Министерство образования и науки Российской Федерации

АМУРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Н.Н. Двоерядкина, Т.А. Юрьева

РЯДЫ:

расчетно-графическая работа

2021 г.

ББК 22.161.1 я 73
Д 24

Рекомендовано

учебно-методическим советом университета

Двоерядкина Н.Н., Юрьева Т.А.

Ряды: расчетно-графическая работа - учебно-методическое пособие. – Благовещенск: Амурский гос. ун-т, 2021. Пособие содержит задания для индивидуальной самостоятельной работы по теме «Ряды», разобранные практические задания для организации успешной внеаудиторной работы студентов по теме «Ряды».

Рассмотрен на заседании кафедры общей математики и информатики 04.03.2021, протокол № 7.

Введение

Учебно-методическое пособие содержит варианты расчетно-графической работы по теме «Ряды», предназначенные для организации индивидуальной самостоятельной работы студентов. Именно самостоятельное выполнение заданий позволит сформировать соответствующие умения по теме. Работа с пособием может быть организована как на практическом занятии, так и в качестве домашней работы.

Пособие является логически завершенным. Содержит достаточное количество вариантов. Вариант каждому студенту определяется преподавателем. При выполнении заданий своего варианта решать задачи удобнее поэтапно, в той последовательности, в какой эти задания сформулированы. В этом случае при возникновении трудностей будет легче обратиться к анализу тех тем, которые изложены в лекции и задач, разобранных на практическом занятии.

При выполнении заданий ответы должны быть аргументированными, то есть недостаточно просто привести ответ, необходимо указать путь, каким Вы пришли к данному ответу, и те основания, которыми Вы руководствовались. При этом следует обратить внимание на то, что ряд заданий предусматривает несколько последовательных шагов или операций для ответа на вопрос.

В случае затруднения с определением алгоритма, необходимого для решения конкретных задач, а также типового оформления ответа на задание, рекомендуется обратиться к образцам выполнения типичных задач, которые представлены в данном учебно-методическом пособии.

Активная, регулярная самостоятельная работа – путь к успешному усвоению раздела «Ряды» при изучении дисциплин «Математика» или «Математический анализ».

Разбор заданий типового варианта

Задание 1. Написать первые семь членов ряда по заданному общему члену ряда $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{tg\, n}{n^5+2}$

Решение: для нахождения первых нескольких членов данного в условии ряда необходимо обратить внимание на то, как меняется n. Для этого смотрим на знак: $\sum_{n=2}^{\infty}$, внизу указано, с какого n начинаются члены ряда. В данном задании определено, что n начинается с 2, а значит для того чтобы найти первых семь членов данного ряда надо в формулу общего члена подставить семь натуральных значений n начиная с n=2.

Итак, $u_1=\frac{tg\,2}{2^5+2}=\frac{tg2}{34}$, $u_2=\frac{tg\,3}{3^5+2}=\frac{tg3}{245}$, $u_3=\frac{tg\,4}{4^5+2}=\frac{tg4}{1026}$, $u_4=\frac{tg\,5}{5^5+2}=\frac{tg5}{3127}$, $u_5=\frac{tg\,6}{6^5+2}=\frac{tg6}{7778}$, $u_6=\frac{tg\,7}{7^5+2}=\frac{tg7}{16809}$, $u_7=\frac{tg\,8}{8^5+2}=\frac{tg8}{32770}$.

Если формула общего члена содержит переменную x, то значит, в условии представлен функциональный ряд. Каждый член такого ряда является функцией от переменной x.

Задание 2. Составить формулу для общего члена данного ряда $\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{2}{3\cdot 4}+\frac{3}{4\cdot 5}+\ldots$

Решение. Для того чтобы составить формулу для общего члена какого-либо ряда необходимо увидеть закономерность представленных в условии слагаемых. В данном ряде каждый член ряда представляет собой дробь, в числителе которой располагаются числа 1, 2, 3, …, т.е. натуральные числа от 1 до n. Знаменатель содержит произведение двух последовательных натуральных чисел начиная с 2, т.е. может быть представлен в виде (n+1)(n+2).

Итак, общий член данного ряда может быть представлен в виде:

$$u_n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n+1)\cdot(n+2)}.$$

Задание 3. Найти сумму ряда $1+\frac{1}{4}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{4^3}+\frac{1}{4^4}+\ldots$.

Решение:

а) $1+\frac{1}{4}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{4^3}+\frac{1}{4^4}+\ldots$ ряд представляет из себя геометрическую убывающую прогрессию с первым членом b=1 и знаменателем $q=\frac{1}{4}$. Формула суммы членов убывающей геометрической прогрессии имеет вид $S=\frac{b}{1-q}$. Подставляя выписанные значения в формулу имеем $S=\frac{1}{1-\frac{1}{4}}=1:\frac{3}{4}=\frac{4}{3}$, а значит сумма ряда $1+\frac{1}{4}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{4^3}+\frac{1}{4^4}+\ldots$ равна $S=\frac{4}{3}$.

Задание 4. Исследовать числовой ряд на сходимость а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5n-1}{4n}$, б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{2n+5}\cdot\frac{1}{2^n}$, в) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{7^n}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n$, г) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{3}{n\ln(2n-2)}$.

Решение: для исследования рядов на сходимость используем необходимый признак сходимости, который можно использовать как достаточный признак расходимости рядов и достаточные признаки сходимости числовых знакоположительных рядов (признак сравнения, признак Даламбера, признак Коши или интегральный признак).

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5n-1}{4n}$ воспользуемся необходимым признаком сходимости и найдем предел общего члена данного ряда. В случае, если предел общего члена равен нулю о поведении ряда сказать ничего нельзя, требуются дополнительные исследования. Если же предел общего члена отличен от нуля, то ряд расходится.

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{5n-1}{4n}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{5n}{n}-\frac{1}{n}}{\frac{4n}{n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{5-\frac{1}{n}}{4}=\frac{5}{4}\neq 0$, значит ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5n-1}{4n}$ расходится.

б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{2n+5}\cdot\frac{1}{2^n}$. Вычисление предела общего члена данного ряда затруднительно. Общий член ряда содержит факториал и показательное выражение, а значит, сходимость такого ряда можно исследовать с помощью признака Даламбера. Суть признака заключается в нахождении предела отношения последующего члена ряда к предыдущему. Если этот предел существует и его значение меньше 1, то ряд сходится. Если предел значение предела больше 1, то ряд расходится. В случае, когда предел равен 1 необходимо выбрать другой достаточный признак.

$$u_n=\frac{n!}{2n+5}\cdot\frac{1}{2^n}\qquad u_{n+1}=\frac{(n+1)!}{2(n+1)+5}\cdot\frac{1}{2^{n+1}}=\frac{n!\cdot(n+1)}{2n+7}\cdot\frac{1}{2^n\cdot 2}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n!(n+1)}{2n+7}\cdot\frac{1}{2^n\cdot 2}}{\frac{n!}{2n+5}\cdot\frac{1}{2^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)\cdot(2n+5)}{(2n+7)\cdot 2}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2+7n+5}{4n+14}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\infty.$$

Предел $\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}$ существует и равен ∞, что очевидно больше 1, а значит, ряд расходится.

в) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{7^n}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n$. Для исследования данного ряда на сходимость можно воспользоваться радикальным признаком Коши. Для этого признака необходимо найти предел корня n-ой степени из общего члена данного ряда. И если этот предел существует и меньше 1, то ряд сходится, а если больше 1, то расходится. В случае, когда предел корня n-ой степени из общего члена ряда равен 1 или не существует, о поведении ряда ничего сказать нельзя и следует выбрать другой признак.

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{7^n}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{7}\cdot\left(\frac{n}{n+1}\right)=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\frac{1}{7}$$

Предел $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}$ существует и равен 1/7, что явно меньше 1, а значит, ряд $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{7^n}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n$ сходится.

г) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{3}{n\ln(2n-2)}$. Иногда для исследования ряда на сходимость можно применять несколько признаков. Например, для исследования сходимости ряда $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{3}{n\ln(2n-2)}$ целесообразно использовать интегральный признак, а затем признак сравнения.

Воспользуемся интегральным признаком для ряда $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{3}{(2n-2)\ln(2n-2)}$. Согласно этому признаку ряд ведет себя так же как и несобственный интеграл от функции вида $f(x)=\frac{3}{(2x-2)\cdot\ln(2x-2)}$. Вычислим несобственный интеграл первого рода от данной функции:

$$\int\limits_{2}^{\infty}f(x)dx=\int\limits_{2}^{\infty}\frac{3dx}{(2x-2)\cdot\ln(2x-2)}=\left|\begin{matrix}\ln(2x-2)=t\\ \frac{2dx}{2x-2}=dt\end{matrix}\right|=\frac{3}{2}\int\limits_{\ln 2}^{\infty}\frac{dt}{t}=\frac{3}{2}\ln|t|\Big|_{\ln 2}^{\infty}=\frac{3}{2}\left(\ln\infty-\ln\ln 2\right)=\infty$$

Равенство ∞ несобственного интеграла первого рода означает его расходимость. Следовательно, соответствующий ряд вида $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{3}{(2n-2)\ln(2n-2)}$ тоже расходится. А теперь сравним этот ряд, поведение которого уже известно с исходным рядом $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{3}{n\ln(2n-2)}$. Воспользуемся признаком сравнения в предельной форме, т.е. найдем предел отношения общих членов данных рядов. Если этот предел существует, конечен и отличен от нуля, то ряды ведут себя одинаково (сходятся и расходятся одновременно).

