Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
АМУРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

СБОРНИК ИНДИВИДУАЛЬНЫХ ЗАДАНИЙ ПО КУРСУ ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

ЧАСТЬ ПЕРВАЯ

УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

Учебно-методическое пособие

Благовещенск
Издательство АмГУ
2021

УДК 517.91
ББК 22.161.6я73

Рекомендовано
учебно-методическим советом университета

Рецензент:
Е.М. Веселова, доцент кафедры математического анализа и моделирования АмГУ, кандидат физ.-мат. наук.

Сборник индивидуальных заданий по курсу «Обыкновенные дифференциаль-ные уравнения». Часть первая. Уравнения первого порядка. Учебно-метод. пособие / сост. Т.В. Труфанова – Благовещенск: Амурский гос. ун-т, 2021. – 33 с.

Настоящее пособие представляет собой сборник индивидуальных заданий (типовых расчетов) по курсу «Обыкновенные дифференциальные уравне-ния». Это пособие является дополнением к учебному пособию «Прикладные задачи и примеры по дифференциальным уравнениям» [1] по разделу «Диф-ференциальные уравнения первого порядка». Кратко вводятся основные типы уравнений первого порядка и методы решений этих уравнений. Приводятся подробные решения примеров на каждый тип уравнений. После рассмотрен-ных примеров даются варианты индивидуальных заданий по темам.

Пособие предназначено для студентов вузов, обучающихся по направлениям подготовки 09.03.01 -Информатика и вычислительная техника; 09.03.02 Информационные системы и технологии; 24.03.01 Ракетные комплексы и космонавтика; 03.03.02 – Физика и для специальности 24.05.01 – Проектирование, производство и эксплуатация ракет и ракетно-космических комплексов.

В авторской редакции

Введение

Данное методическое пособие содержит варианты заданий по курсу «Обыкновенные дифференциальные уравнения» по разделу дифференциальные уравнения первого порядка и является дополнением к пособию [1].

Написание этого пособия вызвано тем, что учебное пособию [1] было написано для специальностей с большим числом аудиторных занятий по программе и с повышенной сложностью контрольных заданий. По теме «Уравнения первого порядка» задания не были разбиты по типам, что вызывало у студентов затруднение выбора метода интегрирования этих уравнений.

В этом пособии рассмотрены основные виды уравнений первого порядка, которые решаются в квадратурах. Каждый параграф пособия содержит минимум теоретических сведений, используемых для решения соответствующих примеров. Затем подробно рассмотрены методы решения по каждому из основных типов дифференциальных уравнений первого порядка, на конкретных примерах, взятых из учебников и сборников задач по дифференциальным уравнениям [1,2,3]. По каждому виду уравнений даются варианты заданий для самостоятельной работы.

1. Уравнения с разделяющимися переменными

Уравнения вида $\varphi_1(x)\psi_1(y)dx = \varphi_2(x)\psi_2(y)dy$, в которых коэффициенты при дифференциалах распадаются на множители, зависящие только от x и только от y, *называются дифференциальными уравнениями с разделяющимися переменными*, т.к. путем деления на $\psi_1(y)\varphi_2(x)$ они приводятся к уравнению с разделенными переменными $\frac{\varphi_1(x)}{\varphi_2(x)}dx = \frac{\psi_2(y)}{\psi_1(y)}dy$ [2].

Замечание. Деление на $\psi_1(y)\varphi_2(x)$ может привести к потере частных решений, обращающих в нуль произведение $\psi_1(y)\varphi_2(x)$, а если функции $\psi_1(y)$, $\phi_2(x)$ могут быть разрывными, то возможно появление лишних решений.

Пример 1. Решить уравнение $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$.

Решение. Разделяем переменные и перенося все с y в левую, а с x в правую части и интегрируем, находим решение исходного уравнения:

$$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x}, \int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x},$$

$$\ln|y| = \ln|\mathrm{x}| + \ln c, c > 0.$$

Потенцируя, получим $|y| = c|x|$. Если речь идет только о гладких решениях, то уравнение $|y| = c|x|$, где $c > 0$, эквивалентно уравнению $y = \pm cx$.

Пример 2. Решить уравнение $x(1+y^2)dx - y(1+x^2)dy = 0$.

Решение. Разделяем переменные $\int \frac{ydy}{1+y^2} = \int \frac{xdx}{1+x^2} + c$;

и интегрируя, находим: $\ln(1+y^2) = \ln(1+x^2) + \ln c_1$, пропотенцируем выражение. Получаем решение исходного уравнения $1+y^2 = c_1(1+x^2)$.

Пример 3. Решить уравнение $(xy - x)dx + (xy + x - y - 1) = 0$.

Решение. Разрешаем это уравнение относительно y':

$$\frac{dy}{dx}=\frac{(x-xy)}{(xy+x-y-1)},$$

и проделав простейшие преобразования, получаем:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{x(1-y)}{y(x-1)+(x-1)},\cdots,\frac{dy}{dx}=\frac{x(1-y)}{(y+1)(x-1)}.$$

А это уравнение с разделяющимися переменными. Умножая обе части уравнения на $(y+1)dx$ и, деля на $(1-y)$, получим

$$\frac{y+1}{1-y}dy=\frac{x}{x-1}dx.$$

Интегрируя обе части равенства, находим решение исходного уравнения: $x+\ln|x-1|+y+2\ln|1-y|=c.$

2. Уравнения, приводящиеся к уравнениям с разделяющимися переменными. Однородные дифференциальные уравнения и уравнения, сводящиеся к однородным

2.1 Уравнения, приводящиеся к уравнениям с разделяющимися переменными

К числу таких уравнений относятся, например, уравнения вида

$$\frac{dy}{dx}=f(ax+by),$$

где a и b постоянные величины. Это уравнение при помощи замены переменных $z=ax+by$ преобразуется в уравнение с разделяющими переменными. Покажем это, перейдя к переменным x и z, $\frac{dz}{dx}=a+b\frac{dy}{dx}$, $\frac{dz}{dx}=a+bf(z)$, или $\frac{dz}{a+bf(z)}=dx$, и переменные разделились. Интегрируя, последнее выражение, получим $x=\int\frac{dz}{a+bf(z)}+c$.

Пример 4. Решить уравнение $\frac{dy}{dx}=2x+y$.

