = 0) = 0.0001,$

$1 < x \le 2$ $\quad F(x) = P(\ X < x) = P(X = 0) + P(X = 1) = 0.0037,$

$2 < x \le 3$ $\quad F(x) = P(X < x) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) = 0.0523,$

$3 < x \le 4$ $\quad F(x) = P\{X < x\} = \mathrm{P}(X=0) + \mathrm{P}(\mathrm{X}=1) + \mathrm{P}(\mathrm{X}=2) + \mathrm{P}(\mathrm{X}=3\} = 0.3439,$

$4 < x \le \infty$ $\quad F(x) = 1.$

Для дискретной случайной величины функция распределения является кусочно-постоянной функцией. При увеличении числа значений случайной величины число ступенек на графике возрастает, а их высота уменьшается. При $n \to \infty$ кусочно-постоянная функция превращается в непрерывную функцию.

Числовые характеристики дискретных случайных величин

Математическое ожидание $M(X)$ дискретной случайной величины X – это сумма произведений всех возможных значений величины X на соответствующие вероятности:

$$M\left(X\right) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \ldots x_n p_n. \tag{1.1}$$

Если дискретная случайная величина принимает бесконечное множество возможных значений, то $M\left(X\right) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i$, причем математическое ожидание существует, если ряд в правой части равенства сходится абсолютно.

Свойства математического ожидания:

1. Математическое ожидание имеет ту же размерность, что и сама случайная величина.

2. Математическое ожидание может быть как положительным, так и отрицательным числом.

3. Математическое ожидание постоянной величины C равно этой постоянной. $M\,(C) = C$.

4. Математическое ожидание суммы нескольких случайных величин равно сумме математических ожиданий этих величин.

$M\,(X + Y + \ldots + W) = M\,(X) + M\,(Y) + \ldots + M\,(W).$

5. Математическое ожидание произведения двух или нескольких взаимно независимых случайных величин равно произведению математических ожиданий этих величин.

$M(XY) = M(X) \cdot M(Y)$.

6. Постоянный множитель можно выносить за знак математического ожидания:

$M(CX) = C \cdot M(X)$.

Дисперсией случайной величины X называется математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины от ее математического ожидания:

$$D(X) = M\left(\left[X - M(X)\right]^2\right). \qquad (1.2)$$

На практике чаще всего используют следующую формулу для вычисления дисперсии:

$$D(X) = M\left(X^2\right) - \left[M(X)\right]^2. \qquad (1.3)$$

Свойства дисперсии:

1. Дисперсия имеет размерность, равную квадрату размерности случайной величины.

2. Дисперсия постоянной величины всегда равна нулю: $D(C) = 0$.

3. Постоянный множитель можно выносить за знак дисперсии, предварительно возведя его в квадрат: $D(CX) = C^2 \cdot D(X)$.

4. Дисперсия алгебраической суммы (разности) двух независимых случайных величин равна сумме их дисперсией: $D(X \pm Y) = D(X) + D(Y)$.

5. Пусть случайные величины $X_1, X_2, ... X_n$ – независимы и $D(X_i) = \sigma^2$, где $i = 1,2,...,n$. Тогда

$$D\left(\frac{X_1 + X_2 + ... + X_n}{n}\right) = \frac{\sigma^2}{n}.$$

Среднее квадратическое отклонение $\sigma(X)$ дискретной случайной величины X – квадратный корень из дисперсии:

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)}. \qquad (1.4)$$

Среднее квадратическое отклонение имеет ту же размерность, что и случайная величина.

Пример: Найти математическое ожидание $M(X)$, дисперсию $D(X)$ и среднее квадратическое отклонение $\sigma(X)$ дискретной случайной величины X, заданной следующим законом распределения

X	-5	2	3	4
p	0,4	0,3	0,1	0,2

Решение.

Математическое ожидание X вычисляется по формуле (1.1):

$M(X)=-5\cdot 0{,}4+2\cdot 0{,}3+3\cdot 0{,}1+4\cdot 0{,}2=-0{,}3$.

Дисперсия вычисляется по формуле (1.3): $D(X) = M(X^2) - [M(X)]^2$.

Закон распределения квадрата X^2 случайной величины задан в таблице:

X^2	25	4	9	16
p	0,4	0,3	0,1	0,2

Математическое ожидание X^2:

$M(X^2) = 25\cdot 0{,}4 + 4\cdot 0{,}3 + 9\cdot 0{,}1 + 16\cdot 0{,}2 = 15{,}3$.

Искомая дисперсия:

$D(X) = M(X^2) - [M(X)]^2= 15{,}3 - (-0{,}3)^2 = 15{,}21$.

Тогда среднее квадратическое отклонение будет: $\sigma(X)=\sqrt{D(X)}=\sqrt{15{,}21}=3{,}9$.

Модой M_0 дискретной случайной величины называется ее наиболее вероятное значение.

Медианой M_D случайной величины X называется такое ее значение, относительно которого равновероятно получение большего и меньшего значения этой случайной величины:

$P(X < M_D) = P(X > M_D)$.

Начальным моментом порядка k дискретной случайной величины X называется число

$$\alpha_k = \sum_{i=1}^{n} x_i^k p_i. \tag{1.5}$$

Начальный момент 1 порядка равен математическому ожиданию.

Центральным моментом порядка k дискретной случайной величины X называется число

$$\mu_k = \sum_{i=1}^{n} \left(x_i - M(X) \right)^k p_i. \tag{1.6}$$

Центральный момент 1 порядка всегда равен нулю, а центральный момент 2 порядка равен дисперсии.

1.2.3 Примеры распределений дискретных случайных величин

Примерами распределений дискретных случайных величин могут служить биномиальное, вырожденное, геометрическое, гипергеометрическое распределения, а также распределения Бернулли, Пуассона и др.

Рассмотрим некоторые из них.

1) Биномиальное распределение – распределение количества «успехов» в последовательности из n независимых случайных экспериментов, таких, что вероятность «успеха» в каждом из них постоянна и равна p.

Закон распределения в данном случае имеет вид:

X	0	1	...	i	...	n
$F(X)$	$C_n^0 p^0 q^n$	$C_n^1 p^1 q^{n-1}$	...	$C_n^i p^i q^{n-i}$		$C_n^n p^n q^0$

где $q = 1 - p$.

Функция распределения биномиального распределения может быть записана в виде суммы:

$$F(x) = \sum_{k=0}^{\lfloor y \rfloor} C_n^k p^k q^{n-k},$$

где $\lfloor y \rfloor$ обозначает наибольшее целое, не превосходящее число y.

Для биномиального распределения $M(X)=np$, $D(X)=npq$, $\sigma(X) = \sqrt{npq}$.

Пример биномиального распределения при $n = 10$ и $p = 0{,}2$.

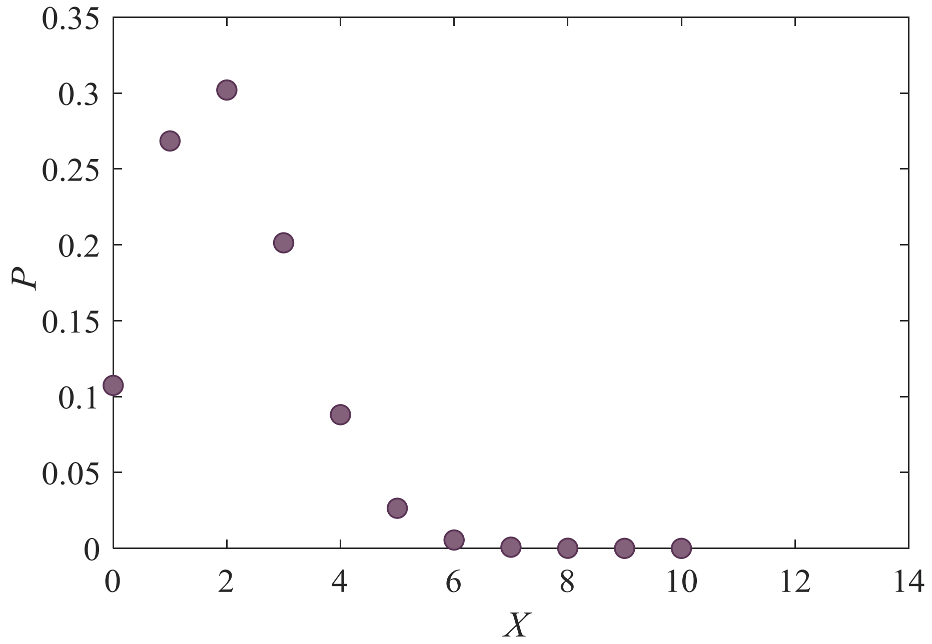


Рис. 1.4. Биномиальное распределение при

n = 10 и p = 0,2.

2) Распределение Пуассона – распределение дискретной случайной величины, представляющей собой число событий, произошедших за фиксированное время, при условии, что данные события происходят независимо друг от друга.

X	0	1	…	i	…	n
$F(X)$	$e^{-\lambda}$	$\lambda e^{-\lambda}$	…	$\frac{\lambda^i}{i!}e^{-\lambda}$		$\frac{\lambda^n}{n!}e^{-\lambda}$

где число $\lambda > 0$.

Примером такой случайной величины может быть число вызовов, поступивших на телефонную станцию за определенный промежуток времени.

Пример распределения Пуассона при $\lambda = 5$ показан на рисунке 1.5.

3) Если в тех же условиях испытания проводятся до появления первого успеха, то получаем таблицу геометрического распределения

X	1	2	…	i	…	n
$F(X)$	p	pq	…	pq^{i-1}		pq^{n-1}

Число независимых экспериментов, которые необходимо провести до появления первого успеха является примером случайной величины, имеющей геометрическое распределение.

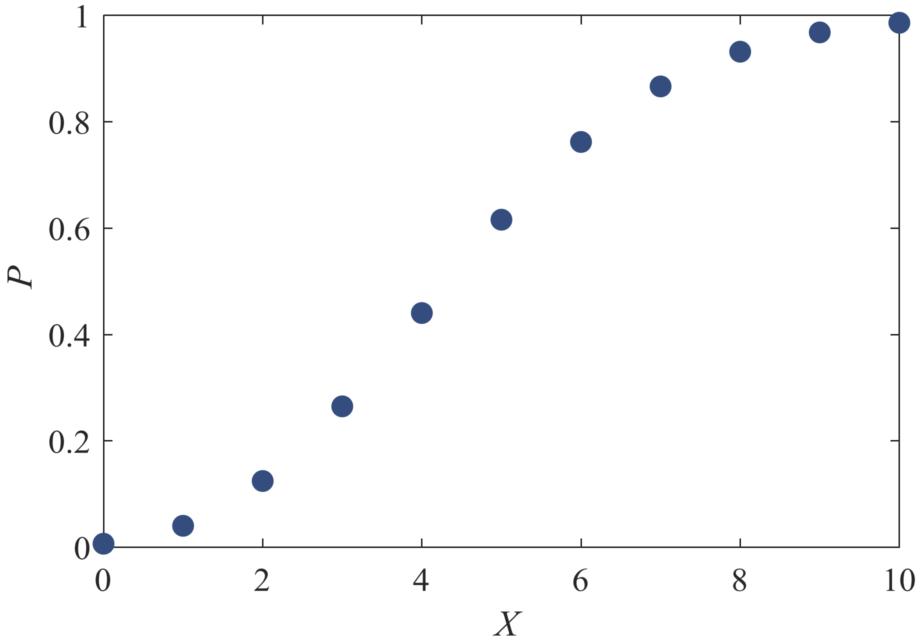


Рис. 1.5. Распределение Пуассона при $\lambda = 5$.

Пример геометрического распределения при p = 0,2 представлен на рисунке 1.6.

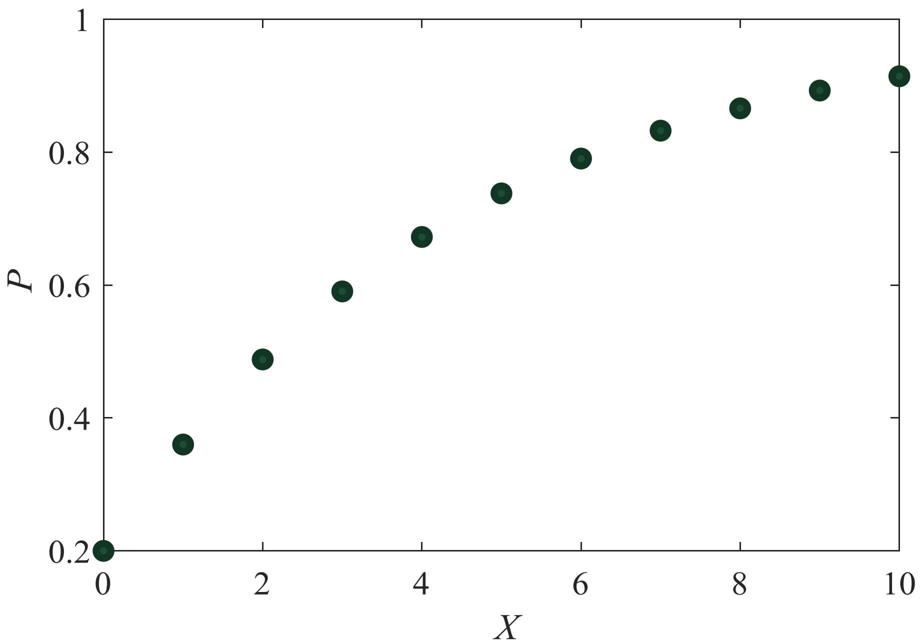


Рис. 1.6. Геометрическое распределение при p = 0,2.

