Министерство науки и высшего образования Российской Федерации

АМУРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

А.М. Попова

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ: НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

Методические указания для организации самостоятельной работы студентов

Благовещенск

Издательство АмГУ

2021

ББК

Рекомендовано

учебно-методическим советом университета

Рецензент:

Павельчук А.В., канд. физ.-мат. наук, заместитель директора по учебной работе общеобразовательного лицея ФГБОУ ВО АмГУ

Попова А.М.

Математический анализ: неопределённый интеграл: методические указания для организации самостоятельной работы студентов/А.М. Попова – Благовещенск: Изд-во АмГУ, 2021. – 46с.

Методические указания предназначены для студентов первого курса всех направлений подготовки и специальностей.

В них приводятся образец решения типовых заданий, варианты для организации самостоятельной работы и теоретические вопросы.

ВВЕДЕНИЕ

Вопросами интегрального исчисления занимаются с 1696 года. В изучение интегралов большой вклад внесли ученые математики и физики. Непосредственно, ни одна формула физики не обходится без интегрального и дифференциального исчисления. Интеграл помогает успешно решать математические задачи и задачи практического характера в разных областях науки, техники. Изучение данной темы способствует осознанному качественному усвоению материала, развитию правильного представления об изучаемом понятии, его огромной значимости в различных областях. Все процессы в природе, в которых постоянно меняются какие-то параметры, например время, температура, давление, координаты, изучаются и вычисляются только с помощью дифференциального и интегрального исчисления. Большинство интегралов получены как математические модели каких-либо естественных процессов в рамках медицины, биологии, химии, экономики, и т.д.

Методические указания «Математический анализ: неопределённый интеграл» рекомендованы для самостоятельной работы студентов различных направлений подготовки и специальностей при изучении соответствующего раздела математики, а также для использования в качестве дополнительного материала при организации преподавателем практических занятий.

Методические указания содержат таблицу неопределённых интегралов, краткий теоретический материал, примеры с подробным решением по каждой теме, 30 вариантов типовых задач, которые позволяют формировать индивидуальную домашнюю работу студентов по данному разделу, а также перечень учебников и пособий, представленных в списке литературы.

Тема 1: Непосредственное интегрирование

Основные свойства неопределенного интеграла:

1. $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$
2. $d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx$
3. $\int dF(x)dx = F(x) + C$
4. $\int C \cdot f(x)dx = C \cdot \int f(x)dx$, где $C = const \neq 0$
5. Если $f_1(x)$ и $f_2(x)$ имеют первообразную, то справедливо равенство:

   $\int \left(f_1(x) \pm f_2(x)\right)dx = \int f_1(x)dx \pm \int f_2(x)dx$.

Таблица неопределенных интегралов:

1) $\int x^n dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C,\ n \neq -1$

2) $\int (x \pm a)^n dx = \dfrac{(x \pm a)^{n+1}}{n+1} + C,\ n \neq -1$

3) $\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + C$

4) $\int \dfrac{1}{x \pm a} dx = \ln|x \pm a| + C$

5) $\int (a - x)^n dx = \dfrac{(a - x)^{n+1}}{-(n+1)} + C$

6) $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C$

7) $\int e^x dx = e^x + C$

8) $\int \sin x dx = -\cos x + C$

9) $\int \cos x dx = \sin x + C$

10) $\int tgx dx = -\ln|\cos x| + C$

11) $\int ctgx dx = \ln|\sin x| + C$

12) $\int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C$

13) $\int \dfrac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + C$

14) $\int \dfrac{dx}{ch^2 x} = thx + C$

15) $\int \dfrac{dx}{sh^2 x} = -cthx + C$

16) $\int \dfrac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} = \arcsin x + C$

17) $\int \dfrac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \dfrac{x}{a} + C$

18) $\int \dfrac{dx}{1 + x^2} = arctgx + C$

19) $\int \dfrac{dx}{a^2 + x^2} = \dfrac{1}{a} arctg \dfrac{x}{a} + C$

20) $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C$

21) $\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{x+a}{x-a}\right| + C$

22) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C$

23) $\int \frac{xdx}{x^2 \pm a^2} = \frac{1}{2} \ln\left|x^2 \pm a^2\right| + C$

24) $\int tg^2 xdx = tgx - x + C$

25) $\int ctg^2 xd = -ctgx - x + C$

26) $\int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin\frac{x}{a} + C$

27) $\int \sqrt{x^2 + a^2} dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2 + a^2} + \frac{a^2}{2} \ln\left|x + \sqrt{x^2 + a^2}\right| + C$

28) $\int \sqrt{x^2 - a^2} dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2 - a^2} - \frac{a^2}{2} \ln\left|x + \sqrt{x^2 - a^2}\right| + C$

Основными методами интегрирования являются: непосредственное интегрирование, замена переменной (подстановка), интегрирование по частям.

Непосредственное интегрирование – это интегрирование с использованием свойств интеграла и таблицы интегралов.

Примеры:

1. $\int (2x^2 + 1)^2 dx = \int (4x^4 + 4x^2 + 1) dx = \int 4x^4 dx + \int 4x^2 dx + \int 1dx =$

$= 4\int x^4 dx + 4\int x^2 dx + \int dx = 4\frac{x^5}{5} + 4\frac{x^3}{3} + x + C = \frac{4x^5}{5} + \frac{4x^3}{3} + x + C;$

2. $\int \frac{2 \cdot x + 3}{\sqrt{x}} dx = \int \left(2 \cdot \sqrt{x} + \frac{3}{\sqrt{x}}\right) dx = 2 \cdot \int \sqrt{x} dx + 3 \cdot \int \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2 \cdot \int x^{\frac{1}{2}} dx + 3 \cdot \int x^{-\frac{1}{2}} dx =$

$= 2 \cdot \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + 3 \cdot \frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C = \frac{4}{3} \cdot x \cdot \sqrt{x} + 6 \cdot \sqrt{x} + C;$

3. $\int tg^2 xdx = \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1\right) dx = \int \frac{dx}{\cos^2 x} - \int dx = tgx - x + C;$

4. $\int \frac{5x^4 - 3\sqrt{x^3}}{x^3} dx = \int \left(\frac{5x^4}{x^3} - \frac{3\sqrt{x^3}}{x^3}\right) dx = \int 5xdx - \int \frac{3x^{\frac{3}{2}}}{x^3} dx = 5\int xdx - 3\int x^{-\frac{3}{2}} dx =$

$$=5\frac{x^2}{2}-3\frac{x^{-\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}}+C=2{,}5x^2+\frac{6}{\sqrt{x}}+C;$$

5. $$\int\frac{dx}{\sin^2 x\cdot\cos^2 x}=\int\frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\sin^2 x\cdot\cos^2 x}dx=\int\left(\frac{\sin^2 x}{\sin^2 x\cdot\cos^2 x}+\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x\cdot\cos^2 x}\right)dx=$$

$$=\int\left(\frac{1}{\cos^2 x}+\frac{1}{\sin^2 x}\right)dx=\int\frac{1}{\cos^2 x}dx+\int\frac{1}{\sin^2 x}dx=tgx-ctgx+C;$$

6. $$\int\frac{x^2}{1+x^2}dx=\int\frac{\left(1+x^2\right)-1}{1+x^2}dx=\int\left(1-\frac{1}{1+x^2}\right)dx=\int dx-\int\frac{dx}{1+x^2}=x-arctgx+C;$$

7. $$\int\frac{dx}{x^4+x^2}=\int\frac{x^2+1-x^2}{x^2\left(x^2+1\right)}dx=\int\frac{dx}{x^2}-\int\frac{dx}{x^2+1}=\int x^{-2}dx-\int\frac{dx}{x^2+1}=\frac{1}{x}-arctgx+C$$

Упражнение 1:

1) $\int\sqrt{x}dx$

2) $\int\sqrt[5]{x^3}dx$

3) $\int\frac{dx}{2\sqrt{x}}$

4) $\int\frac{dx}{x^5}$

5) $\int\frac{x^3-3x^2+1}{x^5}dx$

6) $\int(x+8)\cdot\left(\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}\right)dx$

7) $\int\left(\frac{1-x}{\sqrt{x}}\right)^2dx$

8) $\int(1-x)\cdot x\cdot\sqrt[4]{x}dx$

9) $\int\frac{\left(1+\sqrt{x}\right)^3}{\sqrt[3]{x}}dx$

10) $\int\frac{1+\cos 2x}{\cos x}dx$

11) $\int\frac{\cos 2x}{\cos x-\sin x}dx$

12) $\int\left(\frac{1}{2x}+e^x\right)dx$

13) $\int\left(\frac{1}{1+x^2}+2^{2x}\right)dx$

14) $\int\frac{dx}{\cos 2x+\sin^2 x}$

15) $\int\frac{x\sin 2x+\sqrt[3]{x}\cos x}{x\cos x}dx$

16) $\int\sin^2\frac{x}{2}dx$

17) $\int\frac{5-xe^x}{x}dx$

18) $\int\cos^2\frac{x}{2}dx$

19) $\int\frac{e^{2x}-4e^x}{e^x}dx$

20) $\int\frac{3^x+2^x}{5^x}dx$

21) $\int ctg^2 x dx$

22) $\int \frac{(x+1)^3}{\sqrt{x}} dx$

23) $\int 3^x \cdot 4^x dx$

24) $\int \frac{\cos 2x}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x} dx$

25) $\int \frac{2+\sqrt{x^2-x^4}}{\sqrt{1-x^2}} dx$

26) $\int \frac{(1+x)^2}{x(1+x^2)} dx$

Тема 2: Замена переменной в неопределенном интеграле

Метод замены переменной обычно применяется, когда подынтегральное выражение представляет собой независимую переменную, умноженную на многочлен от этой переменной, или на тригонометрическую функцию от этой переменной или на степенную функцию (в том числе корень) от этой переменной.

$$\int f(x)dx = \int f[\varphi(t)] \cdot \varphi'(t)dt \qquad (1)$$

Формула (1) называется ***формулой замены переменной*** в неопределённом интеграле.

Примеры:

1. $$\int \sin 5x dx = \left| \begin{array}{l} t = 5x \\ dt = (5x)' dx = 5dx \\ dx = \frac{1}{5}dt \end{array} \right| = \int \sin t \cdot \frac{1}{5} dt = \frac{1}{5}\int \sin t dt = -\frac{1}{5}\cos t + C =$$

$$= -\frac{1}{5}\cos 5x + C;$$

2. $$\int e^{3x} dx = \left| \begin{array}{l} t = 3x \\ dt = (3x)' dx = 3dx \\ dx = \frac{1}{2}dt \end{array} \right| = \int e^t \cdot \frac{1}{3} dt = \frac{1}{3}\int e^t dt = \frac{1}{3}e^t + C = \frac{1}{3}e^{3x} + C;$$

3. $\int \sin(3x+4)dx = \left| \begin{array}{l} t = 3x+4 \\ dt = (3x+4)' dx = 3dx \\ dx = \frac{1}{3}dt \end{array} \right| = \int \sin t \cdot \frac{1}{3}dt = \frac{1}{3}\int \sin t dt =$

$= -\frac{1}{3}\cos t + C = -\frac{1}{3}\cos(3x+4) + C;$

4. $\int \frac{x^2}{1+x^6}dx = \int \frac{x^2}{1+(x^3)^2}dx = \left| \begin{array}{l} t = x^3 \\ dt = 3x^2 dx \\ x^2 dx = \frac{1}{3}dt \end{array} \right| = \int \frac{\frac{1}{3}dt}{1+t^2} = \frac{1}{3}\int \frac{dt}{1+t^2} =$

$= \frac{1}{3}arctgt + C = \frac{1}{3}arctgx^3 + C;$

5. $\int \frac{\cos(\ln x)}{x}dx = \left| \begin{array}{l} t = \ln x \\ dt = \frac{dx}{x} \end{array} \right| = \int \cos t dt = \sin t + C = \sin(\ln x) + C;$

6. $\int (6+2x)^5 dx = \left| \begin{array}{l} t = 6+2x \\ dt = 2dx \\ dx = \frac{1}{2}dt \end{array} \right| = \int t^5 \cdot \frac{1}{2}dt = \frac{1}{2}\int t^5 dt = \frac{1}{2}\cdot\frac{t^6}{6} + C = \frac{(6+2x)^6}{12+C};$

7. $\int \sin^2 x \cdot \cos x dx = \left| \begin{array}{l} t = \sin x \\ dt = \cos x dx \end{array} \right| = \int t^2 dt = \frac{t^3}{3} + C = \frac{\sin^3 x}{3} + C;$

8. $\int \frac{dx}{x^2+4x+5} = \int \frac{dx}{x^2+4x+4+1} = \int \frac{dx}{(x+2)^2+1} = \left| \begin{array}{l} t = x+2 \\ dt = dx \end{array} \right| = \int \frac{dt}{t^2+1} =$

$= arctgt + C = arctg(x+2) + C;$

9. $\int \frac{\sqrt[3]{arctgx}}{1+x^2}dx = \left| \begin{array}{l} t = arctgx \\ dt = \frac{1}{1+x^2}dx \end{array} \right| = \int \sqrt[3]{t}dt = \int t^{\frac{1}{3}}dt = \frac{t^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}} + C = \frac{3}{4}t^{\frac{4}{3}} + C =$