Решение. Полагая $z = 2x + y$, будем иметь $\frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dx} - 2$, $\frac{dz}{dx} - 2 = z$.

Разделяя переменные и интегрируя, получим:

$$\frac{dz}{z+2} = dx,\ \ln|z+2| = x + \ln c,\ z = -2 + ce^{x},\ 2x + y = -2 + ce^{x},\ y = ce^{x} - 2x - 2.$$

2.2 Однородные дифференциальные уравнения

К уравнениям с разделяющимися переменными приводятся и так называемые однородные дифференциальные уравнения первого порядка, имеющие вид $\frac{dy}{dx} = f(\frac{y}{x})$.

Действительно, после подстановки $z = \frac{y}{x}$ или $y = zx$ получим

$$\frac{dy}{dx} = x\frac{dz}{dx} + z,\ x\frac{dz}{dx} + z = f(z),\ \frac{dz}{f(z) - z} = \frac{dx}{x},\ \int\frac{dz}{f(z) - z} = \ln|x| + \ln c,$$

$$x = ce^{\int\frac{dz}{f(z)-z}}.$$

Заметим, что правая часть однородного уравнения является функцией переменных x и y нулевой степени однородности, поэтому уравнение вида $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ будет однородным, если $M(x,y)$ и $N(x,y)$ являются однородными функциями x и y одинаковой степени однородности, т. к. в этом случае $\frac{dy}{dx} = -\frac{M(x,y)}{N(x,y)} = f(\frac{y}{x})$ [2].

Пример 5. Решить уравнение

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} + tg\,\frac{y}{x}$$

Решение. Полагаем $y = zx$, находим $\frac{dy}{dx} = x\frac{dz}{dx} + z$. Подставляя в исходное уравнение, получим

$x\frac{dz}{dx} + z = z + \mathrm{tg}\,z$, разделяя переменные, интегрируя обе части равенства и возвращаемся к переменным x и y:

$\frac{\cos z dz}{\sin z} = \frac{dx}{x}$, $\ln|\sin z| = \ln|x| + \ln c$, $\sin z = cx$, получаем решение исходного уравнения $\sin\frac{y}{x} = cx$.

2.3 Уравнения, сводящиеся к однородным

Уравнение вида

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right)$$

преобразуется в однородное уравнение путем переноса начала координат в точку пересечения (x_1, y_1) прямых

$a_1x + b_1y + c_1 = 0$ и $a_2x + b_2y + c_2 = 0$.

Покажем это, свободный член в уравнениях этих прямых в новых координатах $X = x - x_1$, $Y = y - y_1$ будет равен нулю, коэффициенты при текущих координатах остаются неизменными, а $\frac{dy}{dx} = \frac{dX}{dY}$, и это уравнение преобразуется к виду $\frac{dY}{dX} = f\left(\frac{a_1X + b_1Y}{a_2X + b_2Y}\right)$ или $\frac{dY}{dX} = f\left(\frac{a_1 + b_1\frac{Y}{X}}{a_2 + b_2\frac{Y}{X}}\right) = \varphi\left(\frac{Y}{X}\right)$, а это уравнение является уже однородным уравнением.

В случае параллельности прямых $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ и $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ этот метод нельзя применить. Но в этом случае коэффициенты при текущих координатах пропорциональны $\frac{a_2}{a_1} = \frac{b_2}{b_1} = k$ и рассматриваемое уравнение может быть записано в виде

$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{k(a_1x + b_1y) + c_2}\right) = F(a_1x + b_1y)$, и пользуясь заменой (смотрим п. 2.1) $z = a_1x + b_1y$ преобразуем рассматриваемое уравнение в уравнение с разделяющимися переменными.

Пример 6. Решить уравнение

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x - y + 1}{x + y - 3}.$$

Решение. Решая систему уравнений $x-y+1=0, x+y-3=0,$ находим точку пересечения этих прямых: $x_1=1, \;\; y_1=2.$

Сделаем замену переменных

$x=X+1, y=Y+2$ и подставляя в исходное уравнение, получаем однородное уравнение:

$$\frac{dY}{dX}=\frac{X-Y}{X+Y}.$$

Применяя замену переменных $z=\frac{Y}{X}$ или $Y=zX$, приводим к уравнению с разделяющимися переменными

$$z+X\frac{dz}{dX}=\frac{1-z}{1+z}, \frac{(1+z)dz}{1-2z-z^2}=\frac{dX}{X},$$

интегрируя это уравнение, а затем потенцируя находим

$$-\frac{1}{2}\ln|1-2z-z^2|=\ln|X|-\frac{1}{2}\ln c,$$

$$(1-2z-z^2)X^2=c, X^2-2XY-Y^2=c,$$

вернемся к первоначальным переменным, находим решение исходного уравнения:

$$x^2-2xy-y^2+2x+6y=c_1.$$

3. Линейные дифференциальные уравнения первого порядка и уравнения, сводящиеся к линейным. Уравнение Бернулли.

3.1. Линейные дифференциальные уравнения первого порядка.

Определение. Линейным дифференциальным уравнением первого порядка называется уравнение линейное относительно неизвестной функции и ее производной [2].

Линейное уравнение имеет вид

$$\frac{dy}{dx}+p(x)y=f(x),$$

где $p(x)$ и $f(x)$ в дальнейшем будем считать непрерывными функциями x в области интегрирования уравнения.

Если $f(x)\equiv 0$, то уравнение называется линейным однородным. В линейном однородном уравнении переменные разделяются:

$$\frac{dy}{dx}+p(x)y=0\text{, откуда }\frac{dy}{y}=-p(x)dx.$$

и, интегрируя, получаем

$$\ln|y|=-\int p(x)dx+\ln c_1,\ c_1>0,$$

$$y=ce^{-\int p(x)dx},\ c\neq 0$$

При делении на y мы потеряли решение $y=0$, но если считать, что c может принимать значение 0, то оно может быть включено.

Неоднородное уравнение можно решить несколькими методами. Рассмотрим два наиболее часто применяемых метода.

3.1.1 Метод вариации постоянной

Для интегрирования неоднородного линейного уравнения

$$\frac{dy}{dx}+p(x)y=f(x)$$

может быть применен метод вариации постоянной. При применении этого метода сначала интегрируется соответствующее (т.е. имеющее ту же левую часть) однородное уравнение $\frac{dy}{dx}+p(x)y=0$ общее решение, которого имеет вид $y=ce^{-\int p(x)dx}$.

