Министерство науки и высшего образования Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение

высшего образования

«Амурский государственный университет»

С.Г. Самохвалова

ТЕОРИЯ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ

Методические указания к лабораторным работам

для студентов очной формы обучения

Благовещенск

2021

Теория принятия решений. Методические указания к лабораторным работам для студентов очной формы обучения. /С.Г. Самохвалова – Благовещенск.: ФГБОУ ВО «АмГУ», 2021 г. – 55 с.

В методических указаниях приведены краткие теоретические сведения, примеры, задания для самостоятельной работы. Основная цель методических указаний помочь студентам в изучении задач и методов линейного программирования с использованием электронных таблиц.

Методические указания рекомендуется студентам направления подготовки 09.03.01 – Информатика и вычислительная техника и 09.03.02 - Информационные системы и технологии, изучающим дисциплину «Теория принятия решений», а также могут быть полезны для преподавателей и студентов, преподающих и осваивающих эту дисциплину в рамках других направлений подготовки.

Рецензент:

Чалкина Н.А. доцент, к.п.н. доцент кафедры общей математики и информатики ФГБОУ ВО АмГУ

©Амурский государственный университет, 2021

©Самохвалова, С. Г., автор

СОДЕРЖАНИЕ

Введение 4

Лабораторная работа 1. Графический метод решения задач линейного программирования 5

Лабораторная работа 2. Решение задачи линейного программирования с помощью симплекс-метода 17

Лабораторная работа 3. Решение задачи линейного программирования: транспортная задача 27

Лабораторная работа 4. Линейное программирование: задача о назначении 34

Лабораторная работа 5. Задача коммивояжера 44

Список использованных источников 55

Введение

До второй половины XX века методы линейного программирования во многих областях науки и техники применялись достаточно редко, поскольку практическое использование математических методов оптимизации требовало огромной вычислительной работы, которую без ЭВМ реализовать было крайне трудно, а в ряде случаев и невозможно. С появлением компьютеров для решения таких задач используются специализированные пакеты прикладных программ, языки программирования высокого уровня.

В настоящее время разработано множество прикладных программ, позволяющих решать широкие классы задач математического программирования. Мощный и достаточно простой инструмент решения задач математического программирования предлагает электронный табличный процессор.

Основной целью методических указаний является формирование навыков построения математических моделей задач линейного программирования, и их решение с помощью электронных таблиц.

Изложенный в методических указаниях материал иллюстрируется задачами и примерами, относящимися к задачам линейного программирования, некоторые задачи составлены с использованием уже опубликованных материалов, приведенных в списке литературы.

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА 1

Графический метод решения задач линейного программирования

Цель работы. Приобретение навыков решения задач линейного программирования графическим методом с использованием электронных таблиц.

Теоретический материал.

Рассмотрим пример нахождения оптимального решения графическим методом для следующей задачи линейного программирования:

Пример. Найти графическим методом максимум целевой функции

$F=2x_1+3x_2 \rightarrow \max$

при ограничениях

$x_1+3x_2 \leq 18,$ (1)

$2x_1+x_2 \leq 16,$ (2)

$x_2 \leq 5,$ (3)

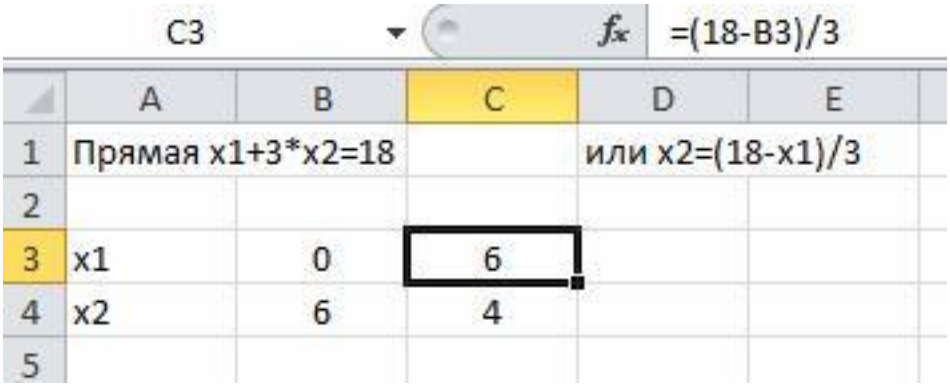
$3x_1 \leq 21,$ (4)

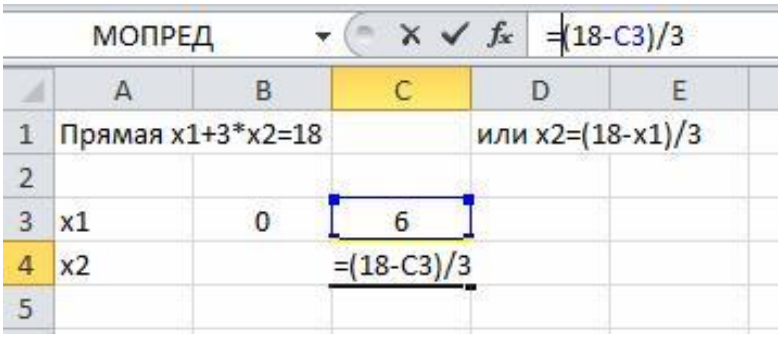
$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,$ (5,6)

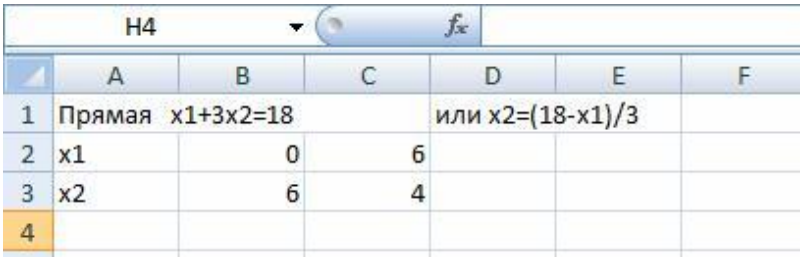
Решение. Используя таблицы Microsoft Excel решим данную задачу. Построим на листе Excel область допустимых решений.

Рассмотрим первое неравенство $x_1+3x_2 \leq 18$.

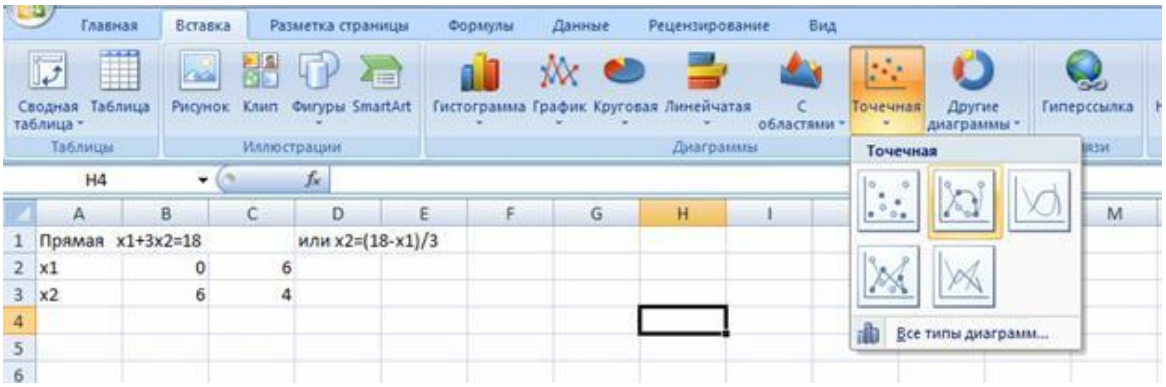
Строим прямую $x_1+3x_2=18$ по двум точкам. Прямую обозначим (L1). Координаты x_2 считаем по формулам:



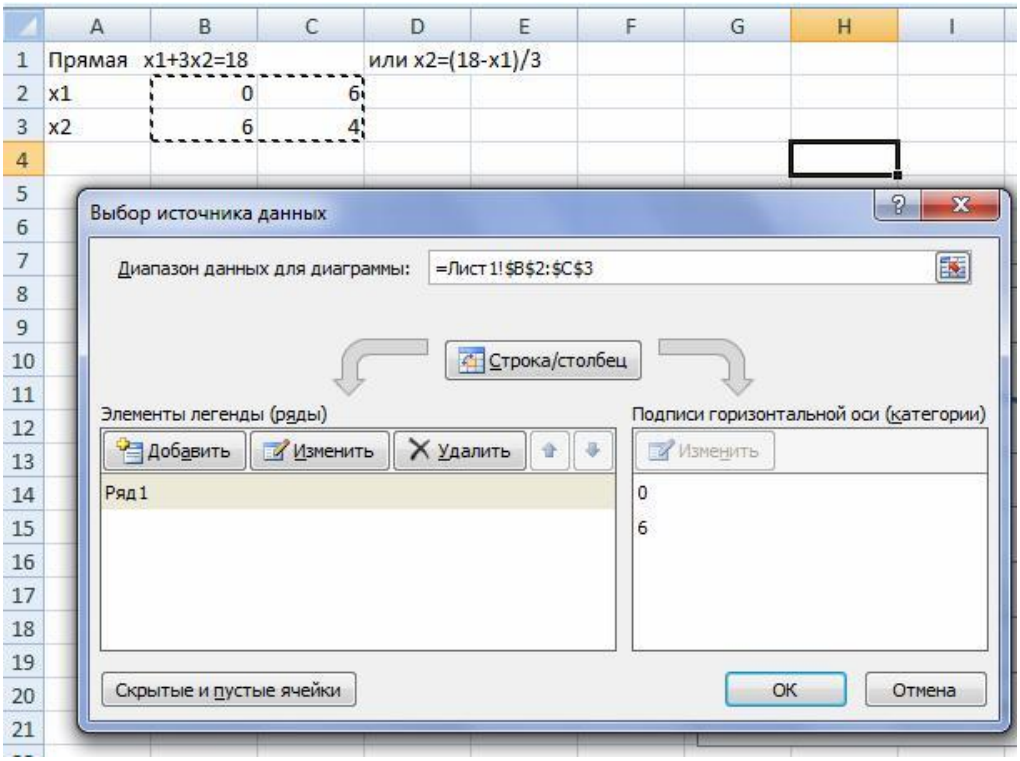




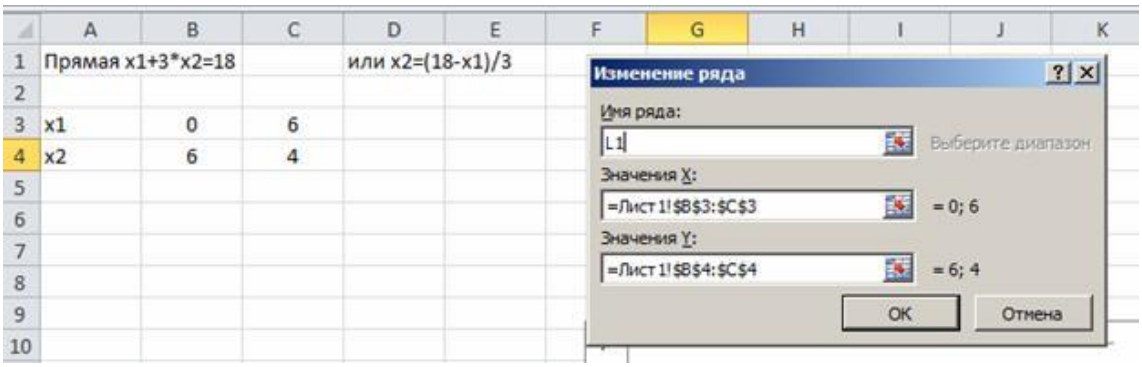
Для построения выбираем точечную диаграмму



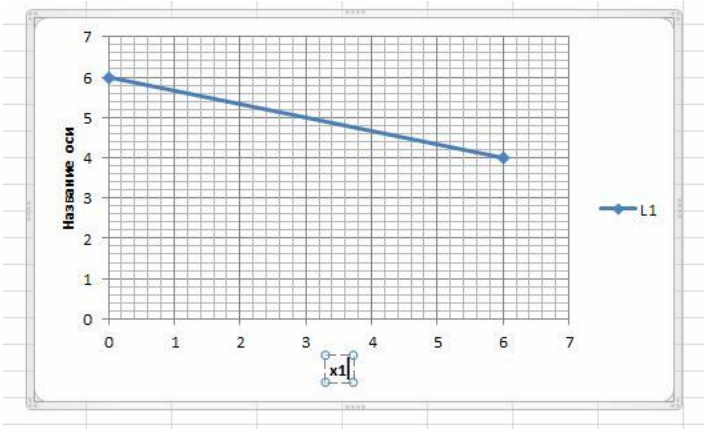
Выбираем данные для прямой

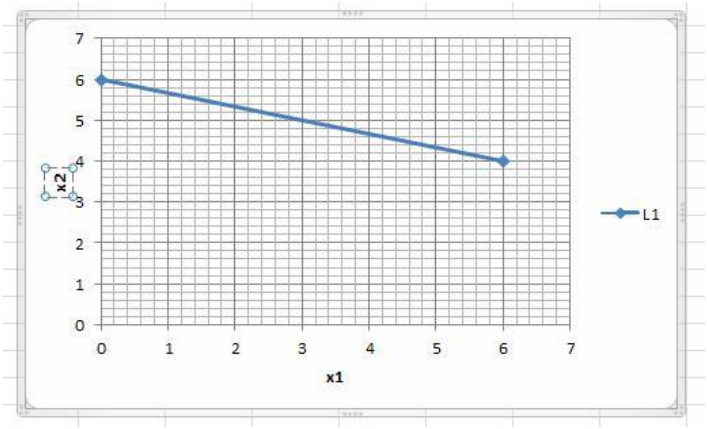


Изменяем название прямой:

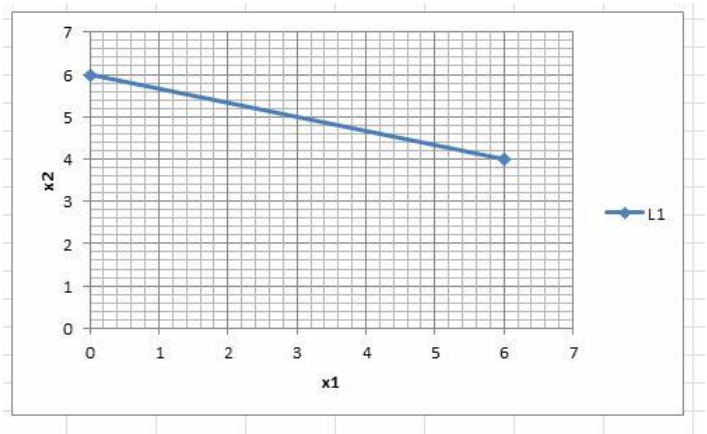


Выбираем макет диаграммы. Изменяем название осей координат:





Прямая (L1) на графике:

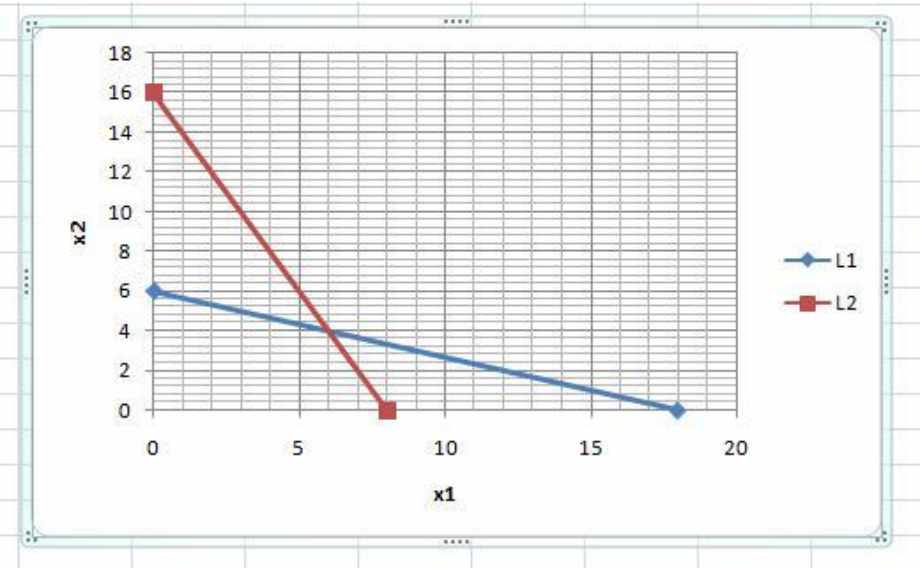


Решение неравенства $x_1+3x_2 \leq 18$ можно найти с помощью единственной пробной точки, не принадлежащей прямой (L1). Например, с помощью точки (0; 0). При подстановке координат точки (0; 0), получаем неравенство $0 < 18$, неравенство является верным. Решением неравенства (1) будет полуплоскость, в которой пробная точка расположена (на рисунке ниже прямой L1).