$= \frac{3}{4}arctg^{\frac{4}{3}}x + C;$

$$10.\ \int \frac{3x^2}{x^3+1}\ln\left(x^3+1\right)dx = \begin{vmatrix} t=\ln(x^3+1) \\ dt=\dfrac{3x^2}{x^3+1}dx \end{vmatrix} = \int t\,dt = \frac{t^2}{2}+C = \frac{\ln^2(x^3+1)}{2}+C$$

$$11.\ \int \sqrt{1+e^x}\,dx = \begin{vmatrix} \sqrt{1+e^x}=t,\ 1+e^x=t^2 \\ e^x=t^2-1,\ e^x dx=2tdt, \\ dx=\dfrac{2t}{t^2-1}dt \end{vmatrix} = \int t\cdot\frac{2t}{t^2-1}dt = 2\int\frac{t^2-1+1}{t^2-1}dt =$$

$$=2\int 1+\frac{1}{t^2-1}dt = 2t+2\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|+C = 2\sqrt{1+e^x}+2\ln\left|\frac{\sqrt{1+e^x}-1}{\sqrt{1+e^x}+1}\right|+C;$$

$$12.\ \int\frac{x}{(x+3)^3}dx = \begin{vmatrix} x+3=t,\ x=t-3 \\ dx=dt \end{vmatrix} = \int\frac{t-3}{t^3}dt = \int\left(\frac{1}{t^2}-\frac{3}{t^3}\right)dt = \int\left(t^{-2}-3t^{-3}\right)dt =$$

$$=\frac{t^{-1}}{-1}-3\cdot\frac{t^{-2}}{-2}+C = -\frac{1}{t}+\frac{3}{2t^2}+C = -\frac{1}{x+3}+\frac{3}{2(x+3)^2}+C.$$

При решении примеров, удобно пользоваться таблицей дифференциалов:

1) $x\,dx=\frac{1}{2}d(x^2)$

2) $x^2dx=\frac{1}{3}d(x^3)$

3) $x^n dx=\frac{1}{n+1}d(x^{n+1})$

4) $\frac{1}{x^2}dx=-d\left(\frac{1}{x}\right)$

5) $\frac{dx}{\sqrt{x}}=2d(\sqrt{x})$

6) $\frac{dx}{x}=d(\ln x)$

7) $\frac{dx}{\sin^2 x}=-d(ctgx)$

8) $\frac{dx}{\cos^2 x}=d(tgx)$

9) $\sin x\,dx=-d(\cos x)$

10) $\cos x\,dx=d(\sin x)$

11) $\frac{dx}{1+x^2}=d(arctgx)$

12) $\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=d(\arcsin x)$

13) $e^{ax}dx=\frac{1}{a}d\left(e^{ax}\right)$

Упражнение 2.

1) $\int(5x+7)^9dx$

2) $\int\frac{dx}{(2x-3)^4}$

3) $\int\frac{dx}{\sqrt[3]{2-9x}}$

4) $\int\sin(6x+1)dx$

5) $\int \cos(2-5x)dx$

6) $\int \frac{dx}{\cos^2 \frac{x}{2}}$

7) $\int e^{-4x+1}dx$

8) $\int \frac{dx}{2x-1}$

9) $\int \frac{\arcsin^3 x}{\sqrt{1-x^2}}dx$

10) $\int \frac{arctg^5 x}{1+x^2}dx$

11) $\int \frac{\sin x}{\sqrt{\cos x}}dx$

12) $\int \cos^5 x \cdot \sin x dx$

13) $\int \cos x \cdot e^{\sin x}dx$

14) $\int x \cdot \cos(x^2+1)dx$

15) $\int x^2 \cdot e^{x^3-5}dx$

16) $\int \frac{e^x}{e^x+1}dx$

17) $\int \frac{e^x}{e^{2x}+4}dx$

18) $\int \frac{dx}{x \ln x}$

19) $\int \frac{\sqrt[5]{\ln x}}{x}dx$

20) $\int \frac{\cos x}{\sin^2 x+1}dx$

21) $\int \frac{dx}{1+4x^2}$

22) $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{1-x^6}}$

23) $\int \frac{e^{4x}-2}{e^x}dx$

24) $\int \frac{1+x}{\sqrt{1-x^2}}dx$

25) $\int \frac{3x+4}{x^2+9}dx$

26) $\int \frac{\sqrt{tgx+3}}{\cos^2 x}dx$

27) $\int \sqrt{\frac{\arcsin x}{1-x^2}}dx$

28) $\int \cos^2 4x dx$

29) $\int \sin^2 6x dx$

30) $\int \sin^3 x dx$

31) $\int \cos^5 x dx$

32) $\int \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$

33) $\int e^{-x^3} \cdot x^2 dx$

Тема 3: Интегрирование по частям

Метод интегрирования по частям используется тогда, когда нужно упростить имеющийся неопределенный интеграл или свести его к табличному значению. Чаще всего он применяется в случае наличия показательных, логарифмических, прямых и обратных тригонометрических формул и их сочетаний в подынтегральном выражении. Основная формула, необходимая для использования этого метода, выглядит так:

$$\int u(x)\cdot v(x)dx = u(x)v(x) - \int v(x)d(u(x))$$

При необходимости эта формула может применяться последовательно несколько раз.

Рассмотрим часто встречающиеся интегралы, которые вычисляются методом интегрирования по частям:

1. Интегралы вида $\int P(x)\cdot e^{kx}dx$, $\int P(x)\cdot \sin kxdx$, $\int P(x)\cdot \cos kxdx$, где P(x) – многочлен, k =const, берут по частям, введя замену

$$u = P(x), \quad dv = \begin{cases} e^{kx}dx \\ \cos kxdx. \\ \sin kxdx \end{cases}$$

Пример: $\int x\cos xdx = \begin{vmatrix} u = x & du = dx \\ dv = \cos xdx & v = \int \cos xdx = \sin x \end{vmatrix} = x\sin x - \int \sin xdx =$

$= x\sin x + \cos x + C$;

2. Интегралы вида $\int P(x)\cdot \ln kxdx$, $\int P(x)\cdot arctgkxdx$, $\int P(x)\cdot arcctgkxdx$, $\int P(x)\cdot \arcsin kxdx$, $\int P(x)\cdot \arccos kxdx$, где P(x) – многочлен, k =const, берут по частям, введя замену

$$u = \begin{cases} \ln kx, \ \arcsin kx, \\ \arccos kx, \ arctgkx, \quad dv = P(x)dx. \\ arcctgkx \end{cases}$$

Пример: $\int x\cdot arctgxdx = \begin{vmatrix} u = arctgx & du = \dfrac{1}{1+x^2}dx \\ dv = xdx & v = \int xdx = \dfrac{x^2}{2} \end{vmatrix} = \dfrac{x^2}{2}\cdot arctgx - \int \dfrac{x^2}{2}\cdot\dfrac{1}{1+x^2}dx =$

$$= \frac{x^2}{2}\cdot arctgx - \frac{1}{2}\int\frac{x^2}{1+x^2}dx = \frac{x^2}{2}\cdot arctgx - \frac{1}{2}\int\frac{(1+x^2)-1}{1+x^2}dx =$$

$$=\frac{x^2}{2}\cdot arctgx-\frac{1}{2}\left(\int dx-\int\frac{1}{1+x^2}dx\right)=\frac{x^2}{2}\cdot arctgx-\frac{1}{2}(x-arctgx)+C=$$

$$=\frac{x^2}{2}\cdot arctgx-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}arctgx+C;$$

3. Интегралы вида $\int e^{ax}\cdot\cos bxdx$, $\int e^{ax}\cdot\sin bxdx$, где a и b числа=0, берут по частям, введя замену

$$u=e^{ax},\quad dv=\begin{cases}\cos bxdx\\ \sin bxdx\end{cases},$$

приводится после повторного интегрирования к уравнению относительно исходного интеграла.

Пример: $\int e^{2x}\cdot\cos 3xdx=\left|\begin{matrix}u=e^{2x} & du=2e^{2x}dx\\ dv=\cos 3xdx & v=\int\cos 3xdx=\frac{1}{3}\sin 3x\end{matrix}\right|=$

$$=\frac{e^{2x}}{3}\cdot\sin 3x-\int\frac{1}{3}\sin 3x\cdot 2e^{2x}dx=\frac{e^{2x}}{3}\cdot\sin 3x-\frac{2}{3}\int\sin 3x\cdot e^{2x}dx=$$

$$=\left|\begin{matrix}u=e^{2x} & du=2e^{2x}dx\\ dv=\sin 3xdx & v=\int\sin 3xdx=-\frac{1}{3}\cos 3x\end{matrix}\right|=$$

$$=\frac{e^{2x}}{3}\cdot\sin 3x-\frac{2}{3}\left(-\frac{e^{2x}}{3}\cdot\cos 3x-\int-\frac{1}{3}\cos 3x\cdot 2e^{2x}dx\right)=$$

$$=\frac{e^{2x}}{3}\cdot\sin 3x-\frac{2}{3}\left(-\frac{e^{2x}}{3}\cdot\cos 3x+\frac{2}{3}\int\cos 3x\cdot e^{2x}dx\right)=$$

$$=\frac{e^{2x}}{3}\cdot\sin 3x+\frac{2e^{2x}}{9}\cdot\cos 3x-\frac{4}{9}\int\cos 3x\cdot e^{2x}dx$$

Т.е. $\underline{\int e^{2x}\cdot\cos 3xdx}=\frac{e^{2x}}{3}\cdot\sin 3x+\frac{2e^{2x}}{9}\cdot\cos 3x-\underline{\frac{4}{9}\int e^{2x}\cdot\cos 3xdx}$

$$\frac{13}{9}\int e^{2x}\cdot\cos 3xdx=\frac{e^{2x}}{3}\cdot\sin 3x+\frac{2e^{2x}}{9}\cdot\cos 3x$$

$$\int e^{2x}\cdot\cos 3xdx=\frac{9}{13}\left(\frac{e^{2x}}{3}\cdot\sin 3x+\frac{2e^{2x}}{9}\cdot\cos 3x\right)+C=\frac{3e^{2x}}{13}\cdot\sin 3x+\frac{2e^{2x}}{13}\cdot\cos 3x+C$$

ЗАМЕЧАНИЕ: иногда интегрирование по частям позволяет получить соотношение между неопределенным интегралом, содержащим степень некоторой функции, и аналогичным интегралом, но с меньшим показателем степени той же функции. Подобные соотношения называются *рекуррентными формулами*.

Пример: $\int \frac{dx}{\left(x^2+1\right)^3}$

Решение: Используя рекуррентную формулу

$$\int \frac{dx}{\left(x^2+1\right)^n} = \frac{1}{2n-2}\cdot\frac{x}{\left(x^2+1\right)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2n-2}\int \frac{dx}{\left(x^2+1\right)^{n-1}}$$ получаем:

$$\int \frac{dx}{\left(x^2+1\right)^3} = \frac{1}{4}\cdot\frac{x}{\left(x^2+1\right)^2} + \frac{3}{4}\int \frac{dx}{\left(x^2+1\right)^2} = \frac{1}{4}\cdot\frac{x}{\left(x^2+1\right)^2} + \frac{3}{4}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{x}{\left(x^2+1\right)} + \frac{1}{2}\int\frac{dx}{x^2+1}\right) =$$

$$= \frac{1}{4}\cdot\frac{x}{\left(x^2+1\right)^2} + \frac{3}{8}\cdot\frac{x}{\left(x^2+1\right)} + \frac{3}{8}\int\frac{dx}{x^2+1} = \frac{1}{4}\cdot\frac{x}{\left(x^2+1\right)^2} + \frac{3}{8}\cdot\frac{x}{\left(x^2+1\right)} + \frac{3}{8} arctgx + C$$

Упражнение 3:

1) $\int x\sin x dx$
2) $\int x^2 \ln x dx$
3) $\int arctgx dx$
4) $\int \left(x^2+1\right)e^{-2x} dx$
5) $\int \arcsin 2x dx$
6) $\int x^2 e^{4x} dx$
7) $\int x\cos 6x dx$
8) $\int \ln x dx$
9) $\int \cos(\ln x) dx$
10) $\int \sin x \cdot \ln(tgx) dx$
11) $\int e^{3x}\sin x dx$
12) $\int \sin(\ln x) dx$

Тема 4: Интегрирование рациональных дробей

Рациональной дробью R(x) называется дробь, числитель и знаменатель которой являются многочлены, т.е.

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_n}{b_0x^m + b_1x^{m-1} + b_2x^{m-2} + \ldots + b_m}.$$

Например: $\frac{2x^4}{x^2-3x+2} - \textit{неправильная дробь};$

$\dfrac{x^2+1}{x^4-x^3+3}$ – *правильная дробь*.

Всякую неправильную дробь можно представить в виде суммы многочлена (целой части) и правильной дроби. Это достигается путем деления числителя на знаменатель по правилу деления многочлена на многочлен.

Например: $\dfrac{x^4-2x^3+x^2-1}{x^2+x-2}=x^2-3x+6+\dfrac{-12x+11}{x^2+x-2}$

Интегрирование простейших рациональных дробей

Простейшими рациональными дробями называют дроби следующего вида:

1. $\dfrac{A}{x-a}$
2. $\dfrac{A}{(x-a)^n}$, $n\ge 2$
3. $\dfrac{Mx+N}{x^2+px+q}$
4. $\dfrac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n}$, $n\ge 2$

где A, a, M, N, p, q – действительные числа, n – натуральное число, x^2+px+q – не разлагается на линейные множители (т.е. $\dfrac{p^2}{4}-q<0$).