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{3}{(2n-2)\cdot\ln(2n-2)}:\frac{3}{n\cdot\ln(2n-2)}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2n-2}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\frac{1}{2}$$

Предел отношения общих членов рядов конечен, а значит, ряды ведут себя одинаково. Следовательно, исходный ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{3}{n\ln(2n-2)}$ расходится.

Задание 5. Исследовать знакочередующийся ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{5}{n^2}$ на сходимость. В случае сходимости указать сходится ряд условно или абсолютно.

Решение. Признак Лейбница является необходимым и достаточным признаком сходимости знакочередующегося ряда. Для его выполнимости необходимо проверить два условия. В первом нужно убедиться, что члены ряда по абсолютной величине монотонно убывают. Согласно второму условию предел модуля общего члена при неограниченном увеличении n должен быть равен нулю. При выполнении обоих условий можно говорить о том, что знакочередующийся ряд сходится. Если хотя бы одно условие не выполняется, то ряд расходится.

Проверим выполнимость условий признака Лейбница для представленного в задании ряда:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{5}{n^2}$$

1) Запишем последовательно модули членов данного ряда:

$|u_1| = 5$; $|u_2| = \frac{5}{4}$; $|u_3| = \frac{5}{9}$; $|u_4| = \frac{5}{16}$ … члены ряда по абсолютной величине монотонно убывают.

2) Найдем предел модуля общего члена данного ряда: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{5}{n^2} = 0$

Оба условия признака Лейбница выполняются, значит, знакочередующийся ряд сходится. Проверим, как он сходится: абсолютно или условно. Для того чтобы сходящийся знакочередующийся ряд сходился абсолютно надо чтобы вместе с ним сходился и ряд составленный из модулей (знакоположительный). Если соответствующий ряд из модулей расходится, то знакочередующийся сходится условно.

Составим ряд из модулей: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{5}{n^2}$. По признаку сравнения с обобщенным гармоническим рядом (или с помощью интегрального признака) убеждаемся, что ряд из модулей сходится, следовательно, исходный ряд сходится абсолютно.

Задание 6. Вычислить сумму ряда $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(2n)!!}$ с заданной точностью α=0,005.

Решение: для того чтобы найти сумму ряда необходимо убедиться, что данный ряд сходится. Задан знакочередующийся ряд, а значит, для исследования его сходимости необходимо проверить выполнимость условий признака Лейбница.

Запишем последовательно модули членов данного ряда:

$$|u_1|=\frac{1}{(2)!!}=\frac{1}{2}\quad;\quad |u_2|=\frac{1}{(4)!!}=\frac{1}{2\cdot4};\quad |u_3|=\frac{1}{(6)!!}=\frac{1}{2\cdot4\cdot6};\quad |u_4|=\frac{1}{(8)!!}=\frac{1}{2\cdot4\cdot6\cdot8}\quad\ldots$$

члены ряда по абсолютной величине монотонно убывают.

2) Найдем предел модуля общего члена данного ряда: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{(2n)!!}=0$

Оба условия признака Лейбница выполняются, значит, знакочередующийся ряд сходится. Найдем его сумму. Для этого выполняем действия с теми членами ряда, которые больше заданной точности α=0,005.

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(2n)!!}=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2\cdot4}-\frac{1}{2\cdot4\cdot6}+\frac{1}{2\cdot4\cdot6\cdot8}-\frac{1}{2\cdot4\cdot6\cdot8\cdot10}+\ldots\approx-\frac{19}{48}$$

Выполнить действия необходимо только с первыми тремя членами, так как все члены, начиная с четвертого, становятся меньше заданной точности. Итак, сумма ряда $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(2n)!!}$ с точностью 0,005 равна $-\frac{19}{48}$.

Задание 7. Исследовать степенной ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\left(-1\right)^n\cdot\frac{2n\cdot\left(x-5\right)^n}{(n+1)\cdot3^n}$ на сходимость.

Решение: степенной ряд является функциональным рядом, который сходится как минимум в одной точке: центре сходимости ряда. Кроме того, согласно условиям теоремы Абеля, существует радиус сходимости степенного ряда. Причем радиус сходимости степенного ряда может быть равен нулю, бесконечности, числу и его можно находить по формулам Даламбера или Коши.

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \cdot \frac{2n\cdot(x-5)^n}{(n+1)\cdot 3^n}$$

Для данного ряда найдем центр сходимости: (x-5)=0, значит x=5.

Радиус сходимости определим по формуле Даламбера: $R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$.

$$a_n=(-1)^n\frac{2n}{(n+1)\cdot 3^n} \quad a_{n+1}=(-1)^{n+1}\frac{2(n+1)}{(n+2)\cdot 3^{n+1}}\ /$$

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^n\dfrac{2n}{(n+1)\cdot 3^n}}{(-1)^{n+1}\dfrac{2n+2}{(n+2)\cdot 3^n\cdot 3}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{2n\cdot(n+2)\cdot 3}{(2n+2)\cdot(n+1)}=\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2+6n}{n^2+2n+1}=3$$

Интервал сходимости данного ряда: (5-3; 5+3), т.е (2; 8).Согласно теореме Абеля внутри этого интервала ряд точно сходится. Проанализируем как ведет себя степенной ряд на концах интервала сходимости. Рассотрим каждую границу интервала. Для этого подставим значения 2 и 8 вместо x в формулу общего члена данного ряда. Имеем,

1) x=2 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{2n\cdot(2-5)^n}{(n+1)\cdot 3^n}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{2n\cdot(-3)^n}{(n+1)\cdot 3^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n}{(n+1)}$

Получившийся ряд является знакоположительным и он расходится согласно необходимому признаку сходимости знакоположительных рядов (предел общего члена при неограниченном увеличении n равен 2 отличен от нуля)

2) x=8 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{2n\cdot(8-5)^n}{(n+1)\cdot 3^n}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{2n\cdot(3)^n}{(n+1)\cdot 3^n}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2n}{(n+1)}$

Получили знакочередующийся ряд, который расходится, т.к. не удовлетворяет условиям признака Лейбница (предел модуля общего члена не равен нулю).

Итак, степенной ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{2n\cdot(x-5)^n}{(n+1)\cdot 3^n}$ сходится на интервале (2; 8).

Задание 8. Разложить функцию $f(x)=-xe^{3x}$ в ряд Тейлора по степеням x.

Решение: воспользуемся разложением в ряд Маклорена функции $f(x)=e^x$: $e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots$. (Ряд Маклорена является частным случаем ряда Тейлора).

Так как в функции, данной в условии, показатель степени у e равен 3х, то в представленном разложении меняем х на 3х, получим $e^{3x}=1+\frac{3x}{1!}+\frac{(3x)^2}{2!}+\frac{(3x)^3}{3!}+\ldots=1+\frac{3x}{1!}+\frac{9x^2}{2!}+\frac{27x^3}{3!}+\ldots$

Обращаем внимание, что в функции $f(x)$ e^{3x} умножается на –х, значит полученное разложение для e^{3x} надо умножить на –х, имеем,

$$-xe^{3x}=-x\cdot\left(1+\frac{3x}{1!}+\frac{9x^2}{2!}+\frac{27x^3}{3!}+\ldots\right)=-x-\frac{3x^2}{1!}-\frac{9x^3}{2!}-\frac{27x^4}{3!}+\ldots$$

Итак, разложение функции $f(x)=-xe^{3x}$ в ряд Тейлора по степеням х имеет вид: $f(x)=-x-\frac{3x^2}{1!}-\frac{9x^3}{2!}-\frac{27x^4}{3!}+\ldots$

Задание 9. Разложить в ряд Фурье функцию $f(x)=\begin{cases}0, -\pi\le x\le 0\\ -x,\ \ 0<x\le\pi\end{cases}$ на промежутке [-π, π].

Решение: рядом Фурье для периодической функции называется ряд:

$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$, здесь $a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nxdx$, $b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nxdx$.

Для вычисления a_n n принимают равным 0, 1, 2, 3, …; для b_n n принимают равным 1, 2, 3, 4, …

Рассчитаем коэффициенты a_n и b_n.