Далее, решаем неравенство (2) $2x_1+x_2 \leq 16$. Построим прямую, $2x_1+x_2=16$ по двум точкам. Прямую обозначим (L2).

	A	B	C	D	E
1	Прямая x1+3x2=18			или x2=(18-x1)/3	
2	x1	0	18		
3	x2	6	0		
4					
5	Прямая 2*x1+x2=16			или x2=16-2*x1	
6					
7	x1	0	8		
8	x2	16	0		
9					

Прямая (L2) на графике:



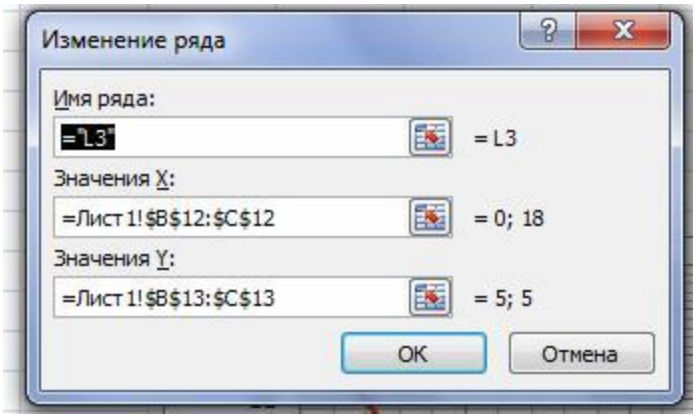
Решение неравенства $2x_1+x_2 \leq 16$ можно найти с помощью единственной пробной точки, не принадлежащей прямой (L2), также как и с прямой (L1) возьмем точку (0; 0). При подстановке координат точки (0; 0), получаем неравенство $0 < 16$. Неравенство является верным, следовательно решением нера-

венства (2) будет та полуплоскость, в которой пробная точка расположена (на рисунке ниже прямой L2).

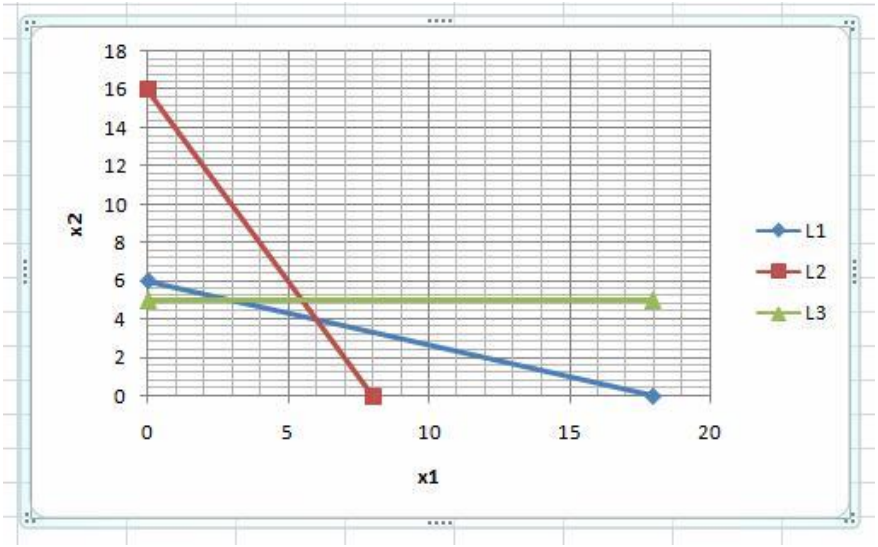
Решаем следующее неравенство (3) $x_2 \leq 5$.

Построим граничную прямую $x_2=5$ по двум точкам. Прямую обозначим (L3). На листе Excel добавляем данные

	A	B	C	D	E
1	Прямая x1+3x2=18			или x2=(18-x1)/3	
2	x1	0	18		
3	x2	6	0		
4					
5	Прямая 2*x1+x2=16			или x2=16-2*x1	
6					
7	x1	0	8		
8	x2	16	0		
9					
10	Прямая x2=5				
11					
12	x1	0	18		
13	x2	5	5		



Прямая (L3) на графике:



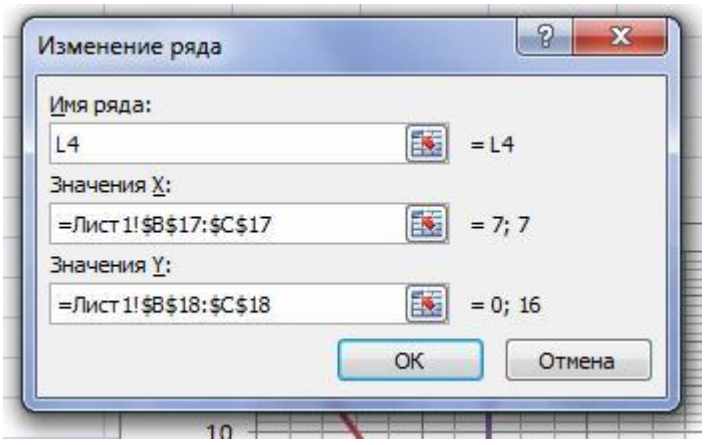
Решение строгого неравенства $2x_2<5$ можно найти с помощью единственной пробной точки, не принадлежащей прямой (L3), например, с помощью точки (0; 0).

При подстановке координат точки (0; 0), получаем неравенство $0 < 5$, т.к. неравенство является верным, то решением неравенства (3) будет та полуплоскость, в которой пробная точка расположена (на рисунке ниже прямой L3).

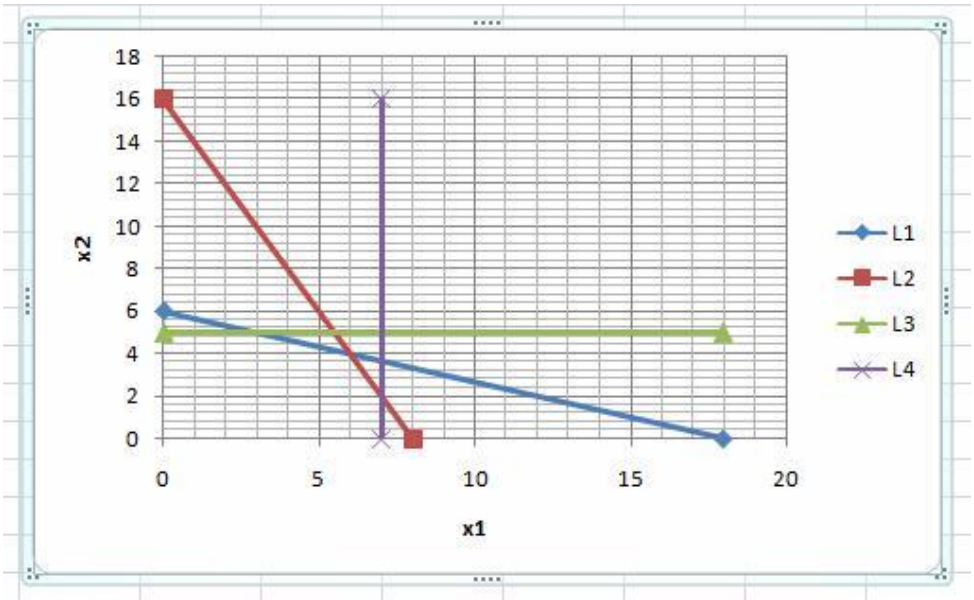
Решаем неравенство (4) $3x_2 \leq 21$. Построим граничную прямую $3x_2=21$ по двум точкам. Прямую обозначим (L4).

На листе Excel добавляем данные

1	Прямая x1+3x2=18			или x2=(18-x1)/3	
2	x1	0	18		
3	x2	6	0		
4					
5	Прямая 2*x1+x2=16			или x2=16-2*x1	
6					
7	x1	0	8		
8	x2	16	0		
9					
10	Прямая x2=5				
11					
12	x1	0	18		
13	x2	5	5		
14					
15	Прямая 3*x1=21			или x1=7	
16					
17	x1	7	7		
18	x2	0	16		



Прямая (L4) на графике:



Решение неравенства $3x_1 \leq 21$ можно найти с помощью единственной пробной точки, не принадлежащей прямой (L4), например, с помощью точки (0; 0). При подстановке координат точки (0; 0), получаем неравенство $0 < 21$. Неравенство является верным, следовательно, решением неравенства (4) будет та полуплоскость, в которой пробная точка расположена (на рисунке левее прямой L4).

Решением двух неравенств (5) и (6) $x_1 \geq 0$ и $x_2 \geq 0$ является 1-ая четверть, ограниченная координатными прямыми $x_1=0$ и $x_2=0$.

Система неравенств решена.

Решением системы неравенств (1) – (6) в данном примере является выпуклый многоугольник в левом нижнем углу рисунка, ограниченный прямыми L1, L2, L3, L4 и координатными прямыми $x_1=0$ и $x_2=0$.

Убедиться, что многоугольник выбран правильно, можно подстановкой пробной точки, например (1; 1) в каждое неравенство исходной системы. При подстановке точки (1; 1) получаем, что все неравенства, верные.

Рассмотрим целевую функцию $F=2x_1+3x_2 \rightarrow \max$.

Построим линии уровня для значений функции $F = 0$ и $F = 12$ (числовые значения выбраны произвольно).

На листе Excel добавляем данные

Линия уровня F=0			2*x1+3*x2=0
			или x2=-(2*x1)/3
x1	-2	10	
x2	1,333333	-6,66667	
Линия уровня F=12			2*x1+3*x2=12
			или x2=(12-2*x1)/3
x1	-2	10	
x2	5,333333	-2,66667	

Линии уровней на графике:

Построим вектор направлений (или градиент) {2; 3}. Координаты вектора совпадают с коэффициентами целевой функции *F*.

Добавляем на листе Excel координаты начальной и конечной точки вектора.

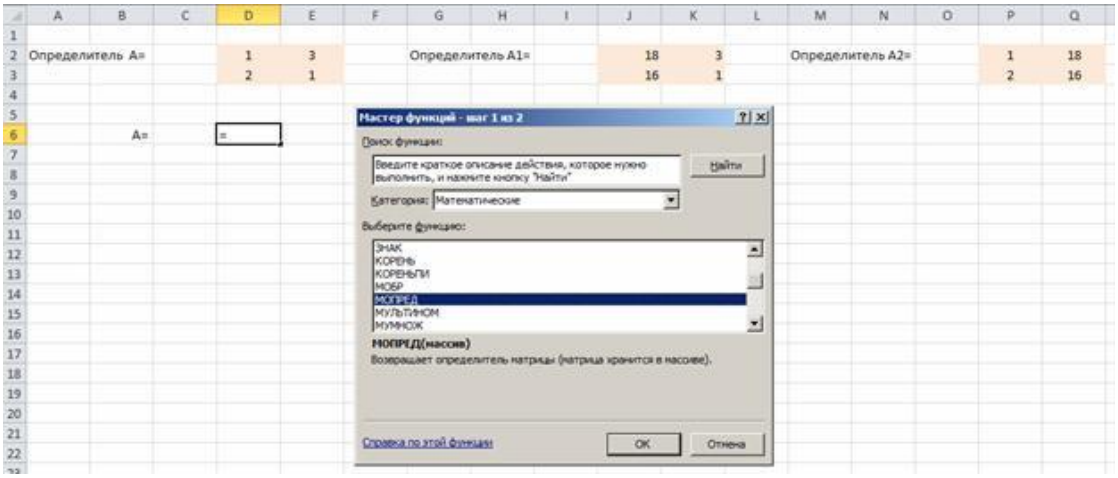
Градиент {2; 3}		
x1	0	2
x2	0	3

Вектор на рисунке:

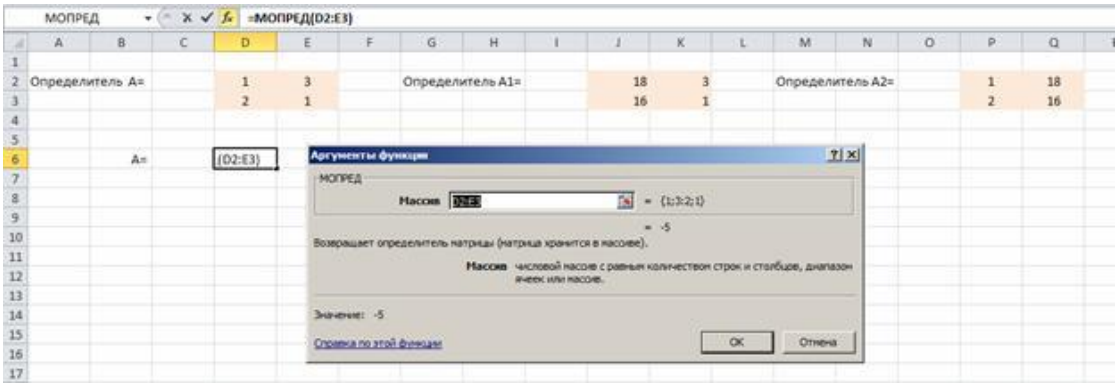
Градиент указывает направление увеличения целевой функции F. Теперь следует линию уровня F=0 передвинуть параллельно до последней точки угловой точки выпуклого многоугольника. Последней угловой точкой пересечения выпуклого многоугольника и передвинутой линии уровня будет точка пересечения прямых L1 и L2. Для нахождения координат точки запишем и решим систему уравнений

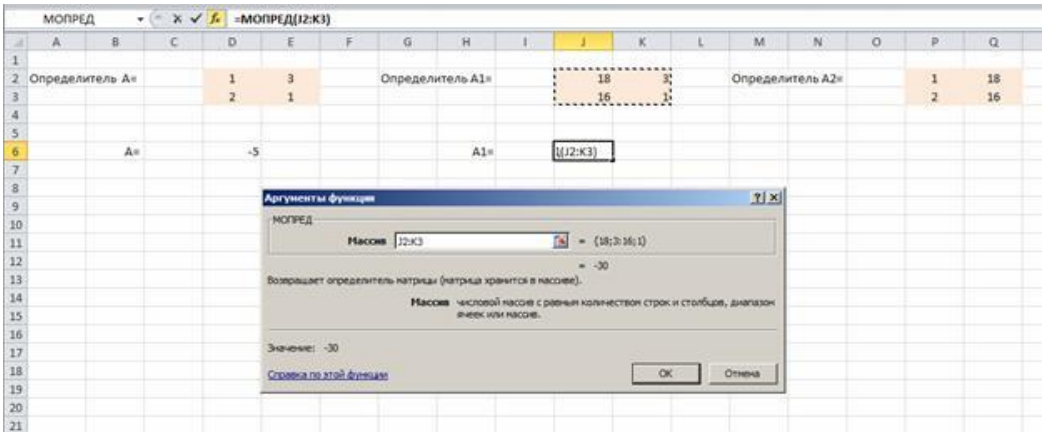
$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 = 18 \\ 2x_1 + x_2 = 16 \end{cases}$$

