Министерство науки и высшего образования Российской Федерации

Амурский государственный университет

Вариационные методы

Учебно-методическое пособие

Благовещенск

Издательство АмГУ

2020

УДК 517.97 + 519.6

Рекомендовано
учебно-методическим советом университета

Рецензент:

Павельчук А.В., заместитель директора Общеобразовательного лицея ФГБОУ ВО «АмГУ», старший научный сотрудник лаборатории математического моделирования сложных физических систем, канд. физ.-мат. наук

Максимова, Н.Н.

Вариационные методы. Учебно-методическое пособие / Н.Н. Максимова. – Благовещенск: Изд-во АмГУ, 2020. – 84 с.

Учебно-методическое пособие содержит теоретические сведения и примеры задач по курсу «Вариационные методы». В первой главе даются основные понятия вариационного исчисления, постановка задачи вариационного исчисления и примеры вариационных задач. Во второй главе рассмотрены простейшие задачи вариационного исчисления (задачи с закрепленными границами) и методы их решения. В третьей главе представлены вариационные задачи с подвижными границами. В четвертой главе описаны численные методы решения вариационных задач. Все задачи подкреплены примерами. Учебный материал позволяет получить теоретические знания и выработать практические навыки решения задач вариационного исчисления.

Учебно-методическое пособие предназначено для студентов, обучающихся по специальности 24.05.01 – «Проектирование, производство и эксплуатация ракет и ракетно-космических комплексов» (в рамках изучения дисциплины «Вариационные методы»), а также будет полезно для студентов, обучающихся по направлениям 01.03.02 – «Прикладная математика и информатика» (в рамках изучения дисциплины «Методы оптимизации») и 03.03.02 – «Физика» (в рамках изучения дисциплины «Дифференциальные и интегральные уравнения, вариационное исчисление»). Пособие может быть полезно студентам всех форм и ступеней обучения. Для более глубокого изучения методов математического моделирования рекомендован весьма обширный список литературы.

ВВЕДЕНИЕ

Вариационные принципы сыграли важную роль в развитии различных областей естествознания. Наиболее ясно это видно на примере механики, как классической, так и квантовой, а также термодинамики. Широко известно, что задачи механики частиц столь же хорошо можно выразить в вариационной форме, как и с помощью уравнений движения Ньютона. Хотя нетрудно заметить соответствие между этими двумя способами описания, ясное понимание поведения сложных физических систем нередко легче достигается с помощью энергетического подхода (метод Гамильтона), чем при использовании ньютоновских уравнений движения. К этому преимуществу вариационных методов следует добавить, что они весьма удобны для построения приближенного решения задачи. Кроме того, вариационные принципы не зависят от выбора системы координат. Все эти преимущества побуждают исследователей использовать при изучении механики частиц оба способа описания, дополняющих друг друга.

Вариационное описание некоторого физического процесса предполагает, что некоторый интеграл принимает стационарное (обычно максимальное или минимальное) значение при подходящем выборе неизвестной функции, входящей в подынтегральное выражение. В инженерных исследованиях часто возникает задача определения оптимального режима или оптимальных условий, и тогда совершенно естественно математически формулировать эту задачу именно в вариационной форме.

Многие экономические и проектные исследования непосредственно сводятся к вариационным задачам. Вариационное исчисление представляет собой также подходящий аппарат для термодинамических расчетов, когда состояние системы определяется максимумом или минимумом некоторой термодинамической функции (например, свободная энергия системы в равновесном состоянии минимальна при постоянных объеме и температуре).

Большой интерес к различным экстремальным задачам возник еще с глубокой древности, поскольку с давних пор люди искали «наилучший» среди всех возможных способ решения стоящих перед ними задач. ***Вариационное исчисление*** – это раздел математики, в котором из неизвестных функций, входящих в подынтегральное выражение некоторого интеграла, выбирается такая функция, при которой этот интеграл достигает своего максимального или минимального значения. Такого рода задачи, которые называют ***вариационными***, встречаются на разных стадиях научно-технических исследований. Так, например, Ньютон занимался поисками формы поверхности тела вращения, испытывающего наименьшее сопротивление при движении в жидкости.

Вариационная формулировка большинства физических задач удобна при нахождении приближенных решений. Сущность многих из вариационных методов состоит в формулировке рассматриваемой задачи математической физики в вариационной форме как задачи об отыскании функции, реализующей минимум (или, в общем случае, экстремум) некоторого функционала, и в последующем нахождении приближений к этой функции.

Пособие состоит из введения, четырех глав и библиографического списка. В первой главе даются основные понятия вариационного исчисления, постановка задачи вариационного исчисления и примеры вариационных задач. Во второй главе рассмотрены простейшие задачи вариационного исчисления (задачи с закрепленными границами) и методы их решения. В третьей главе представлены вариационные задачи с подвижными границами. В четвертой главе описаны численные методы решения вариационных задач. Все задачи подкреплены примерами. Окончание примера обозначено символом ■. В конце

Учебно-методическое пособие предназначено для студентов, обучающихся по специальности 24.05.01 – «Проектирование, производство и эксплуатация ракет и ракетно-космических комплексов» (в рамках изучения дисциплины «Вариационные методы»), а также будет полезно для студентов, обучающихся по направлениям 01.03.02 – «Прикладная математика и информатика» (в рамках изучения дисциплины «Методы оптимизации») и 03.03.02 – «Физика» (в рамках изучения дисциплины «Дифференциальные и интегральные уравнения, вариационное исчисление»). Пособие может быть полезно студентам всех форм и ступеней обучения. Для более глубокого изучения методов вариационного исчисления рекомендован весьма обширный список литературы.

ГЛАВА 1. Основные понятия

1.1. Понятие интегрального функционала и определения

Как известно, переменная величина y является ***функцией*** независимой переменной x, если каждому значению x соответствует определённое значение y.

Переменная величина называется ***функционалом***, зависящим от функции $x(t)$ и обозначается $I[x(t)]$, если каждой функции $x(t)$ из заданного класса функций M соответствует определённое числовое значение I. Аналогично определяются и функционалы, зависящие от нескольких функций ($I[x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)]$), и функционалы, зависящие от функций нескольких независимых переменных ($I[x(t_1, t_2, \ldots, t_k)]$). Совокупность M функций, на которых определён функционал, называется ***классом допустимых функций***.

Понятие функционала является прямым и естественным обобщением понятия функции и содержит его как частный случай.

Интегральным функционалом называется интеграл, под знаком которого содержится некоторая функция. Примерами интегральных функционалов могут служить следующие выражения:

$$I[x(t)] = \int_{t_0}^{T} f(t, x(t), x'(t))dt,$$

$$I[x(t)] = \int_{t_0}^{T} f(t, x(t), x'(t), \ldots, x^{(n)}(t))dt,$$

$$I[x(t), y(t)] = \int_{t_0}^{T} f(t, x(t), y(t), x'_t(t), y'_t(t))\, dt \text{ и др.}$$

Подынтегральная функция называется ***интегрантом***.

Каждой кривой $x(t)$ из заданного класса функций M соответствует вполне определенное действительное значение интегрального функционала $I[x(t)]$.

Пример 1.1. Найти значения функционала $I[x(t)] = \int_0^1 x(t)dt$ на следующих кривых, образующих класс M: $x_1(t) = t$, $x_2(t) = t^2$, $x_3(t) = -(t-1)^2 + 1$ (рис 1.1).

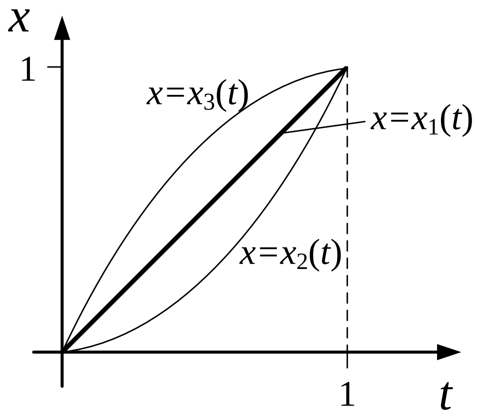


Рисунок 1.1 – Геометрическая иллюстрация к примеру 1.1

Заметим, что все кривые проходят через две точки (0;0), (1,1), те удовлетворяют граничным условиям $x(0)=0$, $x(1)=1$. Найдём значения функционала, соответствующие каждой кривой из класса M:

$$I[x_1(t)]=\int_0^1 t dt=\left.\frac{t^2}{2}\right|_0^1=\frac{1}{2},$$

$$I[x_2(t)]=\int_0^1 t^2 dt=\left.\frac{t^3}{3}\right|_0^1=\frac{1}{3},$$

$$I[x_3(t)]=\int_0^1 \left(-(t-1)^2+1\right)dt=\left.\left(-\frac{(t-1)^3}{3}+t\right)\right|_0^1=\frac{2}{3}.$$

В данном примере функционал имеет простой физический смысл – площадь под кривой $x(t)$. Каждой кривой из класса M поставлено в соответствие число, равное площади. Очевидно, может быть сформулирована задача о нахождении такой кривой из класса M, площадь под которой была бы минимальна (максимальна). ■ $x=x^*(t)$

Функционал $I[x(t)]$ называется ***непрерывным***, если малому приращению функции y соответствует малое приращение функционала.

Предметом рассмотрения будут пространства C^0 и C^1. Пространство $C^0[t_0, T]$ состоит из непрерывных функций $x(t)$, определенных на отрезке $[t_0, T]$. Норма в этом пространстве вводится следующим образом: $\|x\|_0 = \max\limits_{t\in[t_0,T]} |x(t)|$.

ε-окрестностью нулевого порядка кривой $x^*(t) \in C^0[t_0, T]$ называется совокупность кривых $x(t) \in C^0[t_0, T]$, такая, что

$$\left\|x - x^*\right\|_0 = \max_{t\in[t_0,T]} \left|x(t) - x^*(t)\right| < \varepsilon, \ \ \varepsilon > 0 - const. \qquad (1.1)$$

Это означает, что расстояние от кривой $x^*(t)$ до кривых $x(t)$ мало, т.е. графики кривых $x(t)$ целиком лежат внутри полосы шириной 2ε, окружающей график функции $x^*(t)$ (рис. 1.2). В данном случае можно считать близкими кривые, близкие по ординатам.

