Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
АМУРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

СБОРНИК ИНДИВИДУАЛЬНЫХ ЗАДАНИЙ ПО КУРСУ ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ЧАСТЬ ВТОРАЯ УРАВНЕНИЯ ПОРЯДКА ВЫШЕ ПЕРВОГО

Учебно-методическое пособие

Благовещенск
Издательство АмГУ
2021

УДК 517.91
ББК 22.161.6я73

Рекомендовано
учебно-методическим советом университета

Рецензент:
Е.М. Веселова, доцент кафедры математического анализа и моделирования АмГУ, кандидат физ.-мат. наук.

Сборник индивидуальных заданий по курсу «Обыкновенные дифференциальные уравнения». Часть вторая. Уравнения порядка выше первого. Учебно-метод. пособие / сост. Т.В. Труфанова – Благовещенск: Амурский гос. ун-т, 2021. – 33 с.

Настоящее пособие представляет собой сборник индивидуальных заданий (типовых расчетов) по курсу «Обыкновенные дифференциальные уравнения». Это пособие является дополнением к учебному пособию «Прикладные задачи и примеры по дифференциальным уравнениям» [1] по разделам «Уравнения высших порядков». Кратко вводятся основные методы решений дифференциальных уравнений высших порядков. Приводятся подробные решения задач всех основных типов уравнений. После рассмотренных примеров даются варианты индивидуальных заданий по темам.

Пособие предназначено для студентов вузов, обучающихся по направлениям подготовки 09.03.01 -Информатика и вычислительная техника; 09.03.02 Информационные системы и технологии; 24.03.01 Ракетные комплексы и космонавтика; 03.03.02 – Физика и для специальности 24.05.01 – Проектирование, производство и эксплуатация ракет и ракетно-космических комплексов.

В авторской редакции

Введение

Данное методическое пособие содержит варианты заданий по курсу «Обыкновенные дифференциальные уравнения» по разделам «Уравнения высших порядков» и является дополнением к пособию [1].

Написание этого пособия вызвано тем, что учебное пособию [1] было написано для специальностей с большим числом аудиторных занятий по программе и с повышенной сложностью контрольных заданий. По теме «Уравнения высших порядков» задания №1 и №2 не были разбиты по классам уравнений, допускающих понижение порядка, что вызывало у студентов затруднение выбора метода интегрирования этих уравнений. В задание решить задачу Коши №4, для однородного уравнения, высокий порядок уравнения приводит к громоздким вычислениям. В задание №5, найти общее решение неоднородного уравнения, понижен порядок уравнения.

В этом пособии рассмотрены основные виды уравнений высших порядков, которые решаются в квадратурах. Каждый параграф пособия содержит минимум теоретических сведений, используемых для решения соответствующих примеров. Затем подробно рассмотрены методы решения по каждому из основных типов дифференциальных уравнений порядка выше первого, на конкретных примерах, взятых из учебников и сборников задач по дифференциальным уравнениям [1,2,3]. По каждому виду уравнений даются варианты заданий для самостоятельной работы.

1. Уравнения, допускающие понижение порядка

Дифференциальные уравнения n-ого порядка имеют вид

$$y^{(n)} = f(x, y, y', ..., y^{(n-1)}), \qquad (1)$$

или, если они не разрешены относительно старшей производной,

$F(x, y, y', ..., y^{(n)}) = 0.$

Укажем несколько наиболее часто встречающихся классов уравнений, допускающих понижение порядка.

1.1. Уравнение не содержит искомой функции и ее производных до порядка *k*-1 включительно

Рассмотрим частный случай уравнения (1), которое не содержит искомой функции и ее производных до порядка *k-1* включительно, т.е. оно имеет вид:

$$F(x, y^{(k)}, y^{k+1}, ..., y^{(n)}) = 0,$$

то порядок уравнения можно понизить, взяв за новую неизвестную функцию низшую из производных, т.е. сделать замену $y^{(k)} = p$.

Действительно, после замены переменных уравнение принимает вид $F(x, p, p', ..., p^{(n-k)}) = 0.$

Из этого уравнения определяется $p = p\,(x, c_1, c_2, ..., c_{n-k})$, а y находим из $y^{(k)} = p\,(x, c_1, c_2, ..., c_{n-k})$ *k*-кратным интегрированием. В частности, если уравнение второго порядка не содержит y, то замена переменных $y' = p$ приводит к уравнению первого порядка [2].

Пример 1. Решить уравнение второго порядка не содержащего y

$$\frac{d^5y}{dx^5} - \frac{1}{x}\frac{d^4y}{dx^4} = 0.$$

Решение. Полагая $\frac{d^4y}{dx^4} = p$, получаем $\frac{dp}{dx} - \frac{1}{x}p = 0$; разделяя переменные и интегрируя, будем иметь: $\ln|p| = \ln|x| + \ln c$, или $p = cx$, $\frac{d^4y}{dx^4} = cx$, откуда

$y = c_1 x^5 + c_2 x^3 + c_3 x^2 + c_4 x + c_5$.

<u>Пример 2</u>. Найти частное решение уравнения

$$x^4 y''' + 2x^3 y'' = 1, \; y(1) = \frac{1}{2}, \; y'(1) = \frac{1}{2}, \; y''(1) = -1.$$

Решение. Данное уравнение не содержит y и y'. Положим $y'' = p(x)$, тогда $y''' = \frac{dp}{dx}$ и уравнение имеет вид $x^4 \frac{dp}{dx} + 2x^3 p = 1$ или $\frac{dp}{dx} + \frac{2}{x} p = \frac{1}{x^4}$.

Это линейное уравнение первого порядка, которое решается заменой $p(x) = u(x)v(x)$, $p' = u'v + uv'$. Производя замену, получим:

$$u'v + uv' + \frac{2}{x} uv = \frac{1}{x^4}, \quad v\left(u' + \frac{2u}{x}\right) + v'u = \frac{1}{x^4},$$

откуда, с учетом возможности произвольного выбора функции u(x),

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dx} + \dfrac{2u}{x} = 0 \\ \dfrac{dv}{dx} u = \dfrac{1}{x^4} \end{cases}.$$

Решая первое уравнение системы, найдем функцию $u = \frac{1}{x^2}$, из второго уравнения – функцию $v = -\frac{1}{x} + c_1$. Найдем функцию $p = uv$, $p = -\frac{1}{x^3} + \frac{c_1}{x^2}$.

Используя начальное условие $y''(1) = p(1) = -1$, получим $c_1 = 0$. Следовательно, $y'' = -\frac{1}{x^3}$, откуда $y' = \frac{1}{2x^2} + c_2$. Начальное условие $y'(1) = \frac{1}{2}$ позволяет найти $c_2 = 0$. Следовательно, $y' = \frac{1}{2x^2}$, $y = -\frac{1}{2x} + c_3$. Из условия $y(1) = \frac{1}{2}$ следует, что $c_3 = 1$.

