

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Амурский государственный университет

ЛАБОРАТОРНЫЙ ПРАКТИКУМ ПО ОБЩЕЙ ФИЗИКЕ:

**учебно-методическое пособие для студентов специальности 03.03.02 –
«ФИЗИКА»**

ЧАСТЬ 1: МЕХАНИКА

Выпуск 4

Благовещенск

Издательство АмГУ

2020

УДК 53

ББК

К55

Рекомендовано

Учебно-методическим советом университета

Рецензент:

Стукова Е.В., док. физ.-мат. наук, доцент по специальности 01.04.07 – «Физика конденсированного состояния», Амурский государственный университет

Учебно-методическое пособие для выполнения общего физического практикума, часть 1: механика.

Лабораторный практикум по физике: Учебно-методическое пособие для студентов специальности 03.03.02 – «Физика». Часть 1. Механика. Вып. 4./ сост. И.Б. Копылова, О.В. Зотова, О.А. Агапьятова, В.Ф. Ульянычева, В. В. Нецименко, О.В. Козачкова, под. ред., И.Б. Копыловой – Благовещенск: 2020.- 109 с.

Методические указания содержат описание лабораторных работ по курсу «Механика» для специальности 03.03.02 - физика. Несколько работ рассчитаны на использование типового комплекта оборудования по курсу «Механика» и комплекта ЛКМ-2. Часть работ содержит дополнительные задания для самостоятельных исследований. Издание дополнено справочными данными. Изменена методика выполнения некоторых работ, контрольные вопросы.

Для студентов физических отделений высших учебных заведений, выполняющих лабораторный практикум по физике.

©Амурский государственный университет, 2020

© И.Б. Копылова, редактор

МЕРЫ БЕЗОПАСНОСТИ ПРИ ВЫПОЛНЕНИИ ФИЗИЧЕСКОГО ПРАКТИКУМА В ЛАБОРАТОРИИ «МЕХАНИКА»

Общие положения

1. В лаборатории используются установки, имеющие питание от сети 220В, что создает потенциальную опасность поражения электрическим током.

2. Ответственными за технику безопасности в лабораториях во время проведения учебных занятий являются преподаватели, ведущие лабораторные работы со студентами.

Запрещается:

- допускать к работе студентов, не прошедших инструктаж по технике безопасности с росписью в журнале;
- работа студентов в лаборатории без преподавателя или лаборанта, который имеет группу допуска по электробезопасности не ниже III;
- работать на установках со снятыми кожухами, поврежденной изоляцией проводов, розеток, вилок.

Перед работой:

ознакомиться с инструкциями по выполняемой работе;
осмотреть установку, убедиться в ее исправности; установки, имеющие клеммы заземления, должны быть заземлены.

Во время работы:

- не захламлять рабочее место; на рабочем месте не должно быть посторонних предметов;
- не трогать приборы, не используемые в выполняемой работе; без разрешения преподавателя не выполнять действий, не предусмотренных описанием работы;
- включать установки только после получения допуска, установка должна находиться под напряжением только во время эксперимента, включая время, необходимое для прогрева установки; после окончания измерений установку следует обесточить;
- выключить установку, поставить в известность преподавателя при появлении признаков неисправности - нарушения режима работы, искрения, появления дыма и запаха гари, посторонних звуков.

После работы:

- установить ручки приборов в исходное положение, выключить установку, вынуть вилки приборов из розеток;
- сдать лаборанту полученные принадлежности.

ПРАВИЛА ВЫПОЛНЕНИЯ ЛАБОРАТОРНОГО ПРАКТИКУМА И ПОДГОТОВКА К НЕМУ

1. Подготовка к выполнению лабораторной работы

Лабораторные работы направлены на привитие студентам основных навыков и умений, необходимых будущим инженерным работникам для выполнения измерений технических параметров работы систем и устройств.

Лабораторный практикум выполняется по индивидуальному графику бригадами, состоящими из 2-3 студентов. График выполнения лабораторных работ формируется преподавателем в начале каждого семестра и представляется студентам на первом аудиторном занятии лабораторного практикума. Методические рекомендации к лабораторным работам содержатся в отдельном пособии «Методические указания к выполнению лабораторных работ».

Подготовка к лабораторной работе осуществляется студентом до аудиторных занятий в часы, отведенные на самостоятельную работу.

При подготовке к лабораторной работе полностью руководствуйтесь методическими указаниями к выполнению лабораторных работ. Описание каждой лабораторной работы содержит: цель работы, оборудование, краткое изложение теоретического материала по теме лабораторной работы, описание лабораторного стенда, порядок выполнения работы, указания по обработке полученных результатов измерения, контрольные вопросы.

Подготовка к практикуму требует немалого времени, поэтому целесообразно планировать ее заранее. Предварительную подготовку к лабораторным занятиям необходимо начинать за несколько дней до занятия и целесообразно проводить в следующей последовательности:

- Внимательно прочитать описание лабораторной работы в методическом пособии, уяснить задание и цель эксперимента.
- Используя конспект лекций и рекомендованную в описании лабораторной работы учебную литературу, изучить теоретические вопросы, относящиеся к лабораторному эксперименту. Выяснить теоретические положения, знание которых необходимо для выполнения работы и понимания полученных результатов.
- Изучить принципиальную схему лабораторной установки, приведенную в описании. Ознакомиться с применяемым оборудованием, контрольно-измерительными приборами, принципом их действия, правилами эксплуатации.

- Усвоить методику измерения физических величин в лабораторном эксперименте, последовательность операций и форму представления полученных результатов.

- В индивидуальном лабораторном журнале подготовить заготовку отчета по данной работе, в которой указать:

- название и цель работы;
- оборудование, приборы и материалы применяемые в процессе измерений;
- краткий конспект теоретических положений по теме исследования и поясняющие теоретический материал рисунки, выполненные с учетом требований к оформлению отчета (ответы на контрольные вопросы);
- принципиальную схему установки;
- описание метода измерения;
- заготовки таблиц, в которых будут представлены результаты измерений и расчетов (примеры таблиц даются в методическом пособии);
- расчетные формулы искомых величин.

Образец заготовки к лабораторной работе и требования к его оформлению приведены в Приложении 1.

6. Проверить степень подготовленности к лабораторному занятию по контрольным вопросам, приводимым в описании работы.

Студент обязан приходить на занятие подготовленным. Наличие заготовки к лабораторной работе является обязательным условием допуска студента к выполнению лабораторной работы. Студенты, не готовые к занятиям, к выполнению лабораторной работы не допускаются.

2. Выполнение лабораторной работы

Выполнение лабораторного практикума организуется по циклическому принципу, на каждую работу отводится 2 часа аудиторного времени, в это время включается получение «допуска» к работе и выполнение необходимых измерений и «защита» работы выполненной на предыдущем занятии.

Перед выполнением работы преподаватель проверяет степень подготовленности каждого студента. Критерием допуска к работе является: понимание студентом цели работы, знание метода и порядка выполнения экспериментов, а также представление об ожидаемых результатах.

За время, отведенное на выполнение лабораторной работы в лаборатории, студент должен:

- Получить «допуск» к работе, для этого студент должен предоставить заготовку отчета в индивидуальном лабораторном журнале ответить на следующие вопросы:

- Какова цель экспериментальной задачи? Каковы основы теории изучаемого явления, основные понятия и формулы?
- Каков принцип работы экспериментальной установки? Перечислите основные этапы эксперимента.
- Ознакомиться с измерительными приборами, используемыми в процессе выполнения работы, получить у лаборанта необходимое дополнительное оборудование.

- Подготовить оборудование к проведению эксперимента согласно методическому руководству, т.е. произвести сборку электрической цепи в соответствии со схемой или сборку отдельных частей измерительной установки.

- Предъявить подготовленное к работе оборудование (собранный электрическую цепь) для проверки лаборанту или преподавателю. Только после его разрешения можно приступать к выполнению измерений. При выполнении работы следует соблюдать правила техники безопасности. Обращаться с приборами и оборудованием следует бережно и аккуратно. Применять приборы только в соответствии с их назначением.

- Выполнив все измерения, выключить установку, (но не разбирать установку или электрическую цепь), предъявить преподавателю результаты измерений для проверки. Если результат опыта не верен, опыт повторяется вновь. Если результаты удовлетворительны, преподавателем делается отметка о выполнении студентом лабораторной работы (ставится подпись и дата в отчете студента).

Отчеты без подписи преподавателя в дальнейшем к зачёту не принимаются.

- После подписи результатов преподавателем, привести лабораторную установку в исходное состояние (разобрать электрическую цепь), сдать лаборанту выданное дополнительное оборудование и привести в порядок рабочее место.

Окончательное оформление работы, обработка результатов эксперимента и подготовка к отчету по контрольным вопросам проводится студентом в часы самоподготовки.

3. Оформление отчета и подготовка к «защите» лабораторной работы

Оформление отчета и подготовка к защите лабораторной работы осуществляется студентом в часы, отведенные на самостоятельную работу. К

следующему (после выполнения очередной лабораторной работы) занятию каждый студент должен представить отчет о выполненной лабораторной работе. Он составляется на основе заготовки в лабораторном журнале и должен содержать:

- номер, название, цель работы;
- перечень используемого в работе оборудования и приборов;
- краткий конспект теории по теме исследования;
- результаты измерений и вычислений в виде таблиц (или ином виде, согласно методическим рекомендациям к данной лабораторной работе);
- расчетные формулы, по которым производились вычисления с примером вычисления по каждой формуле;
- схемы, графики, диаграммы и т.п., в соответствии с заданием на лабораторную работу;
- статистическую обработку результатов (расчет погрешностей измерений);
- основные выводы по результатам работы на основании сравнения полученных результатов с теоретическими данными.

После оформления отчета студент готовится к защите лабораторной работы, изучая теоретические основы данной темы, ориентируясь на контрольные вопросы, приведенные в методических указаниях.

Для получения зачета по лабораторной работе студент представляет преподавателю оформленный отчет со всеми необходимыми расчетами и защищает его в ходе последующего собеседования.

«Защита» выполненных лабораторных работ проводится преподавателем в устной (или в письменной) форме в виде ответов на вопросы по теме лабораторной работы. Для успешной «защиты» работы студент должен знать: теоретический материал по данной теме, методику эксперимента и обработки результатов, уметь проанализировать полученные результаты и объяснить причины расхождения теоретических и опытных данных.

Отметка о зачете лабораторной работы (в случае успешной «защиты») делается преподавателем в лабораторном журнале.

Студент должен регулярно отчитываться по выполненным лабораторным работам согласно установленному графику занятий. Не допускается выполнение следующей работы при наличии двух выполненных, но не сданных работ!

Выполнение лабораторных работ и отчет по ним в полном объеме является обязательным условием допуска к экзамену по данной дисциплине.

Требования к оформлению графических материалов

- Графический материал к лабораторным работам (графики, диаграммы и т.п.) выполняется на миллиметровой бумаге карандашом с помощью чертежных принадлежностей.
- Графики должны иметь размер не менее половины формата А4 (не менее 10×10 см), выполняться в прямоугольной системе координат с соблюдением масштаба по координатным осям.
- Масштаб графиков должен быть удобным для построения и последующего анализа. Для этого следует брать в 1 см число измерительных единиц кратное 10 или одному из чисел ряда 1; 2; 2,5; 5. (Например: для напряжения масштаб $m_U=10$ В/см, для силы тока – $m_I=0,2$ А/см.).
- Произвольный перенос начала координат не допускается.
- Если через полученные опытные точки нельзя провести плавную кривую и при соединении получается зигзагообразная линия, то все-таки следует провести плавную линию, захватывающую наибольшее количество точек или занимающую среднее положение между ними. Для этого удобно использовать лекало.

Если графиком зависимости является прямая, ее проводят так, чтобы количество точек выше и ниже линии было примерно одинаковым

Структура отчета по лабораторной работе

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № _____

(тема) _____

ЦЕЛЬ РАБОТЫ:.....

ОБОРУДОВАНИЕ:.....

КРАТКАЯ ТЕОРИЯ:

(конспект теоретического материала, опираясь на контрольные вопросы)

.....
.....

СХЕМА УСТАНОВКИ

(чертеж выполняется карандашом с помощью чертежных принадлежностей, элементы цепей вычерчиваются согласно ГОСТа)

РАБОЧИЕ ФОРМУЛЫ

.....
.....

РЕЗУЛЬТАТЫ ИЗМЕРЕНИЙ (таблица, дополнительные данные).

РАСЧЕТЫ ФИЗИЧЕСКИХ ВЕЛИЧИН

(следует привести **все расчеты**)

.....

РАСЧЕТ ПОГРЕШНОСТЕЙ ИЗМЕРЕНИЙ.....

.....

РЕЗУЛЬТАТЫ И ВЫВОДЫ

.....

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № Ф-1-0. ОБРАБОТКА РЕЗУЛЬТАТОВ ИЗМЕРЕНИЙ

Введение

Целью выполнения общего физического практикума является изучение теоретического материала и его практического применения для определения значений физических величин и установление количественных соотношений между ними. Учебный эксперимент позволяет решить следующие задачи:

- а) изучить и проиллюстрировать теоретические положения физики;
- б) познакомиться с техническим оборудованием и приборами, методиками проведения экспериментов;
- в) приобрести опыт в планировании и проведении экспериментов.

При выполнении лабораторных работ следует придерживаться общих правил.

1. Необходимо познакомиться с основами теории изучаемого явления, методикой эксперимента. Проанализировать вывод рабочей формулы. Обратить внимание на основные положения, с учетом которых спланирован эксперимент.

2. Прежде чем приступать к измерениям, необходимо изучить работу установки, выполнить несколько измерений без занесения результатов в отчет.

3. Рекомендуется даже однократные измерения провести несколько раз, чтобы избежать грубых ошибок (промахов).

4. Все результаты следует занести в отчет без предварительной обработки.

Не пользуйтесь черновиками, так как переписывание является источником дополнительных ошибок.

5. В отчете должен быть указан смысл буквенных обозначений всех физических величин, указаны единицы измерения.

Измерения и неточности (погрешности)

Измерить какую-либо физическую величину – значит сравнить ее с однородной физической величиной, принятой за единицу измерения.

Измерения могут быть однократными и многократными; прямыми и косвенными. При прямых измерениях результат получают непосредственно в ходе эксперимента. При косвенных измерениях результат рассчитывается по определенному закону или математическому соотношению (рабочей формуле) по результатам прямых измерений.

Любое измерение осуществляется с определенной степенью точности, поэтому результат измерения содержит некоторую неточность (погрешность). В дальнейшем будем использовать термин погрешность.

Виды погрешностей

По ***характеру проявления*** погрешности разделяют на две основные группы.

1. ***Систематические*** погрешности сохраняют величину и знак от опыта к опыту. К ним относятся, например, погрешности измерительных приборов.

2. ***Случайные*** погрешности обусловлены воздействием большого числа неконтролируемых причин, поэтому их величина и знак от опыта к опыту изменяются. Эти погрешности не могут быть учтены заранее, однако они подчиняются статистическим законам и их влияние может быть учтено и уменьшено при многократном повторении опыта.

Кроме названных погрешностей встречаются грубые ошибки, называемые промахами. Результат, содержащий грубую ошибку, резко отличается от остальных, и его после проверки следует исключить.

По ***форме представления*** различают погрешности *абсолютные, относительные и приведенные*.

Отклонение измеренного значения величины x от ее истинного значения x_0 называется *абсолютной погрешностью*:

$$\Delta x = x - x_0$$

Абсолютная погрешность измеряется в тех же единицах, что и измеряемая величина (далее: *ед. изм.*).

Мерой точности результатов измерения является *относительная погрешность*, выраженная в долях:

$$\varepsilon = \frac{\Delta x}{x_0} \approx \frac{\Delta x}{x},$$

или в процентах:

$$\varepsilon = \frac{\Delta x}{x_0} \cdot 100\%.$$

Приведенной погрешностью называется отношение абсолютной погрешности к некоторому нормированному значению. В качестве нормированного значения может быть выбран, например, предел измерения прибора на данном диапазоне.

Погрешности однократных прямых измерений

Если при повторных измерениях получаются одинаковые значения измеряемой величины, то повторять эксперимент не имеет смысла. В этом случае погрешность определяется точностью измерительного прибора. Погрешность приборов определяется классом точности. Значение класса точности γ выражает предельную приведенную погрешность, выраженную в процентах

$$\gamma = \frac{\Delta x}{x_{\max}} \cdot 100\%$$

Абсолютная погрешность в этом случае может быть определена по формуле

$$\Delta x = \frac{\gamma \cdot x_{\max}}{100\%}, \text{ ед. изм.}$$

Если погрешность измерения прибора не указана, она принимается равной цене деления.

Погрешности приборов, часто употребляемых в лабораторной практике, указаны в таблице. 1.

Таблица 1

Погрешности приборов.

Прибор или инструмент	Цена деления	Предельная погрешность
Измерительная линейка	1 мм/дел	1 мм
Штангенциркуль	0,1 мм/дел 0,05 мм/дел	0,1 мм , 0,05 мм
Микрометр	0,01 мм/дел	0,01 мм
Весы технические	-	0,1 г
Весы аналитические	0,1 мг/дел	1 мг
Секундомер с ручным запуском	0,1 с/дел	0,3 с
Часы с секундной стрелкой	1 с/дел	1 с
Термометры	Т К/дел	Т, К

Погрешности многократных прямых измерений

Статистическую обработку результатов проводят в том случае, если при измерениях в тождественных условиях результат не повторяется. Рекомендуется следующий порядок обработки результатов.

1. Исключаются известные систематические погрешности.
2. Определяют среднее арифметическое значение из n измерений.

$$\langle x \rangle = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \quad (1)$$

3. Определяются абсолютные погрешности отдельных измерений

$$\Delta x_i = x_i - \langle x \rangle$$

4. Вычисляется среднеквадратичное отклонение от среднего значения

$$S_{\langle x \rangle} = \sqrt{\frac{\sum_i (\Delta x_i)^2}{n(n-1)}} \quad (2)$$

5. Доверительный интервал случайной погрешности находят по формуле:

$$\Delta x = t_{\alpha, n-1} \cdot S_{\langle x \rangle}, \quad (3)$$

где $t_{\alpha, n-1}$ - коэффициент Стьюдента.

Для доверительной вероятности α и числа степеней свободы $f=n-1$ коэффициент Стьюдента находят по таблице 2. Доверительную вероятность обычно принимают: $\alpha = 0,95$.

6. Результат представляют в виде:

$$x = \langle x \rangle \pm \Delta x, \text{ ед. изм.,}$$

$$\alpha = \dots, \varepsilon = (\Delta x / \langle x \rangle) 100\%.$$

Запись результата в указанном виде определяет с вероятностью α доверительный интервал, в котором находится истинное значение измеренной величины.

Примечания. 1. Если отдельное измерение резко отличается от остальных, то его следует отбросить как промах. Если погрешность какого-либо измерения велика, т.е.

$$\Delta x_i > 3\sqrt{n}S_{\langle x \rangle},$$

то этот результат отбрасывается как промах. После его исключения расчет погрешности повторяется.

2. Если вычисленная случайная погрешность будет близка к погрешности прибора δ , необходимо учесть совместное влияние обеих погрешностей. При отсутствии особых требований к точности

рекомендуем упрощенную формулу для суммарного среднеквадратичного отклонения

$$S_{\Sigma} = \sqrt{S_{\langle x \rangle}^2 + \frac{\delta^2}{3}} \quad (4)$$

Суммарная погрешность определяется по формуле

$$\Delta x = t_{\alpha, n-1} \cdot S_{\langle \Sigma \rangle} \quad (5)$$

Близкий результат дает суммирование не среднеквадратичных отклонений, а доверительных погрешностей

$$\Delta x = \sqrt{\Delta x^2 + \delta^2} \quad (6)$$

Если случайная погрешность будет значительно больше погрешности прибора, то последней пренебрегают. Если же, напротив, случайная погрешность невелика, то за погрешность измерения принимают погрешность прибора.

3. Проводить указанную выше статистическую обработку результатов можно только для такой серии, в которой разброс результатов обусловлен случайными причинами. Если же результаты различаются вследствие целенаправленного изменения условий опыта, то усреднение результатов такой серии не имеет смысла.

Таблица 2

Коэффициенты Стьюдента

Число степеней свободы f	Надежность α							
	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	0,95	0,98	0,999
1	1,00	1,38	2,0	3,1	6,3	12,7	32	640
2	0,82	1,06	1,3	1,9	2,9	4,3	7,0	32
3	0,77	0,98	1,3	1,6	2,4	3,2	4,5	13
4	0,74	0,94	1,2	1,5	2,1	2,8	3,7	8,6
5	0,73	0,92	1,2	1,5	2,0	2,6	3,4	6,9
6	0,72	0,90	1,1	1,4	1,9	2,4	3,1	6,0
7	0,71	0,90	1,1	1,4	1,9	2,4	3,0	5,4
8	0,71	0,90	1,1	1,4	1,9	2,3	2,9	5,0
9	0,70	0,88	1,1	1,4	1,8	2,3	2,8	4,8
14	0,69	0,87	1,1	1,3	1,8	2,1	2,6	4,1
19	0,69	0,86	1,1	1,3	1,7	2,1	2,5	3,9

∞	0,67	0,84	1,0	1,3	1,6	2,0	2,3	3,3
----------	------	------	-----	-----	-----	-----	-----	-----

Примечание. Число степеней свободы равно числу независимых измеренных величин. При расчете S из n значений только $n-1$ значений будут независимыми, т.к. величины Δx_i связаны одним уравнением:

$$\sum_i^n \Delta x_i = 0.$$

Поэтому в данном случае число степеней свободы будет равно $f = n-1$.

Погрешности косвенных измерений

Если искомая величина является функцией нескольких переменных, которые можно определить в ходе прямых измерений, то погрешность такой величины вычисляется через погрешности прямых измерений.

Случай одной переменной. Пусть искомая величина F есть некоторая известная функция прямо измеренной величины x , погрешность которой Δx , определена одним из указанных выше способов.

$$F = f(x)$$

Предполагая величину Δx малой, погрешность величины F можно найти как дифференциал функции:

$$\Delta F = f'_x(x) \cdot \Delta x \quad (7)$$

где $f'_x(x)$ - производная функции $f(x)$ по x .

Случай нескольких переменных. Пусть искомая величина F есть известная функция нескольких переменных x, y, \dots , погрешности которых $\Delta x, \Delta y, \dots$ определены ранее одним из указанных выше способов:

$$F = f(x, y, \dots)$$

Тогда правило дифференцирования дает формулы

$$\begin{aligned} \Delta F_x &= f'_x(x) \cdot \Delta x \\ \Delta F_y &= f'_y(x) \cdot \Delta y, \end{aligned} \quad (8)$$

.....

где $f'_x(x), f'_y(x), \dots$ - частные производные функции $F = f(x, y, \dots)$ по переменным x, y , и т. д. Величины $\Delta F_x, \Delta F_y, \dots$ нужно рассматривать как *частные погрешности*, возникающие за счет погрешности каждого аргумента в отдельности.

Абсолютная погрешность измерения величины F определяется соотношением:

$$\Delta F = \sqrt{\Delta F_x^2 + \Delta F_y^2 + \dots} \quad (9)$$

При использовании формулы (9) доверительная вероятность ΔF оказывается та же, что и доверительная вероятность погрешностей Δx , Δy , ...

Рекомендуется следующий порядок расчета погрешностей:

1. Определяют погрешности прямых измерений одним из указанных выше способов.
2. Находят частные производные и определяют частные погрешности искомой величины по формуле (8).
3. Результирующую погрешность находят по формуле (9).

Примечание. Если одна или несколько частных погрешностей окажутся заметно меньше (в 3 раза) остальных, то в формуле их можно не учитывать без заметного ущерба точности.

Основные правила записи результата

Точность производимых в эксперименте вычислений должна соответствовать точности измерений. Рассмотрим два числа: 0.0204 и 0.02040. Эти два числа имеют различную *точность записи*. Точность числа определяется числом *значащих цифр*. *Значащей цифрой приближённого числа в десятичной записи называется любая цифра, кроме нулей, расположенных слева от первой ненулевой цифры*. Так, в числе 0,02040 четыре значащие цифры. Первые два нуля не являются значащими и служат для указания разряда. Значащими являются цифры 2,0,4 и нуль, расположенный справа. Этот нуль указывает на численное значение разряда. В числе 0.0204 три значащие цифры.

Абсолютная погрешность записи числа равна половине единицы последнего приведенного в записи разряда. Так, число 0,0204 могло получиться округлением любого числа в интервале $0,0204 \pm 0,00005$. Следует помнить, что относительная точность числа определяется числом *значащих цифр*, а не числом знаков *после запятой*. Так, числа 0,0204 ($\pm 0,00005$) и 20,4 ($\pm 0,05$) имеют одинаковую точность, отличаясь лишь множителем 10^3 .

В больших числах нули справа могут служить как для указания значащих цифр, так и для определения разряда числа. Так, число 689 000 в указанной записи может иметь от трех до шести значащих цифр. Поэтому большие числа рекомендуется представлять в виде числа порядка единицы с соответствующей степенью числа 10. Указанное выше число следует записать в виде $6,89 \cdot 10^5$, если оно имеет три значащие цифры, или $6,8900 \cdot 10^5$, если оно имеет пять значащих цифр. Таким же образом следует записывать и малые числа: $0,00204 = 2,04 \cdot 10^{-3}$. Указанное правило облегчает вычисления с большими и малыми числами.