1.3 Непрерывная случайная величина

Понятие закона распределения имеет смысл только в том случае, когда

случайная величина принимает конечное или счетное множество значений. Если же значения случайной величины представляют «сплошное» множество точек на числовой прямой, то это понятие теряет свой смысл. В то же время определение функции распределения $F(x)$ как более общее понятие остается в силе.

Случайную величину X называют *непрерывной*, если ее функция распределения $F(X)=P(X < x)$ непрерывна и имеет производную.

Функция распределения непрерывной случайной величины применяется для вычисления вероятностей попадания случайной величины в заданный промежуток: $P(\alpha < X < \beta)=\mathrm{F}(\beta) - \mathrm{F}(\alpha)$ причем для непрерывной случайной величины не имеет значения, включаются в этот промежуток его границы или нет:

$\mathrm{P}(\alpha < X < \beta) = P(\alpha \le X < \beta) = P(\alpha \le X \le \beta)$.

Сформулированные в предыдущем пункте свойства функции распределения для дискретной случайной величины, справедливы и для непрерывной случайной величины.

Плотность распределения вероятностей.

Если функция $y=F(x)$ имеет производную $y'=F'(x)=f(x)$, то функция $f(x)$ называется *плотностью распределения*.

По формуле Ньютона- Лейбница имеем:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a) = P(a < x < b). \qquad (1.7)$$

Так как $F(x) = P(X < x) = P(-\infty < X < x)$, то

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx. \qquad (1.8)$$

По свойству (1.8) функция $F(x)$ называется также интегральной функцией, а $f(x)$ – дифференциальной функцией распределения.

Свойства плотности распределения:

1. Функция $f(x)$ неотрицательна $f(x) \geq 0$.

Следует из того факта, что производная неубывающей функции неотрицательна.

2. Интеграл по области определения от плотности распределения равен 1.

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$$

Из геометрических свойств интеграла и равенства (1.7) следует, что геометрически вероятность попадания на интервал $[a;b]$ равна площади трапеции, ограниченной снизу осью Ox с боков прямыми $x=a$; $x=b$ и сверху кривой $f(x)$. Иллюстрация дана на рисунке 1.7.

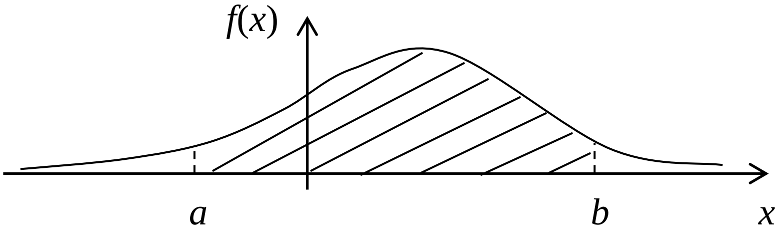


Рис. 1.7. Вероятность попадания на интервал $[a;b]$

Именно с помощью плотности распределения чаще всего задаются законы распределения непрерывных случайных величин.

Числовые характеристики случайных величин.

Математическим ожиданием непрерывной случайной величины X, распределенной на интервале $[a;b]$, называется величина $M(X)$, равная:

$$M(X) = \int_{a}^{b} xf(x)dx. \tag{1.9}$$

В общем случае интервал распределения бесконечный.

Математическим ожиданием непрерывной случайной величины X, распределенной на бесконечном интервале, называется величина $M(X)$, равная:

$$M(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx. \tag{1.10}$$

Определенное таким образом математическое ожидание непрерывной случайной величины обладает теми же свойствами, что и математическое ожидание дискретной случайной величины.

Пусть задана непрерывная случайная величина X, распределенная на интервале $[a;b]$.

$$D(X)=\int_a^b \left(x-M(X)\right)^2 f(x)dx. \qquad (1.11)$$

Для бесконечного интервала распределения

$$D(X)=\int_{-\infty}^{\infty} \left(x-M(X)\right)^2 f(x)dx. \qquad (1.12)$$

Однако использование дисперсии не совсем удобно. Дисперсия имеет размерность квадрата единицы измерения исходной случайной величины. Для устранения этого недостатка вводится среднеквадратическое отклонение σ, равное

$$\sigma=\sqrt{D(X)}. \qquad (1.13)$$

Замечание. Из введенных определений видно, что математическое ожидание и дисперсия существуют не всегда.

Начальный и центральный теоретические моменты порядка k непрерывной случайной величины X определяются равенствами:

$$\nu_k=\int_{-\infty}^{\infty} x^k f(x)dx\ ; \qquad \mu_k=\int_{-\infty}^{\infty} [x-M(X)]^k \cdot f(x)dx.$$

Модой $M_0(X)$ непрерывной случайной величины X называют то ее возможное значение, которому соответствует локальный максимум плотности распределения.

Медианой $Me(X)$ непрерывной случайной величины называют то ее возможное значение, которое определяется равенством

$$P[X<Me(x)]=P[X>Me(x)]\ .$$

Геометрически медиану можно истолковать как точку, в которой ордината $f(x)$ делит пополам площадь, ограниченную кривой распределения.

Пример: Случайная величина X задана функцией распределения $F(x)$:

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0,\\ \dfrac{x}{4}, & 0<x<4,\\ 1, & x\ge 4.\end{cases}$$

Найдем плотность распределения $f(x)$, как производную от функции распределения $F(x)$: $f(x) = dF(x)/dx = {}^1/_4$.

Математическое ожидание рассчитаем по формуле (1.9).

$$M(X)=\int_a^b xf(x)dx=\int_0^4 x\frac{1}{4}dx=\frac{1}{8}x^2\Big|_0^4=\frac{1}{8}\left(4^2-0\right)=2.$$

В соответствии с формулой (1.11) вычислим дисперсию.

$$D(X)=\int_a^b x^2 f(x)dx-M^2(X)=$$

$$=\int_0^4 x^2\frac{1}{4}dx-2^2=\frac{1}{12}x^3\Big|_0^4=\frac{1}{12}\left(4^3-0\right)=\frac{4}{3}.$$

Среднеквадратическое отклонение. $\sigma=\sqrt{D(X)}=\dfrac{2}{\sqrt{3}}.$

Пример:

Непрерывная случайная величина задана плотностью распределения вероятностей:

$$f(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ C\sin 2x, & 0\le x\le\dfrac{\pi}{4},\\ 1, & x>\dfrac{\pi}{4}.\end{cases}$$ Найти параметр C.

Решение: Применим свойство $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx=1,\ C\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\sin 2xdx=1.$

$$C\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin 2xdx=\frac{C}{2}\Rightarrow C=2.$$

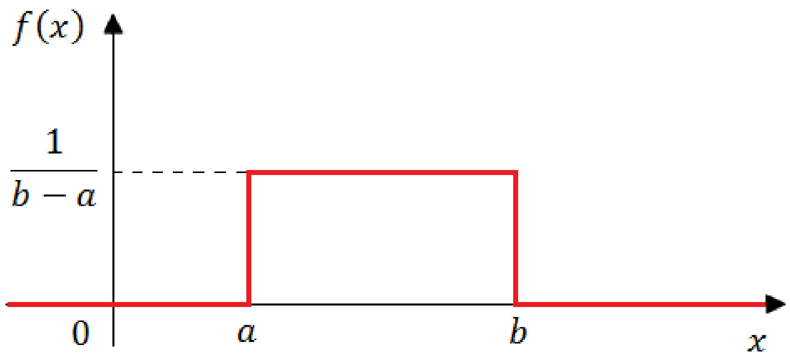
Примеры распределений непрерывных случайных величин

I. Равномерное распределение. Говорят, что СВ X имеет равномерное распределение на участке *(a,b)*, если ее плотность $f(x)$ на этом участке постоянна: $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}, & x\in(a,b),\\ 0, & x\notin(a,b).\end{cases}$

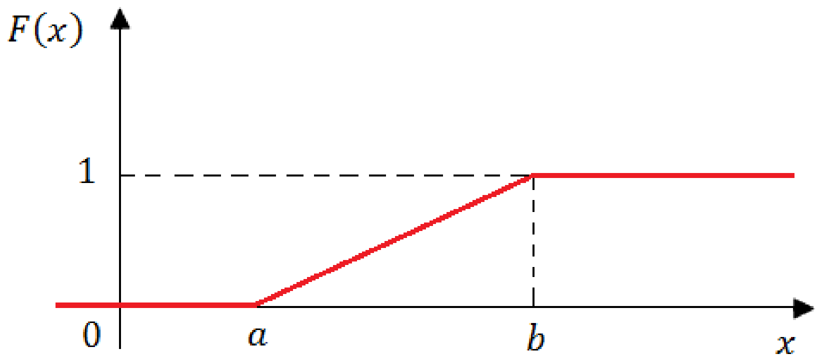
Функция плотности в таком случае принимает вид:

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le a,\\ \dfrac{x-a}{b-a}, & a<x\le b,\\ 1, & x>b.\end{cases}$$

Графики функции плотности и распределения представлены на рисунках 1.8 *а* и *б*, соответственно.



а



б

Рис. 1.8. Функция плотности $f(x)$ и функция распределения $F(x)$ равномерного закона распределения

Математическое ожидание и дисперсия для равномерного распределения имеют вид: $M(X)=(a+b)/2$, $D(X)=(b-a)^2/12$.

II. Нормальное распределение. Непрерывная случайная величина X распределена нормально, если ее плотность имеет вид $f(x)=\dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-(x-a)^2}{2(\sigma)^2}}$, где a – математическое ожидание, σ – среднее квадратическое отклонение.

$M(X) = a,\quad \sigma(X) = \sigma.$

Плотность нормированного распределения имеет вид, рисунок 1.9:

$f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-x^2}{2}}$, где $M(X)=0$, $\sigma(X)=1$.

Функция нормированного распределения показана на рисунке 1.10:

$$F(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{\frac{-x^2}{2}}dx .$$

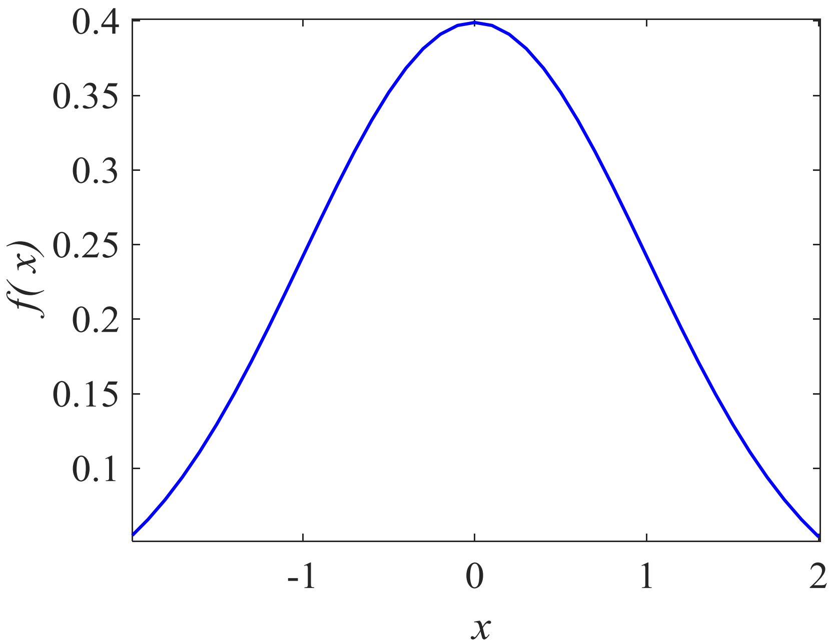


Рис. 1.9. Функция плотности $f(x)$ нормального распределения при a=0, σ=1.

Тогда $P(\alpha < X < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right)$ – вероятность попадания в заданный интервал нормальной случайной величины.

$P(|X - a| < \delta) = 2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right)$ – вероятность заданного отклонения.

$P(|X - a| < 3\delta) = 2\Phi(3) = 2 \cdot 0,49865 = 0,9973$ – правило трех сигм.