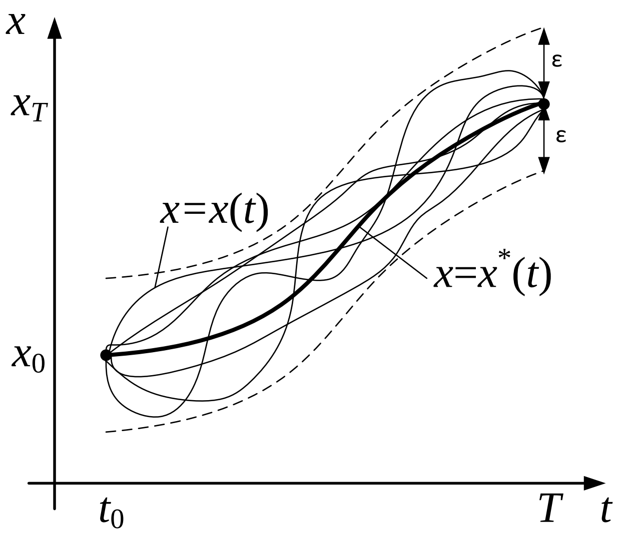


Рисунок 1.2 – Геометрическая иллюстрация ε-окрестности нулевого порядка

Пространство $C^1[t_0, T]$ состоит из непрерывных функций $x(t)$, определенных на отрезке $[t_0, T]$ и имеющих на данном отрезке непрерывную производную. Норма в этом пространстве вводится следующим образом: $\|x\|_1 = \max\limits_{t\in[t_0,T]} |x(t)| + \max\limits_{t\in[t_0,T]} |x'(t)|$.

ε-окрестностью первого порядка кривой $x^*(t) \in C^1[t_0, T]$ называется совокупность кривых $x(t) \in C^1[t_0, T]$, такая, что

$$\left\| x - x^* \right\|_1 = \max_{t \in [t_0, T]} \left| x(t) - x^*(t) \right| + \max_{t \in [t_0, T]} \left| x'(x) - x^{*'}(x) \right| < \varepsilon, \ \ \varepsilon > 0 - const. \qquad (1.2)$$

Это означает, что у кривой $x^*(t)$ и кривых $x(t)$ близки не только ординаты, но и значения производных. При этом следует отметить, что кривая, принадлежащая ε-окрестности первого порядка, принадлежит и ε-окрестности нулевого порядка (рис. 1.3).

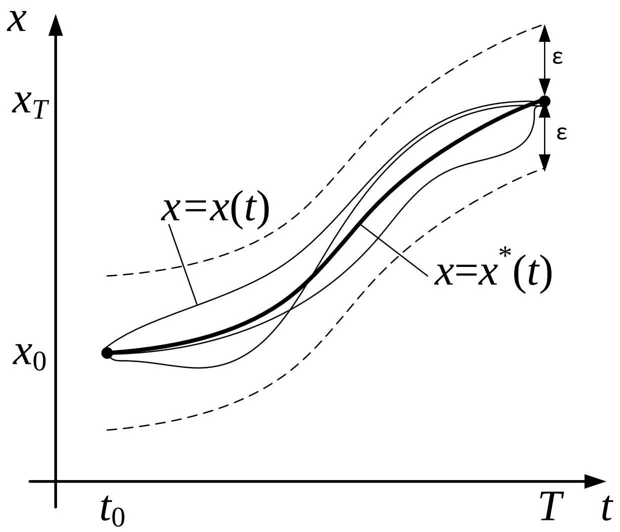


Рисунок 1.3 – Геометрическая иллюстрация ε-окрестности первого порядка

Пример 1.2. Найти расстояния $\left\| x - x^* \right\|_0$, $\left\| x - x^* \right\|_1$ между кривыми $x(t) = t^2$ и $x^*(t) = t^3$ в пространствах $C^0[0,1]$ и $C^1[0,1]$.

Найдём расстояние в пространстве $C^0[0,1]$: $\left\| x - x^* \right\|_0 = \max\limits_{t \in [0,1]} \left| t^2 - t^3 \right|$.

Из необходимого условия экстремума (равенства нулю первой производной) получаем: $\left(t^2 - t^3\right)' = 2t - 3t^2 = 0$, откуда $t = 0$ и $t = \dfrac{2}{3}$. Вторая производная $\left(t^2 - t^3\right)'' = 2 - 6t$ в точке $t = \dfrac{2}{3}$ отрицательна, поэтому в ней достигается локальный максимум. На концах промежутка [0, 1] функция $\left| t^2 - t^3 \right|$ обращается в нуль. Следовательно, в точке $t=\frac{2}{3}$ – глобальный максимум и можно подсчитать значение расстояния в этой точке, равное $\left\|t^2-t^3\right\|_0=\frac{4}{27}$.

Найдём расстояние в пространстве $C^1[0,1]$:

$\left\|x-x^*\right\|_1=\max\limits_{t\in[0,1]}\left|t^2-t^3\right|+\max\limits_{t\in[0,1]}\left|2t-3t^2\right|$.

Так как максимум первого слагаемого уже известен, то исследуем второе слагаемое Необходимое условие экстремума $\left(2t-3t^2\right)'=2-6t$ дает $t=\frac{1}{3}$. Так как вторая производная $\left(2t-3t^2\right)''=-6$ отрицательна, то в точке $t=\frac{1}{3}$ – локальный максимум Значения функции $\left|2t-3t^2\right|$ на границе равны 0 и 1, а значение в точке $t=\frac{1}{3}$ равно $\frac{1}{3}$. Поэтому максимум функции $\left|2t-3t^2\right|$ достигается в точке x=1 и равен 1. Отсюда $\left\|t^2-t^3\right\|_1=\frac{4}{27}+1=\frac{31}{27}$. ■

1.2. Постановка задачи вариационного исчисления

Задачей вариационного исчисления называется задача нахождения экстремума интегрального функционала $I[x(t)]$.

Говорят, что функционал $I[x(t)]$, определенный на некотором классе M функций, достигает на кривой $x^*(t)$ ***глобального минимума*** **(*максимума*)**, если

$I[x^*(t)]\le I[x(t)] \qquad (I[x^*(t)]\ge I[x(t)])\,\forall x(t)\in M$.

Понятие локального минимума (максимума) связано с исследованием поведения функционала на близких кривых.

Говорят, что функционал $I[x(t)]$ достигает на кривой $x^*(t)$ ***сильного минимума*** **(*максимума*)**, если $I[x^*(t)]\le I[x(t)]$ ($I[x^*(t)]\ge I[x(t)]$) в ε-окрестности нулевого порядка кривой $x^*(t)$.

Говорят, что функционал $I[x(t)]$ достигает на кривой $x^*(t)$ ***слабого минимума*** (***максимума***), если $I[x^*(t)] \le I[x(t)]$ ($I[x^*(t)] \ge I[x(t)]$) в ε-окрестности первого порядка кривой $x^*(t)$.

Локальные минимумы и максимумы функционала называют его ***локальными экстремумами***.

Рассмотрим примеры классических задач вариационного исчисления.

Пример 1.3. На плоскости (t, x) заданы две точки (t_0, x_0) и (T, x_T). Требуется соединить эти две точки гладкой кривой, имеющей наименьшую длину (рис. 1.4).

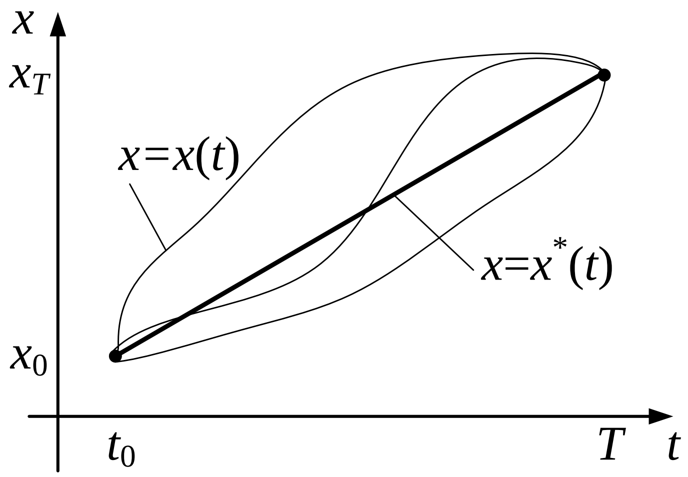


Рисунок 1.4 – Геометрическая иллюстрация к примеру 1.3

Длина кривой, соединяющей две заданные точки, находится по формуле

$$I\left[x(t)\right] = \int_{t_0}^{T} \sqrt{1 + x'^2(t)}\, dt .$$

Таким образом, решение задачи сводится к определению такой непрерывной функции $x^*(t)$, имеющей на отрезке $\left[t_0, T\right]$ непрерывную производную и удовлетворяющей заданным граничным условиям $x(t_0) = x_0$, $x(T) = x_T$, на которой интеграл $I\left[x(t)\right]$ примет минимальное значение. Интеграл зависит от функции $x(t)$ и представляет собой функционал Очевидно, решением является прямая $x^*(t)$, соединяющая две заданные точки. ■

Пример 1.4. Задача Дидоны – исторически первая задача вариационного исчисления. Связана с древней легендой об основании города Карфагена. Дидона – сестра царя финикийского города Тира – переселилась на южное побережье Средиземного моря, где попросила у местного племени участок земли, который можно охватить шкурой быка. Местные жители предоставили шкуру, которую Дидона разрезала на узкие ремни и связала их. Получившимся канатом охватила территорию у побережья. Возникает вопрос о том, как можно захватить максимальную площадь геометрической фигуры при фиксированной длине её границы (части границы).

Задача сводится к нахождению экстремума функционала

$$I[x(t)] = \int_{t_0}^{T} x(t)dt$$

с граничными условиями $x(t_0) = 0$ и $x(T) = 0$ при фиксированном параметре (длине)

$$\int_{t_0}^{T} \sqrt{1 + x'^2(t)}dt = l,$$

где $(t_0, 0)$ и $(T,\ 0)$ – точки закрепления каната. Решением является дуга окружности, если концы нельзя двигать по побережью, и полуокружность в противном случае (рис. 1.5).

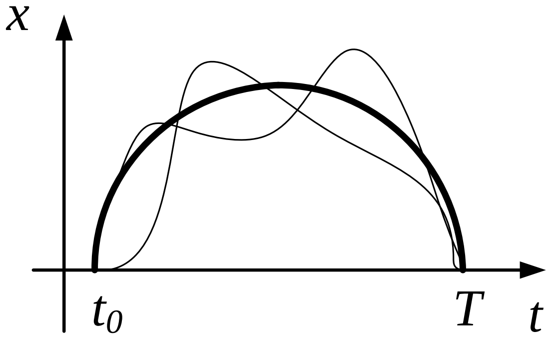


Рисунок 1.5 – Геометрическая иллюстрация к задаче Дидоны ■

Пример 1.5 (задача о брахистохроне). Среди всех кривых, соединяющих две данные точки плоскости – $A(0, 0)$ и $B(x_1, y_1)$, найти ту, двигаясь по которой под действием силы тяжести, материальная точка $M(x, y)$ попадёт из начальной точки в конечную за кратчайшее время.