Сформулируем основные правила вычислений:

1. Вычисления следует производить с таким числом значащих цифр, чтобы точность вычислений была на порядок выше точности измерений. Точность вычислений ограничивается числом с наименьшим числом значащих цифр. Целые числа считаются заданными абсолютно точно (т.е. с бесконечным числом значащих цифр).

2. Необходимое число значащих цифр должны иметь и табличные величины. В противном случае при расчете погрешностей следует учитывать неточность задания этих величин.

3. В промежуточных вычислениях число значащих цифр не должно превышать более чем на единицу число значащих цифр исходных данных, так как лишние значащие цифры, появившиеся при расчете, не повышают точности вычислений.

4. После окончания вычислений точность записи необходимо привести в соответствие с погрешностями измерений. Так, в записи числа $20,22 \pm 0,2$ указывать сотые бессмысленно, поскольку уже десятые содержат погрешность.

5. Величина погрешности округляется до одной значащей цифры. Все расчеты погрешностей достаточно вести с двумя значащими цифрами. Иногда в записи погрешности оставляют две значащие цифры, если округление до одной значащей цифры заметно изменяет величину числа. (Например, округление погрешности 0,149 до 0,1 - первая значащая цифра равна единице).

6. Результат расчета измеряемой величины следует округлить так, чтобы его последний десятичный разряд соответствовал последнему разряду погрешности.

Таблица 5

Примеры записи результата

<i>Правильно:</i>	<i>Неправильно:</i>	<i>Ошибка:</i>
$1,2 \pm 0,2$	$1,244 \pm 0,2$	Лишние цифры в значении результата.
$1,24 \pm 0,03$	$1,2438 \pm 0,0325$	Лишние цифры в значении погрешности.
$1,244 \pm 0,014$	$1,244 \pm 0,01$	Грубое округление погрешности.
$1,24 \pm 0,03$	$1,24 \pm 3 \cdot 10^{-2}$	Множитель 10^n должен быть общим.

Графическое представление результатов.

Графическое представление результатов эксперимента позволяет не только проверить зависимость между различными физическими величинами, но и установить ранее неизвестные зависимости, а также определить физические величины, характеризующие свойства системы (например: массу или момент инерции системы).

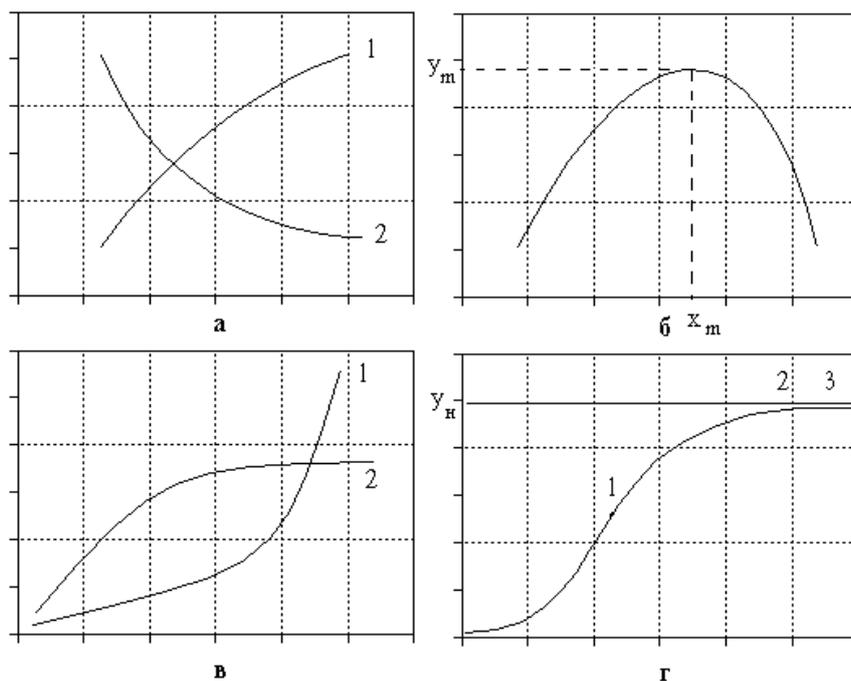


Рисунок 1- характер изменения функции: а - возрастающая (1) и убывающая (2) зависимости; б - экстремальный характер зависимости; в - скорость изменения функции возрастает (1), убывает (2); г - наличие точки перегиба (1) и участка насыщения (2 -3).

При исследовании графической зависимости следует, прежде всего, обратить внимание на следующие основные особенности: скорость изменения функции возрастает (1), убывает (2); г - наличие точки перегиба (1) и участка насыщения (2 -3).

1. *Характер изменения функции.* Зависимость может быть возрастающей, убывающей (рис. 1,а), а также экстремальной (рис.1,б). В последнем случае следует отметить экстремальные значения переменных.

2. *Скорость изменения функции* может возрастать или убывать (рис.1,в) или проходить через экстремум (в точке перегиба- рис. 1, г). Участок насыщения характеризуется тем, что скорость изменения функции уменьшается практически до нуля.

Правила построения графиков.

При построении графиков следует придерживаться следующих основных правил:

1. Необходимо правильно выбрать *форму представления* функциональной зависимости.

Например, проводимость полупроводников λ зависит от температуры T следующим образом:

$$\lambda = A \cdot e^{\frac{\Delta E}{2kT}}$$

График этой зависимости достаточно сложен. Но если прологарифмировать эту зависимость, то легко видеть, что $\ln \lambda$ связан с величиной $1/T$ наглядной линейной зависимостью, выполнение которой легко проверить.

$$\ln \lambda = \ln A - \frac{\Delta E}{2k} \cdot \frac{1}{T}.$$

2. Необходимо правильно выбрать *масштаб* и нанести его на оси координат. Масштаб следует выбирать так, чтобы диапазон экспериментальных значений занимал большую часть оси (рис.2). Производить отсчет значений исследуемых величин будет удобно, если одному сантиметру (или делению) соответствует 1, 2, 5, 10, 100 и т.д. единиц измеряемой величины.

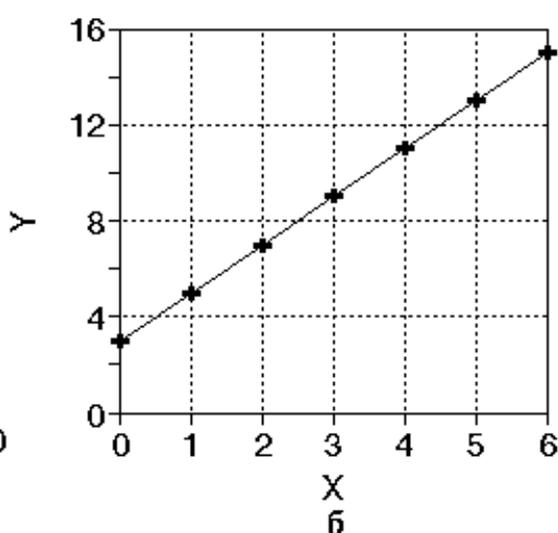
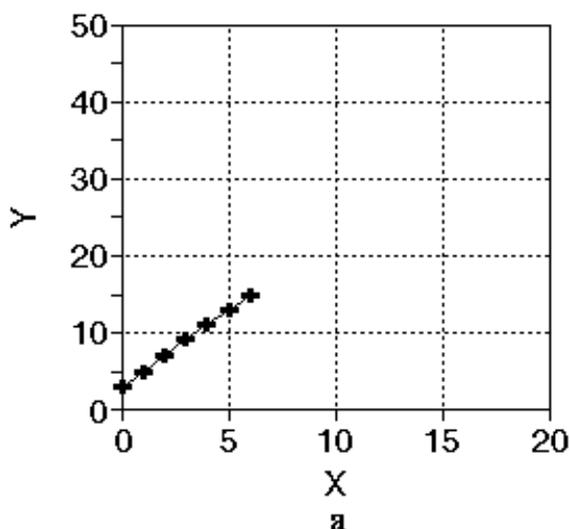


Рисунок 2 - неправильный (а) и правильный (б) выбор масштаба на графике.

3. Нанести экспериментальные значения в виде четких кружочков диаметром 1-2 мм. **Координаты этих точек на осях графика не указываются!**

4. График по точкам должен проходить плавно, без резких искривлений и изломов. Между точками график должен проходить так, чтобы точки располагались по обе стороны от графика на одинаковых расстояниях.

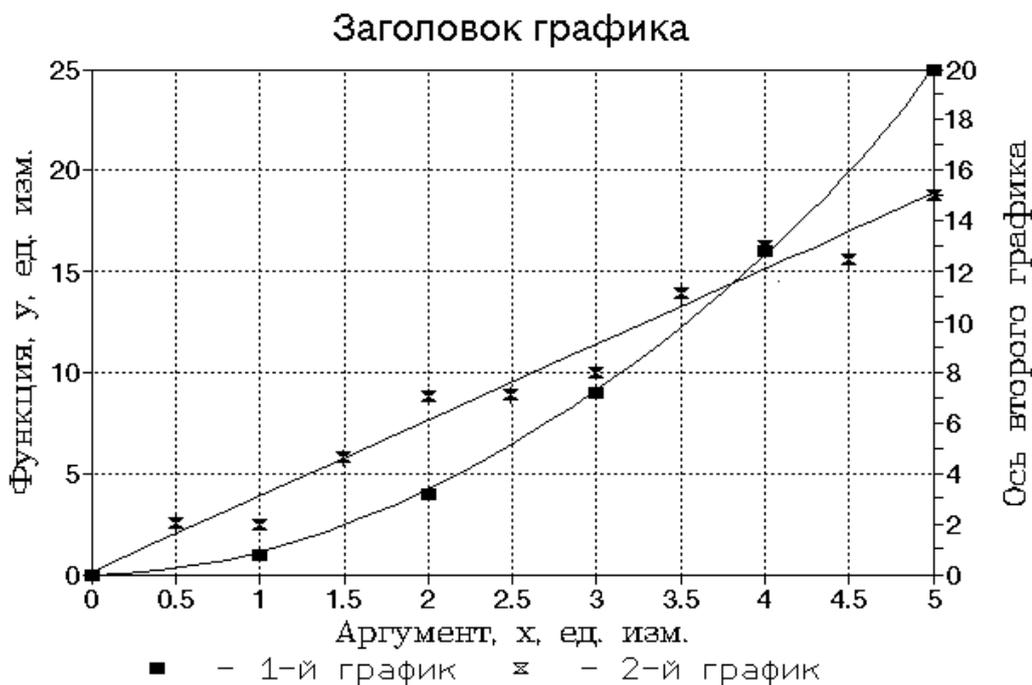


Рисунок 3 - пример построения графика.

Вычисление углового коэффициента прямой $y=A x+B$.

1. Выбрать две произвольные точки на оси абсцисс x_1 и x_2 . Точки x_1 и x_2 должны отстоять друг от друга на *возможно большем расстоянии*. По графику провести отсчет соответствующих значений функции y_1 и y_2 .

2. Угловой коэффициент находится по формуле:

$$A = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \tag{13}$$

3. Чтобы коэффициент имел определенный физический смысл, величины x и y следует выражать в одной физической системе единиц.

4. Так как численный масштаб по осям выбирают, как правило, неодинаковым, угловой коэффициент не равен (а лишь пропорционален)

тангенсу угла наклона прямой. Поэтому **угловой коэффициент нельзя находить, измеряя угол наклона прямой.**

Задание № 1.

ОБРАБОТКА РЕЗУЛЬТАТОВ ПРЯМЫХ И КОСВЕННЫХ ИЗМЕРЕНИЙ

Цель. Изучить теорию погрешностей и освоить методы обработки и представления результатов прямых и косвенных измерений.

Работа выполняется каждым студентом индивидуально. Задание выдается преподавателем.

Для выполнения работы заготовить таблицы:

№ П.п.	x_i	$\langle x \rangle$	Δx_i	Δx_i^2	S	$t_{\alpha, f}$	Δx	$x = \langle x \rangle \pm \Delta x$	ε_x , %
1									
...
n									

Число таблиц определяется числом переменных, входящих в функцию F (не более трех: x, y, z).

Задание № 2.

ИЗМЕРЕНИЕ ЛИНЕЙНЫХ РАЗМЕРОВ И ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПЛОТНОСТИ ТВЕРДЫХ ТЕЛ

Цель. Ознакомиться с принципом работы штангенциркуля, микрометра и технических весов. Определить плотность твердого тела.

Оборудование. Микрометр, штангенциркуль, технические весы, измеряемое тело.

Измерительные приборы

Штангенциркуль предназначен для измерения внутренних и наружных размеров деталей. Конструкции штангенциркулей различных типов могут различаться, однако основные элементы остаются общими (рис. 4).

Штангенциркуль состоит из штанги 1, измерительных губок 2, рамки 3, зажима рамки 4, нониуса 5 и микрометрической подачи 6 для установки рамки на точный размер.

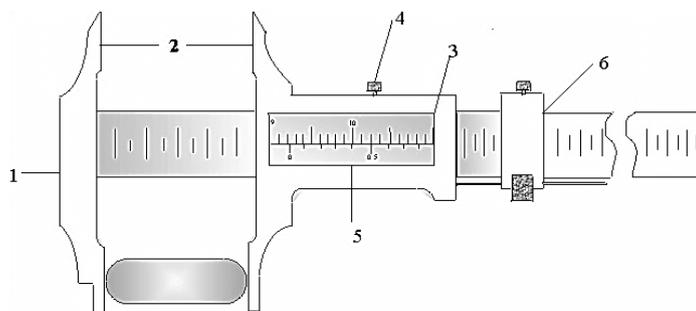


Рисунок 4 - штангенциркуль.

Отсчет показаний штангенциркуля производится с помощью *нониуса*. Нониус – это дополнительная шкала, предел измерений, который равен цене деления основной миллиметровой шкалы a . Нониусы имеют различную цену деления шкалы C и модуль γ , который показывает, через какое число делений основной шкалы располагаются штрихи нониуса, смещенные на величину C (рис.5).

Модуль γ принимают равным 1, 2 или 5, цену деления нониуса – 0,1; 0,05; 0,02 мм. Число делений нониуса $n = a/C$, длина деления шкалы нониуса $b = \gamma a - C$, полная длина шкалы нониуса $l = nb = (\gamma - 1) a$.

Если *нулевой* штрих нониуса совпадает со штрихом основной шкалы, то *первый* штрих нониуса будет смещен на расстояние C , *второй* штрих – на $2C$ и т.д. При перемещении рамки на расстояние C с основным делением совпадает первый штрих нониуса, при перемещении рамки на $2C$ – совпадает второй штрих и т.д. Если совпадает штрих с номером m , то *дробная* часть основного деления C будет равна $\Delta l = mC$.

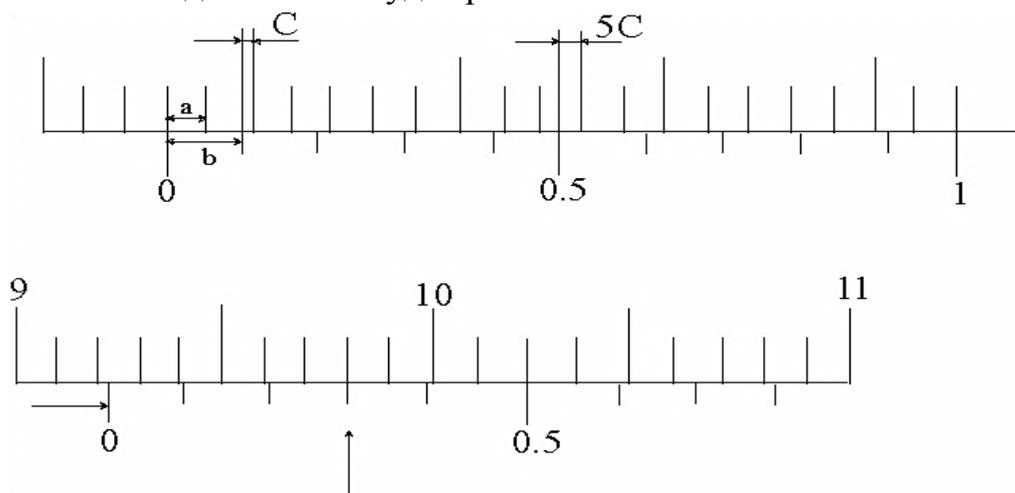


Рисунок 5 - устройство нониуса ($\gamma = 2, C = 0,1$).

Целое число делений основной шкалы определяется по *нулевому* делению нониуса.

Измеряемую деталь помещают между измерительными поверхностями губок без перекосов (рис.4). Если измеряют внутренний размер детали L , то

к показанию штангенциркуля следует добавить толщину губок b . Погрешность измерения штангенциркулем принимается равной цене деления S нониуса.

Микрометр. Основанием микрометра служит скоба 1 (рис. 6). На скобе закреплена пятка 2 и микрометрическое устройство, состоящее из микрометрического винта 3, стебля 4 и барабана 5. При вращении барабана происходит перемещение микрометрического винта. Измеряемую деталь помещают между рабочими поверхностями пятки 2 и винта 3.

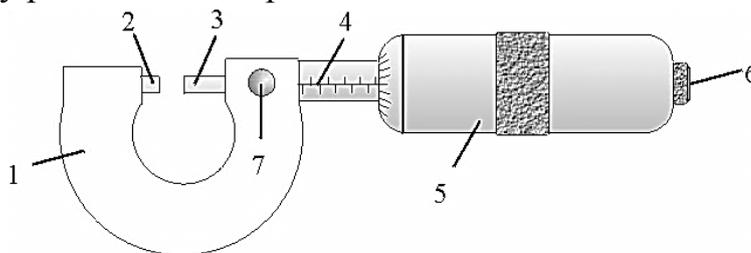


Рисунок 6 - устройство микрометра.

Стопор 7 служит для закрепления микрометрического винта. Вращение барабана производится за трещотку 6. При плотном соприкосновении измерительных поверхностей с деталью трещотка проворачивается с легким треском. Трещотка ограничивает измерительное усилие микрометра. *Вращать микрометрический винт за барабан нельзя*, так как при этом развиваются большие усилия, способные повредить резьбу или деталь.

На стержне вдоль продольного штриха нанесена основная шкала, а на коническом срезе барабана - круговая шкала. Цена деления шкалы стержня 0,5 мм, причем для удобства отсчета четные штрихи шкалы расположены ниже продольного штриха. Указателем основной шкалы стержня является торец барабана. Цена деления круговой шкалы барабана - 0,1 мм. Указателем круговой шкалы является продольный штрих стержня.

Перед измерением следует проверить установку микрометра на "0". Для этого, вращая барабан за трещотку, необходимо свести измерительные поверхности до соприкосновения. При этом нулевой штрих шкалы барабана должен совпасть с продольным штрихом шкалы стержня, а срез барабана - с нулевым штрихом шкалы стержня. При измерении размеров детали микрометр следует взять в левую руку за скобу, а измеряемую деталь положить перед собой на стол. Вращая правой рукой за трещотку барабана, охватить измеряемый размер измерительными поверхностями настолько плотно, чтобы трещотка повернулась на несколько щелчков.

Результат измерения отсчитываем как сумму отсчетов по шкале стержня 4 и барабана 5 (рис.7).

Следует иметь в виду, что, если торец барабана совпал с делением стебля, а шкала барабана еще немного *не дошла* до нулевой отметки, то это деление стебля *не учитывается*. Так, на рис.4,б отсчет равен 12,95 мм, а не 13,45 мм. Если микрометрический барабан перекрывает верхнее деление стебля, то результат измерения на стебле будет целым и к нему нужно прибавить показания на микрометрическом барабане. Погрешность микрометра принимается равна цене деления микрометрического барабана, 0,01 мм.



Рисунок 7 - отсчетное устройство микрометра:
а) отсчет $13,5 + 0,25 = 13,75$; б) отсчет $12,5 + 0,45 = 12,95$.

Технические весы. Основной частью весов является коромысло 1, к концам которого подвешены чашки 2. Осью вращения коромысла является призма, опирающаяся на твердую пластинку. Положение коромысла регистрируется с помощью стрелки 3 и шкалы 4. В положении равновесия стрелка указывает на нулевое деление шкалы. Винты 5 служат для коррекции положения равновесия. Для закрепления коромысла в неподвижном состоянии служит арретир 6. Горизонтальное положение площадки весов можно скорректировать винтами 7.

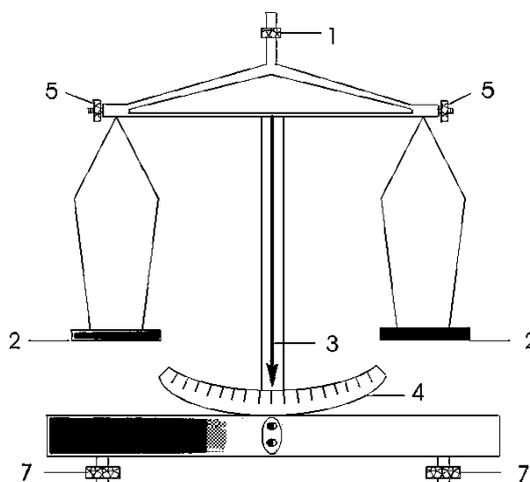


Рисунок 8 - технические весы.

При взвешивании необходимо выполнять следующие основные правила.

1. Сначала проверить равновесие весов, при этом стрелка должна совершать колебания около нулевой отметки шкалы.

2. Взвешиваемый предмет положить на левую чашку, а разновесы - на правую. Для коррекции неравноплечности весов можно провести повторное взвешивание, поменяв местами предмет и разновесы. Результат определяется как среднее геометрическое из результатов взвешивания.

3. Класть тело и разновесы на чашки весов можно *только при арретированных весах*. Затем весы освобождают от арретира и проверяют состояние равновесия. Перед переключением разновесов весы следует вновь арретировать.

4. Разновесы следует брать *пинцетом*.

5. Погрешность весов определяется их классом. Приблизительно она равна минимальной величине перегрузка, вызывающей видимое нарушение равновесия.

Выполнение работы

1. Измеряемым телом является цилиндр. Измерить диаметр тела при помощи микрометра в разных местах следует не менее 5 раз.

2. Занести результаты измерений в таблицу измерений 1.

Таблица 1.

№ n/n	D_i , мм	$\langle D \rangle$, мм	ΔD_i , мм	ΔD_i^2 , мм ²	ΔD , мм
1.					
2.					
.....					

2. Измерить высоту тела штангенциркулем один раз.

3. Определить массу тела взвешиванием на технических весах.

Результаты занести в таблицу измерений 2.

Таблица 2.

№ n/n	h , мм	Δh , мм	ε_h	m , г	Δm , г	ε_m	$\Delta D_{пол}$	ε_D
1.								

4. Провести статистическую обработку результатов измерения диаметра: определить среднее значение $\langle D \rangle$, абсолютную погрешность (доверительный интервал) ΔD . Результаты занести в таблицу 1.

5. Полную погрешность $\Delta D_{пол}$ определить суммированием абсолютной погрешности ΔD и погрешности микрометра $\Delta D_{пр}$:

1	x_1	Y_{11}	Y_{21}	Y_{31}	Y_{41}	Y_{51}	$\langle y_{j1} \rangle$
2	x_2	Y_{12}	Y_{22}	Y_{32}	Y_{42}	Y_{52}	$\langle y_{j2} \rangle$
3	x_3	Y_{13}	Y_{23}	Y_{33}	Y_{43}	Y_{53}	$\langle y_{j3} \rangle$
4	x_4	Y_{14}	Y_{24}	Y_{34}	Y_{44}	Y_{54}	$\langle y_{j4} \rangle$
5	x_5	Y_{15}	Y_{25}	Y_{35}	Y_{45}	Y_{55}	$\langle y_{j5} \rangle$

В таблице значений указаны значения экспериментальных данных зависимости $y(x)$ для различных значений аргумента x_i . Измерение величины y_{ji} при заданном значении аргумента x_i проводилось многократно ($j=1\dots 5$), где j – номер опыта измерения в i -й серии.

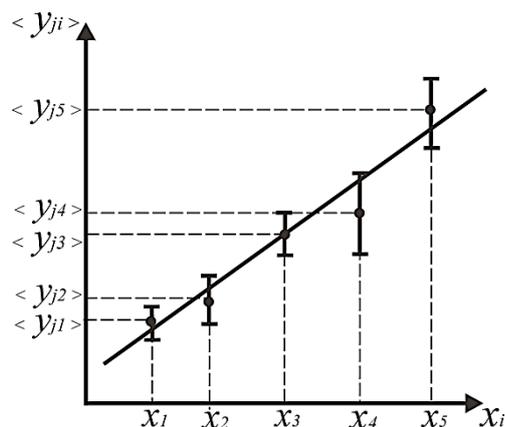


Рисунок 9 - аппроксимация линейной функции.

Обработка результатов измерений.

1. Определить среднее значение $\langle y_{ji}(x_i) \rangle$ в каждой серии.
2. Найти отклонение от среднего Δy_{ji} для каждого значения y_{ji} в серии по формуле: $\Delta y_{ji} = y_{ji} - \langle y_{ji} \rangle$.
3. Определить доверительный интервал по формуле Стьюдента в каждой серии:

$$\Delta y = t_{\alpha, f} \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^n \Delta y_{ji}^2}{n(n-1)}}$$

4. Заготовить оси координат на миллиметровой бумаге (ось ординат - y_{ji} , ось абсцисс - x_i). Отметьте на этом графике точки $\langle y_{ji}(x_i) \rangle$.
5. Отложите по обе стороны от точек $\langle y_{ji}(x_i) \rangle$ величину Δy , см. рис. 9.
6. Построить аппроксимирующую кривую так, чтобы прямая не выходила за пределы доверительных интервалов экспериментальных точек (или оптимально соответствовала им).