При $c=const$ функция $ce^{-\int p(x)dx}$ является решением однородного уравнения. Потребуем удовлетворить неоднородному уравнению, считая c функцией x, т.е. варьируем константу: $y=c(x)e^{-\int p(x)dx}$, где $c(x)$ – новая неизвестная функция x.

Вычисляя производную

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dc}{dx}e^{-\int p(x)dx}-c(x)p(x)e^{-\int p(x)dx}$$

и подставляя в исходное неоднородное уравнение, получаем

$$\frac{dc}{dx}e^{-\int p(x)dx}-c(x)p(x)e^{-\int p(x)dx}+p(x)c(x)e^{-\int p(x)dx}=f(x)$$

или

$$\frac{dc}{dx} = f(x)e^{\int p(x)dx}$$

откуда, интегрируя, находим

$$c(x) = \int f(x)e^{\int p(x)dx}dx + c_1,$$

следовательно,

$$y = c(x)e^{-\int p(x)dx} = c_1e^{-\int p(x)dx} + e^{-\int p(x)dx}\int f(x)e^{\int p(x)dx}dx.$$

Общее решение неоднородного линейного уравнения равно сумме общего решения соответствующего однородного уравнения

$$c_1e^{-\int p(x)dx}$$

и частного решения неоднородного уравнения

$$e^{-\int p(x)dx}\int f(x)e^{\int p(x)dx}dx.$$

Пример: 7. Решить уравнение

$$\frac{dy}{dx} - \frac{y}{x} = x^2.$$

Решение. Интегрируем соответствующее однородное уравнение

$$\frac{dy}{dx} - \frac{y}{x} = 0, \ \ln|y| = \ln|x| + \ln c, \ y = cx.$$

Варьируя константу, $c(x)$, тогда $y = c(x)x$,

$\frac{dy}{dx} = \frac{dc}{dx}x + c(x)$ и, подставляя в исходное уравнение, проделав упрощения находим $c(x)$:

$$\frac{dc}{dx}x + c(x) - c(x) = x^2; \ \frac{dc}{dx}x = x^2 \text{ или } dc = xdx, \ c(x) = \frac{x^2}{2} + c_1.$$

Следовательно, общее решение исходного уравнения: $y = c_1x + \frac{x^3}{2}$.

Пример: 8. Решить уравнение

$$\frac{dy}{dx} - y\operatorname{ctg}x = 2x\sin x.$$

Решение. Сначала решаем однородное уравнение:

$$\frac{dy}{dx} - y\operatorname{ctg} x = 0, \text{ отсюда } \frac{dy}{dx} = \frac{\cos x}{\sin x}dx,$$

интегрируя, получаем

$$\ln|y| = \ln|\sin x| + \ln c, \text{ или } y = c\sin x.$$

Решение неоднородного уравнения ищем в виде $y = c(x)\sin x$, дифференцируем предполагаемое решение $y' = c'(x)\sin x + c(x)\cos x$. И подставляя в исходное уравнение, получим

$c'(x)\sin x = c(x)\cos x - c(x)\cos x = 2x\sin x$, отсюда находим *c(x)*

$c'(x) = 2x$, следовательно $c(x) = x^2 + c_1$, а решение исходного уравнение имеет вид $y = x^2\sin x + c_1\sin x$.

3.1.2 Метод Бернулли

Рассмотрим второй метод решения линейного неоднородного уравнения. Решение уравнения ищем в виде $y = u(x)v(x)$, где u и v – две неизвестные функции. Исходное уравнение преобразуется к виду

$$u'\mathrm{v} + u\mathrm{v}' + a(x)u\mathrm{v} = b(x),$$

или

$$u[\mathrm{v}' + a(x)\mathrm{v}] + \mathrm{v}u' = b(x).$$

Одна из неизвестных функций (например, v) может быть выбрана произвольно. За v принимают любое частное решение уравнения $\mathrm{v}' + a(x)\mathrm{v} = 0$. Тогда предыдущее уравнение запишется в виде $\mathrm{v}u' = b(x)$, откуда находим $u(x)$.

Пример 9. Решить уравнение

$$x\frac{dy}{dx} - 2y = 2x^4.$$

Решение. Будем искать решение этого уравнения в виде произведения двух функций $y = u(x)\mathrm{v}(x)$. Имеем

$$x\frac{du}{dx}\mathrm{v} + xu\frac{d\mathrm{v}}{dx} - 2u\mathrm{v} = 2x^4,$$

$$x\frac{du}{dx}\mathrm{v} + u\left(x\frac{d\mathrm{v}}{dx} - 2\mathrm{v}\right) = 2x^4.$$

Выберем функцию v так, чтобы $x\frac{d\mathrm{v}}{dx}-2\mathrm{v}=0$. Решая его, находим $\mathrm{v}(x)=x^2$ (частное решение). Функцию $u(x)$ находим из уравнения $x^3\frac{du}{dx}=2x^4$, т.е.

$$u(x)=x^2+c$$

Следовательно, все решения исходного уравнения определяются формулой $y=cx^2+x^4$.

3.1.3 Сведение к линейному уравнению

Некоторые уравнения становятся линейными, если поменять местами искомую функцию и независимое переменное, то есть x считать функцией, а y– аргументом.

Пример 10. Решить уравнение

$$y=xy'+y'\ln y .$$

Решение. Примем за аргумент y, а за неизвестную функцию – x.Тогда уравнение преобразуется в следующее: $y\frac{dx}{dy}=x+\ln y$.

Это линейное уравнение относительно x. Интегрируя соответствующее одно-родное уравнение $yx'=x$, получаем $\frac{dx}{x}=\frac{dy}{y}$; $\quad x=cy$.

Найдем решение исходного неоднородного уравнения, полагая $x=c(y)y$, от-куда $x'_y=c'(y)y+c(y)$. Подставляя его в уравнение, получаем

$$c'(y)y^2+c(y)y=c(y)y+\ln y,$$

откуда $c'(y)=\frac{\ln y}{y^2}$, $c(y)=c-\frac{1+\ln y}{y}$.

Решение исходного уравнения имеет вид $x=cy-\ln y-1$.