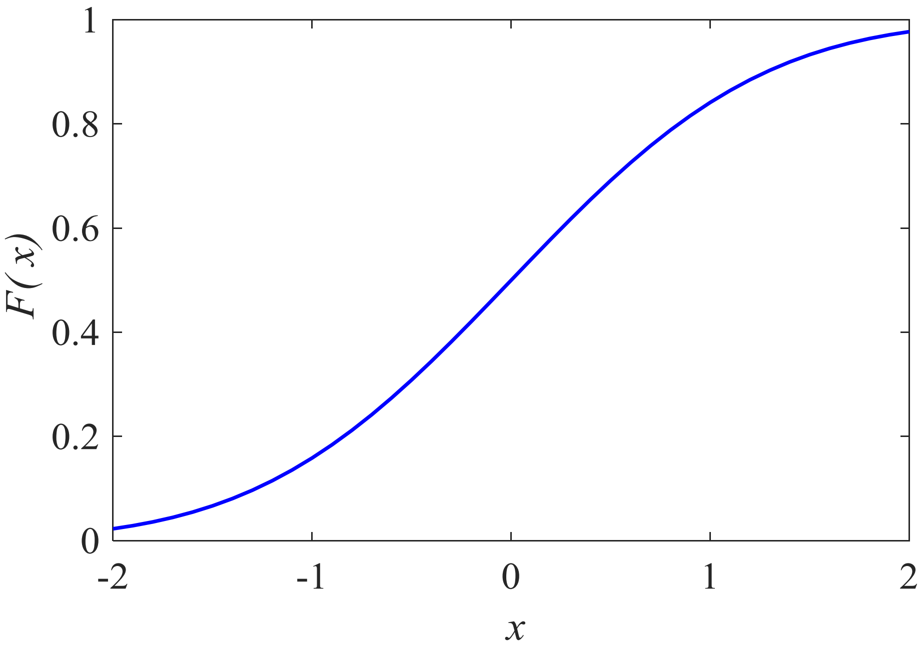


Рис. 1.10. Функция распределения $F(x)$ нормального распределения при a=0, σ=1.

III. Показательное распределение. Непрерывная случайная величина X имеет показательное (экспоненциальное) распределение, если плотность $f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0. \end{cases}$, где λ – постоянная положительная величина, рисунок 1.11.

Функция распределения показательного закона представлена на рисунке 1.12:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 1 - e^{-\lambda x}, & x \geq 0. \end{cases}$$

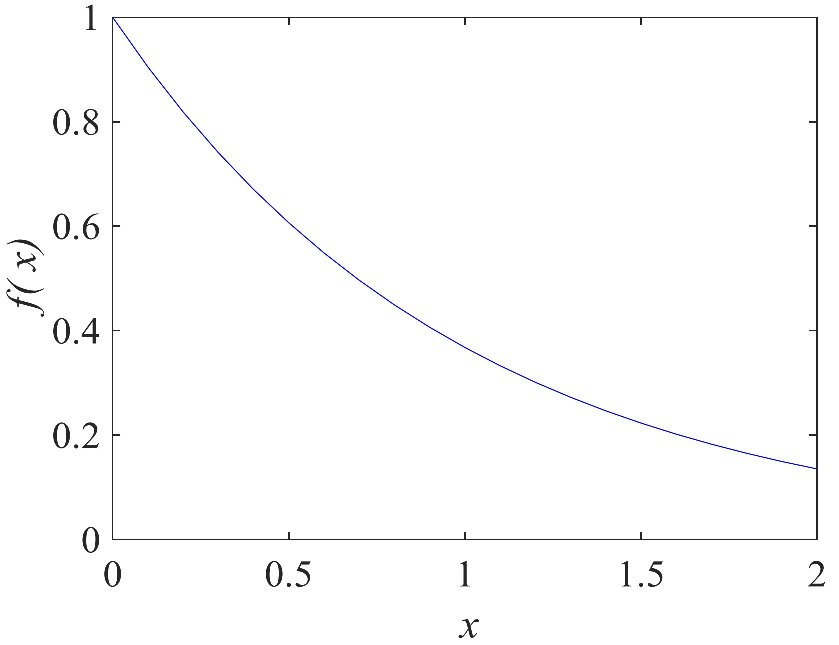


Рис. 1.11. Функция плотности $f(x)$ показательного распределения $\lambda=1$.

Числовые характеристики для показательного закона распределения:

$$M(X)=\sigma(X)=\frac{1}{\lambda} \quad , \quad D(X)=\frac{1}{\lambda^2}.$$

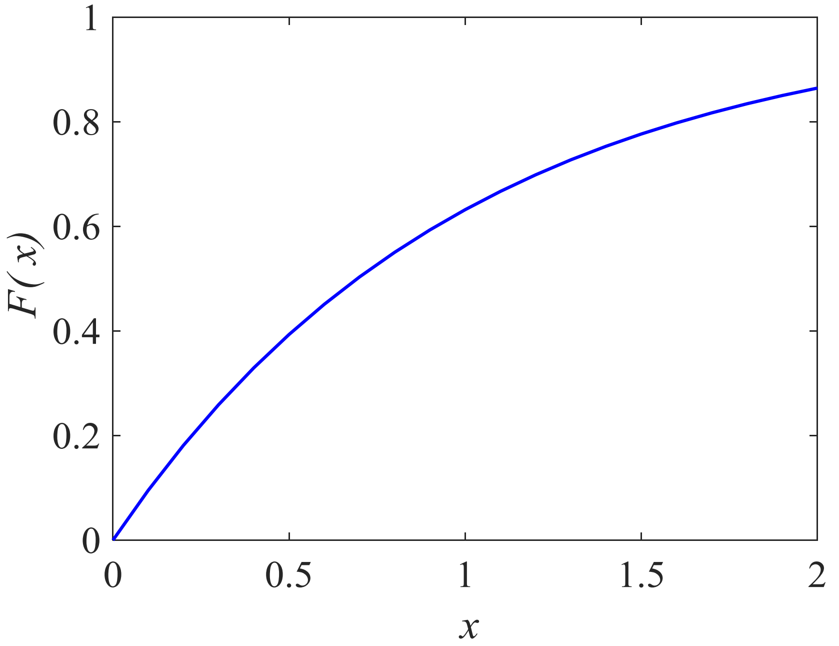


Рис. 1.12. Функция плотности $f(x)$ показательного распределения $\lambda=1$.

Вопросы:

1) Дайте определение случайной величины.

2) Как вычисляется математическое ожидание случайной величины?

3) Какими свойствами обладает математическое ожидание случайной величины?

4) Что такое распределение случайной величины?

5) Чем отличается дискретная случайная величина от непрерывной.

6) По какой формуле вычисляется дисперсия дискретной случайной величины X?

7) Какими свойствами обладает плотность распределения?

8) Как определяется плотность равномерного распределения на отрезке $[a,b]$?

9) Чему равна дисперсия случайной величины X, имеющей равномерное распределение на отрезке $[a,b]$?

10) Как определяется плотность нормального распределения с параметрами a,σ?

11) Чему равно математическое ожидание случайной величины X, имеющей нормальное распределение с параметрами a,σ?

12) Чему равно математическое ожидание случайной величины X, имеющей показательное распределение с параметром $\lambda > 0$?

Индивидуальные задания:

Вариант №1

1. Выполняется серия из n независимых испытаний с двумя исходами в каждом – «успех» или «неуспех». X – число «успехов» в n испытаниях, в каждом испытании вероятность «успеха» p одинаковая.

Требуется:

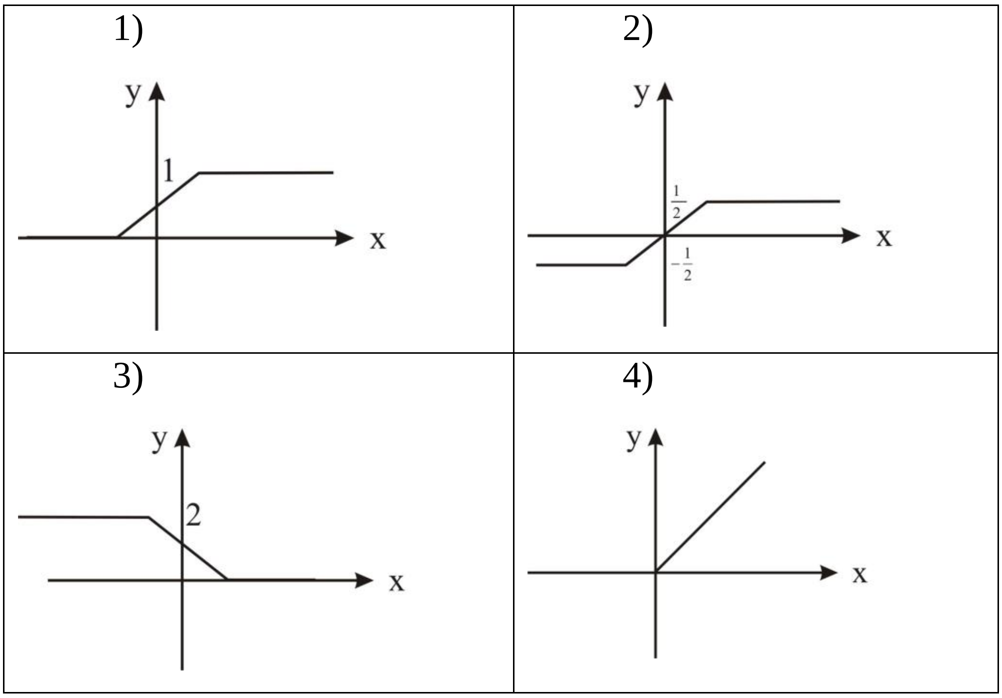
1) для подзадачи 1(малого n) найти закон распределения, функцию распределения X, построить её график, найти $M(X)$, $D(X)$ и $P(X < 2)$;

2) для подзадачи 2 (большого n и малого p) найти $P(X < 2)$ приближённо с помощью распределения Пуассона;

3) для подзадачи 3 (большого n) найти вероятность $P(k_1 < X < k_2)$.

Подзадача 1		Подзадача 2		Подзадача 3			
n	P	n	P	n	P	k_1	k_2
5	0,2	100	0,002	100	0,2	16	40

2. На каком рисунке изображена функция плотности? Дайте развернутый ответ.



3. Задана функция распределения случайной величины X. Требуется найти плотность распределения $f(x)$, математическое ожидание $M(X)$, среднее квадратическое отклонение $\sigma(X)$. Построить графики функции плотности и функции распределения.

$$F(x) = \begin{cases} 0 \ \textit{при} \ x \le 0, \\ \dfrac{x^2}{4} \ \textit{при} \ 0 < x \le 2, \\ 1 \ \textit{при} \ x > 2. \end{cases}$$

4. Случайная величина задана плотностью распределения $f(x)$. Найти коэффициент C, математическое ожидание и дисперсию. Найти $F(x)$.

$$f(x)=\begin{cases} c\ \cos x\ \text{при}\ |x|\le \dfrac{\pi}{2}, \\ 0\ \text{при}\ |x|>\dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

5. Случайная величина задана плотностью распределения $f(x)$. Найти коэффициент *C*, математическое ожидание и дисперсию. Найти $F(x)$.

$$f(x)=\begin{cases} 0\ \text{при}\ x<0, \\ c\ e^{-3X}\ \text{при}\ x\ge 0. \end{cases}$$

6. Случайная величина *X* имеет равномерное распределение на отрезке от [0,6]. Написать выражение плотности. Найти $M(X)$, $D(X)$ и $F(x)$.

7. Случайная величина *X* имеет нормальное распределение с параметрами $m=2,\ \sigma=3.$ Требуется найти плотность распределения и построить ее график. Найти вероятность того, что *X* будет лежать в интервале $-1\le X\le 11$, а также вероятность неравенства $|X-2|<6$.

8. Масса корюшки в Охотском море – случайная величина *X*, распределённая по нормальному закону с математическим ожиданием a=365 и средним квадратическим отклонением σ=25.

Найти: а) вероятность того, что масса наудачу выловленной корюшки будет заключена в пределах от m_1=300 до m_2=425;

б) по правилу трёх сигм найти наибольшую и наименьшую границы предполагаемой массы.

Вариант №2

1. Выполняется серия из n независимых испытаний с двумя исходами в каждом – «успех» или «неуспех». X – число «успехов» в n испытаниях, в каждом испытании вероятность «успеха» p одинаковая.

Требуется:

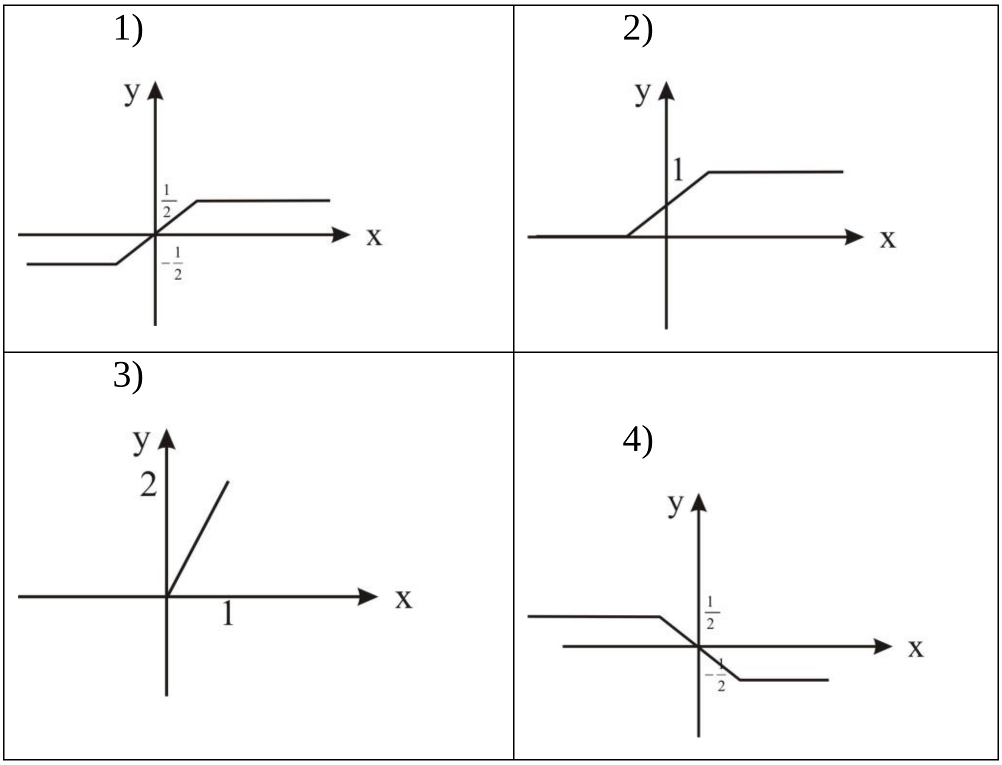
1) для подзадачи 1(малого n) найти закон распределения, функцию распределения X, построить её график**,** найти $M(X)$, $D(X)$ и $P(X < 2)$;

2) для подзадачи 2 (большого n и малого p) найти $P(X < 2)$ приближённо с помощью распределения Пуассона;

3) для подзадачи 3 (большого n) найти вероятность $P(k_1 < X < k_2)$.