Задача 2. Определение углового коэффициента полученного графика.

Для определения углового коэффициента на прямой выбирают две точки, графически определяют значение аргументов и функции в выбранных точках. Рассчитать угловой коэффициент по соотношению:

$$A = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Контрольные вопросы

1. Какие измерения называются прямыми, косвенными?
2. Чем различается характер проявления систематических и случайных погрешностей?
3. Как определяются погрешности однократных измерений?
4. С какой целью производят многократные измерения? Сформулируйте правила определения результата и погрешностей таких измерений. Что такое доверительный интервал и доверительная вероятность?
5. Для какой серии результатов можно проводить операцию усреднения?
6. Сформулируйте правила расчета погрешностей при косвенных измерениях.
7. Что такое значащая цифра? Сколько значащих цифр следует брать при вычислениях?
8. Сформулируйте правила округления результата и его погрешности.
9. Сформулируйте правила отсчета показаний микрометра и штангенциркуля. Чему равна их инструментальная погрешность?
10. Дайте определения плотности тела. Как определяется плотность неоднородного тела? Как вычислить массу тела с переменной плотностью?
11. Какое значение плотности получится в нашем опыте, если тело окажется неоднородным (например, содержащем пустоты)?
12. Сформулировать основные правила построения графиков.
13. Как определяется угловой коэффициент прямой?

Лабораторная работа № Ф-1-1

ПРОВЕРКА ВТОРОГО ЗАКОНА НЬЮТОНА НА МАШИНЕ АТВУДА

Цель. Установить зависимость ускорения системы от действующей силы. Определить массу системы.

Оборудование: лабораторный комплекс ЛКМ-2 «Законы механики»

Краткая теория

Основные законы динамики – это законы Ньютона. Для определения законов движения были введены следующие понятия.

Сила. Является векторной количественной мерой *интенсивности взаимодействия*. Природа сил определяется видом взаимодействия в природе (гравитационного, электромагнитного, слабого и сильного). Вектор силы F имеет точку приложения и указывает направление действия одного тела на другое. Воздействие, оказываемое на некоторое тело, может вызвать явления двоякого рода: изменить его скорость или вызвать деформацию (напр., растянуть или сжать пружину). Оба эти эффекта поддаются измерениям. Поэтому любой из них может быть использован для количественной оценки воздействий, т.е. для сравнения сил.

Второй закон Ньютона. Следствием действия силы на тела является появление ускорения. Ньютоном было установлено, что при взаимодействии тел в изолированной системе общее количество движения не изменяется. Количеством движения Ньютон называл величину

$$P = m v$$

в настоящее время эта величина называется импульсом.

Основной закон динамики был сформулирован Ньютоном в следующем виде

$$dP/dt = F \quad (1)$$

где P импульс тела,

Если на тело действует одна или несколько сил, импульс тела будет изменяться. Скорость изменения импульса тела равна геометрической сумме сил F , действующих на тело. Формулу (1) можно записать в виде

$$\frac{d(mv)}{dt} = F \quad (2)$$

Величина, которая определяет изменение скорости с течением времени, называется ускорением:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{d\vec{r}}{dt} \right) = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$$

Для малых скоростей массу можно считать постоянной и вынести из-под знака дифференциала, получим:

$$\mathbf{a} = \mathbf{F}/m. \quad (3)$$

Эта форма второго закона Ньютона выражает пропорциональность между приложенной к телу силой и ускорением тела, и является интегральной формой записи второго закона Ньютона. Если на тело массы m действует сила \mathbf{F} , тело приобретает ускорение, пропорциональное силе и обратно пропорциональное массе.

Масса. Опыт показывает, что одинаковые воздействия вызывают у разных тел различные изменения скорости. Одному и тому же телу различные силы сообщают различные ускорения. Однако отношение силы к ускорению для каждого тела всегда равно одной и той же величине:

$$F/a = \text{const} = m. \quad (4)$$

Следовательно, масса является количественной мерой инертности тел. Под инертностью понимается свойство тел противиться изменению скорости. Отношение $F/a = \text{const}$ справедливо только при достаточно малых скоростях.

Сумма величин импульсов всех тел, входящих в систему $\mathbf{P} = \sum m \mathbf{v}$, имеет свойство сохраняться в замкнутых системах. Таким образом, импульс замкнутой системы не изменяется при любых изменениях импульсов отдельных тел – это закон сохранения импульса.

При скоростях, сравнимых со скоростью света, сохраняться будет релятивистский импульс

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v} = \frac{m_0 \mathbf{v}}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}, \quad (5)$$

где m_0 – константа, называемая массой покоя (масса тела при $v = 0$),
 c – скорость света в вакууме.

Определенная в формуле (5) масса тела m является функцией его скорости:

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}. \quad (6)$$

При скоростях много меньше скорости света $v \ll c$ масса тела мало отличается от массы покоя m_0 и соотношение (4) можно считать справедливым. Уравнения (1) и (3) формально эквивалентны. Оказалось, что в релятивистской динамике уравнения (1) и (2) остаются справедливыми, если массу определять в соответствии с выражением (6). Соотношение (3) при больших скоростях перестает быть справедливым.

Методика эксперимента

Задача 1. Проверка второго закона Ньютона.

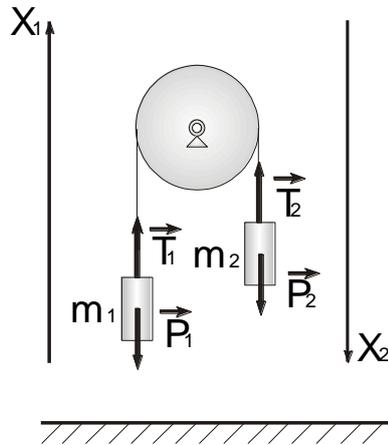


Рисунок 1 - экспериментальная установка: P_1 - сила тяжести груза m_1 ; T_1 и T_2 - силы натяжения нити.

Машина Атвуда схематически представлена на рис.1. Через блок перекинута нить, к концам которой подвешены грузы m_1 и m_2 .

Рассмотрим случай, когда $m_2 > m_1$. Если груз m_1 привести в крайнее нижнее положение и отпустить, то система грузов придет в движение под действием сил тяжести. Проанализируем это движение. При анализе примем следующие допущения:

- инертные свойства блока настолько малы, что их можно не учитывать;
- трение при вращении блока очень мало, им можно пренебречь;
- нить, на которой подвешены грузы, - невесома и нерастяжима.

Силы, действующие на тела системы, указаны на рис.1. Нерастяжимость нити приводит к тому, что ускорения грузов m_1 и m_2 (по модулю) будут одинаковы.

Запишем второй закон Ньютона для груза m_1 :

$$m_1 \vec{a} = \vec{P}_1 + \vec{T}.$$

Спроецируем его на ось x :

$$m_1 a_1 = -P_1 + T_1. \quad (7)$$

Аналогично для груза m_2 :

$$m_2 \vec{a} = \vec{P}_2 + \vec{T}_2.$$

В проекциях на ось :

$$m_2 a = P_2 - T_2. \quad (8)$$

В силу принятых выше допущений

$$a_1 = a_2, \quad T_1 = T_2.$$

Складывая уравнения (7) и (8), получим:

$$(m_1 + m_2) a = P_2 - P_1. \quad (9)$$

Введем обозначения: $M = m_1 + m_2$, тогда

$$F = P_2 - P_1 = g(m_2 + m_1). \quad (10)$$

Тогда формула (9) примет вид:

$$M a = F. \quad (11)$$

Таким образом, рассмотренная нами система будет двигаться с таким же ускорением, как тело массы M под действием силы F .

Машина Атвуда позволяет проверить следствие из второго закона Ньютона для системы тел в форме (11), где под M подразумевается суммарная масса системы, под F - эффективная сила, численно равная разности сил тяжести грузов m_1 и m_2 .

В работе необходимо экспериментально показать, что между a и F существует прямо пропорциональная зависимость

$$a = (1/M) F \quad (12)$$

с коэффициентом пропорциональности, обратным полной массе системы,

$$k = 1/M. \quad (13)$$

В экспериментальной установке (см. рис. 2) груз m_1 состоит из основного груза m_o и перегрузка m_n , аналогично груз m_2 - из основного груза m_o и перегрузка m_n , причем $m_n > m_n$.

Тогда выражение (10) примет вид:

$$F = g (m_n - m_n). \quad (14)$$

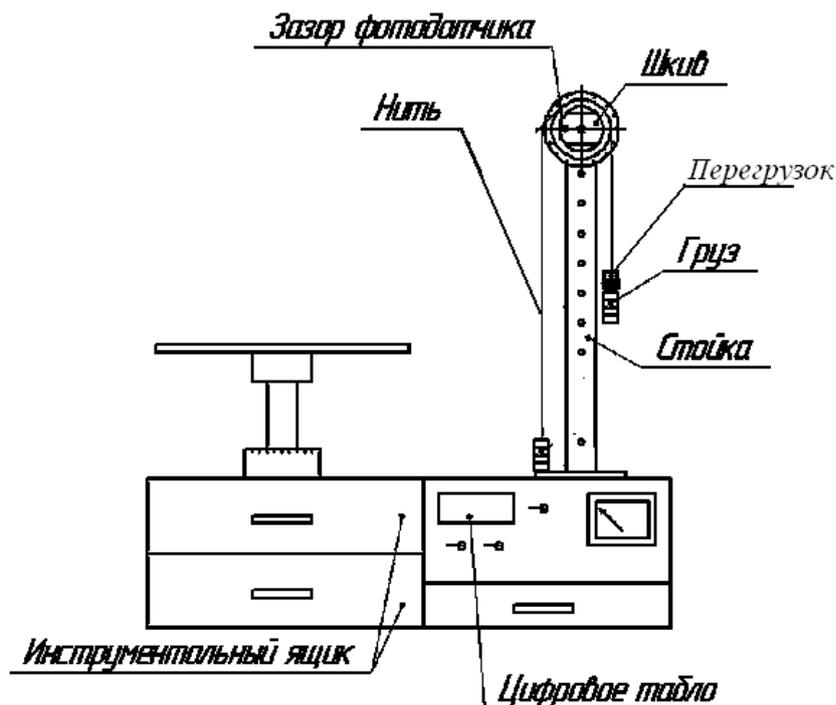


Рисунок 2 - схема экспериментальной установки

Для проверки пропорциональности между a и F каждая из этих величин должна быть определена независимым способом.

1. Перекладывая перегрузки с левого груза на правый, изменяем эффективную силу при неизменной полной массе системы $M = const$. Эффективная сила F определяется как разность сил тяжести левого и правого грузов по формуле (14).

2. Ускорение грузов определяют по времени t поворота шкива на определенный угол φ . Угловое ускорение шкива

$$\varepsilon = \frac{2\varphi}{t^2}.$$

Ускорение грузов

$$a = \varepsilon R = \frac{2\varphi R}{t^2}, \quad (15)$$

где R – радиус большого шкива стойки.

Радиус большого шкива измеряют штангенциркулем.

На перекинутую через шкив нить подвешивают два наборных груза разных масс. Легкий груз опускают и удерживают прижатым к основанию установки. Поворачивая шкив, устанавливают щель в зазоре фотодатчика (на панели ИСМ загорается индикатор, он должен гореть все время). Отпускают груз и фиксируют первое после начала движения показание таймера. Если тумблер «:1/:2/:4» в положении «:1», таймер покажет время одного оборота шкива ($\varphi=2\pi$), если тумблер в положении «:2», таймер покажет время двух оборотов шкива ($\varphi=4\pi$).



Рисунок 3 - вид передней панели цифрового табло

Перегрузки с левого груза перекадываем на правый (при этом полная масса системы остается неизменной: $M = const$) тем самым изменяем эффективную силу (14), вследствие чего изменяется ускорение системы по закону (12).

Для проверки пропорциональности между a и F каждая из этих величин должна быть определена независимым способом.

F определяется из выражения (14), а ускорение вычисляется из соотношения кинематики:

$$a = 2S/t^2, \quad (16)$$

где t - время движения грузов,

S - путь, пройденный одним грузом за время t .

Задача 2. Проверка формулы пути: $S = \frac{at^2}{2}$.

Для данного эксперимента используют стандартные перегрузки массой 10 г каждый. Помещают один перегрузок на правый груз m_n . Левый груз (без перегрузков) приводят в крайнее нижнее положение и фиксируют электромагнитом или рукой.

Правый груз устанавливают на максимальное расстояние S_1 от платформы (напротив отверстия в стойке).

Левый груз отпускают и измеряют время движения системы на пути S_1 . Эксперимент повторяют не менее 5 раз и определяют среднее время $\langle t \rangle$ прохождения участка S_1 . Вычисляют ускорение системы:

$$a = \frac{2S_1}{\langle t \rangle^2}. \quad (16)$$

Затем устанавливают расстояние S_2 . Опыт повторяют, определяя новое значение $\langle t_2 \rangle$ для пути S_2 .

Аналогичные измерения проделывают при S_3 . Данные заносят в таблицу 2. Необходимо показать, что:

$$a = \frac{2S_1}{\langle t_1 \rangle^2} = \frac{2S_2}{\langle t_2 \rangle^2} = \frac{2S_3}{\langle t_3 \rangle^2} = const. \quad (17)$$

Из трех значений a находят $\langle a \rangle$. Затем кладут на правый груз m_n еще один перегрузок и повторяют все предыдущие действия. Так как масса системы изменились, то ее ускорение будет иным, но и в этом случае справедливо равенство (17).

Добавляя перегрузки на правый груз (общую массу перегрузков будем обозначать m_i), получаем новые значения для ускорения системы $\langle a \rangle_i$.

Задача 3. Оценка влияния инерции блока на результаты измерений.

В задаче 1 предполагалось, что момент инерции блока I пренебрежимо мал. Принимая его равным нулю, проверяют пропорциональность между F и a , где коэффициент пропорциональности - величина, обратная полной

массе системы: $K = \frac{1}{M}$; в данном случае эффективная сила F вычисляется

без учета разницы сил T_1 и T_2 , вносимой блоком (см. формулу (14)). Вследствие такого приближения коэффициент $1/M$, определяемый из графика зависимости $a=f(F)$, будет отличаться от значения, полученного путем непосредственного взвешивания системы грузов. Разница между M , найденным из графика, и M' , найденным взвешиванием (ΔM), объясняется несколькими причинами: пренебрежением массой нити, силой трения в подшипнике блока, пренебрежением инерцией блока, погрешностью в определении времени движения грузов Δt и проходимого ими пути S .

В этом задании предлагается оценить влияние инерции блока на движение системы и сделать вывод о правильности допущений, принятых в задаче 1.

Рассмотрим закон движения грузов из предыдущего эксперимента. Учет инерции блока приводит к нарушению равенства T_1 и T_2 , (см. рис.3). Сила натяжения нитей создает вращательный момент. Согласно основному закону динамики вращательного движения:

$$I\varepsilon = T_2r - T_1r, \quad (18)$$

где I - момент инерции блока;

ε - его угловое ускорение.

Обозначим $M_1 = T_1r$ и $M_2 = T_2r$ – моменты сил T_1 и T_2 относительно оси вращения блока (Y).

Если нить не скользит по блоку, то $\varepsilon = a/r$, и уравнение (18) можно переписать

$$\frac{I \cdot a}{r} = T_2 - T_1. \quad (19)$$

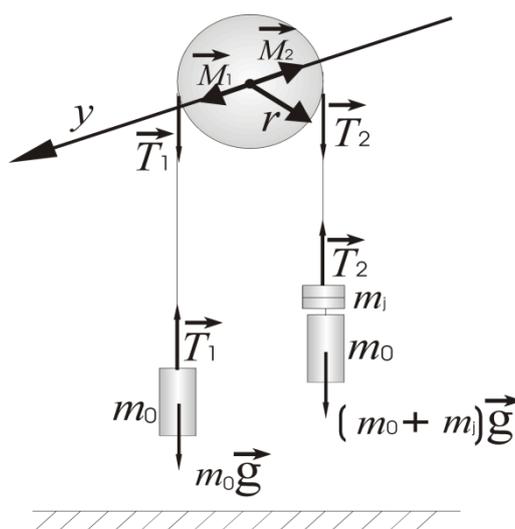


Рисунок 4 - учет инерции блока.

Запишем II закон Ньютона для грузов на концах нити и спроецируем его на ось X, имеем:

для правого груза

$$(m_o + m_i)g - T_2 = (m_o + m_i)a; \quad (20)$$

для левого груза

$$m_o g - T_1 = -m_o a. \quad (21)$$

Вычитаем (21) из (20), получаем:

$$(2m_o + m_i)a = m_i g - T_1 + T_2. \quad (22)$$

Исключая из уравнений (19) и (22) величину $T_1 + T_2$, находим выражение

$$\left(2m_o + m_i + \frac{I}{r^2}\right)a = m_i g,$$

определим величину

$$\frac{I}{r^2} = \left[m_i \left(\frac{g}{a} - 1 \right) - 2m_o \right]. \quad (23)$$

Отношение $\frac{I}{r^2}$, имеющее размерность массы, будем называть эффективной массой

$$m_{эфф} = \frac{I}{r^2}. \quad (24)$$

Эффективная масса $m_{эфф}$ численно равна массе блока с таким же моментом инерции, в котором масса равномерно распределена по ободу.

Сравнивая величину $m_{эфф}$ с полученным значением ΔM , можно оценить влияние инертных свойств блока на движение системы.

Выполнение работы

Задача 1. Проверка второго закона Ньютона.

1. Определите массы грузов и перегрузков.
2. Установите левый груз в крайнее нижнее положение.
3. Поместите на правый груз большой перегрузок, на левый груз – все маленькие перегрузки.
4. Установите щель на шкиве в зазоре фотодатчика. Проверьте индикацию на панели.
5. Нажмите кнопку «Гот» для обнуления результатов.
6. Отпустите левый груз и измерьте время движения грузов.

7. Переноса по одному перегрузку с левого груза на правый, повторяйте опыт до тех пор, пока на левом грузе не останется ни одного перегрузка. Результаты измерений занесите в таблицу.

Таблица

№ п/п	m_l , Г	m_m , Г	t , с	F , Н	a , м/с ²
1					
2					
...					

1. Обработка результатов вручную.

1. Начертить координатные оси. По оси абсцисс отложить эффективную силу, а по оси ординат - ускорение. Изобразить точками значения ускорений при соответствующих им значениях эффективной силы.
2. По точкам построить график зависимости $a = f(F)$, учитывая, что прямая должна проходить через начало координат и по обе ее стороны должно находиться примерно одинаковое количество точек.
3. Определить по графику коэффициент пропорциональности *прямой* (k) и его обратную величину ($1/k$).
4. Найти полную массу системы из параметров графика.
5. Сравнить полученный результат с массой системы и определить степень несовпадения по формуле

$$\delta = \frac{\Delta m}{M} = \frac{M - m}{M} \cdot 100\%,$$

где M – масса грузов;

m – масса грузов, определенная из зависимости $a = f(m)$.

Обработка результатов на ЭВМ.

1. Начертить координатные оси. По оси абсцисс отложить эффективную силу, а по оси ординат - ускорение. Изобразить точками значения ускорений при соответствующих им значениях эффективной силы.
2. В соответствии с инструкцией к программе обработки линейных зависимостей методом наименьших квадратов, ввести в ЭВМ экспериментальные значения F_i и a_i и вычислить параметры прямой $a = f(F)$.

3. На графике нанести контрольные точки и провести через них оптимальную прямую.

4. Определить полную массу системы из параметров зависимости $a=f(F)$ и погрешности ее измерения.

Сформулировать выводы:

1. Какой характер имеет экспериментальная зависимость $a=(F)$?

2. Сравнить результаты определения массы системы из параметров прямой и методом взвешивания.

Задача 2. Проверка формулы пути $S = \frac{at^2}{2}$.

1. Заготовьте таблицу 2.

2. Привести левый груз m_0 в крайнее нижнее положение и зафиксировать его вручную.

3. Установить расстояние S_1 (~10см) от нижнего края правого груза m_0 .

Таблица 2.

№ П.п.	S	$m_1=$	$m_2=$	$m_3=$	$m_4=$	$m_5=$
1	S_1	$t_1=$				
2		$t_2=$				
3		$t_3=$				
4		$t_4=$				
5		$t_5=$				
t		$\langle t \rangle$				
a		$\langle a \rangle$				
1	S_2	$t_1=$				
2		$t_2=$				
3		$t_3=$				
4		$t_4=$				
5		$t_5=$				
t		$\langle t \rangle$				
a		$\langle a \rangle$				
1	S_3	$t_1=$				
2		$t_2=$				
3		$t_3=$				
4		$t_4=$				
5		$t_5=$				
t		$\langle t \rangle$				
a		$\langle a \rangle$				

4. Поместить на правый груз m_0 один перегрузок массой m_1 , отпустить груз и измерить время движения системы t на расстоянии S_1 .
5. Повторить опыт 5 раз и найти среднее время $\langle t \rangle$, по формуле (16) вычислить ускорение a_1 .
6. Изменить положение платформы: S_2 . Повторив эксперимент (п. 3-4), найти время $\langle t_2 \rangle$ и соответствующее ему ускорение a_2 . Аналогично определить a_3 для интервала движения S_3 (см. методику эксперимента).
7. Найти среднее значение $\langle a_1 \rangle$, соответствующее массе m_1 перегрузка.
8. Повторить пункты 1-6 для других значений m_i , добавляя по одному стандартному перегрузку на правый груз.
9. Проверить выполнение равенства (17).

Задача 3. Оценка влияния инерции блока на результаты измерений.

1. Используя данные табл. 2, вычислить $m_{эфф}$ по формуле (23) для различных m_i и соответствующих им $\langle a \rangle_i$. Данные занести в табл. 3.

Таблица 3.

m_i	$\langle a \rangle_i$	$m_{эфф}$

2. Найти среднее значение $\langle m_{эфф} \rangle$, сравнить его с ΔM , определяемым в задании
3. Сделать выводы о правильности допущений, принятых в задании

Контрольные вопросы

1. Дать определение следующим физическим величинам: скорость, ускорение, сила, масса, импульс. Как зависит масса от скорости?
2. Перечислить виды взаимодействия в природе. К каким видам взаимодействия относятся силы: тяжести, вес тела, всемирного тяготения, трения, упругости?
3. Запишите две формулировки II закона Ньютона, укажите области их применения.
4. Начертите схему установки. На схеме укажите все силы, действующие на систему. Выведите закон, определяющий ускорение системы.
5. Объясните, почему в данной работе можно принять допущения $a_1 = a_2$, $T_1 = T_2$, описанные в методике эксперимента?
6. Объясните, что означает термин эффективная масса?

ИЗУЧЕНИЕ ЗАКОНОМЕРНОСТЕЙ ЦЕНТРАЛЬНОГО УДАРА

Цель: исследовать закономерности центрального удара; определить силу удара, потери механической энергии и коэффициент восстановления при центральном ударе шаров.

Оборудование: установка для исследования процесса удара шаров, набор шаров из различных материалов.

Краткая теория

Под столкновением двух или большего числа тел, в широком смысле, подразумеваются такие их взаимодействия, при которых между телами возникают кратковременные силы. Величина их столь значительна, что роль всех других, постоянно действующих сил, можно считать несущественной.

Физические закономерности, возникающие при ударе двух тел, широко используются в науке и технике, например, при расчете механизмов и испытании различных материалов и конструкций на прочность, изучении расхода и потерь энергии в подобных процессах. Примеры соударений: удар бильярдных шаров, столкновение машин на дорогах, столкновение молекул и атомов т.д. Изучение столкновений (рассеяний) микрочастиц в ускорителях позволяет определять характер полей, создаваемых ими, и другие важные свойства.

В описании процесса удара важную роль играют законы сохранения импульса и механической энергии.

Закон сохранения импульса. В замкнутой системе тел полный импульс с течением времени не изменяется. Происходит лишь обмен импульсами между различными телами системы. На практике закон сохранения импульса применяется и в незамкнутых системах в следующих случаях.

1. Внешние силы малы и действуют короткое время, так что изменением импульса системы можно пренебречь.

2. Равна нулю проекция внешних сил на какое-либо направление. В этом случае сохраняется лишь соответствующая проекция импульса.

Закон сохранения энергии. Мерой изменения и превращения энергии в механике является работа. Если в системе действуют неконсервативные силы – силы трения, неупругой деформации, – то происходит превращение части механической энергии во внутреннюю. Работа внешних сил характеризует обмен энергией с другими системами.

Поэтому механическая энергия системы будет сохраняться если отсутствуют диссипативные процессы, (т.е. равна нулю работа неконсервативных сил), а также равна нулю работа внешних сил.

Процесс удара. Основные определения. При соударениях друг с другом, тела претерпевают деформации. При этом кинетическая энергия, которой они обладают перед ударом, на короткое время преобразуется в потенциальную энергию деформации или превращается во внутреннюю энергию этих тел. Во время удара имеет место перераспределение энергии между телами.

Различают упругие и неупругие соударения. Предельными идеализированными случаями столкновений являются **абсолютно упругий** и **абсолютно неупругий удары**.

При **абсолютно упругом** ударе механическая энергия тел не переходит в другие, немеханические виды энергии. Деформация тел носит упругий характер, а после удара тела имеют суммарно такую же кинетическую энергию, что и до удара. Абсолютно упругий удар – это физическая абстракция, он в природе не происходит. Следовательно, часть механической энергии всегда превращается во внутреннюю энергию - теплоту, неупругую деформацию и т.п. Но если эти эффекты ничтожны и потерями энергии, в целом, можно пренебречь, то удар называется просто **упругим**.