Простейшие дроби 1-го и 2-го типов интегрируются по формулам:

1. $\displaystyle\int\frac{A}{x-a}dx=A\int\frac{d(x-a)}{x-a}=A\ln|x-a|+C$
2. $\displaystyle\int\frac{A}{(x-a)^n}dx=A\int\frac{d(x-a)}{(x-a)^n}=\frac{A}{(1-n)\cdot(x-a)^{n-1}}+C$

Пример: $\displaystyle\int\frac{8dx}{(x-6)^5}=8\int\frac{d(x-6)}{(x-6)^5}=8\int(x-6)^{-5}d(x-6)=\frac{8\cdot(x-6)^{-4}}{-4}+C=\frac{-2}{(x-6)^4}+C$

3. $\displaystyle\int\frac{Mx+N}{x^2+px+q}dx$ – сводится к табличным подстановкой

$z=\dfrac{1}{2}\left(x^2+px+q\right)'=x+\dfrac{p}{2}$, приводящей знаменатель

$x^2+px+q=\left(x+\dfrac{p}{2}\right)^2+q-\left(\dfrac{p}{2}\right)^2$ к виду z^2+k^2, *где* $k^2=q-\left(\dfrac{p}{2}\right)^2$.

Пример: Найти $\int \frac{x-1}{x^2+2x+2}dx = \left| \begin{matrix} z = \frac{1}{2}\left(x^2+2x+2\right)' = x+1 \\ x = z-1,\ dx = dz \end{matrix} \right| =$

$$= \int \frac{z-1-1}{(z-1)^2+2(z-1)+2}dz = \int \frac{z-2}{z^2-2z+1+2z-2+2}dz = \int \frac{z-2}{z^2+1}dz =$$

$$= \int \frac{z}{z^2+1}dz - \int \frac{2}{z^2+1}dz = \left| \begin{matrix} z^2+1=t \\ 2zdz = dt \\ zdz = \frac{dt}{2} \end{matrix} \right| = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{z} - 2\int \frac{dz}{z^2+1} = \frac{1}{2}\ln|t| - 2arctgz + C =$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left(z^2+1\right) - 2arctgz + C = \frac{1}{2}\ln\left((x+1)^2+1\right) - 2arctg(x+1) + C =$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left(x^2+2x+2\right) - 2arctg(x+1) + C$$

4. Простейшие дроби 4-го типа в случае $n \geq 2$ интегрируются той же подстановкой $z = \frac{1}{2}\left(x^2+px+q\right)' = x + \frac{p}{2}$. Она преобразует интеграл $\int \frac{Mx+N}{\left(x^2+px+q\right)^n}dx$ к виду $\int \frac{Mz+L}{\left(z^2+k^2\right)^n}dz$, где $L = \frac{2N-Mp}{2}$, $k^2 = q - \frac{p^2}{4}$.

Первое слагаемое $\int \frac{Mz}{\left(z^2+k^2\right)^n}dz = -\frac{M}{2}\cdot\frac{1}{(n-1)\left(z^2+k^2\right)^{n-1}} + C$ интегрируется сразу. Второе слагаемое $L\int \frac{dz}{\left(z^2+k^2\right)^n}$ вычисляется тригонометрической подстановкой или по рекуррентной формуле $\int \frac{dz}{\left(z^2+k^2\right)^n} = \frac{1}{2(n-1)\cdot k^2}\cdot\left(\frac{z}{\left(z^2+k^2\right)^{n-1}} + (2n-3)\cdot\int \frac{dz}{\left(z^2+k^2\right)^{n-1}}\right)$. Она сводит интеграл $\int \frac{dz}{\left(z^2+k^2\right)^n}$ к интегралу того же типа, но показатель n в знаменателе уменьшается на единицу. Повторяя процесс, в конце концов, приводим к интегралу $\int \frac{dz}{z^2+k^2} = \frac{1}{k}arctg\frac{z}{k} + C$.

Пример: $\int \frac{2x+2}{\left(x^2-3x+\frac{13}{4}\right)^2}dx = \left| \begin{matrix} z=\frac{1}{2}\left(x^2-3x+\frac{13}{4}\right)'=x-\frac{3}{2} \\ x=z+\frac{3}{2},\ dx=dz \end{matrix} \right| =$

$$=\int \frac{2\cdot\left(z+\frac{3}{2}\right)+2}{\left(\left(z+\frac{3}{2}\right)^2-3\cdot\left(z+\frac{3}{2}\right)+\frac{13}{4}\right)^3}dz = \int \frac{2z+5}{\left(z^2+3z+\frac{9}{4}-3z-\frac{9}{2}+\frac{13}{4}\right)^3}dz =$$

$$=\int \frac{2z+5}{\left(z^2+1\right)^3}dz = \int \frac{2z}{\left(z^2+1\right)^3}dz + \int \frac{5}{\left(z^2+1\right)^3}dz = I_1 + I_2$$

$$I_1 = \int \frac{2z}{\left(z^2+1\right)^3}dz = \left| \begin{matrix} z^2+1=t \\ 2zdz=dt \end{matrix} \right| = \int \frac{dt}{t^3} = \int t^{-3}dt = \frac{t^{-2}}{-2} = -\frac{1}{2t^2} = -\frac{1}{2\left(z^2+1\right)^2}$$

C=*const* опускаем, относя ко второму интегралу, который вычислим по рекуррентной формуле (полагая $k^2=1,\ n=3$) получим:

$$I_2 = \int \frac{5}{\left(z^2+1\right)^3}dz = 5\int \frac{dz}{\left(z^2+1\right)^3} = 5\cdot\left(\frac{1}{4}\cdot\frac{z}{\left(z^2+1\right)^2} + \frac{3}{4}\int \frac{dz}{\left(z^2+1\right)^2}\right) =$$

$$=\frac{5}{4}\cdot\frac{z}{\left(z^2+1\right)^2} + \frac{15}{4}\cdot\int \frac{dz}{\left(z^2+1\right)^2}$$

применим повторно рекуррентную формулу

$$I_2 = \frac{5}{4}\cdot\frac{z}{\left(z^2+1\right)^2} + \frac{15}{4}\int \frac{dz}{\left(z^2+1\right)^2} = \frac{5}{4}\cdot\frac{z}{\left(z^2+1\right)^2} + \frac{15}{4}\left(\frac{z}{2}\cdot\frac{1}{z^2+1} + \frac{1}{2}arctgz\right) =$$

$$=\frac{5z}{4\left(z^2+1\right)^2} + \frac{15z}{8\left(z^2+1\right)} + \frac{15}{8}arctgz + C$$

Объединяем результаты интегрирования, получим:

$$\int \frac{2x+2}{\left(x^2-3x+\frac{13}{4}\right)^2}dx = -\frac{1}{2\left(z^2+1\right)^2} + \frac{5z}{4\left(z^2+1\right)^2} + \frac{15z}{8\left(z^2+1\right)} + \frac{15}{8}arctgz + C =$$

$$=\frac{-4+10z+15z\left(z^2+1\right)}{8\left(z^2+1\right)^2} + \frac{15}{8}arctgz + C = \frac{15z^3+25z-4}{8\left(z^2+1\right)^2} + \frac{15}{8}arctgz + C =$$

$$= \frac{15\left(x-\frac{3}{2}\right)^3 + 25\left(x-\frac{3}{2}\right) - 4}{8\left(\left(x-\frac{3}{2}\right)^2 + 1\right)^2} + \frac{15}{8} arctg\left(x-\frac{3}{2}\right) + C$$

<u>Разложение рациональной дроби на простейшие дроби</u>

Всякую правильную рациональную дробь $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ можно представить в виде суммы конечного числа простейших рациональных дробей первого-четвертого типов. Для разложения $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ на простейшие дроби необходимо разложить знаменатель $Q_m(x)$ на линейные и квадратные множители, для чего надо решить уравнение $Q_m(x) = 0$, т.е. $b_0x^m + b_1x^{m-1} + b_2x^{m-2} + \ldots + b_m = 0$.

Предположим, что уравнение решено и найдены его корни. Согласно основной теореме алгебры $Q_m(x) = 0$ имеет ровно m корней, действительных и комплексных с учетом их кратности. Тогда многочлен $Q_m(x)$ разложим на линейные и квадратные множители $Q_m(x) = (x-\alpha)^k \cdot (x-\beta)^l \cdot (x^2 + px + q)^s$, где $k + l + 2s = m$.

Теорема: Правильную рациональную дробь $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$, где $Q_m(x) = (x-\alpha)^k \cdot (x-\beta)^l \cdot (x^2 + px + q)^s$, учитывая, $(x^2 + px + q)$ – не имеет действительных корней, можно единственным образом разложить на сумму простейших дробей

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{A_1}{(x-\alpha)^k} + \frac{A_2}{(x-\alpha)^{k-1}} + \ldots + \frac{A_k}{x-\alpha} + \frac{B_1}{(x-\beta)^l} + \frac{B_2}{(x-\beta)^{l-1}} + \ldots + \frac{B_l}{x-\beta} +$$
$$+ \frac{M_1x + N_1}{(x^2 + px + q)^s} + \frac{M_2x + N_2}{(x^2 + px + q)^{s-1}} + \ldots + \frac{M_sx + N_s}{x^2 + px + q} \qquad (1)$$

где $A_1, A_2, \ldots, A_k,\ B_1, B_2, \ldots, B_l, M_1, M_2, \ldots, M_s, N_1, N_2, \ldots, N_s$ – неопределенные коэффициенты, подлежащие определению. Причем, каждому множителю $(x-\alpha)^k$ в разложении (1) соответствует группа и k простейших дробей 1 и 2 типов, а каждому множителю $\left(x^2+px+q\right)^s$ группа s простейших дробей 3 и 4 типов.

Примеры:

1) $\dfrac{2x-1}{x^3(x-1)^2(x+3)}=\dfrac{A}{x^3}+\dfrac{B}{x^2}+\dfrac{C}{x}+\dfrac{D}{(x-1)^2}+\dfrac{E}{x-1}+\dfrac{F}{x+3};$

2) $\dfrac{3x^2+4}{(x+2)(x-1)(x^2+1)}=\dfrac{A}{x+2}+\dfrac{B}{x-1}+\dfrac{Mx+N}{x^2+1};$

3) $\dfrac{x^2}{(x^3-8)(x^2-4)}=\dfrac{x^2}{(x-2)(x^2+2x+4)(x-2)(x+2)}=\dfrac{x^2}{(x-2)^2(x^2+2x+4)(x+2)}=$

$=\dfrac{A}{(x-2)^2}+\dfrac{B}{x-2}+\dfrac{C}{x+2}+\dfrac{Mx+N}{x^2+2x+4};$

4) $\dfrac{x^2+2x+13}{(x-1)(x^2+4)^2}=\dfrac{A}{x-1}+\dfrac{M_1x+N_1}{(x^2+4)^2}+\dfrac{M_2x+N_2}{x^2+4}.$

Для отыскания коэффициентов разложения (1), применяют метод неопределенных коэффициентов.

Метод неопределенных коэффициентов

Пусть дано разложение правильной рациональной дроби $\dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ на простейшие дроби с неопределенными коэффициентами. Приведем простейшие дроби к общему знаменателю $Q_m(x)$ и приравняем многочлен, к многочлену $P_n(x)$. Для тождества двух многочленов необходимо и достаточно, чтобы коэффициенты при одинаковых степенях x этих многочленов были равны. Учитывая это, приравниваем коэффициенты при одинаковых степенях x в левой и правой частях полученного тождества. Получим систему m линейных алгебраических уравнений для нахождения m неизвестных коэффициентов.

Пример: разложить рациональную дробь на простейшие дроби

1) $\dfrac{x-1}{x(x^2+1)}$ 2) $\dfrac{4x^2+16x-8}{x^3-4x}$

Решение: 1) $\frac{x-1}{x(x^2+1)}=\frac{A}{x}+\frac{Mx+N}{x^2+1}$, где числа A, M, N необходимо найти. Правую часть этого разложения приведем к общему знаменателю. Тогда

$$\frac{x-1}{x(x^2+1)}=\frac{A}{x}+\frac{Mx+N}{x^2+1}=\frac{A(x^2+1)+(Mx+N)\cdot x}{x(x^2+1)}=\frac{Ax^2+A+Mx^2+Nx}{x(x^2+1)}$$

Следовательно, $x-1=Ax^2+A+Mx^2+Nx$. Приравниваем коэффициенты при одинаковых степенях:

$$\begin{array}{l|l} x^2 & A+M=0 \\ x & N=1 \\ \textit{свободные} & A=-1 \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} N=1 \\ A=-1 \\ M=-A=1 \end{array} \quad \Rightarrow \quad \frac{x-1}{x(x^2+1)}=\frac{-1}{x}+\frac{1\cdot x+1}{x^2+1}=-\frac{1}{x}+\frac{x+1}{x^2+1}$$

2) $$\frac{4x^2+16x-8}{x^3-4x}=\frac{4x^2+16x-8}{x(x^2-4)}=\frac{4x^2+16x-8}{x(x-2)(x+2)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-2}+\frac{C}{x+2}$$

Правую часть этого разложения приведем к общему знаменателю. Тогда

$$\frac{4x^2+16x-8}{x^3-4x}=\frac{A(x^2-4)+Bx(x+2)+Cx(x-2)}{x^3-4x}=$$

$$=\frac{Ax^2-4A+Bx^2+2Bx+Cx^2-2Cx}{x^3-4x}$$

Следовательно, $4x^2+16x-8=Ax^2-4A+Bx^2+2Bx+Cx^2-2Cx$. Приравниваем коэффициенты при одинаковых степенях:

$$\begin{array}{l|l} x^2 & A+B+C=4 \\ x & 2B-2C=16 \\ \textit{свободные} & -4A=-8 \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} A=2 \\ B+C=2 \\ B-C=8 \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} A=2 \\ B=5 \\ C=-3 \end{array}$$