Подзадача 1		Подзадача 2		Подзадача 3			
n	P	n	P	n	P	k_1	k_2
5	0,4	50	0,004	150	0,4	12	56

2. Какой из этих графиков может соответствовать функции плотности распределения случайной величины, ответ обосновать



3. Задана функция распределения случайной величины X. Требуется найти плотность распределения, математическое ожидание, среднее квадратиче-

ское отклонение. Построить графики функций плотности и функции распределения.

$$F(x)=\begin{cases}0 \ \text{при} \ x\le 0,\\ \dfrac{x^2}{100} \ \text{при} \ 0<x\le 10,\\ 1 \ \text{при} \ x>10.\end{cases}$$

4. Случайная величина задана плотностью распределения $f(x)$. Найти коэффициент *C*, математическое ожидание и дисперсию. Найти $F(x)$.

$$f(x)=\begin{cases}0 \ \text{при} \ x\le 0,\\ c\ x \ \text{при} \ 0<x\le 2,\\ 0 \ \text{при} \ x>2.\end{cases}$$

5. Случайная величина задана плотностью распределения $f(x)$. Найти коэффициент *C*, математическое ожидание и дисперсию. Найти $F(x)$.

$$f(x)=\begin{cases}0 \ \text{при} \ x<0,\\ c\,e^{-4x} \ \text{при} \ x\ge 0\end{cases}$$

6. Случайная величина *X* имеет равномерное распределение на отрезке от [1,6]. Написать выражение плотности и функции распределения. Найти $P(X<M(X))$.

7. Случайная величина *X* имеет нормальное распределение с параметрами $m=10,\ \sigma=2$. Требуется найти плотность распределения и построить ее график. Найти вероятность того, что *X* будет лежать в интервале $0\le X\le 12$, а также вероятность неравенства $|X-10|<6$.

8. Масса корюшки в Охотском море – случайная величина *X*, распределённая по нормальному закону с математическим ожиданием a=360 и средним квадратическим отклонением σ=25.

Найти: а) вероятность того, что масса наудачу выловленной корюшки будет заключена в пределах от m_1=315 до m_2=425;

б) по правилу трёх сигм найти наибольшую и наименьшую границы предполагаемой массы.

Вариант №3

1. Выполняется серия из n независимых испытаний с двумя исходами в каждом – «успех» или «неуспех». X – число «успехов» в n испытаниях, в каждом испытании вероятность «успеха» p одинаковая.

Требуется:

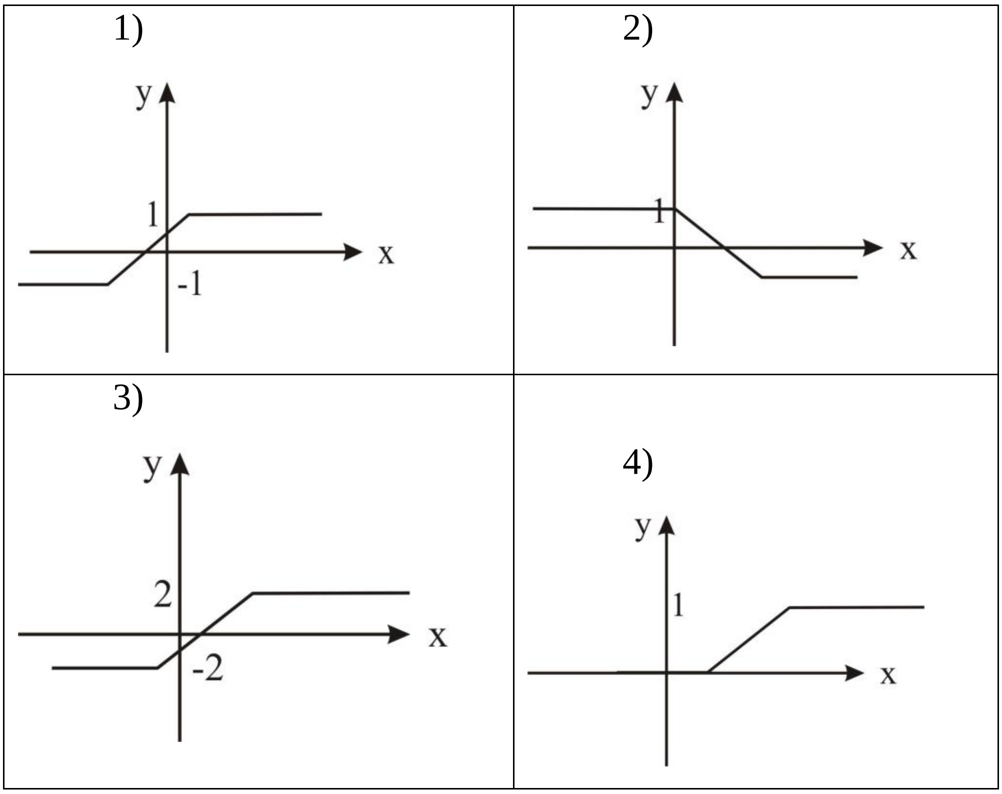
1) для подзадачи 1(малого n) найти закон распределения, функцию распределения X, построить её график**,** найти $M(X)$, $D(X)$ и $P(X < 2)$;

2) для подзадачи 2 (большого n и малого p) найти $P(X < 2)$ приближённо с помощью распределения Пуассона;

3) для подзадачи 3 (большого n) найти вероятность $P(k_1 < X < k_2)$.

Подзадача 1		Подзадача 2		Подзадача 3			
n	P	n	P	$П$	P	k_1	k_2
5	0,9	50	0,002	192	0,25	40	56

2. Какой из этих графиков может соответствовать функции распределения случайной величины, ответ обосновать



3. Задана функция распределения случайной величины X. Требуется найти плотность распределения, математическое ожидание, среднее квадрати-

ческое отклонение. Построить графики функций плотности и функции распределения.

$$F(x)=\begin{cases}0 \ \textit{при} \ x\le 0,\\ \sin x \ \textit{при} \ 0<x\le \dfrac{\pi}{2},\\ 1 \ \textit{при} \ x>\dfrac{\pi}{2}.\end{cases}$$

4. Случайная величина задана плотностью распределения $f(x)$. Найти коэффициент *С*, математическое ожидание, дисперсию, третий центральный и начальный моменты. Найти $F(x)$.

$$f(x)=\begin{cases}0 \ \textit{при} \ x\le 0,\\ c\,x^2 \ \textit{при} \ 0<x\le 1,\\ 0 \ \textit{при} \ x>1.\end{cases}$$

5. Случайная величина X имеет экспоненциальное распределение с параметром $\lambda=8$. Написать выражение плотности и функции распределения.

6. Случайная величина X равномерно распределения на отрезке [-2;2]. Найти $M(X)$, $D(X)$, $P(-1\le X\le 1)$.

7. Случайная величина X имеет нормальное распределение с параметрами $m=7$, $\sigma=4$.Требуется найти плотность распределения и построить ее график. Найти вероятность того, что X будет лежать в интервале $3\le X\le 19$, а также вероятность неравенства $|X-7|<8$.

8. Масса корюшки в Охотском море – случайная величина *X*, распределённая по нормальному закону с математическим ожиданием a=365 и средним квадратическим отклонением σ=15.

Найти: а) вероятность того, что масса наудачу выловленной корюшки будет заключена в пределах от m_1=305 до m_2=405;

б) по правилу трёх сигм найти наибольшую и наименьшую границы предполагаемой массы.

Вариант №4

1. Выполняется серия из n независимых испытаний с двумя исходами в каждом – «успех» или «неуспех». X – число «успехов» в n испытаниях, в каждом испытании вероятность «успеха» p одинаковая.

Требуется:

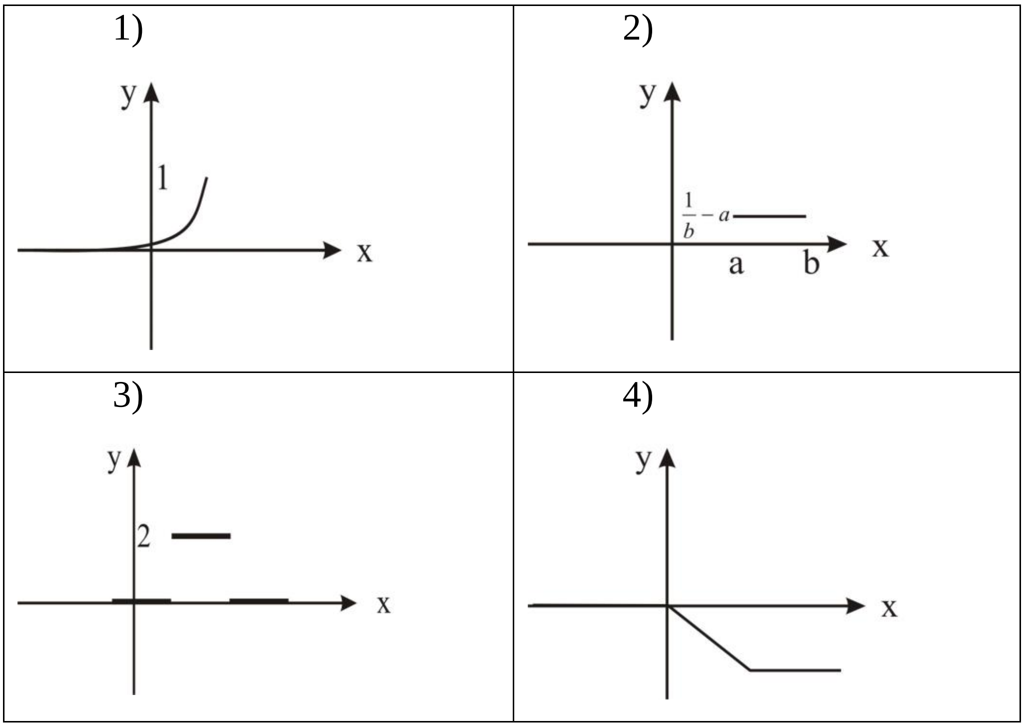
1) для подзадачи 1(малого n) найти закон распределения, функцию распределения X, построить её график**,** найти $M(X)$, $D(X)$ и $P(X < 2)$;

2) для подзадачи 2 (большого n и малого p) найти $P(X < 2)$ приближённо с помощью распределения Пуассона;

3) для подзадачи 3 (большого n) найти вероятность $P(k_1 < X < k_2)$.

Подзадача 1		Подзадача 2		Подзадача 3			
n	P	n	P	n	P	k_1	k_2
5	0,5	20	0,01	100	0,1	5	15

2. Какой из этих графиков может соответствовать функции плотности распределения случайной величины, ответ обосновать



3. Задана функция распределения случайной величины X. Требуется найти плотность распределения, математическое ожидание, среднее квадратическое отклонение. Построить графики функций плотности и функции распределения.

$$F(x)=\begin{cases}0 \;\; при \;\; x\le 0,\\ \dfrac{x^2}{81} \;\; при \;\; 0<x\le 9,\\ 1 \;\; при \;\; x>9.\end{cases}$$

4. Случайная величина задана плотностью распределения $f(x)$. Найти коэффициент *С*, математическое ожидание и дисперсию. Найти $F(x)$.

$$f(x)=\begin{cases}0 \;\; при \;\; x\le 0,\\ c\, x^3 \;\; при \;\; 0<x\le 1,\\ 0 \;\; при \;\; x>1.\end{cases}$$

5. Случайная величина X имеет экспоненциальное распределение с параметром $\lambda=3$. Найти $M(X)$, $D(X)$ и вероятность $P(|X-M(X)|<2\sigma)$.

6. Случайная величина X имеет равномерное распределение на отрезке [-5;5]. Найти $M(X)$, $D(X)$, третий начальный момент и третий центральный момент.

7. Случайная величина *X* имеет нормальное распределение с параметрами $m=1$, $\sigma=5$. Требуется найти плотность распределения и построить ее график. Найти вероятность того, что *X* будет лежать в интервале $-4\le X\le 16$, а также вероятность неравенства $|X-1|<10$.