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos 0xdx=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}-xdx=-\frac{1}{\pi}\frac{x^2}{2}\bigg|_0^{\pi}=-\frac{1}{\pi}\cdot\frac{\pi^2}{2}=-\frac{\pi}{2}$$

$$a_1=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos xdx=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}-x\cos xdx=\frac{1}{\pi}(-x\sin x-\cos x)\Big|_0^{\pi}=\frac{2}{\pi}$$

$$a_2=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos 2xdx=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}-x\cos 2xdx=\frac{1}{\pi}\left(-\frac{2x\sin 2x+\cos 2x}{4}\right)\bigg|_0^{\pi}=0$$

$$a_3=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos 3xdx=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}-x\cos 3xdx=\frac{1}{\pi}\left(-\frac{3x\sin 3x+\cos 3x}{9}\right)\Bigg|_0^{\pi}=\frac{2}{9\pi}$$

$$a_4=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos 4xdx=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}-x\cos 4xdx=\frac{1}{\pi}\left(-\frac{4x\sin 4x+\cos 4x}{16}\right)\Bigg|_0^{\pi}=0$$

$$a_5=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos 5xdx=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}-x\cos 5xdx=\frac{1}{\pi}\left(-\frac{5x\sin 5x+\cos 5x}{25}\right)\Bigg|_0^{\pi}=\frac{2}{25\pi}$$

Замечаем закономерность: все четные a_n равны нулю (начиная со второго), все нечетные $a_n=\frac{2}{n^2\pi}$.

Вычислим коэффициенты b_n:

$$b_1=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin xdx=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}-x\sin xdx=\frac{1}{\pi}(x\cos x-\sin x)\Big|_0^{\pi}=-1$$

$$b_2=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin 2xdx=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}-x\sin 2xdx=\frac{1}{\pi}\left(-\frac{\sin 2x-2x\cos 2x}{4}\right)\Bigg|_0^{\pi}=\frac{1}{2}$$

$$b_3=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin 3xdx=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}-x\sin 3xdx=\frac{1}{\pi}\left(-\frac{\sin 3x-3x\cos 3x}{9}\right)\Bigg|_0^{\pi}=-\frac{1}{3}$$

$$b_4=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin 4xdx=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}-x\sin 4xdx=\frac{1}{\pi}\left(-\frac{\sin 4x-4x\cos 4x}{16}\right)\Bigg|_0^{\pi}=\frac{1}{4}$$

$$b_5=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin 4xdx=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}-x\sin 5xdx=\frac{1}{\pi}\left(-\frac{\sin 5x-5x\cos 5x}{25}\right)\Bigg|_0^{\pi}=-\frac{1}{5}$$

Замечаем закономерность: все четные b_n положительны, все нечетные – отрицательны, причем можно записать, что $b_n=\frac{(-1)^n}{n}$.

Итак, разложение функции $f(x)=\begin{cases}0,-\pi\le x\le 0\\ -x,\ \ 0<x\le\pi\end{cases}$ в ряд Фурье имеет вид

$$f(x)=-\frac{\pi}{2}+\left(\frac{2}{\pi}\cos x-1\cdot\sin x\right)+\left(\frac{1}{2}\cdot\sin 2x\right)+\left(\frac{2}{9\pi}\cos 3x-\frac{1}{3}\cdot\sin 3x\right)+\left(\frac{1}{4}\cdot\sin 4x\right)+$$
$$+\left(\frac{2}{25\pi}\cos 5x-\frac{1}{5}\cdot\sin 5x\right)+\ldots$$

Индивидуальные задания для студентов по теме «Ряды»

Вариант 1

Задание 1. Написать первые пять членов данного ряда, по заданному общему члену ряда.

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{n!}$

б) $\sum_{n=3}^{\infty}(-1)^n\frac{5^{2n}}{n-2}$

в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{x+1}\cos nx}{n^5+2}$

Задание 2. Составить формулу для общего члена данного ряда

а) 1–1+1–1+1–1…

б) 1+5+19+65+211+…

в) $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\ldots$

Задание 3. Найти сумму ряда, представленного в задании

а) $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}+\ldots$

б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{49n^2+7n-12}$

в) $\sum_{n=3}^{\infty}\frac{4-5n}{(n-1)(n-2)}$

Задание 4. Исследовать числовой ряд на сходимость, используя необходимый признак и один из достаточных признаков сходимости числовых знакоположительных рядов

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{n}$

б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5}{2^{n-1}+n-1}$

в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n+2)!}{3n+5}\cdot\frac{1}{2^n}$

г) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{3^n}\left(\frac{n}{n-1}\right)^n$

д) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{3}{n\ln(2n-2)}$

Задание 5. Исследовать знакочередующийся ряд на сходимость, используя признак Лейбница. В случае сходимости указать сходится ряд условно или абсолютно.

а) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\,\frac{2n-1}{n(n+1)}$

б) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\,\frac{\sin n}{n^2}$

Задание 6. Вычислить сумму ряда с заданной точностью α.

$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\,\frac{1}{n!}$, α=0,001

Задание 7. Найти радиус сходимости степенного ряда, определить область сходимости, исследовать сходимость ряда на концах интервала сходимости.

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(x-3)^n}{(n+1)\cdot 5^n}$

б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n\,n}{n^2+1}$

Задание 8. Разложить функцию в ряд Тейлора по степеням x.

а) $f(x)=\frac{\sin 3x}{x}-\cos 3x$

б) $f(x)=x^2e^{-2x}$

Задание 9. Разложить в ряд Фурье функцию на промежутке [-π, π]

а) $f(x)=\sin x$

б) $f(x)=\begin{cases}0, -\pi\le x\le 0\\ 1,\quad 0<x\le\pi\end{cases}$

Вариант 2

Задание 1. Написать первые пять членов данного ряда, по заданному общему члену ряда.

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{2n!}$

б) $\sum_{n=3}^{\infty}(-1)^n\frac{3^n}{4n+5}$

в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{x-1}\,tgnx}{n^2+2n}$

Задание 2. Составить формулу для общего члена данного ряда

а) 2–2+2–2+2–2…

б) 1+7+25+79+241+…

в) $\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{9}+\frac{1}{17}+\ldots$

Задание 3. Найти сумму ряда, представленного в задании

а) $1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^3}+\frac{1}{3^4}+\ldots$

б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3}{25n^2-5n-6}$

в) $\sum_{n=3}^{\infty}\frac{n+3}{n(n-1)(n+2)}$

Задание 4. Исследовать числовой ряд на сходимость, используя необходимый признак и один из достаточных признаков сходимости числовых знакоположительных рядов

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4n^3-1}{n^2}$

б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{5^{n-1}+n-3}$

в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{(n-1)!}\cdot\frac{1}{2^n}$

г) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{4^n}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}$

д) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{2}{n\ln(n+1)}$

Задание 5. Исследовать знакочередующийся ряд на сходимость, используя признак Лейбница. В случае сходимости указать сходится ряд условно или абсолютно.

а) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left(\frac{n-1}{2n+1}\right)^{n}$

б) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{\sin n}{n}$

Задание 6. Вычислить сумму ряда с заданной точностью α.

$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{1}{(n+1)!}$, α=0,001

Задание 7. Найти радиус сходимости степенного ряда, определить область сходимости, исследовать сходимость ряда на концах интервала сходимости.

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n-2)^3(x+3)^{2n}}{2n+3}$

б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n\, n}{n+1}$

Задание 8. Разложить функцию в ряд Тейлора по степеням x.

а) $f(x)=2x\cos^2 3x-4x$

б) $f(x)=x^2\ln(1+2x)$

Задание 9. Разложить в ряд Фурье функцию на промежутке [-π, π]

а) $f(x)=\sin 5x$

б) $f(x)=\begin{cases} 0, -\pi\le x\le 0 \\ -x, \quad 0<x\le\pi \end{cases}$

Вариант 3

Задание 1. Написать первые пять членов данного ряда, по заданному общему члену ряда.

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n-1}{n!+5}$

б) $\sum_{n=3}^{\infty}(-1)^{n-2}\frac{2^n}{n}$

в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{2x-1}\cos nx}{n+2}$

Задание 2. Составить формулу для общего члена данного ряда

а) $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{8}+\ldots$

б) –3+2+7+12+…

в) $\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}+\ldots$

Задание 3. Найти сумму ряда, представленного в задании

а) $\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 5}+\ldots$

б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{10}{48n^2+6n+15}$

в) $\sum_{n=3}^{\infty}\frac{3n+1}{(n-1)(n+5)(n-2)}$

Задание 4. Исследовать числовой ряд на сходимость, используя необходимый признак и один из достаточных признаков сходимости числовых знакоположительных рядов

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5n+1}{n}$

б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5}{n}\cdot tg\frac{1}{\sqrt{n}}$

в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+2)}{n!}\cdot\sin\frac{1}{2^n}$

г) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{5^n}\left(\frac{2n^2}{n^2-1}\right)^n$

д) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{3}{n\ln^2(2n-2)}$

Задание 5. Исследовать знакочередующийся ряд на сходимость, используя признак Лейбница. В случае сходимости указать сходится ряд условно или абсолютно.

а) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n^2}{2^n\cdot(n+1)}$

б) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(2n+1)^2}$

Задание 6. Вычислить сумму ряда с заданной точностью α.

$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2^n}{(n+1)^n}$, α=0,001

Задание 7. Найти радиус сходимости степенного ряда, определить область сходимости, исследовать сходимость ряда на концах интервала сходимости.

а) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{2n\cdot(x-5)^n}{(n+1)\cdot 3^n}$

б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n\ n}{(n+1)!}$

Задание 8. Разложить функцию в ряд Тейлора по степеням x.

а) $f(x)=\frac{\sin x}{x^2}+\frac{\cos 3x}{x}$

б) $f(x)=\frac{x^2-1}{4(x+1)}-xe^{-3x}$

Задание 9. Разложить в ряд Фурье функцию на промежутке [-π, π]

а) $f(x)=|x|$

б) $f(x)=\begin{cases}-5, -\pi\le x\le 0\\ 0,\quad 0<x\le\pi\end{cases}$

Вариант 4

Задание 1. Написать первые пять членов данного ряда, по заданному общему члену ряда.

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n-4}{(2n+1)!}$

б) $\sum\limits_{n=3}^{\infty}(-1)^{n}\,\frac{5}{\sqrt{n-2}}$

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{3x+1}\sin nx}{n^{2}+3}$

Задание 2. Составить формулу для общего члена данного ряда

а) 2+4+6+8…

б) 13+18+23+28+…

в) $1+\frac{1}{2^{3}}+\frac{1}{3^{3}}+\frac{1}{4^{3}}+\ldots$

Задание 3. Найти сумму ряда, представленного в задании

а) $1-\frac{1}{5}+\frac{1}{25}-\frac{1}{125}+\frac{1}{625}-\ldots$

б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3}{4n^{2}+12n+12}$

в) $\sum\limits_{n=4}^{\infty}\frac{4-3n}{(n-3)(n+2)n}$

Задание 4. Исследовать числовой ряд на сходимость, используя необходимый признак и один из достаточных признаков сходимости числовых знакоположительных рядов

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n^{3}+n-1}{n}$

б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{5}{n-1}arctg\,\frac{1}{\sqrt{n}}$

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^{2}}{3n+5}\cdot\frac{1}{2^{n^{2}}}$

г) $\sum_{n=2}^{\infty} n^2 \left(\frac{2n}{3n+4} \right)^n$

д) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{5}{2n\sqrt{\ln(2n-1)}}$

Задание 5. Исследовать знакочередующийся ряд на сходимость, используя признак Лейбница. В случае сходимости указать сходится ряд условно или абсолютно.

а) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n+1)2^{2n+1}}$

б) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{(2n-1)^2 (2n+1)^2}$

Задание 6. Вычислить сумму ряда с заданной точностью α.

$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\cos \pi n}{3^n (n+1)}$, α=0,001

Задание 7. Найти радиус сходимости степенного ряда, определить область сходимости, исследовать сходимость ряда на концах интервала сходимости.

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)^n (x-2)^n}{n^3 + 1}$

б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n \; n!}{4}$

Задание 8. Разложить функцию в ряд Тейлора по степеням x.

а) $f(x) = \sin^2 \frac{5x}{2} - \cos 5x$

б) $f(x) = \frac{x^3}{3} e^{-\frac{2x^2}{3}}$

Задание 9. Разложить в ряд Фурье функцию на промежутке [-π, π]

а) $f(x) = x$

б) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}\pi x - \frac{1}{4}, & -\pi \le x \le 0 \\ \pi, & 0 < x \le \pi \end{cases}$

Вариант 5

Задание 1. Написать первые пять членов данного ряда, по заданному общему члену ряда.

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!-1}{n!}$

б) $\sum_{n=3}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n^n-2}$

в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{x-1}\, ctgn(x+1)}{n^3+2^3}$

Задание 2. Составить формулу для общего члена данного ряда

а) 3+5+7+9+…

б) 9+21+69+261+…

в) $\frac{1}{\ln 2}+\frac{1}{\ln 3}+\frac{1}{\ln 4}+\ldots$

Задание 3. Найти сумму ряда, представленного в задании

а) $1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt[3]{2}}+\frac{1}{\sqrt[4]{2}}+\ldots$

б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{17}{n^2+7n+9}$

в) $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{4-12n}{(n-1)(n-2)(n+6)}$

Задание 4. Исследовать числовой ряд на сходимость, используя необходимый признак и один из достаточных признаков сходимости числовых знакоположительных рядов

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^3-1}{\sqrt[5]{n+1}}$

б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n^2+3)^2}{n^5+\ln^4 n}$

в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{3n+5} \cdot \frac{1}{3^n}$

г) $\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{2n+1}{3n-10}\right)^{n^2}$

д) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+3)\ln^2(2n+1)}$

Задание 5. Исследовать знакочередующийся ряд на сходимость, используя признак Лейбница. В случае сходимости указать сходится ряд условно или абсолютно.

а) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2n^2-1}{n(n+1)}$

б) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(2n)!!}$

Задание 6. Вычислить сумму ряда с заданной точностью α.

$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{3^n\cdot n!}$, α=0,001

Задание 7. Найти радиус сходимости степенного ряда, определить область сходимости, исследовать сходимость ряда на концах интервала сходимости.

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(x-4)^n}{n+1}\sqrt{n}$

б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-x)^{n-1}}{n+1}$

Задание 8. Разложить функцию в ряд Тейлора по степеням x.

а) $f(x)=\sin^2\frac{x}{2}-\frac{\cos x}{x}$

б) $f(x)=\frac{x^2}{4}+e^{-5x}$

Задание 9. Разложить в ряд Фурье функцию на промежутке [-π, π]

а) $f(x)=x^3-1$

б) $f(x)=\begin{cases}-1, -\pi\le x\le 0\\ x, \quad 0<x\le\pi\end{cases}$

Вариант 6

Задание 1. Написать первые пять членов данного ряда, по заданному общему члену ряда.

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n+1)!}{n!}$

б) $\sum_{n=3}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{5}{n-2}\right)^{2n}$

в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos x\cdot\cos nx}{n^5-4n+2}$

Задание 2. Составить формулу для общего члена данного ряда

а) ln1+ln3+ln5+ln7+…

б) 5+7+11+19+…

в) $\frac{1}{\cos 2}+\frac{1}{\cos 4}+\frac{1}{\cos 8}+\frac{1}{\cos 16}+\ldots$

Задание 3. Найти сумму ряда, представленного в задании

а) $\frac{1}{3}-\frac{1}{9}+\frac{1}{27}-\frac{1}{81}+\ldots$

б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5}{15n^2-10n-12}$

в) $\sum_{n=5}^{\infty}\frac{5n+6}{(n-1)(n-4)(n-2)}$

Задание 4. Исследовать числовой ряд на сходимость, используя необходимый признак и один из достаточных признаков сходимости числовых знакоположительных рядов

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n-1}}{n}$

б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3+2}{n^5+\sin 2^n}$

в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n^3+1)}{n!}\cdot\frac{1}{2^{n+1}}$

г) $\sum_{n=2}^{\infty}(n+1)^3\left(\frac{2n}{3n-1}\right)^n$

д) $\sum_{n=3}^{\infty}\frac{3}{(n-2)\sqrt{\ln(n-2)}}$

Задание 5. Исследовать знакочередующийся ряд на сходимость, используя признак Лейбница. В случае сходимости указать сходится ряд условно или абсолютно.

а) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{tg\frac{\pi}{4\sqrt{n}}}{\sqrt{5n+1}}$

б) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n}{7^n}$

Задание 6. Вычислить сумму ряда с заданной точностью α.

$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{2^n\cdot n!}$, α=0,001

Задание 7. Найти радиус сходимости степенного ряда, определить область сходимости, исследовать сходимость ряда на концах интервала сходимости.

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{(n+1)\cdot 5^n}$

б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\cdot x^n}{n^2}$

Задание 8. Разложить функцию в ряд Тейлора по степеням x.

а) $f(x)=\sin 3x-\cos^2\frac{3x}{2}$

б) $f(x)=(x+1)^2e^{-x^2+1}$

Задание 9. Разложить в ряд Фурье функцию на промежутке [-π, π]

а) $f(x)=\sin x+2$

б) $f(x)=\begin{cases}-3, -\pi\le x\le 0\\ x+1, \quad 0<x\le\pi\end{cases}$

Вариант 7

Задание 1. Написать первые пять членов данного ряда, по заданному общему члену ряда.

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n^2-n+5}{n!}$

б) $\sum_{n=4}^{\infty}(-1)^n\frac{5^n}{n-2}$

в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2x+7)\sin n(x+1)}{n!}$

Задание 2. Составить формулу для общего члена данного ряда

а) 1+2+4+8+16…

б) 9+11+13+15+…

в) $1+\frac{4}{2}+\frac{9}{6}+\frac{16}{24}+\frac{25}{120}+\ldots$

Задание 3. Найти сумму ряда, представленного в задании

а) $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}-\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}-\ldots$

б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{12n^2+2n-4}$

в) $\sum_{n=3}^{\infty}\frac{n}{(n^2-1)(n-2)}$

Задание 4. Исследовать числовой ряд на сходимость, используя необходимый признак и один из достаточных признаков сходимости числовых знакоположительных рядов

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n-1}{2^{n-1}}$

б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{arctg\,\frac{5}{n}}{n\,!}$

в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(4n+3)^n}{3n+5}\cdot\frac{1}{2^n}$

г) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{3^n}\left(\frac{4n-3}{5n+1}\right)^n$

д) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{3}{(3n-5)\ln^2(4n-7)}$

Задание 5. Исследовать знакочередующийся ряд на сходимость, используя признак Лейбница. В случае сходимости указать сходится ряд условно или абсолютно.

а) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(\ln n)\cdot(n+1)}$

б) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n}{7^{n^2}}$

Задание 6. Вычислить сумму ряда с заданной точностью α.

$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(2n)!\cdot 2n}$, α=0,001

Задание 7. Найти радиус сходимости степенного ряда, определить область сходимости, исследовать сходимость ряда на концах интервала сходимости.

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(x-3)^n}{(n-1)\cdot 3^n}$

б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n\ 3^n}{n+1}$

Задание 8. Разложить функцию в ряд Тейлора по степеням x.

а) $f(x)=\frac{3}{5}\cdot\frac{\sin^2 x}{x}$

б) $f(x)=(2x+1)^2 e^{-2x+1}$

Задание 9. Разложить в ряд Фурье функцию на промежутке [-π, π]

а) $f(x)=\sin(x+\pi/4)$

б) $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}\pi x, -\pi\le x\le 0\\ \frac{1}{2}(1+x),\quad 0<x\le\pi\end{cases}$

Вариант 8

Задание 1. Написать первые пять членов данного ряда, по заданному общему члену ряда.

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}$

б) $\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n}\frac{4^{n+1}}{n+1}$

в) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x^{n}}{n^{5}}+2\right)$

Задание 2. Составить формулу для общего члена данного ряда

а) 1+3+9+27+…

б) –2+4+22+76+…

в) $\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{11}+\frac{1}{20}+\frac{1}{37}\ldots$

Задание 3. Найти сумму ряда, представленного в задании

а) $1+\frac{1}{12}+\frac{1}{12^{2}}+\frac{1}{12^{3}}+\frac{1}{12^{4}}+\ldots$

б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{12}{42n^{2}+7n-10}$

в) $\sum_{n=3}^{\infty}\frac{14-15n}{(n+10)(n-2)n}$

Задание 4. Исследовать числовой ряд на сходимость, используя необходимый признак и один из достаточных признаков сходимости числовых знакоположительных рядов

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n+10}{5n}$

б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n}+\cos n}{2^{n}+\sin n}$

в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n)!}{3n}\cdot\frac{10^{n}}{2^{n}}$

г) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{3^{n^2}}\left(\frac{n}{10n+5}\right)^{n^2}$

д) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{4}{n\ln^2(n-2)}$

Задание 5. Исследовать знакочередующийся ряд на сходимость, используя признак Лейбница. В случае сходимости указать сходится ряд условно или абсолютно.

а) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2}{n\cdot\ln(n+1)}$

б) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{5}{3}\right)^n$

Задание 6. Вычислить сумму ряда с заданной точностью α.

$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2n+1}{n!}$, α=0,001

Задание 7. Найти радиус сходимости степенного ряда, определить область сходимости, исследовать сходимость ряда на концах интервала сходимости.

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-7)^n}{(2n^2+3)\cdot 4^n}$

б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{3^{n+1}}$

Задание 8. Разложить функцию в ряд Тейлора по степеням x.

а) $f(x)=\frac{\cos 2x}{x^2}+\sin 2x$

б) $f(x)=x^3+e^{-x}$

Задание 9. Разложить в ряд Фурье функцию на промежутке [-π, π]

а) $f(x)=3+2x$

б) $f(x)=\begin{cases}-x, -\pi\le x\le 0\\ 1-x, \quad 0<x\le\pi\end{cases}$

Вариант 9

Задание 1. Написать первые пять членов данного ряда, по заданному общему члену ряда.

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{n!+1}$

б) $\sum_{n=3}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{3^n}{n-1}$

в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n+1}\left(\frac{x}{4}\right)^n$

Задание 2. Составить формулу для общего члена данного ряда

а) $1+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\ldots$

б) 8+14+32+86+…

в) $\frac{1}{2}-\frac{3}{4}+\frac{5}{8}-\frac{7}{16}+\ldots$

Задание 3. Найти сумму ряда, представленного в задании

а) $1+\frac{1}{10}+\frac{1}{10^2}+\frac{1}{10^3}+\frac{1}{10^4}+\ldots$

б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{15}{7n^2+10n-12}$

в) $\sum_{n=3}^{\infty}\frac{6+5n}{(n-1)(n+3)(n-2)}$

Задание 4. Исследовать числовой ряд на сходимость, используя необходимый признак и один из достаточных признаков сходимости числовых знакоположительных рядов

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{4n+5}$

б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5n}{2^{n-1}+n-1}$

в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{(2n)!}\cdot tg\frac{1}{3^n}$

г) $\sum_{n=2}^{\infty} n \cdot \arcsin^{n} \frac{\pi}{4n}$

д) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{3}{(3n+4)\ln^{2}(5n+2)}$

Задание 5. Исследовать знакочередующийся ряд на сходимость, используя признак Лейбница. В случае сходимости указать сходится ряд условно или абсолютно.

а) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n} \frac{n+1}{\sqrt{n(n^{2}+1)}}$

б) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n} \left(\frac{2}{3}\right)^{n}$

Задание 6. Вычислить сумму ряда с заданной точностью α.

$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n} \frac{1}{3n!}$, α=0,001

Задание 7. Найти радиус сходимости степенного ряда, определить область сходимости, исследовать сходимость ряда на концах интервала сходимости.

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n}(x+3)^{n}}{(n-2)\cdot\frac{2^{n}}{3^{n}}}$

б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n}\ 2^{n}}{\sqrt{3^{n}}(2n+1)}$

Задание 8. Разложить функцию в ряд Тейлора по степеням x.

а) $f(x) = \frac{x}{\ln(1+3x)} + \cos^{2} 3x$

б) $f(x) = xe^{-2x^{2}}$

Задание 9. Разложить в ряд Фурье функцию на промежутке [-π, π]

а) $f(x) = x^{2} - 1$

б) $f(x) = \begin{cases} -\pi, -\pi \le x \le 0 \\ x-1, \quad 0 < x \le \pi \end{cases}$

Вариант 10

Задание 1. Написать первые пять членов данного ряда, по заданному общему члену ряда.

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(n-1)}{n!}$

б) $\sum_{n=3}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n-2}$

в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{x+1}\cos n}{n \cdot 2^n}$

Задание 2. Составить формулу для общего члена данного ряда

а) $1+\sqrt{3}+\sqrt{5}+\sqrt{7}\ldots$

б) 2+8+26+80+…

в) $\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{4}}+\frac{1}{\sqrt{5}}+\ldots$

Задание 3. Найти сумму ряда, представленного в задании

а) $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{8}+\ldots$

б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{n^2+7n-2}$

в) $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{2-5n}{(n+1)(n-2)n}$

Задание 4. Исследовать числовой ряд на сходимость, используя необходимый признак и один из достаточных признаков сходимости числовых знакоположительных рядов

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2-1}{8n^2+3}$

б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{n-\cos^2 6n}$

в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{6^n}{n!} \cdot \frac{n^2-1}{2^n}$

г) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{3}\left(\frac{n+2}{3n-1}\right)^{n^2}$

д) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n^2}{\left(n^3+1\right)\ln n}$

Задание 5. Исследовать знакочередующийся ряд на сходимость, используя признак Лейбница. В случае сходимости указать сходится ряд условно или абсолютно.

а) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2n-1}{n\cdot\sqrt[4]{2n+3}}$

б) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{2n^2+1}$

Задание 6. Вычислить сумму ряда с заданной точностью α.

$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(2n)!}$, α=0,001

Задание 7. Найти радиус сходимости степенного ряда, определить область сходимости, исследовать сходимость ряда на концах интервала сходимости.

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(x+2)^n}{n^n}$

б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n\,10^n}{\sqrt{n+1}}$

Задание 8. Разложить функцию в ряд Тейлора по степеням x.

а) $f(x)=\frac{3x}{\sqrt{1-x}}+\cos x$

б) $f(x)=xe^{-x}$

Задание 9. Разложить в ряд Фурье функцию на промежутке [-π, π]

а) $f(x)=x^2+1$

б) $f(x)=\begin{cases}1, -\pi\le x\le 0\\ 1-x, \quad 0<x\le\pi\end{cases}$

Вариант 11

Задание 1. Написать первые пять членов данного ряда, по заданному общему члену ряда.