Т.о., $\frac{4x^2+16x-8}{x^3-4x}=\frac{2}{x}+\frac{5}{x-2}+\frac{-3}{x+2}=\frac{2}{x}+\frac{5}{x-2}-\frac{3}{x+2}$

Пример: Найти $\int\frac{x^4-3x^2-3x-2}{x^3-x^2-2x}dx$

Решение: Дробь – неправильная, поэтому выделим целую часть и разложим знаменатель на множители:

$$\frac{x^4-3x^2-3x-2}{x^3-x^2-2x}=x+1-\frac{x+2}{x^3-x^2-2x}=x+1-\frac{x+2}{x\left(x^2-x-2\right)}=$$

$$=x+1-\frac{x+2}{x(x-2)(x+1)}$$

Разложим правильную дробь на простейшие:

$$\frac{x+2}{x(x-2)(x+1)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-2}+\frac{C}{x+1}=\frac{A\left(x^2-x-2\right)+Bx(x+1)+Cx(x-2)}{x(x-2)(x+1)}=$$

$$=\frac{Ax^2-Ax-2A+Bx^2+Bx+Cx^2-2Cx}{x(x-2)(x+1)}$$

Приравниваем числители и находим коэффициенты:

$$x+2=Ax^2-Ax-2A+Bx^2+Bx+Cx^2-2Cx$$

$$\begin{array}{l|l} x^2 & A+B+C=0 \\ x & -A+B-2C=1 \\ \text{свободные} & -2A=2 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} A=-1 \\ B+C=1 \\ B-2C=2 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} A=2 \\ B=\frac{4}{3} \\ C=-\frac{1}{3} \end{array}$$

$$\int\frac{x^4-3x^2-3x-2}{x^3-x^2-2x}dx=\int\left(x+1+\frac{1}{x}-\frac{4}{3(x-2)}+\frac{1}{3(x+1)}\right)dx=$$

$$=\int xdx+\int dx+\int\frac{1}{x}dx-\frac{4}{3}\int\frac{dx}{x-2}+\frac{1}{3}\int\frac{dx}{x+1}=\frac{x^2}{2}+x+\ln|x|-\frac{4}{3}\ln|x-2|+\frac{1}{3}\ln|x+1|+C$$

Упражнение 4:

1) $\int\frac{x}{x^2-2x+2}dx$

2) $\int\frac{x+1}{8-2x-x^2}dx$

3) $\int\frac{2x+3}{x^2+6x+13}dx$

4) $\int\frac{x}{x^2-3x-4}dx$

5) $\int\frac{x+2}{x^2+3x}dx$

6) $\int\frac{x+4}{5x-x^2-6}dx$

7) $\int\frac{x^5-2x^3+4}{x^3-4x}dx$

8) $\int\frac{x^2}{x^2+6x+8}dx$

9) $\int\frac{dx}{(x-2)(x-1)^2}$

10) $\int\frac{3x+2}{x(x+1)^2}dx$

11) $\int\frac{dx}{x\left(x^2+1\right)}$

12) $\int \frac{dx}{(x^2+1)(x^2-2x+5)}$ 13) $\int \frac{x}{(x^2+2x+2)^2}dx$

Тема 5: Интегрирование тригонометрических функций

1. Интегралы вида:

a) $\int \cos mx \cdot \cos nx dx = \frac{1}{2}\int (\cos(m-n)x + \cos(m+n)x)dx$

b) $\int \sin mx \cdot \sin nx dx = \frac{1}{2}\int (\cos(m-n)x - \cos(m+n)x)dx$

c) $\int \sin mx \cdot \cos nx dx = \frac{1}{2}\int (\sin(m-n)x + \sin(m+n)x)dx$

Пример: Найти $\int \sin 4x \cdot \sin 2x dx$

Решение: $\int \sin 4x \cdot \sin 2x dx = \frac{1}{2}\int (\cos 2x - \cos 6x)dx = \frac{1}{4}\sin 2x - \frac{1}{12}\sin 6x + C$

2. Интегралы вида: $\int \sin^m x \cdot \cos^n x dx$, где m и n целые числа

a) Одно из чисел m или n – нечетно. Пусть $m = 2k+1$, n – любое, то $\int \sin^{2k+1} x \cdot \cos^n x dx = \int \sin^{2k} x \cdot \cos^n x \cdot \sin x dx = -\int (1-\cos^2 x)^k \cdot \cos^n x d(\cos x)$, после раскрытия скобок получим интегралы от степенной функции.

Пример: $\int \sin^2 x \cdot \cos^3 x dx = \int \sin^2 x \cdot (1-\sin^2)\cos x dx = \begin{vmatrix} \sin x = t \\ \cos x dx = dt \end{vmatrix} =$

$= \int (t^2 - t^4)dt = \frac{t^3}{3} - \frac{t^5}{5} + C = \frac{\sin^3 x}{3} - \frac{\sin^5 x}{5} + C$

b) Пусть m, n – четные неотрицательные числа (в частности одно из них может быть =0). Заменяя $\begin{matrix} \cos x \cdot \sin x = \frac{1}{2}\sin 2x \\ \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}, \sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2} \end{matrix}$ понижаем степень в подынтегральной функции.

Пример: $\int \sin^2 x \cdot \cos^2 x dx = \frac{1}{4}\int (1-\cos^2 2x)dx = \frac{1}{4}\int \sin^2 2x dx =$

$$=\frac{1}{8}\int(1-\cos 4x)dx=\frac{1}{8}\int dx-\frac{1}{8}\int\cos 4x dx=\left|\begin{array}{l}4x=t\\ 4dx=dt\\ dx=\frac{1}{4}dt\end{array}\right|=\frac{1}{8}\int dx-\frac{1}{32}\int\cos t dt=$$

$$=\frac{1}{8}x-\frac{1}{32}\cdot\sin t+C=\frac{1}{8}x-\frac{1}{32}\cdot\sin 4x+C$$

3. Интегралы вида: $\int R(\sin x,\cos x)dx$ можно свести к интегралу от рациональной функции подстановкой:

$tg\frac{x}{2}=t,\ \sin x=\frac{2t}{1+t^2},\ \cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2},\ x=2arctgt,\ dx=\frac{2dt}{1+t^2}$, которая называется универсальной подстановкой. Тогда $\int R(\sin x,\cos x)dx=\int R\left(\frac{2t}{1+t^2},\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\cdot\frac{2}{1+t^2}dt$

Пример:

$$\int\frac{dx}{5+3\cos x}=\left|\begin{array}{l}tg\frac{x}{2}=t,\ \cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2},\\ x=2arctgt,\ dx=\frac{2dt}{1+t^2}\end{array}\right|=\int\frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{5+3\frac{1-t^2}{1+t^2}}=\int\frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{\frac{5+5t^2+3-3t^2}{1+t^2}}=$$

$$=\int\frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{\frac{2t^2+8}{1+t^2}}=\int\frac{2(1+t^2)}{2(1+t^2)\cdot(t^2+4)}dt=\int\frac{dt}{t^2+4}=\frac{1}{2}arctg\frac{t}{2}+C=\frac{1}{2}arctg\frac{tg\frac{x}{2}}{2}+C$$

4. Интегралы вида: $\int R(\sin x)\cdot\cos x dx$ можно найти с помощью замены $\sin x=t,\ \cos x dx=dt$. Тогда $\int R(\sin x)\cdot\cos x dx=\int R(t)dt$.

Аналогично $\int R(\cos x)\cdot\sin x dx=\left|\begin{array}{l}\cos x=t\\ \sin x dx=-dt\end{array}\right|=-\int R(t)dt$.

Пример: $\int\frac{\sin^3 x}{\cos x-3}dx=\int\frac{\sin^2 x\cdot\sin x}{\cos x-3}dx=\int\frac{(1-\cos^2 x)\sin x}{\cos x-3}dx=\left|\begin{array}{l}\cos x=t\\ -\sin x dx=dt\end{array}\right|=$

$$=-\int\frac{1-t^2}{t-3}dt=\int\frac{t^2-1}{t-3}dt=\int\left(t+3+\frac{8}{t-3}\right)dt=\int tdt+\int 3dt+8\int\frac{dt}{t-3}=$$

$$=\frac{t^2}{2}+3t+8\ln|t-3|+C=\frac{\cos^2 x}{2}+3\cos x+8\ln|\cos x-3|+C$$

5. Интегралы вида: $\int R(tgx)dx$ решаются подстановкой $tgx=t,\ x=arctgt$, $dx=\dfrac{dt}{1+t^2}$. Тогда $\int R(tgx)dx=\int R(t)\dfrac{dt}{1+t^2}$.

Пример: $$\int\frac{1+tg^2x}{1+tgx}dx=\begin{vmatrix}tgx=t\\ dx=\dfrac{dt}{1+t^2}\end{vmatrix}=\int\frac{1+t^2}{1+t}\cdot\frac{dt}{1+t^2}=\int\frac{dt}{1+t}=\ln|1+t|+C=$$
$$=\ln|1+tgx|+C.$$

Пример: $$\int tg^3xdx=\begin{vmatrix}tgx=t\\ dx=\dfrac{dt}{1+t^2}\end{vmatrix}=\int t^3\cdot\frac{dt}{1+t^2}=\int\left(t-\frac{t}{1+t^2}\right)dt=\int tdt-\int\frac{t}{1+t^2}dt=$$
$$=\frac{t^2}{2}-\frac{1}{2}\ln\left(1+t^2\right)+C=\frac{tg^2x}{2}-\frac{1}{2}\ln\left(1+tg^2x\right)+C$$

6. Такой же подстановкой берутся интегралы $\int R(\sin x,\cos x)dx)$, если $\sin x$ и $\cos x$ входят только в четных степенях.

$$tgx=t,\ \sin^2x=\frac{t^2}{1+t^2},\ \cos^2x=\frac{1}{1+t^2},\ x=arctgx,\ dx=\frac{dt}{1+t^2}.$$

Пример: $$\int\frac{dx}{1+\cos^2x}=\begin{vmatrix}\cos^2x=\dfrac{1}{1+t^2},\ tgx=t\\ x=arctgx,\ dx=\dfrac{dt}{1+t^2}\end{vmatrix}=\int\frac{1}{1+\dfrac{1}{1+t^2}}\cdot\frac{dt}{1+t^2}=\int\frac{1+t^2}{2+t^2}\cdot\frac{dt}{1+t^2}=$$
$$=\int\frac{dt}{2+t^2}=\frac{1}{\sqrt{2}}arctg\,\frac{t}{\sqrt{2}}+C=\frac{1}{\sqrt{2}}arctg\,\frac{tgx}{\sqrt{2}}+C$$

7. Интегралы вида: $$\int tg^nxdx=\left|tg^2x=\frac{1}{\cos^2x}-1\right|=\int tg^{n-2}x\cdot tg^2xdx=$$
$$=\int tg^{n-2}x\cdot\left(\frac{1}{\cos^2x}-1\right)dx=\int\frac{tg^{n-2}x}{\cos^2x}dx-\int tg^{n-2}xdx=\int tg^{n-2}xd(tgx)-\int tg^{n-2}xdx=$$
$$=\frac{tg^{n-1}x}{n-1}-\int tg^{n-2}xdx$$

при этом понижается степень.

Пример: $$\int tg^4xdx=\int tg^2x\cdot tg^2xdx=\int tg^2x\cdot\left(\frac{1}{\cos^2x}-1\right)dx=\int\frac{tg^2x}{\cos^2x}dx-\int tg^2xdx=$$

$$=\frac{tg^3x}{3}-\int\left(\frac{1}{\cos^2 x}-1\right)dx=\frac{tg^3x}{3}-tgx+x+C$$

Упражнение 5:

1) $\int\frac{\cos^3 x}{\sqrt{\sin x}}dx$

2) $\int\frac{\sin^7 x}{\sqrt{\cos x}}dx$

3) $\int\frac{dx}{\cos^4 x}$

4) $\int\frac{dx}{\sin x\cdot\cos^3 x}$

5) $\int\frac{dx}{\sin^3 x\cdot\cos^3 x}$

6) $\int ctg^4 xdx$

7) $\int\frac{dx}{ctg^3 x}$

8) $\int\sin^2 x\cdot\cos^4 xdx$

9) $\int\frac{dx}{4\sin^2 x-7\cos^2 x}$

10) $\int\frac{dx}{\sin^3 x}$

11) $\int\frac{dx}{1+\sin^2 x}$

12) $\int\frac{dx}{1+\cos^2 x}$

13) $\int\frac{\sin^2 x\cos x}{\sin x+\cos x}dx$

14) $\int\frac{dx}{3\cos x+2}$

15) $\int\frac{dx}{3-2\sin x+\cos x}$

16) $\int\frac{1+ctgx}{1-ctgx}dx$

17) $\int\frac{dx}{\sqrt{\sin x\cdot\cos^3 x}}$

18) $\int\frac{dx}{\sin^2 x-4\sin x\cos x+5\cos^2 x}$

19) $\int\frac{\sin^2 x}{\cos x-3}dx$

20) $\int\frac{dx}{8-4\sin x+7\cos x}$

21) $\int\frac{dx}{5+4\sin x}$

22) $\int\frac{dx}{3\sin x-4\cos x}$

Тема 6: Интегрирование иррациональных выражений

1. Интегралы вида: $\int R\left(x,\sqrt[n1]{x^{m1}},\sqrt[n2]{x^{m2}},\ldots\right)dx$, (m1, n1, m2, n2, … – целые числа), вычисляются подстановкой $x=t^s$, где s – общий знаменатель дробей $\frac{m1}{n1},\frac{m2}{n2},\ldots$. При такой замене переменной все отношения $\frac{m1}{n1}=r_1,\frac{m2}{n2}=r_2,\ldots$

являются целыми числами, т.е. интеграл приводится к рациональной функции от переменной t.