Кривая, вдоль которой точка быстрее всего скатывается из начальной точки в конечную, называется ***брахистохроной*** (рис. 1.6).

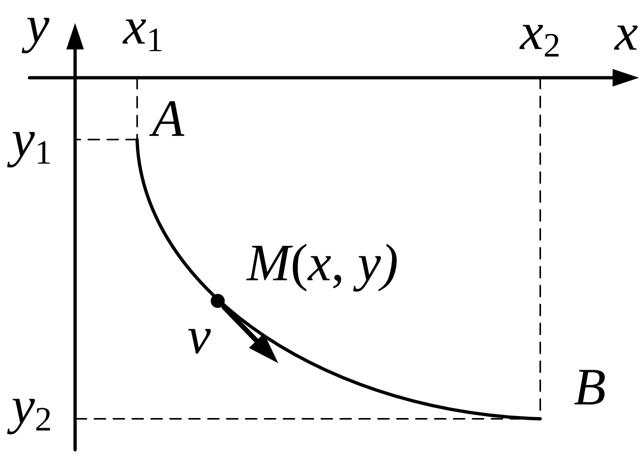


Рисунок 1.6 – Геометрическая иллюстрация к задаче о брахистохроне

Очевидно, что скорость материальной точки, определяется формулой $v = \dfrac{dS}{dt}$, где S – путь, пройденный точкой. Для кривой, записанной в декартовых координатах, длина дифференциала дуги, как известно, равна $dS = \sqrt{1 + y'^2(t)}dx$. Поэтому элементарное время скатывания вычисляется по формуле $dt = \dfrac{dS}{v} = \dfrac{\sqrt{1 + x'^2}dx}{v}$.

Полагая, что материальная точка движется без трения и сопротивления, на основании закона сохранения энергии можно записать $\dfrac{mv^2}{2} = mgy$, где m – масса тела, g – ускорение свободного падения, y – ордината. Отсюда следует $v = \sqrt{2gy}$.

Поэтому элементарное время скатывания будет равно

$$dt = \frac{\sqrt{1+y'^2}\,dx}{v} = \frac{\sqrt{1+y'^2}\,dx}{\sqrt{2gy}} = \frac{1}{\sqrt{2g}}\sqrt{\frac{1+y'^2}{y}}dx,$$

а полное время скатывания выразится интегралом

$$T[y(x)] = \frac{1}{\sqrt{2g}}\int_{x_1}^{x_2}\sqrt{\frac{1+y'^2(x)}{y(x)}}dx.$$

Таким образом, задача отыскания линии наискорейшего ската сводится к вариационной задаче отыскания функции, доставляющей минимум функционалу $T[y(x)]$ и удовлетворяющей условиям $y(x_1) = y_1$, $y(x_2) = y_2$.

Известно, что линией наискорейшего ската (брахистохроной) является циклоида, определяемая в параметрической форме соотношениями:

$$\begin{cases} x(t) = \dfrac{C_1}{2}(2t - \sin 2t), \\ y(t) = \dfrac{C_1}{2}(1 - \cos 2t). \end{cases}$$

Постоянная C_1 определяется из условия прохождения циклоиды через точку $B(x_1, y_1)$, а параметр $C_1/2$ определяет радиус катящегося круга. ■

Пример 1.6. Пластинка из прозрачного вещества в форме клина $K = \{(t,x): t_0 \le t \le t_1,\ 0 \le x \le \varphi(t)\}$ ($\varphi(t) > 0$ при $t \in [t_0, t_1)$, $\varphi(t_1) = 0$) (рис. 1.7) имеет показатель преломления $\pi(t)$. Найти кратчайшую траекторию светового луча, исходящего из точки (t_0, 0) и приходящего на сторону $x = \varphi(t)$ клина.

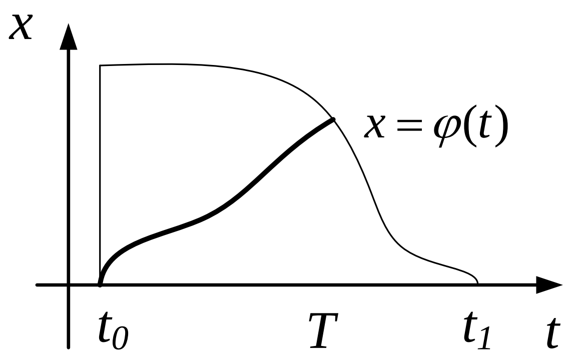


Рисунок 1.7 – Геометрическая иллюстрация к примеру 1.6

Обозначим через $x(t)$ траекторию светового луча. Согласно принципу Ферма в этой задаче необходимо найти экстремум функционала $I[x(t)] = \int_{t_0}^{T} \pi(x) \cdot \sqrt{1 + x'^2(t)}dt$ на кривых, левый конец которых удовлетворяет условию $x(t_0) = 0$, а правый – лежит на кривой $x = \varphi(t)$. ■

Пример 1.7 (задача о наименьшей площади поверхности вращения). Среди всех плоских гладких кривых, соединяющих точки $A(x_0, y_0)$ и $B(x_1, y_1)$ (считаем, что $y_0 \geq 0$ и $y_1 \geq 0$), найти ту, которая при вращении вокруг оси абсцисс образует поверхность наименьшей площади (рис. 1.8).

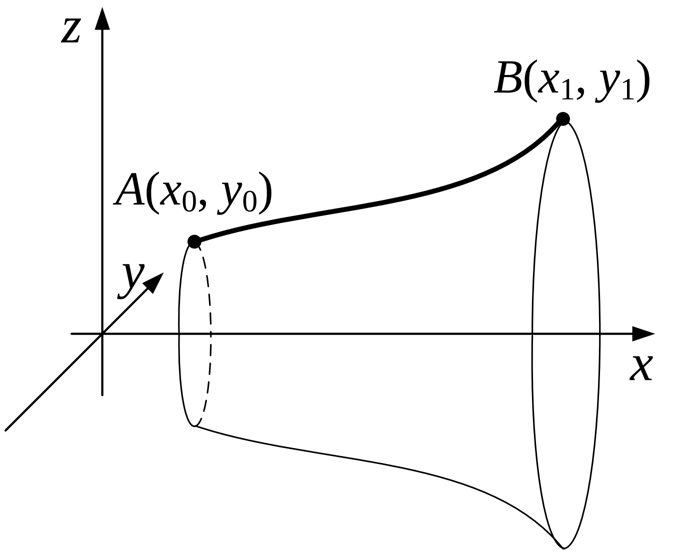


Рисунок 1.8 – Геометрическая иллюстрация к задаче о наименьшей площади поверхности вращения

Как известно, площадь поверхности вращения вычисляется по формуле

$$S[y(x)] = 2\pi \int_{x_0}^{x_1} y\sqrt{1 + y'^2}dx.$$

Таким образом, задача сводится к задаче отыскания функции, доставляющей минимум функционалу $S[y(x)]$ и удовлетворяющей условиям $y(x_0) = y_0$, $y(x_1) = y_1$.

Решением данной задачи является семейство ***цепных линий***, определяемых уравнением

$$y(x) = C \cdot ch\frac{x - C_2}{C}.$$

Произвольные постоянные C и C_2 находятся из граничных условий. При этом в зависимости от положения точек и могут существовать одно, два или не существовать ни одного решения.

Именно форму цепной линии принимает канат (цепь), закреплённый в точках A и B, и свободно провисающий под действием силы тяжести. Поверхность, образованная вращением цепной линии относительно горизонтальной оси, называется ***катеноидом***. Форму катеноида принимает мыльная плёнка, «натянутая» на два проволочных круга, плоскости которых перпендикулярны линии, соединяющей их центры. ■

Пример 1.8 (задача о геодезических линиях). Среди всех плоских гладких кривых, лежащих на заданной поверхности $F(x, y, z) = 0$ и соединяющих точки $A(x_0, y_0, z_0)$ и $B(x_1, y_1, z_1)$ (считаем, что $x_0 < x_1$) данной поверхности, найти ту, которая будет иметь наименьшую длину (рис. 1.9).

Такие линии называются ***геодезическими***. Так, например, для сферы геодезической является часть дуги окружности большого радиуса.

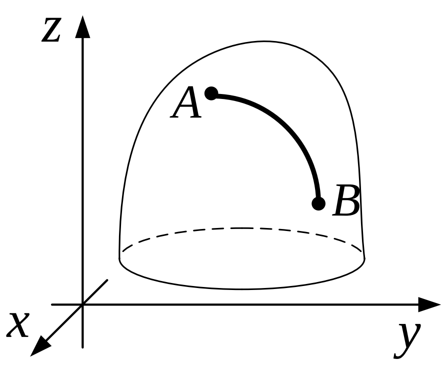


Рисунок 1.9 – Геометрическая иллюстрация к задаче о геодезических линиях

Путь уравнение кривой задается в параметрической форме:

$$\begin{cases} y = y(x), \\ z = z(x), \\ x_0 \le x \le x_1. \end{cases}$$

В этом случае длина кривой вычисляется по формуле

$$L[y(x), z(x)] = \int\limits_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + y'^2(x) + z'^2(x)}\,dx.$$

Таким образом, задача сводится к задаче отыскания функций $y = y(x), z = z(x)$, доставляющих минимум функционалу $L[y(x), z(x)]$ и удовлетворяющих условиям $F(x, y(x), z(x)) = 0$ (условие принадлежности заданной поверхности) и $y(x_0) = y_0$, $y(x_1) = y_1$, $z(x_0) = z_0$, $z(x_1) = z_1$ (условия прохождения через указанные точки). ■

1.3. Понятие вариации функционала. Необходимые условия экстремума

Кривые $x(t)$, на которых сравнивают значения функционала, называют ***допустимыми кривыми*** или ***кривыми сравнения***.

Обозначим через $x^*(t)$ допустимую кривую (под допустимостью понимается принадлежность тому или иному функциональному пространству), на которой функционал достигает экстремума, а через $x(t)$ произвольную допустимую кривую. Разность $\delta x(t) = x(t) - x^*(t)$ называется ***вариацией*** кривой $x^*(t)$.

Вариация $\delta x(t)$ есть функция аргумента t и принадлежит тому же функциональному пространству, что и функция $x(t)$. Используя вариацию, можно представить любую допустимую кривую $x(t)$ в виде

$$x(t) = x^*(t) + \delta x(t). \tag{1.3}$$

В вариационном исчислении используется другая запись для обозначения любой допустимой кривой

$$x(t) = x^*(t) + \alpha\,\delta x(t), \tag{1.4}$$

где $\delta x(t)$ – вариация функции, α – числовой параметр.