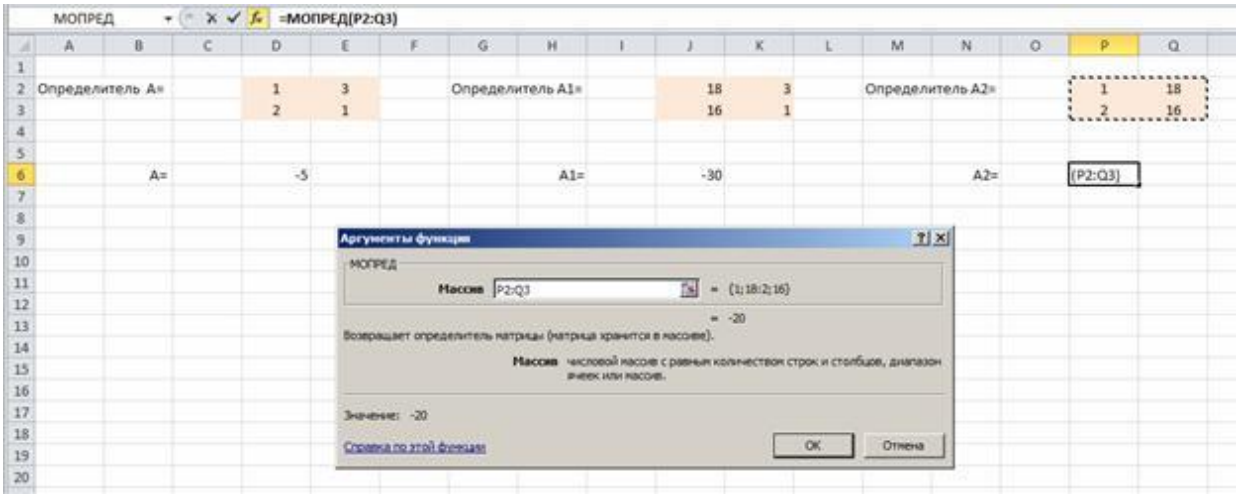
Решаем систему уравнений по формулам Крамера. Для этого на листе Excel создаем массивы для определителей. Для вычисления определителей используем математическую функцию МОПРЕД



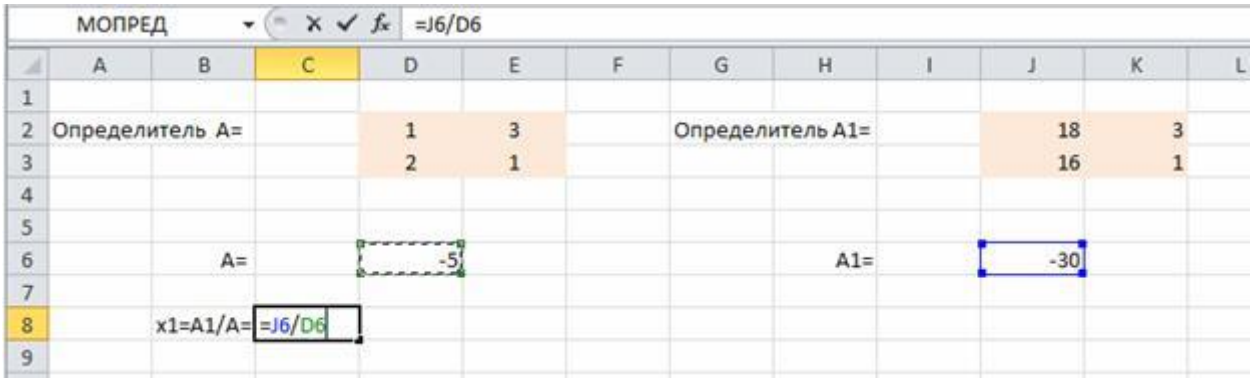
Выделяем массив определителя

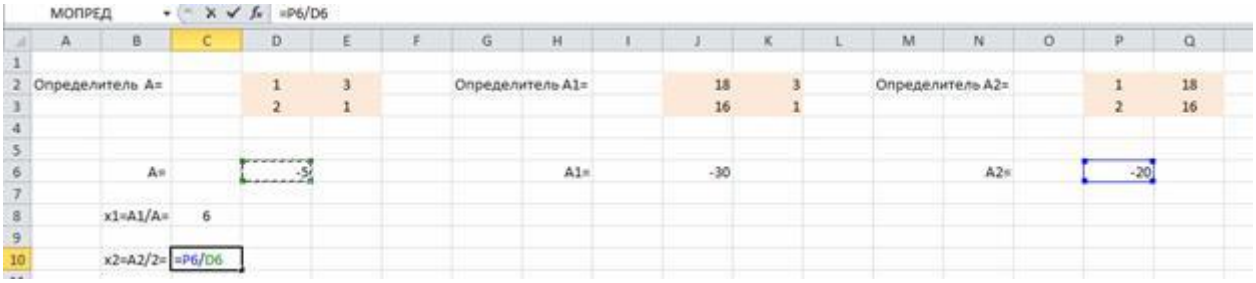


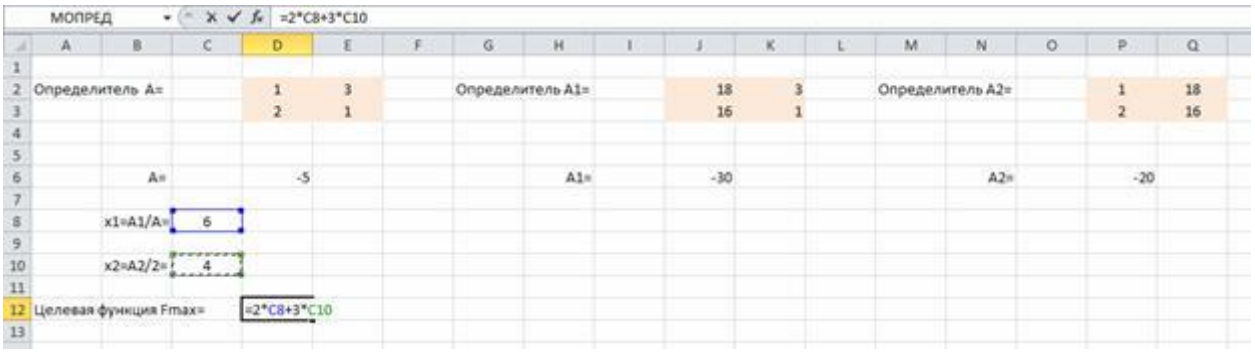




Находим значения x_1 и x_2







Пересечением прямых L1 и L2 будет точка с координатами (6; 4).

Подставляем координаты точки в целевую функцию

$$F_{max} = 2\times6 + 3\times4 = 24$$

Ответ: $F_{max} = 24$ при $x_1=6$ и $x_2=4$.

Задания для лабораторного занятия:

Согласно номеру своего варианта выберите условие задачи и найдите оптимальное решение задачи симплекс-методом. Найдите оптимальное решение задачи с использованием электронной таблицы.

1.

$$0.5x_1 + 2x_2 \to \max,$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 6 \\ x_1 - x_2 \le 1 \\ x_1 \ge 1 \\ 2x_1 + x_2 \ge 6 \\ 0.5x_1 - x_2 \ge -4 \\ x_2 > 1 \end{cases}$$

2.

$$-3x_1 - 2x_2 \to \min,$$

$$\begin{cases} 5x_1 + x_2 \ge 6, \\ -x_1 + 3x_2 \ge 4, \\ 2x_1 - x_2 \le 6, \\ 3x_1 - 4x_2 \le 0, \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}.$$

3.

$$x_1 - x_2 \to \min,$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 6, \\ x_1 - x_2 \ge 0, \\ -x_1 + x_2 \ge -3, \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}.$$

4.

$$2x_1 + 0.5x_2 \to \max,$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 6 \\ -x_1 + x_2 \le 1 \\ x_1 \ge 1 \\ x_1 + 2x_2 \ge 6 \\ -x_1 + 0.5x_2 \ge -4 \\ x_2 \ge 1 \end{cases}$$

5.

$$3x_1 + 5x_2 \to \min,$$

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \ge 36, \\ 3x_1 + 5x_2 \ge 45, \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}.$$

6.

$$x_1 - x_2 \to \min,$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 6, \\ x_1 - x_2 \ge 0, \\ -x_1 + x_2 \ge -3, \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

7.

$$3x_1 + 5x_2 \to \min,$$
$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \geq 36, \\ 3x_1 + 5x_2 \geq 45, \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

8.

$$-3x_1 - 2x_2 \to \min,$$
$$\begin{cases} 5x_1 + x_2 \geq 6, \\ -x_1 + 3x_2 \geq 4, \\ 2x_1 - x_2 \leq 6, \\ 3x_1 - 4x_2 \leq 0, \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

9.

$$x_1 - x_2 \to \min,$$
$$\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 6, \\ x_1 - x_2 \geq 0, \\ -x_1 + x_2 \geq -3, \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

10.

$$x_1 - x_2 \to \min,$$
$$\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 6, \\ x_1 - x_2 \geq 0, \\ -x_1 + x_2 \geq -3, \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

11.

$$x_1 - x_2 \to \min,$$
$$\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 6, \\ x_1 - x_2 \geq 0, \\ -x_1 + x_2 \geq -3, \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

12.

$$4x_1 + 2x_2 \to max$$
$$2x_1 + 3x_2 \leq 18$$
$$-x_1 + 3x_2 \leq 9$$
$$2x_1 - x_2 \leq 10$$
$$x_1 \geq 0; x_2 \geq 0.$$

13.

$$2x_1 + 4x_2 \to max$$
$$3x_1 + 2x_2 \leq 11$$
$$-2x_1 + x_2 \leq 2$$
$$x_1 - 3x_2 \leq 0$$
$$x_1 \geq 0; x_2 \geq 0.$$

14.

$$x_1 - 2x_2 \to min$$
$$x_1 - x_2 \leq 1$$
$$x_1 + x_2 \geq 2$$
$$x_1 - 2x_2 \leq 0$$
$$x_1 \geq 0; x_2 \geq 0.$$

15.

$$x_1 + x_2 \to max(min)$$
$$2x_1 + 4x_2 \leq 16$$
$$-4x_1 + 2x_2 \leq 8$$
$$x_1 + 3x_2 \geq 9$$
$$x_1 \geq 0; x_2 \geq 0.$$

16.

$$2x_1 + 4x_2 \to max$$
$$-x_1 + x_2 \leq 3$$
$$x_1 + 2x_2 \leq 12$$
$$x_1 \geq 0; x_2 \geq 0.$$

17.

$$x_1 + 3x_2 \to max$$
$$x_1 - x_2 \leq 1$$
$$2x_1 + x_2 \leq 2$$
$$x_1 - x_2 \geq 0$$
$$x_1 \geq 0; x_2 \geq 0.$$

18.

$$x_1 + x_2 \to max$$
$$x_1 + 2x_2 \leq 10$$
$$x_1 + 2x_2 \geq 2$$
$$2x_1 + x_2 \leq 10$$
$$x_1 \geq 0; x_2 \geq 0.$$

19.

$$x_1 + x_2 \to max$$
$$x_1 + 2x_2 \leq 14$$
$$-5x_1 + 3x_2 \leq 15$$
$$4x_1 + 6x_2 \geq 24$$
$$x_1 \geq 0; x_2 \geq 0.$$

20.

$$2x_1 + 3x_2 \to max$$
$$2x_1 + x_2 \leq 10$$
$$-2x_1 + 3x_2 \leq 6$$
$$2x_1 + 4x_2 \geq 8$$
$$x_1 \geq 0; x_2 \geq 0.$$

21.

$$z = 3x_1 - 4x_2 \to \max,$$
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \leq 4, \\ x_1 + x_2 \leq 3, \\ 2x_1 + x_2 \leq 8, \end{cases}$$
$$x_i \geq 0; i = 1, 2.$$

22.

$$z = x_1 - 3x_2 \to \max,$$
$$\begin{cases} -2x_1 + 3x_2 \leq 6, \\ x_1 + 3x_2 \leq 15, \\ 3x_1 - x_2 \leq 15, \end{cases}$$
$$x_i \geq 0; i = 1, 2.$$

23.

$$x_1 + 2x_2 \to max$$
$$4x_1 - 2x_2 \leq 12$$
$$-x_1 + 3x_2 \leq 6$$
$$2x_1 + 4x_2 \geq 16$$
$$x_1 \geq 0; x_2 \geq 0.$$

24.

$$z = x_1 - x_2 \to \max,$$
$$\begin{cases} -2x_1 + 3x_2 \leq 9, \\ x_1 - 2x_2 \leq 2, \\ x_1 + x_2 \leq 8, \end{cases}$$
$$x_i \geq 0; i = 1, 2.$$

25.

$$z = 4x_1 - 2x_2 \to \max,$$
$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \leq 18, \\ -x_1 + 3x_2 \leq 9, \\ 2x_1 - x_2 \leq 10, \end{cases}$$
$$x_i \geq 0; i = 1, 2.$$

Контрольные вопросы

1. Каковы основные этапы решения задач ЛП графическим методом?
2. Что называется областью допустимых решений?
3. Как определить максимальное и минимальное значения линейной целевой функции в области допустимых решений?
4. Какие случаи возможны при решении задачи ЛП графическим методом?
5. В каких случаях задачу линейного программирования можно решить графическим методом?

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА 2

Решение задачи линейного программирования с помощью симплекс-метода

Цель работы. Приобретение навыков решения задач линейного программирования симплекс-методом с использованием электронных таблиц.

Теоретический материал.

MS Excel содержит модуль «Поиск решения» позволяющий осуществлять поиск оптимальных решений, в том числе решение задач линейного, целочисленного, нелинейного и стохастического программирования.

Постановка задачи осуществляется посредством задания ячеек для переменных и записи формул с использованием этих ячеек для целевой функции и системы ограничений.

В Excel математическая модель может быть представлена, в лучшем случае, в виде таблицы чисел. Размещение данных в Excel оформляется в свободном порядке, формы ввода не предусмотрены.

Пример. Фабрика «ЗAR» выпускает два вида каш для завтрака – «Crunchy» и «Chewy». Используемые для производства обоих продуктов ингредиенты в основном одинаковы и, как правило, не являются дефицитными. Основным ограничением, накладываемым на объем выпуска, является нали-

чие фонда рабочего времени в каждом из трех цехов фабрики. Управляющему производством необходимо разработать план производства на месяц. В таблице указаны общий фонд рабочего времени и число человеко-часов, требуемое для производства 1 т продукта.

Цех	Необходимый фонд рабочего времени чел.-ч/т		Общий фонд рабочего времени чел.-ч. в месяц
	“Crunchy”	“Chewy”	
А. Производство	10	4	1000
В. Добавка приправ	3	2	360
С. Упаковка	2	5	600

Доход от производства 1 т «Crunchy» составляет 150 руб., а от производства «Chewy» – 75 руб. На настоящий момент нет никаких ограничений на возможные объемы продаж. Имеется возможность продать всю произведенную продукцию.

Требуется сформулировать модель линейного программирования, максимизирующую общий доход фабрики за месяц, и реализовать решение этой задачи с помощью MS Excel.

Решение. Составим математическую модель задачи. Обозначим за x_1 – объем производства каши «Crunchy» , x_2 – объем производства каши «Chewy».

Математическая постановка задачи имеет вид:

Целевая функция

$$Z = 150x_1 + 75x_2 \to \max$$

используемые ограничения

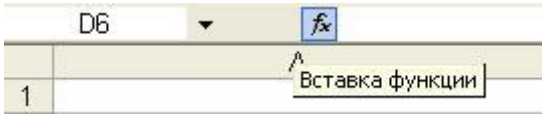
$$\begin{cases} 10x_1 + 4x_2 \le 1000 \\ 3x_1 + 2x_2 \le 360 \\ 2x_1 + 5x_2 \le 600 \\ x_1 \ge 0 \\ x_2 \ge 0 \end{cases}$$

Вводим исходные данные.

	A	B	C	D
1		ПЕРЕМЕННЫЕ		
2				
3		X1	X2	
4	Значение			
5	Ограничение снизу	0	0	Значение целевой функции
6	Целевая функия	150	75	
7				
8		ОГРАНИЧЕНИЯ		
9				
10		*Необходимый фонд рабочего времени*		*Общий фонд рабочего времени*
11		*чел.-ч/т*		*чел.-ч. в месяц*
12	*Цех*	*"Crunchy"*	*"Chewy"*	
13	А. Производство	10	4	1000
14	В. Добавка приправ	3	2	360
15	С. упаковка	2	5	600
16				
17		лев. часть	знак	правая часть
18			<=	1000
19			<=	360
20			<=	600

Вводим зависимости из математической постановки задачи в экранную форму. Для ввода зависимостей определяющих выражение для целевой функции и ограничений используется функция MS Excel СУММПРОИЗВ, которая вычисляет сумму попарных произведений двух или более массивов.