3.2 Уравнение Бернулли

Многие дифференциальные уравнения путем замены переменных могут быть сведены к линейным. Например, уравнение Бернулли, имеющее вид

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = f(x)y^n,\ n \neq 1,$$

или

$$y^{-n}\frac{dy}{dx} + p(x)y^{1-n} = f(x)$$

заменой переменных $y^{1-n} = z$ сводится к линейному уравнению. Действительно, дифференцируя $y^{1-n} = z$, находим $(1-n)y^{-n}\frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dx}$ и подставляя в исходное уравнение, получаем линейное уравнение

$$\frac{1}{1-n}\frac{dz}{dx} + p(x)z = f(x).$$

*Пример11.*Решить уравнение: $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{2x} + \frac{x^2}{2y}$.

Решение. Домножим обе части равенства на y

$2y\frac{dy}{dx} = \frac{y^2}{x} + x^2$, сделаем замену: $y^2 = z$, отсюда

$2y\frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dx}$, и подставим в исходное уравнение $\frac{dz}{dx} = \frac{z}{x} + x^2$.

Получили линейное уравнение относительно функции z, решаем это уравнение методом вариации постоянной. Сначала решим однородное уравнение $\frac{dz}{dx} = \frac{z}{x}$, $\frac{dz}{dx} = \frac{z}{x}$, разделяя переменные и интегрируя получаем

$\frac{dz}{z} = \frac{dx}{x}$, отсюда $\ln z = \ln x + \ln c$ или $z = cx$.

Решение неоднородного уравнения ищем в виде $z = c(x)x$ и подставляя в неоднородное уравнение находим:

$\frac{dc}{dx}x + c(x) - c(x) = x^2$; $\frac{dc}{dx}x = x^2$ или $dc = xdx$, $c(x) = \frac{x^2}{2} + c_1$.

Таким образом $z = (\frac{x^2}{2} + c_1)x$ и решение исходного уравнения имеет вид:

$$y^2 = (\frac{x^2}{2} + c_1)x\ .$$

Пример 12. Решить уравнение

$$x\frac{dy}{dx}+y=y^2\ln x.$$

Решение. Это уравнение Бернулли. Его можно решить с помощью замены $z=\frac{1}{y}$, но удобнее – при помощи замены. $y=u(x)\text{v}(x)$ Тогда

$$xu\frac{d\text{v}}{dx}+x\text{v}\frac{du}{dx}+u\text{v}=u^2\text{v}^2\ln x,$$
$$xu\frac{d\text{v}}{dx}+\text{v}(x\frac{du}{dx}+u)=u^2\text{v}^2\ln x.$$

Функцию $u(x)$ найдем как частное решение уравнения $x\frac{du}{dx}+u=0,$ – например, $u=\frac{1}{x}$. Тогда $x^2\frac{d\text{v}}{dx}=\text{v}^2\ln x$. Отсюда, разделяя переменные и интегрируя, получим $-\frac{1}{\text{v}}=\int\frac{\ln x}{x^2}dx=-\frac{\ln x}{x}-\frac{1}{x}-c,$ $\text{v}(x)=\frac{x}{1+Cx+\ln x}$. Тогда $y=\frac{1}{1+Cx+\ln x}$. Кроме найденных, решением исходного уравнения является еще функция $y=0$.

4. Уравнения в полных дифференциалах. Интегрирующий множитель

Если левая часть дифференциального уравнения

$$M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$$

является полным дифференциалом некоторой функции $u(x,y)$:

$$du(x,y)=M(x,y)dx+N(x,y)dy,$$

следовательно, уравнение принимает вид

$$du(x,y)=0.$$

Интегрируя находим

$$u(x,y(x))\equiv c,$$

где $c=const$, является общим интегралом исходного уравнения.

Если даны начальные значения $y(x_0)=y_0$, то постоянная c определяется из начальных условий $c=u(x_0,y_0)$ и $u(x,y)=u(x_0,y_0)$ является искомым частным интегралом.

Для того, чтобы левая часть рассматриваемого уравнения являлась полным дифференциалом некоторой функции $u(x, y)$, необходимо и достаточно, чтобы $\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} \equiv \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}$. Если это условие, впервые указанное Эйлером, выполнено, то уравнение $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ легко интегрируется.

4.1. Первый метод интегрирования уравнения в полных дифференциалах

Действительно, если, $du = Mdx + Ndy$. а с другой стороны,

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy, \text{ то } \frac{\partial u}{\partial x} = M(x,y), \ \frac{\partial u}{\partial y} = N(x,y),$$

откуда интегрируя первое соотношение, получаем $u(x,y) = \int M(x,y)dx + c(y)$.

При вычислении интеграла $\int M(x,y)dx$ величина y рассматривается как постоянная, поэтому $c(y)$ является произвольной функцией y. Для определения функции $c(y)$ дифференцируем найденную функцию $u(x,y)$ по y и, т. к. $\frac{\partial u}{\partial y} = N(x,y)$, получаем $\frac{\partial}{\partial y}(\int M(x,y)dx) + c'(y) = N(x,y)$.

Из этого уравнения определяем $c'(y)$ и, интегрируя, находим $c(y)$.

4.2 Второй метод интегрирования уравнения в полных дифференциалах.

Можно определить функцию $u(x,y)$ по ее полному дифференциалу $du = M(x,y)dx + N(x,y)dy$, взяв криволинейный интеграл от $M(x,y)dx + N(x,y)dy$ между некоторой фиксированной точкой (x_0, y_0) и точкой с переменными координатами (x, y) по любому пути

$$u(x,y) = \int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} M(x,y)dx + N(x,y)dy.$$

Чаще всего в качестве пути интегрирования удобно брать ломаную, составленную из двух звеньев, параллельных осям координат в этом случае

$$\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} Mdx + Ndy = \int_{(x_0,y_0)}^{(x,y_0)} Mdx + \int_{(x,y_0)}^{(x,y)} Ndy$$

или

$$\int\limits_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} Mdx + Ndy = \int\limits_{(x_0,y_0)}^{(x_0,y)} Ndy + \int\limits_{(x_0,y)}^{(x,y)} Mdx$$

Пример 13. Решить уравнение:

$$(x + y + 1)dx + (x - y^2 + 3)dy = 0.$$

Решение. Проверяем условие Эйлера:

$\dfrac{\partial(x + y + 1)}{\partial y} \equiv \dfrac{\partial(x - y^2 + 3)}{\partial x}$, так как условие выполнено, сразу интегрируем соотношение $\dfrac{\partial u}{\partial x} = x + y + 1$, по *x*, получаем: $u = \dfrac{x^2}{2} + xy + x + c(y)$.