Если после столкновения внутреннее состояние тел изменяется, например, тела не восстанавливают свою первоначальную форму, или столкновение сопровождается превращением кинетической энергии тел в другие виды энергии, то такое столкновение называется **неупругим**. При неупругом ударе в телах возникают разнообразные явления: сохраняется остаточная деформация; проявляют себя также силы трения, в телах возбуждаются колебания и волны. Поэтому принято говорить, что при неупругом ударе между телами действуют силы неупругой деформации, имеющие неконсервативный характер.

Если в результате работы этих сил, к моменту окончания удара, скорости тел становятся одинаковыми, и в дальнейшем тела движутся как одно целое, то столкновение тел называется **абсолютно неупругим**. В этом случае имеет место частичная или полная потеря механической энергии вследствие преобразования ее в немеханические формы.

Примерами абсолютно неупругих столкновений являются попадание пули в подвижную мишень, например, в платформу с песком. Пуля, застряв в песке, движется дальше вместе с платформой. Шары из пластилина, воска или глины при столкновении обычно слипаются и затем движутся как единое целое. Аналогичное поведение наблюдается при столкновении двух

разноименных ионов, сопровождающееся образованием молекулы, захвате свободного электрона положительным ионом и т.д.

Удар может быть прямым или косым в зависимости от направления векторов скоростей центров масс соударяющихся тел. Удар называется прямым и центральным, если общая нормаль к поверхностям тел в точке касания (линия удара) проходит через их центры масс (рис.1, а). При косом ударе это условие не выполняется (рис.1, б). (В дальнейшем рассматриваются лишь прямые центральные удары).

Рассматривая столкновения, мы также допускаем, что:

- а) исходная система отсчета инерциальная;
- б) система из двух шаров замкнута;
- в) потенциальной энергией взаимодействия шаров (например, гравитационного) и их вращением пренебрегаем.

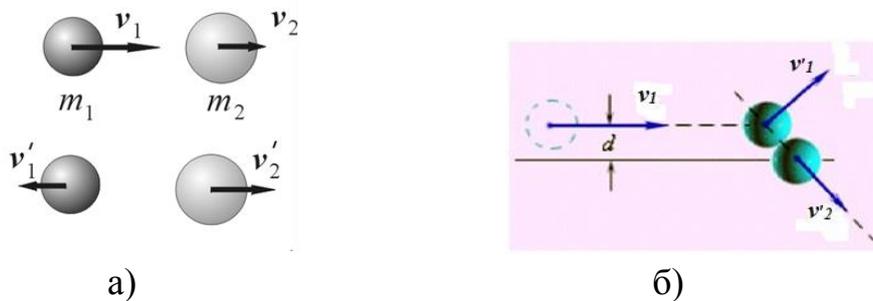


Рисунок1- центральный (а) и косой (б) удар шаров

При столкновении изменение импульса каждого шара Δp за время Δt в соответствии со вторым законом Ньютона равно

$$\Delta p = F \Delta t, \tag{1}$$

где F – средняя за время Δt сила, действующая на шар.

Если система замкнута, между телами происходит лишь обмен импульсами. Полный же импульс системы остается неизменным.

В первой фазе удара силы деформации уравнивают скорости тел. В общем случае, кинетическая энергия относительного движения на короткое время преобразуется в потенциальную энергию упругой деформации и частично – в энергию молекулярного движения (внутреннюю энергию).

Во второй фазе удара форма тел восстанавливается, и потенциальная энергия вновь превращается в кинетическую (тела разлетаются).

При абсолютно упругом ударе отсутствуют неупругие деформации, поэтому во второй фазе удара потенциальная энергия вновь превращается в кинетическую, равную суммарной кинетической энергии шаров до удара. Следовательно, выполняются законы сохранения импульса и механической энергии. Сравнивая состояния до и после удара можно записать:

$$m_1 \mathbf{v}_1 + m_2 \mathbf{v}_2 = m_1 \mathbf{v}'_1 + m_2 \mathbf{v}'_2 \tag{2}$$

$$\frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} = \frac{m_1 v_1'^2}{2} + \frac{m_2 v_2'^2}{2} \quad (3)$$

Решение этой системы уравнений позволяет вычислить скорости тел после удара v'_1 и v'_2 .

В случае абсолютно неупругого удара вторая фаза отсутствует, при этом механическая энергия не сохраняется, и тела движутся в одну сторону с одинаковой скоростью (не разлетаются): $v'_1 = v'_2 = v'$. По закону сохранения импульса

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = (m_1 + m_2) v' \quad (4)$$

Применяя закон сохранения энергии в случае частично упругого удара, необходимо учесть потери механической энергии, связанные с работой молекулярных сил (сил неупругой деформации):

$$\frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} = \frac{m_1 v_1'^2}{2} + \frac{m_2 v_2'^2}{2} + A \quad (5)$$

Схема установки

Лабораторная установка для исследования процесса удара (рис. 2) представляет собой модуль, состоящий из панели (1) с двумя шкалами, на которой установлены две оси (2) для подвесов шаров, арретир (3) с зажимным винтом (4) и с пусковым устройством (5), указатель максимального отклонения (6). Подвес шара содержит пружинный держатель (7) и легкий стержень (8) с крючком для подвешивания на оси панели. В держатель вставляется шар (9). Расстояние центра шара от оси подвеса равно 300 ± 1 мм.

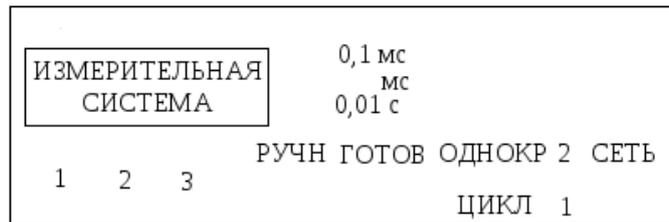
Время удара определяется по времени электрического замыкания шаров при ударе. Для этого кабель (11) подключается к осям подвеса, а с другой стороны к гнезду «5» на задней панели измерительной системы ИСМ-1, расположенной под платформой установки. Схема передней панели ИСМ-1 показана на рисунке 3. Время разрешения таймера устанавливается 0,1 мс. Цифры на экране дисплея указывают время в микросекундах. Тумблер выбора числа измерений «ЦИКЛ/ОДНОКР» должен быть установлен в позиции «ОДНОКР».

Для проведения эксперимента панель монтируется на колонне (10) стойки. Арретир (3) отклоняется на заданный угол и слегка зажимается винтом (4). Подвес шара отклоняется на несколько больший угол, головка спускового устройства (5) поворачивается так, чтобы соединенный с ней

штырь расположен горизонтально, после чего держатель шара опускается на этот штырь. Для опускания шара нужно повернуть головку спускового устройства на 90° , стараясь не вызвать колебания стойки.



а)



б)

Рисунок 2 - а) установка для исследования процесса удара; б) передняя панель измерительной системы ИСМ-1

Методика эксперимента

Для осуществления удара необходимо арретир установить на нужный угол начального отклонения подвеса α_1 и зацепить подвес шара за спусковое устройство, затем нажать кнопку «ГОТОВ» на панели измерительной системы. Повернув головку спускового устройства, освободить правый шар. После соударения правого шара с первоначально неподвижным левым шаром, зафиксировать угол α'_2 , на который отклонился левый шар вследствие удара. Время удара прочитать на дисплее таймера измерительного устройства.

Вблизи положения равновесия проекция внешних сил на горизонтальную ось равна нулю. Так как продолжительность удара мала, то в течение процесса столкновения шары находятся вблизи равновесного положения, поэтому при ударе происходит лишь обмен импульсами между шарами. Суммарный же импульс шаров не изменяется.

Скорость шара v в нижней точке можно вычислить по его отклонению при помощи закона сохранения энергии. В системе шар – гравитационное поле Земли действует консервативная сила тяжести. Сила натяжения нити работы не совершает. Поэтому на участке разгона потенциальная энергия

шара в поле тяжести будет превращаться в его кинетическую энергию (рис. 3).

$$\frac{mv^2}{2} = mgh, \quad (6)$$

где h – высота подъема шара, связанная с его отклонением.

$$\text{Тогда } v = \sqrt{2g \cdot h}.$$

Высоту подъема шара и его скорость можно вычислить по отклонению

$$\begin{aligned} h &= l - l \cdot \cos \alpha = 2l \cdot \sin^2 \left(\frac{\alpha}{2} \right), \\ v &= 2 \sin \frac{\alpha}{2} \sqrt{g \cdot l} \approx \alpha \sqrt{g \cdot l}. \end{aligned} \quad (7)$$

Здесь мы учли, что для малых углов $\sin \alpha \approx \alpha$. Такая же формула связывает скорость каждого шара и после удара с его последующим отклонением.

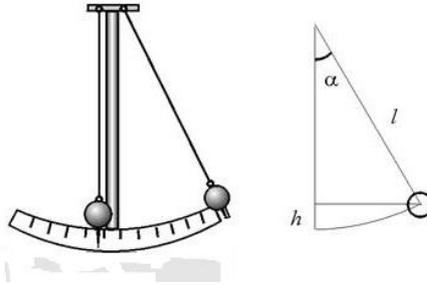


Рисунок 3 - к расчету скорости шара по углу отклонения

Поскольку скорость v_1' правого шара после удара на данной установке нельзя установить с достаточной точностью, исключим ее, используя закон сохранения импульса. При $m_1 = m_2 = m$ и $v_2 = 0$ из формулы (2) находим:

$$v_1' = v_1 - v_2'. \quad (8)$$

Кинетическая энергия системы до удара определяется скоростью правого шара, так как левый был неподвижен

$$E_K = \frac{mv_1^2}{2} \quad (9)$$

Кинетическая энергия шаров после удара

$$E_K' = \frac{mv_1'^2}{2} + \frac{mv_2'^2}{2} \quad (10)$$

С учетом (8), формулу (10) можно выразить через измеряемые величины v_1 и v_2' :

$$E_K' = \frac{m(v_1 - v_2')^2}{2} + \frac{mv_2'^2}{2} \quad (11)$$

Коэффициент восстановления энергии находим как отношение

$$K = \frac{E_K'}{E_K} \quad (12)$$

2. Отведите правый шар на угол $\alpha_1 = 5^\circ$ от вертикали. Освободите шар, повернув головку спускового устройства, зафиксируйте угол α'_2 , на который отклонился левый шар, время удара Δt считайте с дисплея секундомера. Данные запишите в таблицу.
3. Повторите п.3 для других углов α_1 (10° - 40° , с интервалом в 5°).
4. Вычислите v_1 , v'_2 по формуле (7), где угол α необходимо выразить в радианах.
5. Вычислите силу удара F по формуле (15).
6. Вычислите работу неупругой деформации A и коэффициент восстановления энергии K по формулам (14) и (13), соответственно.
7. Постройте графики зависимости $F = F(\alpha_1)$ и $A = A(\alpha_1)$.
8. Проанализируйте характер вышеуказанных зависимостей. Зависит ли коэффициент восстановления энергии K от исходной механической энергии системы? Сделайте выводы.

Контрольные вопросы

1. Какие взаимодействия называют столкновением (ударом)?
2. Дайте определение прямому центральному удару, косому удару.
3. В чем заключается закон сохранения импульса? В каких системах он выполняется? Почему он является фундаментальным законом природы?
4. На каком участке траектории в лабораторной установке выполняется закон сохранения импульса? На каком - не выполняется?
5. В чем физическая сущность закона сохранения и превращения энергии? Почему он является фундаментальным законом природы?
6. В чем заключается закон сохранения механической энергии? Для каких систем он выполняется? Почему механическая энергия не сохраняется при частично упругом ударе?
7. Какой удар называют абсолютно упругим? Абсолютно неупругим? Какие законы сохранения выполняются в случае таких ударов?
8. Опишите превращения энергии в процессе удара. Какая часть энергии испытывает превращения?
9. Как определить скорости тел после центрального абсолютно упругого удара? Следствием каких законов являются эти выражения?
10. Как в эксперименте определяется скорость шара до и после удара? Выведите формулу (8).
11. Выведите формулы для работы неупругой деформации A (14) и коэффициента восстановления энергии K (13).
12. Как в данной работе определяется сила удара F ? Какой закон лежит в основе способа ее определения.

Лабораторная работа № Ф-1-3

ИЗУЧЕНИЕ ДИНАМИКИ ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ.

Цель:

1. Изучение закона динамики вращательного движения.
2. Определение момента инерции стола.
3. Измерение моментов инерции произвольных тел.
4. Проверка теоремы Штейнера.

Оборудование: лабораторный комплекс ЛКМ - 2, стержень с отверстиями, полушар, два диска для сборки маятника Обербека, два эталонных цилиндра, штангенциркуль.



Описание установки

Общий вид установки ЛКМ-2 приведен на рисунке 1.

На платформе-основании смонтированы: поворотный стол и стойка комбинированная. Поворотный стол имеет отверстия для фиксации изучаемых объектов, трехступенчатый шкив со штифтами для закрепления нитей. Платформа стола закреплена на стойке, которая вращается на подшипниках вокруг вертикальной оси, закрепленной в основании со шкалой. Указатель перемещается вдоль шкалы, по которой отсчитывается угловая координата стола с разрешением 1° . При прохождении прорези через зазор фотодатчика срабатывает таймер измерительной системы ИСМ. Снизу к стойке прикреплен диск с диаметрально противоположными радиальной прорезью и рисквой-указателем. Рядом со столом установлен механический тормоз с защелкой. Для отпускания тормоза сдвинуть защелку на себя.

Стойка комбинированная предназначена для монтажа оборудования для проведения экспериментов, имеет круговую шкалу и шкив для переброски нити. В любом месте колонны можно установить шкив-ролик, к которому можно прикрепить пружины или перекинуть нить.

Измерительная система ИСМ-1К выполнена в виде электронного блока в пластмассовом корпусе. Органы управления и индикации вынесены

на переднюю панель рисунок 2. Измерение времени выполняется электронным секундомером. Разрешение таймера выбирается тумблером 2 и может быть равным 0,1мс, 1 мс или 10 мс. Запуск счета времени и запись показаний производится при выходе щели диска из зазора фотодатчика. «ЦИКЛ/ОДНОКРАТНО»- тумблер выбора числа измерений «цикл»- система реагирует на все поступающие сигналы запуска и остановки секундомера, «однокр.»-система производит однократное измерение.

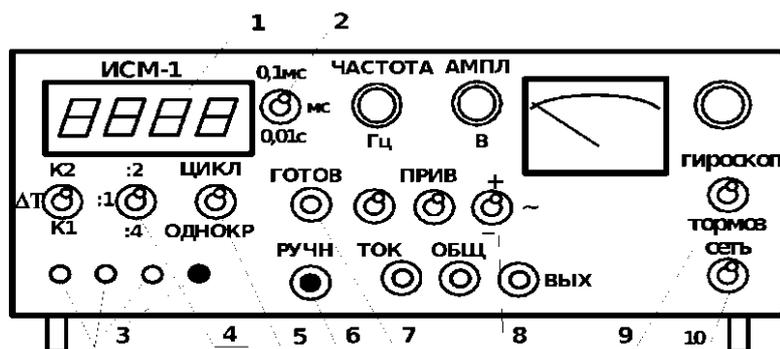


Рисунок 2 – измерительный блок

При нажатии кнопки «ГОТОВ» схема измерений приводится в состояние готовности к измерениям и вырабатывается сигнал «Уст.0», который обнуляет счетчик и индикатор. Отсчет времени начнется при поступлении первого сигнала ПУСК.

Подключение модулей комплекса производится через разъемы на за

Краткая теория

Пусть к материальной точке массы m приложена сила \vec{F} ; ее составляющие в плоскости обозначены как \vec{F}_τ (рисунок 3).

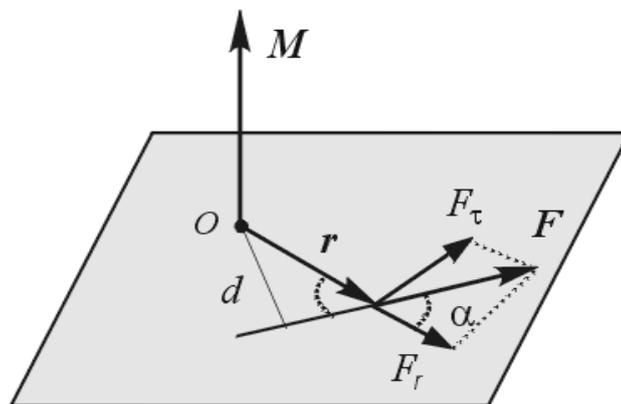


Рисунок 3 – к определению момента силы

Моментом силы \vec{F} относительно неподвижного начала O называют вектор, определяемый векторным произведением радиуса-вектора на силу:

$$\vec{M} = [\vec{r}; \vec{F}] \quad (1)$$

Модуль момента силы определяется соотношением:

$$M = r \cdot F \cdot \sin \alpha; \quad M = F \cdot d \quad (2)$$

где \vec{r} - это вектор, проведенный от точки O к материальной точке. (рисунок 3), ;

$d = r \cdot \sin \alpha$ - **плечо силы** - кратчайшее расстояние от линии действия силы до точки O ; вектор момента силы направлен согласно правилу векторного произведения (правилу «буравчика»).

Рассмотрим вращение тела произвольной формы вокруг оси Z . Положение любой точки в теле определяется радиусом-вектором \vec{r} , момент силы относительно точки O , лежащей на оси Z – это вектор \vec{M}_O .

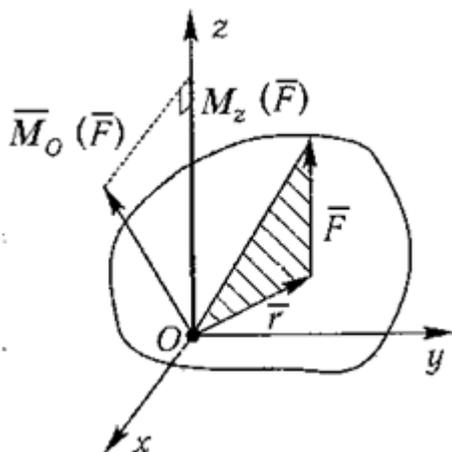


Рисунок 4 – момент силы относительно оси

Вращательным действием обладает **составляющая момента импульса, направленная вдоль оси Z** , поэтому Момент силы относительно оси – это псевдовектор или аксиальный вектор.

$$\vec{M}_z = [\vec{r}_z; \vec{F}] \quad (3)$$

Материальная точка, движущаяся на некотором расстоянии от точки O обладает импульсом \vec{P} (рисунок 5).

Моментом импульса относительно неподвижного начала O называется вектор, определяемый векторным произведением радиуса-вектора на импульс:

$$\vec{L} = [\vec{r}; m\vec{v}]. \quad (4)$$

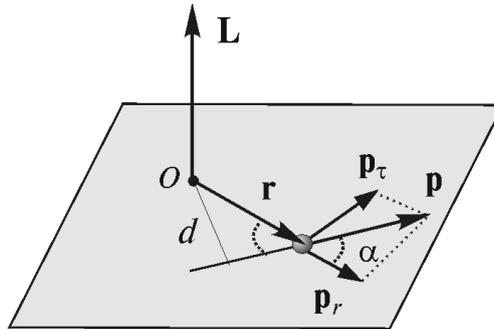


Рисунок 5 – к определению момента импульса

Для модуля момента импульса справедливо выражение:

$$L = r \cdot m \cdot v \cdot \sin \alpha = m \cdot v \cdot d,$$

где α - угол между векторами \vec{r} и \vec{v} ,

d - кратчайшее расстояние от линии действия импульса до точки O,
 \vec{r} - радиус-вектор, проведенный от точки O к движущейся точке.

Если тело вращается вокруг оси (рисунок 6), то аналогично понятию момента силы можно ввести понятие момента импульса относительно оси.

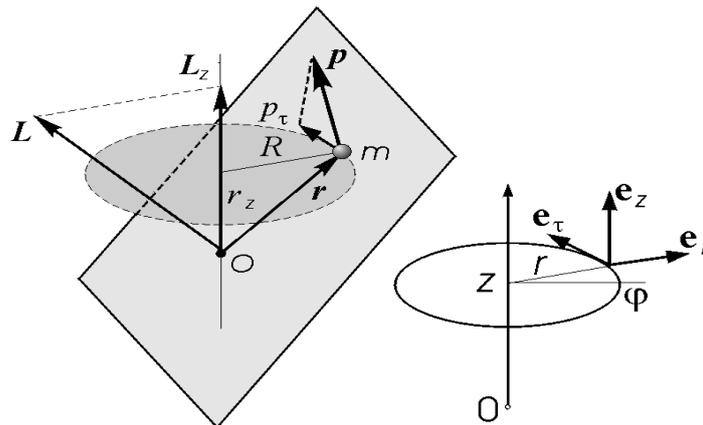


Рисунок 6 – момент импульса относительно оси

Моментом импульса тела относительно оси называется составляющая момента импульса по этой оси:

$$\vec{L}_z = [\vec{r}_z; m \vec{v}] \quad (5)$$

Уравнение моментов.

Продифференцируем соотношение для момента импульса относительно неподвижного начала (4). Получим выражение:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \left[\frac{d\vec{r}}{dt}; \vec{P} \right] + \left[\vec{r}; \frac{d\vec{P}}{dt} \right] \quad (6)$$

Производная от радиуса-вектора по времени - это есть скорость. Вектор скорости и вектор импульса сонаправлены, поэтому первое слагаемое

равно нулю. Производная от импульса по времени, согласно второму закону Ньютона, это сила. Таким образом, имеем:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = [\vec{r}; \vec{F}] \quad (7)$$

Т.е. в правой части уравнения стоит выражение для момента силы:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M} \quad (8)$$

Выражение (8) называется уравнением моментов: производная по времени от момента импульса относительно неподвижного начала равна моменту силы относительно того же начала.

Понятие момента инерции.

Если тело вращается вокруг оси Z с угловой скоростью ω , то каждая i -я точка массой m_i имеет момент импульса:

$$L_i = m_i \cdot v_i \cdot r_i = \omega \cdot m_i \cdot r_i^2; \text{ с учетом, что } v = \omega \cdot r \quad (9)$$

Определим момент импульса вращающегося тела, для этого найдем сумму моментов импульсов всех точек тела:

$$L = \omega \cdot \sum_{i=1}^n m_i r_i^2 \quad (10)$$

Выражение

$$I = \sum_{i=1}^n m_i r_i^2 \quad (11)$$

Называется моментом инерции тела.

Момент инерции тела зависит не только от массы, но и от ее распределения относительно оси вращения.

Момент инерции тела является мерой инертности тела при его вращательном движении. Он зависит не только от массы m , но и от ее распределения относительно оси вращения.

Если тело однородное, то массу можно определить через плотность ρ и выражение для момента инерции тела примет вид:

$$I = \int_V \rho \cdot r^2 dV \quad (12)$$

где ρ – плотность вещества.

Момент инерции, как следует из определения, величина аддитивная. Это значит, что если вращающаяся система состоит из нескольких тел, то момент инерции системы определяется суммой моментов инерции всех тел относительно того же начала или относительно той же оси.

Момент импульса для тела, вращающегося вокруг оси Z :

$$\vec{L}_Z = I_Z \cdot \vec{\omega} \quad (13)$$

Угловое ускорение

Вектор углового ускорения $\vec{\varepsilon}$ определяет быстроту изменения вектора угловой скорости $\vec{\omega}$ с течением времени:

$$\frac{d\vec{\omega}}{dt} = \vec{\varepsilon}$$

Направление угловой скорости связано с направлением вращения тела правилом "правого буравчика". Если движение равноускоренное, то векторы угловой скорости и углового ускорения имеют одинаковое направление, если равнозамедленное – противоположны.

Закон динамики вращательного движения.

Если на систему материальных точек действуют и внутренние и внешние силы, то вращающий момент могут создавать и внутренние и внешние силы. Сумма моментов внутренних сил равна нулю, поэтому вращательный момент создают только внешние силы. Твердое тело-это система материальных точек для которой уравнение моментов можно записать в следующем виде:

$$\frac{d\vec{L}_Z}{dt} = \vec{M}_Z \quad (14)$$

Это выражение и есть основной закон динамики вращательного движения: *скорость изменения момента импульса равна моменту внешних сил, действующих на тело.*

Подставим в полученное выражение формулу (12) и произведем операцию дифференцирования, тогда получим другую формулировку этого закона: *угловое ускорение материальной точки прямо пропорционально моменту силы и обратно пропорционально моменту инерции.*

$$\vec{\varepsilon} = \frac{\vec{M}}{I} \quad (15)$$

Теорема Штейнера.

Расчет моментов инерции для тел правильной формы относительно осей, проходящих через центр масс тела (для симметричных тел это и центр симметрии) можно проводить по соотношению (12). В качестве примера рассчитаем момент инерции стержня длиной l (рисунок 7).