8. Масса корюшки в Охотском море – случайная величина *X*, распределённая по нормальному закону с математическим ожиданием a=255 и средним квадратическим отклонением σ=35.

Найти: а) вероятность того, что масса наудачу выловленной корюшки будет заключена в пределах от m_1=300 до m_2=405;

б) по правилу трёх сигм найти наибольшую и наименьшую границы предполагаемой массы.

Вариант №5

1. Выполняется серия из n независимых испытаний с двумя исходами в каждом – «успех» или «неуспех». X – число «успехов» в n испытаниях, в каждом испытании p – вероятность «успеха» одинаковая.

Требуется:

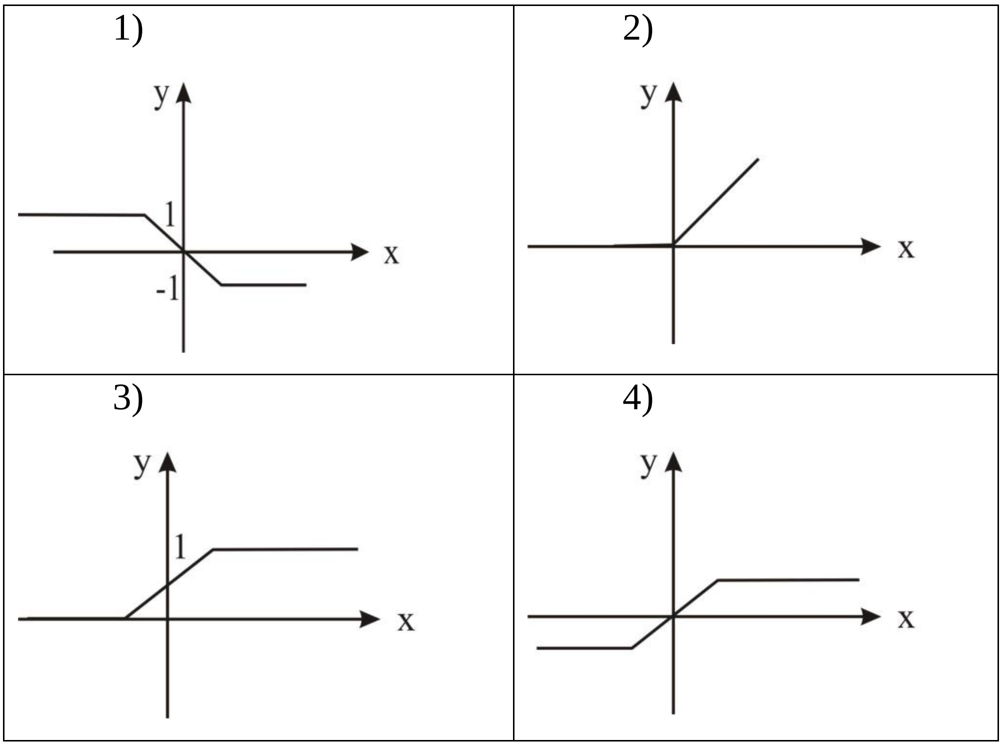
1) для подзадачи 1(малого n) найти закон распределения, функцию распределения X, построить её график**,** найти $M(X)$, $D(X)$ и $P(X < 2)$;

2) для подзадачи 2 (большого n и малого p) найти $P(X < 2)$ приближённо с помощью распределения Пуассона;

3) для подзадачи 3 (большого n) найти вероятность $P(k_1 < X < k_2)$.

Подзадача 1		Подзадача 2		Подзадача 3			
n	P	n	P	n	P	k_1	k_2
4	0,15	20	0,015	400	0,2	75	100

2. На каком рисунке изображена функция плотности? Дайте развернутый ответ.



3. Задана функция распределения случайной величины X. Требуется найти плотность распределения, математическое ожидание, среднее квадрати-

ческое отклонение. Построить графики функций плотности и функции распределения.

$$F(x)=\begin{cases}0 \ при \ x\le 0,\\ \sin 2x \ при \ 0<x\le\dfrac{\pi}{4},\\ 1 \ при \ x>\dfrac{\pi}{4}.\end{cases}$$

4. Случайная величина задана плотностью распределения $f(x)$. Найти коэффициент *C*, математическое ожидание и дисперсию. Найти $F(x)$.

$$f(x)=\begin{cases}0 \ при \ x\le 0,\\ c\ x^5 \ при \ 0<x\le 1,\\ 0 \ при \ x>1.\end{cases}$$

5. Случайная величина X имеет экспоненциальное распределение с параметром $\lambda=2$. Написать выражение плотности $f(x)$. Найти функцию распределения. Найти $M(X)$ и начальный момент пятого порядка.

6. Случайная величина X имеет равномерное распределение на отрезке [0,5;2]. Найти $M(X)$, $D(X)$.

7. Случайная величина X имеет нормальное распределение с параметрами $m=5, \sigma=1$. Требуется найти плотность распределения и построить ее график. Найти вероятность того, что X будет лежать в интервале $2\le X\le 8$, а также вероятность неравенства $|X-5|<3$.

8. Масса корюшки в Охотском море – случайная величина X, распределённая по нормальному закону с математическим ожиданием a=295 и средним квадратическим отклонением σ=30.

Найти: а) вероятность того, что масса наудачу выловленной корюшки будет заключена в пределах от m_1=315 до m_2=415;

б) по правилу трёх сигм найти наибольшую и наименьшую границы предполагаемой массы.

Вариант №6

1. Выполняется серия из n независимых испытаний с двумя исходами в каждом – «успех» или «неуспех». X – число «успехов» в n испытаниях, в каждом испытании вероятность «успеха» p одинаковая.

Требуется:

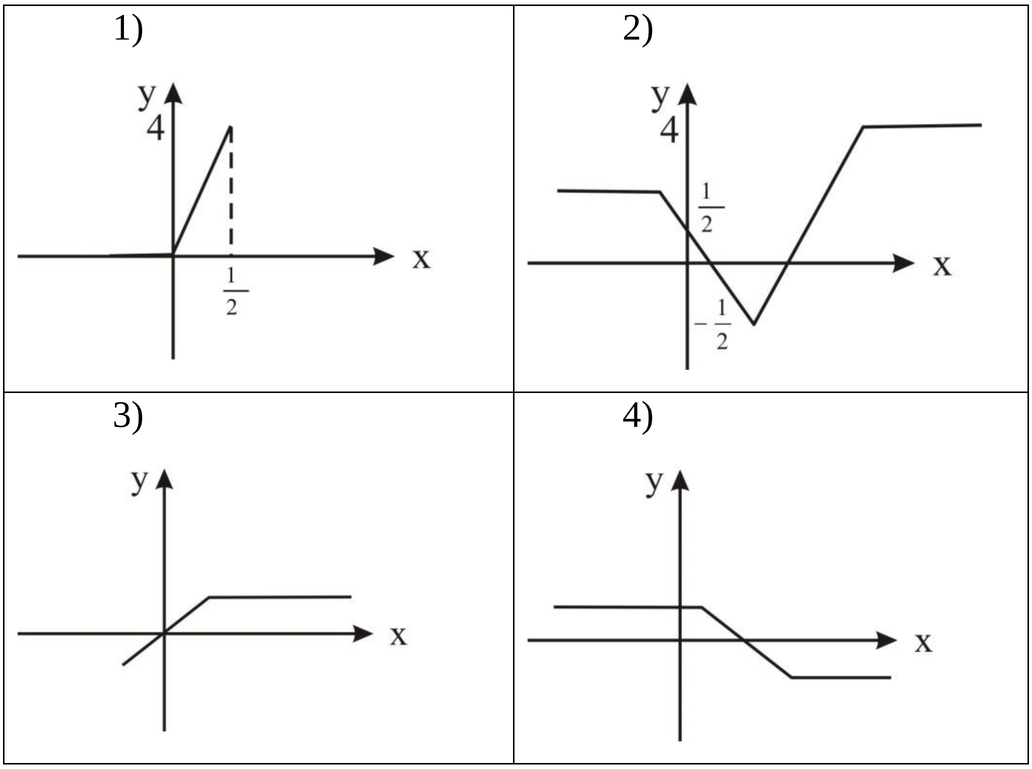
1) для подзадачи 1(малого n) найти закон распределения, функцию распределения X, построить её график**,** найти $M(X)$, $D(X)$ и $P(X < 2)$;

2) для подзадачи 2 (большого n и малого p) найти $P(X < 2)$ приближённо с помощью распределения Пуассона;

3) для подзадачи 3 (большого n) найти вероятность $P(k_1 < X < k_2)$.

Подзадача 1		Подзадача 2		Подзадача 3			
n	P	n	P	n	P	k_1	k_2
5	1/3	20	0,02	600	0,4	250	330

2. Какой из этих графиков может соответствовать функции плотности распределения случайной величины, ответ обосновать



3. Задана функция распределения случайной величины X. Требуется найти плотность распределения, математическое ожидание, среднее квадратиче-

ское отклонение. Построить графики функций плотности и функции распределения.

$$F(x)=\begin{cases}0 \ \textit{при} \ x\le 0,\\ \dfrac{x^2}{64} \ \textit{при} \ 0<x\le 8,\\ 1 \ \textit{при} \ x>8.\end{cases}$$

4. Случайная величина задана плотностью распределения $f(x)$. Найти коэффициент *C*, математическое ожидание и дисперсию. Найти $F(x)$.

$$f(x)=\begin{cases}0 \ \textit{при} \ x\le 1,\\ \dfrac{c}{x^4} \ \textit{при} \ ,x>1.\end{cases}$$

5. Случайная величина X имеет экспоненциальное распределение с параметром $\lambda=5$. Найти $F(x)$, $M(X)$, $D(X)$.

6. Случайная величина *X* имеет равномерное распределение на отрезке [-2;2]. Найти второй центральный и первый начальный моменты.

7. Случайная величина *X* имеет нормальное распределение с параметрами $m=0, \sigma=6$. Требуется найти плотность распределения и построить ее график. Найти вероятность того, что *X* будет лежать в интервале $-6\le X\le 12$, а также вероятность неравенства $|X|<2$.

8. Масса корюшки в Охотском море – случайная величина *X*, распределённая по нормальному закону с математическим ожиданием *a*=265 и средним квадратическим отклонением σ=15.

Найти: а) вероятность того, что масса наудачу выловленной корюшки будет заключена в пределах от m_1=305 до m_2=425;

б) по правилу трёх сигм найти наибольшую и наименьшую границы предполагаемой массы.

Вариант №7

1. Выполняется серия из n независимых испытаний с двумя исходами в каждом – «успех» или «неуспех». X – число «успехов» в n испытаниях, в каждом испытании вероятность «успеха» p одинаковая.

Требуется:

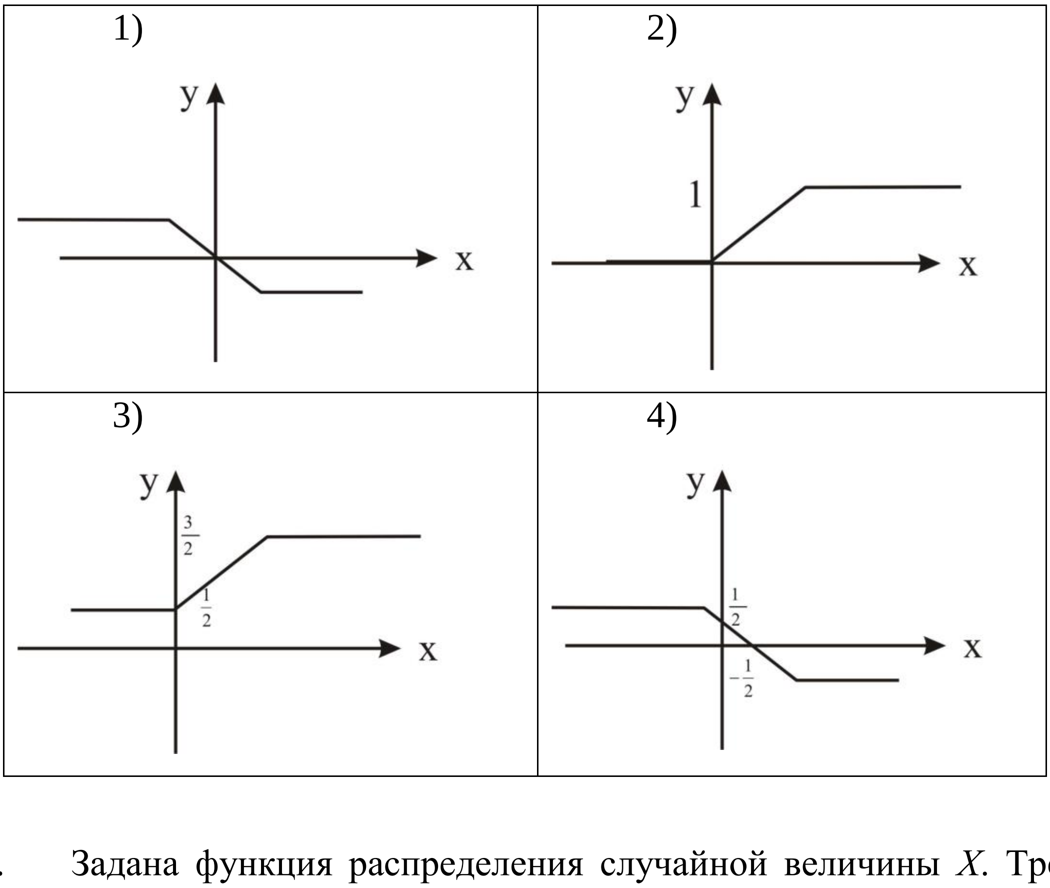
1) для подзадачи 1(малого n) найти закон распределения, функцию распределения X, построить её график**,** найти $M(X)$, $D(X)$ и $P(X < 2)$;

2) для подзадачи 2 (большого n и малого p) найти $P(X < 2)$ приближённо с помощью распределения Пуассона;

3) для подзадачи 3 (большого n) найти вероятность $P(k_1 < X < k_2)$.