Полученное соотношение дифференцируем по *y*:

$\dfrac{\partial u}{\partial y} = x + c'(y)$, и приравниваем к $\dfrac{\partial u}{\partial y} = N(x, y)$ т.е. $x + c'(y) = x - y^2 + 3$, отсюда

$$c'(y) = -y^2 + 3,. c(y) = -\frac{y^3}{3} + 3y + c_1$$

Таким образом, мы нашли решение исходного уравнения в виде

$$u = \frac{x^2}{2} + xy + x - \frac{y^3}{3} + 3y + c_1, \text{ или}$$

$$3x^2 + 6xy + 6x - 2y^3 + 18y = c_2. u = \frac{x^2}{2} + xy + x - \frac{y^3}{3} + 3y + c_1$$

Пример 14. Решить уравнение

$$(2xy + 3y^2)dx + (x^2 + 6xy - 3y^2)dy = 0$$

Решение. В данном случае

$$M(x, y) = 2xy + 3y^2, \quad N(x, y) = x^2 + 6xy - 3y^2,$$
$$\frac{\partial M(x, y)}{\partial y} = 2x + 6y, \quad \frac{\partial N(x, y)}{\partial x} = 2x + 6y.$$

Условие $\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}$, выполнено, следовательно это уравнение в полных дифференциалах. Найдем функцию $F(x,y)$, у которой полный дифференциал $dF=F'_x dx+F'_y dy$ равен левой части уравнения. Для искомой функции $F(x,y)$ имеем

$$F'_x=2xy+3y^2,\quad F'_y=x^2+6xy-3y^2.$$

Интегрируя первое уравнение по x, считая y постоянным, получим

$$F(x,y)=x^2y+3xy^2+\varphi(y).$$

Для определения функции $\varphi(y)$ дифференцируем последнее равенство по y:

$$F'_y=x^2+6xy+\varphi'(y).$$

Приравнивая к $F'_y=x^2+6xy-3y^2$ находим $\varphi(y)$:

$$x^2+6xy+\varphi'(y)=x^2+6xy-3y^2,$$

т.е. $\varphi'(y)=-3y^2$, $\varphi(y)=-y^3+C_1$. Следовательно, $F(x,y)=x^2y+3xy^2-y^3+C_1$.

Общее решение уравнения исходного уравнения имеет вид

$$x^2y+3xy^2-y^3=C.$$

4.3. Интегрирующий множитель

Интегрирующим множителем для уравнения

$$M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$$

называется такая функция $\mu(x,y)$, после умножения на которую уравнение превращается в уравнение в полных дифференциалах, а значит

$$\frac{\partial(\mu(x,y)M(x,y))}{\partial y}=\frac{\partial(\mu(x,y)N(x,y))}{\partial x},$$

т.е. интегрирующий множитель есть решение уравнения

$$\mu(x,y)\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial y}\right)=\frac{N\partial\mu}{\partial x}-\frac{M\partial\mu}{\partial y}.$$

Если у данного уравнения существует интегрирующий множитель, зависящий только от x, то μ находится по формуле

$$\mu(x) = e^{\int \frac{(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x})dx}{N}},$$

где отношение $\dfrac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N}$ должно являться функцией только от *x*. Если существует интегрирующий множитель, зависящий только от y, то μ находится по формуле $\mu(y) = e^{-\int \frac{(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x})dy}{M}}$, где отношение $\dfrac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{M}$ должно являться функцией только от y [1].

Пример 15. Решить уравнение

$$(x^2 - \sin^2 y)dx + x\sin 2y dy = 0.$$

Решение. Сначала проверяем условие Эйлера. Имеем

$$\frac{\partial M}{\partial y} = -2\sin y \cdot \cos y = -\sin 2y,\ \frac{\partial N}{\partial x} = \sin 2y.$$

Выясним, имеет ли данное уравнение интегрирующий множитель как функцию одной переменной. Найдем

$$\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} = -\sin 2y - \sin 2y = -2\sin 2y.$$

Полученное выражение разделить на $N(x, y) = x\sin 2y$, то это частное окажется функцией только от x; следовательно, интегрирующий множитель есть функция от x. Найдем его по формуле $\mu(x) = e^{\int \frac{\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right)}{N}dx} = e^{-\int \frac{2}{x}dx} = e^{-2\ln x}$, следовательно, $\mu(x) = \dfrac{1}{x^2}$.

Умножая обе части уравнения исходного на $\frac{1}{x^2}$, получим уравнение в полных дифференциалах: $\left(1 - \dfrac{\sin^2 y}{x^2}\right)dx + \dfrac{\sin 2y}{x}dy = 0$.

Представим его в виде $dx + \dfrac{x\sin 2y dy - \sin^2 y dx}{x^2} = 0$.

Тогда $d\left(x+\dfrac{\sin^2 y}{x}\right)=0$, $x+\dfrac{\sin^2 y}{x}=C$, $x^2+\sin^2 y=Cx$.

Пример 16. Решить уравнение

$$(\mathrm{x}^2+1)(2xdx+cosydy)=2x\sin ydx\ .$$

Решение. Раскроем скобки и перегруппируем слагаемые получим уравнение сводящиеся к уравнению в полных дифференциалах:

$$(2x^3+2x-2x\sin y)dx+(x^2cosy)\,\mathrm{dy}=0\ . \qquad (*)$$

Проверяем условие Эйлера, которое как не трудно заметить не выполняется сразу находим интегрирующий множитель. Сначала находим разность $\dfrac{\partial M}{\partial y}-\dfrac{\partial N}{\partial x}=-2x\cos y-2x\cos y=-4x\cos y$, заметим, что если поделить на *N(x,y)*, то можно найти интегрирующий множитель зависящий только от *x:*

$$\mu(\mathrm{x})=e^{-\int\frac{4xcosy}{(1+x^2)\cos y}dx}=e^{-2\ln(x^2+1)}=\frac{1}{(x^2+1)^2}\ .$$

Умножая обе части равенства (*) на интегрирующий множитель приходим к уравнению в полных дифференциалах:

$(\dfrac{2x}{x^2+1}-\dfrac{2x\mathrm{siny}}{(x^2+1)^2})dx+\dfrac{\cos y}{x^2+1}dy=0$. Интегрируя это уравнение изложенным выше методом находим, что $F(x,y)=\dfrac{\sin y}{x^2+1}+c(x)$.