Итак, искомое частное решение есть $y = 1 - \frac{1}{2x}$.

1.2. Уравнение не содержит независимого переменного

Уравнение (1) имеет вид $F(y, y', y'', ..., y^{(n)}) = 0$.

В этом случае порядок уравнения можно понизить на единицу подстановкой $y' = p$, причем p рассматривается как новая неизвестная функция y, $p = p(y)$, и следовательно, все производные $\frac{d^k y}{dx^k}$ надо выразить через производные от новой неизвестной функции $p(y)$ по y:

$$\frac{dy}{dx} = p,$$
$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy}\frac{dy}{dx} = \frac{dp}{dy}p,$$
$$\frac{d^3 y}{dx^3} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dp}{dy}p\right) = \frac{d}{dy}\left(\frac{dp}{dy}p\right)\frac{dy}{dx} = \frac{d^2 p}{dy^2}p^2 + \left(\frac{dp}{dy}\right)^2 p$$

и аналогично для производных более высокого порядка. При этом очевидно, что производные $\frac{d^k y}{dx^k}$ выражаются через производные порядка не выше $k-1$ от p по y, что и приводит к понижению порядка на единицу.

В частности, если уравнение второго порядка не содержит независимого переменного, то указанная замена переменных приводит к уравнению первого порядка.

Пример 3. Решить уравнение второго порядка не содержащего независимого переменного

$$y\frac{d^2 y}{dx^2} - \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 0.$$

Решение. Полагая $\frac{dy}{dx} = p$, $\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{dp}{dy}p$, получим уравнение с разделяющимися переменными $yp\frac{dp}{dy} - p^2 = 0$, общее решение которого $p = c_1 y$ или $\frac{dy}{dx} = c_1 y$. Снова разделяя переменные и интегрируя, получим $\ln|y| = c_1 x + \ln c_2$ или

$y = c_2 e^{c_1 x}$.

Пример 4. Найти общее решение уравнения $y' y''' - 3y''^2 = 0$.

Решение. Пусть $y' = p(y)$, $y'' = p\frac{dp}{dy}$, $y''' = p\left(\frac{dp}{dy}\right)^2 + p^2\frac{d^2p}{dy^2}$. Тогда уравнение преобразуется к виду $p\left(p\left(\frac{dp}{dy}\right)^2 + p^2\frac{d^2p}{dy^2}\right) - 3p^2\left(\frac{dp}{dy}\right)^2 = 0$.

Приведя подобные члены и сократив на p^2 (при этом следует учесть теряемое решение p=0 или y=c), получим: $p\frac{d^2p}{dy^2} - 2\left(\frac{dp}{dy}\right)^2 = 0$, $pp'' - 2p'^2 = 0$.

Положив здесь $\frac{dp}{dy} = z$, $\frac{d^2p}{dy^2} = z\frac{dz}{dp}$, приводим уравнение к виду $pz\frac{dz}{dp} - 2z^2 = 0$.

Сократив на z (при этом следует учесть еще одно решение $z = \frac{dp}{dy} = 0$, т.е. $p = c_1$ и $y = c_1x + c_2$), получим $\frac{dz}{z} - \frac{2dp}{p} = 0$, откуда $\ln|z| - \ln p^2 = \ln|c_1|$, или $z = \frac{dp}{dy} = -c_1p^2$.

Интегрируя последнее уравнение, находим: $-\frac{1}{p} = -c_1y - c_2$, или $\frac{dx}{dy} = c_1y + c_2$.

Общий интеграл уравнения запишется в виде $x = c_1y^2 + c_2y + c_3$.

1.3.Левая часть уравнения $F(x, y, y', y'',..., y^{(n)}) = 0$ является производной некоторого дифференциального выражения $(n-1)$-ого порядка $\Phi(x, y, y', y'',..., y^{(n-1)})$.

В этом случае легко находим так называемый первый интеграл, т.е. дифференциальное уравнение $(n-1)$-ого порядка, содержащее одну произвольную постоянную, эквивалентное данному уравнению n-го порядка, и тем самым понижаем порядок уравнения на единицу. Действительно, исходное уравнение можно переписать в виде

$$\frac{d}{dx}\Phi(x, y, y', y'',..., y^{(n-1)}) = 0.$$

Если $y(x)$ является решением уравнения, то производная функции $\Phi(x, y, y', y'',..., y^{(n-1)})$ тождественно равна нулю. Следовательно, функция $\Phi(x, y, y', y'',..., y^{(n-1)})$ равна постоянной, и мы получаем первый интеграл

$$\Phi(x, y, y', y'',..., y^{(n-1)}) = c.$$

Пример 5. Решить уравнение

$$yy''+(y')^2=0.$$

Решение. Это уравнение можно записать в виде $d(yy')=0$, откуда $yy'=c_1$ или $ydy=c_1dx$. Следовательно, общим интегралом является $y^2=c_1x+c_2$.

Пример 6. Найти общее решение уравнения

$$\left(1+x^2\right)y''+2xy'=x^3.$$

Решение. Левая часть уравнения есть полная производная по x от функции $\left(1+x^2\right)y'$, а правая – от функции $\frac{x^4}{4}$, т.е. уравнение можно переписать так:

$$((1+x^2)y')'=\left(\frac{x^4}{4}\right)'$$

Отсюда интегрированием получаем $\left(1+x^2\right)y'=\frac{x^4}{4}+\frac{c_1}{4}$ или $dy=\frac{x^4+c_1}{4\left(1+x^2\right)}dx$.

Следовательно, $y=\frac{1}{12}x^3-\frac{1}{4}x+\frac{c_1}{4}\operatorname{arctg}x+c_2$ есть общее решение уравнения.

Иногда левая часть уравнения $F(x,y,y',y'',...,y^{(n)})=0$ становится производной дифференциального выражения $(n-1)$-ого порядка $\Phi(x,y,y',y'',...,y^{(n-1)})$ лишь после умножения на некоторый множитель $\mu(x,y,y',...,y^{(n-1)})$.

Пример 7. Решить уравнение

$$yy''-(y')^2=0.$$

Решение. Умножая на множитель $\mu=\frac{1}{y^2}$, получим $\frac{yy''-(y')^2}{y^2}=0$ или $\frac{d}{dx}\left(\frac{y'}{y}\right)=0$, откуда $\frac{y'}{y}=c_1$, или $\frac{d}{dx}\ln|y|=c_1$. Следовательно, $\ln|y|=c_1x+\ln c_2, c_2\succ 0$, откуда $y=c_2e^{c_1x}, c_2\neq 0$.

1.4. Уравнение $y^{(n)} = f(x, y, y', ..., y^{(n-1)})$, **однородно относительно аргументов** $y, y', y'', ..., y^{(n)}$.