Подзадача 1		Подзадача 2		Подзадача 3			
n	P	n	P	n	P	k_1	k_2
6	0,1	600	0,0025	768	0,25	190	220

2. На каком рисунке изображена функция плотности? Дайте развернутый ответ.



3. Задана функция распределения случайной величины X. Требуется найти плотность распределения, математическое ожидание, среднее квадрати-

ческое отклонение. Построить графики функций плотности и функции распределения.

$$F(x)=\begin{cases}0 \ \textit{при} \ x\le -2,\\ 0{,}25x+0{,}5 \ \textit{при} \ -2<x\le 2,\\ 1 \ \textit{при} \ x>2.\end{cases}$$

4. Случайная величина задана плотностью распределения $f(x)$. Найти коэффициент *C*, математическое ожидание и дисперсию. Найти $F(x)$.

$$f(x)=\begin{cases}0 \ \textit{при} \ x\le \dfrac{\pi}{2},\\ c\ \cos(x) \ \textit{при} \ -\dfrac{\pi}{2}<x\le \dfrac{\pi}{2},\\ 0 \ \textit{при} \ x>\dfrac{\pi}{2}.\end{cases}$$

5. Случайная величина *X* имеет экспоненциальное распределение с параметром $\lambda=4$. Найти $f(x)$, $F(x)$, $M(X)$, $P(X<M(X))$.

6. Случайная величина *X* равномерно распределена на отрезке [2;10]. Написать выражение плотности и найти $P(3\le X\le 5)$.

7. Случайная величина *X* имеет нормальное распределение с параметрами $m=-1, \sigma=2.$ Требуется найти плотность распределения и построить ее график. Найти вероятность того, что X будет лежать в интервале $-5\le X\le 9$, а также вероятность неравенства $|X+1|<4$.

8. Масса корюшки в Охотском море – случайная величина *X*, распределённая по нормальному закону с математическим ожиданием a=465 и средним квадратическим отклонением σ=35.

Найти: а) вероятность того, что масса наудачу выловленной корюшки будет заключена в пределах от m_1=300 до m_2=425; б) по правилу трёх сигм найти наибольшую и наименьшую границы предполагаемой массы.

Вариант №8

1. Выполняется серия из n независимых испытаний с двумя исходами в каждом – «успех» или «неуспех». X – число «успехов» в n испытаниях, в каждом испытании вероятность «успеха» p одинаковая.

Требуется:

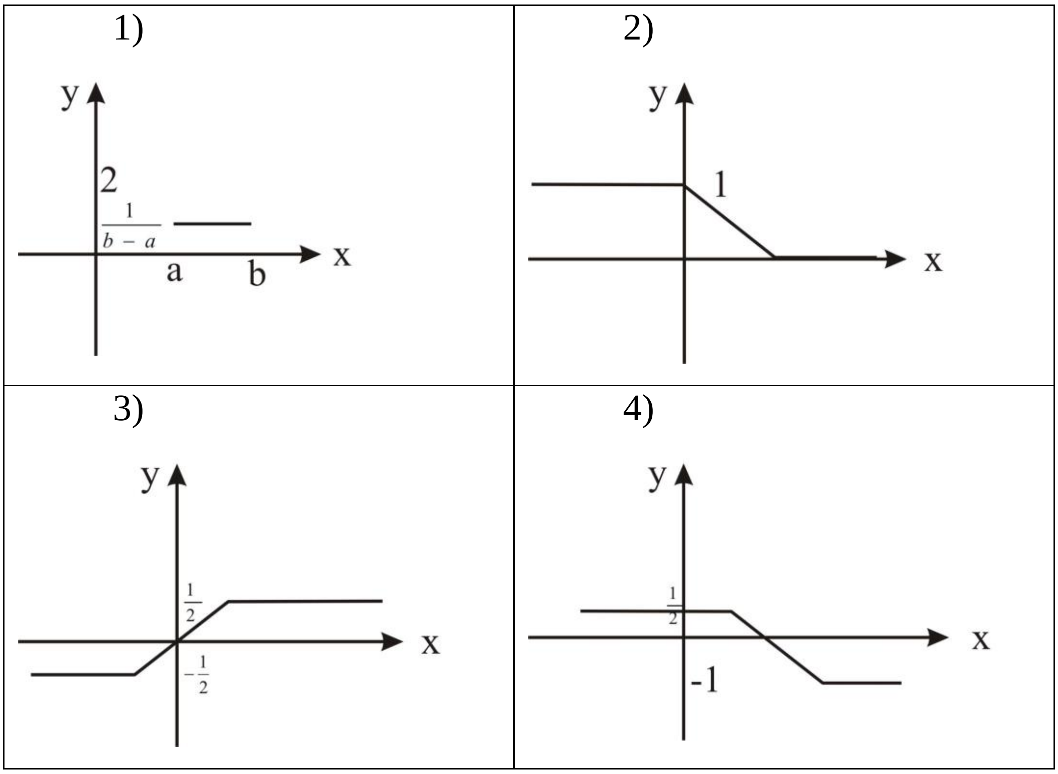
1) для подзадачи 1(малого n) найти закон распределения, функцию распределения X, построить её график**,** найти $M(X)$, $D(X)$ и $P(X < 2)$;

2) для подзадачи 2 (большого n и малого p) найти $P(X < 2)$ приближённо с помощью распределения Пуассона;

3) для подзадачи 3 (большого n) найти вероятность $P(k_1 < X < k_2)$.

Подзадача 1		Подзадача 2		Подзадача 3			
n	P	n	P	n	P	k_1	k_2
4	0,4	50	0,004	100	0,9	85	92

2. Какой из этих графиков может соответствовать функции плотности распределения случайной величины, ответ обосновать



3. Найти плотность распределения, математическое ожидание, среднее квадратическое отклонение, если известна функция распределения. Построить графики функций плотности и функции распределения.

$$F(x)=\begin{cases}0 \ \text{при} \ x \le 0,\\ \dfrac{x^2}{49} \ \text{при} \ 0 < x \le 7,\\ 1 \ \text{при} \ x > 7.\end{cases}$$

4. Случайная величина задана плотностью распределения $f(x)$. Найти коэффициент *C*, математическое ожидание и дисперсию. Найти $F(x)$.

$$f(x)=\begin{cases}0 \ \text{при} \ x \le 0,\\ c \ \sin(x) \ \text{при} \ 0 < x \le \dfrac{\pi}{2},\\ 0 \ \text{при} \ x > \dfrac{\pi}{2}.\end{cases}$$

5. Случайная величина *X* имеет показательное распределение, $\lambda = 5$. Найти функцию распределения $F(x)$ и вероятность $P(|X - M(X)| < 3\sigma)$.

6. Случайная величина X задана плотностью вероятности:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{4} \ \text{при} \ x \in [4;8],\\ 0 \ \text{при} \ x \notin [4;8].\end{cases}$$ Найти $M(X)$ и $D(X)$.

7. Случайная величина *X* имеет нормальное распределение с параметрами $a = 3, \ \sigma = 3.$ Требуется найти плотность распределения и построить ее график. Найти вероятность того, что *X* будет лежать в интервале $0 \le X \le 15$.

8. Масса корюшки в Охотском море – случайная величина *X*, распределённая по нормальному закону с математическим ожиданием a=290 и средним квадратическим отклонением σ=30. Найти: а) вероятность того, что масса наудачу выловленной корюшки будет заключена в пределах от m_1=305 до m_2=425; б) по правилу трёх сигм найти наибольшую и наименьшую границы предполагаемой массы.

Вариант №9

1. Выполняется серия из n независимых испытаний с двумя исходами в каждом – «успех» или «неуспех». X – число «успехов» в n испытаниях, в каждом испытании вероятность «успеха» p одинаковая.

Требуется:

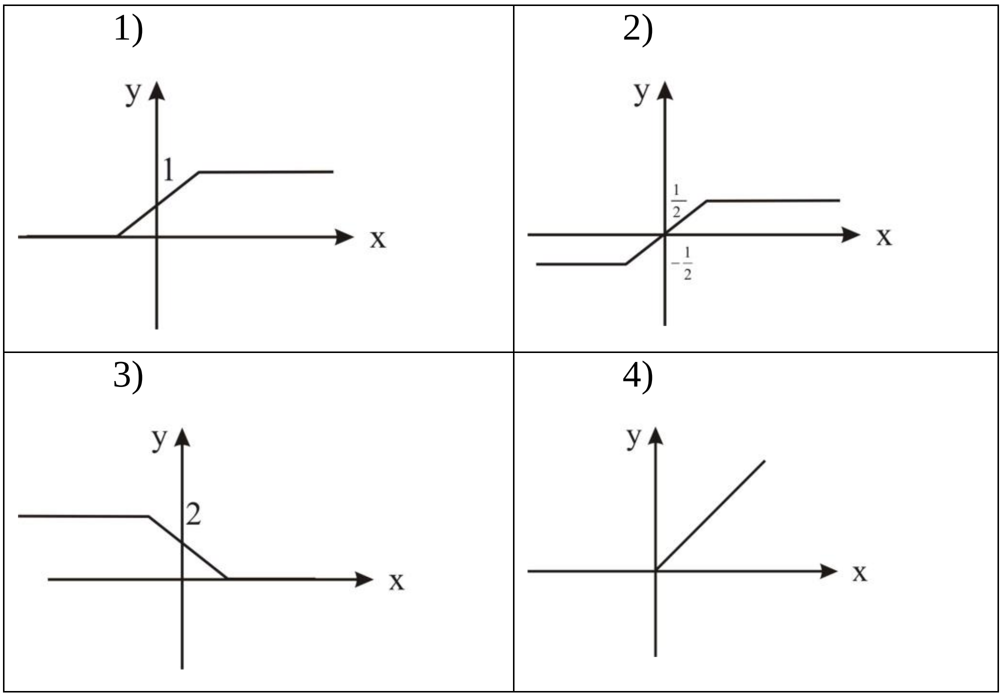
1) для подзадачи 1(малого n) найти закон распределения, функцию распределения X, построить её график, найти $M(X)$, $D(X)$ и $P(X < 2)$;

2) для подзадачи 2 (большого n и малого p) найти $P(X < 2)$ приближённо с помощью распределения Пуассона;

3) для подзадачи 3 (большого n) найти вероятность $P(k_1 < X < k_2)$.

Подзадача 1		Подзадача 2		Подзадача 3			
n	P	n	P	n	P	k_1	k_2
4	1/3	400	0,0025	100	0,8	75	84

2. На каком рисунке изображен график функции плотности? Ответ обосновать.



3. Задана функция распределения случайной величины X. Требуется найти плотность распределения, математическое ожидание, среднее квадратическое отклонение. Построить графики функций плотности и функции распределения.

$$F(x)=\begin{cases}0 \ \text{при} \ x\le 1,\\ 0,25(x-1) \ \text{при} \ 1<x\le 5,\\ 1 \ \text{при} \ x>5.\end{cases}$$

4. Случайная величина задана плотностью распределения $f(x)$. Найти коэффициент *C*, математическое ожидание и дисперсию. Найти $F(x)$.

$$f(x)=\begin{cases}0 \ \text{при} \ x\le 0,\\ c\ \cos(2x) \ \text{при} \ 0<x\le \dfrac{\pi}{4},\\ 0 \ \text{при} \ x>\dfrac{\pi}{4}.\end{cases}$$

5. Случайная величина X имеет экспоненциальное распределение с параметром $\lambda=5$. Найти $P(X<M(X))$.

6. Случайная величина X задана плотностью вероятности:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{4} \ \text{при} \ x\in[4;8],\\ 0 \ \text{при} \ x\notin[4;8].\end{cases}$$

Найти функцию распределения.

7. Случайная величина X имеет нормальное распределение с параметрами $m=4,\ \sigma=2$. Требуется найти плотность распределения и построить ее график. Найти вероятность того, что X будет лежать в интервале $-4\le X\le 10$, а также вероятность неравенства $|X-4|<8$.

8. Масса корюшки в Охотском море – случайная величина *X*, распределённая по нормальному закону с математическим ожиданием a=390 и средним квадратическим отклонением σ=15.