Дифференцируем по *x* и приравнивая к $F_x^{/}(x,y)$ находим *c(x)*:

$$c(\mathrm{x})=\ln(\mathrm{x}^2+1)+c\ ,$$

таким образом решение исходного уравнения имеет вид:

$$\frac{\sin y}{x^2+1}+\ln(\mathrm{x}^2+1)=c\,.$$

5. Уравнения, не разрешенные относительно производной. Уравнения Лагранжа и Клеро

Дифференциальное уравнение первого порядка, неразрешенное относительно производной, имеет вид

$$F\left(x,y,y'\right)=0\,.$$

Это уравнение можно решить следующими методами.

5.1 Разрешить уравнение относительно y'

Если рассматриваемое уравнение удается разрешить относительно y', то получаем одно или нескольких уравнений вида $y' = f_i(x, y)$, $(i = 1,2,...)$.

Интегрируя эти уравнения, найдем решение исходного уравнения.

Пример17: Решить уравнение

$$(y')^2 - (x + y)y' + xy = 0.$$

Решение. Разрешая относительно y', получим: $y' = x$ и $y' = y$. Проинтегрируем каждое уравнение:

$$y = \frac{x^2}{2} + c \ ,$$

и интегрируя второе находим $y = c \cdot e^x$.

Оба семейства решений удовлетворяют исходному уравнению.

Итак, уравнение $F(x, y, y') = 0$ может быть проинтегрировано путем разрешения относительно y' и интеграции полученных при этом уравнений

$$y' = f_i(x, y), \ (i = 1,2,...).$$

Пример 18. Решить уравнение

$$(y')^2 + y(y - x)y' - xy^3 = 0.$$

Решение. Преобразуем данное уравнение к виду

$$(y')^2 + y^2 y' - yxy' - xy^3 = 0,$$

$$y'(y' + y^2) - yx(y' + y^2) = (y' + y^2)(y' - yx) = 0.$$

Следовательно, исходное уравнение эквивалентно совокупности двух уравнений: $y' + y^2 = 0$ и $y' - yx = 0$. Решение первого из них $y = 0$ и $y = \frac{1}{x + C}$, а второго $y = Ce^{\frac{x^2}{2}}$. Поэтому решение исходного уравнения примет вид

$$\left(y - \frac{1}{x+C}\right)\left(y - Ce^{\frac{x^2}{2}}\right) = 0.$$

5.2 Метод введения параметра

Если уравнение $F(x, y, y') = 0$ разрешимо относительно y или относительно x, т.е. его можно записать в виде $y = f(x, y')$ или $x = f(y, y')$, то оно решается при помощи введения параметра p: $p = y'$.

Например, если это уравнение можно записать в виде $y = f(x, y')$, то вводя параметр $p = y'$, т.е. $p = \frac{dy}{dx}$, получаем $y = f(x, p)$.

Учитывая, что $dy = pdx$, из предыдущего равенства имеем

$$dy = f'_x dx + f'_P dp \text{, то } pdx = f'_x dx + f'_P dp.$$

Это уравнение легко разрешается относительно $\frac{dx}{dp}$. Его решение запишем в виде $x = \varphi(p)$ и, учитывая, что $y = f(x, p)$, получаем решение исходного уравнения в параметрическом виде: $\begin{cases} x = \varphi(p), \\ y = f(\varphi(p), p). \end{cases}$

Пример 19. Решить уравнение

$$y' \sin y' + \cos y' - y = 0.$$

Решение. Уравнение разрешимо относительно у. Вводим параметр $p = y'$, имеем $y = p \sin p + \cos p$. Дифференцируя это равенство по x, получим

$$p = \frac{dp}{dx}\sin p + p\cos p\frac{dp}{dx} - \sin p\frac{dp}{dx}, \quad p = p\cos p\frac{dp}{dx},$$

из этого уравнения находим $p = 0$ и $x = \sin p + c$.

Следовательно, $y = 1$ и $\begin{cases} x = \sin p + c, \\ y = p \sin p + \cos p. \end{cases}$

Пример 20. Решить уравнение

$$\ln y' + \sin y' - x = 0.$$

Решение. Положим $p = y'$, $x = \ln p + \sin p$. Учитывая, что $dy = pdx$

$$\frac{dy}{p} = \left(\frac{1}{p} + \cos p\right)dp .$$

Отсюда $y = \int (1 + p\cos p)dp = p + \cos p + p\sin p + c$.

Решение данного уравнения имеет вид $\begin{cases} x = \ln p + \sin p, \\ y = p + \cos p + p\sin p + c. \end{cases}$

5.3 Уравнения Лагранжа и Клеро

Примерами уравнений, которые решаются методом введения параметра, являются уравнения линейные относительно *x* и *y*, которые легко разрешимые относительно *y*. К ним относятся уравнение Лагранжа $y = x\varphi(y') + \psi(y')$ и уравнение Клеро $y = xy' + \psi(y')$.

Пример 21. Решить уравнение

$$y = 2xy' - y'^3 .$$

Решение. Это уравнение Лагранжа. Полагая $p = y'$, имеем $y = 2xp - p^3$. Дифференцируя по *x*, получаем $p = 2p + 2x\frac{dp}{dx} - 3p^2\frac{dp}{dx}$ и, после деления на $\frac{dp}{dx}$ приходим к уравнению $p\frac{dx}{dp} = -2x + 3p^2$. Интегрируя это линейное уравнение, получаем $x = \frac{c_1}{p^2} + \frac{3}{4}p^2$. Следовательно, интегральные кривые определяются уравнениями $y = 2xp - p^3$, $x = \frac{c_1}{p^2} + \frac{3p^2}{4}$. При делении на $\frac{dp}{dx}$ теряется решение $p = 0$, которому соответствует решение исходного уравнения $y = 0$.