Приращением функционала ΔI называется разность

$$\Delta I = I[x(t)] - I[x^*(t)] = I[x(t) + \alpha\,\delta x^*(t)] - I[x^*(t)]. \tag{1.5}$$

Первой вариацией функционала называют выражение

$$\delta I = \delta I[x^*(t), \delta x(t)] = \lim_{\alpha\to 0}\frac{I[x^*(t) + \alpha\,\delta x(t)] - I[x^*(t)]}{\alpha} = \frac{d}{d\alpha} I[x^*(t) + \alpha\,\delta x(t)]\Big|_{\alpha=0}. \tag{1.6}$$

Второй вариацией называют выражение

$$\delta^2 I = \delta^2 I[x^*(t), \delta x(t)] = \frac{d^2}{d\alpha^2} I[x^*(t) + \alpha\,\delta x(t)]\Big|_{\alpha=0}. \tag{1.7}$$

Пример 1.9. Определить первую вариацию функционала $I[x(t)] = \int_0^1 \left(12tx(t) + x'^2(t)\right)dt$, где кривые $x(t)$ удовлетворяют граничным условиям $x(0) = 0$, $x(1) = 1$.

Запишем выражение для первой вариации применительно к данному функционалу:

$$\delta I = \frac{d}{d\alpha} I[x^*(t) + \alpha\,\delta x(t)]\Big|_{\alpha=0} =$$

$$= \frac{d}{d\alpha}\int_0^1 \left(12t(x^*(t) + \alpha\,\delta x(t)) + (x^*(t) + \alpha\,\delta x(t))'^2\right)dt\Big|_{\alpha=0} =$$

$$= \frac{d}{d\alpha}\int_0^1 \left(12t(x^*(t) + \alpha\,\delta x(t)) + (x^{*\prime}(t) + \alpha\,(\delta x(t))')^2\right)dt\Big|_{\alpha=0}.$$

Согласно формуле дифференцирования интеграла по параметру, находим:

$$\delta I = \int_0^1 \frac{d}{d\alpha}\left(12t(x^*(t) + \alpha\,\delta x(t)) + (x^{*\prime}(t) + \alpha\,(\delta x(t))')^2\right)dt\Big|_{\alpha=0} =$$

$$= \int_0^1 \left(12t\,\delta x(t) + 2(x^{*\prime}(t) + \alpha\,(\delta x(t))')(\delta x(t))'\right)dt\Big|_{\alpha=0} =$$

$$= \int_0^1 \left(12t\,\delta x(t) + 2x^{*\prime}(t)(\delta x(t))'\right)dt.$$

Ко второму слагаемому применим формулу интегрирования по частям:

$$\int_0^1 2x^{*'}(t)(\delta x(t))'dt = \begin{vmatrix} U = 2x^{*'}(t) & dU = 2x^{*''}(t)dt \\ dV = (\delta x(t))'dt & V = \delta x(t) \end{vmatrix} =$$

$$= 2x^{*'}(t)\,\delta x(t)\Big|_0^1 - \int_0^1 2x^{*''}(t)\delta x(t)dt\,.$$

По определению $\delta x(t) = x(t) - x^*(t)$, тогда, в силу того, что $x(t)$ и $x^*(t)$ удовлетворяют граничным условиям, получаем $\delta x(0) = \delta x(1) = 0$. Тем самым, первое слагаемое в последнем выражении обращается в ноль. Тогда $\int_0^1 2x^{*'}(t)(\delta x(t))'dt = -\int_0^1 2x^{*''}(t)\delta x(t)dt$ и выражение для первой вариации функционала принимает вид

$$\delta I = \int_0^1 \left(12t - 2x^{*''}(t)\right)\delta x(t)dt\,. \blacksquare$$

Необходимые условия локального экстремума одинаковы для сильного и слабого экстремума и определяются теоремой.

Теорема 1.1 (необходимые условия локального экстремума).

Если функционал $I[x(t)]$, имеющий вариацию, достигает минимума или максимума на кривой $x^*(t)$, где $x^*(t)$ есть внутренняя точка области определения функционала, то при $x(t) = x^*(t)$ первая вариация функционала равна нулю:

$$\delta I = 0. \tag{1.8}$$

При выводе необходимых условий экстремума для различных постановок вариационных задач применяется следующая важная теорема.

Теорема 1.2 (основная лемма вариационного исчисления).

Если для каждой непрерывной функции $\eta(t)$

$$\int_{t_0}^T a(t)\eta(t)dt = 0\,, \tag{1.9}$$

где функция $a(t)$ *непрерывная на отрезке интегрирования, то* $x(t) \equiv 0$ *на этом отрезке.*

Замечание 1.1. Утверждение основной леммы вариационного исчисления и ее доказательство не изменятся, если на функцию $\eta(t)$ наложить следующие ограничения: $\eta(t)$ имеет непрерывную производную и $\eta(t_0) = \eta(T) = 0$.

Замечание 1.2. Все изложенное в этом разделе без изменения переносится на функционалы $I[x(t)] = I[x_1(t),...,x_n(t)]$, зависящие от вектор-функций $x(t) = \left(x_1(t),...,x_n(t)\right)^T$ одной переменной или зависящие от функций нескольких переменных. Для таких функционалов вариация также определяется как главная линейная часть приращения функционала и доказывается, что на функциях (вектор-функциях), на которых реализуется экстремум, вариация равна нулю.

ГЛАВА 2. Метод вариаций в задаче с неподвижными границами

2.1. Функционалы, зависящие от одной функции. Простейшая вариационная задача

Рассмотрим множество M допустимых функций $x(t)$, удовлетворяющих условиям:

а) функции $x(t)$ принадлежат функциональному пространству $C^1[t_0, T]$;

б) функции $x(t)$ удовлетворяют граничным условиям

$$x(t_0) = x_0, \quad x(T) = x_T. \tag{2.1}$$

где значения x_0, x_T заданы, т.е. кривые проходят через две закрепленные граничные точки.

Среди допустимых кривых $x(t)$, принадлежащих допустимому множеству M, требуется найти кривую $x^*(t)$, доставляющую экстремум функционалу

$$I[x(t)] = \int_{t_0}^{T} f(t, x(t), x'(t))dt. \tag{2.2}$$

Подынтегральная функция $f(t, x, x')$ имеет непрерывные частные производные до второго порядка включительно. Так как на кривые $x(t)$, образующие множество M, не наложено дополнительных условий, кроме граничных, то задача поиска экстремума функционала (2.2) при граничных условиях (2.1) называется ***задачей поиска безусловного экстремума***. Данная задача является ***простейшей задачей вариационного исчисления***.

Стратегия поиска решения поставленной задачи состоит в определении первой вариации функционала и приравнивании ее к нулю согласно ***теореме 1.1***.

Обозначим $x^*(t)$ – кривую, на которой достигается экстремум функционала. Тогда допустимая кривая определяется по формуле: $x(t) = x^*(t) + \alpha\,\delta x(t)$, а ее производная $x'(t) = x^{*}{}'(t) + \alpha\,\delta x'(t)$, где $\delta y(t)$ – фиксированная вариация кривой, $\delta x'(t) = (\delta x(t))'$ – производная вариации, α – числовой параметр. Отметим, что $\delta x(t) \in \mathrm{C}^1[t_0, T]$, $\delta x(t_0) = \delta x(T) = 0$. Тогда

$$I[x^*(t)+\alpha\,\delta x(t)]=\int_{t_0}^{T} f(t,x^*(t)+\alpha\,\delta x(t),x^{*\prime}(t)+\alpha\,\delta x'(t))dt=\varphi(\alpha), \qquad (2.3)$$

где $\varphi(\alpha)$ – функция числового параметра α.

Используя формулу для вычисления первой вариации, формулу дифференцирования интеграла по параметру и формулу интегрировании по частям, имеем

$$\delta I=\left.\frac{d\varphi(\alpha)}{d\alpha}\right|_{\alpha=0}=\frac{d}{d\alpha}\int_{t_0}^{T}\left. f(t,x^*(t)+\alpha\,\delta x(t),x^{*\prime}(t)+\alpha\,\delta x'(t))\right|_{\alpha=0}dt=$$

$$=\int_{t_0}^{T}\Big(\left. f_x(t,x^*(t)+\alpha\,\delta x(t),x^{*\prime}(t)+\alpha\,\delta x'(t))\right|_{\alpha=0}\delta x(t)+$$

$$+\left. f_{x'}(t,x^*(t)+\alpha\,\delta x(t),x^{*\prime}(t)+\alpha\,\delta x'(t))\right|_{\alpha=0}\delta x'(t)\Big)dt=$$

$$=\int_{t_0}^{T}\Big(f_x(t,x^*(t),x^{*\prime}(t))\delta x(t)+f_{x'}(t,x^*(t),x^{*\prime}(t))\delta x'(t)\Big)dt=$$

$$=\left. f_{x'}(t,x^*(t),x^{*\prime}(t))\delta x(t)\right|_{t_0}^{T}+$$

$$+\int_{t_0}^{T}\left(f_x(t,x^*(t),x^{*\prime}(t))-\frac{d}{dt}f_{x'}(t,x^*(t),x^{*\prime}(t))\right)\delta x(t)dt.$$

Первое слагаемое в последнем выражении обращается в ноль. Ко второму слагаемому применима ***основная лемма вариационного исчисления***, так как в силу наложенных ограничений на кривой $x^*(t)$ функция $f_x-\frac{d}{dt}f_{x'}$ является непрерывной, а вариация $\delta x(t)$ – непрерывно дифференцируемой функцией, удовлетворяющей условиям $\delta x(t_0)=\delta x(T)=0$.

Следовательно, кривая $x^*(t)$, на которой достигается экстремум, необходимо удовлетворяет уравнению

$$f_x-\frac{d}{dt}f_{x'}=0. \qquad (2.4)$$

Уравнение (2.4) называется ***уравнением Эйлера***. Это уравнение играет фундаментальную роль в вариационном исчислении. Если функция $x^*(t)$ дважды дифференцируемая, то уравнение (2.4) можно записать в развернутой форме

$$f_x - f_{x't} - f_{x'x}x' - f_{x'x'}x'' = 0 \qquad (2.5)$$

и при $f_{x'x'} \neq 0$ представляет собой обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка. Его решение $x = x(t, C_1, C_2)$ зависит от двух произвольных постоянных и определяет двухпараметрическое ***семейство экстремалей***. Граничные условия (2.1) позволяют определить постоянные C_1, C_2 и, как следствие, кривую $x^*(t)$, на которой может достигаться экстремум функционала. Только на удовлетворяющих граничным условиям экстремалях может реализовываться экстремум.