Одним из самых простых способов определения функций в MS Excel является использование режима "Вставка функций", который можно вызвать из меню "Вставка" или при нажатии кнопки "f_x" на стандартной панели инструментов.



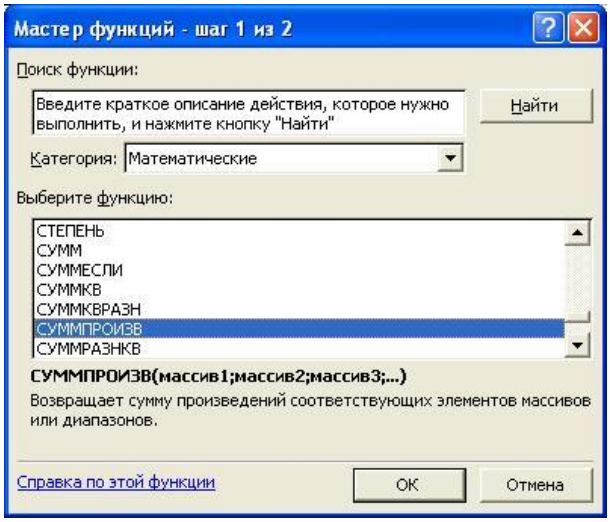
Так, например, выражение для целевой функции из задачи определяется следующим образом:

поместите курсор в поле D6;

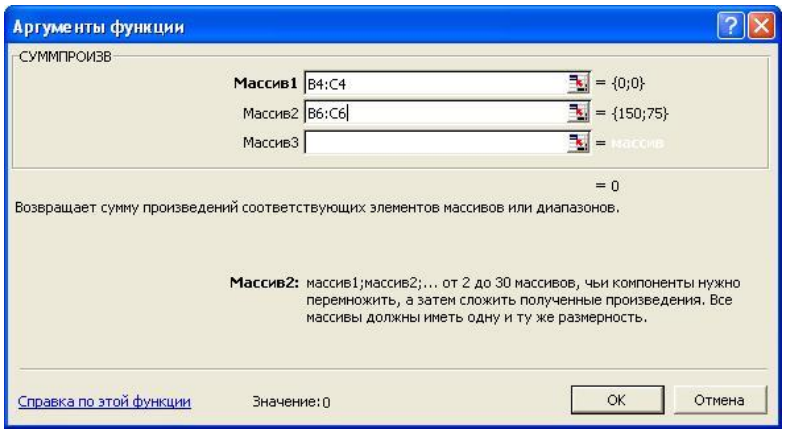
нажмите кнопку "f_x", вызовите окно "Мастер функций – шаг 1 из 2;

выберите в окне "Категория" категорию "Математические";

в окне "Функция" выберите функцию СУММПРОИЗВ;



в появившемся окне "СУММПРОИЗВ" в строку "Массив 1" введите выражение B$4:C$4, а в строку "Массив 2" – выражение B6:C6;



Левые части ограничений задачи представляют собой сумму произведений каждой из ячеек, отведенных для значений переменных задачи (B3, C3), на соответствующую ячейку, отведенную для коэффициентов конкретного ограничения (B13, C13 – 1-е ограничение; B14, C14 – 2-е ограничение и B15, C15 – 3-е ограничение). Формулы, соответствующие левым частям ограничений, представлены в таблице.

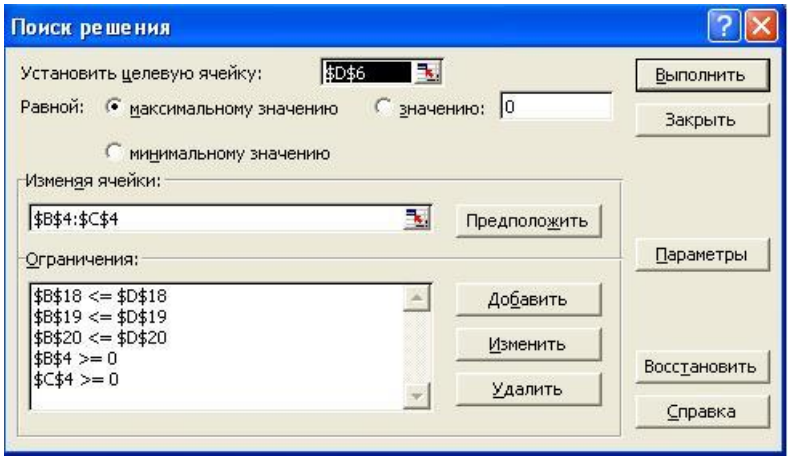
Левая часть ограничения	Формула Excel
$10x_1 + 4x_2$ или $B3 \times B13 + C3 \times C13$	=СУММПРОИЗВ(B4:C4;B13:C13))
$3x_1 + 2x_2$ или $B3 \times B14 + C3 \times C14$	=СУММПРОИЗВ(B4:C4;B14:C14))
$2x_1 + 5x_2$ или $B3 \times B15 + C3 \times C15$	=СУММПРОИЗВ(B4:C4;B15:C15)

Задаем целевую функцию. В окне «Поиск решения», которое вызывается из меню «Сервис»:

поставьте курсор в поле "Установить целевую ячейку";

введите адрес целевой ячейки $D$6 или сделайте одно нажатие левой клавиши мыши на целевую ячейку в экранной форме — это будет равносильно вводу адреса с клавиатуры;

введите направление оптимизации целевой функции, щелкнув один раз левой клавишей мыши по селекторной кнопке "максимальному значению".



Вводим ограничения и граничные условия.

В окно "Поиск решения" в поле "Изменяя ячейки" впишите адреса $B$4:$C$4.

Задаем граничные условия для допустимых значений переменных

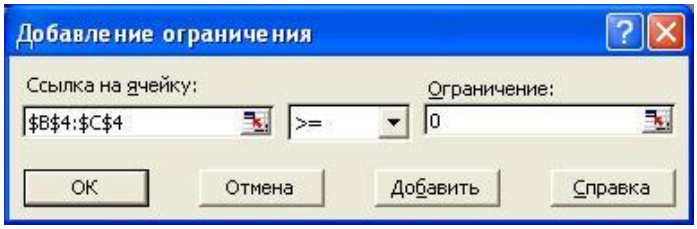
В нашем случае на значения переменных накладывается только граничное условие неотрицательности, то есть их нижняя граница должна быть равна нулю:

нажмите кнопку "Добавить", после чего появится окно «Добавление ограничения»;

в поле "Ссылка на ячейку" введите адреса ячеек переменных $B$4:$C$4. Это можно сделать как с клавиатуры, так и путем выделения мышью всех ячеек переменных непосредственно в экранной форме:

в поле знака откройте список предлагаемых знаков и выберите $\geq$;

в поле "Ограничение" введите 0;



Задание знаков ограничений $\leq$, $\geq$, =:

нажмите кнопку "Добавить" в окне "Добавление ограничения";

в поле "Ссылка на ячейку" введите адрес ячейки левой части конкретного ограничения, например $B$18. Это можно сделать как с клавиатуры, так и путем выделения мышью нужной ячейки непосредственно в экранной форме;

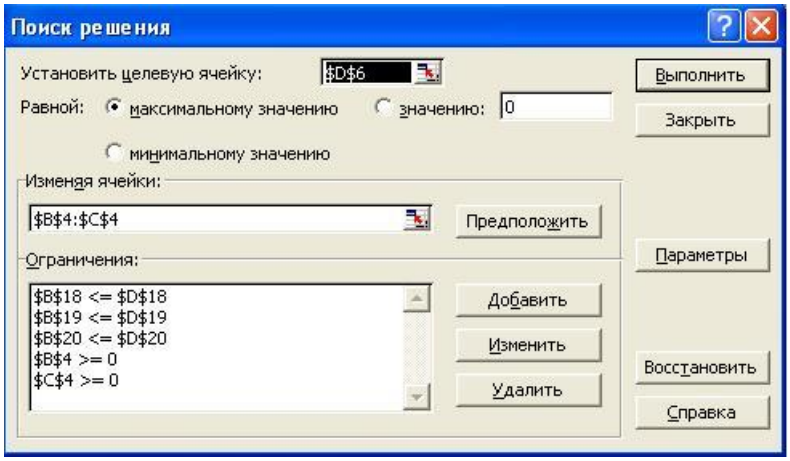
в соответствии с условием задачи (1) выбрать в поле знака необходимый знак, например, $\leq$;

в поле "Ограничение" введите адрес ячейки правой части рассматриваемого ограничения, например $D$18;

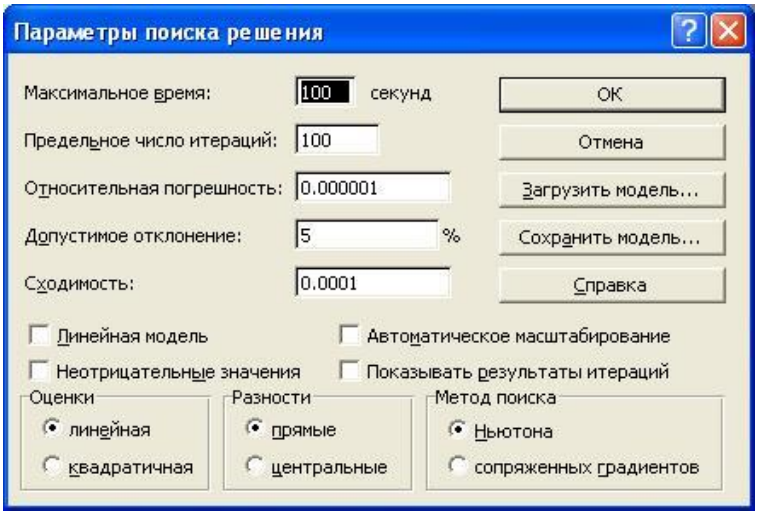
аналогично введите ограничения: $B$19<=$D$19, $B$20<=$D$20;

подтвердите ввод всех перечисленных выше условий нажатием кнопки OK.

Окно "Поиск решения" после ввода всех необходимых данных задачи представлено на рисунке.



Установим параметры решения задачи. Задача запускается на решение в окне «Поиск решения». Но предварительно для установления конкретных параметров решения задачи оптимизации определенного класса, необходимо нажать кнопку «Параметры» и заполнить некоторые поля окна «Параметры поиска решения».



Параметр "Максимальное время" служит для назначения времени (в секундах), выделяемого на решение задачи. В поле можно ввести время, не превышающее 32 767 секунд (более 9 часов).

Параметр "Предельное число итераций" служит для управления временем решения задачи путем ограничения числа промежуточных вычислений. В поле можно ввести количество итераций, не превышающее 32 767.

Параметр "Относительная погрешность" служит для задания точности, с которой определяется соответствие ячейки целевому значению или приближение к указанным границам. Поле должно содержать число из интервала от 0 до 1. Чем меньше количество десятичных знаков во введенном числе, тем ниже точность. Высокая точность увеличит время, которое требуется для того, чтобы сошелся процесс оптимизации.

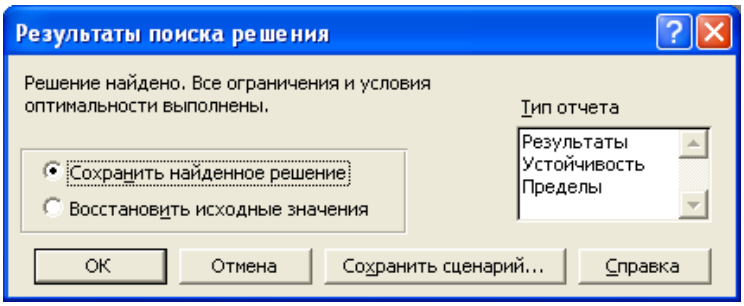
Параметр "Допустимое отклонение" служит для задания допуска на отклонение от оптимального решения в целочисленных задачах. При указании большего допуска поиск решения заканчивается быстрее.

Параметр "Сходимость" применяется только при решении нелинейных задач. Установка флажка "Линейная модель" обеспечивает ускорение поиска решения линейной задачи за счет применение симплекс-метода.

Подтвердите установленные параметры нажатием кнопки "ОК".

Запускаем задачу на решение. Запуск задачи на решение производится из окна "Поиск решения" путем нажатия кнопки "Выполнить".

После запуска на решение задачи ЛП на экране появляется окно "Результаты поиска решения" с сообщением об успешном решении задачи.



В окне "Результаты поиска решения" представлены названия трех типов отчетов: "Результаты", "Устойчивость", "Пределы". Для получения ответа (значений переменных, целевой функции и левых частей ограничений) прямо в экранной форме просто нажмите кнопку "OK". После этого в экранной форме появляется оптимальное решение задачи.

	A	B	C	D	E
1		ПЕРЕМЕННЫЕ			
2					
3		X1	X2		
4	Значение	70	75		
5	Ограничение снизу	0	0	Значение целевой функции	
6	Целевая функия	150	75	16125	
7					
8		ОГРАНИЧЕНИЯ			
9					
10		*Необходимый фонд рабочего времени*		*Общий фонд рабочего времени*	
11		*чел.-ч/т*		*чел.-ч. в месяц*	
12	*Цех*	*"Crunchy"*	*"Chewy"*		
13	А. Производство	10	4	1000	
14	В. Добавка приправ	3	2	360	
15	С. упаковка	2	5	600	
16					
17		лев. часть	знак	правая часть	
18		1000	<=	1000	
19		360	<=	360	
20		515	<=	600	

Задания для лабораторного занятия:

Решить задачу определения оптимального ассортимента продукции. Вычислить, какое количество продукции каждого вида должно производить предприятие, чтобы доход от реализации продукции был максимальным. Вычислить значение максимального дохода. Согласно номеру своего варианта выберите условие задачи и найдите оптимальное решение задачи. Найдите оптимальное решение задачи с использованием электронной таблицы.

Варианты 1-15. Компания изготавливает два вида продукции – $П_1$ и $П_2$. Для производства продукции используются два вида сырья – $М_1$ и $М_2$. Оптовые цены единицы продукции равны: *a* для $П_1$ и *b* для $П_2$. Расход сырья на единицу продукции вида $П_1$ и вида $П_2$ дан в таблице.

Сырье	Расход сырья на 1 ед. продукции		Максимальный запас сырья, ед.
	$П_1$	$П_2$	
$М_1$	*c*	*d*	*e*
$М_2$	*g*	*h*	*i*

Установлены ограничения на спрос продукции: ежедневный объем производства продукции $П_2$ не должен превышать ежедневный объем производства продукции $П_1$ более чем на *j* тонн; максимальный ежедневный объем производства $П_2$ не должен превышать *k* т. Требуется определить, какое количество продукции каждого вида должно производить предприятие, чтобы доход от реализации продукции был максимальным.

Математическую модель задачи можно записать в виде:

целевая функция имеет вид: $f = ax_1 + bx_2 \to \max$

ограничения

$$cx_1 + dx_2 \le c$$
$$gx_1 + hx_2 \le i$$
$$x_2 - x_1 \le j$$
$$x_2 \le k$$
$$x_1, x_2 \ge 0$$

Значения коэффициентов приведены в таблице.

Вариант	a	b	c	d	e	g	h	i	j	k
1	2	3	1	2	12	4	6	25	4	2
2	4	6	3	1	18	8	4	32	2	4
3	5	3	2	3	16	6	4	28	4	6
4	1	4	3	6	20	4	2	24	3	2
5	3	1	5	3	27	2	5	34	4	3
6	4	2	3	5	28	3	6	28	2	1
7	3	2	2	3	24	2	7	26	2	2
8	5	4	3	2	22	3	4	30	3	2
9	2	4	3	5	20	4	3	26	1	2
10	3	5	3	3	24	4	6	28	2	1
11	4	5	3	6	22	3	5	34	2	1
12	5	4	6	3	26	4	6	26	2	2
13	4	5	3	2	28	4	5	24	3	1
14	5	3	5	4	27	3	6	22	2	2
15	5	6	4	6	25	4	7	30	3	2

Варианты 16-25. Имеется два вида корма I и II, содержащие питательные вещества S_1, S_2 и S_3. Содержание числа единиц питательных веществ в 1 кг каждого вида корма, стоимость 1 кг каждого вида корма и необходимый минимум питательных веществ приведены в таблице.