<u>*Пример 22*</u>. Решить уравнение

$$y'^2 - 2xy' + y = 0 .$$

Решение. Это уравнение Лагранжа. Положим $y' = p$, тогда $y = 2xp - p^2$ Из равенств $dy = pdx$ и $dy = 2pdx + 2xdp - 2pdp$ получим $pdx + 2(x - p)dp = 0$. Отсюда p=0 или $\frac{dx}{dp} + \frac{2x}{p} = 2$. Это линейное уравнение. Решая его, находим

$$x = \frac{2}{3}p + \frac{c}{p^2}.$$

Решение исходного уравнения имеет вид $\begin{cases} x = \frac{2}{3}p + \frac{c}{p^2}, \\ y = 2xp - p^2, y = 0. \end{cases}$

Пример 23. Решить уравнение

$$y = xy' - y'^2 \ .$$

Решение. Это уравнение Клеро. Положим $y' = p$, тогда $y = xp - p^2$. Дифференцируем обе части равенства по *x*, получаем

$$\frac{dy}{dx} = p + \frac{dp}{dx} - 2p\frac{dp}{dx} \ ,$$

следовательно, $(x - 2p)\frac{dp}{dx} = 0$, отсюда получаем:

$$x - 2p = 0 \text{ и } p = c \ .$$

Следовательно, $y = cx - c^2$ из $x = 2p$ имеем $\frac{dy}{dx} = \frac{x}{2}$, интегрируя получим $y = \frac{x^2}{4}$. Получаем ответ: $y = cx - c^2$; $y = \frac{x^2}{4}$.

Варианты заданий для индивидуальной работы

Задание 1. Решить дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными.

Вариант	Уравнения
1	$(y+1)dx-(1-x)dy=0$
2	$ydx+(x+1)dy=0$
3	$x+xy^2+(x^2y-y)y'=0$
4	$(x^2-1)y'+2xy^2=0$
5	$y'\sin x=y\cos x$
6	$\sqrt{1-y^2}dx+y\sqrt{1-x^2}dy=0$
7	$y'=2^{x+y}$
8	$(x^2+1)dy+xydx$
9	$e^y(1+x^2)y'=2x(1+e^y)$
10	$y'=e^{3x+y}$
11	$(4-3y^2)dx+x^3y^2dy=0$
12	$y'=2y^{2/3}x$
13	$2xy'+y^2=1$
14	$dy+(xy-xy^3)dx=0$
15	$(1-x^2)dy+xydx=0$
16	$x^2y'-2xy=3y$
17	$x\sqrt{1+y^2}+yy'\sqrt{1+x^2}=0$
18	$(2+e^x)yy'=e^x$
19	$y'=5^{x+y}$
20	$\ln\cos y dx+x\,\mathrm{tg}\,y dy$
21	$y'\mathrm{ctg}x+y=2$

22	$y'\sqrt{9-x^2}=\sqrt{9-y^2}$
23	$x\sqrt{1-x^2}dy+y\sqrt{1-y^2}dx=0$
24	$y(x+1)dx+x(y-2)dy=0$
25	$x(1+y^2)+y(1+x^2)y'=0$

Задание 2. Найти общее решение однородного дифференциального уравнения.

Вариант	Уравнения
1	$xy+y^2=(2x^2+xy)\,y'$
2	$xy'-y=xe^{x/y}$
3	$y'=\dfrac{x+y}{x-y}$
4	$2y'=\dfrac{x^2+y^2}{x^2}$
5	$x^2y'=x^2+xy+y^2$
6	$y+\sqrt{xy}=xy'$
7	$xy'-y=(x+y)\ln\dfrac{x+y}{x}$
8	$xy'\sin\dfrac{y}{x}+x=y\sin\dfrac{y}{x}$
9	$y'=4+\dfrac{y}{x}+\left(\dfrac{y}{x}\right)^2$
10	$xy'=x\sin\dfrac{y}{x}+y$
11	$(x^2+y^2)dx=xydy$
12	$xy'+2\sqrt{xy}=y$
13	$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{xy+y^2e^{-x/y}}{x^2}$
14	$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y+\sqrt{x^2-y^2}}{x^2}$

15	$xy' = y(1+\ln y - \ln x)$
16	$(y^2 - 3x^2)dy + 2xydx = 0$
17	$xy' = y + \sqrt{x^2 + y^2}$
18	$xy' = 2\sqrt{x^2 + y^2} + y$
19	$3y' = \left(\frac{y}{x}\right)^2 + 9\left(\frac{y}{x}\right) + 9$
20	$y' = \frac{y}{x} + \frac{x}{y}$
21	$y' = \frac{x+y-2}{2x-2}$
22	$y' = \frac{2y-2}{x+y-2}$
23	$y' = \frac{x+y}{x-y}$
24	$y' = \frac{x^2 + 2xy - 5y^2}{2x^2 - 6xy}$
25	$(x - y\cos\frac{y}{x})dx + x\cos\frac{y}{x}dy = 0$

Задание 3.1 Найти общее решение линейного дифференциального уравнения, пользуясь методами Лагранжа или Бернулли.

Вариант	Уравнения
1	$y' - 2xy = 3x^2 - 2x^4$
2	$xy' - 2y = 2x^4$
3	$y' + y\cos x = e^{-\sin x}$
4	$y' + 2y = 3e^x$
5	$y' + y\mathrm{tg}x = \sin 2x$
6	$y' + y\cos x = \cos x$
7	$y' - y\mathrm{tg}x = \frac{1}{\cos^2 x}$

8	$y' - \frac{y}{\sin x} = \cos^2 x \,\mathrm{tg}\,\frac{x}{2}$
9	$y' - \frac{y}{x\ln x} = x\ln x$
10	$y' - \frac{2}{x}y = e^x x^2(x-2)$
11	$y' + \frac{2y}{x} = 1 - x$
12	$y' = \frac{y+1}{x}$
13	$xy' + (x+1)y = 3xe^{-x}$
14	$y' + y = e^x \sin x$
15	$xy' + y = \sin x$
16	$y' = y\,\mathrm{tg}x + \cos x$
17	$xy' + y = x + 1$
18	$y' = e^x - ye^x$
19	$y' - 2y = e^x$
20	$(1-x)(y'+y) = e^{-x}$
21	$y' - \frac{y}{x} = 1 - x^2$
22	$y' + \frac{2y}{x} = x^3$
23	$xy' - 2y = \ln x$
24	$(xy'-1)\ln x = 2y$
25	$(1+x^2)y' + 2xy = 3$

Задание 3.2 Найти общее решение дифференциального уравнения Бернулли.