Пример: $$\int \frac{\sqrt{x}dx}{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}} = \left| \begin{array}{l} \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}} = \left(x^{\frac{1}{6}}\right)^3 = t^3 \\ \sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}} = \left(x^{\frac{1}{6}}\right)^2 = t^2 \\ x^{\frac{1}{6}} = t,\ x = t^6,\ dx = 6t^5dt \end{array} \right| = \int \frac{t^3}{t^3-t^2}\cdot 6t^5dt =$$

$$= 6\int \frac{t^6}{t-1}dt = \left| \frac{t^6}{t-1} = t^5+t^4+t^3+t^2+t+1+\frac{1}{t-1} \right| =$$

$$= 6\cdot\left(\frac{t^6}{6}+\frac{t^5}{5}+\frac{t^4}{4}+\frac{t^3}{3}+\frac{t^2}{2}+t+\ln|t-1|\right)+C =$$

$$= t^6+\frac{6t^5}{5}+\frac{3t^4}{2}+2t^3+3t^2+6t+6\ln|t-1|+C =$$

$$= x+\frac{6\sqrt[6]{x^5}}{5}+\frac{3\sqrt[3]{x^2}}{2}+2\sqrt{x}+3\sqrt[3]{x}+6\sqrt[6]{x}+6\ln\left|\sqrt[6]{x}-1\right|+C$$

2. Интегралы вида: $\int R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m1}{n1}}, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m2}{n2}}, \ldots\right)dx$, (m1, n1, m2, n2, … – целые числа). Эти интегралы вычисляются подстановкой $\frac{ax+b}{cx+d} = t^s$, где s – общий знаменатель дробей $\frac{m1}{n1}, \frac{m2}{n2}, \ldots$ сводится к рациональной функции от переменной t.

Пример: $$\int \frac{1}{(1-x)^2}\cdot\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}dx = \left| \begin{array}{l} \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} = t \Rightarrow \frac{1-x}{1+x} = t^2 \\ x = \frac{1-t^2}{1+t^2},\ dx = -\frac{4tdt}{\left(1+t^2\right)^2} \\ 1-x = \frac{2t^2}{1+t^2} \end{array} \right| = -\int \frac{\left(1+t^2\right)^2}{4t^4}\cdot t\cdot\frac{4tdt}{\left(1+t^2\right)^2} =$$

$$=-\int\frac{dt}{t^2}=-\int t^{-2}dt=\frac{1}{t}+C=\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}+C$$

Пример: $\int\frac{dx}{\left(\sqrt[4]{x+3}-1\right)\cdot\sqrt{x+3}}=\left|\begin{array}{l}\sqrt[4]{x+3}=t,\ \sqrt{x+3}=t^2\\ x+3=t^4,\ dx=4t^3dt\end{array}\right|=\int\frac{4t^3dt}{(t-1)\cdot t^2}=$

$$=4\int\frac{t}{t-1}dt=4\cdot\int\left(1+\frac{1}{t-1}\right)dt=4\cdot\left(t+\ln|t-1|\right)+C=4\sqrt[4]{x+3}+\ln\left|\sqrt[4]{x+3}-1\right|$$

Упражнения 6:

1) $\int\frac{dx}{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}$

2) $\int\frac{dx}{(5+x)\cdot\sqrt{x+1}}$

3) $\int\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}\cdot\frac{dx}{(x-1)^3}$

4) $\int\frac{\sqrt{x}dx}{1+\sqrt[4]{x}}$

5) $\int\frac{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}{\sqrt[4]{x^5}-\sqrt[6]{x^7}}dx$

6) $\int\frac{\sqrt{1+x}}{x}dx$

7) $\int\frac{dx}{(x-1)\cdot\sqrt[4]{x^3}}$

8) $\int\frac{x+1}{x\cdot\sqrt{x-2}}dx$

9) $\int\frac{\sqrt[3]{3x+4}}{1+\sqrt[3]{3x+4}}dx$

10) $\int\frac{dx}{\left(\sqrt[3]{x}+4\right)\cdot\sqrt{x}}$

11) $\int\frac{\sqrt{x}dx}{1+\sqrt{x}}$

12) $\int\frac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{x+1}-1}dx$

РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКАЯ РАБОТА ПО ТЕМЕ «НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ»

НАЙТИ ИНТЕГРАЛЫ

Вариант 1

$\int \frac{\sin 2x}{1+\sin^2 x}dx$

$\int \frac{\sqrt[3]{\ln x+5}}{x}dx$

$\int \frac{arctgx}{1+x^2}dx$

$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}\arcsin x}$

$\int \frac{x^3}{x-4}dx$

$\int \arcsin 2xdx$

$\int (x^2+3)e^{3x}dx$

$\int \frac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{x+2}-1}dx$

$\int \frac{dx}{(x+2)(x^2+4)}$

$\int \sin^2 x\cos^3 xdx$

$\int \frac{\sin^4 x}{\cos^4 x}dx$

$\int \frac{\sin 2x}{\sqrt{1-\sin^2 x}}dx$

$\int e^{4x}\sin e^{4x}dx$

$\int \frac{x-2}{x+1}dx$

$\int x\ln xdx$

$\int arctgxdx$

$\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}+3}dx$

$\int \frac{x^2-1}{x^3-4x}dx$

$\int \sin^2\left(x+\frac{3}{4}\pi\right)dx$

$\int \frac{dx}{\sin x+\cos x}$

$\int \frac{dx}{x\ln^2 x}$

$\int \frac{4x^5}{\sqrt{x^6+7}}dx$

$\int \frac{x^3}{4+5x^4}dx$

$\int \frac{dx}{\cos^2 x\sqrt{1+tgx}}$

$\int \frac{dx}{2x^2+4x+6}$

$\int x\cos xdx$

$\int \frac{x}{e^{2x}}dx$

$\int \frac{x-2}{\sqrt{x^2+2x}}dx$

$\int \frac{dx}{x^2+x}$

$\int \cos 2x\cos 4xdx$

$\int \cos^4 xdx$

$\int e^{2x^2+3}xdx$

$\int x\sin x^2dx$

Вариант 2

$\int \frac{\sin 2x}{1+\sin^2 x}dx$

$\int \frac{e^{arctgx}}{1+x^2}dx$

$\int \frac{dx}{\sin^2(2-3x)}$

$\int \sqrt[3]{4-3x}dx$

$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{4-5x}}$

$\int \cos(4x-2)dx$

$\int \frac{2x^2}{x^2-1}dx$

$\int xarctg2xdx$

$\int x^2\sin 3xdx$

$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x}(1-\sqrt[3]{x})}$

$\int \frac{x^3-1}{x^3-4x}dx$

$\int \sin^3 x\cos^2 xdx$

$\int \frac{dx}{8-4\sin x+7\cos x}$

$\int x\cdot 2^{x^2}dx$

$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}\arcsin^2 x}$

$$\int \frac{\sin 2x}{8-\cos 2x}dx$$

$$\int \frac{x^4}{\sqrt{3-5x^5}}dx$$

$$\int \frac{x+4}{x-1}dx$$

$$\int \sqrt{x}\ln x dx$$

$$\int x^2 e^x dx$$

$$\int \frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt[3]{x+1}+1}dx$$

$$\int \frac{x^2+4}{x^2+10x+9}dx$$

$$\int \cos^2\left(\frac{x}{2}+\pi\right)dx$$

$$\int \cos^3 x dx$$

$$\int \frac{e^{ctgx}}{\sin^2 x}dx$$

$$\int \cos^4 x \sin 2x dx$$

$$\int \frac{dx}{x^2+6x+10}$$

$$\int xe^{-2x}dx$$

$$\int \arcsin 4x dx$$

$$\int \frac{x+3}{5+2x-x^2}dx$$

$$\int \frac{x^2-2}{x(x+1)}dx$$

$$\int \cos 8x \cos x dx$$

$$\int \frac{dx}{\sin^3 x \cos^3 x}$$

Вариант 3

$$\int \frac{e^x}{\sqrt[3]{3+e^x}}dx$$

$$\int \sqrt[3]{5-2x}dx$$

$$\int \frac{dx}{1-4x^2}$$

$$\int \left(1-2\sin^2\frac{x}{2}\right)dx$$

$$\int \frac{x^2+4}{x+1}dx$$

$$\int \frac{4^{\frac{1}{x}}}{5x^2}dx$$

$$\int tg 2x dx$$

$$\int \frac{\cos(\arcsin 2x)}{\sqrt{1-4x^2}}dx$$

$$\int \frac{x+(\arccos 3x)^2}{\sqrt{4-9x^2}}dx$$

$$\int \frac{5x^3+1}{x^2+1}dx$$

$$\int 3^{5x}\cdot 4^{5x}dx$$

$$\int \frac{e^{4x}dx}{e^{4x}+5}$$

$$\int e^{4-x^3}x^2 dx$$

$$\int \frac{dx}{x^2+4x+17}$$

$$\int (x+2)\cos x dx$$

$$\int arctg 5x dx$$

$$\int \sin 4x \cos x dx$$

$$\int x^2 \cos 4x dx$$

$$\int \frac{dx}{(5+x)\sqrt{1+x}}$$

$$\int \frac{x+4}{(x+1)(x+2)}dx$$

$$\int \cos^2\frac{x}{2}dx$$

$$\int \frac{\cos^2 x}{\sin x}dx$$

$$\int \frac{\ln^2 x}{x^2}dx$$

$$\int xe^{-5x}dx$$

$$\int \frac{\sqrt{4x+1}}{1+\sqrt[3]{4x+1}}dx$$

$$\int \frac{2x-5}{x(x^2-5x+4)}dx$$

$$\int \frac{tgx dx}{\sqrt{\sin x \cos^3 x}}$$

$$\int \ln(x+1)dx$$

$$\int \frac{\sin x dx}{\sqrt{\cos^2 x-5}}$$

$$\int \frac{3x+2}{x^2+5x+7}dx$$

$$\int \frac{dx}{(x^2+2)(x-1)}$$

$$\int ctg^5 x dx$$

$$\int \frac{dx}{2+\cos x}$$

Вариант 4

$$\int 2^x\left(1+\frac{2^{-x}}{x^4}\right)dx$$
$$\int \frac{arctg^4 x}{1+x^2}dx$$
$$\int \frac{x^2dx}{\sqrt{1-x^3}}$$
$$\int \frac{\sin}{\sqrt{1-\cos^2 x}}dx$$
$$\int \frac{x^3}{x+4}dx$$
$$\int x\cdot 3^{2x}dx$$
$$\int (x^2-2)\cos 2xdx$$
$$\int \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt[4]{x}}dx$$
$$\int \frac{dx}{x^3+3x^2+2x}$$
$$\int \sin\left(4z-\frac{\pi}{6}\right)dx$$
$$\int x^3\cdot e^{x^4}dx$$
$$\int \sin^6 x\cos xdx$$
$$\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx$$
$$\int \frac{x^2-1}{x^2+4}dx$$
$$\int \ln xdx$$
$$\int arctg 4xdx$$
$$\int \frac{\sqrt{1+x}}{x}dx$$
$$\int \frac{x-4}{x^3+2x}dx$$
$$\int \cos^2 5xdx$$
$$\int \frac{dx}{x\sqrt[5]{\ln^3 x}}$$
$$\int \frac{dx}{\sin^2(4x-2)}$$
$$\int \frac{\ln^5 x}{x}dx$$
$$\int \frac{dx}{x\ln^2 x}$$
$$\int \frac{dx}{x^2+7x+5}$$
$$\int x\cos 5xdx$$
$$\int x^2\ln xdx$$
$$\int \frac{dx}{x^3+3x+2}$$
$$\int \frac{x^3dx}{(x-2)(x+4)}$$
$$\int \sin^3 x\cos xdx$$
$$\int \frac{\cos x}{1+\cos x}dx$$
$$\int \frac{tgxdx}{1-ctg^2 x}$$
$$\int \sin 4x\sin 6xdx$$
$$\int \frac{dx}{tg^3 x}$$