Питательное вещество (витамин)	Число единиц питательных веществ в 1 кг корма		Необходимый минимум питательных веществ
	I	II	
S_1	a	b	c
S_2	d	e	g
S_3	h	i	j
Стоимость 1 кг корма	k	l	

Необходимо составить дневной рацион, имеющий минимальную стоимость, в котором содержание каждого вида питательных веществ было бы не менее установленного предела.

Математическую модель задачи можно записать в виде:

целевая функция имеет вид: $f = kx_1 + lx_2 \to \min$

ограничения

$$ax_1 + bx_2 \le c$$
$$dx_1 + ex_2 \le g$$
$$hx_1 + ix_2 \le j$$
$$x_1, x_2 \ge 0$$

Значения коэффициентов приведены в таблице.

Вариант	a	b	c	d	e	g	h	i	j	k	l
16	3	1	9	1	2	8	1	6	12	4	6
17	2	1	8	2	3	10	2	4	10	3	5
18	4	2	10	3	5	12	3	7	12	2	6
19	5	3	13	4	6	16	5	9	15	5	6
20	2	1	11	2	4	9	3	6	12	4	7
21	3	1	9	3	7	15	3	5	16	3	8
22	5	3	13	1	2	8	1	6	12	4	6
23	2	1	8	2	3	16	5	9	15	5	6
24	5	3	13	1	2	8	2	4	12	4	6
25	3	1	9	3	7	15	3	5	10	3	5

Контрольные вопросы

1. Что такое симплекс-таблица?

2. Какая команда в MS Excel позволяет решать задачи линейного программирования?

3. Что понимается под оптимальным решением?

4. Что такое целевая функция?

5. При каких условиях математическую модель можно назвать линейной?

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 3

Решение задачи линейного программирования: транспортная задача

Цель работы. Приобретение навыков построения математических моделей стандартных транспортных задач линейного программирования и решения их в Microsoft Excel.

Теоретический материал.

Транспортная задача – это распределительная задача, в которой работы и ресурсы измеряются в одних и тех же единицах. В таких задачах ресурсы могут быть разделены между работами, и отдельные работы могут быть выполнены с помощью различных комбинаций ресурсов.

Примером типичной транспортной задачи является распределение (транспортировка) продукции, находящейся на складах, по предприятиям-потребителям.

Стандартная ТЗ определяется как задача разработки наиболее экономичного плана перевозки продукции *одного вида* из нескольких пунктов отправления в пункты назначения. При этом величина транспортных расходов прямо пропорциональна объему перевозимой продукции и задается с помощью тарифов на перевозку *единицы продукции*.

Пример. Рассмотрим решение транспортной задачи, суть которой заключается в оптимальной организации транспортных перевозок штучного товара от поставщиков потребителям, данные приведены в таблице ниже.

Исходные данные транспортной задачи

Тарифы, руб./шт.	1-й потре-битель	2-й потре-битель	3-й потре-битель	4-й потре-битель	5-й потре-битель	Запасы, шт.
1-й поставщик	1	4	2	1	6	4
2-й поставщик	4	1	3	2	3	15
3-й поставщик	6	3	1	5	2	18
Потребности, шт.	10	6	4	8	9	

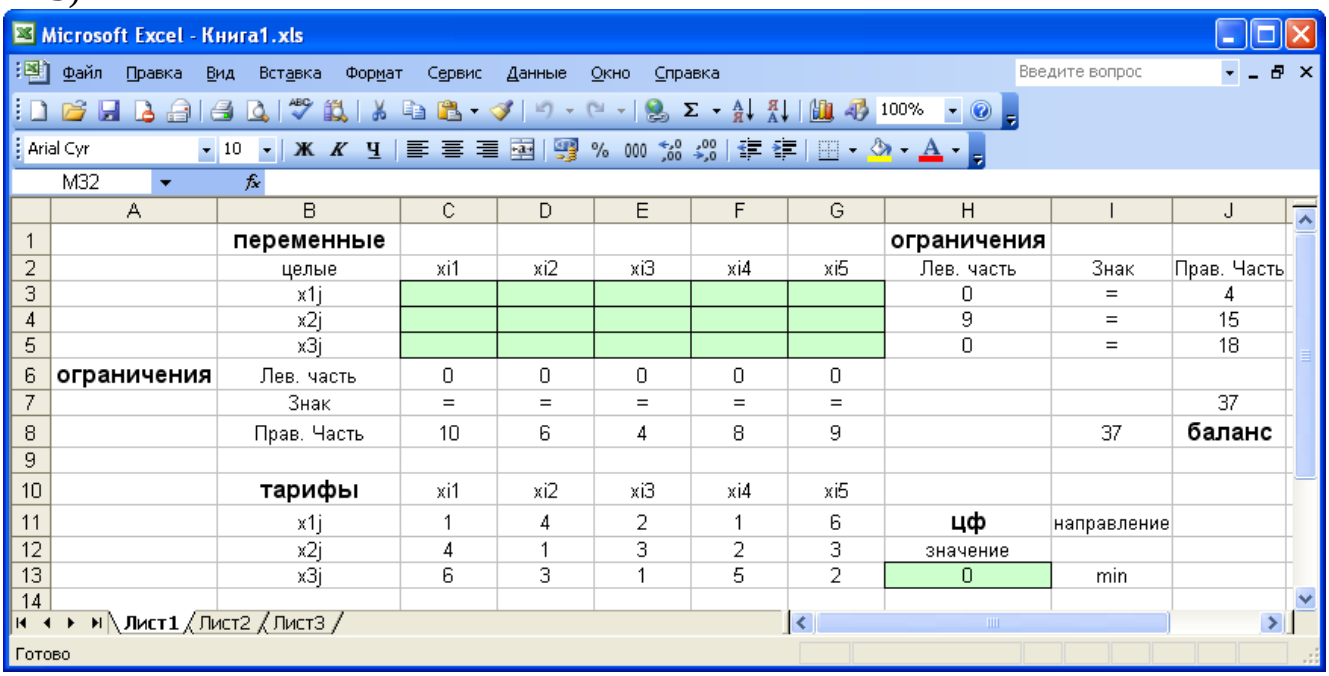
Целевая функция и ограничения данной задачи имеют вид

$$L(X) = x_{11} + 4x_{12} + 2x_{13} + x_{14} + 6x_{15} + 4x_{21} + x_{22} + 3x_{23} + 2x_{24} + 3x_{25} + 6x_{31} + \\ + 3x_{32} + x_{33} + 5x_{34} + 2x_{35} \to min;$$

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{15} = 4, \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} + x_{25} = 15, \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} + x_{35} = 18, \\ x_{11} + x_{21} + x_{31} = 10, \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} = 6, \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} = 4, \\ x_{14} + x_{24} + x_{34} = 8, \\ x_{15} + x_{25} + x_{35} = 9, \\ \forall x_{ij} \ge 0, \forall x_{ij} - \textit{целые} \left(\mathrm{i} = \overline{1,3};\ \mathrm{j} = \overline{1,5}\right). \end{cases}$$

Решение.

Экранная форма транспортной задачи (курсор в целевой ячейке Н**13**)

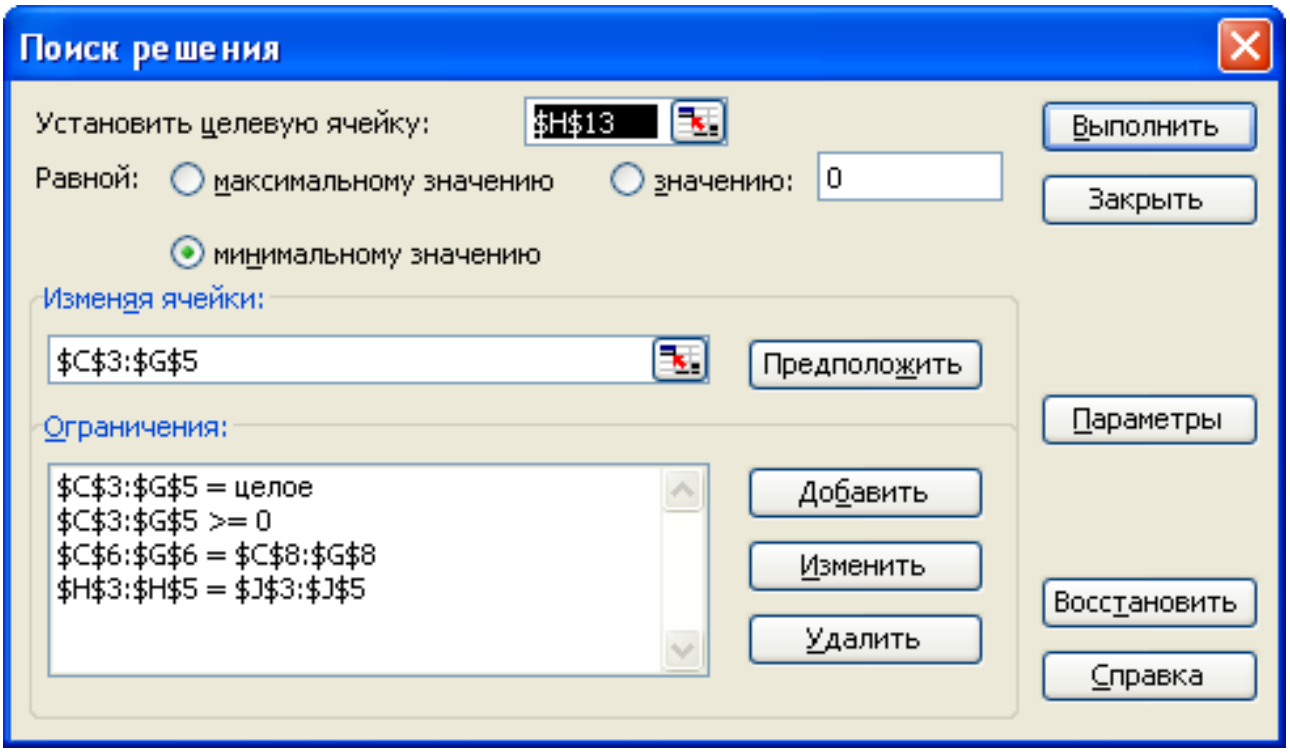


	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1		**переменные**						**ограничения**		
2		целые	xi1	xi2	xi3	xi4	xi5	Лев. часть	Знак	Прав. Часть
3		x1j						0	=	4
4		x2j						9	=	15
5		x3j						0	=	18
6	**ограничения**	Лев. часть	0	0	0	0	0			
7		Знак	=	=	=	=	=			37
8		Прав. Часть	10	6	4	8	9		37	**баланс**
9										
10		**тарифы**	xi1	xi2	xi3	xi4	xi5			
11		x1j	1	4	2	1	6	**цф**	направление	
12		x2j	4	1	3	2	3	значение		
13		x3j	6	3	1	5	2	0	min	
14										

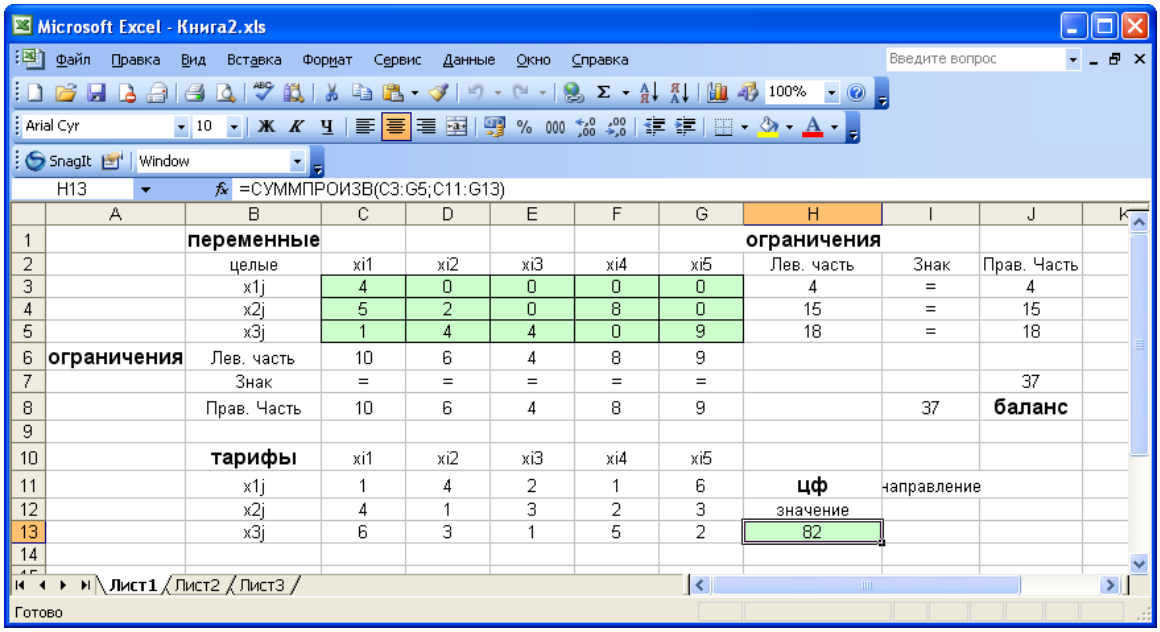
В таблице представлены формулы экранной формы транспортной задачи

Объект математической модели	Выражение в Excel
Переменные задачи	***C*3:*G*5**
Формула в целевой ячейке ***H*13**	**=СУММПРОИЗВ(*C*3: *G*5;*C*11:*G*13)**
Ограничения по строкам в ячейках ***H*3, *H*4, *H*5**	**=СУММ(*C*3: *G*3)** **=СУММ(*C*4: *G*4)** **=СУММ(*C*5: *G*5)**
Ограничения по столбцам в ячейках ***C*6, *D*6, *E*6,*F*6,*G*6**	**=СУММ(*C*3:*C*5)** **=СУММ(*D*3:*D*5)** **=СУММ(*E*3:*E*5)** **=СУММ(*F*3:*F*5)** **=СУММ(*G*3:*G*5)**
Суммарные запасы и потребности в ячейках **J7, I8**	**=СУММ(*J*3:*J*5)** **=СУММ(*C*8:*G*8)**

Ограничения и граничные условия задачи



Экранная форма после получения решения задачи (курсор в целевой ячейке ***H*13**)



Задания для лабораторного занятия:

Используя MS Excel, найти решение транспортной задачи, соответствующей заданному варианту.