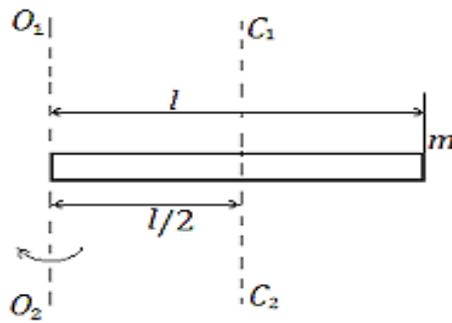


Рисунок 7 - стержень

Запишем соотношение (12) в виде:

$$I = \int_V r^2 dm ; \text{ для стержня } dm = \frac{m}{l} dr;$$

В результате интегрирования получим:

$$I = \int_{\frac{l}{2}}^l \frac{m}{l} r^2 dr = \frac{ml^2}{12} \quad (16)$$

Для расчета момента инерции тела относительно произвольной оси вращения можно воспользоваться формулой **теоремы Штейнера**

$$I = I_C + md^2 \quad (17)$$

где I и I_C - моменты инерции тела массы m относительно оси, проходящей через центр масс тела (I_C) и параллельной ей произвольной оси (I), отстоящей на расстоянии d соответственно. В результате расчета получим выражение:

$$I = \frac{ml^2}{12} + \frac{ml^2}{4} = \frac{ml^2}{3} \quad (18)$$

В таблице приведены примеры моментов инерции различных тел.

Тело	Положение оси вращения	Момент инерции
Полый тонкостенный цилиндр радиуса R	Ось симметрии	mR^2
Сплошной цилиндр или диск радиуса R	То же	$\frac{1}{2}mR^2$
Прямой тонкий стержень длиной l	Ось перпендикулярна стержню и проходит через его середину	$\frac{1}{12}ml^2$
Прямой тонкий стержень длиной l	Ось перпендикулярна стержню и проходит через его конец	$\frac{1}{3}ml^2$
Шар радиусом R	Ось проходит через центр шара	$\frac{2}{5}mR^2$

Выполнение работы

Задание 1: проверка закона динамики вращательного движения

Методика эксперимента

Для проверки закона динамики вращательного движения на стойке необходимо собрать маятник Обербека. На оси блока закрепить стержень с отверстиями, относительно оси, проходящей через центр масс. На стержне с двух сторон закрепить диски. На блоке закрепить нить с грузами (рисунок 8).

Вращающий момент создается силой натяжения нити, тогда закон динамики можно записать в виде:

$$I\varepsilon = M = RT, \quad (19)$$

где M - вращающий момент, создается силой натяжения нити T , которая имеет плечо R - радиус шкива.

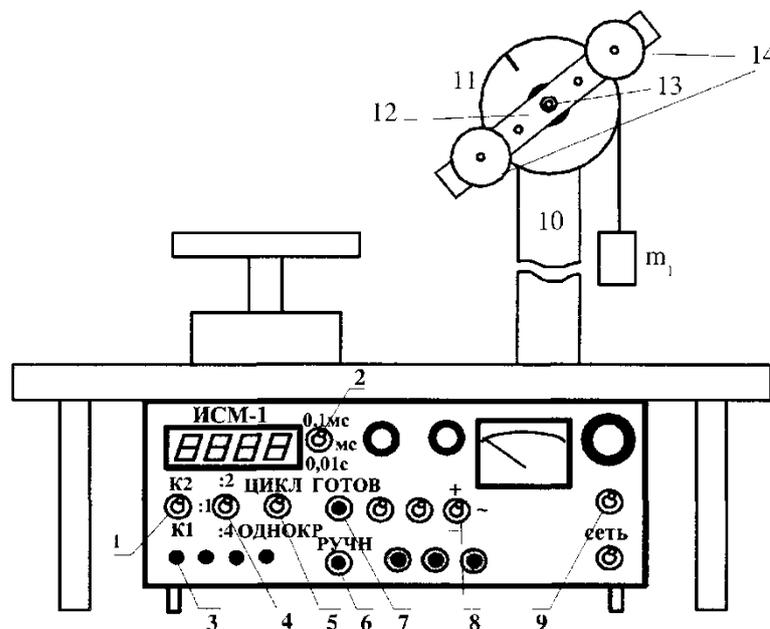


Рисунок 8 – схема установки

Груз движется равноускоренно, за время t опускается на высоту h то его линейное ускорение можно определить по формуле:

$$a = 2h/t^2. \quad (20)$$

Учитывая, что ускорение груза равно тангенциальному ускорению точек обода шкива и $a = \varepsilon R$, получим:

$$\varepsilon = 2h/Rt^2. \quad (21)$$

По второму закону Ньютона можно определить ускорение груза

$$m_1 \vec{a} = m_1 \vec{g} + \vec{T}. \quad (22)$$

Спроектировав векторное уравнение (22) на ось X, получим

$$m_1 a = m_1 g - T.$$

Отсюда найдем силу натяжения нити T и момент этой силы M .

$$T = m_1(g - 2h/t^2), \quad (23)$$

$$M = m_1 R(g - 2h/t^2). \quad (24)$$

Если учесть, что диаметр шкива $D = 2R$ получим формулы:

$$\varepsilon = 4h/(Dt^2), \quad (25)$$

$$M = m_1 D/2 \cdot (g - 2h/t^2). \quad (26)$$

Высоту падения груза можно определить исходя из периода вращения блока с помощью измерительного устройства:

$$h = 2\pi RN \quad (27)$$

где R – радиус шкива; N – число оборотов шкива блока.

Время падения t зависит от числа оборотов шкива и определяется пересчетным устройством ИСМ. Подставим соотношение (27) в (25) и (26), получим рабочие формулы:

$$\varepsilon = \frac{4\pi N}{t^2}; \quad M = \frac{m_1 D}{2 \left(g - \frac{2\pi DN}{t^2} \right)} \quad (28)$$

Выполнение работы

1. Заготовить таблицу измерений.

Таблица 1.

$N_0, n/n$	$D, м$	$t, с$	$h, м$	$m_1, кг$	$M, Н·м$	$\varepsilon, с^{-1}$

2. Измерить штангенциркулем диаметры шкива D блока.

3. Закрепить нить на шкиве, поставить шкив на тормоз, чтобы предотвратить вращение шкива. Перекинуть нить через блок. На конце нити закрепить груз.

4. Включить измерительную систему в сеть. Установить переключатель в положение К2. Переключателем «Цикл» выбрать число оборотов (по указанию преподавателя).

5. Для измерения времени N оборотов совместить прорезь шкива с положением «0» (загорится переключатель (3) на лицевой панели ИСМ-1К). Нажать и отпустить кнопку «Гот.». Результат измерения времени падения появится на цифровом табло.

6. Изменить массу падающего груза и повторить опыт 5-10 раз.

7. Изменить положение грузов на стержне и повторить эксперимент 5-10 раз.

Рассчитать момент силы и угловое ускорение по соотношениям (28). Занести результаты в таблицу.

8. Построить графики зависимости углового ускорения от момента действующей силы для двух положений грузов на стержне.

9. Рассчитать, используя графики, момент инерции маятника для двух положений грузов на стержне.

ОБРАБОТКА РЕЗУЛЬТАТОВ

1. Обработка результатов вручную.

1. Вычислите ε и M для каждого опыта.

2. Постройте график зависимости $\varepsilon = f(M)$: постройте оси, нанесите масштаб и экспериментальные точки (M_i, ε_i) согласно табл.1.

Через экспериментальные точки и начало координат проведите прямую так, чтобы по обе стороны от нее было расположено одинаковое число точек, примерно на одинаковом расстоянии от прямой.

3. Вычислите угловой коэффициент данной прямой A . Согласно соотношению (2) величина $1/A$ будет равна усредненному значению момента инерции $\langle I \rangle$ при данном положении грузов. Точки, которые выбрали для определения коэффициента четко указать на прямой зависимости $\varepsilon = f(M)$.

4. Прделайте п.п. 1.1-1.3 для другого положения грузов на стержнях.

2. Обработка результатов на ЭВМ.

1. Выполните п. 1.1.

2. В соответствии с инструкцией к программе обработки линейных зависимостей методом наименьших квадратов произведите обработку экспериментальной зависимости (ε_i, M_i) .

3. Проведите на графике прямую через рассчитанные на ЭВМ контрольные точки. Данная прямая будет оптимальным графиком Вашей экспериментальной зависимости.

4. Согласно (2) обратная величина углового коэффициента $(1/A)$ полученной прямой будет равна усредненному значению момента инерции $\langle I \rangle$.

2.5. Результат запишите в виде:

$$I = \langle I \rangle \pm \Delta I.$$

Доверительный интервал ΔI вычисляется обычным способом по среднеквадратичному отклонению $S(I/A)$.

Выводы

1. Какой характер имеет полученная Вами зависимость ε от M .
2. Как отношение M/ε зависит от положения грузов на стержне, диаметра шкива, массы подвешиваемых грузов? Ответ обоснуйте ссылкой на соответствующие графики.
3. Какой геометрический смысл имеет момент инерции на зависимости ε от M ?

ОПРЕДЕЛЕНИЕ МОМЕНТА ИНЕРЦИИ.

Задание 2: определение момента инерции поворотного столика

На штифте большого шкива поворотного стола закрепить нить, радиальную прорезь диска на оси стола поместить напротив нуля круговой шкалы. Перекинуть нить через блок-ролик и блок стойки. Закрепить груз массой 100 грамм на нити.

Нить будем считать невесомой и нерастяжимой, инертными свойствами шкива комбинированной стойки можно пренебречь в силу очень малой его массы. Таким образом, сила натяжения нити не изменяется вдоль всей нити и будет равна силе тяжести груза закрепленного на нити.

Момент силы будет равен:

$$M = mgR,$$

где R – радиус шкива стола.

Угловое ускорение груза можно определить по соотношению (28).

Момент инерции поворотного стола рассчитываем по формуле:

$$I = \frac{mgRt^2}{4\pi} \quad (29)$$

Измерение времени поворота стола провести согласно пунктам 4,5 задания 1. Записать значение момента инерции стола в отчет.

Таблица 2.

$m, \text{ кг}$	$R, \text{ м}$	$t, \text{ с}$	$I, \text{ кг}\cdot\text{м}^2$

Задание 3: определение момента инерции полушара

Методика эксперимента

Момент инерции шара относительно оси, проходящей через центр масс можно рассчитать по соотношению:

$$I = \frac{2mR_{\text{ш}}^2}{5},$$

где m - масса полушара, $R_{\text{ш}}$ - радиус шара.

Для однородного, т.е. полушара с постоянной плотностью, справедливо выражение:

$$I = \frac{mR_{\text{пш}}^2}{5} \quad (30)$$

Если на поворотный стол поместить полушар, момент инерции полученной системы, будет складываться из момента инерции стола и момента инерции полушара.

$$I = I_{\text{ст}} + I_{\text{пш}} \quad (31)$$

Для определения момента инерции системы воспользуемся методикой задания 2. Момент инерции полушара определим из выражения:

$$I_{\text{пш}} = I - I_{\text{ст}} \quad (32)$$

Выполнение работы

1. Поместить на поворотный столик полушар таким образом, чтобы ось полушара совпадала с осью стола.

2. Заготовить таблицу

Таблица 3

$N\bar{o},$ n/n	$m, \text{ кг}$	$t, \text{ с}$	$I_{\text{пш}}, \text{ кг}\cdot\text{м}^2$	$\langle I \rangle$	ΔI_i	ΔI_i^2	ΔI	δ_I

3. Выполнить измерения аналогично предыдущему заданию.

4. Рассчитать момент инерции полушара по формуле (32).

5. Провести статистическую обработку результата, предварительно рассчитав теоретическое значение момента инерции полушара по формуле (30).

Контрольные вопросы.

1. Дайте определение углового ускорения тела. Укажите направление вектора углового ускорения на схеме.

2. Дайте определение момента силы относительно неподвижного начала и относительно оси для вращающегося тела. Укажите на схеме направление вектора вращающего момента.

3. Дайте определение момента импульса материальной точки и вращающегося твердого тела. Укажите направление вектора на схеме.

4. Запишите уравнение моментов.

5. Сформулируйте основной закон динамики вращательного движения.

6. Что называется моментом инерции? Запишите формулы для момента инерции материальной точки, произвольного тела. Какова роль момента инерции во вращательном движении?

7. Получите формулу для момента инерции стержня относительно оси, проходящей через центр масс.

8. Сформулируйте теорему Штейнера.

9. Получите формулу для момента инерции стержня относительно любой оси, параллельной оси, проходящей через центр масс.

10. Какие методики используются для определения момента инерции в данной лабораторной работе?

Лабораторная работа № Ф-1-4

ИЗУЧЕНИЕ ЗАКОНОВ СОХРАНЕНИЯ МОМЕНТА ИМПУЛЬСА И ЭНЕРГИИ ПРИ ПОМОЩИ КРУТИЛЬНОГО МАЯТНИКА

Цель. Определить скорость снаряда, используя закон сохранения момента импульса, при взаимодействии снаряда с крутильным маятником.

Оборудование. Пружинная пушка, крутильный маятник с угловой шкалой, электронный секундомер, счетчик периодов.

Краткая теория

Момент импульса. Материальная точка, движущаяся на некотором расстоянии от оси способна передавать вращательное движение телам, вращающимся вокруг этой оси. Количественной мерой вращательного движения является момент импульса. Если материальная точка движется в плоскости, перпендикулярной некоторой оси, (рис.1 а), то ее момент импульса относительно этой оси определяется равенством:

$$\vec{L} = [\vec{r}; m\vec{v}]. \quad (1)$$

Для модуля момента импульса справедливо выражение

$$L = r \cdot m \cdot v \cdot \sin \varphi = m \cdot v \cdot d,$$

где φ - угол между векторами \vec{r} и \vec{v} ,

d - кратчайшее расстояние от линии движения до оси,

\vec{r} - радиус-вектор, проведенный от оси вращения к движущейся точке.

Для тела, вращающегося с угловой скоростью ω , каждая i -я точка массой m_i имеет момент импульса (рис.1 б).

$$L_i = m_i \cdot v_i \cdot r_i = \omega \cdot m_i \cdot r_i^2$$

Полный момент импульса вращающегося тела получится суммированием моментов импульса всех точек

$$L = \omega \cdot \sum_{i=1}^n m_i r_i^2 = I \omega \quad (2)$$

где $I = \sum_{i=1}^n m_i r_i^2$ - момент инерции тела.

Если на систему не действуют моменты внешних сил, то в такой системе выполняется закон сохранения момента импульса: *суммарный момент импульса системы не изменяется во времени, несмотря на взаимодействие отдельных частей системы.*

$$\vec{L} = \text{const}$$

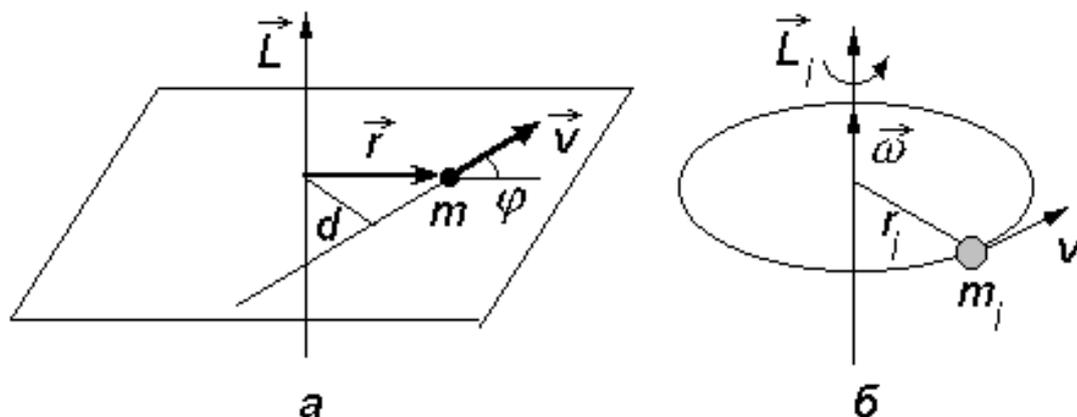


Рисунок 1 - к определению момента импульса.

Кинетическая энергия тела, вращающегося вокруг неподвижной оси, равна:

$$T_{\kappa} = \frac{1}{2} I \omega^2. \quad (3)$$

Эта формула аналогична формуле кинетической энергии для поступательного движения.

Закон упругости. При закручивании упругой нити или стержня возникает упругий момент сил, пропорциональный углу поворота α

$$\vec{M} = \chi \vec{\alpha}, \quad (4)$$

где χ - коэффициент пропорциональности, называемый *модулем кручения*. Модуль кручения численно равен моменту сил, возникающему при повороте стержня на 1 радиан.

Формула (4) аналогична формуле для силы упругости. Роль коэффициента жесткости играет модуль кручения, а растяжения- угол поворота.

Потенциальная энергия деформации при скручивании нити равна

$$W = \frac{\chi \cdot \alpha^2}{2}, \quad (5)$$

которая также определяется аналогично потенциальной энергии деформированной пружины.

Методика эксперимента

Установка представляет собой баллистический крутильный маятник с большим периодом колебаний. Стержень 1 с установленными на нем подвижными грузами 2 и чашками с пластилином 3 для улавливания снаряда подвешен на упругих растяжках 4 (рис.2).

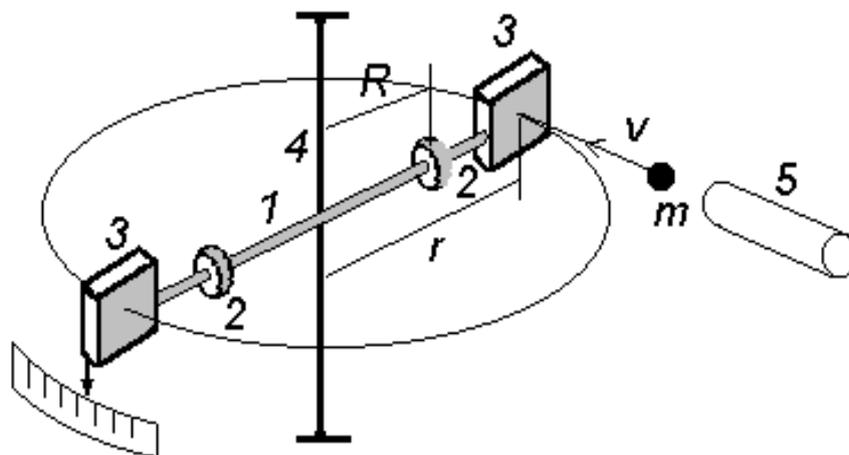


Рисунок 2 - схема установки.

Снаряд массой m , вылетевший из пружинной пушки 5 со скоростью v , вклеивается в чашку 3 и вызывает отклонение маятника на некоторый угол α . В опыте можно выделить три основных этапа.

1. *Выстрел из пружинной пушки.* В системе снаряд-пружина выполняется закон сохранения механической энергии. Снаряд приобретает кинетическую энергию за счет потенциальной энергии сжатой пружины

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{kx^2}{2} \quad (6)$$

Примечание. На сообщение кинетической энергии пули идет не вся потенциальная энергия упруго деформированной пружины, т. к. часть ее преобразуется в кинетическую энергию самой пружины, но она мала по сравнению с кинетической энергией пули и ею можно пренебречь. При таком допущении формулу (6) можно считать корректной.

2. *Взаимодействие снаряда с крутильным маятником.* При взаимодействии с маятником происходит неупругое соударение. Продолжительность столкновения мала по сравнению с периодом колебаний, поэтому закручиванием маятника в течение времени удара можно пренебречь. Пока поворот маятника пренебрежительно мал,

момент внешних сил (создаваемый подвесом) отсутствует и момент импульса системы снаряд-маятник будет сохраняться.

Пуля, летящая со скоростью v на расстоянии r от оси вращения маятника, создает вращательный момент, который и является причиной появления вращения. Начальная угловая скорость маятника, приобретенная при столкновении, может быть определена из равенства моментов пули относительно оси вращения и момента импульса вращающегося маятника (рис.2).

$$m \cdot v \cdot r = I \cdot \omega, \quad (7)$$

Механическая энергия при неупругом столкновении не сохраняется, т.к. частично превращается во внутреннюю энергию.

3. *Закручивание маятника.* При закручивании маятника возникает упругий момент силы в подвесе, тормозящий маятник. На этом этапе диссипативные процессы практически отсутствуют, поэтому закон сохранения энергии в системе маятник-подвес выполняется. Между состояниями начала движения и остановки маятника кинетическая энергия вращения маятника превращается в потенциальную энергию закручивания подвеса

$$\frac{I\omega^2}{2} = \frac{\chi\alpha^2}{2}. \quad (8)$$

Из равенства (8) можно определить начальную угловую скорость маятника через предельный угол закручивания

$$\omega = \alpha \cdot \sqrt{\frac{\chi}{I}}. \quad (9)$$

Из формул (7) и (9) можно получить выражение для вычисления скорости пули через угол закручивания маятника

$$v = \frac{\alpha I}{mr} \cdot \sqrt{\frac{\chi}{I}}. \quad (10)$$

Однако в формуле (10) присутствуют две неизвестные величины: момент инерции маятника I и модуль кручения подвеса χ . Поэтому необходимо провести еще два опыта, позволяющие определить эти величины.

Известно, что движение маятника носит характер крутильных колебаний. Частота колебаний Ω и период T определяются равенством:

$$\Omega = \frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{\chi}{I}} \quad (11)$$

Момент инерции маятника I складывается из моментов инерции каждого подвижного груза I_{Γ} и момента инерции остальных частей маятника I_0 , включая прилипший снаряд. (Мы считаем подвижные грузы материальными точками.)

$$I = I_0 + 2I_2 = I_0 + 2m_{\Gamma}R^2 \quad (12)$$

Неизвестные величины I_0 и χ можно определить, измеряя периоды крутильных колебаний T при двух различных положениях грузов R_1 и R_2 из системы двух уравнений (11).

$$T_1 = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{I_1}{\chi}} = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{I_0 + 2m_{\Gamma}R_1^2}{\chi}}, \quad (13)$$

$$T_2 = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{I_2}{\chi}} = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{I_0 + 2m_{\Gamma}R_2^2}{\chi}}. \quad (13')$$

Если выстрел производится при одном из положений грузов R_1 (назовем его рабочим), то в формулу (10) следует подставить момент инерции I_1 для того же положения грузов. Тогда и T_1 - это период колебаний для положения грузов, при котором производится выстрел, а T_2 - период колебаний для какого-либо другого положения грузов R_2 (назовем его контрольным).

Формулу (10) можно записать в виде:

$$v = \frac{\alpha \cdot \chi}{mr} \sqrt{\frac{I}{\chi}} = \frac{\alpha \cdot \chi \cdot T_1}{2\pi \cdot mr}. \quad (14)$$

Выразив из системы (13) - (13') величину χ (исключив I_0) и подставив ее в выражение (14), получим рабочую формулу для определения скорости пули:

$$v = \frac{4\pi \cdot m_{\Gamma} \cdot \alpha \cdot T_1 \cdot (R_1^2 - R_2^2)}{m \cdot r \cdot (T_1^2 - T_2^2)}, \quad (15)$$

где m - масса пули,

m_{Γ} - масса подвижных грузов.

Внимание! Формула (15) содержит разности квадратов величин R и T , которые в случае их небольшого различия будут давать значительную относительную погрешность. Поэтому при проведении опыта различие величин R_1 и R_2 следует делать возможно большим.

В рассмотренном маятнике, называемом баллистическим, угол закручивания α определяется импульсом снаряда $p=mv$ и параметрами маятника. Баллистический маятник может иметь другую конструкцию,

однако общей чертой таких устройств является большой период колебаний по сравнению с временем взаимодействия.

Выполнение работы

1. Заготовить таблицу измерений.

Таблица.

№ пп	R_1 , см	α , град	r , см	t_1 , с	N_1 ,	T_1 , с	R_2 , см	t_2 , с	N_2 ,	T_2 , с	v , м/с
1.											
2.											

2. Выбрать произвольно рабочее положение грузов. Установить маятник на нулевое деление шкалы.

3. Произвести выстрел из пружинной пушки. Измерить угол отклонения маятника α и расстояние r от оси до точки вклеивания пули.

4. Измерить время t_1 для N_1 колебаний ($N=10-15$) и определить период колебаний с точностью до трех значащих цифр. Этот опыт можно выполнить, не останавливая маятник после выстрела. Секундомер включится автоматически после начала колебаний. Для остановки секундомера нажмите кнопку СТОП. Секундомер остановится после завершения очередного полного периода.

5. Проведите контрольный опыт по определению периода колебаний для другого положения грузов R_2 . Маятник при этом отклонить вручную (без выстрела). Пуля должна оставаться на своем месте. Расстояния R_1 и R_2 должны отличаться не менее, чем на 4 см.

6. Повторить п.п. 1-4 5-7 раз. Результаты занести в таблицу измерений.

7. Определить массу пули.

8. Вычислить скорости пуль по формуле (15) для каждого опыта. (Не забудьте об используемой системе единиц!)

9. Вычислить моменты инерции I_0 и I для одного из положений грузов и модуль кручения подвеса.

10. Вычислить начальную кинетическую энергию пули, кинетическую энергию маятника после столкновения и потери энергии при столкновении для одного из опытов.

Контрольные вопросы

1. Дайте определение момента импульса материальной точки, относительно неподвижного начала. Укажите на рисунке направление вектора \vec{L} .

2. Дайте определение момента импульса вращающегося твердого тела, относительно неподвижной оси. Укажите на рисунке направление вектора \vec{L} .

3. Сформулируйте законы сохранения момента импульса и механической энергии. Когда в данной работе выполняются эти законы?

4. Запишите выражение для упругого момента, кинетической и потенциальной энергии при вращательном движении. Сопоставьте их с аналогичными формулами поступательного движения.

5. Перечислите основные этапы опыта, опишите процессы, происходящие в системе на каждом этапе. На каких законах сохранения основан данный метод измерения?