Найти: а) вероятность того, что масса наудачу выловленной корюшки будет заключена в пределах от m_1=290 до m_2=405;

б) по правилу трёх сигм найти наибольшую и наименьшую границы предполагаемой массы.

Вариант №10

1. Выполняется серия из n независимых испытаний с двумя исходами в каждом – «успех» или «неуспех». X – число «успехов» в n испытаниях, в каждом испытании вероятность «успеха» p одинаковая.

Требуется:

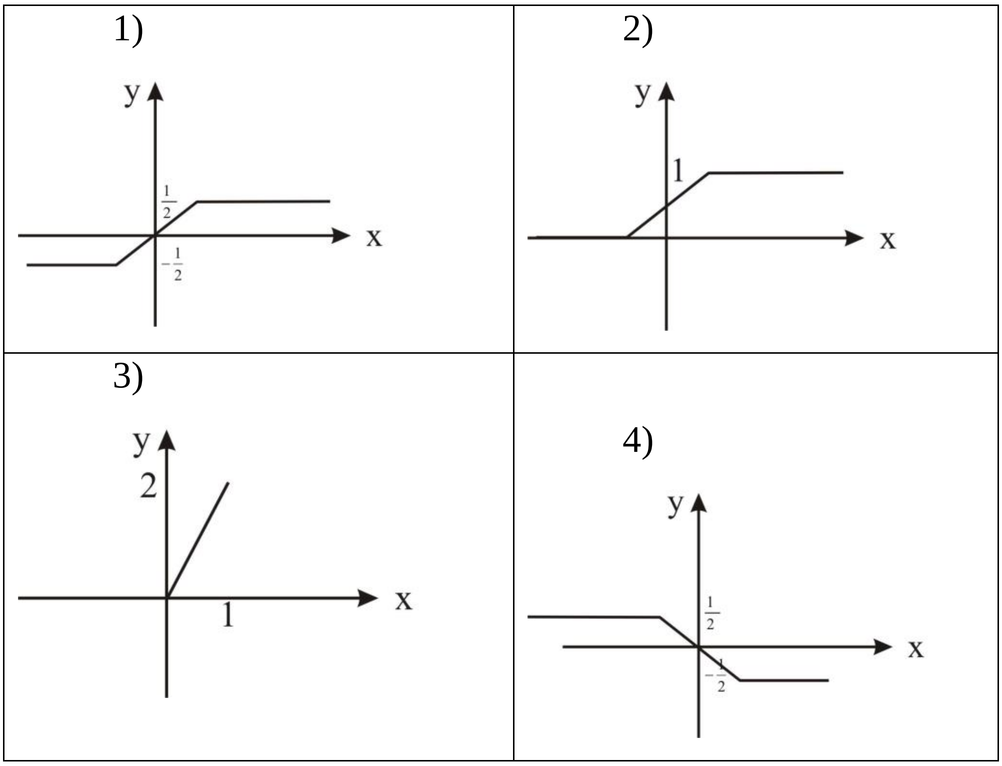
1) для подзадачи 1(малого n) найти закон распределения, функцию распределения X, построить её график**,** найти $M(X)$, $D(X)$ и $P(X < 2)$;

2) для подзадачи 2 (большого n и малого p) найти $P(X < 2)$ приближённо с помощью распределения Пуассона;

3) для подзадачи 3 (большого n) найти вероятность $P(k_1 < X < k_2)$.

Подзадача 1		Подзадача 2		Подзадача 3			
n	P	n	P	n	P	k_1	k_2
5	0,7	100	0,007	150	0,6	86	96

2. График функции плотности СВ изображен на рисунке...



3. Задана функция распределения случайной величины X. Требуется найти плотность распределения, математическое ожидание, среднее квадратическое отклонение. Построить графики функций плотности и функции распределения.

$$F(x)=\begin{cases}0 \ \textit{при} \ x\le 0,\\ \dfrac{x^2}{36} \ \textit{при} \ 0<x\le 6,\\ 1 \ \textit{при} \ x>6.\end{cases}$$

4. Случайная величина задана плотностью распределения $f(x)$. Найти коэффициент С, математическое ожидание и дисперсию. Найти $F(x)$.

$$f(x)=\begin{cases}0 \ \textit{при} \ x\le 2,\\ c \ \ \textit{при} \ 2<x\le 4,\\ 0 \ \textit{при} \ x>4.\end{cases}$$

5. Случайная величина X задана плотностью вероятности:

$$f(x)=\begin{cases}0 \ \textit{при} \ x<0,\\ 3 \ e^{-3x} \ \textit{при} \ x\ge 0.\end{cases}$$

Найти вероятность попадания случайной величины X на интервал [1;3].

6. Случайная величина X задана плотностью вероятности

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2} \ \textit{при} \ x\in[-1;1],\\ 0 \ \textit{при} \ x\notin[-1;1].\end{cases}$$

Найти первый, второй и третий начальный момент.

7. Случайная величина X имеет нормальное распределение с параметрами $m=-2,\ \sigma=5.$Требуется найти плотность распределения и построить ее график. Найти вероятность того, что X будет лежать в интервале $-12\le X\le 8$, а также вероятность неравенства $|X+2|<10$.

8. Масса корюшки в Охотском море – случайная величина X, распределённая по нормальному закону с математическим ожиданием a=300 и средним квадратическим отклонением σ=25.

Найти: а) вероятность того, что масса наудачу выловленной корюшки будет заключена в пределах от m_1=300 до m_2=425;

б) по правилу трёх сигм найти наибольшую и наименьшую границы предполагаемой массы.

2 ДВУМЕРНЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

Совокупность двух случайных величин (X,Y), заданных на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathrm{B}, \mathrm{P})$, называют *двумерной случайной величиной или двумерным случайным вектором*, X,Y – координаты случайного вектора.

2.1 Дискретная двумерная случайная величина

Если случайные величины X, Y дискретны, то и двумерная случайная величина (X,Y) также будет *дискретной*.

Закон распределения дискретной двумерной случайной величины можно задать, например, с помощью таблицы, где $p_{i,j} = P\left(X = x_i, Y = y_j\right)$, $i = 1,\ldots,m,\ j = 1,\ldots,n$:

	y_1	y_2	...	y_n
x_1	p_{11}	p_{12}	...	p_{1n}
x_2	p_{21}	p_{22}	...	p_{2n}
...	...	...	...	...
x_m	p_{m1}	p_{m2}	...	p_{mn}

Так как события составляют полную группу попарно несовместных событий, то $\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} p_{ij} = 1$.

Также двумерную случайную величину можно задать с помощью функции распределения.

Функцией распределения случайного вектора (X,Y) называется $F(x, y) = P\{X < x, Y < y\}$.

Геометрически данное равенство можно интерпретировать следующим образом: функция распределения $F(x, y)$ – вероятность того, что случайная точка (X,Y) попадет в бесконечный квадрат с вершиной в точке (x, y); точка (X,Y) будет левее и ниже этой вершины как показано на рисунке 1.13.

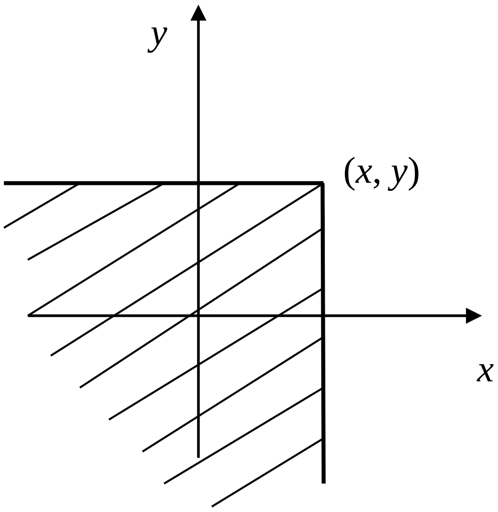


Рис. 1.13. Геометрическая интерпретация функции распределения $F(x, y)$.

Свойства функции распределения.

1 $0 \le F(x, y) \le 1$.

2 $F(x, y)$ - неубывающая функция по каждому из своих аргументов.

3 $F(-\infty, y) = F(x, -\infty) = 0$.

4 $F(+\infty, +\infty) = 1$.

5 $P(a \le X \le b, c \le Y \le d) = F(b,d) - F(b,c) - F(a,d) + F(a,c)$.

6. $F(x,y)$ непрерывна слева по каждому из аргументов

7. $F(+\infty, y) = F_Y(y), F(x, +\infty) = F_X(x)$.

Отметим, что функция распределения может быть записана и для дискретной случайной величины и для непрерывной.

2.2 Непрерывная двумерная случайная величина

Если случайные величины X, Y непрерывны, то и двумерная случайная величина (X,Y) – *непрерывная*.

Функцию распределения непрерывной двумерной случайной величины можно представить в виде сходящегося несобственного интеграла от плотности распределения:

$$F(X,Y) = P(X < x, Y < y) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} p(x,y)dxdy.$$

Плотностью совместного распределения вероятностей (двумерной плотностью вероятности) двумерной непрерывной случайной величины называют вторую смешанную производную от функции распределения: $f(x,y) = \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial y \partial x}$.

Геометрическая интерпретация плотности вероятности $f(x,y)$ – поверхность распределения в пространстве *OXYZ*.

Свойства двумерной плотности вероятности.

1. $f(x,y) \geq 0$.
2. $P(a < X < b, c < Y < d) = \int_{a}^{b}\int_{c}^{d} f(x,y)dxdy$.
3. $P(x < X < x + \Delta x, y < Y < y + \Delta y) \approx f(x,y)\Delta x \Delta y$.
4. $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dxdy = 1$
5. $f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy$, $f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx$

2.3 Независимость двумерных случайных величин. Условное распределение

Случайные величины *X, Y* называются *независимыми,* если $F(x,y) = F_X(x)F_Y(y)$, где $F_X(x), F_Y(y)$ - функции распределения случайных величин *X, Y*.

Если случайные величины непрерывны, то $f(x,y) = \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x \partial y} = F_X'(x)F_Y'(y) = f_X(x)f_Y(y)$.

Для дискретных случайных величин определение независимости перепишем в виде $p_{ij} = P\left(X = x_i, Y = y_j\right) = P\left(X = x_i\right)P\left(Y = y_j\right) = p_{X\,i}p_{Y\,j}$.

Условное распределение X при Y=y_j – совокупность условных вероятностей $p\left(x_1 / y_j\right),..., p\left(x_n / y_j\right)$:

$$p\left(x_i / y_j\right) = \frac{P\left(X = x_i, Y = y_j\right)}{P\left(Y = y_j\right)} = \frac{p_{ij}}{p_j}.$$

Аналогичным образом можно определить условное распределение *Y* при *X*=x_i.

$$p\left(y_j / x_i\right) = \frac{P\left(X = x_i, Y = y_j\right)}{P\left(X = x_i\right)} = \frac{p_{ij}}{p_i}.$$

Условные плотности для непрерывных составляющих *X*, *Y*:

$$f\left(x / y\right) = f\left(x, y\right) / f_Y\left(y\right), \quad f_Y\left(y\right) \neq 0;$$
$$f\left(y / x\right) = f\left(x, y\right) / f_X\left(x\right), \quad f_X\left(x\right) \neq 0.$$

2.4 Характеристики двумерных случайных величин

Математическим ожиданием функции двумерной случайной величины называется

$M\left(\varphi\left(X, Y\right)\right) = \sum\limits_{i,j} \varphi\left(x_i, y_j\right)p_{ij}$ в дискретном случае,

$M\left(\varphi\left(X, Y\right)\right) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi\left(x, y\right) f\left(x, y\right)dxdy$ в непрерывном случае.

Свойства математического ожидания

1. $M\left(C\right) = C$
2. $M\left(X + Y\right) = M\left(X\right) + M\left(Y\right)$

3 $M\left(XY\right) = M\left(X\right)M\left(Y\right)$ для независимых случайных величин.

Условное математическое ожидание (среднее значение *X* при условии, что *Y*=y_j): $M\left(X / Y = y_j\right) = \sum\limits_{i=1}^{m} x_i p\left(x_i / y_j\right)$.

Дисперсия компонент двумерного случайного вектора (X,Y):

$$D(X)=M\left(X-M(X)\right)^2=M\left(X^2\right)-M^2(X),$$

$$D(Y)=M\left(Y-M(Y)\right)^2=M\left(Y^2\right)-M^2(Y).$$

Ковариацией случайных величин называют $\operatorname{cov}(X,Y)=M\left((X-MX)(Y-MY)\right)$.

Свойства ковариации.

1. $\operatorname{cov}(X,Y)=M(XY)-M(X)M(Y)$

2. $\operatorname{cov}(X,X)=D(X)$

3.Если *X*, *Y* независимы, то $\operatorname{cov}(X,Y)=0$, (обратное неверно).

Случайные величины называются *некоррелированными*, если $\operatorname{cov}(X,Y)=0$, из некоррелированности не следует независимость, из независимости следует некоррелированность.

4. $\operatorname{cov}\left((aX+b),(cY+d)\right)=ac\operatorname{cov}(X,Y)$.

5. $\left|\operatorname{cov}(X,Y)\right|\le\sqrt{D(X)D(Y)}$.

6. Случайные величины линейно зависимы ($Y = aX + b$) $\Leftrightarrow$ $\left|\operatorname{cov}(X,Y)\right|=\sqrt{D(X)D(Y)}$.