Вариант 5

$$\int \frac{dx}{3-2x}$$
$$\int \frac{\sqrt[3]{\ln x+5}}{x}dx$$
$$\int \frac{arctgx}{1+x^2}dx$$
$$\int \frac{x^4+1}{x^2+3}dx$$
$$\int \frac{\sqrt{x+2}+1}{\sqrt{x+2}-1}dx$$
$$\int \frac{x}{\sqrt{3x+4}}dx$$
$$\int \arcsin 2xdx$$
$$\int x^2e^{6x}dx$$
$$\int \frac{dx}{(x+2)(x^2+4)}$$
$$\int \sin^2 x\cos^3 xdx$$

$$\int \frac{\sin^4 x}{\cos^4 x}dx$$

$$\int e^{2x^2+3}xdx$$

$$\int x\sin x^2 dx$$

$$\int \frac{\sin 2x}{\sqrt{1-\sin^2 x}}dx$$

$$\int \frac{x+4}{x-1}dx$$

$$\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}+3}dx$$

$$\int \frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+5}}dx$$

$$\int x\ln xdx$$

$$\int arctgxdx$$

$$\int \frac{x^2-1}{x^3-4x}dx$$

$$\int \sin^2\left(x+\frac{3\pi}{4}\right)dx$$

$$\int \frac{dx}{\sin x+\cos x}$$

$$\int \frac{dx}{x\ln^2 x}$$

$$\int \frac{4x^5}{\sqrt{x^6+7}}dx$$

$$\int \frac{x^3}{4+5x^4}dx$$

$$\int \frac{dx}{x^2+16x+15}$$

$$\int \frac{x-2}{\sqrt{x^2-2x}}dx$$

$$\int \frac{x}{4+\sqrt{x}}dx$$

$$\int x\cos xdx$$

$$\int \ln(5x+1)dx$$

$$\int \frac{dx}{x^2+x}$$

$$\int \sin 2x\cos xdx$$

$$\int \frac{dx}{ctg^4 x}$$

Вариант 6

$$\int e^x\left(1-\frac{e^{-x}}{\sin^2 x}\right)dx$$

$$\int 2^{3x}dx$$

$$\int \sqrt[5]{3x-2}dx$$

$$\int \frac{\sin 2x}{\sin^2 x}dx$$

$$\int \frac{x^4+2}{x^2+1}dx$$

$$\int x^2\ln 2xdx$$

$$\int x^2e^{-x}dx$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}$$

$$\int \frac{dx}{x(x^2+4)}$$

$$\int \frac{1+tgx}{\cos^2 x}dx$$

$$\int tg^5 2xdx$$

$$\int \frac{ctg^3 x}{\sin^2 x}dx$$

$$\int \sin(8x+5)dx$$

$$\int \frac{x}{3-x^2}dx$$

$$\int \frac{3^x}{4-9^x}dx$$

$$\int \frac{x}{x+6}dx$$

$$\int x\cos 3xdx$$

$$\int (x+1)\sin 6xdx$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{2x-1}-\sqrt[4]{2x-1}}$$

$$\int \frac{x}{(x-1)(x+2)}dx$$

$$\int \cos^2\frac{x}{2}dx$$

$$\int \frac{dx}{\sin^3 x}$$

$$\int \sqrt{4-\cos x}\sin xdx$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 4x}$$

$$\int \frac{xdx}{1+x^2}$$

$$\int \frac{e^{4x}-4}{e^{3x}}dx$$

$\int \frac{dx}{x^2+3x+5}$

$\int \arcsin 3x dx$

$\int \ln x dx$

$\int \frac{2x-8}{\sqrt{1-x-x^2}} dx$

$\int \frac{x^3 dx}{x^2-3x+2}$

$\int \frac{\sin^3 x}{\sqrt{\cos x}} dx$

$\int \sin^3 x \cos^3 x dx$

Вариант 7

$\int \frac{1-\sin^4 x}{\sin^2 x} dx$

$\int \frac{\sqrt[3]{\arcsin x}}{\sqrt{1-x^2}} dx$

$\int 4^{x^3} x^2 dx$

$\int e^x \sqrt[3]{4-e^x} dx$

$\int \frac{x^3+1}{x^2+4} dx$

$\int x \sin(2x-3) dx$

$\int x^2 \cos 2x dx$

$\int \frac{(x+1)dx}{\sqrt[3]{3x+1}}$

$\int \frac{x^2 dx}{x(x-1)}$

$\int (tg^2 x+1) \frac{dx}{\cos^2 x}$

$\int \frac{dx}{1+tgx}$

$\int \frac{dx}{\sin^2\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)}$

$\int \frac{dx}{\sqrt[5]{1+4x}}$

$\int \frac{\sin x}{\cos^3 x} dx$

$\int \frac{e^x}{\sqrt{9-e^{2x}}} dx$

$\int \frac{x+1}{x-5} dx$

$\int x arctg 2x dx$

$\int x^3 \ln x dx$

$\int \frac{\sqrt{x}dx}{\sqrt[4]{x^3}+1}$

$\int \frac{x+5}{x^2+2x+1} dx$

$\int \sin^2 \frac{x}{2} dx$

$\int \frac{\sin x dx}{\sin x+\cos x}$

$\int \frac{xdx}{\sqrt{x^2-1}}$

$\int \frac{3xdx}{\sqrt{x^2-4}}$

$\int \frac{dx}{1-2x}$

$\int \frac{\sqrt[3]{\ln x}}{x} dx$

$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+6x}}$

$\int \frac{x-2}{\sqrt{8-2x-x^2}} dx$

$\int \frac{dx}{x(x^2+3)}$

$\int \sin^4 x \cos^4 x dx$

$\int \sin 2x \cos x dx$

$\int x e^{2x} dx$

$\int \arcsin 5x dx$

Вариант 8

$$\int \frac{dx}{3x-2}$$

$$\int \cos^3 x \sin x dx$$

$$\int \frac{x^3}{\sqrt[3]{4-3x^4}} dx$$

$$\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx$$

$$\int \frac{x+1}{x-7} dx$$

$$\int x \ln(1+x) dx$$

$$\int \frac{x}{e^{4x}} dx$$

$$\int \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} \cdot \frac{dx}{x}$$

$$\int \frac{(x-5)dx}{(x-1)(x+3)}$$

$$\int \frac{\sin^3 x}{\cos^4 x} dx$$

$$\int \frac{dx}{2\sin x + 3\cos x - 5}$$

$$\int \frac{xdx}{3-x^2}$$

$$\int \frac{x^2 dx}{\cos^2(4-3x^2)}$$

$$\int \frac{\ln x + 1}{x} dx$$

$$\int ctg^2 x dx$$

$$\int \frac{x^2+1}{x^2+5} dx$$

$$\int arctg\, 2x dx$$

$$\int \ln(x+3) dx$$

$$\int \frac{dx}{x(\sqrt{x}+\sqrt[3]{x})}$$

$$\int \frac{3x-1}{(x^2+1)(x-2)} dx$$

$$\int \sin^2 7x dx$$

$$\int \frac{x^2+1}{x^2+5} dx$$

$$\int \sqrt[3]{arctgx} \frac{dx}{1+x^2}$$

$$\int xe^{x^2-1} dx$$

$$\int \frac{\arcsin^3 x}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

$$\int \frac{2^x}{9-4^x} dx$$

$$\int \frac{dx}{2x^2+4x+5}$$

$$\int xe^{2x} dx$$

$$\int \frac{x+1}{\sqrt{x^2-2x+3}} dx$$

$$\int \frac{dx}{(1-x^2)x}$$

$$\int \frac{dx}{ctg^4 x}$$

$$\int \frac{dx}{2x^2+4x+5}$$

$$\int x^2 \sin 9x dx$$

Вариант 9

$$\int \frac{dx}{2-x}$$

$$\int \frac{e^x}{5-e^x} dx$$

$$\int xe^{x^2-5} dx$$

$$\int \frac{\arcsin^3 x}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

$$\int \frac{x-4}{x-2} dx$$

$$\int arctgx dx$$

$$\int x \ln 4x dx$$

$$\int \frac{xdx}{(x^2+4+3)(x+1)}$$

$$\int \frac{(2x-3)dx}{\sqrt{1-x-x^2}}$$

$$\int \frac{\cos^3 x}{\sin^2 x} dx$$

$$\int tg^3 x dx$$

$$\int \frac{dx}{x-\ln x}$$

$$\int \frac{\sqrt{\ln x}}{x} dx$$

$$\int \frac{2^x}{9-4^x} dx$$

$$\int \frac{\cos x}{\sqrt{1-3\sin^2 x}} dx$$

$\int \frac{x^3+1}{x^2-1}dx$

$\int (x-2)^2 e^{2x}dx$

$\int \arcsin 4xdx$

$\int \frac{\sqrt{x}dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}$

$\int \frac{2-x^3}{(x^2+3)x}dx$

$\int \sin^2 3xdx$

$\int ctg^3 xdx$

$\int \frac{x^2dx}{4-3x^2}$

$\int x\cos x^2dx$

$\int \frac{2x^3}{\sqrt{x^4+1}}dx$

$\int \frac{arctg^3 x}{1+x^2}dx$

$\int \frac{dx}{x^2+5x+1}$

$\int x\sin 3xdx$

$\int \frac{x}{e^{5x}}dx$

$\int \frac{x+1}{\sqrt[3]{3x+1}}dx$

$\int \frac{dx}{x^2(x-1)}$

$\int \frac{dx}{4+\sin x}$

$\int \cos^2 x\sin^3 xdx$

Вариант 10

$\int \frac{xdx}{3x^2-4}$

$\int \frac{x}{1+x}dx$

$\int \frac{xdx}{\sin^2 x^2}$

$\int \frac{dx}{x(2+\ln x)^2}$

$\int \frac{x^2-1}{x+3}dx$

$\int e^x \sin 2xdx$

$\int x^2 e^{5x}dx$

$\int \frac{dx}{\sqrt{3x+1}-\sqrt[4]{3x+1}}$

$\int \frac{x^2+x+1}{x^2-x-12}dx$

$\int \frac{\sin x}{\cos^3 x}dx$

$\int \cos^6 xdx$

$\int \frac{\sin xdx}{1+\cos^2 x}$

$\int \frac{x^2}{\sqrt[4]{1-x^3}}dx$

$\int \frac{2-ctg^2 x}{\sin^2 x}dx$

$\int \frac{e^x}{\sqrt{4-e^{2x}}}dx$

$\int \frac{x}{x+5}dx$

$\int x\cos xdx$

$\int x\ln(3+x)dx$

$\int \frac{\sqrt{x}dx}{\sqrt[4]{x^3}+1}$

$\int \frac{dx}{(4-x^2)x}$

$\int \cos^2 6xdx$

$\int \frac{dx}{2\sin x+\cos x+2}$

$\int \frac{xdx}{\sqrt[3]{1-x^2}}$

$\int \sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)dx$

$\int e^{\sin x}\cos xdx$

$\int x^3\cdot\sqrt{1+4x^4}dx$

$\int \frac{dx}{7x^2+14x+1}$

$\int arctg 3xdx$

$\int \ln xdx$

$\int \frac{x-2}{\sqrt{8-2x-x^2}}dx$

$\int \frac{6x^3-4x}{x^3-4x}dx$

$\int \frac{dx}{tg^2 x}$

$\int \cos^2 3x\sin^2 xdx$

Вариант 11

$\int \frac{5^{\sqrt{x}}dx}{\sqrt{x}}$

$\int \frac{\sin(\ln x)}{x}dx$

$\int \frac{dx}{\sin^2 x\cos^2 x}$

$\int (e^{2x}+1)^3 e^{2x}dx$

$\int \frac{2x-5}{x+3}dx$

$\int \cos(\ln x)dx$

$\int x\cdot 2^x dx$

$\int \frac{\sqrt{x}dx}{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[4]{x^3}}$