Порядок однородного относительно $y, y', y'', ..., y^{(n)}$ уравнения

$$F(x, y, y', y'', ..., y^{(n)}) = 0,$$

может быть понижен на единицу подстановкой $y = e^{\int z dx}$, где z-новая неизвестная функция. Действительно, дифференцируя подстановку, получаем

$$y' = e^{\int z dx} z,$$
$$y'' = e^{\int z dx}(z^2 + z'),$$
$$y''' = e^{\int z dx}(z^3 + 3zz' + z''),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$y^{(k)} = e^{\int z dx} \Phi(z, z', z'', ..., z^{(k-1)})$$

Убедиться в справедливости этого равенства можно методом индукции.

Подставляя в однородное уравнение и замечая, что, в силу однородности, множитель $e^{p\int z dx}$ можно вынести за знак функции F, получим

$$e^{p\int z dx} f(x, z, z', ..., z^{(n-1)}) = 0$$

или, сокращая на $e^{p\int z dx}$, будем иметь

$$f(x, z, z', ..., z^{(n-1)}) = 0.$$

Пример 8. Решить уравнение

$$yy'' - (y')^2 = 6xy^2.$$

Решение. Полагая $y = e^{\int z dx}$, получим $z' = 6x, z = 3x^2 + c_1, y = e^{\int (3x^2 + c_1) dx}$ или $y = c_2 e^{(x^3 + c_1 x)}$.

Пример 9. Найти общее решение уравнения $xyy'' - xy'^2 - yy' = 0$.

Решение. Проверим однородность уравнения.

Пусть $F(x, y, y', y'') = xyy'' - xy'^2 - yy'$,

$$F(x, \lambda y, \lambda y', \lambda y'') = x\lambda y \lambda y'' - x(\lambda y')^2 - \lambda y \lambda y' = \lambda^2 (xyy'' - xy' - yy') =$$

$$= \lambda^2 F(x, y, y', y''), \quad m=2.$$

Положим $y' = yz$, тогда $y'' = (yz)' = y'z + z'y = yz^2 + yz'$, или $y'' = y(z^2 + z')$, и уравнение запишется $xy^2(z^2 + z') - xy^2z^2 - y^2z^2 = 0$.

Сокращая на y^2 (при этом теряется решение y=0), находим $xz' - z = 0$ или $\frac{dz}{z} - \frac{dx}{x} = 0$, $z = c_1 x$. Так как $z = \frac{y'}{y}$, то $y' = c_1 xy$, $\frac{dy}{y} = c_1 x dx$.

Откуда $\ln|y| = \frac{c_1 x^2}{2} + \ln|c_2|$ или $y = c_2 e^{c_1 \frac{x^2}{2}}$ – общее решение уравнения (содержит потерянное частное решение y=0, если $c_2 = 0$).

2. Линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами.

2.1. Однородные уравнения.

Линейным однородным уравнением n-го порядка с постоянными коэффициентами называется уравнения вида

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \ldots + a_n y = 0, \tag{2.1}$$

где $a_1, a_2, \ldots, a_n$ – некоторые действительные числа.

Для нахождения частных решений составляют характеристическое уравнение

$$k^n + a_1 k^{n-1} + \ldots + a_{n-1} k + a_n = 0, \tag{2.2}$$

которое получается из уравнения (2.1), если искать частные решения этого уравнения в виде $y = e^{kx}$ (метод подбора решений).

Уравнение (2.2) является уравнением n-й степени и имеет n корней действительных или комплексных, среди которых могут быть и равные.

Частные решения уравнения (2.1) зависят от вида корней характеристического уравнения (2.2)

1. Если все корни $k_1, k_2, ..., k_n$ характеристического уравнения различны и вещественны, то, тем самым, найдено n линейно независимых решений $e^{k_1 x}, e^{k_2 x}, ..., e^{k_n x}$ уравнения (2.1). Следовательно, общее решение исходного уравнения имеет вид

$$y = c_1 e^{k_1 x} + c_2 e^{k_2 x} + ... + c_n e^{kn^x},$$

где c_i - произвольные постоянные. Этот метод интегрирования линейных уравнений с постоянными коэффициентами впервые был применен Эйлером [2].

Пример1.

Решить уравнение $y''-3y'+2y = 0$.

Решение.

Характеристическое уравнение имеет вид $k^2 - 3k + 2 = 0$, его корни $k_1 = 1,\ k_2 = 2$. Следовательно, общее решение исходного уравнения имеет вид $y = c_1 e^x + c_2 e^{2x}$.

Пример 2. Найти общее решение уравнения

$$y'''-y' = 0.$$

Решение.

Характеристическое уравнение $k^2 - k = 0$ имеет корни $k_1 = 0,\ k_2 = 1,\ k_3 = -1$. Общее решение рассматриваемого уравнения $y = c_1 + c_2 e^x + c_3 e^{-x}$.

2. Пусть среди корней уравнения (2.2) есть комплексные корни.

Так как коэффициенты уравнения (2.1) предполагаются действительными, то комплексные корни характеристического уравнения могут появляться лишь сопряженными парами. Комплексные решения $e^{(\alpha+\beta i)x}$ и $e^{(\alpha-\beta i)x}$, соответствующие паре комплексных сопряженных корней

$$k_1 = \alpha + \beta i \text{ и } k_2 = \alpha - \beta i,$$

могут быть заменены двумя действительными решениями: действительной и мнимой частями одного из решений

$$e^{(\alpha+\beta i)x} = e^{\alpha x}(\cos\beta x + i\sin\beta x),$$

или

$$e^{(\alpha-\beta i)x} = e^{\alpha x}(\cos\beta x - i\sin\beta x).$$

Таким образом, паре комплексных сопряженных корней $k_{1,2} = \alpha \pm \beta i$ соответствуют два действительных решения: $e^{\alpha x}\cos\beta x$ и $e^{\alpha x}\sin\beta x$.

Пример 3. Найти общее решение уравнения

$$y''+4y'+5y = 0.$$

Решение. Характеристическое уравнение имеет вид $k^2 + 4k + 5 = 0$, его корни $k_{1,2} = -2 \pm i$. Общее решение

$$y = e^{-2x}(c_1\cos x + c_2\sin x).$$

Пример 4. Найти общее решение уравнения $y'''-y''+4y'-4y = 0$.

Решение. Запишем характеристическое уравнение и найдем его корни.

$$k^3 - k^2 + 4k - 4 = 0, \quad k^2(k-1) + 4(k-1) = 0, \quad (k^2+4)(k-1) = 0, \quad k_1 = 1, \quad k_{2,3} = \pm 2i.$$

Все корни простые, следовательно, частные решения запишутся в виде: $y_1 = e^x, y_2 = \cos 2x, y_3 = \sin 2x$.

Общее решение имеет вид: $y = c_1e^x + c_2\cos 2x + c_3\sin 3x$.