6. Выведите самостоятельно формулу (10) для измерения скорости пули. Достаточно ли этой формулы для вычисления скорости пули в нашем опыте?

7. С какой целью в работе измеряются периоды крутильных колебаний? Выведите формулу (15).

Лабораторная работа № Ф-1-5

ИЗУЧЕНИЕ ВЫНУЖДЕННОЙ ПРЕЦЕССИИ ГИРОСКОПА

Цель. Изучить прецессию гироскопа, определить его момент импульса и момент инерции.

Оборудование. Гироскоп FRM-10. Устройство отсчета угла прецессии, тахометр и секундомер (на панели прибора).

Краткая теория

Гироскопом называется массивное тело, быстро вращающееся вокруг оси симметрии. Гироскоп называется свободным, если он способен поворачиваться относительно трех координатных осей. Это достигается за счет применения так называемого карданного подвеса (рис. 1).

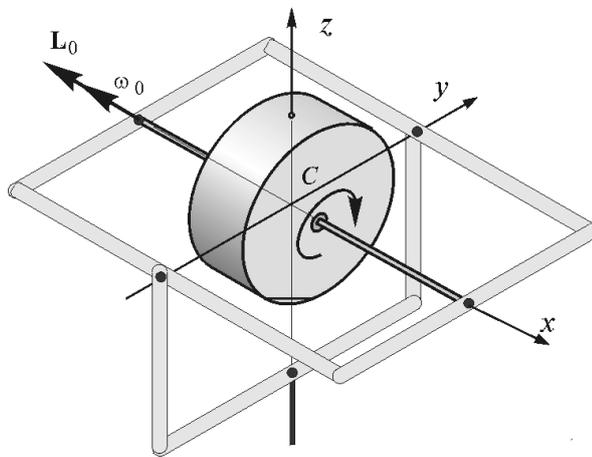


Рисунок 1- гироскоп.

При вращении гироскопа вокруг оси симметрии он приобретает момент импульса

$$\vec{L}_0 = I_0 \vec{\omega}_0, \quad (1)$$

где I_0 – момент инерции гироскопа относительно оси симметрии;

$\vec{\omega}_0$ – угловая скорость вращения.

На рис. 1 угловая скорость гироскопа $\vec{\omega}_0$ направлена по правилу правого винта вдоль оси x , в ту же сторону по оси вращения будет направлен и момент импульса гироскопа \vec{L}_0 .

Если гироскоп при этом вращается и вокруг перпендикулярной оси, то появляется дополнительная составляющая момента импульса

$$\vec{L}_\perp = I_\perp \vec{\omega}_\perp. \quad (2)$$

Поскольку I_0 и I_\perp не равны, то векторы $\vec{\omega}$ и \vec{L} уже не будут

параллельны.

Упрощенная теория вынужденной прецессии гироскопа исходит из его быстрого вращения вокруг оси симметрии ($\omega_0 \gg \omega_L$) так, что перпендикулярной составляющей момента импульса L_{\perp} можно пренебречь. Если центр масс гироскопа лежит в точке пересечения осей вращения, то сила тяжести не будет создавать вращающих моментов. При наличии моментов сил характер изменения момента импульса гироскопа во времени будет определяться уравнением моментов:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}, \quad (3)$$

где \vec{M} – момент внешних сил.

Если момент внешних сил равен нулю, то из (3) следует, что вектор момента импульса гироскопа \vec{L} сохраняется, оставаясь неизменным по величине и направлению. Причем, как будет показано в дальнейшем, это направление оказывается устойчивым к небольшим возмущениям. Если момент внешних сил будет отличен от нуля, то вектор момента импульса гироскопа \vec{L} начнет изменяться.

Подвесим на ось гироскопа, на расстоянии R от центра, груз весом $\vec{F} = m\vec{g}$ (рис. 2). Сила тяжести груза, направленная против оси z , создает вращающий момент, который направлен вдоль оси y :

$$\vec{M} = [\vec{R}; \vec{F}]. \quad (4)$$

Если ось гироскопа горизонтальна, то по модулю он равен, т.е. радиус-вектор и сила образуют прямой угол:

$$M = R \cdot F. \quad (4')$$

За время δt под действием вращающего момента \vec{M} в соответствии с формулой (3) произойдет изменение вектора \vec{L} на величину $\delta\vec{L}$, причем векторы $\delta\vec{L}$ и \vec{M} будут параллельны (и направлены вдоль оси y). А это значит, что ось гироскопа повернется в горизонтальной плоскости xOy вокруг оси z на угол $\delta\alpha$, как показано на рис. 2. Этот поворот называется вынужденной прецессией гироскопа.

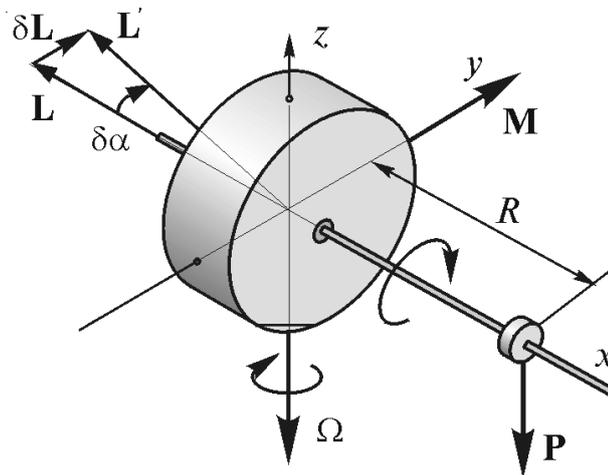


Рисунок 2 - вынужденная прецессия гироскопа.

Угловая скорость прецессии гироскопа равна:

$$\Omega = \frac{\delta\alpha}{\delta t}, \quad (5)$$

где $\delta\alpha$ - угол прецессионного поворота за время δt .

Угол поворота (в радианах) можно определить из рис. 2:

$$\delta\alpha = \frac{\delta L}{L} = \frac{M \cdot \delta t}{L}. \quad (6)$$

Из выражений (4') (5) и (6) получим формулу, определяющую угловую скорость прецессии

$$\Omega = \frac{\delta\alpha}{\delta t} = \frac{FR}{L}. \quad (7)$$

Таким образом, в быстро вращающемся гироскопе момент сил вызывает движение не с угловым ускорением, а с постоянной угловой скоростью, причем прецессия возникает мгновенно при появлении момента сил. (Заметим, однако, что в данной схеме мы не учитываем добавочный момент импульса, вызванный вращением гироскопа вокруг оси z, что справедливо только при большой скорости вращения). При небольших и кратковременных воздействиях изменение положения оси гироскопа $\delta\alpha$ будет незначительным и тем меньше, чем больше момент импульса гироскопа (см. формулу (6)). Следовательно, ориентация оси быстро вращающегося гироскопа проявляет определенную устойчивость к внешним воздействиям.

Методика эксперимента

Угловая скорость прецессии гироскопа Ω в наших опытах определяется как отношение угла прецессионного поворота α ко времени поворота t :

$$\Omega = \frac{\alpha}{t}. \quad (8)$$

Измерения α и t в установку производятся автоматически и фиксируются на цифровых табло установки.

Поскольку в нашей установке центр масс гироскопа не совпадает с точкой пересечения осей (гироскоп без груза не уравновешен), то существует неуравновешенный момент силы тяжести M_0 , который следует учесть. Можно измерения произвести дважды, при двух различных плечах R_1 и R_2 , исключив из результатов неизвестную величину M_0 . Более точным является следующий метод. Из формулы (7) с учетом дополнительного момента M_0 следует:

$$\Omega = \frac{F}{L} R + \frac{M_0}{L}, \quad (9)$$

Т. е. угловая скорость прецессии является линейной функцией положения груза

$$\Omega = A \cdot R + B. \quad (9')$$

Построив график экспериментальной зависимости $\Omega(R)$ и определив по графику коэффициент пропорциональности A , можно определить момент импульса гироскопа L (формула получается из сопоставления формул (9) и (9')). Точка пересечения графика с осью абсцисс дает равновесное положение груза R_0 . Измерив при помощи тахометра угловую скорость вращения гироскопа и используя формулу (1), можно определить момент инерции гироскопа I_0 .

Выполнение работы

1. Заготовить таблицу измерений.

Таблица.

№ п/п	$R, 10^{-2}$ м	α , град	α , рад	t , с	$\Omega, \text{с}^{-1}$
1					
2					
...					

2. Найти и записать положение груза R_0 , соответствующее равновесию гироскопа (при этом положении при включенном двигателе прецессия отсутствует). По заданию преподавателя установить заданное число оборотов двигателя гироскопа. Произвести отсчет угловой скорости вращения n по тахометру. По колебаниям стрелки тахометра оценить погрешность.

3. Установить груз на оси гироскопа с минимальным плечом. Перемещая груз вдоль оси гироскопа с заданным шагом (1-2см), измерить положение груза на шкале R , угол поворота α (пределы 30^0 - 40^0) и время поворота t . Результаты занести в таблицу (6-10 значений). Причем *изменение направление* прецессии следует учитывать знаком угла поворота и угловой скорости.

4. Взявшись одной рукой за скобу гироскопа, попробуйте (очень осторожно!) слегка притормозить прецессию. Затем попытайтесь слегка ускорить ее. Запишите результат.

Обработка результатов.

1. Начертить оси, выбрать масштаб и нанести точки графика зависимости $\Omega(R)$ по данным таблицы.

2. Проведя через точки усредняющую прямую, определить угловой коэффициент A линейной зависимости $\Omega(R)$. Вычислить значение момента импульса L .

3. Произвести расчет момента инерции I_0 , используя L и n .

4. На схеме гироскопа указать направление момента сил при попытке *затормозить (ускорить) прецессию* гироскопа. При помощи схемы объяснить поведение гироскопа в этих случаях.

Контрольные вопросы

1. Дайте определение следующих величин: угловой скорости, момента силы, момента инерции, момента импульса.

2. Что такое гироскоп? Сколько степеней свободы имеет гироскоп? Как это достигается?

3. Запишите уравнение моментов. Сформулируйте закон динамики вращательного движения.

4. Что означает термин свободный гироскоп? Что такое прецессия?

5. Объясните явление прецессии гироскопа на основе закона динамики вращательного движения с использованием чертежа.

6. Выведите рабочую формулу для определения L .

Лабораторная работа № Ф-1-6

ПРОВЕРКА ЗАКОНА СОХРАНЕНИЯ ЭНЕРГИИ НА МАЯТНИКЕ МАКСВЕЛЛА

Цель. Экспериментально проверить закон сохранения энергии на маятнике Максвелла. Определить скорость поступательного движения маятника по энергетическим и кинематическим соотношениям и сравнить их.

Оборудование. Маятник Максвелла. В комплект установки входят кольца для изменения момента инерции маятника. Время падения маятника фиксируется электронным секундомером.

Краткая теория

Наиболее общей мерой движения материи является ее энергия. В механике - это механическая энергия, соответствующая механическому движению взаимодействующих тел. Различают два вида механической энергии - кинетическую и потенциальную.

Потенциальная энергия. Энергия, определяемая взаимным расположением взаимодействующих тел и зависящая только от координат и поля сил, называется потенциальной. Работа A_{12} , совершаемая консервативными силами при переводе система из одного состояния в другое, равна убыли потенциальной энергии в этих состояниях.

$$A_{12} = W_1 - W_2, \quad (1)$$

где W_1, W_2 - потенциальная энергия системы в состоянии 1-м и 2-м соответственно.

Конкретный вид потенциальной энергии зависит от характера силового поля. В поле силы тяжести потенциальная энергия тела массы m имеет вид:

$$W = m g h, \quad (2)$$

где g - ускорение свободного падения;

h - высота, отсчитанная от уровня, где потенциальная энергия $W = 0$.

Кинетическая энергия. Кинетическая энергия – это энергия, которой обладает тело (либо система тел) благодаря их движению. В случае, если тело движется поступательно со скоростью v и одновременно вращается вокруг оси, проходящей через центр масс, с угловой скоростью ω , то полная кинетическая энергия его движения равна:

$$T_k = \frac{mv^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2}, \quad (3)$$

где m - масса тела;

I - момент инерции.

При вращательном движении роль линейной скорости играет угловая скорость, а роль массы - момент инерции. Момент инерции I зависит не только от массы, но и от ее распределения относительно оси вращения. Значения момента инерции I для некоторых тел правильной геометрической формы (длинный стержень, диск, шар, цилиндр) приведены в учебниках по курсу общей физики (см. также лабораторную работу № Ф-1-07).

Закон сохранения энергии. Механическая энергия замкнутой системы тел остается постоянной. Если в замкнутой системе действуют консервативные силы, то энергия сохраняется. В таких системах при движении тела происходит превращение кинетической энергии в потенциальную и обратно, а полная энергия остается постоянной.

Консервативными называются силы, работа которых не зависит от формы пути, а зависит только от начального и конечного положения (работа по замкнутой траектории равна нулю). К консервативным силам относятся: гравитационные, упругие, кулоновские и др. Неконсервативными силами являются силы трения, сопротивления, неупругих деформаций.

Механическая энергия сохраняется и в незамкнутых системах, если внешние силы не совершают работу, так как мерой изменения энергии является совершенная работа.

Методика эксперимента

Проверка закона сохранения энергии выполняется на маятнике Максвелла. Маятник Максвелла - это диск, закрепленный на оси, (рис.1). Ось, в свою очередь, подвешена на двух нитях, закрепленных верхними концами на кронштейне. Диск движется поступательно вниз и одновременно вращается вокруг горизонтальной оси. Когда нити наматываются на ось, а затем раскручиваются маятник совершает поступательно-вращательное движение, т.е. поднимается и опускается.

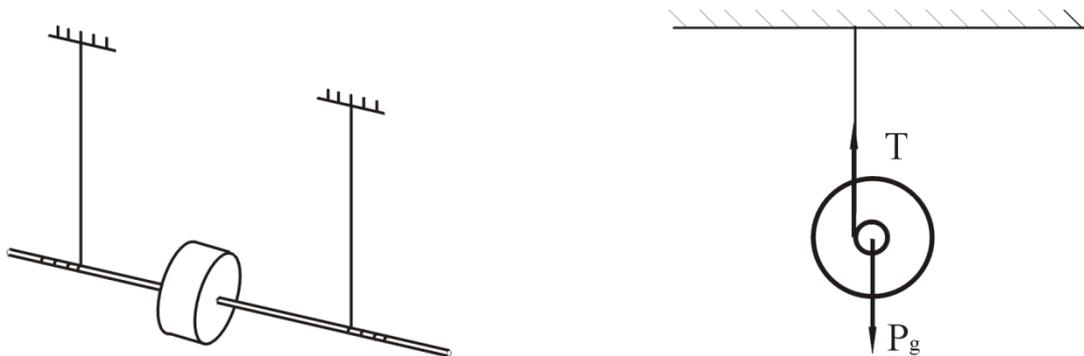


Рисунок1- общий вид маятника Максвелла: T - сила натяжения нити; P_g - сила тяжести

В процессе эксперимента выделим два основных состояния. В состоянии 1 маятник массой m находится на некоторой высоте h . Механическая энергия системы в этом состоянии равна только потенциальной энергии:

$$E_1 = W_1 = m g h . \quad (4)$$

Отпустим маятник. Под действием силы тяжести он начнет падать вниз (поступательное движение), силы натяжения нитей создают вращательный момент и приводят маятник во вращательное движение.

В состоянии 2 маятник, опустившийся с высоты h , движется поступательно со скоростью v , вращаясь при этом вокруг оси, проходящей через центр масс, с угловой скоростью ω . Следовательно, механическая энергия системы в состоянии 2 складывается из кинетических энергий поступательного и вращательного движения:

$$E_2 = \frac{mv^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2} \quad (5)$$

В выделенной системе (маятник в поле сил тяжести) должен выполняться закон сохранения энергии. Сила тяжести - консервативная сила. Сила натяжения нити является внешней силой, но она не совершает работы, т.к. точка приложения силы при малом повороте маятника остается на месте. Следовательно, для маятника выполняется закон сохранения энергии:

$$m g h = \frac{mv^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2} . \quad (6)$$

Скорость поступательного движения маятника связана с угловой скоростью соотношением:

$$v = \omega r, \quad (7)$$

где r - радиус оси маятника.

Тогда формула (6) примет вид:

$$2gh = v^2(1 + I/(mr^2)), \quad (8)$$

скорость поступательного движения маятника приобретает значение:

$$v = \sqrt{\frac{2gh}{1 + I/(mr^2)}}. \quad (9)$$

Для проверки закона сохранения энергии вычислим скорость другим независимым способом, используя известные кинематические соотношения. Так как движение маятника равноускоренное, то если за время падения t маятник прошел путь h , его ускорение определяется формулой:

$$a = 2h/t^2. \quad (10)$$

Отсюда получим скорость поступательного движения маятника в нижней точке:

$$v = a t = 2h/t. \quad (11)$$

Таким образом, если скорость, определенная по соотношению (9), равна скорости, представленной соотношением (11), то это подтверждает сохранение энергии для выделенной системы, так как формула (11) справедлива для равноускоренного движения, а формула (9) верна в случае выполнения закона сохранения энергии.

Скорость в формуле (9) зависит от момента инерции маятника, который можно изменять, устанавливая на диск различные кольца. Момент инерции маятника определяется как

$$I = I_0 + I_d + I_k, \quad (12)$$

где I_0 - момент инерции оси;

$I_d = m R_d^2/2$ - момент инерции диска;

$I_k = m R_k^2$ - момент инерции кольца;

R_d, R_k - радиусы диска и кольца.

Радиус кольца берется как среднее значение между внутренним и внешним радиусами. Так как радиус оси маятника значительно меньше радиуса диска, то моментом инерции оси можно пренебречь.

Выполнение работы

1. Измерить время падения маятника с одним из колец, указанных преподавателем.
2. Повторить измерения 5 - 10 раз.
3. Измерить высоту падения маятника.
4. Отметить высоту, на которую поднимется маятник сразу после падения.
5. Измерить штангенциркулем диаметр оси маятника, внутренний и внешний диаметр кольца.

Обработка результатов.

1. Вычислить среднее значение времени падения $\langle t \rangle$ и статистическую погрешность измерения Δt .
2. Рассчитать скорость v_1 по соотношению (11).
3. Вычислить погрешность измерения скорости Δv_1 по правилу вычисления погрешности для косвенных измерений.
4. Вычислить момент инерции маятника с кольцом. Массы диска, кольца нанесены на них.
5. Вычислить скорость маятника v_2 по соотношению (9).
6. Определить меру несовпадения $\delta = (v_1 - v_2)/v_1$ и сравнить с относительной погрешностью $\varepsilon_{v1} = \Delta v_1/v_1$.
7. Рассчитать среднюю высоту, на которую поднимается маятник после падения.
8. Рассчитать потери энергии в данной системе.
9. В выводе отметить, чем вызваны потери энергии в данной системе.

Контрольные вопросы

1. Какие существуют виды механической энергии? Дайте их определения.
2. Как определяется потенциальная энергия в поле различных сил?
3. Сформулируйте закон сохранения механической энергии системы и условия его выполнения в случае незамкнутой системы.
4. Как определяется кинетическая энергия поступательного и вращательного движения?
5. Какие силы называются консервативными? Почему в системе где действуют консервативные силы работает закон сохранения энергии?
6. Опишите превращение энергии для маятника Максвелла.
7. Что такое момент инерции тела? Чему равен момент инерция диска, кольца?
8. Как определяется скорость поступательного движения маятника Максвелла? Рассмотреть два случая.

Лабораторная работа № Ф-1-07

ОПРЕДЕЛЕНИЕ МОМЕНТА ИНЕРЦИИ ТЕЛ ПРИ ПОМОЩИ КРУТИЛЬНОГО МАЯТНИКА

Цель. Экспериментально определить моменты инерции тела относительно разных осей вращения. Построить тензор инерции исследуемого тела. Сравнить результат с расчетом.

Оборудование. Крутильный маятник, набор тел различной формы, секундомер, штангенциркуль.

Краткая теория

Момент импульса. Для описания динамики вращательного движения используется величина, именуемая моментом импульса. Моментом импульса материальной точки *относительно неподвижного начала* O называется величина, равная

$$\vec{L} = [\vec{r}; \vec{p}], \quad (1)$$

где $\vec{p} = m\vec{v}$ - импульс материальной точки;

\vec{r} - радиус-вектор, соединяющий начало O с материальной точкой (рис.1).

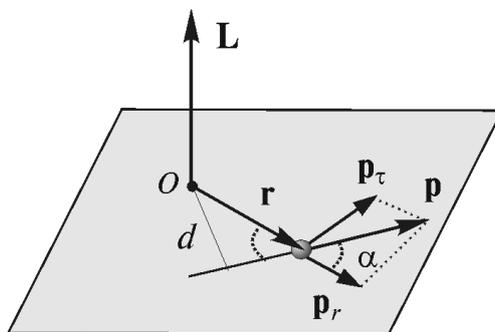


Рисунок 1- к определению направление момента импульса.

Вектор \vec{L} в соответствии с правилами векторного произведения направлен перпендикулярно векторам \vec{r} и \vec{p} , а его модуль равен

$$L = rp \sin \alpha = pd = rp_\tau, \quad (2)$$

где p_τ - перпендикулярная вектору \vec{r} компонента импульса;

d - плечо импульса, равное расстоянию от центра O до линии действия импульса.

Моментом импульса L_z относительно оси z называется проекция момента импульса \vec{L} относительно центра O , лежащего на оси на эту ось (рис. 2).

Учитывая выражение для векторного произведения через компоненты

$$\vec{L} = \begin{vmatrix} \vec{e}_r & \vec{e}_\tau & \vec{e}_z \\ R & 0 & r_z \\ p_r & p_\tau & p_z \end{vmatrix} \quad (3)$$

получим

$$L_z = R p_\tau, \quad (4)$$

где $\vec{e}_r, \vec{e}_\tau, \vec{e}_z$ – орты цилиндрической системы координат (см. вставку рис. 2);

R и r_z – радиальная и осевая компоненты радиуса-вектора \vec{r} ;

p_r, p_τ и p_z – радиальная, касательная и осевая компоненты импульса.

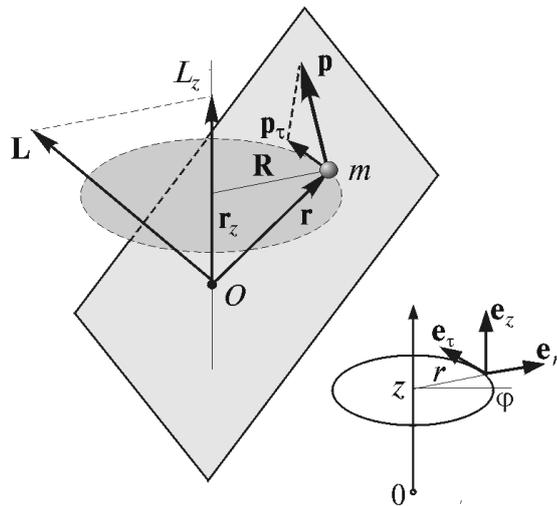


Рисунок 2 - к определению направления момента импульса вращающегося твердого тела.

Т.е. момент импульса относительно оси определяется касательной к окружности вращения, составляющей импульса и расстоянием от материальной точки до оси вращения O (осевым радиусом R) и не зависит от выбора положения центра O (составляющей радиуса r_z).

Для твердого тела, вращающегося относительно закрепленной оси AA' , момент импульса относительно оси для каждой i -й точки равен (см. рис. 2)

$$\Delta L_{Ai} = R_i \Delta m_i v_{\tau i} = \Delta m_i R_i^2 \cdot \omega. \quad (5)$$

После суммирования моментов импульса всех точек получаем

$$L_A = \sum \Delta L_{Ai} = \omega \sum \Delta m_i R_i^2 \quad (6)$$

Используя обозначение $I_A = \sum \Delta m_i R_i^2$, можно записать

$$L_A = I_A \omega. \quad (7)$$

Величина I_A называется моментом инерции тела относительно заданной оси.

Момент инерции. Момент инерции I_A зависит от массы тела и ее распределения относительно оси вращения и не зависит от движения тела. Он является мерой инертности тела при вращательном движении. Аналогично массе, он связывает количество движения при вращении с угловой скоростью. Момент инерции определяет также угловое ускорение тела ε при действующем на него моменте сил M относительно неподвижной оси: тело с большим моментом инерции будет иметь меньшее угловое ускорение при том же действующем моменте сил (основной закон динамики вращательного движения).

$$\vec{\varepsilon} = \frac{\vec{M}}{I_A} \quad (8)$$

Расчет момента инерции тел. Момент инерции тел правильной геометрической формы может быть вычислен теоретически. В формуле (6) элементарная масса Δm_i равна произведению плотности тела ρ_i в данной точке на соответствующий элементарный объем ΔV_i :

$$\Delta m_i = \rho_i \Delta V_i. \quad (9)$$

Следовательно, момент инерции можно представить в виде:

$$I = \sum_{i=1}^n \rho_i r_i^2 \Delta V_i \quad (10)$$

Для сплошного тела задача нахождения моментов инерции сводится к интегрированию:

$$I = \int_V r^2 dm = \int_V \rho r^2 dV, \quad (11)$$

причем величина ρ рассматривается как функция координат.

В качестве примера найдем момент инерции однородного диска радиуса R относительно оси, перпендикулярной к плоскости диска и проходящей через его центр (рис. 3).

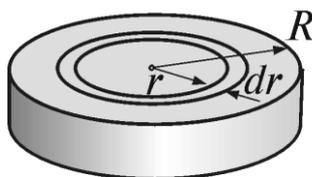


Рисунок 3- однородный диск.