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n-4}{n!}$

б) $\sum_{n=4}^{\infty}(-1)^n\frac{5^{2n}}{\ln(n-2)}$

в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{x+1}}{n^n+2}$

Задание 2. Составить формулу для общего члена данного ряда

а) cos 1+cos 2+cos 3+cos 4…

б) 4+10+28+82+…

в) $1+\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}+\ldots$

Задание 3. Найти сумму ряда, представленного в задании

а) $\frac{1}{2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 4}+\frac{1}{2\cdot 5}+\ldots$

б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{19}{9n^2+4n-2}$

в) $\sum_{n=5}^{\infty}\frac{3n}{(n-4)(n-2)(n+2)}$

Задание 4. Исследовать числовой ряд на сходимость, используя необходимый признак и один из достаточных признаков сходимости числовых знакоположительных рядов

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{12n-10}{7n}$

б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3}{\sqrt[3]{n+1}}\sin\frac{1}{\sqrt{n+1}}$

в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n+2)!}{n!}\cdot\frac{1}{6^n}$

г) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(3n-1)^n}\cdot\left(\frac{n}{n-1}\right)^n$

д) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{3}{(2n+1)\ln^2(\sqrt{2}n+2)}$

Задание 5. Исследовать знакочередующийся ряд на сходимость, используя признак Лейбница. В случае сходимости указать сходится ряд условно или абсолютно.

а) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n+3}{\ln(n+1)}$

б) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{3n!}$

Задание 6. Вычислить сумму ряда с заданной точностью α.

$\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{2}{7}\right)^n,$ α=0,001

Задание 7. Найти радиус сходимости степенного ряда, определить область сходимости, исследовать сходимость ряда на концах интервала сходимости.

а) $\sum_{n=1}^{\infty}(x+5)^n tg\frac{1}{2^n}$

б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{5\cdot\sqrt[n]{n}}$

Задание 8. Разложить функцию в ряд Тейлора по степеням x.

а) $f(x)=\frac{\sin^2 3x}{x}$

б) $f(x)=x^2 10^{-2x}$

Задание 9. Разложить в ряд Фурье функцию на промежутке [-π, π]

а) $f(x)=-\sin x$

б) $f(x)=\begin{cases} x, -\pi\le x\le 0 \\ \pi, \quad 0<x\le\pi \end{cases}$

Вариант 12

Задание 1. Написать первые пять членов данного ряда, по заданному общему члену ряда.

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{n}$

б) $\sum_{n=3}^{\infty}(-1)^n+3^n$

в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{x+1}\cdot 2^{nx}}{\sqrt[4]{n^5+2}}$

Задание 2. Составить формулу для общего члена данного ряда

а) $\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{2}+\frac{1}{\sqrt{6}}+.\frac{1}{2\sqrt{2}}+\ldots$

б) 2+8+14+20+…

в) $\frac{1}{2+3}+\frac{1}{4+3}+\frac{1}{8+3}+\frac{1}{16+3}+\ldots$

Задание 3. Найти сумму ряда, представленного в задании

а) $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}+\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}+\ldots$

б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{10}{49n^2-35n-6}$

в) $\sum_{n=3}^{\infty}\frac{21}{(n+1)(n+6)(n+2)}$

Задание 4. Исследовать числовой ряд на сходимость, используя необходимый признак и один из достаточных признаков сходимости числовых знакоположительных рядов

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{2n-1}}{\sqrt{n}+3}$

б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n}}arctg\,\frac{\pi}{4\sqrt{n}}$

в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{(3n+5)\cdot n!}$

г) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n}{5^n}\left(\frac{n-1}{n+5}\right)^n$

д) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{3n}{(n^2-3)\ln^2 n}$

Задание 5. Исследовать знакочередующийся ряд на сходимость, используя признак Лейбница. В случае сходимости указать сходится ряд условно или абсолютно.

а) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2n-1}{3n(4n+1)}$

б) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2n+1}{n^2}$

Задание 6. Вычислить сумму ряда с заданной точностью α.

$\sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{2}{5}\right)^n$, α=0,001

Задание 7. Найти радиус сходимости степенного ряда, определить область сходимости, исследовать сходимость ряда на концах интервала сходимости.

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (x+4)^n}{(3n+1)\cdot 4^n}$

б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n (2n-1)}{2^n}$

Задание 8. Разложить функцию в ряд Тейлора по степеням x.

а) $f(x) = \frac{\ln(1+3x)}{x}$

б) $f(x) = x^2 + cosx + e^{-2x}$

Задание 9. Разложить в ряд Фурье функцию на промежутке [-π, π]

а) $f(x) = 1 - \sin x$

б) $f(x) = \begin{cases} x, -\pi \le x \le 0 \\ \pi + x, \quad 0 < x \le \pi \end{cases}$

Вариант 13

Задание 1. Написать первые пять членов данного ряда, по заданному общему члену ряда.

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{2n}$

б) $\sum_{n=3}^{\infty} (-1)^n \frac{e^n}{n^2-2n+1}$

в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1}\cos x}{x^5+2n}$

Задание 2. Составить формулу для общего члена данного ряда

а) $-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{2}-\frac{1}{\sqrt{6}}+.\frac{1}{2\sqrt{2}}-\ldots$

б) 10+16+22+28+…

в) $\frac{1}{2}+\frac{3}{4}+\frac{5}{6}+\frac{7}{8}+\ldots$

Задание 3. Найти сумму ряда, представленного в задании

а) $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\ldots$

б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{12}{49n^2-28n-45}$

в) $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{4n-5}{(n-1)(n+3)(n-2)}$

Задание 4. Исследовать числовой ряд на сходимость, используя необходимый признак и один из достаточных признаков сходимости числовых знакоположительных рядов

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\sqrt{n}-1}{\sqrt[3]{n}}$

б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{n^2+\ln n}$

в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+2)!}{n^2}$

г) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n}{3^n}\left(\frac{n-1}{n}\right)^n$

д) $\sum_{n=4}^{\infty} \frac{3}{\left(n\sqrt{2}+1\right)\ln^2(n-2)}$

Задание 5. Исследовать знакочередующийся ряд на сходимость, используя признак Лейбница. В случае сходимости указать сходится ряд условно или абсолютно.

а) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin\frac{\pi}{2\sqrt{n}}}{\sqrt{3n+1}}$

б) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2n-\frac{5}{4}}{3n}$

Задание 6. Вычислить сумму ряда с заданной точностью α.

$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{7^n}$, α=0,001

Задание 7. Найти радиус сходимости степенного ряда, определить область сходимости, исследовать сходимость ряда на концах интервала сходимости.

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (x-1)^n}{n\cdot 9^n}$

б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n\,(-1)^n}{(2n+1)!!}$

Задание 8. Разложить функцию в ряд Тейлора по степеням x.

а) $f(x)=\cos^2 3x$

б) $f(x)=x^3+e^{-2x}$

Задание 9. Разложить в ряд Фурье функцию на промежутке [-π, π]

а) $f(x)=2-5x$

б) $f(x)=\begin{cases} -1, -\pi \le x \le 0 \\ 3\pi x, \quad 0 < x \le \pi \end{cases}$

Вариант 14

Задание 1. Написать первые пять членов данного ряда, по заданному общему члену ряда.

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{7n+5}{n!}$

б) $\sum_{n=3}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n-2}\cdot 3^n$

в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{x^n+1}\cos nx}{x+2}$

Задание 2. Составить формулу для общего члена данного ряда

а) cos 1– cos2 +cos 3– cos 4+…

б) 2+7+12+17+22+…

в) $1+2\frac{1}{4}+2\frac{7}{9}+3\frac{1}{16}+3\frac{6}{25}+\ldots$

Задание 3. Найти сумму ряда, представленного в задании

а) $1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+\frac{1}{81}+\ldots$

б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+n-2}$

в) $\sum_{n=3}^{\infty}\frac{n-5}{(n-1)(n+2)(n+5)}$

Задание 4. Исследовать числовой ряд на сходимость, используя необходимый признак и один из достаточных признаков сходимости числовых знакоположительных рядов

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{n}-\frac{1}{n}$

б) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{5}{\sqrt{n+5}}\sin\frac{1}{n-1}$

в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n)!}{3n!}$

г) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{2n+3}{n+1} \right)^{n^2}$

д) $\sum_{n=4}^{\infty} \frac{4}{(n-2)\ln(n-2)}$

Задание 5. Исследовать знакочередующийся ряд на сходимость, используя признак Лейбница. В случае сходимости указать сходится ряд условно или абсолютно.

а) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \cos \frac{\pi}{6n}$

б) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{2^n n!}$

Задание 6. Вычислить сумму ряда с заданной точностью α.

$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{(2n-1)^3}$, α=0,001

Задание 7. Найти радиус сходимости степенного ряда, определить область сходимости, исследовать сходимость ряда на концах интервала сходимости.

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n \cdot (x-2)^n}{(5n+4)^2}$

б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n\, n}{n^3 + 2n + 1}$

Задание 8. Разложить функцию в ряд Тейлора по степеням x.

а) $f(x) = \frac{\sqrt[3]{1+3x}}{x} - 2^{3x}$

б) $f(x) = x^2 \sin(-2x)$

Задание 9. Разложить в ряд Фурье функцию на промежутке [-π, π]

а) $f(x) = 2 - \pi x$

б) $f(x) = \begin{cases} 0, -\pi \le x \le 0 \\ \frac{1}{\pi}, \quad 0 < x \le \pi \end{cases}$

Вариант 15

Задание 1. Написать первые пять членов данного ряда, по заданному общему члену ряда.