3. Если среди корней характеристического уравнения имеются кратные, то число различных решений вида e^{kx} меньше n и, следовательно, недостающие линейно независимые решения надо искать в ином виде.

Можно показать, что если характеристическое уравнение имеет корень k_i кратности α_i, то решениями исходного уравнения будет не только e^{k_ix}, но $xe^{k_ix}, x^2e^{k_ix}, ..., x^{\alpha_i-1}e^{k_ix}$.

Следовательно, общее решение уравнения (2.1) имеет вид

$$y = \sum_{i=1}^{m}\left(c_{0i} + c_{1i}x + c_{2i}x^2 + ... + c_{\alpha_i-1,i}x^{\alpha_i-1}\right)e^{k_ix},$$

где c_{si} - произвольные постоянные.

Пример 5. Найти общее решение уравнения

$$y'''-3y''+3y'-y=0.$$

Решение. Характеристическое уравнение $k^3-3k^2+3k-1=0$ или $(k-1)^3=0$ имеет трехкратный корень $k_{1,2,3}=1$. Следовательно, общее решение имеет вид

$$y=\left(c_1+c_2x+c_3x^2\right)e^x.$$

4. Если характеристическое уравнение имеет кратный комплексный корень $p+qi$ кратности α, то соответствующие ему решения

$$e^{(p+qi)x},\ xe^{(p+qi)x}, x^2e^{(p+qi)x},\ldots, x^{\alpha-1}e^{(p+qi)x}$$

можно преобразовать по формулам Эйлера

$$e^{(p+qi)x}=e^{px}(\cos qx+i\sin qx)$$

и, отделяя действительную и мнимую части, получить 2α действительных решений:

$$\left.\begin{aligned}&e^{px}\cos qx,\ xe^{px}\cos qx,\ x^2e^{px}\cos qx,\ \ldots.,\ x^{\alpha-1}e^{px}\cos qx,\\ &e^{px}\sin qx,\ xe^{px}\sin qx,\ x^2e^{px}\sin qx,\ \ldots.,x^{\alpha-1}e^{px}\sin qx.\end{aligned}\right\}$$

Таким образом, Общее решение уравнения (2.1) может быть записано в действительной форме.

Пример 6. Найти общее решение уравнения

$$y''''+2y''+y=0.$$

Решение. Характеристическое уравнение $k^4+2k^2+1=0$ или $\left(k^2+1\right)^2=0$ имеет двукратные корни $\pm i$. Следовательно, общее решение имеет вид

$$y=(c_1+c_2x)\cos x+(c_3+c_4x)\sin x.$$

Пример 7. Найти общее решение уравнения

$$y^{\mathrm{VI}}-4y^{\mathrm{V}}+8^{\mathrm{IV}}-8y^{\mathrm{III}}+4y^{\mathrm{II}}=0.$$

Решение. Составим характеристическое уравнение $k^6-4k^5+8k^4-8k^3+4k^2=0$ и найдем его корни. Имеем

$$k^2\left(k^4-4k^3+8k^2-8k+4\right)=0,\ k^2\left(k^4+4k^2+4-4k^3+4k^2-8k\right)=0,\ k^2\left(k^2-2k+2\right)^2=0.$$

Откуда $k_1=k_2=0,\ k_3=k_4=1+i,\ k_5=k_6=1-i$.

Частные решения имеют вид $1,\ x,\ e^x\cos x,\ e^x\sin x,\ xe^x\cos x,\ xe^x\sin x$.

Общее решение запишется в виде

$$y=c_1+c_2x+e^x\left(c_3\cos x+c_4\sin x+c_5x\cos x+c_6x\sin x\right).$$

2.2. Линейные неоднородные уравнения.

Линейное неоднородное уравнение имеет вид

$$y^{(n)}+p_1(x)y^{(n-1)}+\ldots+p_n(x)y=f(x). \qquad (2.3)$$

Это уравнение кратко запишем через линейный дифференциальный оператор в виде

$$L[y]=f(x).$$

Если при $a\le x\le b$ в уравнении (2.3) все коэффициенты $p_i(x)$ и правая часть $f(x)$ непрерывны, то оно имеет единственное решение, удовлетворяющее условиям

$$y^{(k)}(x_0)=y_0^{(k)} \quad (k=0,1,\ldots,n-1),$$

где любые $y_0^{(k)}$ - любые действительные числа, а x_0 - любая точка интервала $a<x<b$.

Теорема (о структуре общего решения неоднородного уравнения) *Общее решение на отрезке $a\le x\le b$ уравнения $L[y]=f(x)$ с непрерывными на том же отрезке коэффициентами $p_i(x)$ и правой частью $f(x)$ равно сумме общего решения $\sum_{i=1}^{n}c_iy_i$ соответствующего однородного уравнения(2.1) и какого-нибудь частного решения $\tilde{y}$ неоднородного уравнения.*

Из теоремы следует, что решение неоднородного уравнения представимо в виде

$$y = \sum_{i=1}^{n} c_i y_i + \tilde{y}, \qquad (2.4)$$

где c_i - произвольные постоянные, а y_i $(i = 1, 2, ..., n)$ - линейно независимые решения соответствующего однородного уравнения.

Пример 1. Решить уравнение

$$y'' + y = x.$$

Решение. Одно частное решение этого уравнения $y = x$, очевидно, общее решение соответствующего однородного уравнения, имеет вид

$$y = c_1 \cos x + c_2 \sin x.$$

Следовательно, общее решение исходного неоднородного уравнения

$$y = c_1 \cos x + c_2 \sin x + x.$$

2.2.1. Метод Лагранжа построения частного решения неоднородного уравнения.

Если подбор частного решения неоднородного уравнения труден, но общее решение соответствующего однородного уравнения $y = \sum_{i=1}^{n} c_i y_i$ найдено, то можно проинтегрировать линейное неоднородное уравнение методом вариации постоянных.