Заметим, что если краевая задача для уравнения Эйлера и разрешима, то это еще не означает существования экстремумов у функционала, так как экстремаль – это кривая, на которой может достигаться экстремум функционала. Как и при исследовании экстремумов функций, требуется дополнительный анализ решения, чтобы установить, реализуется ли в действительности экстремум функционала и какого характера (максимум или минимум). Для этого надо использовать достаточные условия экстремума. Впрочем, в прикладных задачах ответ на этот вопрос часто может быть получен, исходя из физических особенностей задачи.

Пример 2.1. Найти экстремаль функционала $I[x(t)] = \int_0^1 \left(x^2(t) + x'^2(t)\right)dt$, удовлетворяющую граничным условиям $x(0) = 0$, $x(1) = 1$.

Запишем уравнение Эйлера для данного функционала. Имеем $f(t, x, x') = x^2 + x'^2$, тогда $f_x = 2x$, $f_{x'} = 2x'$, $\frac{d}{dt} f_{x'} = 2x''$. Получаем следующее дифференциальное уравнение: $2x - 2x'' = 0$ или $x'' - x = 0$. Это однородное обыкновенное линейное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами. Для его решения составим характеристическое уравнение $k^2 - 1 = 0$ и найдем корни $k_{1,2} = \pm 1$. Тогда общее решение принимает вид $x(t) = C_1 e^t + C_2 e^{-t}$.

Определим константы C_1, C_2 из граничных условий:

$$\begin{cases} x(0) = C_1 + C_2 = 0, \\ x(1) = C_1 e + C_2 e^{-1} = 1. \end{cases}$$

Откуда находим $C_1 = \dfrac{e}{e^2 - 1}$, $C_2 = \dfrac{e}{1 - e^2}$. В результате получаем экстремаль $x^*(t) = \dfrac{e}{e^2 - 1} e^t + \dfrac{e}{1 - e^2} e^{-t}$. ■

Пример 2.2. Найти экстремаль функционала $I[x(t)] = \int_0^1 \left(12tx(t) + x'^2(t)\right)dt$, удовлетворяющую граничным условиям $x(0) = 0$, $x(1) = 1$.

Запишем уравнение Эйлера для данного функционала. Имеем $f(t, x, x') = 12tx + x'^2$, тогда $f_x = 12t$, $f_{x'} = 2x'$, $\dfrac{d}{dt} f_{x'} = 2x''$. Получаем следующее дифференциальное уравнение: $12t - 2x'' = 0$ или $x'' = 12t$. Это дифференциальное уравнение второго порядка, разрешенное относительно старшей производной. Для его решения проинтегрируем левую и правую часть дважды по переменной *t*. Имеем: $x' = 6t^2 + C_1$, $x(t) = 2t^3 + C_1 t + C_2$. Определим константы C_1, C_2 из граничных условий:

$$\begin{cases} x(0) = C_2 = 0, \\ x(1) = 2 + C_1 + C_2 = 1. \end{cases}$$

Откуда находим $C_1 = -1$, $C_2 = 0$. В результате получаем экстремаль $x^*(t) = 2t^3 - t$. ■

Пример 2.3. Найти экстремаль функционала $I[x(t)] = \int_0^{\frac{3\pi}{2}} \left(x'^2(t) - x^2(t)\right)dt$, удовлетворяющую граничным условиям $x(0) = 1$, $x(3\pi/2) = 1$.

Запишем уравнение Эйлера для данного функционала. Имеем $f(t, x, x') = x'^2 - x^2$, тогда $f_x = -2x$, $f_{x'} = 2x'$, $\dfrac{d}{dt} f_{x'} = 2x''$. Получаем следующее дифференциальное уравнение: $-2x - 2x'' = 0$ или $x'' + x = 0$. Это однородное обыкновенное линейное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами. Для его решения составим характеристическое уравнение $k^2+1=0$ и найдем корни $k_{1,2}=\pm i$. Тогда общее решение принимает вид $x(t)=C_1\cos t+C_2\sin t$.

Определим константы C_1, C_2 из граничных условий:

$$\begin{cases} x(0)=C_1=1, \\ x(3\pi/2)=-C_2=1. \end{cases}$$

Откуда находим $C_1=1$, $C_2=-1$. В результате получаем экстремаль $x^*(t)=\cos t-\sin t$. ■

Пример 2.4. Найти экстремаль функционала $\int_0^1 \left(x^2(t)+x'^2(t)+2x(t)e^t\right)dt$, удовлетворяющую граничным условиям $x(0)=0$, $x(1)=0$.

Запишем уравнение Эйлера для данного функционала. Имеем $f(t,x,x')=x^2+x'^2+2xe^t$, тогда $f_x=2x+2e^t$, $f_{x'}=2x'$, $\dfrac{d}{dt}f_{x'}=2x''$. Получаем следующее дифференциальное уравнение: $2x+2e^t-2x''=0$ или $x''-x=e^t$. Это неоднородное обыкновенное линейное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами. Его решение разбиваем на два этапа. Для соответствующего однородного уравнения $x''-x=0$ составим характеристическое уравнение $k^2-1=0$ и найдем корни $k_{1,2}=\pm 1$. Тогда общее решение однородного уравнения принимает вид $x_0(t)=C_1e^t+C_2e^{-t}$.

Далее по виду правой части и характеристических корней (правая часть содержит одно из фундаментальных решений) частное решение неоднородного находим в виде: $x_ч(t)=ate^t$. Неизвестный параметр a найдем, подставив $x_ч(t)$ в неоднородное уравнение: $x'_ч(t)=a(te^t+e^t)$, $x'_ч(t)=a(te^t+2e^t)$, откуда

$$a(te^t+2e^t)-ate^t=e^t,$$

$$2ae^t=e^t,\ a=1/2.$$

Тем самым, суммируя общее решение однородного уравнения и частное решение неоднородного уравнения, получим общее решение неоднородного уравнения $x(t) = C_1 e^t + C_2 e^{-t} + \frac{1}{2} t e^t$.

Определим константы $C_1,\ C_2$ из граничных условий:

$$\begin{cases} x(0) = C_1 + C_2 = 0, \\ x(1) = C_1 e + C_2 e^{-1} + \frac{1}{2} e = 0. \end{cases}$$

Откуда находим $C_1 = -\frac{e^2}{2(e^2-1)},\ C_2 = \frac{e^2}{2(e^2-1)}$. В результате получаем экстремаль $x^*(t) = -\frac{e^2}{2(e^2-1)} e^t + \frac{e^2}{2(e^2-1)} e^{-t} + \frac{1}{2} t e^t$. ■

2.2. Частные случаи интегрируемости уравнения Эйлера

Уравнение Эйлера интегрируется в квадратурах лишь в исключительных случаях. Следует выделить некоторые ***простейшие случаи интегрируемости уравнения Эйлера***.

Случай 1. Функция $f(t, x, x')$ зависит только от x'. Тогда уравнение Эйлера записывается в виде $\frac{d}{dt} f_{x'} = 0$ и допускает понижение прядка: $f_{x'} = C$. Это уравнение является алгебраическим относительно производной x'. Все его решения можно записать в виде $x' = C_1$. Тогда экстремалями является семейство линейных функций $x(t) = C_1 t + C_2$.

Пример 2.5. Найти экстремаль функционала $\int_2^4 \left(x'^2(t) + x'^3(t) \right) dt$, удовлетворяющую граничным условиям $x(2) = -1,\ x(4) = 3$.

Поскольку интегрант $f(t, x, x') = x'^2 + x'^3$ зависит только от x', то сразу запишем общее решение уравнения Эйлера: $x(t) = C_1 t + C_2$. Константы $C_1,\ C_2$ определим из граничных условий:

$$\begin{cases} x(2) = 2C_1 + C_2 = -1, \\ x(4) = 4C_1 + C_2 = 3. \end{cases}$$

Откуда находим $C_1 = 2$, $C_2 = -5$. В результате получаем экстремаль $x^*(t) = 2t - 5$. ■

Случай 2. Функция $f(t, x, x')$ не зависит от *x*. В этом случае уравнение Эйлера также записывается в виде $\frac{d}{dt} f_{x'} = 0$ и допускает понижение порядка: $f_{x'} = C$. Последнее уравнение является обыкновенным дифференциальным уравнением первого порядка или алгебраическим уравнением.

Пример 2.6. Найти экстремаль функционала $\int\limits_0^2 \left(x'^2(t) + tx'(t)\right)dt$, удовлетворяющую граничным условиям $x(0) = 0$, $x(2) = 2$.

Поскольку интегрант $f(t, x, x') = x'^2 + tx'$ не зависит от *x*, то сразу запишем уравнение Эйлера в виде $f_{x'} = C_1$. Имеем $2x' + t = C_1$. Из данного уравнения можно выразить производную через переменную и найти общее решение, проинтегрировав уравнение один раз: $x' = \frac{C_1}{2} - \frac{t}{2}$, $x(t) = \frac{C_1 t}{2} - \frac{t^2}{4} + C_2$. Определим константы C_1, C_2 из граничных условий:

$$\begin{cases} x(0) = C_2 = 0, \\ x(3) = C_1 - 1 + C_2 = 2. \end{cases}$$

Откуда находим $C_1 = 3$, $C_2 = 0$. В результате получаем экстремаль $x^*(t) = \frac{3t}{2} - \frac{t^2}{4}$. ■

Случай 3. Функция $f(t, x, x')$ не зависит от *t*. Тогда уравнение Эйлера, в предположении, что $f_{x'x'} \neq 0$, сводится к следующему:

$$f_x - f_{x'x} x' - f_{x'x'} x'' = 0.$$

Умножив его на x', получим $\frac{d}{dt}\left(f - x' f_{x'}\right) = 0$. Таким образом, и в этом случае уравнение Эйлера допускает понижение порядка: $f - x' f_{x'} = C$.

Пример 2.7. Найти экстремаль функционала $\int_0^1 x(t)x'^2(t)dt$, удовлетворяющую граничным условиям $x(0) = 1$, $x(1) = \sqrt[3]{9}$.

Поскольку интегрант $f(t, x, x') = xx'^2$ не зависит от t, то сразу запишем уравнение Эйлера в виде $f - x' f_{x'} = C$. Имеем $xx'^2 - x'2xx' = C$ или $xx'^2 = -C = C_1$.