Задача № 1

Пункты отправления	Пункты назначения				Запасы
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	12	15	21	11	240
A_2	14	8	15	20	190
A_3	19	16	26	19	190
Потребности	140	190	170	120	

Задача № 2

Пункты отправления	Пункты назначения				Запасы
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	15	21	14	7	350
A_2	8	15	11	9	330
A_3	16	26	12	13	270
Потребности	160	390	250	150	

Задача № 3

Пункты отправления	Пункты назначения				Запасы
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	21	14	17	11	290
A_2	15	11	21	12	240
A_3	26	12	20	13	190
Потребности	200	260	140	120	

Задача № 4

Пункты отправления	Пункты назначения				Запасы
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	12	21	9	8	450
A_2	13	15	11	15	300
A_3	19	26	12	13	400
Потребности	340	290	370	150	

Задача № 5

Пункты отправления	Пункты назначения				Запасы
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	21	9	10	14	180
A_2	15	11	13	13	230
A_3	26	12	17	21	180
Потребности	220	160	120	90	

Задача № 6

Пункты отправления	Пункты назначения				Запасы
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	9	10	16	14	340
A_2	11	13	21	11	360
A_3	12	17	20	21	280
Потребности	260	380	160	180	

Задача № 7

Пункты отправ-ления	Пункты назначения				Запасы
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	8	12	5	6	230
A_2	4	13	12	8	330
A_3	16	19	13	10	280
Потребности	190	290	120	240	

Задача № 8

Пункты отправления	Пункты назначения				Запасы
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	21	10	15	14	300
A_2	15	13	21	11	450
A_3	26	17	20	25	400
Потребности	360	420	220	150	

Задача № 9

Пункты отправления	Пункты назначения				Запасы
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	13	8	10	9	190
A_2	14	4	13	11	190
A_3	20	16	17	13	240
Потребности	100	290	110	120	

Задача № 10

Пункты отправления	Пункты назначения				Запасы
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	7	11	16	11	340
A_2	12	15	17	21	280
A_3	11	12	19	13	360
Потребности	390	280	130	180	

Задача № 11

Пункты отправления	Пункты назначения				Запасы
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	20	8	7	9	250
A_2	14	4	12	5	300
A_3	22	15	11	14	200
Потребности	290	170	140	150	

Задача № 12

Пункты отправления	Пункты назначения				Запасы
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	7	11	16	12	440
A_2	12	15	17	8	490
A_3	11	12	19	9	340
Потребности	300	410	290	270	

Задача № 13

Пункты отправления	Пункты назначения				Запасы
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	7	22	8	9	310
A_2	12	14	4	11	310
A_3	11	20	15	21	260
Потребности	230	310	160	180	

Задача № 14

Пункты отправления	Пункты назначения				Запасы
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	7	12	28	13	320
A_2	12	14	35	28	250
A_3	11	16	30	17	340
Потребности	260	190	250	210	

Задача № 15

Пункты отправления	Пункты назначения				Запасы
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	18	7	12	10	450
A_2	15	12	14	17	400
A_3	25	11	16	21	450
Потребности	270	400	330	300	

Задача № 16

Пункты отправления	Пункты назначения				Запасы
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	7	18	7	6	330
A_2	12	15	3	8	430
A_3	11	25	15	11	380
Потребности	330	320	250	240	

Задача № 17

Пункты отправления	Пункты назначения				Запасы
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	14	6	4	5	320
A_2	17	10	9	7	500
A_3	15	11	6	12	380
Потребности	**240**	**440**	**220**	**300**	

Задача № 18

Пункты отправления	Пункты назначения				Запасы
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	4	4	9	11	230
A_2	9	5	11	21	470
A_3	6	4	13	3	310
Потребности	270	290	240	210	

Задача № 19

Пункты отправления	Пункты назначения				Запасы
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	14	6	4	8	260
A_2	17	10	9	7	390
A_3	15	11	6	14	370
Потребности	240	390	270	120	

Задача № 20

Пункты отправления	Пункты назначения				Запасы
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	14	4	9	13	320
A_2	17	5	11	10	320
A_3	15	8	13	9	370
Потребности	270	270	260	210	

Задача № 21

Пункты отправления	Пункты назначения				Запасы
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	9	15	35	15	370
A_2	15	35	12	18	320
A_3	16	19	40	9	220
Потребности	350	180	170	210	

Задача № 22

Пункты отправления	Пункты назначения				Запасы
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	15	35	20	11	280
A_2	35	12	11	15	280
A_3	19	16	15	10	380
Потребности	190	290	220	240	

Задача № 23

Пункты отправления	Пункты назначения				Запасы
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	7	20	15	17	320
A_2	6	11	35	10	220
A_3	25	15	19	21	470
Потребности	250	350	200	210	

Задача № 24

Пункты отправления	Пункты назначения				Запасы
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	20	3	9	15	330
A_2	14	10	12	11	170
A_3	25	11	16	8	250
Потребности	270	160	170	150	

Задача № 25

Пункты отправления	Пункты назначения				Запасы
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	12	9	15	17	240
A_2	14	12	20	10	190
A_3	19	16	19	11	190
Потребности	140	190	170	120	

Контрольные вопросы

1. Какова постановка стандартной транспортной задачи?
2. Запишите математическую модель транспортной задачи.
3. Перечислите исходные параметры модели транспортной задачи.
4. Раскройте понятие сбалансированности транспортной задачи.
5. Что такое фиктивные тарифы?

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА 4

Линейное программирование: задача о назначении

Цель работы. Решение задачи о назначении (Венгерский алгоритм). Проверка решения с помощью электронных таблиц .

Теоретический материал.

Задача о назначениях является частным видом линейной оптимизационной задачи. Данная задача формулируется следующим образом.

Имеются n рабочих и m видов работ. Стоимость c_{ij} выполнения i-*м* рабочим j-*той* работы приведена в таблице, где под строкой понимается рабочий, а под столбцом - работа. Необходимо составить план работ так чтобы все работы были выполнены, каждый рабочий был занят только на одной работе, а суммарная стоимость выполнения всех работ была бы минимальной.

Решение задачи о назначениях очень похоже на решение транспортной задачи. Особенность лишь в том, что плановые переменные могут принимать только значения 0 или 1 и в каждом столбце и строке может быть только одно ненулевое значение. Для решения задачи о назначениях в Excel с использованием настройки **Поиск решения** следует выделить ячейки назначений и подсчитать для них суммы по столбцам и по строкам. В ячейку целевой функции следует ввести формулу вычисляющую сумму произведений стоимости работы на план назначений.

После чего следует выбрать в **Excel** пункт меню *Данные/Поиск решения*, в окне *Поиск решения* выбрать целевую ячейку, изменяемые ячейки и добавить ограничения.

Далее необходимо нажать кнопку *Выполнить*, после чего будет получено решение задачи о назначениях.

Пример.

Для монтажа четырех объектов (*n=4*) требуется четыре крана (*m=4*). Известно время монтажа i-м краном j-го объекта (i=1, 2, 3, 4, j=1, 2, 3, 4). Затраты времени на монтаж объектов приведены в таблице

Затраты времени на монтаж объектов				
Код крана	Объекты			
	I	**II**	**III**	**IV**
1	3	7	5	8
2	2	4	4	5
3	4	7	2	8
4	9	7	3	8

Необходимо распределить краны по объектам так, чтобы суммарное время монтажа всех объектов было минимальным. Каждый кран может обслуживать любой объект. На объекте работает только один кран.

Решение. Составим математическую модель для решения поставленной задачи.

С учетом исходных данных целевая функция имеет вид:.

$$F = 3x_{11} + 7x_{12} + 5x_{13} + 8x_{14} + 2x_{21} + 4x_{22} + 4x_{23} + 5x_{24} + 4x_{31} + \\ +7x_{32} + 2x_{33} + 8x_{34} + 9x_{41} + 7x_{42} + 3x_{43} + 8x_{44}$$

при условиях:

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} = 1$$
$$x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} = 1$$
$$x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} = 1$$
$$x_{41} + x_{42} + x_{43} + x_{44} = 1$$
$$x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41} = 1$$
$$x_{12} + x_{22} + x_{32} + x_{42} = 1$$
$$x_{13} + x_{23} + x_{33} + x_{43} = 1$$
$$x_{14} + x_{24} + x_{34} + x_{44} = 1$$

Задача о назначениях является сбалансированной, т.к. число объектов равно числу кранов для выполнения работ на данных объектах.

На рабочем листе создадим таблицу для ввода исходных данных. Заливкой выделены ячейки для ввода формул и вывода результата.

	A	B	C	D	E	F
1	**Затраты времени на монтаж объектов**					
2		Объекты				
3	Код крана	I	II	III	IV	
4	1					
5	2					
6	3					
7	4					
8	**Распределение работ**					
9		I	II	III	IV	Ограничения по количеству кранов на объекте
10	1					
11	2					
12	3					
13	4					
14	Ограничения по количеству объектов					
15						
16	**Суммарное время монтажа (целевая функция)**					

Заполним таблицу.

Блок ячеек B4:E7 содержит затраты времени на монтаж объектов.

Введем необходимые формулы согласно составленной модели задачи.

В ячейки F10:F13 суммарное количество кранов на объекте.

В ячейки B14:E14 суммарное количество объектов.

В ячейку B16 введем формулу для целевой функции . Для этого используем функцию =СУММПРОИЗВ().

Блок ячеек B10:E13 будет содержать оптимальный план распределения кранов по объектам. Значения этих ячеек будет вычислено в процессе решения задачи.

Ниже показана таблица для решения задачи с исходными данными и необходимыми формулами.

	A	B	C	D	E	F
1	Затраты времени на монтаж объектов					
2		Объекты				
3	Код крана	I	II	III	IV	
4	1	3	7	5	8	
5	2	2	4	4	5	
6	3	4	7	2	8	
7	4	9	7	3	8	
8	Распределение работ					
9		I	II	III	IV	Ограничения по количеству кранов на объекте
10	1					=СУММ(B10:E10)
11	2					=СУММ(B11:E11)
12	3					=СУММ(B12:E12)
13	4					=СУММ(B13:E13)
14	Ограничения по количеству объектов	=СУММ(B10:B13)	=СУММ(C10:C13)	=СУММ(D10:D13)	=СУММ(E10:E13)	
15						
16	**Суммарное время монтажа (целевая функция)**	=СУММПРОИЗВ(B4:E7;B10:E13)				

Для решения данной задачи используем инструмент *Поиск решения*. Для этого на вкладке *Данные* в группе *Анализ* выберем команду *Поиск решения*.

На экране отобразится диалоговое окно *Параметры поиска решения*, в котором установим следующие параметры:

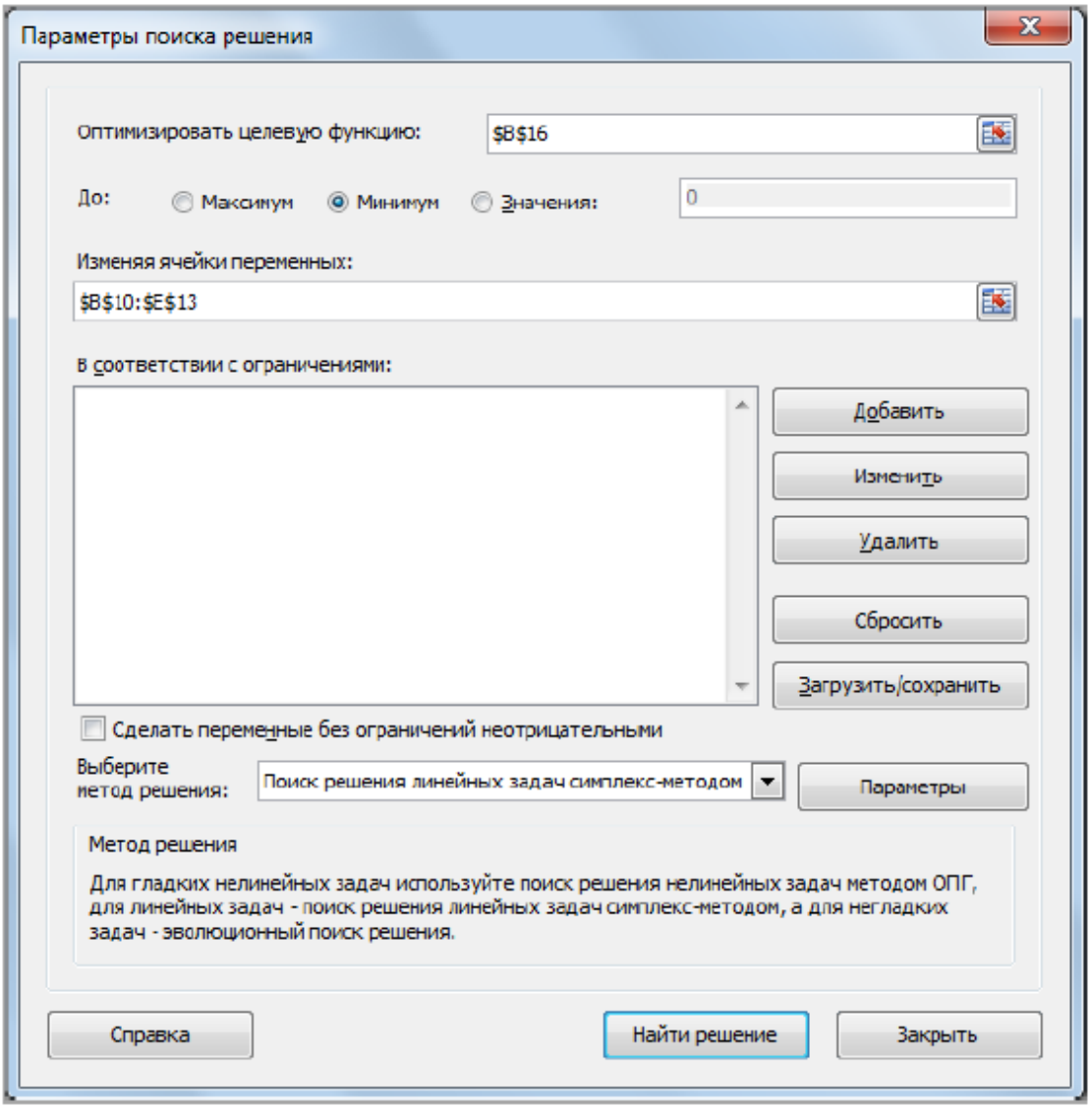
в поле *Оптимизировать целевую функцию* указываем адрес ячейки со значением целевой функции – B16;

выбираем нахождение минимума целевой функции;

в поле *Изменяя ячейки переменных* указываем адреса ячеек со значениями искомых переменных B10:E13;

в списке *Выберите метод решения* указываем *Поиск решения линейных задач симплекс-методом.*

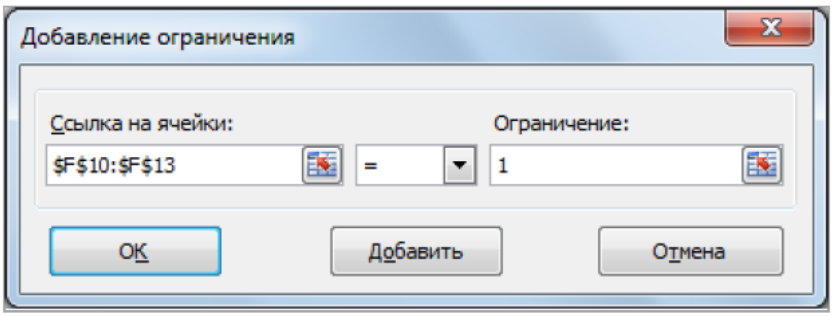
В область *В соответствии и ограничениями* введем ограничения. Для добавления ограничения необходимо выбрать кнопку *Добавить*. Отобразится окно диалога *Добавление ограничений*.



Добавляем ограничения:

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} = 1$$
$$x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} = 1$$
$$x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} = 1$$
$$x_{41} + x_{42} + x_{43} + x_{44} = 1$$

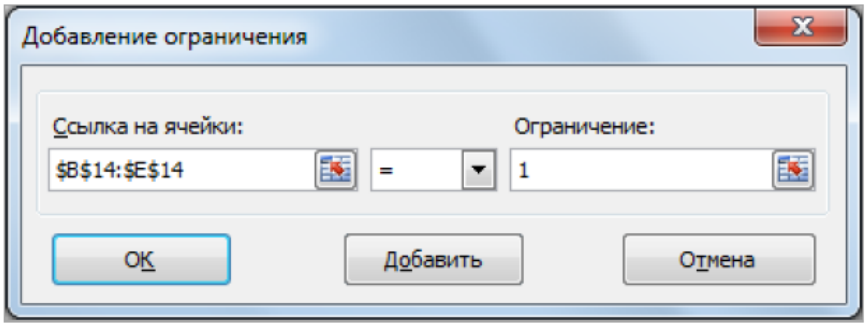
В поле *Ссылка на ячейки* указываем адрес диапазона F10:F13, выбираем в раскрывающемся списке знак равенства =, в поле *Ограничение* вводим 1, нажимаем кнопку *Добавить*. Ограничение будет добавлено в список ограничений, поля окна *Добавление ограничения* будут очищены для ввода следующего ограничения.