При применении этого метода решение неоднородного уравнения ищем в виде $y = \sum_{i=1}^{n} c_i(x) y_i$, т.е. вместо неизвестной функции y вводим n неизвестных функций $c_i(x)$. Так как этих функций $c_i(x)$ $(i = 1, 2, ..., n)$ n- штук, а уравнение у нас одно

$$y^{(n)} + p_1(x) y^{(n-1)} + ... + p_n(x) y = f(x).$$

то нужно потребовать, чтобы эти n функций $c_i(x)$ удовлетворяли бы еще каким-нибудь $n-1$ уравнениям, которые мы выбираем так, чтобы производные функции $y=\sum_{i=1}^{n}c_i(x)y_i(x)$ имели бы по возможности такой же вид, какой они имеют при постоянных c_i. Выберем $c_i(x)$ так, чтобы вторая сумма в правой части

$$y'=\sum_{i=1}^{n}c_i(x)y'_i(x)+\sum_{i=1}^{n}c'_i(x)y_i(x)$$

равнялась нулю,

$$\sum_{i=1}^{n}c_i'(x)y_i(x)=0,$$

и, следовательно,

$$y'=\sum_{i=1}^{n}c_i(x)y'_i(x),$$

т.е. y' имеет такой же вид, как и при постоянных c_i. Точно также у второй производной

$$y''=\sum_{i=1}^{n}c_i(x)y''+\sum_{i=1}^{n}c'_i(x)y'_i$$

требуем обращения в нуль второй суммы и тем самым подчиняем $c_i(x)$ второму условию:

$$\sum_{i=1}^{n}c_i'(x)y'_i=0.$$

Продолжая вычислять производные функции $y=\sum_{i=1}^{n}c_i(x)y_i$ до порядка $n-1$ включительно и требуя каждый раз обращения в нуль суммы $\sum_{i=1}^{n}c'_i(x)y_i^{(k)}(x)$:

$$\sum_{i=1}^{n}c'_i(x)y_i^{(k)}(x)=0\quad (k=0,1,2,....,n-2), \tag{2.4}$$

получим систему для отыскания $c_i(x)$ $(i=1,2,...,n)$:

$$\left.\begin{array}{l}\sum_{i=1}^{n} c'_i(x) y_i = 0, \\ \sum_{i=1}^{n} c'_i(x) y'_i = 0, \\ \sum_{i=1}^{n} c'_i(x) y_i'' = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ = \sum_{i=1}^{n} c'_i(x) y_i^{(n-2)} \\ \sum_{i=1}^{n} c'_i(x) y_i^{(n-1)} = f(x). \end{array}\right\} \qquad (2.5)$$

Последнее уравнение получаем из уравнения (2.3) подставляя в него $y, y', ..., y^{(n)}$ из (2.4). Определитель этой системы отличен от нуля, так как этот определитель Вронского для линейно независимых решений соответствующего однородного уравнения. Определив из (2.5) все $c_i(x) = \varphi_i(x)$, интегрируя находим $c_i(x) = \int \varphi_i(x) dx + \bar{c}_i$.

Пример 2. Решить уравнение

$$y'' + y = \frac{1}{\cos x}.$$

Решение. Общее решение соответствующего однородного уравнения имеет вид $y = c_1 \cos x + c_2 \sin x$. Варьируем c_1 и c_2:

$$y = c_1(x) \cos x + c_2(x) \sin x.$$

$c_1(x)$ и $c_2(x)$ определяются из системы уравнений (2.5):

$$c_1'(x) \cos x + c_2'(x) \sin x = 0$$

$$-c_1'(x) \sin x + c_2'(x) \cos x = \frac{1}{\cos x},$$

откуда

$$c_1'(x) = -\frac{\sin x}{\cos x}, c_1(x) = \ln \cos x + \bar{c}_1;$$

$$c_2'(x) = 1, \quad c_2(x) = x + \bar{c}_2.$$

Общее решение исходного уравнения

$$y = \bar{c}_1 \cos x + \bar{c}_2 \sin x + \cos x In|\cos x| + x \sin x.$$

Пример 3. Найти частное решение дифференциального уравнения

$$y''-y'=\frac{1}{1+e^x},$$

удовлетворяющее начальным условиям $y|_{x=0}=1, y'|_{x=0}=2$.

Решение. Общее решение данного уравнения запишется $y=\bar{y}+y^*$.

Найдем $\bar{y}$ – общее решение соответствующего линейного однородного уравнения $y''-y'=0$. Корни его характеристического уравнения $k^2-k=0$ вещественные разные $k_1=0, k_2=1$, тогда $\bar{y}=\bar{c}_1+c_2e^x$. Запишем $y^*=c_1(x)+c_2(x)e^x$.

Составим систему (2.5) для нахождения $c_1(x)$ и $c_2(x)$

$$\begin{cases} c_1'(x)1+c_2'(x)e^x=0 \\ c_1'(x)0+c_2'(x)e^x=\dfrac{1}{1+e^x} \end{cases} \text{ или } \begin{cases} c_1'+c_2'e^x=0 \\ c_2'e^x=\dfrac{1}{1+e^x} \end{cases},$$

откуда получаем: $c_2'(x)=\dfrac{1}{e^x(1+e^x)}$.

Следовательно,

$$c_1(x)=-\int\frac{dx}{1+e^x}=-x+\ln(1+e^x),$$

$$c_2(x)=\int\frac{dx}{e^x(1+e^x)}=-e^x-x+\ln(1+e^x).$$

Запишем $y^*=-x+\ln(1+e^x)+e^x\left[-e^{-x}-x+\ln(1+e^x)\right]$.

Общее решение: $y=\bar{c}_1+c_2e^x-x+\ln(1+e^x)-1-xe^x+e^x\ln(1+e^x)$ или

$$y=c_1+e^x(c_2-x)-x+(1+e^x)\ln(1+e^x) \quad (c_1=\bar{c}_1-1).$$

Для определения частного решения найдем производную

$$y'=-1+e^x\left[c_2-x+\ln(1+e^x)\right].$$

Подставляя значения $x=0,\ y=1,\ y'=2$ в выражение

$$y=c_1+e^x(c_2-x)-x+(1+e^x)\ln(1+e^x) \text{ и } y'=-1+e^x\left[c_2-x+\ln(1+e^x)\right],$$

получим систему

$$\begin{cases} 1=c_1+c_2+2\ln 2 \\ 2=-1+c_2+\ln 2. \end{cases}$$

Откуда $c_1 = -2 - \ln 2,\ \ c_2 = 3 - \ln 2.$ Искомое частное решение запишется так:

$$y = -x + e^x(3 - \ln 2 - x) + (1 + e^x)\ln(1 + e^x) - 2 - \ln 2 .$$

2.2.2. Линейные неоднородные уравнения с постоянными коэффициентами и с правой частью специального вида

Рассмотрим линейное неоднородное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами, т.е. уравнение вида

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} y' + a_n y = f(x) \qquad (2.6)$$

где $a_i \ \ (i = 1,2,\ldots,n)$ - действительные числа, а $f(x) \neq 0$.

Будем говорить, что правая часть имеет специальный вид, если она состоит из сумм и произведений функций

$b_0 + b_1 x + \ldots + b_m x^m,\ \ e^{\alpha x}$, $\cos\beta x$, $\sin\beta x$. В этих случаях частное решение находится методом неопределенных коэффициентов (метод подбора частного решения).

1. Пусть $f(x) = e^{\alpha x} P_m(x)$, тогда частное решение уравнения (2.6) ищем в виде

1.1 $y^* = e^{\alpha x} Q_m(x)$, если α – не является корнем характеристического уравнения и в виде

1.2 $y^* = x^r e^{\alpha x} Q_m(x)$, если α – корень характеристического уравнения кратности r, где $Q_m(x)$ - многочлен той же степени m, что и $P_m(x)$.