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n+5}$

б) $\sum_{n=5}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{5}{n-4}\right)^{n+3}$

в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{nx+3}\cos x}{n+4n^n}$

Задание 2. Составить формулу для общего члена данного ряда

а) $1-\sqrt{3}+\sqrt{5}-\sqrt{7}+\ldots$

б) 8+13+18+23+…

в) $\frac{1}{2}+\frac{1}{10}+\frac{1}{26}+\frac{1}{82}+\frac{1}{242}+\ldots$

Задание 3. Найти сумму ряда, представленного в задании

а) $1+\frac{1}{9}+\frac{1}{9^2}+\frac{1}{9^3}+\frac{1}{9^4}+\ldots$

б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n^2+8n+3}$

в) $\sum_{n=3}^{\infty}\frac{3-2n}{(n+1)(n+2)(n+4)}$

Задание 4. Исследовать числовой ряд на сходимость, используя необходимый признак и один из достаточных признаков сходимости числовых знакоположительных рядов

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n^4+n+1}{5n^4+5n^2}$

б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n}+2}arctg\,\frac{n+3}{n^2+5}$

в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)!}{n+5}\cdot\frac{1}{n^{n-1}}$

г) $\sum_{n=2}^{\infty}(n-1)^2 \cdot \left(\frac{3n+2}{4n-1}\right)^n$

д) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{3n}{(n^2+5)\ln n}$

Задание 5. Исследовать знакочередующийся ряд на сходимость, используя признак Лейбница. В случае сходимости указать сходится ряд условно или абсолютно.

а) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{(n+1)\left(\frac{3}{2}\right)^n}$

б) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{3^n n!}$

Задание 6. Вычислить сумму ряда с заданной точностью α.

$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n^2}{3^n}$, α=0,001

Задание 7. Найти радиус сходимости степенного ряда, определить область сходимости, исследовать сходимость ряда на концах интервала сходимости.

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(x+3)^n}{2(n+1)}\cdot 5^n$

б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{3^n\cdot\sqrt{n}}$

Задание 8. Разложить функцию в ряд Тейлора по степеням x.

а) $f(x)=\frac{3^{3x}}{x}-\sin 3x$

б) $f(x)=x^2\cos^2 x$

Задание 9. Разложить в ряд Фурье функцию на промежутке [-π, π]

а) $f(x)=\sin(x+\pi)$

б) $f(x)=\begin{cases}0, -\pi\le x\le 0\\ x^2, \quad 0<x\le\pi\end{cases}$

Вариант 16

Задание 1. Написать первые пять членов данного ряда, по заданному общему члену ряда.

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-3}{(n+1)!}$

б) $\sum_{n=3}^{\infty}(-1)^n\frac{4^n}{(n-2)n(n+2)}$

в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{x+1}\ln(1-2x+nx)}{n^n+2}$

Задание 2. Составить формулу для общего члена данного ряда

а) $1-\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{4}+\ldots$

б) –2+1+4+7+…

в) $1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+\frac{1}{81}+\ldots$

Задание 3. Найти сумму ряда, представленного в задании

а) $1+\frac{1}{8}+\frac{1}{8^2}+\frac{1}{8^3}+\frac{1}{8^4}+\ldots$

б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{36n^2+12n-35}$

в) $\sum_{n=3}^{\infty}\frac{3}{(n+2)(n-2)n}$

Задание 4. Исследовать числовой ряд на сходимость, используя необходимый признак и один из достаточных признаков сходимости числовых знакоположительных рядов

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4n^3-n^2+1}{n^3+1}$

б) $\sum_{n=1}^{\infty}n^3\cdot tg^5\frac{\pi}{n}$

в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n+2)!!}{n!}\cdot\frac{1}{2^n}$

г) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n^3}{(\ln n)^n}$

д) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{3}{(2n-1)\ln(2n)}$

Задание 5. Исследовать знакочередующийся ряд на сходимость, используя признак Лейбница. В случае сходимости указать сходится ряд условно или абсолютно.

а) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{\cos\frac{\pi}{3\sqrt{n}}\sqrt[3]{3n+\ln n}}$

б) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(2n)!\cdot n!}$

Задание 6. Вычислить сумму ряда с заданной точностью α.

$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n}{2^n}$, α=0,001

Задание 7. Найти радиус сходимости степенного ряда, определить область сходимости, исследовать сходимость ряда на концах интервала сходимости.

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+9)^n}{(n-4)\cdot 3^n}$

б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n\cdot\sqrt[n]{n}}{\sqrt[n]{n^2+1}}$

Задание 8. Разложить функцию в ряд Тейлора по степеням x.

а) $f(x)=\frac{\sin 2x}{x}-\cos 2x$

б) $f(x)=x^2e^x+(1+x)^4$

Задание 9. Разложить в ряд Фурье функцию на промежутке [-π, π]

а) $f(x)=\sin x-\pi$

б) $f(x)=\begin{cases}0, -\pi\le x\le 0\\ \pi x, \quad 0<x\le\pi\end{cases}$

Вариант 17

Задание 1. Написать первые пять членов данного ряда, по заданному общему члену ряда.

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n!}$

б) $\sum_{n=3}^{\infty}(-1)^n\frac{2^{3n}}{(n-2)^{-3n}}$

в) $\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt[n]{\frac{\cos nx}{n^5+2}}$

Задание 2. Составить формулу для общего члена данного ряда

а) 1–3+9–27+81 – …

б) 8+11+14+17+…

в) $\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 5}+\ldots$

Задание 3. Найти сумму ряда, представленного в задании

а) $1+\frac{1}{7}+\frac{1}{7^2}+\frac{1}{7^3}+\frac{1}{7^4}+\ldots$

б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{9n^2+21n-8}$

в) $\sum_{n=3}^{\infty}\frac{-5n}{(n+1)(n-2)(n+3)}$

Задание 4. Исследовать числовой ряд на сходимость, используя необходимый признак и один из достаточных признаков сходимости числовых знакоположительных рядов

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt[5]{12n-1}}{\sqrt[5]{n-7}}$

б) $\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{\sqrt[3]{5n}}{\sqrt{n^5+2}}$

в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)!}{(2n)!}\cdot\frac{5^n}{2^n}$

г) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{5}\left(\frac{n}{3n-1}\right)^{n^3}$

д) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{4}{(n+3)\ln^2(2n)}$

Задание 5. Исследовать знакочередующийся ряд на сходимость, используя признак Лейбница. В случае сходимости указать сходится ряд условно или абсолютно.

а) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\sin n}{n!}$

б) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\cos\pi n}{3^n(n+1)}$

Задание 6. Вычислить сумму ряда с заданной точностью α.

$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n}{(2n+1)!}$, α=0,001

Задание 7. Найти радиус сходимости степенного ряда, определить область сходимости, исследовать сходимость ряда на концах интервала сходимости.

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(x-7)^n}{(2n+1)}$

б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n n^n}{5}$

Задание 8. Разложить функцию в ряд Тейлора по степеням x.

а) $f(x)=\frac{\sin^2\left(\frac{3x}{2}\right)}{x}$

б) $f(x)=x^2\ln\frac{1+3x}{1-3x}$

Задание 9. Разложить в ряд Фурье функцию на промежутке [-π, π]

а) $f(x)=2x-4$

б) $f(x)=\begin{cases}-2x, -\pi\le x\le 0\\ 0, \quad 0<x\le\pi\end{cases}$

Вариант 18

Задание 1. Написать первые пять членов данного ряда, по заданному общему члену ряда.

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5n^2}{(2n-1)!}$

б) $\sum_{n=3}^{\infty} (-1)^n \frac{5^{2n}}{n-2} + \frac{1}{4}$

в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1}}{n^3+1} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$

Задание 2. Составить формулу для общего члена данного ряда

а) – 1+ 2 – 4 + 8 – 16 +…

б) 2+6+10+14+…

в) $\frac{1}{1\cdot 4} + \frac{1}{2\cdot 5} + \frac{1}{3\cdot 6} + \frac{1}{4\cdot 7} + \ldots$

Задание 3. Найти сумму ряда, представленного в задании

а) $1 + \frac{1}{6} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{6^3} + \frac{1}{6^4} + \ldots$

б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{11}{49n^2 + 21n - 10}$

в) $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{4n-5}{(n-1)(n+2)n}$

Задание 4. Исследовать числовой ряд на сходимость, используя необходимый признак и один из достаточных признаков сходимости числовых знакоположительных рядов

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n-1}}{2^n}$

б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3+7n}{5^n + n + 3}$

в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+2)}{(n+2)!} \cdot \frac{3^n}{4^n}$

г) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{n^5 3^n}{(2n+1)^n}$

д) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)\ln(n+1)}$

Задание 5. Исследовать знакочередующийся ряд на сходимость, используя признак Лейбница. В случае сходимости указать сходится ряд условно или абсолютно.

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{-1}{n \cdot \ln(2n+1)}$

б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{4^n (2n^2+1)}$

Задание 6. Вычислить сумму ряда с заданной точностью α.

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2n!!}$, α=0,001

Задание 7. Найти радиус сходимости степенного ряда, определить область сходимости, исследовать сходимость ряда на концах интервала сходимости.