Разобьем диск на кольцевые слои толщиной dr . Все точки одного слоя будут находиться на одинаковом расстоянии от оси, равно r . Объем такого слоя равен:

$$dV = 2\pi r \cdot dr \cdot b,$$

где b толщина диска.

Поскольку диск однороден, плотность ρ можно вынести за знак интеграла:

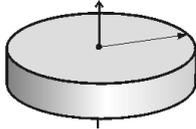
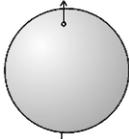
$$I = \rho \int_0^R r^2 dV = \rho \int_0^R r^2 2\pi b dr.$$

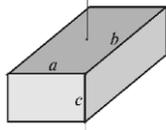
Интегрируя последнее выражение и учитывая, что масса диска равна $m = \pi R^2 \rho b$, получим

$$I = \frac{2\pi \rho b R^4}{4} = \frac{m R^2}{2}$$

Формулы для расчета моментов инерции некоторых тел правильной формы, массы m относительно осей, проходящих через центр масс, приведены в табл. 1.

Таблица 1. Моменты инерции некоторых тел

Форма тела	Ориентация оси	Формула
1. Однородный диск (цилиндр)		$I = mR^2/2$
2. Однородный шар		$I = 2/5 mR^2$

3. прямоугольный параллелепипед	Однородный	 $I = m(a^2 + b^2)/12$
---------------------------------------	------------	---

Тензор инерции. В примерах, приведенных выше, речь шла о моменте импульса относительно оси. Вектор момента импульса каждой материальной точки твердого тела не параллелен оси вращения (см. рис. 4), поэтому и для всего тела вектор \mathbf{L} , как правило, ориентирован под углом к оси вращения, которая, в свою очередь, может иметь произвольную ориентацию относительно осей координат (рис. 4).

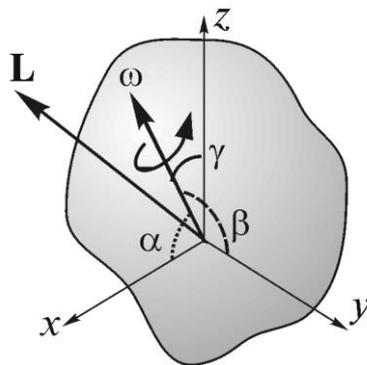


Рисунок 4 - ориентация вектора момента импульса относительно осей вращения.

Но и в этом случае вектор \vec{L} является линейной функцией вектора угловой скорости. Это означает, что *каждая* компонента вектора \vec{L} является линейной функцией *всех* трех компонент вектора $\vec{\omega}$:

$$L_x = I_{xx}\omega_x + I_{xy}\omega_y + I_{xz}\omega_z$$

$$L_y = I_{yx}\omega_x + I_{yy}\omega_y + I_{yz}\omega_z \tag{12}$$

$$L_z = I_{zx}\omega_x + I_{zy}\omega_y + I_{zz}\omega_z$$

Совокупность коэффициентов I_{mn} образуют *тензор инерции* (тензор 2 ранга).

$$I_{mn} = \begin{vmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{vmatrix} \quad (13)$$

где m и n - индексы, обозначающие оси x , y , и z .

Тензор инерции I_{mn} , характеризует инертные свойства твердого тела и устанавливает линейную связь между компонентами векторов \vec{L} и $\vec{\omega}$ для произвольной ориентации оси вращения.

Каждая компонента I_{mn} может быть вычислена следующим образом. Скорость любой частицы при вращении равна (см. рис. 2)

$$\vec{v}_i = [\vec{\omega}; \vec{r}_i]$$

Момент импульса частицы равен

$$\vec{L} = \Delta m_i [\vec{r}_i; \vec{v}_i] = \Delta m_i [\vec{r}_i; [\vec{\omega}; \vec{r}_i]]$$

Раскрывая двойное векторное произведение, получим

$$[\vec{r}_i; [\vec{\omega}; \vec{r}_i]] = \vec{\omega} \vec{r}_i^2 - \vec{r}_i (\vec{r}_i; \vec{\omega})$$

После суммирования получим для x -компоненты вектора \vec{L}

$$\begin{aligned} L_x &= \sum_i m_i \left[\omega_x (x_i^2 + y_i^2 + z_i^2) - x_i (x_i \omega_x + y_i \omega_y + z_i \omega_z) \right] = \\ &= \omega_x \sum_i m_i (y_i^2 + z_i^2) - \omega_y \sum_i m_i x_i y_i - \omega_z \sum_i m_i x_i z_i. \end{aligned}$$

Коэффициенты при ω_x , ω_y и ω_z являются соответствующими компонентами тензора инерции I_{xx} , I_{xy} и I_{xz} . Выражения для других компонент можно получить циклической заменой координат.

Как видно из формулы (12), при вращении тела вокруг *одной* из осей (например, x) коэффициент I_{xx} связывает угловую скорость ω_x с соответствующей проекцией вектора L_x , т.е. *диагональные компоненты тензора инерции имеют смысл моментов инерции для соответствующих осей*. Правда, при этом существуют и другие компоненты вектора \vec{L} .

Тензор инерции является симметричным, т.е. $I_{mn} = I_{nm}$, и поэтому имеет только 6 независимых компонент. При изменении ориентации осей

координат компоненты векторов \vec{L} и $\vec{\omega}$ изменяются, изменяются и компоненты тензора I_{mn} . В тензорном анализе доказывается, что для любого симметричного тензора существует такая ориентация осей (*главные оси*), что все недиагональные компоненты ($m \neq n$) обращаются в нуль.

$$I_{mn} = \begin{vmatrix} I_x & 0 & 0 \\ 0 & I_y & 0 \\ 0 & 0 & I_z \end{vmatrix} \quad (14)$$

Диагональные компоненты называются *главными моментами инерции* и часто обозначаются одним индексом $I_{xx} \equiv I_x$. Тогда:

$$\begin{aligned} L_x &= I_x \omega_x \\ L_y &= I_y \omega_y \\ L_z &= I_z \omega_z \end{aligned} \quad (15)$$

Для симметричного тела главные оси координат совпадают с осями симметрии тела. Из равенств (15) видно, что при вращении тела вокруг *одной* главной оси (оси симметрии тела) существует только *одноименная* компонента вектора \vec{L} , т.е. в этом случае векторы \vec{L} и $\vec{\omega}$ направлены вдоль одной оси. В общем же случае если величины I_x , I_y , и I_z не равны, то векторы \vec{L} и $\vec{\omega}$ неколлинеарны.

Главные моменты инерции I_m могут быть вычислены как *моменты инерции относительно трех главных осей* (см. табл. 1). Как вычислить момент инерции относительно *произвольной* оси вращения AA'? В динамике вращательного движения доказано, что кинетическая энергия вращающегося тела равна

$$K = \frac{1}{2}(\vec{L} \cdot \vec{\omega}) = \frac{1}{2}L_a \omega = \frac{1}{2}I_a \omega^2 \quad (16)$$

С другой стороны, скалярное произведение $(\vec{L} \cdot \vec{\omega})$ можно рассчитать через компоненты векторов в главных осях.

$$(\vec{L} \cdot \vec{\omega}) = L_x \omega_x + L_y \omega_y + L_z \omega_z = I_x \omega_x^2 + I_y \omega_y^2 + I_z \omega_z^2.$$

Учитывая формулу (16) и то, что

$$\omega_x = \omega \cos \alpha, \quad \omega_y = \omega \cos \beta, \quad \omega_z = \omega \cos \gamma,$$

получим формулу, позволяющую рассчитать момент инерции относительно произвольной оси вращения:

$$I_A = I_x \cos^2 \alpha + I_y \cos^2 \beta + I_z \cos^2 \gamma, \quad (17)$$

где $\cos \alpha$, $\cos \beta$ и $\cos \gamma$ определяют ориентацию оси вращения относительно осей координат (см. рис. 4).

Методика эксперимента

Если тело имеет сложную форму (маховое колесо, коленчатый вал, винт и т.д.), то теоретически определить его момент инерции трудно. В таких случаях момент инерции определяют опытным путем. В данной работе момент инерции изучаемого тела определяется методом крутильных колебаний. Для этого используется зависимость периода крутильных колебаний от момента инерции I .

Подвесим испытуемое твердое тело на упругой металлической проволоке (рис.5).

При закручивании нити на угол φ возникает момент сил упругости, пропорциональный, по закону Гука, углу закручивания и направленный в противоположную сторону:

$$M = -k\varphi, \quad (18)$$

где k - модуль кручения упругой нити.

На основании закона динамики для вращательного движения (8) сумма всех действующих моментов сил равна произведению моментов инерции системы на ее угловое ускорение:

$$I \frac{d^2 \varphi}{dt^2} = M. \quad (19)$$

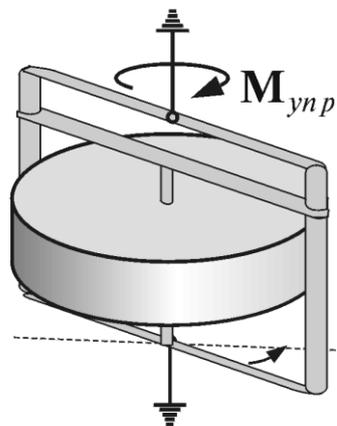


Рисунок 5 - крутильный маятник.

С учетом формулы (18), получим:

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{k}{I}\varphi = 0. \quad (20)$$

Уравнение (20) является дифференциальным уравнением гармонических колебаний крутильного маятника. Собственная частота колебаний системы ω_0 зависит от модуля кручения нити и момента инерции тела:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{\kappa}{I}} \quad (21)$$

Период крутильных колебаний маятника будет равен:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{k}}. \quad (22)$$

Качественно зависимость периода колебания от момента инерции можно понять, если вспомнить, что тело с большим моментом инерции при равном закручивании нити будет иметь меньшее угловое ускорение и, следовательно, позже достигнет положения равновесия.

В нашей установке момент инерции равен сумме момента инерции I_0 рамки и момента инерции тела I_A , закрепленного в рамке: $I=I_0+I_A$. Измерив период T колебаний маятника, можно было бы по формуле (22) вычислить момент инерции I_A тела. Однако момент инерции I_0 рамки и коэффициент кручения k упругой нити неизвестны. Для исключения этих неизвестных проводятся еще два независимых опыта по определению периодов колебаний для *пустой* рамки и для тела с *известным* моментом инерции (эталоны).

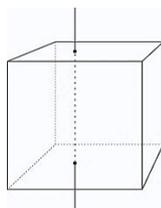
Для изучаемого тела

$$T_A = 2\pi\sqrt{\frac{I_0 + I_A}{k}} \quad (23)$$

Для эталона

$$T_{\text{Э}} = 2\pi\sqrt{\frac{I_0 + I_{\text{Э}}}{k}} \quad (24)$$

Для пустой рамки



Первые три измерения сделать относительно главных осей симметрии.

5. Определить период колебания тела относительно других, указанных преподавателем осей. Все данные занести в соответствующие таблицы.

Обработка результатов измерений.

1. Вычислить момент инерции $I_{Э}$ эталона, используя формулы табл. I.
2. Определить *главные моменты инерции* I_1 , I_2 , и I_3 тела относительно осей симметрии по формуле (28). Сравнить результаты с вычислением по формуле табл. 1.
3. Определить момент инерции I_A тела относительно других осей по формуле (28).
4. Показать на схеме ориентацию оси вращения исследуемого тела. При помощи чертежа вычислить $\cos\alpha$, $\cos\beta$ и $\cos\gamma$. Определить момент инерции этого же тела через главные моменты инерции I_i , (формула (17)).
5. Оценить погрешность эксперимента, т.е. найдите относительную погрешность ε по формуле:

$$\varepsilon = (I_{\text{эксп}} - I_{\text{теор}}) / I_{\text{эксп}}$$

Контрольные вопросы

1. Дайте определение момента инерции тела. От чего зависит момент инерции тела? Каков физический смысл момента инерции?
2. Запишите формулы для расчета момента инерции тел правильной формы относительно оси, проходящей через центр масс тела: цилиндра, тонкого стержня, шара, прямоугольного параллелепипеда.
3. Рассчитайте момент инерции однородного диска.
4. Что такое тензор инерции? Какой физический смысл имеют его компоненты?
5. Как определить момент инерции тела относительно заданной оси через компоненты тензора.
6. Каким образом определяется момент инерции тел в данной работе? Выведите рабочую формулу.

Лабораторная работа № Ф-1-8

ОПРЕДЕЛЕНИЕ УСКОРЕНИЯ СВОБОДНОГО ПАДЕНИЯ С ПОМОЩЬЮ ОБОРОТНОГО МАЯТНИКА

Цель. Изучить теорию физического маятника. Определить ускорение свободного падения.

Оборудование. Обратный маятник, секундомер.

Краткая теория

Радиус инерции. При описании вращательного движения удобно пользоваться понятием радиуса инерции ρ , который связан с моментом инерции тела соотношением

$$I = m\rho^2 = \sum_{i=1}^n \Delta m_i r_i^2 \quad (1)$$

$$\rho^2 = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^n \Delta m_i r_i^2 \quad (1')$$

Из равенства (1') видно, что радиус инерции имеет смысл среднеквадратичного расстояния от оси вращения до точки тела. Радиус инерции - это то усредненное расстояние, на котором нужно расположить все точки тела, чтобы получить тот же момент инерции. Каждая ось вращения имеет свой радиус инерции. Радиус инерции для тел правильной формы связан с размерами тел простыми соотношениями, эти данные представлены в табл. 1.

Таблица 1. Радиусы инерции тел различной формы.

Момент инерции	Радиус инерции	Тело
$I = \frac{1}{2} mR^2 = m\rho^2$	$\rho = \frac{1}{\sqrt{2}} R$	для сплошного цилиндра
$I = \frac{1}{12} ml^2 = m\rho^2$	$\rho = \frac{1}{\sqrt{3}} \left(\frac{l}{2} \right)$	для стержня (ось проходит через центр)
$I = \frac{2}{5} mR^2 = m\rho^2$	$\rho = \sqrt{\frac{2}{5}} R$	для шара

Физический маятник - это произвольное тело, вращающееся вокруг оси, не проходящей через его центр масс. Такое тело имеет положение устойчивого равновесия и способно совершать колебания. Рассмотрим динамику физического маятника (рис.1). Отклоним маятник от положения

равновесия на малый угол $\varphi \ll 1$. Сила тяжести создает возвращающий момент силы

$$M = - m g a \sin \varphi \approx - m g a \varphi,$$

где a - расстояние между центром масс C и точкой подвеса O .

В соответствии с законом динамики вращательного движения (теоремой моментов) его угловое ускорение ε равно отношению момента сил M к моменту инерции I :

$$\varepsilon = \frac{M}{I} = - \frac{m g a}{I} \cdot \varphi$$

С учетом того, что $\varepsilon = \ddot{\varphi}$, получим уравнение движения для φ

$$\ddot{\varphi} + \frac{m g a}{I} \cdot \varphi = 0 \quad (2)$$

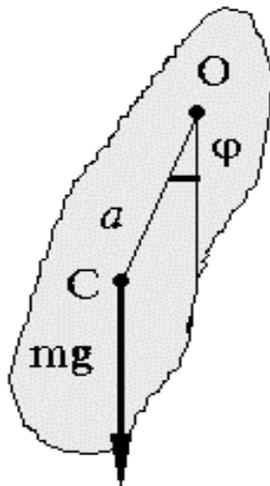


Рисунок 1 - физический маятник.

Мы получили дифференциальное уравнение гармонических колебаний (справедливое для малых углов) с частотой

$$\omega = \sqrt{\frac{m g a}{I}} \quad (3)$$

и периодом $T = 2\pi/\omega$.

Другой способ определения частоты состоит в следующем. Если в произвольных обобщенных координатах q кинетическая и потенциальная энергии могут быть представлены как квадратичные функции координаты и скорости

$$W_k = \frac{\alpha \dot{q}^2}{2}$$

$$W_p = \frac{\beta q^2}{2}$$

где α и β - коэффициенты, значения которых определяются выбором координат и зависят от устройства системы, то частота колебаний такой системы равна (без доказательства),

$$\omega = \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}$$

(Проверьте это для пружинного маятника.) Для физического маятника

$$W_k = \frac{I \dot{\varphi}^2}{2}$$

$$W_p = mgh = mga(1 - \cos \varphi) \approx \frac{mga\varphi^2}{2}$$

Отсюда также следует формула (3).

Приведенная длина. Для математического маятника (вспомнить определение!) $I=ml^2$ и $a=l$, следовательно

$$\omega = \sqrt{g/l} \tag{4}$$

Приведенной длиной физического маятника L называется длина математического маятника l, имеющего тот же период колебаний. Из уравнения (3) и (4) следует

$$L = \frac{I}{ma} \tag{5}$$

Момент инерции физического маятника по теореме Штейнера равен $I = I_0 + ma^2$ (6)

где I_0 - момент инерции относительно параллельной оси, проходящей через центр масс. Тогда

$$L = \frac{\rho^2}{a} + a, \tag{7}$$

где ρ - радиус инерции для оси, проходящей через центр масс ($I_0 = m\rho^2$).

Из формулы (7) видно, что понятие радиуса инерции сильно упрощает формулы, делая ясной структуру их размерности. График зависимости $L(a)$ для $\rho = 1$ приведен на рис. 2.

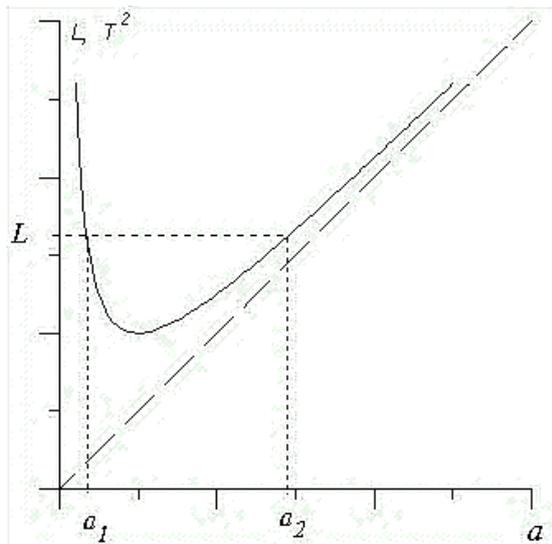


Рисунок 2 - график зависимости $L(a)$ для $\rho = 1$.

При малых a основную роль играет первый член в равенстве (7) (гипербола), а при больших - второй (линейная зависимость). Легко проверить, что приведенная длина L (а следовательно, и период $T^2 \sim L$) имеет минимум при $a = \rho$. Это значит, что при подвесе маятника на оси, проходящей на расстоянии ρ от центра масс, он будет иметь минимально возможный период.

Для других приведенных длин $L > L_{min}$. возможны два расстояния - a_1 и a_2 , дающих эту приведенную длину (и период).

Теорема Гюйгенса. Из формулы (7) следует, что тело, подвешенное на оси, происходящей через любую точку окружности радиусом a , имеет один и тот же период (рис.3). Эта окружность является геометрическим местом точек постоянного периода. Причем для каждого значения $L > L_{min}$ возможны два значения a : a_1 и a_2 . Это следует из того, что уравнение (7) является квадратным, относительно a .

$$a^2 - La + \rho^2 = 0 \quad (7')$$

Из свойств корней квадратного уравнения следует:

$$a_1 \cdot a_2 = \rho^2 \quad (8)$$

$$a_1 + a_2 = L \quad (8')$$

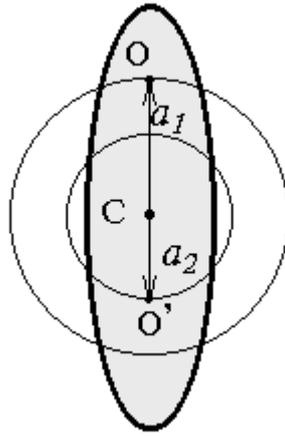


Рисунок 3 - к теореме Гюйгенса.

Это означает что:

- 1) если одна окружность имеет радиус меньше ρ , то другая - больше (напомним, что совпадение корней дает минимальный период колебаний);
- 2) параллельный перенос оси подвеса по прямой, проходящей через центр масс на расстояние L , не изменяет период колебаний физического маятника.

Второе утверждение составляет содержание теоремы Гюйгенса.

Действительно, как следует из (8'), новая ось попадет на вторую окружность постоянного периода.

Обратное утверждение, строго говоря, неверно: две оси подвеса, дающие одинаковый период, не обязаны находиться на расстоянии L , они могут находиться на одной окружности, т.е. на расстояниях $2a_1$ и $2a_2$ друг от друга (см. рис. 3).

Точка O' на второй окружности называется центром качания для точки подвеса O . И наоборот, точка O будет центром качания для точки подвеса O' .

Методика эксперимента

В наших экспериментах используется обратный маятник с подвижными частями (рис. 4). На стержне 1 закреплены две опорные призмы 2 и 2', на каждой из которых может качаться маятник. Один из грузов 3 закрепляется неподвижно, другой в ходе эксперимента перемещается. Одна из призм (любая) принимается за начало координат, и положение подвижного груза 4 отсчитывается от этой призмы независимо от того, на какой из призм подвешен маятник.

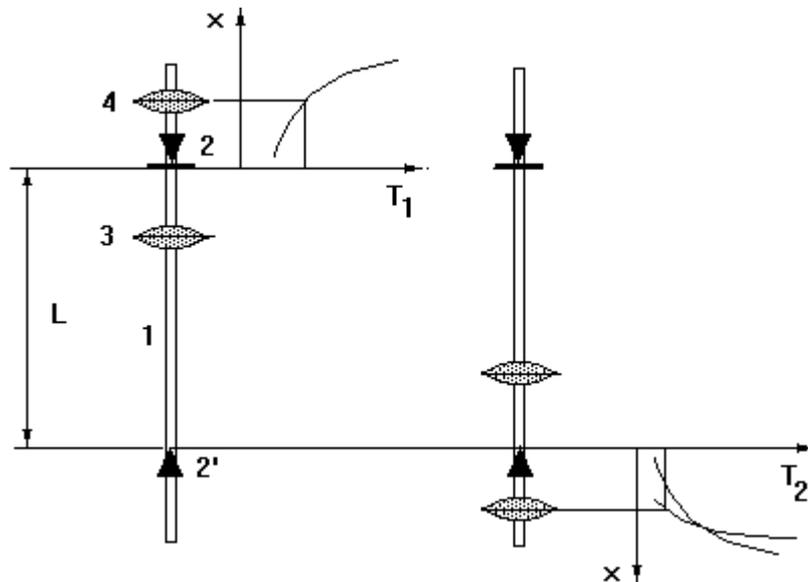


Рисунок 4 - оборотный маятник.

При изменении положения грузов изменяются периоды колебаний T_1 и T_2 на каждой призме. Если при каком-то положении груза периоды совпадают, то расстояние между призмами L будет равно приведенной длине маятника, т. е. в наших экспериментах перемещением груза 4 конфигурация маятника “подгоняется” под уже заданную приведенную длину L , а не определяется приведенная длина заданного маятника.

Зная приведенную длину маятника найденной конфигурации и измерив соответствующий период колебаний, можно определить ускорение свободного падения по формуле (4).

Примечание. Напоминаем, что совпадение периодов колебаний для двух осей не обязательно дает расстояние L . Однако если один груз перемещается между призмами, а другой расположен снаружи, то при $T_1 = T_2$ обе оси не могут лежать на одной окружности, так как в этом случае центр масс маятника должен находиться между призмами.

Выполнение работы

1. Закрепить неподвижный груз и призмы оборотного маятника в положениях, указанных преподавателем.

2. Измерить расстояние между призмами L .

3. Подвесить маятник на одну из опор, выбранную за начало отсчета, и перемещая подвижный груз вдоль стержня с интервалом 1 см, измерить периоды колебаний T_1 . Расчеты показывают, что при перемещении груза, находящегося между призмами, период колебаний изменяется мало, поэтому перемещать следует тот груз, который находится вблизи конца стержня. Результаты занести в таблицу измерений:

Таблица.

$x, \text{ см}$	
$t_1, \text{ с}$	
$t_2, \text{ с}$	
$T_1, \text{ с}$	
$T_2, \text{ с}$	

4. Подвесив маятник на другую призму, измерить периоды колебаний T_2 для тех же положений подвижного груза.

5. По экспериментальным данным построить на масштабно-координатной бумаге на одних координатных осях два графика зависимости $T_1 = f(x)$ и $T_2 = f(x)$ для двух точек подвеса.

6. Определить точку пересечения графиков (координату x_0) при котором периоды совпадают, а также значение периода колебаний ($T_1 = T_2 = T_0$) (период колебаний записать с четырьмя значащими цифрами).

7. Уточнить значение приведенной длины маятника. Т.к. приведенная длина маятника необязательно будет совпадать с величиной L , то значение величины x_0 , определенное из графика, позволит уточнить значение приведенной длины обратного маятника:

$$L_{\text{пр}} = L = +x_0$$

8. Определить ускорение свободного падения из формулы:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{L_{\text{пр}}}{g}}$$

9. Вывести формулу для погрешности измерения ускорения свободного падения косвенным методом. Оценив предварительно погрешности измерения $L_{\text{пр}}$ и T_0 , вычислить погрешность определения величины g .

Примечания:

1. Для измерения каждого периода измерять время не менее 10 полных колебаний.

2. Отклонение маятника должно быть достаточно мало, не более 5° .