Чтобы найти корни многочлена $Q_m(x)$, надо предполагаемую форму решения подставить в уравнение (2.6) и приравнять коэффициенты при подобных членах в правой и левой частях уравнения.

Пример 4. Решить уравнение

$$y'' + y = x^2 + x.$$

Решение. Характеристическое уравнение

$k^2 + 1 = 0$ имеет корни $k_{1,2} = \pm i$. Решение однородного уравнения

$$y_o = c_1 \cos x + c_2 \sin x .$$

Частное решение имеет вид

$$\tilde{y} = B_0 x^2 + B_1 x + B_2 .$$

Подставляя в исходное уравнение и сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x, получаем

$B_0 = 1,\ B_1 = 1,\ B_2 = -2,\ \tilde{y} = x^2 + x - 2$. Обще решение уравнения складывается из общего решения однородного уравнения и частного решения неоднородного уравнения. $y = y_o + \tilde{y} = c_1 \cos x + c_2 \sin + x^2 + x - 2$.

Пример 5. Решить уравнение

$y'' + y' = x - 2$

Решение. Характеристическое уравнение

$k^2 + k = 0$ имеет корни $k_1 = 0,\ \ k_2 = -1$. Частное решение неоднородного уравнения ищем в виде

$y = x(B_0 x + B_1)$, т.к. показателем степени α =0 совпал с корнем характеристического уравнения $k = 0$. Подставляя в уравнение, сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x в левой и правой частях полученного тождества, находим

$$B_0 = \frac{1}{2},\ \ B_1 = -3,\ \ \tilde{y} = x\left(\frac{1}{2}x - 3\right).$$

Общее решение

$$y = c_1 + c_2 e^{-x} + x\left(\frac{1}{2}x - 3\right).$$

Приведем примеры, для каждого из уравнений запишем виды частных решений с неопределенными коэффициентами, не находя числовые значения этих коэффициентов.

Пример 6. Решая уравнение

$$y'' + 9y = e^{5x},$$

частное решение надо искать в виде

$$\tilde{y} = Be^{5x}.$$

Пример 7. Решая уравнение

$$y'' + y = e^{3x}(x - 2).$$

частное решение надо искать в виде

$$\tilde{y} = e^{3x}(B_0 x + B_1).$$

Пример 8. Решая уравнение

$$y'' + y = e^x (x^2 - 1),$$

частное решение надо искать в виде

$$\tilde{y} = xe^x (B_0 x^2 + B_1 x + B_2),$$

так как $k = 1$ является простым корнем характеристического уравнения.

Пример 9. Решая уравнение

$$y''' + 3y'' + 3y' + y = e^{-x}(x - 5),$$

частное решение надо искать в виде

$$\tilde{y} = x^3 e^{-x}(B_0 x + B_1),$$

так как $k = -1$ является трехкратным корнем характеристического уравнения.

Пример 10. Найти общее решение уравнения $y^{IV} + y'' = x^2 + x$.

Решение. Характеристическое уравнение $k^4 + k^2 = 0$, его корни $k_{1,2} = 0,\ k_{3,4} = \pm i$.

Общее решение соответствующего однородного уравнения запишется

$$\bar{y} = c_1 + c_2 x + c_3 \cos x + c_4 \sin x.$$

Частное решение имеет вид $y^* = x^2\left(Ax^2 + Bx + C\right) = Ax^4 + Bx^3 + Cx^2$.

Для определения неизвестных коэффициентов A,B,C вычислим производные от y^*: $y^{*\prime} = 2Cx + 3Bx^2 + 4Ax^3$, $y^{*\prime\prime} = 2C + 6Bx + 12Ax^2$, $y^{*\prime\prime\prime} = 6B + 24Ax$, $y^{*IV} = 24A$ и подставим в уравнение $y^{IV} + y'' = x^2 + x$. Из полученного тождества

$$24A + 2C + 6Bx + 12Ax^2 \equiv x^2 + x$$

определим коэффициенты A,B,C двумя методами:

1) сравнив коэффициенты при одинаковых степенях x, получим

$$\begin{cases} 12A = 1 \\ 6B = 1 \\ 24A + 2C = 0, \end{cases} \quad \text{откуда } A = \frac{1}{12},\ B = \frac{1}{6},\ C = -1.$$

2) зададим x произвольные значения. Пусть $x = 0 \ \Rightarrow \ 24A + 2C = 0$,

$$x=-1 \quad \Rightarrow \quad 24A+2C-6B+12A=0,$$
$$x=1 \quad \Rightarrow \quad 24A+2C+6B+12A=2.$$

Решая полученную систему, найдем $A=\frac{1}{12}, \quad B=\frac{1}{6}, \quad C=-1$. При определении коэффициентов используется либо первый либо, второй метод, а иногда уместно применить одновременно оба.

Частное решение запишется $y^*=\frac{x^4}{12}+\frac{1}{6}x^3-x^2$. Следовательно,

$y=C_1+C_2x+C_3\cos x+C_4\sin x-x^2+\frac{1}{6}x^3+\frac{x^4}{12}$ есть общее решение уравнения.

2. Пусть $f(x)=A\cos\beta x+B\sin\beta x$, тогда частное решение уравнения (2.6) ищем в виде

2.1 $y^*=M\cos\beta x+N\sin\beta x$, если $\pm\beta i$ – не является корнем характеристического уравнения

2.2 $y^*=x^r(M\cos\beta x+N\sin\beta x)$, если $\pm\beta i$ – корень характеристического уравнения кратности r

Пример 11. Решая однородное уравнение

$$y''+4y'+4y=\cos 2x,$$

числа $\pm 2i$ не являются корнями характеристического уравнения, то частное решение ищем в виде

$$\tilde{y}=A\cos 2x+B\sin 2x.$$

Пример 12. Решая однородное уравнение

$$y''+4y=\cos 2x.$$

числа $\pm 2i$ являются простыми корнями характеристического уравнения, то частное решение ищем в виде

$$\tilde{y}=x[A\cos 2x+B\sin 2x].$$

Пример 13. Решая однородное уравнение

$$y^{IV}+2y''+y=\sin x.$$

числа $\pm i$ являются двукратными корнями характеристического уравнение, то частное решение ищем в виде

$$\tilde{y}=x^2\left[A\cos x+B\sin x\right].$$

3.Пусть $f(x)=e^{\alpha x}[P_m(x)\cos\beta x+ + P_n(x)\sin\beta x]$, тогда частное решение уравнения (2.6) ищем в виде

3.1 $y^*=e^{\alpha x}[M_k(x)\cos\beta x+N_k(x)\sin\beta x]$, если $\alpha\pm\beta i$ – не является корнем характеристического уравнения

Пример 14. Найти общее решение дифференциального уравнения $y'''-2y''+y'=4(\sin x+\cos x)$.