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-n)^n (x+6)^n}{5^n}$

б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}\, n}{n+1}$

Задание 8. Разложить функцию в ряд Тейлора по степеням x.

а) $f(x) = \frac{\sqrt[5]{1+3x}}{x} - \cos x$

б) $f(x) = x^2 \cos(-5x)$

Задание 9. Разложить в ряд Фурье функцию на промежутке [-π, π]

а) $f(x) = cosx$

б) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}, -\pi \le x \le 0 \\ x - \pi, \quad 0 < x \le \pi \end{cases}$

Вариант 19

Задание 1. Написать первые пять членов данного ряда, по заданному общему члену ряда.

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2-1}{n!}$

б) $\sum_{n=5}^{\infty}(-1)^n\frac{2}{n-4}+(-1)^{n+1}\frac{n-4}{2}$

в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{x+1}}{n}\cdot\frac{nx}{\sqrt{n+1}}$

Задание 2. Составить формулу для общего члена данного ряда

а) ln2–ln3+ln4–ln5+…

б) 6+10+14+18+…

в) $1+\frac{1}{\sqrt[2]{2}}+\frac{1}{\sqrt[3]{4}}+\frac{1}{\sqrt[4]{8}}+\frac{1}{\sqrt[5]{16}}+\ldots$

Задание 3. Найти сумму ряда, представленного в задании

а) $1+\frac{1}{5}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{5^3}+\frac{1}{5^4}+\ldots$

б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{10}{9n^2+6n-8}$

в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{(n+1)(n+2)n}$

Задание 4. Исследовать числовой ряд на сходимость, используя необходимый признак и один из достаточных признаков сходимости числовых знакоположительных рядов

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1+5^n}{5^{n-2}}$

б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\frac{2\pi}{2n+1}}{\sqrt{n-1}}$

в) $\sum_{n=1}^{\infty}2^n\cdot n!\cdot\frac{1}{n^n}$

г) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2}{3^n}\left(\frac{3n-1}{4n+2}\right)^{2n}$

д) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n+2)\ln^2(n+1)}$

Задание 5. Исследовать знакочередующийся ряд на сходимость, используя признак Лейбница. В случае сходимости указать сходится ряд условно или абсолютно.

а) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1} \frac{1}{2^{2n}\cdot(n+1)}$

б) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}+\pi n\right)}{n^2}$

Задание 6. Вычислить сумму ряда с заданной точностью α.

$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n} \frac{2n+1}{n^3(n+1)}$, α=0,001

Задание 7. Найти радиус сходимости степенного ряда, определить область сходимости, исследовать сходимость ряда на концах интервала сходимости.

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n(x+9)^n}{\sqrt{n+1}\cdot(0{,}2)^n}$

б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n\,(2n+1)}{4n^2+1}$

Задание 8. Разложить функцию в ряд Тейлора по степеням x.

а) $f(x)=\ln(1+x-15x^2)$

б) $f(x)=x^3 7^{-4x}$

Задание 9. Разложить в ряд Фурье функцию на промежутке [-π, π]

а) $f(x)=x^3$

б) $f(x)=\begin{cases}\pi - x, -\pi \le x \le 0 \\ 1, \quad 0 < x \le \pi\end{cases}$

Вариант 20

Задание 1. Написать первые пять членов данного ряда, по заданному общему члену ряда.

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3(n+5)}{(2n)!}$

б) $\sum_{n=3}^{\infty}(-1)^n\frac{5^{2n}}{n-2}+\frac{n-2}{5^n}$

в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^2+4x}$

Задание 2. Составить формулу для общего члена данного ряда

а) 1–3+5–7+…

б) 2+5+8+11+…

в) $\frac{1}{1\cdot2\cdot3}+\frac{1}{2\cdot3\cdot4}+\frac{1}{3\cdot4\cdot5}+\frac{1}{4\cdot5\cdot6}+\ldots$

Задание 3. Найти сумму ряда, представленного в задании

а) $1+\frac{1}{4}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{4^3}+\frac{1}{4^4}+\ldots$

б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{9n^2-3n-2}$

в) $\sum_{n=3}^{\infty}\frac{4n+3}{(n-1)(n+1)(n-2)}$

Задание 4. Исследовать числовой ряд на сходимость, используя необходимый признак и один из достаточных признаков сходимости числовых знакоположительных рядов

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{15n+\sqrt{n}}{\sqrt[4]{n^4+3}+n}$

б) $\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$

в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n)!}{3n+5}\cdot\frac{1}{\sqrt{2^n+3}}$

г) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^{n+2}}{\left(3n^2+1\right)^{n/2}}$

д) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{3}{(n+3)\ln^2(n+4)}$

Задание 5. Исследовать знакочередующийся ряд на сходимость, используя признак Лейбница. В случае сходимости указать сходится ряд условно или абсолютно.

а) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot tg\frac{1}{n}$

б) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2^n}{(n+1)^n}$

Задание 6. Вычислить сумму ряда с заданной точностью α.

$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n!\cdot(2n-1)}$, α=0,001

Задание 7. Найти радиус сходимости степенного ряда, определить область сходимости, исследовать сходимость ряда на концах интервала сходимости.

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n (x+12)^n}{(3n+2)\cdot 3^n}$

б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n\, n}{4^n}$

Задание 8. Разложить функцию в ряд Тейлора по степеням x.

а) $f(x) = \frac{\ln(1-2x)}{x^2}$

б) $f(x) = x^3 3^{2x}$

Задание 9. Разложить в ряд Фурье функцию на промежутке [-π, π]

а) $f(x) = x^2$

б) $f(x) = \begin{cases} x, -\pi \le x \le 0 \\ 1, \quad 0 < x \le \pi \end{cases}$

Вариант 21

Задание 1. Написать первые пять членов данного ряда, по заданному общему члену ряда.

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{7n-4}{(2n+1)!}$

б) $\sum\limits_{n=3}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{3n-2}{\ln(n-1)}\right)^n$

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt[3]{2x+1}\cos nx}{n+2}$

Задание 2. Составить формулу для общего члена данного ряда

а)–1+4–6+8–10+…

б) 4+7+10+13+…

в) $\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{4}}+\frac{1}{\sqrt{6}}+\frac{1}{\sqrt{8}}+\dots$

Задание 3. Найти сумму ряда, представленного в задании

а) $1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^3}+\frac{1}{3^4}+\dots$

б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{14}{9n^2-12n-5}$

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{5n+2}{(n+1)(n+2)n}$

Задание 4. Исследовать числовой ряд на сходимость, используя необходимый признак и один из достаточных признаков сходимости числовых знакоположительных рядов

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt[3]{2n^3-1}}{n}$

б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3}{3^n+n-1}$

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(2n+2)!}{3n+5}\cdot\frac{2^n}{3^n}\cdot\frac{1}{n!}$

г) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{5^n}{3^n}\left(\frac{5n+3}{3n+5}\right)^n$

д) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{3}{(2n+3)\ln^2(2n+2)}$

Задание 5. Исследовать знакочередующийся ряд на сходимость, используя признак Лейбница. В случае сходимости указать сходится ряд условно или абсолютно.

а) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\cos n}{n(n+1)}$

б) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(n+1)^n}$

Задание 6. Вычислить сумму ряда с заданной точностью α.

$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{(2n)^3}$, α=0,001

Задание 7. Найти радиус сходимости степенного ряда, определить область сходимости, исследовать сходимость ряда на концах интервала сходимости.

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (x+10)^n}{10^n}$

б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n\, n}{n+1} \cdot \sqrt{\frac{n+1}{n-1}}$

Задание 8. Разложить функцию в ряд Тейлора по степеням x.

а) $f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{4-5x}} - 1$

б) $f(x) = cos^2 5x$

Задание 9. Разложить в ряд Фурье функцию на промежутке [-π, π]

а) $f(x) = x$

б) $f(x) = \begin{cases} 0, -\pi \le x \le 0 \\ -1, \quad 0 < x \le \pi \end{cases}$

Список рекомендуемой литературы

1. Баврин И.И. Математический анализ для педагогических вузов: Учебник и практикум/ И. И. Баврин. – М:Юрайт, 2016. – 336 с.

2. Кудрявцев Л.Д. Курс математического анализа: в 3 т./ Л.Д. Кудрявцев. – М.: Дрофа, 2003. – 704 с.

3. Мартынов Н.Н. Высшая математика/ Н.Н. Мартынов, Г.Н. Яковлев , Г.Л. Луканкин, Г.А. Шадрин. – М: Высшая школа, 2009. – 584 с.

4. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления: в 3 т./ Г.М.Фихтенгольц. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2001. – Т.1. – 616с.

Содержание

Татьяна Александровна Юрьева,
заведующий кафедры общей математики и информатики АмГУ, кандидат педагогических наук

Наталья Николаевна Двоерядкина,
доцент кафедры общей математики и информатики АмГУ, кандидат педагогических наук

Ряды: расчетно-графическая работа: учебно-методическое пособие.
Изд-во АмГУ.