Коэффициент корреляции: $\rho=\dfrac{\operatorname{cov}(X,Y)}{\sqrt{D(X)D(Y)}}$.

Свойства коэффициента корреляции:

1. $\rho(X,X)=1$

2. Если *X*, *Y* – независимы, то $\rho(X,Y)=0$

3. $\rho(aX+b,cY+d)=sign(ac)\rho(X,Y)$

4. $-1\le\rho(X,Y)\le 1$

5. $\left|\rho(X,Y)\right|=1$ $\Leftrightarrow$ *X*,*Y* линейно зависимы.

Начальный момент:

$$\alpha_{k,s}=\sum_i\sum_j x_i^k y_j^s p_{ij}$$ – для дискретных случайных величин (X,Y);

$$\alpha_{k,s}=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x^k y^s f(x,y)dxdy$$ – для непрерывных случайных величин (X,Y).

Центральный момент:

$$\mu_{k,s}=\sum_i\sum_j \left(x_i-\bar{x}\right)^k\left(y_i-\bar{y}\right)^s p_{ij}$$ – для дискретных случайных величин (X,Y);

$$\mu_{k,s}=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left(x-\bar{x}\right)^k\left(y-\bar{y}\right)^s f(x,y)dxdy$$ – для непрерывных случайных величин (X,Y).

Порядком начального (центрального) момента называется сумма его индексов $k+s$. Центральные моменты первого порядка равны нулю, а второго: $\mu_{2,0}=D[X]$. Центральный момент $\mu_{1,1}=\mathrm{cov}(X,Y)$.

Пример: Подбрасывают два игральных кубика.

X – количество очков, выпавших в результате броска первого кубика.

$У$ – количество очков, выпавших в результате броска второго кубика.

Построить закон распределения вероятностей системы (X,Y). Случайные величины являются независимыми.

Решение:

Составим законы распределения для X,Y.

X	1	2	3	4	5	6
	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

Y	1	2	3	4	5	6
	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

Так как вероятность выпадения любой пары (x_i, y_j) будет равна $\frac{1}{36}$, то можно записать закон распределения вероятностей системы (X,Y) в следующем виде:

X	Y					
	1	2	3	4	5	6
1	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$
2	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$
3	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$
4	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$
5	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$
6	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$

Пример:

Двумерная случайная величина (X,Y) задана плотностью вероятности

$$f(x,y) = \frac{C}{\pi^2 (1+x^2)(2+y^2)}.$$

Найти а) параметр C; б) вероятность попадания случайной точки (x,y) в прямоугольник, ограниченный прямыми $x = 0$, $y = 0$, $x = 1$, $y = \sqrt{2}$.

Решение. а) Так как $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dxdy = 1$, то

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{C}{\pi^2 (1+x^2)(2+y^2)}\,dxdy = 1,$$

$$\frac{C}{\pi^2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dy}{\left(2+y^2\right)}\left(arctg(x)\Big|_{-\infty}^{\infty}\right)=1,$$

$$\frac{C}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dy}{\left(2+y^2\right)}=1,$$

$$\frac{C}{\pi}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}arctg\left(\frac{y}{\sqrt{2}}\right)\Bigg|_{-\infty}^{\infty}\right)=1,$$

$$\frac{C}{\sqrt{2}}=1,$$

$$C=\sqrt{2}.$$

б). $P\left\{0\le X\le 1, 0\le Y\le\sqrt{2}\right\}=\int\limits_0^1\frac{dx}{\left(1+x^2\right)}\int\limits_0^{\sqrt{2}}\frac{\sqrt{2}dy}{\pi^2\left(2+y^2\right)}=\frac{1}{16}.$

2.5 Двумерное нормальное распределение

Двумерная случайная величина (X,Y) распределена нормально со средними значениями m_1, m_2, дисперсиями σ_1^2,σ_2^2 и коэффициентом корреляции ρ, если ее плотность задана, рисунок 1.14:

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\exp\left\{\frac{-1}{2(1-\rho^2)}\left(\frac{\left(x-m_1\right)^2}{\sigma_1^2}+2\rho\frac{\left(x-m_1\right)\left(y-m_2\right)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{\left(y-m_2\right)^2}{\sigma_2^2}\right)\right\}.$$

Рис. 1.14. График плотности двумерного нормального распределения.

Вопросы:

1. Дайте определение двумерной случайной величины.

2. Какая двумерная случайная величина называется дискретной?

3. Какая двумерная случайная величина называется непрерывной?

4. Как вычислить математическое ожидание двумерной случайной величины?

5. Как вычислить дисперсию двумерной случайной величины?

6. Что такое ковариация?

7. Изобразите схематично двумерное нормальное распределение.

8. Свойства коэффициента корреляции.

9. В каких случаях значения коэффициента корреляции равны +1 и –1?

10. Связаны ли между собой функция плотности и функция распределения? Дать развернутый ответ.

11. Если случайные величины независимые, то можно ли сказать, что они некоррелированные?

12. Приведите примеры двумерных случайных величин.

Индивидуальные задания:

1. Двумерная дискретная случайная величина задана законом распределения. Являются ли зависимыми случайные величины X, Y.

2. Дана плотность вероятности $f(x, y)$ двумерной случайной величины (X,Y).

Найти функцию распределения и коэффициент корреляции случайной величины (X,Y).

3. Две независимые дискретные случайные величины X, Y заданы своими законами распределения вероятностей.

Требуется:

а) Найти закон распределения вероятностей двумерной дискретной случайной величины.

б) Вычислить:

$M\left(X \mid Y = y_2\right)$;

$M\left(Y \mid X = x_3\right)$,

$P\left(1 < x \le 3, 2 < y \le 4\right)$,

$P\left(y > 3\right)$.

в) Найти закон распределения вероятностей случайной величины $Z = X + Y,\ T = X \cdot Y$.

Вычислить математическое ожидание $M(Z)$ и дисперсию $D(Z)$.

г) Вычислить $M(2X+3Y)$, $D(2X\text{-}3Y+1)$.

Вариант 1

	y_1	y_2	y_3
x_1	0,1	0,3	0,2
x_2	0,1	0,1	0,2

1.

2. $f\left(x,y\right)=\begin{cases} 0,\ x\notin\left(0,1\right], y\notin\left(0,4\right] \\ x^2(x+\sqrt{y}),\ x\in\left(0,1\right], y\in\left(0,4\right] \end{cases}$

3.

X	1	2	3	4
	0,4	0,1	0,1	0,4

Y	1	2	3	4
	0,2	0,3	0,2	0,3

Вариант 2

	y_1	y_2	y_3
x_1	0,1	0,4	0,05
x_2	0,2	0,2	0,05

1.

2. $f\left(x,y\right)=\begin{cases}0,\ \ x\notin\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right],y\notin\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right]\\ \sin(x+y),\ x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right],y\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right]\end{cases}$

3.

X	1	2	3	4
	0,1	0,4	0,2	0,3

Y	1	2	3	4
	0,1	0,4	0,2	0,3

Вариант 3

	y_1	y_2	y_3
x_1	0,1	0,2	0,05
x_2	0,2	0,4	0,05

1.

2. $f\left(x,y\right)=\begin{cases}0,\ \ x\notin\left(0,2\right],y\notin\left(0,2\right]\\ \dfrac{y+x}{x+2},\ x\in\left(0,2\right],y\in\left(0,2\right]\end{cases}$

3.

X	1	2	3	4
	0,4	0,4	0,1	0,1

Y	1	2	3	4
	0,1	0,5	0,2	0,2

Вариант 4

	y_1	y_2	y_3
x_1	0,1	0,25	0,1
x_2	0,2	0,25	0,1

1.

	2. $f(x,y)=\begin{cases}0, & x\notin(0,2], y\notin(0,1]\\ x(x-y), & x\in(0,2], y\in(0,1]\end{cases}$ 3. | X | 1 | 2 | 3 | 4 | | | 0,25 | 0,25 | 0,2 | 0,3 | | Y | 1 | 2 | 3 | 4 | | | 0,1 | 0,1 | 0,5 | 0,3 |
Вариант 5	| | y_1 | y_2 | y_3 | | x_1 | 0,2 | 0,2 | 0,2 | | x_2 | 0,2 | 0,2 | 0 | 1. 2. $f(x,y)=\begin{cases}0, & x\notin\left(0,\frac{\pi}{2}\right], y\notin\left(0,\frac{\pi}{2}\right]\\ \cos(x+y), & x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right], y\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right]\end{cases}$ 3. | X | 1 | 2 | 3 | 4 | | | 0,1 | 0,1 | 0,1 | 0,7 | | Y | 1 | 2 | 3 | 4 | | | 0,1 | 0,1 | 0,2 | 0,6 |
Вариант 6	| | y_1 | y_2 | y_3 | | x_1 | 0,5 | 0,1 | 0,4 | | x_2 | 0,2 | 0,2 | 0,05 | 1. 2. $f(x,y)=\begin{cases}0, & x\notin(0,1], y\notin(1,2]\\ \frac{1}{(x+y)}, & x\in(0,1], y\in(1,2]\end{cases}$

<table>
<tr>
<td></td>
<td>
3.
<table>
<tr><td rowspan="2">X</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td></tr>
<tr><td>0,2</td><td>0,2</td><td>0,2</td><td>0,4</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td rowspan="2">Y</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td></tr>
<tr><td>0,2</td><td>0,3</td><td>0,2</td><td>0,3</td></tr>
</table>
</td>
</tr>
<tr>
<td>Вариант 7</td>
<td>
<table>
<tr><td></td><td>y_1</td><td>y_2</td><td>y_3</td></tr>
<tr><td>x_1</td><td>0,1</td><td>0,1</td><td>0,7</td></tr>
<tr><td>x_2</td><td>0,05</td><td>0,05</td><td>0</td></tr>
</table>
1.
2. $f\left(x,y\right)=\begin{cases}0,\ \ x\notin\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right],y\notin\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right]\\ \sin^2(x+y),\ x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right],y\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right]\end{cases}$
3.
<table>
<tr><td rowspan="2">X</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td></tr>
<tr><td>0,3</td><td>0,2</td><td>0,2</td><td>0,3</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td rowspan="2">Y</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td></tr>
<tr><td>0,2</td><td>0,3</td><td>0,2</td><td>0,3</td></tr>
</table>
</td>
</tr>
<tr>
<td>Вариант 8</td>
<td>
<table>
<tr><td></td><td>y_1</td><td>y_2</td><td>y_3</td></tr>
<tr><td>x_1</td><td>0,05</td><td>0,4</td><td>0,05</td></tr>
<tr><td>x_2</td><td>0,25</td><td>0,2</td><td>0,05</td></tr>
</table>
1.
2. $f\left(x,y\right)=\begin{cases}0,\ \ x\notin\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right],y\notin\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right]\\ \cos^2(x+y),\ x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right],y\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right]\end{cases}$
3.
</td>
</tr>
</table>

X	1	2	3	4
	0,2	0,4	0,1	0,3

Y	1	2	3	4
	0,1	0,4	0,2	0,3

Вариант 9

	y_1	y_2	y_3
x_1	0,2	0,3	0,15
x_2	0,1	0,2	0,05

1.

2. $$f\left(x,y\right)=\begin{cases}0,\ x\notin\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right],y\notin\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right]\\ \sqrt{x+y},\ x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right],y\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right]\end{cases}$$

3.

X	1	2	3	4
	0,1	0,3	0,3	0,3

Y	1	2	3	4
	0,1	0,4	0,2	0,3

Вариант 10

	y_1	y_2	y_3
x_1	0,2	0,2	0,05
x_2	0,1	0,2	0,15

1.

2. $$f\left(x,y\right)=\begin{cases}0,\ x\notin\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right],y\notin\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right]\\ \sin(x-y),\ x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right],y\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right]\end{cases}$$

3.

X	1	2	3	4
	0,3	0,1	0,2	0,4

Y	1	2	3	4
	0,1	0,4	0,3	0,2

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Горлач Б.А. Теория вероятностей и математическая статистика: учебно-методическое пособие. – Санкт-Петербург: Лань, 2013. – 320 с.

2. Буре В.М. Теория вероятностей и математическая статистика. – Санкт-Петербург: Лань, 2013. – 416 с.

3.Ганичева А.В. Теория вероятностей: учебное пособие: Санкт-Петербург: Лань, 2017. – 144 с.

4. Бородин А.Н. Элементарный курс теории вероятностей и математической статистики: учебное пособие. – Санкт-Петербург: Лань, 2011. – 256 с.

5. Вентцель Е.С., Овчаров Л.А. Задачи и упражнения по теории вероятностей: учеб. пособие для студ. втузов. – М.: Академия, 2003. – 448 с.

6. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика. – М.: Высш. шк., 2003. – 479 с.

СОДЕРЖАНИЕ

Любовь Игоревна Мороз,

старший преподаватель кафедры математического анализа и моделирования АмГУ

Случайные величины. *Учебное пособие.*

Изд-во АмГУ. Подписано к печати 11.06.2021. Формат 60×84/16.

Усл. печ. л. 3,8. Тираж 100. Заказ ***.

Отпечатано в типографии АмГУ.