Решение. Запишем характеристическое уравнение и найдем его корни: $k^3-2k^2+k=0,\quad k_1=0,\quad k_2=k_3=1.$ Общее решение однородного уравнения имеет вид $\bar{y}=C_1+(C_2+C_3x)e^x$. Запишем частное решение $y^*=A\cos x+B\sin x.$ Вычислим производные:

$$(y^*)'=-A\sin x+B\cos x,\ (y^*)''=-A\cos x-B\sin x,\ \ (y^*)'''=A\sin x-B\cos x;$$

после подстановки $y^*,\ \ (y^*)',\ \ (y^*)'',\ \ (y^*)'''$ в левую часть данного уравнения получим $2A\cos x+2B\sin x\equiv 4\cos x+4\sin x$ – тождество, из которого $A=2,\ B=2;\ y^*=2\cos x+2\sin x$ – частное решение. Общее решение неоднородного уравнения $y=\bar{y}+y^*$, или $y=C_1+(C_2+C_3x)e^x+2\cos x+2\sin x.$

3.2 $y^*=x^re^{\alpha x}[M_k(x)\cos\beta x+N_k(x)\sin\beta x]$, если $\alpha\pm\beta i$ – корень характеристического уравнения кратности r.

Пример 15. Решая однородное уравнение $y''+2y'+2y=e^{-x}(x\cos x+3\sin x)$, числа $-1\pm i$ являются простыми корнями характеристического уравнения, то частное решение ищем в виде

$$\tilde{y}=xe^{-x}\left[(A_0x+A_1)\cos x+(B_0x+B_1)\sin x\right].$$

Подставляя предполагаемое частное решение в исходное уравнение находим коэффициенты A_1, B_1, A_0, B_0 .

Варианты заданий для индивидуальной работы

Задание № 1. Уравнение не содержит независимой переменной

1. $y^4 - y^3 y'' = 1$
2. $yy'' - 2yy' \ln y - y'^2 = 0$
3. $y''^2 = y'^2 + 1$
4. $y^4 - y^3 y'' = 1$
5. $y'^2 + 2yy'' = 0$
6. $y'''y'^2 = y''^3$
7. $y'' + y'^2 = 2e^{-y}$
8. $y''^2 - 2y'y''' + 1 = 0$
9. $yy'' = y'^2 - y'^3$
10. $y^3 y'' = 1$
11. $y'^2 = (3y - 2y')y''$
12. $2yy'' = y^2 + y'^2$
13. $(y' + 2y)y'' = y'^2$
14. $y'' = e^y$
15. $yy' + y = y'^2$
16. $yy'' = y'^2$
17. $yy''^2 = 1$
18. $1 + y'^2 = 2yy''$
19. $yy'' + y - y'^2 = 0$
20. $2y'^2 = (y-1)y''$
21. $4y^3 y'' = 16y^4 - 1$
22. $4y^3 y'' = 16y^4 - 1$
23. $yy'' - y' = y^2$
24. $yy'' = y'^2$
25. $y''' = y'$

Задание № 2. В уравнение не входит искомая функция

1. $y''(e^x + 1) + y' = 0$
2. $y''^2 + y' = xy''$
3. $2y'(y'' + 2) = xy''^2$
4. $y''^2 - 2y'y''' + 1 = 0$
5. $2xy'y'' = y'^2 - 1$

6. $y''' = 2(y''-1)\operatorname{ctg} x$
7. $y''^3 + xy'' = 2y'$
8. $y''^2 = y'^2 + 1$
9. $y'' - xy''' + y'''^3 = 0$
10. $y''(2y' + x) = 1$
11. $(1-x^2)y'' + xy' = 2$
12. $y'''y'^2 = y''^3$
13. $xy'' = y' + x(y'^2 + x^2)$
14. $y''' = y''^2$
15. $xy'' = y' + x\sin\dfrac{y'}{x}$
16. $x^2 y''' = y''^2$
17. $y'' + 2xy'^2 = 0$
18. $xy''' + y'' - x - 1 = 0$
19. $y'' tgy = 2y'$
20. $xy''' = y'' - xy''$
21. $xy''' - y'' + \dfrac{1}{x} = 0$
22. $y'y''' = 2y''^2$
23. $y''' = 2(y''-1)\operatorname{ctg} x$
24. $y''' + y' = \dfrac{\sin x}{\cos^2 x}$
25. $x^2 y''' = y''^2$

Задание № 3. Уравнение однородно относительно y и его производных

1. $x^2 yy'' - 2x^2 y'^2 + xyy' + y^2 = 0$
2. $x^2 yy'' = (y' - xy')^2$
3. $x^2(yy'' - y'^2) + xyy' = y\sqrt{x^2 y'^2 + y^2}$
4. $xyy'' - xy'^2 = yy'$
5. $yy'' = y'^2 + 15y^2\sqrt{x}$
6. $(x^2+1)(y'^2 - yy'') = xyy'$
7. $xyy'' + xy'^2 = 2yy'$
8. $x^2 yy'' = (y - xy')^2$
9. $y(xy'' + y') = xy'^2(1-x)$
10. $x^2 yy'' + y'^2 = 0$
11. $xyy'' = y'(y + y')$

12. $x^2 y'' = (y - xy')(y - xy' - x)$
13. $x^2(2yy'' - y'^2) = 1 - 2xyy'$
14. $xyy''' + xy'^2 = 2yy'$
15. $y'' + \dfrac{y'}{x} + \dfrac{y}{x^2} = \dfrac{y'^2}{y}$
16. $2yy'' - 3y'^2 = 4y^2$
17. $y''x^2 = y - xy'$
18. $xyy'' - xy'^2 = yy'$
19. $x^2(y'^2 - 2yy'') = y^2$
20. $yy'' = y'^2$
21. $2yy'' = y'^2$
22. $x^2 yy'' = (y - xy')^2$
23. $4x^2 y^3 y'' = x^2 - y^4$
24. $x^2 yy'' + y'^2 = 0$
25. $yy''' + 3y'y'' = 0$

Задание № 4. Решить однородные линейные уравнения

1. $y'' - 6y' + 8y = 0$
2. $y'' - y' - 2y = 0$
3. $y'' + 3y' + 2y = 0$
4. $y'' - 2y' = 0$
5. $y'' + 3y' = 0$
6. $y'' - y' + y = 0$
7. $y'' + 2y' + 2y = 0$
8. $y'' - y = 0$
9. $y'' + 4y = 0$
10. $y'' + 4y' + 13y = 0$
11. $y''' - 2y'' - y' + 2y = 0$
12. $y''' - 13y' - 12y = 0$
13. $y''' - 6y'' + 12y' - 8y = 0$
14. $y''' - 7y'' + 16y' - 12y = 0$
15. $y''' + y'' = 0$
16. $y'' + 5y' + 6y = 0$
17. $y'' - 2y' + y = 0$
18. $y'' + 4y' + 13y = 0$
19. $y'' - 4y' + 4y = 0$
20. $y'' - 5y' - 6y = 0$
21. $y''' + 2y'' + y' = 0$