Найдем общее решение данного уравнения, введя замену $x' = \frac{dx}{dt} = p$. Данная подстановка в дифференциальное уравнение дает следующее: $xp^2 = C_1$, откуда $x = \frac{C_1}{p^2}$. Вычислим дифференциал $dx = -\frac{2C_1}{p^3}dp$. Далее $dt = \frac{dx}{p} = -\frac{2C_1}{p^4}dp$. Отсюда найдем $t = \frac{2C_1}{3p^3} + C_2$ и выразим $p = \sqrt[3]{\frac{2C_1}{3(t - C_2)}}$. Поскольку $x = \frac{C_1}{p^2}$, то получим общее решение уравнения Эйлера

$$x(t) = \frac{C_1}{\sqrt[3]{\left(\frac{2C_1}{3(t - C_2)}\right)^2}} = C_1 \sqrt[3]{\left(\frac{3(t - C_2)}{2C_1}\right)^2} = \sqrt[3]{\frac{9}{4}C_1 (t - C_2)^2}.$$

Определим константы C_1, C_2 из граничных условий:

$$\begin{cases} x(0) = \sqrt[3]{\frac{9}{4}C_1 C_2{}^2} = 1, \\ x(1) = \sqrt[3]{\frac{9}{4}C_1 (1 - C_2)^2} = \sqrt[3]{9}. \end{cases}$$

Разделив возведя оба уравнения в третью степень и второе на первое, получим $\frac{(1-C_2)^2}{C_2^{\,2}} = 9$. Далее $\frac{1-C_2}{C_2} = \pm 3$, откуда получаем $C_2 = \frac{1}{4}$ и $C_2 = -\frac{1}{2}$. Для каждого из этих значений по формуле $C_1 = \frac{4}{9C_2^{\,2}}$ находим: при $C_2 = \frac{1}{4}$ – $C_1 = \frac{64}{9}$, при $C_2 = -\frac{1}{2}$ – $C_1 = \frac{16}{9}$. Тем самым, получаем две экстремали – $x^*(t) = \sqrt[3]{\frac{9}{4} \cdot \frac{64}{9} \cdot \left(t - \frac{1}{4}\right)^2} = \sqrt[3]{(4t-1)^2}$ и $x^*(t) = \sqrt[3]{\frac{9}{4} \cdot \frac{16}{9} \cdot \left(t + \frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt[3]{(2t+1)^2}$. ■

Случай 4. Функция $f(t, x, x')$ не зависит от x'. Тем самым получаем уравнение $f_x(t, x) = 0$, которое является алгебраическим относительно неизвестной функции $x(t)$. Решения этого уравнения могут и не удовлетворять поставленным краевым условиям.

Пример 2.8. Найти экстремаль функционала $\int_1^4 \left(tx(t) - x^2(t)\right)dt$, удовлетворяющую граничным условиям $x(1) = 0$, $x(4) = 1$.

Поскольку интегрант $f(t, x, x') = tx - x^2$ не зависит от x', то запишем уравнение Эйлера в виде $f_x = 0$. Имеем $t - 2x = 0$, откуда находим $x = \frac{t}{2}$. Поскольку данная функция не удовлетворяет граничным условиям, то поставленная задача решение не имеет.

Следует отметить, что решение будет существовать, если граничные условия будут иными, например, $x(1) = \frac{1}{2}$, $x(4) = 2$. ■

Случай 5. Функция $f(t, x, x')$ линейно зависит от x', то есть может быть представлен в виде $f(t, x, x') = P(t, x) + Q(t, x)x'$. Этот случай, включающий в себя предыдущий, охватывает те функционалы, интегрант которых удовлетворяет условию $f_{x'x'} = 0$. Такие функционалы называют ***вырожденными***. Уравнение Эйлера в этом случае принимает вид

$$Q_t - P_x - Q_x x' = 0, \text{ или } Q_t + Q_x x' - P_x - Q_x x' = 0,$$

откуда $Q_t - P_x = 0$. Это уравнение алгебраическое; его решения могут и не удовлетворять краевым условиям.

Если же $Q_t = P_x$, то уравнение $Q_t - P_x = 0$ выполняется для любой функции $x(t)$. В этом случае подынтегральное выражение представляет собой полный дифференциал некоторой функции $U(t, x)$:

$$\int_{t_0}^{T}(P(t,x)+Q(t,x)x')dt = \int_{t_0}^{T}(P(t,x)+Q(t,x)\frac{dx}{dt})dt =$$

$$= \int_{t_0}^{T} P(t,x)dt + Q(t,x)dx = \int_{t_0}^{T} dU(t,x),$$

где функция $U(t, x)$ при выполнении условия $Q_t = P_x$ может быть найдена из системы

$$\begin{cases} U_t = P, \\ U_x = Q. \end{cases}$$

В этом случае значение интеграла постоянно и не зависит от функции $x(t)$: $\int_{t_0}^{T} dU(t,x) = U(t,x)\Big|_{t_0}^{T} = U(t_0, x_0) - U(T, x_T) = const$. Тем самым, при $Q_t = P_x$ вариационная задача не имеет смысла.

Пример 2.9. Найти экстремаль функционала $\int_0^2 \left(x^2(t) + t^2 x'(t)\right)dt$, удовлетворяющую граничным условиям $x(0) = 0$, $x(2) = 2$.

Для данного функционала интегрант $f(t, x, x') = x^2 + t^2 x'$ линейно зависит от x'. Обозначим $P(t,x) = x^2$, $Q(t,x) = t^2$ и запишем уравнение $Q_t - P_x = 0$. Имеем $2t - 2x = 0$, откуда находим $x^*(t) = t$. Поскольку данная функция удовлетворяет граничным условиям, тона и будет экстремалью функционала. ■

Пример 2.10. Найти экстремаль функционала $\int_0^{\pi/2} \left(x^2(t)\sin 2t + 2tx^3(t)x'(t)\right)dt$, удовлетворяющую граничным условиям $x(0) = 0$, $x(\pi/2) = 1$.

Для данного функционала интегрант $f(t,x,x') = x^2 \sin 2t + 2tx^3 x'$ линейно зависит от x'. Обозначим $P(t,x) = x^2 \sin 2t$, $Q(t,x) = 2tx^3$ и запишем уравнение Эйлера: $2x^3 - 2x \sin 2t = 0$. Отсюда имеем $2x(x^2 - \sin 2t) = 0$. Решением уравнения Эйлера могут быть три функции: $x = 0$, $x = \pm\sqrt{\sin 2t}$. Видно, что первому граничному условию удовлетворяют все функции, второму – ни одна из них. Тем самым вариационная задача не имеет решение. ■

Пример 2.11. Найти экстремаль функционала $\int\limits_{\pi/6}^{\pi/2} \left(x^2(t)\cos t + 2x(t)\sin t x'(t)\right)dt$, удовлетворяющую граничным условиям $x(\pi/6) = 1$, $x(\pi/2) = 2$.

Для данного функционала интегрант $f(t,x,x') = x^2 \cos t + 2x \sin t\, x'$ линеен относительно x'. Обозначим $P(t,x) = x^2 \cos t$, $Q(t,x) = 2x \sin t$ и вычислим $P_x = 2x\cos t$, $Q_t = 2x\cos t$. Получили, что $Q_t = P_x$, следовательно, вариационная задача не имеет смысла, поскольку функционал принимает постоянное значение для любой функции $x(t)$, удовлетворяющей заданным граничным условиям. Вычислим это значение. Для этого необходимо найти функцию $U(t,x)$ из системы

$$\begin{cases} U_t = P = x^2 \cos t, \\ U_x = Q = 2x \sin t. \end{cases}$$

Из первого уравнения находим: $U = \int x^2 \cos t dt = x^2 \sin t + C(x)$. Подставив данную функцию во второе уравнение системы, получим: $U_x = 2x \sin t + C'(x) = 2x \sin t$. Отсюда $C'(x) = 0$ или $C(x) = C$. Константу C можно брать любой, например, равной нулю. Тем самым, $U(t,x) = x^2 \sin t$. Подставим данную функцию в интегральный функционал и вычислим его значение:

$$\int\limits_{\pi/6}^{\pi/2} \left(x^2(t)\cos t + 2x(t)\sin t x'(t)\right)dt = \int\limits_{\pi/6}^{\pi/2} d\left(x^2 \sin t\right) = x^2 \sin t\Big|_{\pi/6}^{\pi/2} =$$

$$= x^2\left(\frac{\pi}{2}\right)\cdot\sin\frac{\pi}{2} - x^2\left(\frac{\pi}{6}\right)\cdot\sin\frac{\pi}{6} = 4 - \frac{1}{2} = \frac{7}{2}. \blacksquare$$

2.3. Достаточные условия экстремума функционала

Для формулировки достаточных условий экстремума функционала введем следующие понятия.

1. Условие Якоби. Назовем выполненным ***условие Якоби***, если ***уравнение Якоби***

$$\left[f_{xx} - \frac{d}{dt} f_{xx'} \right] u(t) - \frac{d}{dt}\left[f_{x'x'} u'(t) \right] = 0,$$

где f_{xx}, $f_{xx'}$, $f_{x'x'}$ – соответствующие производные интегранта, вычисленные на экстремали $x^*(t)$, удовлетворяющей уравнению Эйлера и граничным условиям, имеет нетривиальное решение $u(t)$, которое:

1) удовлетворяет условию $u(t_0) = 0$;

2) не обращается в нуль ни при каких значениях $t \in (t_0, T]$.

2. Условие Лежандра. Условие $f_{x'x'} \ge 0$ ($f_{x'x'} \le 0$) называется ***условием Лежандра***, а условие $f_{x'x'} > 0$ ($f_{x'x'} < 0$) – ***усиленным условием Лежандра***. При этом функция $f(t, x, x')$ предполагается трижды дифференцируемой по x'.

Напомним, что уравнение Эйлера является необходимым условием как сильного, так и слабого экстремума функционала. Достаточные условия сильного и слабого экстремума различны.

Теорема 2.1 (достаточные условия слабого минимума (максимума)).

Если на экстремали $x^*(t)$, удовлетворяющей уравнению Эйлера и граничным условиям, выполняются:

1) условие Якоби;

2) усиленное условие Лежандра: $f_{x'x'} > 0$ ($f_{x'x'} < 0$) на экстремали $x^*(t)$,

то на $x^*(t)$ достигается слабый минимум (максимум).

Теорема 2.2 (достаточные условия сильного минимума (максимума)).

Если на экстремали $x^*(t)$, удовлетворяющей уравнению Эйлера и граничным условиям, выполняются:

1) условие Якоби;

2) условие Лежандра: $f_{x'x'} \ge 0$ ($f_{x'x'} \le 0$) для точек (t, x), близким к точкам на экстремали $x^*(t)$, и для произвольных значений x',

то на $x^*(t)$ достигается сильный минимум (максимум).