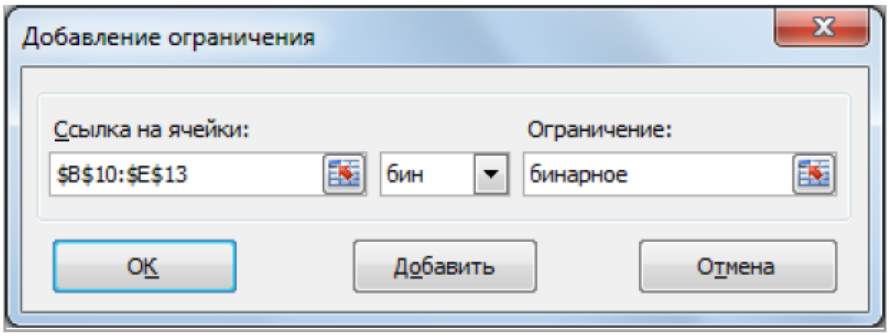
Добавляем ограничения:

$$x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41} = 1$$
$$x_{12} + x_{22} + x_{32} + x_{42} = 1$$
$$x_{13} + x_{23} + x_{33} + x_{43} = 1$$
$$x_{14} + x_{24} + x_{34} + x_{44} = 1$$

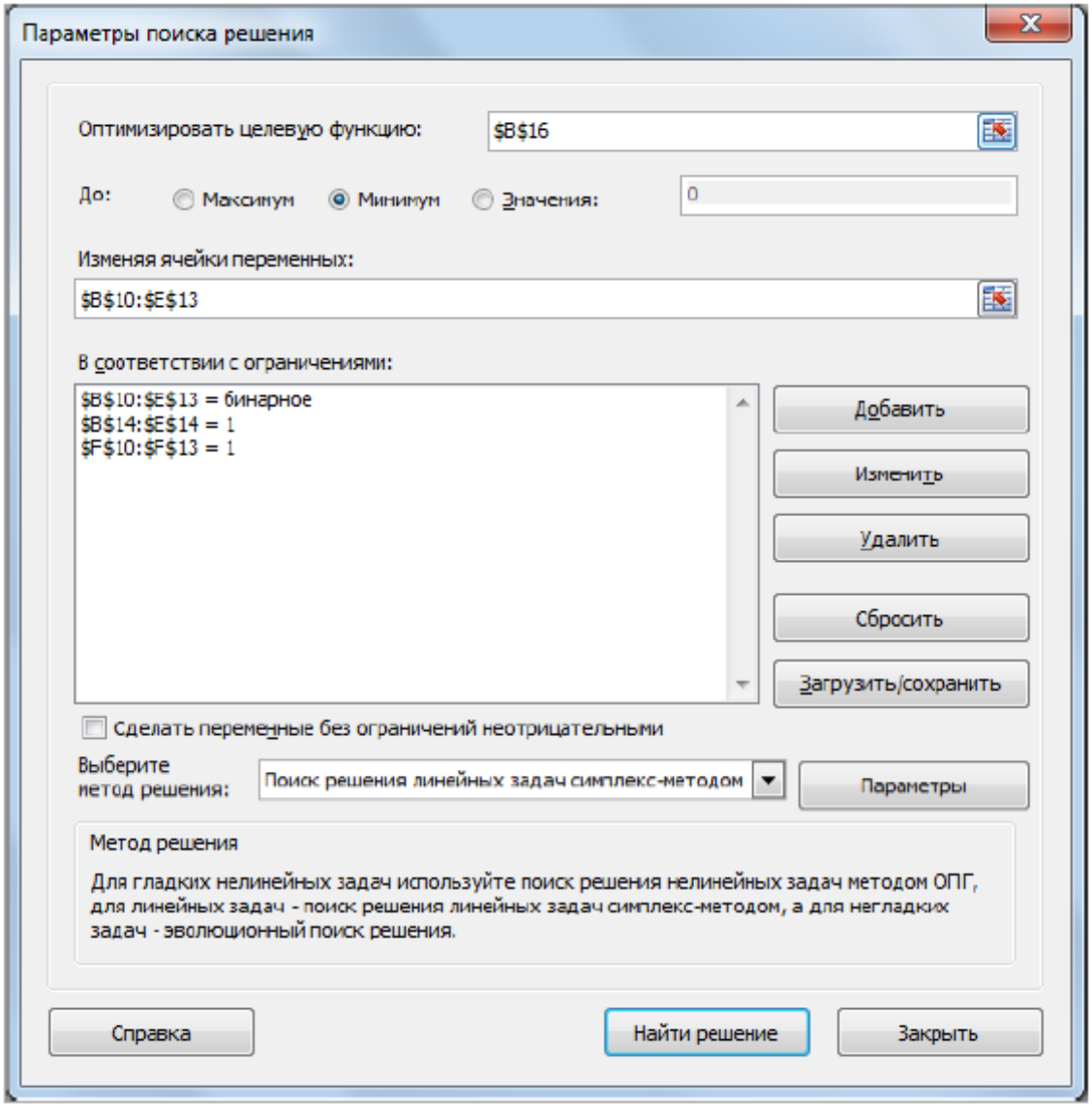
В поле *Ссылка на ячейки* указываем адрес диапазона B14:E14, выбираем в раскрывающемся списке знак равенства =, в поле *Ограничение* вводим 1, нажимаем кнопку *Добавить*. Ограничение будет добавлено в список ограничений, поля окна *Добавление ограничения* будут очищены для ввода следующего ограничения.



Добавляем ограничения на переменные x_{ij}, которые принимают значения 1 или 0. В поле *Ссылка на ячейки* указываем адрес диапазона B10:E13, выбираем в раскрывающемся списке бин, в поле *Ограничение* автоматически отобразится бинарное. Нажимаем кнопку ОК.

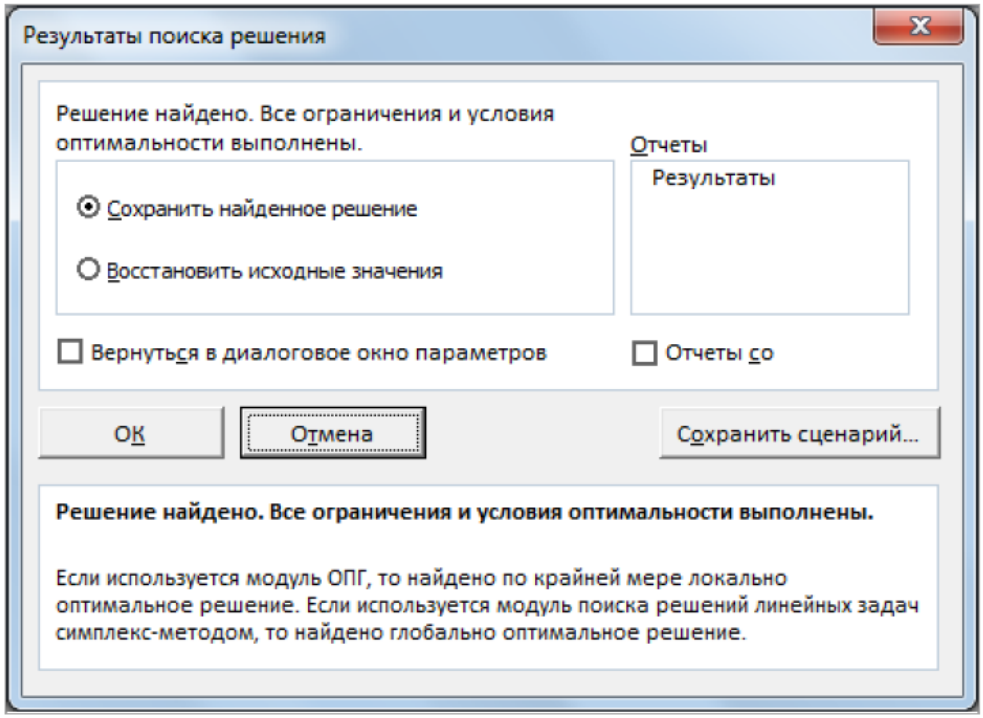


В результате будет принято последнее ограничение и возврат к диалоговому окну *Параметры поиска решения*.



После выбора кнопки *Найти решение* отобразится окно *Результаты поиска решения*.

Для сохранения полученного решения необходимо использовать переключатель *Сохранить найденное решение*. Для вывода отчета по результатам выделить в поле *Отчеты Результаты* нажать кнопку ОК.



После чего на рабочем листе отобразится решение задачи.

	A	B	C	D	E	F
1	Затраты времени на монтаж объектов					
2		Объекты				
3	Код крана	I	II	III	IV	
4	1	3	7	5	8	
5	2	2	4	4	5	
6	3	4	7	2	8	
7	4	9	7	3	8	
8	Распределение работ					
9		I	II	III	IV	Ограничения по количеству кранов на объекте
10	1	1	0	0	0	1
11	2	0	1	0	0	1
12	3	0	0	1	0	1
13	4	0	0	0	1	1
14	Ограничения по количеству объектов	1	1	1	1	
15						
16	**Суммарное время монтажа (целевая функция)**	17				

В результате решения задачи получили суммарное время монтажа всех объектов 17 ед. При этом распределение кранов по объектам следующее:

1-й кран занимается монтажом I объекта;

2-й – II объекта;

3-й – III объекта;

4-й – IV объекта.

Задания для лабораторного занятия:

Задача. В новом отделе предприятия имеется пять вакантных должностей по разным специальностям, на которые претендуют пять человек. Потенциально, каждый из претендующих может занимать любую должность. Проведено тестирование претендентов по всем специальностям. Результаты тестирования в виде баллов записаны в таблицу. Нужно отобрать на каждую должность такого претендента, чтобы общая сумма баллов для всех специалистов была максимальной. Используя MS Excel, найти решение задачи о назначении, соответствующей заданному варианту.

Варианты заданий приведены ниже в таблице с баллами тестирования

№ вар.	Претенденты	Должности					№ вар.	Потенциалы	Должности				
		1	**2**	**3**	**4**	**5**			**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
1	**1**	7	5	6	8	4	2	**1**	7	3	9	5	6
	2	3	6	5	7	5		**2**	6	7	4	8	4
	3	4	6	5	4	7		**3**	6	4	8	4	7
	4	6	5	4	6	4		**4**	5	3	8	3	8
	5	5	3	7	4	5		**5**	3	8	4	4	5

№ вар.	Претенденты	Должности					№ вар.	Потенциалы	Должности				
		1	**2**	**3**	**4**	**5**			**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
3	**1**	4	7	5	6	3	4	**1**	6	3	4	5	6
	2	6	7	3	5	8		**2**	3	6	5	6	5
	3	4	6	7	5	5		**3**	4	8	9	7	4
	4	5	9	6	7	6		**4**	4	5	7	8	7
	5	7	6	4	6	6		**5**	8	7	5	5	6
5	**1**	6	7	3	5	4	6	**1**	3	5	6	5	7
	2	3	5	4	6	7		**2**	3	7	6	5	4
	3	4	6	7	9	4		**3**	4	6	7	9	4
	4	5	4	5	8	3		**4**	4	5	4	5	8
	5	3	6	6	3	5		**5**	3	6	6	3	5
7	**1**	5	6	6	7	9	8	**1**	3	4	6	8	5
	2	7	5	6	7	4		**2**	7	6	4	6	5
	3	4	3	5	6	7		**3**	9	5	3	6	5
	4	7	8	3	5	4		**4**	5	7	7	6	3
	5	5	4	5	6	6		**5**	6	6	3	6	4
9	**1**	5	6	7	6	4	10	**1**	6	7	3	5	4
	2	7	5	7	8	9		**2**	7	3	4	5	8
	3	7	8	9	4	3		**3**	9	4	4	5	6
	4	5	5	3	4	7		**4**	5	8	3	6	4
	5	5	4	6	6	8		**5**	6	6	3	5	4

11	**1**	4	8	6	5	7	12	**1**	6	5	9	3	7
	2	5	7	5	6	3		**2**	4	8	4	7	6
	3	7	4	5	6	4		**3**	7	4	8	4	6
	4	4	6	4	5	6		**4**	8	3	8	3	5
	5	5	4	7	3	5		**5**	5	4	4	8	3
13	**1**	3	6	5	7	4	14	**1**	6	5	4	3	6
	2	8	5	3	7	6		**2**	5	6	5	6	3
	3	5	5	7	6	4		**3**	4	7	9	8	4
	4	6	7	6	9	5		**4**	7	8	7	5	4
	5	6	6	4	6	7		**5**	6	5	5	7	8
15	**1**	4	5	3	7	6	16	**1**	7	5	6	5	3
	2	7	6	4	5	3		**2**	4	5	6	7	3
	3	4	9	7	6	4		**3**	4	9	7	6	4
	4	3	8	5	4	5		**4**	8	5	4	5	4
	5	5	3	6	6	3		**5**	5	3	6	6	3

№ вар.	Претен-денты	Должности					№ вар.	Потен-циалы	Должности				
		1	**2**	**3**	**4**	**5**			**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
17	**1**	9	7	6	6	5	18	**1**	5	8	6	4	3
	2	4	7	6	5	7		**2**	5	6	4	6	7
	3	7	6	5	3	4		**3**	5	6	3	5	9
	4	4	5	3	8	7		**4**	3	6	7	7	5
	5	6	6	5	4	5		**5**	4	6	3	6	6
19	**1**	4	6	7	6	5	20	**1**	4	5	3	7	6
	2	9	8	7	5	7		**2**	8	5	4	3	7
	3	3	4	9	8	7		**3**	6	5	4	4	9
	4	7	4	3	5	5		**4**	4	6	3	8	5
	5	8	6	6	4	5		**5**	4	5	3	6	6
21	**1**	5	3	7	4	5	22	**1**	3	8	4	4	5
	2	6	5	4	6	4		**2**	5	3	8	3	8
	3	4	6	5	4	7		**3**	6	4	8	4	7
	4	3	6	5	7	5		**4**	6	7	4	8	4
	5	7	5	6	8	4		**5**	7	3	9	5	6
23	**1**	7	6	4	6	6	24	**1**	8	7	5	5	6
	2	5	9	6	7	6		**2**	4	5	7	8	7
	3	4	6	7	5	5		**3**	4	8	9	7	4
	4	6	7	3	5	8		**4**	3	6	5	6	5
	5	4	7	5	6	3		**5**	6	3	4	5	6
25	**1**	3	6	6	3	5	26	**1**	3	6	6	3	5
	2	5	4	5	8	3		**2**	4	5	4	5	8
	3	4	6	7	9	4		**3**	4	6	7	9	4
	4	3	5	4	6	7		**4**	3	7	6	5	4
	5	6	7	3	5	4		**5**	3	5	6	5	7

Контрольные вопросы

1. Какова постановка задачи о назначениях?

2. В чем отличие модели задачи о назначениях от модели транспортной задачи?

3. Каковы исходные и искомые параметры задачи о назначениях?

4. Как записать модель задачи о назначениях, подразумевающую максимизацию целевой функции?

5. В чем особенности процесса приведения задачи о назначениях к сбалансированному виду?

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА 5

Задача коммивояжера

Цель работы. Овладение практическими навыками решения задачи коммивояжера с использованием электронных таблиц.

Теоретический материал.

Имеется n городов. Выезжая из исходного города A_1, коммивояжер должен побывать во всех остальных городах по одному разу и вернуться в город A_1. Задача заключается в определении последовательности объезда городов, при которой коммивояжеру требуется минимизировать некоторый критерий эффективности — стоимость проезда, время в пути, суммарное расстояние и т.д.

Математическая модель

Пусть задана матрица $T=||t_{ij}||$, в которой задано время, затрачиваемое на переезд между городами, и требуется минимизировать время в пути.

Введем булевы переменные:

$\delta_{ij} = 1$, если коммивояжер переезжает из города A_i в город A_j, $i \neq j$;

$\delta_{ij} = 0$, в противном случае, $i, j = \overline{1,n}$.

Целевая функция имеет вид: $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} t_{ij} \cdot \delta_{ij} \to \min$. Целевая функция представляет собой суммарное время в пути. Ограничения имеют вид:

$$\sum_{j=1}^{n} \delta_{ij} = 1,\ i = \overline{1,n}, \tag{1}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \delta_{ij} = 1,\ j = \overline{1,n}, \tag{2}$$

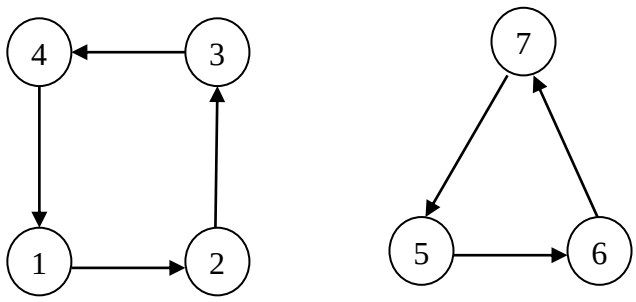
Так как нельзя непосредственно возвращаться из города i в город i, то $t_{ij} = \infty, i = j$.