Вариант	Уравнения
1	$y' + y = 2x\sqrt{y}$

2	$y' + y = e^{x/2}\sqrt{y}$
3	$2(xy' + y) = xy^2$
4	$xy' + 2y = (x+3)xy^2$
5	$\cos y dx = (x + 2\cos y)\sin y dy$
6	$y' - y\mathrm{tg}x + y^2 \cos x = 0$
7	$ydx + (x + x^2 y^2)dy = 0$
8	$y' + 2xy = 2x^3 y^3$
9	$4xy' + 3y = -e^x x^2 y$
10	$y' - 7y = e^{3x} y^2$
11	$xy' - 2x^2\sqrt{y} = 4y$
12	$y' + y = x\sqrt{y}$
13	$y' + \frac{2y}{x} = \frac{2y}{\cos^2 x}$
14	$y' + \frac{3x^2 y}{x^3 + 1} = y^2(x^3 + 1)$
15	$(x^2 + 1)y' + 4xy = 3$
16	$2yy' + y^2 \cos x = \cos x$
17	$y' + 2xy = 2x^3 y^3$
18	$xy' + y = 2y^2 \ln x$
19	$xy' + y = y^2 \ln x$
20	$xy' - y = -y^2(\ln x + 2)$
21	$y' - \frac{y}{x-1} = \frac{y^2}{x-1}$
22	$\frac{dy}{dx} - \frac{3y}{x} = -x^2 y^2$
23	$xy' - 2x^2\sqrt{y} = 4y$
24	$y' + x\sqrt{y} = 2y$

25	$2xy\dfrac{dy}{dx} - y^2 + x = 0$

Задание 4. Проинтегрировать уравнения в полных дифференциалах или привести к уравнению в полных дифференциалах, используя интегрирующий множитель и найти общее решение.

Вариант	Уравнения
1	$(3x^2 y + \sin x)dx + (x^3 - \cos y)dy$
2	$2x\cos^2 y dx + (2y - x^2 \sin 2y)dy = 0$
3	$ydx - xdy + \ln x dx = 0$
4	$2x(1 + \sqrt{x^2 - y})dx - \sqrt{x^2 - y}dy = 0$
5	$(3y^2 + 2xy + 2x)dx + (6xy + x^2 + 3)dy = 0$
6	$(e^x + y + \sin y)dx + (e^y + x + x\cos y)dy = 0$
7	$y(1 + xy)dx - xdy = 0$
8	$(2x + e^{x/y})dx + (1 - \dfrac{x}{y})e^{x/y}dy = 0$
9	$xy^2 dx + (x^2 y + y)dy = 0$
10	$(e^y + ye^x + 3)dx = (2 - xe^y - e^x)\,\mathrm{dy}$
11	$(y + e^x \sin y)dx + (x + e^x \cos y)dy = 0$
12	$(x^2 + y)dx - xdy = 0$
13	$(3x^2 y^2 + 7)dx + 2x^3 ydy = 0$
14	$\dfrac{y}{x}dx + (y^3 - \ln x)dy = 0$
15	$(x^2 + y^2 + 2x)dx + 2ydy = 0$
16	$x + ye^x + (y + e^x)y' + e^x = 0$
17	$\sin(x + y)dx + x\cos(x + \mathrm{y})(dx + dy) = 0$
18	$2xydy + (x^2 - 3y^2)dx = 0$
19	$2x\cos^2 y dx + (2\sqrt[3]{y} - x^2 \sin 2y)dy = 0$

20 $(x^2+y^2+2x)dx+2ydy=0$

21 $(2x+ye^{xy})dx+(1+xe^{xy})dy=0$

22 $e^{-y}dx+(2y-xe^{-y})dy=0$

23 $(x^2+y^2)dx+xydy=0$

24 $(2x\ln y+\dfrac{y}{\cos^2 x})dx+(\dfrac{x^2}{y}+\mathrm{tg}x+e^y)dy=0$

25 $(1+x\sqrt{x^2+y^2})dx+(-1+\sqrt{x^2+y^2})ydy=0$

Задание 5. Проинтегрировать уравнения, не разрешенные относительно производных.

Вариант	Уравнения
1	$y'^2-y^2=0$
2	$y'^2+xy=y^2+xy'$
3	$y=xy'-y'^2$
4	$y=y'(x+1)+y'^2$
5	$2yy'=x(y'^2+4)$
6	$y'=xy'+y$
7	$x=y(\dfrac{1}{\sqrt{y'}}-\dfrac{1}{y'})$
8	$y=x(\dfrac{1}{x}+y')+y'$
9	$y=xy'+y'+\sqrt{y'}$
10	$y=xy'+\sqrt{1+y'^2}$
11	$8y'^3=27y$
12	$xy'^2=2yy'+x=0$
13	$y=xy'+\dfrac{1}{y'}$

14 $x = \frac{y}{y'} + \frac{1}{y'^2}$

15 $y = yy'^2 + 2xy'$

16 $y = xy' - y'^4$

17 $y = xy' - 3y'^3$

18 $y' = 2xy' + y'^2$

19 $y'(y' - 2x) = 2(y - x^2)$

20 $y'^2 - yy' + e^x = 0$

21 $xy' - y = \ln y'$

22 $y' = \ln(xy' - y)$

23 $y = xy' - 3y'^2$

24 $y'^3 = 3(xy' - y)$

25 $y'^3 + y^2 = yy'(y' + 1)$

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Труфанова, Т.В. Методы решения уравнений математической физики / Т.В. Труфанова, Е.М. Веселова, В.А. Труфанов – Благовещенск: Изд-во Амур. гос. ун-та, 2014. – 164 с.

2. Эльсгольц, Л. Э. Дифференциальные уравнения. Классический учебник МГУ / Л. Э. Эльсгольц. – Изд-во МГУ, 2020. – 312 с.

3. Филиппов, А. Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям / А. Ф. Филиппов. – Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2005. – 176 с.

Содержание