3. Уточнить при помощи графика положение груза и период обращенного маятника: выполнить п. 3-5 в окрестности (по обе стороны) точки пересечения графиков, определяя периоды по 50 полным колебаниям.

4. Установив длину математического маятника, равной приведенной длине, измерить его период колебаний. Сравнить с периодом физического маятника.

Контрольные вопросы

1. Что такое физический маятник, математический маятник? Выведите формулу периода колебаний физического маятника.
2. Дайте определение приведенной длины физического маятника.
3. Дайте определение радиуса инерции.
4. Сформулируйте и докажите теорему Гюйгенса.
5. Запишите закон всемирного тяготения. Дайте определение физической величины – ускорение свободного падения. От каких параметров зависит ускорение свободного падения?
6. Как определяется ускорение свободного падения в данной работе? Вывести рабочую формулу.

Лабораторная работа № Ф-1-09

ОПРЕДЕЛЕНИЕ УПРУГИХ МОДУЛЕЙ ТВЕРДЫХ ТЕЛ.

Цель. Определение модуля Юнга для различных материалов по изгибу балки и методом колебаний.

Оборудование. Лабораторный комплекс ЛКМ-2, набор металлических стержней, набор грузов, фотодатчик.

Краткая теория

Деформации и напряжения в твердых телах. Все твердые тела под действием сил деформируются, т.е. изменяют объем и форму. Различаются деформации однородные и неоднородные. Однородные деформации это деформации растяжения (сжатия), сдвига относятся деформации; к неоднородным - изгиба, кручения.

Если деформации исчезают после прекращения действия приложенных сил, то они называются упругими. Деформации, частично сохраняющиеся после снятия нагрузки, называются пластическими. Разделение деформаций на упругие и пластические условно. Строго говоря, после любой нагрузки, сохраняются остаточные деформации. Но если они пренебрежимо малы, то деформации считаются упругими.

Если вызывающая деформацию сила не слишком велика, то выполняется закон Гука: относительная деформация в пределах упругости пропорционально вызывающему ее усилию. Каждый вид деформации характеризуется своим коэффициентом, или модулем (величиной, обратной коэффициенту). Так как видов деформации может быть много, то столько же будет коэффициентов и модулей. Однако в теории упругости показано, что различные коэффициенты (модули) связаны между собой определенными соотношениями. При этом число соотношений на два меньше, чем число коэффициентов. Это значит, что любое тело всегда имеет два независимых коэффициента, характеризующих его упругие свойства. Физически это объясняется следующим образом. Всякая деформация представляет собой смещение молекул тела, а всякое движение может быть сведено к поступательному и вращательному движению. Так как эти движения независимы, то и деформации, связанные с ними, например, удлинение и кручение, будут независимы. Все остальные деформации можно будет свести к этим двум.

Для упругих тел между действующими силами и вызванными ими деформациями существует однозначная зависимость (при пластических деформациях такой однозначности нет).

Рассмотрим стержень длиной l и поперечным сечением S , один конец которого жестко закреплен, а второй конец подвергается действию некоторой внешней силы $F_{внеш}$. Под действием внешней силы длина стержня увеличивается на величину Δl . Величинами, характеризующими степень деформации, являются абсолютная деформация Δl и относительная деформация ε , равная соотношению абсолютной деформации Δl к первоначальной длине стержня l

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l} \quad (1)$$

Относительная деформация не зависит от размеров деформируемого объема и в случае неоднородной деформации определяется в бесконечно малой окрестности *каждой* точки, т.е. является функцией координат.

Наличие деформации стержня приводит к изменению расстояния между частицами, а это, в свою очередь, приводит к появлению упругих сил в стержне. Упругая сила будет препятствовать дальнейшей деформации стержня. Радиус действия сил между частицами твердого тела составляет несколько межатомных расстояний, поэтому для объемов, включающих очень большое число атомов, силы можно считать приложенными к поверхности, разделяющей две части тела.

Проведем мысленно в стержне сечение ab (рис.1). Это сечение разделит стержень на правую и левую части. Левая часть стержня будет действовать на правую часть с некоторой силой $F'_{упр}$, а правая часть - на левую с силой $F''_{упр}$.

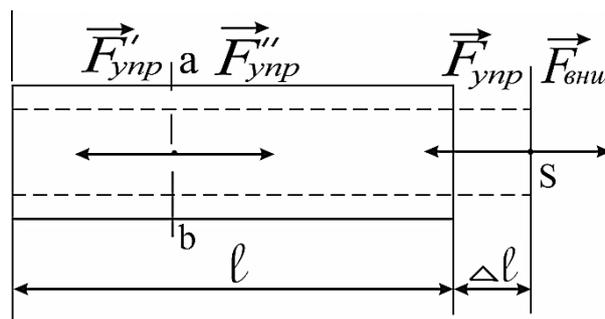


Рисунок - деформация растяжения

Эти внутренние силы будут равны между собой по третьему закону Ньютона, а из условия равновесия правой части стержня следует их равенство внешней силе:

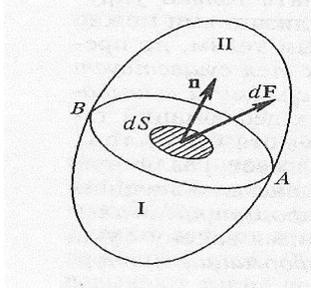
$$F'_{упр} = F''_{упр} = F_{внеш} \quad (2)$$

Величина упругой силы, приходящаяся на единицу площади сечения, называется *внутренним напряжением* σ :

$$\sigma = F_{\text{упр}}/S = F_{\text{внеш}}/S. \quad (3)$$

В СИ напряжение измеряется в Н/м².

Если выбрать произвольное сечение dS в твердом теле, то направление силы dF и нормали n к площадке в общем случае не совпадает, поэтому вектор напряжения можно разложить на две составляющие: тангенциальную и нормальную (по отношению к нормали).



$$\vec{\sigma} = \vec{\sigma}_n + \vec{\sigma}_\tau$$

Рисунок 2 – сечение деформируемого тела

При деформации растяжения величина силы, приходящейся на единицу площади поперечного сечения, называется механическим напряжением (4). Для деформации сжатия – механическим давлением (5).

$$T = \frac{F}{S} \quad (4)$$

$$P = \frac{F}{S} \quad (5)$$

Так как при деформации растяжения размеры увеличиваются, а при сжатии уменьшаются механическое напряжение и механическое давление имеют различные знаки.

$$P = -T$$

Механические напряжения пропорциональны относительной деформации:

$$T = E \cdot \frac{\Delta l}{l_0}$$

С учетом соотношения (1) получим выражение, которое является законом Гука для упругих деформаций.

$$T = E \cdot \varepsilon \quad (6)$$

где E - коэффициент пропорциональности, называемый *модулем Юнга*. Модуль Юнга численно равен нормальному напряжению, которое возникло бы в теле при его относительном удлинении, равном единице, если бы деформация оставалась упругой. При этом длина тела увеличилась бы в два раза.

При деформации растяжения (сжатия) изменяются не только продольные размеры тела, но и поперечные.

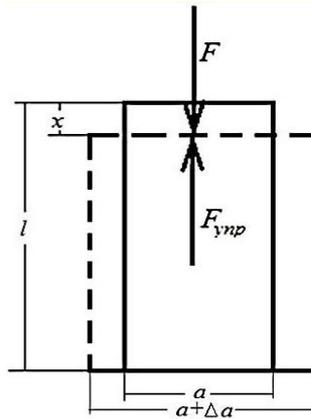


Рисунок 3 - изменение поперечных размеров при деформации сжатия.

Обозначим отношение относительного изменения поперечных размеров к относительному удлинению через μ .

$$-\frac{\Delta a}{a} \div \frac{\Delta l}{l_0} = \mu \quad (7)$$

Относительная деформация поперечных размеров:

$$-\frac{\Delta a}{a} = \varepsilon_n$$

Исходя из выше приведенных соотношений, можно записать соотношение между относительной деформацией и относительном изменением поперечных размеров

$$\varepsilon_n = \mu \cdot \varepsilon \quad (8)$$

Коэффициент пропорциональности μ называется модулем Пуассона

Объем деформированного элемента стержня

$$V = \pi \cdot a^2 \cdot l$$

Прологарифмируем, а затем продифференцируем данное соотношение.

$$\ln V = \ln \pi + 2 \ln a + \ln l$$

$$\frac{dV}{V} = 0 + 2 \frac{da}{a} + \frac{dl}{l}$$

В результате получим:

$$2 \frac{\Delta a}{a} = \mu \frac{\Delta l}{l}$$

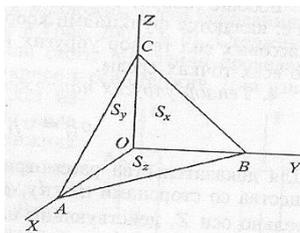
Откуда следует, что модуль Пуассона может принимать значение

$$\mu \leq \frac{1}{2} \quad (9)$$

Модули Юнга и Пуассона полностью характеризуют деформации растяжения и сжатия.

Если деформируется твердое тело, то напряжения возникают во всех направлениях. В координатах XYZ нормальное напряжение имеет три компоненты:

$$\sigma_n = \sigma_{nx} + \sigma_{ny} + \sigma_{nz} \dots \dots \dots (10)$$



Тогда на каждую грань будут действовать силы упругости (знак минус означает, что нормаль всегда направлена наружу).

$$\vec{F}_x = \vec{\sigma}_{-x} \cdot S_x, \quad \vec{F}_y = \vec{\sigma}_{-y} \cdot S_y, \quad \vec{F}_z = \vec{\sigma}_{-z} \cdot S_z.$$

Каждое слагаемое в соотношении (10) в координатах XYZ имеет три проекции, поэтому в общем случае внутренние напряжения можно представить в виде тензора напряжений.

$$\begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix} \quad (11)$$

Компоненты тензора, стоящие в главной диагонали, имеющие одинаковые индексы соответствуют главным осям тензора напряжений. Тензор напряжений является симметричным $\sigma_{ij} = \sigma_{ji} \quad (i,j=x,y,z)$.

Зависимость нормального напряжения σ от относительного удлинения ε изображена на рисунке 2. При малых деформациях (от 0 до ε_n) выполняется закон Гука; это практически линейный участок $0a$. Максимальное напряжение σ_n , соответствующее этому участку, называется пределом пропорциональности. Предел упругости σ_y - это максимальное напряжение, при котором еще сохраняются упругие свойства тела. На участке ab деформация нелинейная, но еще упругая (обычно этот участок очень малый: σ_y больше σ_n на доли процента.) При напряжениях, больших σ_y , деформация становится пластической: в теле после снятия нагрузки наблюдается остаточная деформация ε_0 . При напряжениях σ_T удлинение нарастает практически без увеличения нагрузки. Это область текучести

материала (участок cd). На участке de происходит некоторое упрочение образца. После достижения максимального значения σ_d – предела прочности – напряжение резко уменьшается, и образец разрушается (точка f на графике).

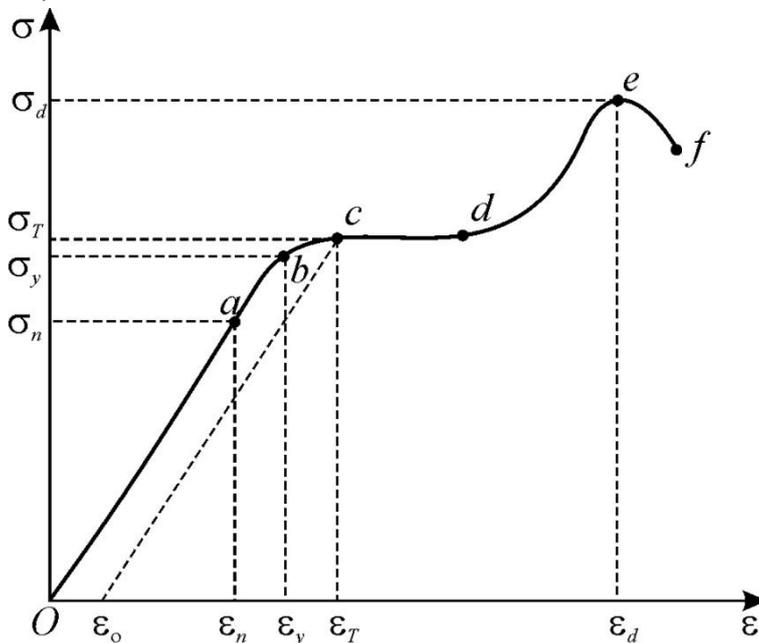


Рисунок 4 - зависимость нормального напряжения σ от относительного удлинения ε

Качественные вопросы

1. Почему упругие силы считают поверхностными силами? Что это значит?
2. В каком случае для описания упругих взаимодействий используется вектор напряжений? Тензор напряжений?
3. Какой смысл имеют компоненты тензора напряжений? Какие из них описывают нормальные напряжения, а какие- тангенциальные?
4. Что такое главные оси тензора напряжений? Какие напряжения существуют в главных осях?
5. Создают ли деформацию в некотором направлении поперечные к этому направлению напряжения? Запишите соответствующую формулу.
6. Какие напряжения возникают при изгибе балки?
7. Какие напряжения возникают при растяжении пружины, скручивании стержня?
8. Почему коэффициент Пуассона μ не может быть больше 0,5?
9. Почему при одностороннем растяжении среды деформации меньше, чем при свободном растяжении стержня?

Методика эксперимента

Общий вид установки, основными частями которой являются лабораторный стол и измерительная система, показан на рисунке 5.

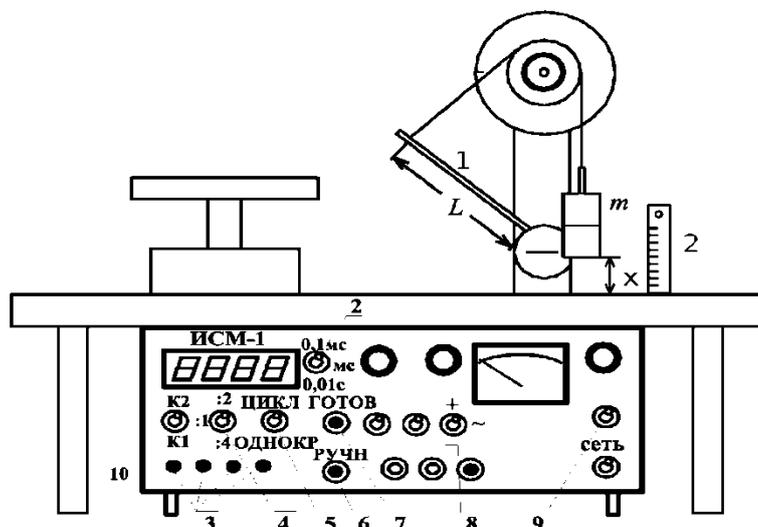


Рисунок 5 - лабораторный комплекс ЛКМ-2.

Одним из методов нахождения модуля Юнга служит метод измерения жесткости балки при изгибе.

Исследуемая балка (стержень, проволока) 3 закрепляется с помощью кронштейна 1 на колонне стойки 2 (рисунок 6). За проточку вблизи свободного конца балки закрепляется нить 4, перекинутая через шкив 5 стойки. К концу нити подвешивается груз 6. Балку необходимо сориентировать перпендикулярно нити (погрешность может составлять не больше 5°). Прижимаем нить к шкале шкива 5, при этом устанавливаем указатель шкива на нулевое деление шкалы. По свечению индикатора ИСМ убеждаемся в том, что щель диска шкива стойки находится в зазоре фотодатчика.

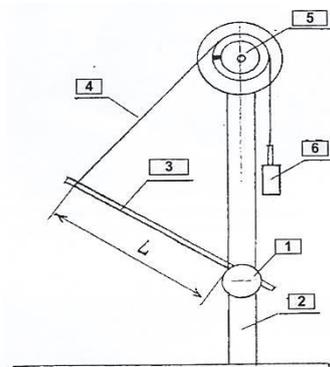


Рисунок 6 – элементы экспериментальной установки

В пределах упругой деформации удлинение проволоки прямо пропорционально растягивающей силе, первоначальной длине l и обратно пропорционально площади ее поперечного сечения S :

$$\Delta l = k \frac{F}{S} l, \quad (12)$$

где Δl - удлинение, k – постоянная величина (коэффициент упругости), зависящая от материала проволоки. Обычно в формулу вводят не k , а величину, обратную ей: $E = 1/k$. Величина E - модуль упругости (модуль Юнга). Подставляя в уравнение (1) вместо k величину E , получим

$$\Delta l = \frac{Fl}{ES},$$

откуда

$$E = \frac{F}{S} : \frac{\Delta l}{l} \quad (13)$$

и величина $P = F/S$ носит название усилия и характеризует величину упругих сил, развивающихся в деформируемом материале (напряжение). Внутри твердого тела возникает сопротивление такому усилию, которое есть внутренне напряжение σ .

Для определения модуля Юнга необходимо измерить удлинение, а так как оно обычно очень мало, то нужны особые предосторожности и большая тщательность в производстве отсчетов.

Коэффициент жесткости k численно равен величине упругой силы, которая возникает при единичной абсолютной деформации, которая зависит как от свойств, так и от размеров тела.

$$k = S \cdot E / l \quad (14)$$

Жесткость балки определяется ее размерами, формой, способом закрепления и модулем упругости E (модулем Юнга) ее материала. Для круглого стержня диаметром d и длиной L , жесткость будет рассчитываться как:

$$k = E \cdot 3\pi d^4 / 64L^3, \quad (15)$$

Для балки прямоугольного сечения шириной a и толщиной b :

$$k = E \cdot ab^3 / 4L^3, \quad (16)$$

Вместе с этим жесткость балки может быть оценена по изменению смещения груза на величину Δx , при изменении массы груза Δm по соотношению:

$$k = g \cdot \Delta m / \Delta x \quad (17)$$

Другим надежным методом установления жесткости балки служит метод измерения периода ее колебания T_1 с грузом m_1 , в соотношении с периодом колебанием T_2 с грузом m_2 .

$$k = 4\pi^2 \cdot (m_2 - m_1) / (T_2^2 - T_1^2) \quad (18)$$

Внутреннее напряжение σ вычисляется по формуле:

$$\sigma = \frac{4mg}{\pi D^2}, \quad (19)$$

где D - диаметр проволоки, m - масса груза, растягивающего проволоку.

Таким образом, модуль Юнга E имеет смысл коэффициента пропорциональности между напряжением σ и относительной деформацией ε .

Выполнение работы

1. Подготовить таблицы:

Таблица 1.

№ п/п	Образец 1	Образец 2	Образец 3	Образец 4
Материал	Сталь	Латунь	Латунь	Алюминий (Д16)
Размеры сечения, мм	d =	d =	d =	a = b =
Длина, мм	L =	L =	L =	L =
Масса груза m_1 , г				
Масса груза m_2 , г				
Положение груза x_1 , мм				
Положение груза x_2 , мм				
k , Н·м				
E , 10^9 Н/м ²				

Таблица 2.

№ п/п	Образец 1	Образец 2	Образец 3	Образец 4
Материал	Сталь	Латунь	Латунь	Алюминий (Д16)
Размеры сечения, мм	d =	d =	d =	a = b =
Длина, мм	L =	L =	L =	L =
Масса груза m_1 , г				
Масса груза m_2 , г				
Период колебаний T_1 , мс				
Период колебаний T_2 , мс				
k, Н·м				
E, 10^9 Н/м ²				

2. Установите стрелку, нить и груз в соответствии с методикой эксперимента. Зафиксируйте наблюдаемое без нагрузки деление. Добавьте дополнительный груз и измерьте расстояние, пройденное двумя грузами. Результаты запишите в таблицу 1.

3. Установите стрелку, нить и груз в соответствии с методикой эксперимента. Слегка нажав на балку, отпустите ее и измерьте период T_1 ее колебаний с грузом массой m_1 . Измените массу груза на m_2 и измерьте период T_2 колебаний с грузом. Повторите опыт 2 раза, запишите среднее значение периода в таблицу 2.

4. Аналогично повторите опыты для стержней и балок из различных материалов (сталь, латунь, дюралюминий). Результаты запишите в таблицу отчета.

Обработка результатов

1. Рассчитать значение жесткости измеренной методом 1 по формуле (17) и методом 2 по формуле (18). Занести данные в таблицу 1 и 2.
2. Рассчитать значения модуля Юнга для балки и стержня, исходя из выражений (15) и (16). Занести данные в таблицу 1 и 2.
3. Определить значения внутреннего напряжения по формуле (19).
4. Найти соотношение между внутренним напряжением и относительным удлинением согласно закону Гука (формула (6)).
5. Начертите оси графика зависимости σ от ε для метода 1 и метода 2, выберите масштаб и нанесите экспериментальные точки (σ_i, ε_i).
6. Проведите через начало координат прямую так, чтобы по обе стороны от прямой располагалось одинаковое количество точек.
7. Определить угловой коэффициент зависимости σ (ε), который определяет значение модуля Юнга.
8. Сравнить значение модуля Юнга для метода 1 и метода 2. Сделать выводы о точности методов определения модуля Юнга, сравнив полученные значения с табличными.

Контрольные вопросы

1. Дайте определение абсолютного и относительного удлинения стержня.
2. Какая деформация называется упругой?
3. Дайте определение механического напряжения. Как определить напряжение в стержне в нашем случае, если растягивающая сила равна F ?
4. Сформулируйте закон Гука. Начертите график зависимости относительного удлинения от растягивающего напряжения, наблюдаемой в экспериментах. Укажите на графике область упругой деформации.
5. Дайте определение модуля Юнга. В каких единицах он измеряется? Запишите значение модулей Юнга для некоторых материалов.
6. Как определяется жесткость проволоки?
7. Какие упругие модули (кроме модуля Юнга) характеризуют механическую прочность материала.
8. Как определяется модуль Юнга в данной работе? Вывести рабочую формулу.

Литература

1. Сивухин, Д.В. Общий курс физики [Текст] : в 5 т.: учеб. пособие: рек. Мин. обр. РФ Т. 1 : Механика/ Д. В. Сивухин. - 5-е изд., испр. - М. : Физматлит, - 2010. - 560 с. - ISBN 978-5-9221-0715-0.
2. Стрелков, С.П. Механика [Электронный ресурс] : учебное пособие. — Электрон. дан. — СПб. : Лань, 2005. — 560 с. — Режим доступа: http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_id=589 — Загл. с экрана.
3. Иродов И. Е. Задачи по общей физике: учеб. пособие: рек. УМО/ И. Е. Иродов СПб.: Лань, 2006, 2007. - 416 с.
4. Физический практикум. Механика: учеб.-метод. пособие: рекДВ РУМ/ АмГУ, ИФФ; сост. А.А. Согр [и др.]– Благовещенск: Изд-во Амур.гос. ун-та, 2007.- 134 с.
5. Хайкин С. Э. Физические основы механики: учебн. пособие. / С. Э Хайкин. – 2-е изд., испр. и доп.. М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1971. -752 с.
6. Фейнман Р. Фейнмановские лекции по физике: пер. с англ./ Р.Фейнман, Р.Лейтон, М. Сэндс ; под ред. Я.А.Смородинского. 3-е изд..- М.: Мир, 1976. -496 с.
7. Сборник качественных вопросов и задач по общей физике: учеб. пособие Е. И. Бабаджан [и др.]. М.: Наука. 1990. - 398 с.
8. Матвеев А. Н. Механика и теория относительности: учеб./ А. Н. Матвеев. - 4-е изд., стер., -М.: Лань, 2009. - 325с.
9. Яворский Б.М. Справочник по физике для инженеров и студентов вузов/ Б. М. Яворский, А. А. Детлаф, А. К. Лебедев. -8-е изд., перераб. и испр.. -М.: ОНИКС: Мир и Образование, 2007.-1055 с
10. Савельев И.В. Курс физики [Текст] : в 5 т.: учеб. пособие: рек. Мин. обр. РФ Т. 1 : Механика. Молекулярная физика. /И.В.Савельев .– М.: Изд-во: Лань. – 2007. ISBN: 978-5-8114-0685-2
11. Грабовский, Р.И. Курс физики: учеб. пособие. / Р.И. Гробовский.- 12-е изд., стер.- СПб.: Лань, 2012.- 608 с.- (Учебники для вузов. Специальная литература) – (ЭБС Лань).
12. **Физика** [Электронный ресурс]: сб. метод. рекомендаций по изучению дисциплины/ АмГУ, ФМиИ; сост. И. В. Верхотурова, О. В. Зотова, О. А. Агапцова, В. Ф. Ульянычева, И. Б. Копылова, О. В. Козачкова. - Благовещенск: Изд-во Амур. гос. ун-та, 2017. - 55 с
Режим доступа:
http://irbis.amursu.ru/DigitalLibrary/AmurSU_Edition/7694.pdf

Копылова Ирина Борисовна,

доцент кафедры физики АмГУ, канд. физ.-мат. наук

Нещименко Виталий Владимирович,

доцент кафедры физики АмГУ, док. физ.-мат. наук

Верхотурова Ирина Владимировна,

доцент кафедры физики АмГУ, канд. физ.-мат. наук

Зотова Оксана Васильевна,

доцент кафедры физики АмГУ, канд. физ.-мат. наук

Агапьятова Ольга Александровна,

доцент кафедры физики АмГУ, канд. физ.-мат. наук

Ульянычева Вера Федоровна,

доцент кафедры физики АмГУ, канд. физ.-мат. наук

Козачкова Ольга Викторовна,

доцент кафедры физики АмГУ, канд.пед. наук

Лабораторный практикум по общей физике. Часть 1: Механика