Исключение подциклов длины меньшей n задается условием

$$u_i - u_j + (n-1) \cdot \delta_{ij} \le n-2,\ i, j = \overline{2,n},\ i \ne j, \tag{3}$$

где u_i — неограниченные действительные переменные.

Условия (1) означают, что коммивояжер выезжает из каждого города один раз, а условия (2) — что он въезжает один раз в каждый город. Условия (3) предназначены обеспечить связность маршрута коммивояжера. Более точно, эти условия запрещают любой цикл, не проходящий через город 1, и тем самым исключают ситуации, подобные приведенной на рисунке.



Пример. Коммивояжеру, находящемуся в Париже, необходимо посетить три города. Он получил информацию о стоимости проезда самолетом в каждый из выбранных городов и стоимость проезда из одного города в другой. На основе добытых данных он составил матрицу стоимостей (данные приведены в таблице) проезда в выбранные города и обратно. Зная матрицу стоимостей коммивояжеру надо так составить маршрут путешествия, чтобы

затраты на путешествие были бы минимальными и чтобы выполнялось требование: каждый пункт посещается только один раз.

Прибыл в / Выехал из	Париж	Берлин	Рим	Лондон
Париж	∞	270	430	160
Берлин	70	∞	160	10
Рим	200	130	∞	350
Лондон	210	160	250	∞

Вид электронной таблицы, созданной для решения задачи, представлен в таблице :

	A	B	C	D	E	F	G	H
1		Стоимости проезда						
2		Париж	Берлин	Рим	Лондон			
3	Париж	1000	270	430	160			
4	Берлин	70	1000	160	10			
5	Рим	200	130	1000	350			
6	Лондон	210	160	250	1000			
7								
8		Переменные решения						
9		Париж	Берлин	Рим	Лондон	Ограничения		
10	Париж					0		
11	Берлин					0		
12	Рим					0		
13	Лондон					0		
14	Ограничения	0	0	0	0	ЦФ	0	
15	Переменные u		u2	u3	u4			
16								
17								
18	Ограничения по дополнительным переменным u_i							
19	Имя	u2	u3	u4		n=	4	
20	u2	0	0	0		n-2=	2	
21	u3	0	0	0				
22	u4	0	0	0				

В таблице заданы стоимости проезда из города в город (блок B3:E6). Значения переменных δ_{ij} располагаются в блоке B10:E13.

Для вычислений необходимо задать размерность задачи n (количество городов) — ячейка G19.

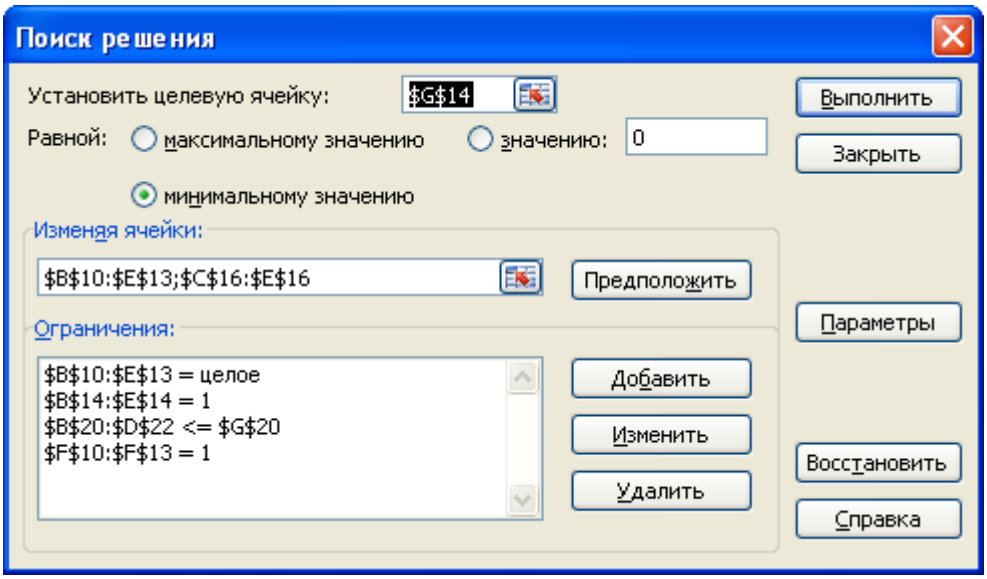
Целевая функция расположена в ячейке G14. Ограничения находятся в блоках B14:E14 (коммивояжер въезжает один раз в каждый город) и F10:F13 (коммивояжер выезжает из каждого города один раз). В задаче коммивояжера

есть ряд специфических ограничений по дополнительным переменным u_i (см. мат модель). Формулы этих ограничений находятся в блоке ячеек B20:D22. Значения самих переменных располагаются в блоке C16:E16.

Вид электронной таблицы в режиме отображения формул представлен ниже :

	A	B	C	D	E	F	G
1	Стоимости проезда						
2		Париж	Берлин	Рим	Лондон		
3	Париж	1000	270	430	160		
4	Берлин	70	1000	160	10		
5	Рим	200	130	1000	350		
6	Лондон	210	160	250	1000		
7							
8	Переменные решения						
9		Париж	Берлин	Рим	Лондон	Ограничения	
10	Париж	0	0	0	0	=СУММ(B10:E10)	
11	Берлин	0	0	0	0	=СУММ(B11:E11)	
12	Рим	0	0	0	0	=СУММ(B12:E12)	
13	Лондон	0	0	0	0	=СУММ(B13:E13)	
14	Огранич	=СУММ(B10:B13)	=СУММ(C10:C13)	=СУММ(D10:D13)	=СУММ(E10:E13)	ЦФ	=СУММПРОИЗВ(B3:E6;B10:E13)
15	еменны		u2	u3	u4		
16			0	0	0		
17							
18	Ограничения по дополнительным переменным u_i						
19	Имя	u2	u3	u4		n=	4
20	u2	=$C$16-C16+($G$19-1)*C11	=$C$16-D16+($G$19-1)*D11	=$C$16-E16+($G$19-1)*E11		n-2=	=G19-2
21	u3	=$D$16-C16+($G$19-1)*C12	=$D$16-D16+($G$19-1)*D12	=$D$16-E16+($G$19-1)*E12			
22	u4	=$E$16-C16+($G$19-1)*C13	=$E$16-D16+($G$19-1)*D13	=$E$16-E16+($G$19-1)*E13			

Далее представим запись условий задачи в окне «Поиск решения». Хотя дополнительные переменные не относятся к целевой функции, они, также как и δ_{ij}, являются изменяемыми, поэтому адреса содержащих их ячеек должны быть введены в поле Изменяя ячейки одновременно с адресами переменных целевой функции (через «;»).



По результатам поиска решения найден ответ задачи:

из Парижа коммивояжер летит в Лондон, оттуда в Рим, затем в Берлин, откуда возвращается в Париж. Общая стоимость перелета составит 610 д. е.

	A	B	C	D	E	F	G
1		Стоимости проезда					
2		Париж	Берлин	Рим	Лондон		
3	Париж	1000	270	430	160		
4	Берлин	70	1000	160	10		
5	Рим	200	130	1000	350		
6	Лондон	210	160	250	1000		
7							
8		Переменные решения					
9		Париж	Берлин	Рим	Лондон	Ограничения	
10	Париж	0	0	0	1	1	
11	Берлин	1	0	0	0	1	
12	Рим	0	1	0	0	1	
13	Лондон	0	0	1	0	1	
14	Ограничения	1	1	1	1	ЦФ	610
15	Переменные u		u2	u3	u4		
16			2	1	0		
17							
18		Ограничения по дополнительным переменным u_i					
19	Имя	u2	u3	u4		n=	4
20	u2	0	1	2		n-2=	2
21	u3	2	0	1			
22	u4	-2	2	0			

Задания для лабораторного занятия:

Задача. Зная расстояния между населенными пунктами коммивояжеру, используя MS Excel, надо так составить маршрут путешествия, чтобы каждый пункт посещался только один раз и затраты времени на путешествие были бы минимальными. Матрица расстояний представлена в виде:

Вариант 1

прибыл в / выехал из	1	2	3	4	5
1	∞	1	2	5	2
2	1	∞	5	6	4
3	6	3	∞	4	2
4	5	1	1	∞	5
5	4	3	4	2	∞

Вариант 2

прибыл в / выехал из	1	2	3	4	5
1	∞	2	4	10	4
2	1	∞	15	6	4
3	6	3	∞	14	2
4	5	21	10	∞	5
5	14	3	4	7	∞

Вариант 3

прибыл в / выехал из	1	2	3	4	5
1	∞	2	30	1	4
2	1	∞	5	6	2
3	6	12	∞	8	12
4	5	6	10	∞	7
5	14	13	14	7	∞

Вариант 4

прибыл в / выехал из	1	2	3	4	5
1	∞	2	5	2	1
2	4	∞	6	5	1
3	2	4	∞	3	6
4	1	1	5	∞	4
5	4	3	4	5	∞

Вариант 5

прибыл в / выехал из	1	2	3	4	5
1	∞	12	40	1	14
2	10	∞	15	16	7
3	6	12	∞	8	12
4	15	16	11	∞	9
5	14	13	14	7	∞

Вариант 6

прибыл в / выехал из	1	2	3	4	5
1	∞	12	23	4	14
2	9	∞	15	10	5
3	12	8	∞	6	12
4	11	9	12	∞	16
5	14	13	10	8	∞

Вариант 7

прибыл в / выехал из	1	2	3	4	5
1	∞	10	2	7	3
2	3	∞	4	2	1
3	2	12	∞	5	4
4	7	3	11	∞	6
5	14	2	8	2	∞

Вариант 8

прибыл в / выехал из	1	2	3	4	5
1	∞	1	14	9	6
2	2	∞	12	4	4
3	3	6	∞	11	1
4	5	9	21	∞	10
5	14	43	4	7	∞

Вариант 9

прибыл в / выехал из	1	2	3	4	5
1	∞	2	4	10	4
2	1	∞	15	6	4
3	6	3	∞	14	2
4	5	21	10	∞	5
5	14	3	7	3	∞

Вариант 10

прибыл в / выехал из	1	2	3	4	5
1	∞	12	5	6	11
2	5	∞	8	3	4
3	10	6	∞	2	3
4	1	2	4	∞	4
5	3	2	5	7	∞

Вариант 11

прибыл в / выехал из	1	2	3	4	5
1	∞	2	22	9	4
2	1	∞	6	2	5
3	8	11	∞	7	12
4	4	9	8	∞	6
5	9	10	14	12	∞

Вариант 12

прибыл в / выехал из	1	2	3	4	5
1	∞	20	15	2	9
2	5	∞	7	12	3
3	2	10	∞	3	6
4	11	3	5	∞	14
5	4	5	4	8	∞

Вариант 13

прибыл в / выехал из	1	2	3	4	5
1	∞	1	2	5	2
2	1	∞	5	6	4
3	6	3	∞	4	2
4	5	1	1	∞	5
5	4	3	4	2	∞

Вариант 14

прибыл в / выехал из	1	2	3	4	5
1	∞	12	5	6	11
2	5	∞	8	3	4
3	10	6	∞	2	3
4	1	2	4	∞	4
5	3	2	5	7	∞

Вариант 15

прибыл в / выехал из	1	2	3	4	5
1	∞	2	4	10	4
2	1	∞	15	6	4
3	6	3	∞	14	2
4	5	21	10	∞	5
5	14	3	7	3	∞

Вариант 16

прибыл в / выехал из	1	2	3	4	5
1	∞	11	25	3	14
2	9	∞	15	6	17
3	5	5	∞	12	10
4	11	9	16	∞	15
5	7	12	14	10	∞

Вариант 17

прибыл в / выехал из	1	2	3	4	5
1	∞	4	**9**	6	1
2	2	∞	9	2	10
3	11	11	∞	8	1
4	5	4	3	∞	8
5	1	11	1	8	∞

Вариант 18

прибыл в / выехал из	1	2	3	4	5
1	∞	7	**2**	9	7
2	5	∞	3	9	1
3	4	8	∞	5	3
4	5	6	4	∞	7
5	7	6	3	7	∞

Вариант 19

прибыл в / выехал из	1	2	3	4	5
1	∞	6	**3**	8	6
2	6	∞	2	6	5
3	3	2	∞	7	4
4	8	6	7	∞	9
5	6	5	4	9	∞

Вариант 20

прибыл в / выехал из	1	2	3	4	5
1	∞	9	**8**	4	10
2	6	∞	4	5	7
3	5	3	∞	6	2
4	1	7	2	∞	8
5	2	4	5	2	∞

Вариант 21

прибыл в / выехал из	1	2	3	4	5
1	∞	9	12	7	10
2	9	∞	7	2	4
3	2	4	∞	3	5
4	8	7	1	∞	5
5	3	4	3	5	∞

Вариант 22

прибыл в / выехал из	1	2	3	4	5
1	∞	2	**7**	8	4
2	3	∞	2	2	8
3	9	8	∞	3	3
4	6	1	1	∞	7
5	3	5	2	4	∞

Вариант 23

прибыл в / выехал из	1	2	3	4	5
1	∞	4	6	3	4
2	5	∞	2	5	4
3	9	2	∞	2	3
4	3	3	2	∞	9
5	1	7	3	2	∞

Вариант 24

прибыл в / выехал из	1	2	3	4	5
1	∞	4	**7**	9	4
2	3	∞	1	3	2
3	10	9	∞	1	7
4	4	6	1	∞	9
5	5	2	3	7	∞

Вариант 25

прибыл в / выехал из	1	2	3	4	5
1	∞	8	**3**	5	6
2	7	∞	6	4	4
3	5	2	∞	2	1
4	3	3	4	∞	7
5	4	6	2	3	∞

Контрольные вопросы

1. Сформулируйте условие задачи коммивояжера
2. Что означает «привести матрицу по строкам»?
3. Какие значения могут принимать неизвестные в задаче коммивояжера?
4. Какова геометрическая интерпретация задачи коммивояжера?
5. Что понимается под оптимальным решением задачи?

Список использованной литературы

1. Таха**, Х.** Введение в исследование операций /Х. Таха. – М. : Мир, 1985. – 901 с.

2. Гарнаев А.Ю., Рудикова Л.В. Microsoft Office Excel 2010: разработка приложений. СПб.: БХВ-Петербург, 2011.-528с.

3. И. Спира. Microsoft Excel и Word 2013. Учиться некогда не поздно. Издательство: Питер, 2014. 256с.

4. Теория принятия решений в 2 т. Том 1 : учебник и практикум для бакалавриата и магистратуры / В. Г. Халин [и др.] ; под ред. В. Г. Халина. — М. : Издательство Юрайт, 2019. — 250 с.

5. Теория принятия решений в 2 т. Том 2 : учебник и практикум для бакалавриата и магистратуры / В. Г. Халин [и др.] ; отв. ред. В. Г. Халин. — М. : Издательство Юрайт, 2019. — 431 с.

6. Бородачёв С.М. Теория принятия решений [Электронный ресурс] : учебное пособие / С.М. Бородачёв. — Электрон. текстовые данные. — Екатеринбург: Уральский федеральный университет, 2014. — 124 с.

7. Шадрина, Н. И**.** Решение задач оптимизации в Microsoft Excel 2010 : учеб. пособие / Н. И. Шадрина, Н. Д. Берман ; [науч. ред. Э. М. Вихтенко]. – Хабаровск : Изд-во Тихоокеан. гос. ун-та, 2016. – 101 с.

8. Вежелис, Т.М. Решение оптимизационных задач в среде MS Excel 2013. Методические указания для студентов, магистрантов и аспирантов всех специальностей/ Т. М. Вежелис, А.Б. Гордеев, Ю.А. Громов. – Н. Новгород: ННГАСУ, 2014.-50с.