$\int \frac{7x-3}{(x+1)(x-2)}dx$

$\int \frac{\cos^3 x}{\sin^6 x}dx$

$\int \cos^4 xdx$

$\int e^{\cos x}\sin xdx$

$\int \sqrt[3]{tg2x}\cdot\sec^2(2x)dx$

$\int 3^{4x}dx$

$\int \frac{x^2}{(1+x^3)^2}dx$

$\int \frac{x^3-x}{x^2+1}dx$

$\int x\sin 5xdx$

$\int \frac{x^2}{e^{-x}}dx$

$\int \frac{x^3dx}{\sqrt{x+4}}$

$\int \frac{6x^2-4}{(x+4)^2(x-1)}$

$\int \cos^2 5xdx$

$\int \frac{\sin x}{1-\sin x}dx$

$\int \frac{dx}{1+\cos x}$

$\int \frac{dx}{x(\ln x+4)}$

$\int x^2\cdot e^{4-5x^3}dx$

$\int \frac{dx}{3x^2+6x-2}$

$\int x\ln 5xdx$

$\int \frac{2x+1}{\sqrt{x^2+2x-5}}dx$

$\int \frac{dx}{(x^2-9)x}$

$\int \frac{dx}{tg^5 x}$

$\int \frac{\sin^3 x}{\sqrt{\cos x}}dx$

$\int \arcsin 2xdx$

$\int \cos(ax+b)dx$

Вариант 12

$\int \frac{\sqrt[3]{arctgx}}{1+x^2}dx$

$\int \frac{\ln^6 x}{x}dx$

$\int \cos\left(3x-\frac{\pi}{4}\right)dx$

$\int \frac{dx}{(3-2x)^3}$

$\int \frac{x^3}{x^2+1}dx$

$\int \ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)dx$

$\int \frac{\ln x}{x}dx$

$\int \frac{dx}{\sqrt{x+2}\left(1+\sqrt[3]{x+2}\right)}$

$\int \frac{x^2+2x}{x(x-1)(x-2)}dx$

$\int \frac{\cos x}{1-\cos^2 x}dx$

$\int \sin^2 x\cos^4 xdx$

$\int x^2e^{-3x^3}dx$

$\int \frac{3-2x+x^2}{x}dx$

$\int \frac{dx}{\sqrt{1-3x}}$

$\int \frac{x+5}{x-1}dx$

$\int \frac{x^3dx}{\sqrt{x^2-1}}$

$\int \arcsin 7x dx$

$\int \frac{9-5x}{x^2(x+2)}dx$

$\int \cos^2 2x dx$

$\int \frac{x^3}{\sqrt[5]{1-x^4}}dx$

$\int e^x \cos e^x dx$

$\int \frac{x^2-\ln x}{x}dx$

$\int x^3 \cos(4-x^4)dx$

$\int \frac{dx}{x^2+2x+5}$

$\int x^2 \sin 5x dx$

$\int (x^2+1)e^{3x}dx$

$\int \frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}}dx$

$\int \frac{2x+5}{\sqrt{x^2+4x+5}}dx$

$\int \frac{dx}{(x^2+1)(x-2)}$

$\int \cos 4x \cos 6x dx$

$\int \frac{\sin x}{\cos^5 x}dx$

$\int xe^{-\frac{x}{2}}dx$

$\int \frac{dx}{\sin x-\cos x}$

Вариант 13

$\int \frac{1-\sin^3 x}{\sin^2 x}dx$

$\int \frac{dx}{\sqrt{x+1}}$

$\int \frac{tg^4 x}{\cos^2 x}dx$

$\int e^x \sqrt[3]{e^x+3}dx$

$\int \frac{x^3+x}{x-2}dx$

$\int e^{2x}\cos 2x dx$

$\int x^2 e^{6x}dx$

$\int \frac{1-\sqrt[4]{x}}{x+\sqrt{x}}$

$\int \frac{6x^2-13x+4}{x(x-1)(x+2)}dx$

$\int \frac{\sin x}{1+\cos^2 x}dx$

$\int tg^3 x dx$

$\int \frac{dx}{\cos^2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}$

$\int \frac{3xdx}{\sqrt[4]{x^2-a^2}}$

$\int \frac{\sin x}{\cos^2 x}dx$

$\int x\cdot 2^x dx$

$\int xe^{\frac{x}{3}}dx$

$\int \frac{x}{x+6}dx$

$\int x\ln 2x dx$

$\int \frac{1+\sqrt[3]{x-1}}{\sqrt{x-1}}dx$

$\int \frac{5x^3+9x^2+22x-8}{x^3-4x}dx$

$\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx$

$\int \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}dx$

$\int e^{\sin x}\cos x dx$

$\int \frac{xdx}{3x^2+4}$

$\int \frac{dx}{5x^2+10x+1}$

$\int \arcsin 3x dx$

$\int x\sin 8x dx$

$$\int \frac{xdx}{\sqrt{x^2+4x-5}}$$

$$\int \frac{x+5}{(x^2+2)(x-1)}dx$$

$$\int \sin x \cos 4x dx$$

$$\int \frac{dx}{3-\sin x}$$

$$\int \cos^2 x dx$$

$$\int \sin^4 x \cos^2 x dx$$

Вариант 14

$$\int \frac{dx}{(2x-3)^3}$$

$$\int \frac{e^x dx}{(5+e^x)^2}$$

$$\int x \cdot 3^{x^2-1} dx$$

$$\int \frac{\sin x \cos x}{4-\sin^2 x}dx$$

$$\int \frac{x}{x-3}dx$$

$$\int \frac{\cos x}{e^{3x}}dx$$

$$\int x^2 \cos 3x dx$$

$$\int \frac{2x+1}{\sqrt[3]{2x+1}}dx$$

$$\int \frac{3x+1}{x(x-1)(x+3)}dx$$

$$\int \sin^3 x \cos^3 x dx$$

$$\int \frac{dx}{1+\cos x}$$

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$$

$$\int \frac{\sqrt[3]{\ln x}dx}{x}$$

$$\int \frac{x^3 dx}{\sqrt[3]{1-3x^4}}$$

$$\int \frac{\sqrt[3]{tgx}}{\cos^2 x}dx$$

$$\int \frac{x^4+x^2}{x-1}dx$$

$$\int \frac{\ln x}{\sqrt{x^3}}dx$$

$$\int arctg 5x dx$$

$$\int \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[3]{x}+1}dx$$

$$\int \frac{x^2}{(x+2)(x-1)^2}dx$$

$$\int \sin^2 6x dx$$

$$\int \cos^2 2x \sin^2 4x dx$$

$$\int \frac{x^2 dx}{3-x^3}$$

$$\int \sqrt{\frac{\arcsin x}{1-x^2}}dx$$

$$\int \frac{x^2}{4+5x^3}dx$$

$$\int \frac{dx}{3x^2+6x+4}$$

$$\int xe^x dx$$

$$\int \ln 4x dx$$

$$\int \frac{x-1}{\sqrt{x^2-2x+5}}dx$$

$$\int \frac{dx}{(x^2+1)(x+2)}$$

$$\int tg^5 x dx$$

$$\int \sin 5x \cos x dx$$

$$\int x \cdot \cos(x^2-1)dx$$

Вариант 15

$$\int 3^x\left(1-\frac{3^{-x}}{x^5}\right)dx$$

$$\int \frac{arctg^2 x}{1+x^2}dx$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 5x}$$