Пример 2.12. Найти экстремум функционала $J[x(t)] = \int_1^2 \left(x'(t) + 2x'^3(t)\right)dt$, на множестве гладких кривых, удовлетворяющих граничным условиям $x(1) = 2$, $x(2) = 6$.

Для начала найдем допустимую экстремаль. Запишем уравнение Эйлера для данного функционала. Имеем $f(t, x, x') = x' + 2x'^3$, тогда имеем второй случай интегрируемости уравнения Эйлера. Общее решение принимает вид $x(t) = C_1 + C_2 t$.

Определим константы C_1, C_2 из граничных условий:

$$\begin{cases} x(0) = C_1 + C_2 = 2, \\ x(1) = C_1 + 2C_2 = 6. \end{cases}$$

Откуда находим $C_1 = -2$, $C_2 = 4$. В результате получаем экстремаль $x^*(t) = 4t - 2$.

Для проверки достаточных условий, во-первых, составим уравнение Якоби. Для этого найдем $x^*{}'(t) = 4$, $f_{xx} = 0$, $f_{xx'} = 0$, $f_{x'x'}\big|_{x^*(t)} = 12x'\big|_{x^*(t)} = 48$. Тогда уравнение Якоби принимает вид:

$$[0 - 0]u(t) - \frac{d}{dt}[48u'(t)] = 0 \text{ или } u''(t) = 0.$$

Его общее решение $u(t) = C_1 + C_2 t$. Тогда из условия $u(1) = 0$ получаем $u(1) = C_1 + C_2 = 0$ и $C_2 = -C_1$. Так как нетривиальное решение (при $C_1 \ne 0$)

уравнения Якоби $u(t)=C_1-C_1t=C_1(1-t)\neq 0$ при $t\in(1,2]$, то условие Якоби выполняется.

Во-вторых, проверим условие Лежандра. Поскольку функция $f_{x'x'}=12x'$ не сохраняет знак при любых x', то вопрос о наличии сильного экстремума остается открытым. В тоже время, на допустимой экстремали $f_{x'x'}\big|_{x^*(t)}=12x'\big|_{x^*(t)}=48>0$, то на этой экстремали $x^*(t)=4t-2$ достигается слабый минимум.

Вычислим минимальное значение функционала на данной экстремали:

$$J[x^*(t)]=\int_1^2\left(4+2\cdot 4^3\right)dt=132. \blacksquare$$

Пример 2.13. Найти экстремум функционала $I[x(t)]=\int_0^1\left(12tx(t)+x'^2(t)\right)dt$, удовлетворяющую граничным условиям $x(0)=0$, $x(1)=1$.

Допустимая экстремаль $x^*(t)=2t^3-t$ была найдена ранее.

Составим уравнение Якоби. Находим $f_{xx}=0$, $f_{xx'}=0$, $f_{x'x'}\big|_{x^*(t)}=2\big|_{x^*(t)}=2$. Уравнение Якоби принимает вид:

$$[0-0]u(t)-\frac{d}{dt}[2u'(t)]=0 \text{ или } u''(t)=0.$$

Его общее решение $u(t)=C_1+C_2t$. Тогда из условия $u(0)=0$ получаем $u(0)=C_1=0$. Так как нетривиальное решение (при $C_2\neq 0$) уравнения Якоби $u(t)=C_2t\neq 0$ при $t\in(0,1]$, то условие Якоби выполняется.

Далее проверим условие Лежандра. Поскольку функция $f_{x'x'}=2>0$ сохраняет знак при любых x', то вопрос на экстремали $x^*(t)=2t^3-t$ достигается сильного минимума. Кроме того, на этой же экстремали достигается и слабый минимум.

Вычислим минимальное значение функционала на данной экстремали:

$$J[x^*(t)]=\int_0^1\left(12t\cdot(2t^3-t)+\left(6t^2-1\right)^2\right)dt=\int_0^1\left(24t^4-12t^2+36t^4-12t^2+1\right)dt=$$

$$=\int_0^1 \left(60t^4-24t^2+1\right)dt=\left(12t^5-8t^3+t\right)\Big|_0^1=12-8+1=5. \ \blacksquare$$

2.4. Функционалы, зависящие от нескольких функции

Рассмотрим множество M допустимых вектор-функций $x(t)=(x_1(t),\ldots,x_n(t))^T$, удовлетворяющих условиям:

а) функции $x_k(t)$, $k = 1, \ldots, n$, принадлежат функциональному пространству $C^1[t_0, T]$;

б) функции $y_k(x)$, удовлетворяют граничным условиям

$$x_k(t_0)=x_{k0}, \qquad x_k(T)=x_{kT}, \qquad k=1,2,\ldots,n, \tag{2.6}$$

где значения x_{k0}, x_{kT} заданы, т.е. каждая из кривых $x_k(t)$ проходит через две закрепленные граничные точки.

Среди допустимых вектор-функций $x(t)$, принадлежащих множеству M, требуется найти вектор-функцию $x^*(t)=(x_1^*(t),\ldots,x_n^*(t))^T$, на которой достигает экстремума функционал

$$I[x_1(t),\ldots,x_n(t)]=\int_{t_0}^{T} f(t,x_1(t),\ldots,x_n(t),x_1'(t),\ldots,x_n'(t))dt. \tag{2.7}$$

Подынтегральная функция $f(t,x_1,\ldots,x_n,x_1',\ldots,x_n')$ имеет непрерывные частные производные до второго порядка включительно по всем переменным. Поставленная задача также называется ***задачей поиска безусловного экстремума***.

Стратегия поиска решения задачи опирается на ***теорему 1.1*** о необходимом условии экстремума функционала: $\delta I=0$ на экстремали $x^*(t)$. Поскольку эта проблема сформулирована для скалярной функции $x(t)$, применим ее к функционалу $I[x_1(t),\ldots,x_n(t)]$, варьируя лишь функцию $x_k(t)$, а остальные оставляя неизменными. При этом функционал будет зависеть лишь от одной функции $x_k(t)$.

Тогда, аналогично п. 2.1, получаем формулу для первой вариации

$$\delta_k I = \int_{t_0}^{T} \left(f_{x_k} \delta x(t) + f_{x'} \delta x_k'(t) \right) dt .$$

Интегрируя по частям, применяя необходимое условие экстремума и основную лемму вариационного исчисления, получаем уравнение Эйлера

$$f_{x_k} - \frac{d}{dt} f_{x_k'} = 0 .$$

Так как в качестве варьируемой компоненты $x_k(t)$ может быть взята любая из компонент $x_i(t)$, $i = 1, \ldots, n$, то искомая вектор-функция $x^*(t) = (x_1^*(t), \ldots, x_n^*(t))^T$ должна удовлетворять системе уравнений Эйлера

$$f_{x_k} - \frac{d}{dt} f_{x_k'} = 0, \; k = 1, \ldots, n . \tag{2.8}$$

Заметим, что первая вариация функционала представляется в виде

$$\delta I = \sum_{k=1}^{n} \delta_k I = \int_{t_0}^{T} \sum_{k=1}^{n} \left[f_{x_k} - \frac{d}{dt} f_{x_k'} \right] \delta x_k(t) dt . \tag{2.9}$$

Так как вариации $\delta x_k(t),\; k = 1, \ldots, n$, произвольны, то из условия $\delta I = 0$ и основной леммы вариационного исчисления следует система (2.8).

Общее решение этой системы $x_k = x_k(t, C_1, \ldots, C_{2n}),\; k = 1, \ldots, n$, содержит $2n$ произвольных постоянных, которые определяются из $2n$ граничных условий (2.6). Полученные решения $x^*(t) = (x_1^*(t), \ldots, x_n^*(t))^T$ называются ***экстремалями*** функционала, и, как и ранее, являются кривыми, удовлетворяющими необходимому условию экстремума, т.е. на которых возможен экстремум функционала.

Пример 2.14. Найти экстремали функционала $\int_0^{\pi/2} \left(x_1'^2(t) + x_2'^2(t) + 2x_1(t)x_2(t) \right) dt$, удовлетворяющие граничным условиям $x_1(0) = x_2(0) = 0$, $x_1(\pi/2) = 1$, $x_2(\pi/2) = -1$.

Запишем систему уравнений Эйлера для данного функционала. Имеем $f = x_1'^2 + x_2'^2 + 2x_1 x_2$, тогда получим:

$$\begin{cases} 2x_2 - \dfrac{d}{dt}(2x_1{}') = 0, \\ 2x_1 - \dfrac{d}{dt}(2x_2{}') = 0. \end{cases}$$

Откуда $\begin{cases} 2x_2 - 2x_1'' = 0, \\ 2x_1 - 2x_2'' = 0, \end{cases}$ или $\begin{cases} x_2 - x_1'' = 0, \\ x_1 - x_2'' = 0. \end{cases}$ Из первого выразим $x_2 = x_1''$, продифференцируем два раза $x_2'' = x_1^{IV}$ и подставим во второе уравнение. Получаем $x_1 - x_1^{IV} = 0$ или $x_1^{IV} - x_1 = 0$.

Это линейное однородное дифференциальное уравнение четвертого порядка с постоянными коэффициентами. Для его решения составим характеристическое уравнение $k^4 - 1 = 0$ и найдем его корни $k_{1,2} = \pm 1$, $k_{3,4} = \pm i$. Тогда общее решение принимает вид $x_1(t) = C_1 e^t + C_2 e^{-t} + C_3 \sin t + C_4 \cos t$. Дифференцируя его дважды, находим $x_2(t) = C_1 e^t + C_2 e^{-t} - C_3 \sin t - C_4 \cos t$. Получаем общее решение системы уравнений Эйлера:

$$\begin{cases} x_1(t) = C_1 e^t + C_2 e^{-t} + C_3 \sin t + C_4 \cos t, \\ x_2(t) = C_1 e^t + C_2 e^{-t} - C_3 \sin t - C_4 \cos t. \end{cases}$$

Константы найдем из граничных условий:

$$\begin{cases} x_1(0) = C_1 + C_2 + C_4 = 0, \\ x_2(0) = C_1 + C_2 - C_4 = 0, \\ x_1(\pi/2) = C_1 e^{\pi/2} + C_2 e^{-\pi/2} + C_3 = 1, \\ x_2(\pi/2) = C_1 e^{\pi/2} + C_2 e^{-\pi/2} - C_3 = -1. \end{cases}$$

Вычитая из первого второе уравнение, находим $C_4 = 0$. Вычитая из третьего четвертое, находим $C_3 = 1$. Тогда $C_1 = C_2 = 0$. Окончательно получаем экстремали данного функционала $x_1^*(t) = \sin t,\ x_2^*(t) = -\sin t$. ■

Пример 2.15. Найти семейства экстремалей функционала $\int\limits_{t_0}^{T} \left(x_1'^2(t) + x_2'^2(t) + 8x_1(t)x_2(t) - 2x_1(t)\, e^t \right) dt$.