22. $y^{IV} + y = 0$
23. $y''' - 3y' + 2y = 0$
24. $y''' - 4y'' + 5y' = 0$
25. $y^{IV} + 2y'' + y = 0$

Задание № 5. Решить неоднородные линейные уравнения

1. $y'' - y = x^2 - x + 1$
2. $y'' - 4y' = -12x^2 + 6x - 4$
3. $y'' + 5y' + 6y = 3$
4. $y'' + y' = 3$
5. $y'' + y = 4e^x$
6. $y'' - y = 4e^x$
7. $y'' - 2y' + y = 4e^x$
8. $y'' - 2y' - 3y = 3 - 4e^x$
9. $y'' - 3y' + 2y = 3e^{2x} + 2x^2$
10. $y'' - 3y' = e^{3x} - 18x$
11. $y'' - y = 2\sin x - 4\cos x$
12. $y'' + y = 6\sin 2x$
13. $y'' - y' + y = -13\sin 2x$
14. $y'' + 4y = \sin 2x$
15. $y'' + y = e^x + \cos x$
16. $y''' + 6y'' + 12y' + 8y = 3e^{-2x}$
17. $y''' - y'' = -3x + 1$
18. $y'' + y' = 5x + 3$
19. $y'' - 2y' - 3y = (x+2)e^{3x}$
20. $y'' + 4y' + 5y = 2\cos x - \sin x$
21. $y''' - y'' = 2xe^x + 1$
22. $y''' - 4y' = 3 + e^{2x}$
23. $y''' - 3y' + 2y = xe^{-x}$
24. $y''' + 2y'' + y' = -2e^{-2x}$
25. $y''' - 3y' = 3(2 - x^2) + e^{-x}$

Задание № 6. Найти общие решения уравнений методом вариации произвольных постоянных (методом Лагранжа)

1. $y'' + y + \operatorname{ctg}^2 x = 0$
2. $y'' - y' = e^{2x}\sqrt{1 - e^{2x}}$
3. $5y'' - 6y' + 5y = e^{3x/5}\cos x$

4. $5y'' - y' = e^{2x} \cos e^x$

5. $y'' - 3y' + 2y = 2x^3 - 30$

6. $y'' - 4y' + 4y = \sin^3 x$

7. $2y'' + 5y' = 29x \sin x$

8. $y'' - 7y' + 6y = \sin x$

9. $y'' + 4y = \dfrac{1}{\cos 2x}$

10. $y'' + 4y' + 4y = \dfrac{e^{-2x}}{x^3}$

11. $y'' - y' = \dfrac{1}{1 - e^x}$

12. $y'' + 2y' + y = \dfrac{e^{-x}}{x}$

13. $y'' - 4y' + 5y = \dfrac{e^{2x}}{\cos x}$

14. $y'' + y' = \mathrm{tg}^2\, x$

15. $y'' + 4y' + 4y = e^{-2x} \ln x$

16. $y'' - 2y' + y = \dfrac{e^x}{x}$

17. $y'' + 3y' + 2y = \dfrac{1}{e^x + 1}$

18. $y'' + y = \dfrac{1}{\sin x}$

19. $y'' + 4y = 2\,\mathrm{tg}\, x$

20. $y'' + 2y' + y = 3e^{-x}\sqrt{x+1}$

21. $y'' - y' = e^{2x}\sqrt{1 - e^{2x}}$

22. $y'' + y = \dfrac{1}{\sqrt{\cos 2x}}$

23. $y'' - 2y' = \dfrac{4e^{-2x}}{1 + e^{-2x}}$

24. $y'' + 9y = \dfrac{9}{\cos 3x}$

25. $y'' - 6y' + 8y = \dfrac{4}{2 + e^{-2x}}$

Задание № 7. Решить задачу Коши.

1. $y'' + 8\sin y\cos^3 y = 0, y(0) = 0, y'(0) = 2$
2. $y''' + 9y' = 0, y(0) = 1, y'(0) = 1, y''(0) = -1$
3. $y'' = 72y^3, y(2) = 1, y'(2) = 6$
4. $y''y^3 + 36 = 0, y(0) = 3, y'(0) = 2$
5. $4y^3y'' = y^4 - 16, y(0) = 2\sqrt{2}, y'(0) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$
6. $y'' + 18\sin y\cos^3 y = 0, y(0) = 0, y'(0) = 3$
7. $y''y - y'^2 = y^2, y(0) = 1, y'(0) = 0$
8. $yy'' = y'^2, y(0) = 1, y'(0) = 1$
9. $2yy'' = y'^2, y(-1) = 4, y'(-1) = 1$
10. $y'^2 - y'' = yy', y(0) = 1, y'(0) = 2$
11. $y''' - 4y'' + 5y' = 0, y(0) = 0, y'(0) = 1, y''(0) = 2$
12. $y''' - 3y'' + 2y = 0, y(0) = 0, y'(0) = 1, y''(0) = -1$
13. $2yy'' = y'^2, y(1) = 1, y'(1) = 1$
14. $yy'' = y'^2 - y'^3, y(0) = 1, y'(0) = 2$
15. $y^3y'' = 1, y(-2) = 1, y'(-2) = -1$
16. $y^3y'' + 9 = 0, y(1) = 1, y'(1) = 3$
17. $2y''' - 3y'^2 = 0, y(0) = -3, y'(0) = 1, y''(0) = -1$
18. $y'' = 8y^3, y(0) = 1, y'(0) = 2$
19. $y''' + 2y'' + y' = 0, y(0) = 2, y'(0) = 1, y''(0) = 1$
20. $y^3y'' + 4 = 0, y(0) = -1, y'(0) = -2$
21. $y^3y'' = y^4 - 16, y(0) = 2\sqrt{2}, y'(0) = \sqrt{2}$
22. $y^3y'' = -1, y(1) = y'(1) = -1$
23. $y'' = 2y^3 - 16, y(-1) = y'(-1) = 1$
24. $y^3y'' + 64 = 0, y(0) = 4, y'(0) = 2$
25. $y'' = 6y^3, y(1) = 1, y'(1) = 2$

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Труфанова, Т.В. Методы решения уравнений математической физики / Т.В. Труфанова, Е.М. Веселова, В.А. Труфанов – Благовещенск: Изд-во Амур. гос. ун-та, 2014. – 164 с.
2. Эльсгольц, Л. Э. Дифференциальные уравнения. Классический учебник МГУ / Л. Э. Эльсгольц. – Изд-во МГУ, 2020. – 312 с.
3. Филиппов, А. Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям / А. Ф. Филиппов. – Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2005. – 176 с.

Содержание