$$\int \frac{\cos x}{\sqrt{1-\cos 2x}}dx$$

$$\int \frac{x-5}{x+7}dx$$

$\int (x+2)\arcsin x dx$

$\int x^2 \sin 4x dx$

$\int \frac{dx}{\sqrt{x+2}\left(1+\sqrt[3]{x+2}\right)}$

$\int \frac{\cos^5 x}{\sqrt[3]{\sin^2 x}} dx$

$\int \sin^4 x dx$

$\int \frac{x^3+x+2}{x^2-7x+12} dx$

$\int \cos\left(2x-\frac{\pi}{12}\right) dx$

$\int x^2 e^{1-x^3} dx$

$\int \sin^4 x \cos x dx$

$\int \frac{\sqrt[3]{\arcsin x}}{\sqrt{1-x^2}} dx$

$\int \frac{x^3}{x^2+1} dx$

$\int x e^x dx$

$\int x \ln(x-1) dx$

$\int \frac{x}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}} dx$

$\int \frac{x^2-6}{\left(x^2+4\right)x} dx$

$\int \sin^2 5x dx$

$\int \cos^2 x \sin^3 x dx$

$\int \frac{dx}{x(3+x)^2}$

$\int \frac{dx}{x \ln^4 x}$

$\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx$

$\int \frac{\ln^5 x}{x} dx$

$\int \frac{\sin x}{\sqrt[4]{\cos x}} dx$

$\int \frac{dx}{4x^2+8x+1}$

$\int x \cdot 4^x dx$

$\int arctg 2x dx$

$\int \frac{2x-1}{\sqrt{x^2+6x+5}} dx$

$\int \frac{\cos x}{\sqrt[4]{\sin x}} dx$

$\int \frac{dx}{3+\cos x+2\sin x}$

Вариант 16

$\int \frac{\cos x}{\sin^4 x} dx$

$\int \frac{\sin x \cos x}{\sqrt{3-\sin^2 x}} dx$

$\int e^{x^2} x dx$

$\int \sin 2x \cos x dx$

$\int \sin 3x \cos 5x dx$

$\int e^{2x} \sin(x+1) dx$

$\int \frac{dx}{\left(1+\sqrt[3]{x}\right)\sqrt{x}}$

$\int \frac{(x+2)dx}{x(x+1)(x-4)}$

$\int \frac{\left(1-tg^3 x\right)dx}{\cos^2 x}$

$\int \frac{dx}{\sin^4 x}$

$\int \frac{x^2+3}{x-2} dx$

$\int \frac{\arcsin^3 x}{\sqrt{1-x^2}} dx$

$\int \frac{dx}{(4-3x)^2}$

$\int \frac{x+\sin 2x}{x\cos^2 x} dx$

$\int \frac{dx}{\cos^2 x tgx}$

$\int \frac{\cos^3 x}{\sqrt[3]{\sin x}} dx$

$\int \sqrt{x} \ln x dx$

$\int \frac{x}{\sqrt{x^2-x+1}} dx$

$\int \frac{dx}{(x+1)^2(x+2)}$

$\int \cos^2 2x dx$

$\int \frac{\cos x}{1+\cos x}dx$

$\int \frac{dx}{x^2+8x+17}$

$\int \frac{2xdx}{\sqrt{1-3x^2}}$

$\int \frac{xdx}{(5x^2+1)^3}$

$\int x^3 \sin x^4 dx$

$\int \frac{\ln x+4}{x}dx$

$\int \ln(2x+1)dx$

$\int arctg(x+3)dx$

$\int \frac{x-2}{x^2-9x}dx$

$\int \frac{x^2+1}{(x^2+2x+8)x}dx$

$\int \frac{dx}{ctg^5 x}$

$\int \frac{\cos^3 x}{\sin x}dx$

$\int \frac{x^3}{x-1}dx$

Вариант 17

$\int \cos^4 x \sin x dx$

$\int \frac{x^2}{\sin^2 x^3}dx$

$\int \frac{\cos x}{\sqrt{1-\sin^2 x}}dx$

$\int x^2 \sin(x^3+4)dx$

$\int (x+1)\cos x dx$

$\int x^2 \sin 3x dx$

$\int \frac{x^2+x+3}{x-5}dx$

$\int \frac{\sqrt{x+3}}{1+\sqrt[3]{x+2}}dx$

$\int \frac{2x^2+5x-8}{x(x-1)^2}dx$

$\int \frac{\cos x}{1-\sin^2 x}dx$

$\int \sin x \cos x dx$

$\int \frac{dx}{\sin^3 x \cos x}$

$\int e^{2x} \cdot \sqrt[3]{e^{2x}+1}dx$

$\int (4x-3)^6 dx$

$\int \frac{dx}{x\sqrt[3]{\ln x}}$

$\int \frac{e^{2x}}{e^{2x}-2e^{-2x}}dx$

$\int xe^{3x}dx$

$\int arctg 6x dx$

$\int \frac{x+4}{x-7}dx$

$\int \frac{\sqrt[3]{x}}{1+\sqrt{x}}dx$

$\int \frac{dx}{x^4-16}$

$\int \sin^2 4x dx$

$\int \frac{\sin x dx}{\sin x \cos x}$

$\int xe^{x^2}dx$

$\int x \cdot \sqrt[5]{6-5x^2}dx$

$\int \frac{x^4}{\sqrt[3]{1-2x^5}}dx$

$\int \frac{x^2}{\sqrt{1+x^3}}dx$

$\int \ln x dx$

$\int x^2 \ln(x+2)dx$

$\int \frac{dx}{3x^2+6x+5}$

$\int \frac{2-x}{\sqrt{1-2x-x^2}}dx$

$\int \frac{x^4-1}{x(x+1)}dx$

$\int tg^3 3x dx$

Вариант 18

$\int 7^{x^3+4} \cdot x^2 dx$

$\int \sin\left(e^x+\sqrt{2}\right)e^x dx$

$\int xe^{3-x^2}dx$

$\int \frac{(2+x)^3}{\sqrt[3]{x}}dx$

$\int \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx$

$\int \arcsin 7x dx$

$\int \frac{dx}{\sqrt{x-3}\left(1+\sqrt[3]{x-3}\right)}$

$\int \frac{x^2 - x + 1}{\left(x^2 - 1\right)x} dx$

$\int \frac{3 - 2ctgx}{\sin^2 x} dx$

$\int \cos^6 x dx$

$\int \frac{x^2 + 5x}{x + 3} dx$

$\int x \cos x^2 dx$

$\int x^3 tg\left(x^4 + 5\right) dx$

$\int \frac{\sqrt[4]{\ln x}}{x} dx$

$\int \frac{x^2 dx}{1 + x^6}$

$\int e^{2x} \cos 2x dx$

$\int \frac{x^2}{e^2} dx$

$\int \frac{xdx}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}} dx$

$\int \frac{x^2 - x + 5}{x^2 (x - 1)} dx$

$\int \sin^2 5x dx$

$\int \frac{dx}{3\sin x - 5\cos x + 4}$

$\int \frac{x - 1}{x^2 + 1} dx$

$\int \frac{\sin 2x dx}{1 + \cos^2 x}$

$\int xtgx^2 dx$

$\int \frac{\sqrt[3]{\arcsin x}}{\sqrt{1 - x^2}} dx$

$\int \frac{tg^2 x}{\cos^2 x} dx$

$\int \cos(\ln x) dx$

$\int \ln 4x dx$

$\int \frac{2x - 3}{\sqrt{x^2 + 4x + 5}} dx$

$\int \frac{xdx}{x^3 + 2x}$

$\int \frac{\cos^3 x}{\sqrt{\sin x}} dx$

$\int \cos 4x \cos 2x dx$

$\int \frac{dx}{6x^2 + 12x - 3}$

Вариант 19

$\int e^{-x^2} x dx$

$\int \frac{\cos x dx}{a^2 + \sin^2 x}$

$\int 7^{x^2} x dx$

$\int \frac{x\left(1 - x^2\right)}{1 + x^4} dx$

$\int \frac{x^2 + 4}{x - 1} dx$

$\int arctg \frac{1}{x} dx$

$\int x^2 e^{8x} dx$

$\int \frac{dx}{\sqrt{x + 1} - \sqrt{(x + 1)^3}}$

$\int \frac{x + 1}{x\left(x^2 + 6x + 8\right)} dx$

$\int \frac{\sin x}{1 - \sin^2 x} dx$

$\int \frac{\cos^2 x}{\sin^4 x} dx$

$\int \frac{dx}{\sqrt{1 - 25x^2}}$

$\int \left(e^x + 1\right)^2 dx$

$\int 3^{5x} \cdot 4^{5x} dx$

$\int x^3 e^{5 - 4x^4} dx$

$\int tg^7 x dx$

$\int \frac{x^3}{x^2 - 5} dx$

$\int x \cos 2x dx$

$\int \arcsin 3x dx$

$\int \frac{\sqrt[3]{x}}{4-\sqrt{x}} dx$

$\int \frac{x^4 - 3x^2 - 3x - 2}{x^3 - x^2 - 2x} dx$

$\int \cos^2 4x dx$

$\int \frac{e^x dx}{4+e^{2x}}$

$\int \frac{3x-1}{x^2+9} dx$

$\int \frac{x+(\arccos 3x)^2}{\sqrt{1-9x^2}} dx$

$\int \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} dx$

$\int \frac{dx}{2x^2+6x+5}$

$\int \ln^2 x dx$

$\int \frac{1+2x}{\sqrt{1+4x^2}} dx$

$\int \frac{x^3+1}{x^3+2x} dx$

$\int \frac{dx}{1-4\cos x}$

$\int \sin^2 2x \cdot \cos^2 2x dx$

$\int \ln 9x dx$

Вариант 20

$\int \frac{dx}{(2x-3)^3}$

$\int (1+tg^3 x) dx$

$\int \frac{\sqrt[3]{\ln x} dx}{x}$

$\int \frac{x^3 dx}{\sqrt[3]{1-3x^4}}$

$\int \frac{e^x}{1+e^{2x}} dx$

$\int \frac{x+4}{x-3} dx$

$\int \frac{\cos x}{e^{3x}} dx$

$\int (x^2+4)\sin 2x dx$

$\int \frac{2x+4}{\sqrt[3]{2x+1}} dx$

$\int \ln(x+5) dx$

$\int \frac{3x+1}{x^2(x+2)} dx$

$\int \sin^3 x \cdot \cos^3 x dx$

$\int \frac{dx}{1+\cos x}$

$\int \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$

$\int x\cos(x^2-1) dx$

$\int \sqrt{\frac{\arcsin x}{1-x^2}} dx$

$\int \frac{2+tg 4x}{\cos^2 4x} dx$

$\int \frac{x^2+1}{x+5} dx$

$\int \frac{\ln x}{\sqrt{x^3}} dx$

$\int arctg 5x dx$

$\int \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[3]{x}+1} dx$

$\int \frac{x^2}{x(x+2)(x-1)} dx$

$\int \sin^2 6x dx$

$\int \cos^2 2x \cdot \sin^2 4x dx$

$\int \frac{x^2 dx}{3-x^3}$

$\int x \cdot 3^{x^2-1} dx$

$\int \frac{\sin x \cos x}{4-\sin^2 x} dx$

$\int \frac{x}{1-x^4} dx$

$\int \frac{dx}{3x^2+6x+4}$

$\int xe^x dx$

$\int \frac{dx}{\cos^4 x}$

$\int \frac{x-1}{\sqrt{x^2-2x+5}} dx$

$\int \frac{dx}{(x^2+3)x}$

Вариант 21

$\int \frac{dx}{(3x-2)^4}$

$\int \cos^3 x \sin x dx$

$\int xe^{x^2+1} dx$

$\int \frac{\sin x}{\cos x+4} dx$

$\int \frac{x^3+1}{x-3} dx$

$\int (x+1)2^x dx$

$\int x^2 \sin 5x dx$

$\int \frac{\sqrt[3]{x}-1}{1+\sqrt{x}} dx$

$\int \frac{x+5}{x^2+4} dx$

$\int \frac{\sin^3 x}{\cos^4 x} dx$

$\int \frac{dx}{3+\sin x}$

$\int \frac{x}{\cos^2(4-3x^2)} dx$

$\int \frac{\ln^3 x+1}{x} dx$

$\int \frac{\ln^2 x+4}{x} dx$

$\int \frac{x+7}{x-2} dx$

$\int \ln(3x^2+1) dx$

$\int xe^{-4x} dx$

$\int \frac{dx}{\sqrt{x+1} \cdot \sqrt{(x+1)^3}}$

$\int \frac{3x+7}{(x^2+x-2)x} dx$

$\int \sin^2 2x dx$

$\int \frac{\sin^2 x}{\cos^4 x} dx$

$\int \frac{dx}{(1+x^2)\sqrt{arctgx}}$

$\int \frac{x^3}{\sqrt[3]{4-x^4}} dx$

$\int \sin x \cos x dx$

$\int \frac{e^x}{1+e^{2x}} dx$

$\int \frac{dx}{3x^2+3x+4}$

$\int \arcsin 2x dx$

$\int x arctg 3x dx$

$\int \frac{dx}{\sqrt{2+3x-x^2}}$

$\int \frac{dx}{(x+1)^2 x}$

$\int \sin x \cos^3 x dx$

$\int \frac{xdx}{1-x^2}$

$\int tg^3 2x dx$

Вариант 22

$\int e^x\left(1+\frac{e^{-x}}{\cos^2 x}\right) dx$

$\int \sqrt{1-\sin x} \cdot \cos x dx$

$\int \frac{dx}{\sin^2 6x}$

$\int \frac{\sin 2x}{\cos^2 x} dx$

$\int \frac{2x^3+x^2}{x-1} dx$

$\int \ln(2x+1) dx$

$\int (x^2+1)e^x dx$

$\int \frac{dx}{\sqrt{x+2}-\sqrt{(x+2)^3}}$

$\int \frac{dx}{1-x^2}$

$$\int \frac{\cos^3 x}{\sin^6 x}dx$$

$$\int ctg^3 4x dx$$

$$\int \frac{tg^2 x}{\cos^2 x}dx$$

$$\int \cos(4x-3)dx$$

$$\int \sqrt[3]{2x+1}dx$$

$$\int \frac{x^2}{1-x^3}dx$$

$$\int \frac{x}{x+2}dx$$

$$\int x arctg x dx$$

$$\int \arcsin 3x dx$$

$$\int \frac{1}{x^2}\cdot\sqrt{\frac{1+x}{x}}dx$$

$$\int \frac{3x+2}{(x+1)x}dx$$

$$\int \sin^2 4x dx$$

$$\int \frac{dx}{\sin x + 2\cos x}$$

$$\int 4^{2x} dx$$

$$\int \frac{ctg^5 4x}{\sin^2 4x}dx$$

$$\int \frac{xdx}{2-x^2}$$

$$\int \frac{x}{\sqrt{4-5x^2}}dx$$

$$\int \frac{dx}{7x^2+14x-6}$$

$$\int x\sin x dx$$

$$\int x^2 \ln x dx$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{2+x-x^2}}$$

$$\int \frac{x^4 dx}{x^3-27}$$

$$\int \cos x \sin 5x dx$$

$$\int \frac{\sin x}{\sqrt[3]{\cos x}}dx$$

Вариант 23

$$\int \frac{dx}{x\ln^2 x}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{9-4x^2}}$$

$$\int \frac{tgx}{\cos^2 x}dx$$

$$\int x^2 e^{4-x^3}dx$$

$$\int \frac{3x^2+x}{x-1}dx$$

$$\int \sqrt[3]{x}\cdot \ln x dx$$

$$\int x^2 \sin 4x dx$$

$$\int \frac{1+\sqrt[4]{x}}{x-\sqrt{x}}dx$$

$$\int \frac{x^2+2x}{(x^2+1)(x+2)}dx$$

$$\int \sin^2 5x dx$$

$$\int \frac{dx}{\sin^4 x}$$

$$\int \sqrt[5]{2x+7}dx$$

$$\int \frac{arctg 2x}{1+4x^2}dx$$

$$\int \frac{\sin x}{\cos^4 x}dx$$

$$\int \frac{\sqrt[5]{ctgx}}{\sin^2 x}dx$$

$$\int arctg 3x dx$$

$$\int x4^x dx$$

$$\int \frac{x+10}{x-2}dx$$

$$\int \frac{x^3}{1+\sqrt[3]{x^4+1}}dx$$

$$\int \frac{x^3-8}{x^3-4x}dx$$

$$\int \frac{\sin^5 x}{\cos x}dx$$

$$\int \frac{\cos x}{1-\cos x}dx$$

$$\int \frac{2x}{4+3x^2}dx$$

$$\int \sin^2 x\cos x dx$$

$$\int \frac{e^x dx}{5+3e^x}$$

$$\int \frac{dx}{3+4x^2}$$

$\int \frac{dx}{x^2+10x+4}$

$\int xe^{2x}dx$

$\int \ln 5x dx$

$\int \frac{x-4}{\sqrt{x^2-4x-5}}dx$

$\int \frac{2x^2+5x-8dx}{x(x+2)^2}$

$\int ctg^5 x dx$

$\int \sin 5x \cos x dx$

Вариант 24

$\int \frac{dx}{(x-2)^3}$

$\int \frac{x^2 dx}{\sin^2(2-x^3)}$

$\int (1+\sin x)^5 dx$

$\int \frac{x^3+x^2-x+2}{\sqrt[3]{x}}dx$

$\int x \sin 2x dx$

$\int x^2 e^{3x} dx$

$\int \frac{\sqrt[4]{x}+1}{(\sqrt{x}+1)\sqrt[4]{x}}dx$

$\int \frac{5}{x^3+5x^2-6x}dx$

$\int \frac{\cos^3 x}{\sqrt[3]{\sin x}}dx$

$\int \sin 3x \cos 5x dx$

$\int \frac{x^3+x+3}{x-2}dx$

$\int \frac{x}{a^2-b^2x^2}dx$

$\int \cos^2 x \sin x dx$

$\int \frac{x^3}{\sqrt{x^4-5}}dx$

$\int \frac{\sqrt[3]{\ln x+1}}{x}dx$

$\int arctg 2x dx$

$\int \frac{\sqrt{x}}{4+\sqrt[3]{x^2}}dx$

$\int \frac{2x+3}{x^3+3x}dx$

$\int \cos^2 3x dx$

$\int \cos^2 x \sin^2 x dx$

$\int \frac{x+1}{x-2}dx$

$\int \frac{dx}{arctgx(1+x^2)}$

$\int \frac{\cos x}{\sqrt{1-\cos 2x}}dx$

$\int 5^{2x} dx$

$\int \frac{dx}{\sqrt{tgx}\cdot \cos^2 x}$

$\int e^x \cos x dx$

$\int \arcsin \frac{x}{2} dx$

$\int \frac{3x+1}{\sqrt{x^2+4x+1}}dx$

$\int \frac{dx}{x^3-x}$

$\int x \ln x dx$

$\int \frac{dx}{x^2+8x+5}$

$\int tg^3 x dx$

$\int \frac{\cos x}{1-\sin x}dx$

Вариант 25

$\int \frac{x^2 dx}{\sin^2 x^3}$

$\int \frac{\cos x dx}{\sin^5 x}$

$\int \frac{\sin 2x}{\cos^2 x}dx$

$$\int \frac{x}{1+9x^4}dx$$

$$\int \frac{x^4+x}{x-2}dx$$

$$\int x\cos 7x dx$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x-3}+\sqrt{(x+3)^3}}$$

$$\int \frac{dx}{x(1+x)^2}$$

$$\int \frac{\sin x}{\sqrt[3]{\cos x}}dx$$

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x\cos^4 x}$$

$$\int \sin(4-3x)dx$$

$$\int \frac{\sqrt{arctgx}}{1+x^2}dx$$

$$\int \frac{dx}{x^2\cos^2\frac{1}{x}}$$

$$\int \frac{dx}{x^2\sin^2\frac{1}{x}}$$

$$\int \frac{x^2+3}{x^2+4}dx$$

$$\int x arctg 5x dx$$

$$\int \frac{dx}{x^4\left(1+\sqrt[4]{x}\right)}$$

$$\int \frac{x-2}{x^3+4x}dx$$

$$\int \cos 3x \sin x dx$$

$$\int \frac{dx}{7+3\cos x}$$

$$\int \arcsin x dx$$

$$\int e^{4x}dx$$

$$\int \frac{xdx}{\sqrt{1-x^4}}$$

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{1-\ln x}}$$

$$\int \frac{dx}{x^2+5x+3}$$

$$\int x^2 e^{4x}dx$$

$$\int \frac{2x+3}{\sqrt{9-2x-x^2}}dx$$

$$\int \frac{x^3-2x+2}{(x-1)(x^2+1)}dx$$

$$\int \sqrt[3]{x}\ln x dx$$

$$\int \sin^2 x\cos^3 x dx$$

$$\int ctg^3 x dx$$

$$\int xe^{x^2}dx$$

$$\int x\sin 2x dx$$

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Бугров, Я. С. Высшая математика в 3 т. Т. 1. Дифференциальное и интегральное исчисление в 2 кн. Книга 1 : учебник для академического бакалавриата / Я. С. Бугров, С. М. Никольский. — 7-е изд., стер. — Москва : Издательство Юрайт, 2016. — 253 с.
2. Высшая математика в упражнениях и задачах: учеб. пособие: В 2 ч / П. Е. Данко [и др.]. – 7-е изд., испр. – М.: ОНИКС: Мир и Образование, 2008. – Ч. 1. – 2008. – 368 с.
3. Гулиян Б.Ш. Математика. Базовый курс: учебник/ Гулиян Б.Ш., Хамидуллин Р.Я.– Электрон. текстовые данные.– М.: Московский финансово-промышленный университет «Синергия», 2013. – 712 с.
4. Икрянников В.И. Практикум по высшей математике: учебное пособие / В.И. Икрянников, Э.Б. Шварц. – Электрон. текстовые данные. – Новосибирск: Новосибирский государственный технический университет, 2011. – 439 с.
5. Назаров А.И., Назаров И.А. Курс математики для нематематических специальностей и направлений бакалавриата: Учебное пособие. – 3-е изд., испр. - СПб.: Издательство «Лань», 2011. – 576 с.
6. Осипов А.В. Лекции по высшей математике: Учебное пособие. – 2-е изд., испр. – СПб.: Издательство «Лань», 2014. – 320 с.
7. Шипачев, В. С. Высшая математика: учебник и практикум / В.С. Шипачев. – 8-е изд., перераб. и доп. – М.: Издательство Юрайт, 2017. – 447 с.

СОДЕРЖАНИЕ

Ангелина Михайловна Попова,

старший преподаватель кафедры общей математики и информатики АмГУ