Запишем систему уравнений Эйлера для данного функционала. Имеем $f = x_1'^2 + x_2'^2 + 8x_1x_2 - 2x_1e^t$, тогда получим:

$$\begin{cases} 8x_2 - 2e^t - \dfrac{d}{dt}(2x_1') = 0, \\ 8x_1 - \dfrac{d}{dt}(2x_2') = 0. \end{cases}$$

Откуда получаем

$$\begin{cases} 4x_2 - e^t - x_1'' = 0, \\ 4x_1 - x_2'' = 0. \end{cases}$$

Из первого уравнения выразим $x_2 = \dfrac{1}{4}\left(x_1'' + e^t\right)$, продифференцируем два раза $x_2'' = \dfrac{1}{4}\left(x_1^{IV} + e^t\right)$ и подставим во второе уравнение. Получаем $x_1^{IV} - 16x_1 = -e^t$.

Это линейное неоднородное дифференциальное уравнение четвертого порядка с постоянными коэффициентами. Для его решения сначала найдем решение соответствующего однородного уравнения $x_1^{IV} - 16x_1 = 0$. Составим характеристическое уравнение $k^4 - 16 = 0$ и найдем его корни $k_{1,2} = \pm 2$, $k_{3,4} = \pm 2i$. Тогда решение однородного уравнения принимает вид

$$x_{1o}(t) = C_1e^{2t} + C_2e^{-2t} + C_3\sin 2t + C_4\cos 2t.$$

По виду правой части и найденным характеристическим корням определяем вид решения неоднородного уравнения: $x_{1н}(t) = Ae^t$. Дифференцируем четыре раза $x_{1н}^{IV}(t) = Ae^t$ и подставляем в уравнение: $Ae^t - 16Ae^t = -e^t$. Откуда находим $A = \dfrac{1}{15}$ и $x_{1н}(t) = \dfrac{1}{15}e^t$. Тем самым общее решение принимает вид

$$x_1(t) = C_1e^{2t} + C_2e^{-2t} + C_3\sin 2t + C_4\cos 2t + \frac{1}{15}e^t.$$

Далее находим

$$x_2 = \frac{1}{4}\left(x_1'' + e^t\right) =$$

$$= \frac{1}{4}\left(4C_1e^{2t} + 4C_2e^{-2t} - 4C_3\sin 2t - 4C_4\cos 2t + \frac{1}{15}e^t + e^t\right) =$$

$$= C_1e^{2t} + C_2e^{-2t} - C_3\sin 2t - C_4\cos 2t + \frac{4}{15}e^t.$$

Окончательно получаем семейства экстремалей заданного функционала:

$$\begin{cases} x_1(t) = C_1e^{2t} + C_2e^{-2t} + C_3\sin 2t + C_4\cos 2t + \frac{1}{15}e^t, \\ x_2(t) = C_1e^{2t} + C_2e^{-2t} - C_3\sin 2t - C_4\cos 2t + \frac{4}{15}e^t. \end{cases} \blacksquare$$

2.5. Функционалы, зависящие от производных высшего порядка одной функции

Рассмотрим множество *M* допустимых функций (кривых) $x(t)$, удовлетворяющих следующим условиям:

а) функции $x(t)$ определены и *m* раз непрерывно дифференцируемы на отрезке $[t_0, T]$, т.е. $x(t) \in C^m[t_0, T]$;

б) функции $x(t)$ удовлетворяют граничным условиям

$$\begin{aligned} &x(t_0) = x_0,\ \ x^{(i)}(t_0) = x_0^{(i)}, i = 1,\ldots,m-1, \\ &x(T) = x_T,\ \ x^{(i)}(T) = x_T^{(i)}, i = 1,\ldots,m-1, \end{aligned} \tag{2.10}$$

где x_0, $x_0^{(i)}$, x_T, $x_T^{(i)}$ заданы.

Среди допустимых кривых $x(t)$, принадлежащих множеству *M*, требуется найти кривую $x^*(t)$, на которой достигает экстремального значения функционал

$$I[x(t)] = \int_{t_0}^{T} f(t, x(t), x'(t), \ldots, x^{(m)}(t))dt. \tag{2.11}$$

Предполагается, что подынтегральная функция $f(t, x, x', \ldots, x^{(m)})$ имеет непрерывные частные производные до $(m+2)$-го порядка включительно.

Как и ранее, поставленная задача также является ***задачей поиска безусловного экстремума***.

Стратегия поиска решения также состоит в нахождении первой вариации функционала и приравнивании его к нулю. Пусть $x^*(t) \in C^m[t_0, T]$ – кривая, на которой допускается экстремум функционала $I[x(t)]$. Тогда допустимая кривая $x(t)$ и ее производные $x^{(i)}(t),\ i = 1, \ldots, m$, представляются в виде

$$x(x) = x^*(t) + \alpha\,\delta x(t),$$

$$x'(x) = x^{*\prime}(t) + \alpha\,\delta x'(t),$$

$$\ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots,$$

$$x^{(m)}(t) = x^{*(m)}(t) + \alpha\,\delta x^{(m)}(t),$$

где $\delta x(t)$ – фиксированная вариация, удовлетворяющая условиям:

$$\delta x(t_0) = \delta x(T) = \delta x'(t_0) = \delta x'(T) = \ldots = \delta x^{(m-1)}(t_0) = \delta x^{(m-1)}(T) = 0. \qquad (2.12)$$

Имеем

$$\delta I = \frac{d}{d\alpha} I\left[x^*(t) + \alpha\,\delta x(t)\right]\Big|_{\alpha=0} =$$

$$= \frac{d}{d\alpha}\int_{t_0}^{T} f(t, x^*(t) + \alpha\,\delta x(t), \ldots, x^{*(m)}(t) + \alpha\,\delta x^{(m)}(t))dt\Bigg|_{\alpha=0} =$$

$$= \int_{t_0}^{T}\Big[f_x(t, x^*(t) + \alpha\,\delta x(t), \ldots, x^{*(m)}(t) + \alpha\,\delta x^{(m)}(t))\delta x(t) +$$

$$+ f_{x'}(t, x^*(t) + \alpha\,\delta x(t), \ldots, x^{*(m)}(t) + \alpha\,\delta x^{(m)}(t))\delta x'(t) + \ldots$$

$$\ldots + f_{x^{(m)}}(t, x^*(t) + \alpha\,\delta x(t), \ldots, x^{*(m)}(t) + \alpha\,\delta x^{(m)}(t))\delta x^{(m)}(t)\Big]dt.$$

С учетом условий (2.12) интегрируем по частям второе слагаемое один раз:

$$\int_{t_0}^{T} f_{x'}\delta x'(t)dt = f_{x'}\delta x(t)\Big|_{t_0}^{T} - \int_{t_0}^{T}\frac{d}{dt} f_x \delta x(t)dt = -\int_{t_0}^{T}\frac{d}{dt} f_x \delta x(t)dt;$$

третье слагаемое – два раза:

$$\int_{t_0}^{T} f_{x''}\delta x''(t)dt = f_{x''}\delta x'(t)\Big|_{t_0}^{T} - \left[\frac{d}{dt} f_{x''}\delta x(t)\right]_{t_0}^{T} + \int_{t_0}^{T}\frac{d^2}{dt^2} f_{x''}\delta x(t)dt =$$

$$= \int_{t_0}^{T}\frac{d^2}{dt^2} f_{x''}\delta x(t)dt;$$

и так далее до последнего слагаемого, которое интегрируем по частям *m* раз:

$$\int_{t_0}^{T} f_{x^{(m)}}\delta x^{(m)}(t)dt = f_{x^{(m)}}\delta\, x^{(m-1)}(t)\Big|_{t_0}^{T} - \left[\frac{d}{dt} f_{x^{(m)}}\delta\, x^{(m-2)}(t)\right]_{t_0}^{T} + \ldots$$

$$\ldots + (-1)^{(m)}\int_{t_0}^{T}\frac{d^{(m)}}{dt^{(m)}} f_{x^{(m)}}\delta x(t)dt = (-1)^{(m)}\int_{t_0}^{T}\frac{d^{(m)}}{dt^{(m)}} f_{x^{(m)}}\delta x(t)dt.$$

Получаем выражение для первой вариации функционала:

$$\delta I = \int_{t_0}^{T}\left[f_x - \frac{d}{dt} f_{x'} + \frac{d^2}{dt^2} f_{x''} + \ldots + (-1)^{(m)}\frac{d^{(m)}}{dt^{(m)}} f_{x^{(m)}}\right]\delta x(t)dt = 0.$$

Так как вариация $\delta x(t)$ может быть выбрана произвольно, а выражение в квадратных скобках является непрерывной по *x* функцией на $x^*(t)$, то по основной лемме вариационного исчисления имеем

$$f_x - \frac{d}{dt} f_{x'} + \frac{d^2}{dt^2} f_{x''} + \ldots + (-1)^{(m)}\frac{d^{(m)}}{dt^{(m)}} f_{x^{(m)}} = 0. \qquad (2.13)$$

Уравнение (2.13) называется ***уравнением Эйлера-Пуассона***. Оно имеет порядок 2*m*, его общее решение $x = x(t, C_1, C_2, .., C_{2m})$ содержит 2*m* произвольных постоянных, которые могут быть определены из граничных условий (2.10).

Пример 2.16. Найти экстремали функционала $\int_0^{\pi/4}\left(x''^2(t) - 16x^2(t) + te^{-t}\right)dt$, удовлетворяющие граничным условиям $x(0)=1$, $x(\pi/4)=0$, $x'(0)=0$, $x'(\pi/4)=-2$.

Запишем уравнение Эйлера-Пуассона для данного функционала. Имеем $f = x''^2 - 16x^2 + te^{-t}$, тогда получим: $-32x - \frac{d}{dt}(0) + \frac{d^2}{dt^2}(2x'') = 0$. Откуда получаем линейное однородное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами: $x^{VI} - 16x = 0$.

Для его решения составим характеристическое уравнение $k^4 - 16 = 0$ и найдем его корни $k_{1,2} = \pm 2$, $k_{3,4} = \pm 2i$. Тогда общее решение принимает вид

$$x(t) = C_1 e^{2t} + C_2 e^{-2t} + C_3 \sin 2t + C_4 \cos 2t.$$

Дифференцируя его, находим $x'(t) = 2C_1 e^{2t} - 2C_2 e^{-2t} + 2C_3 \cos 2t - 2C_4 \sin 2t$.

Константы найдем из граничных условий:

$$\begin{cases} x(0) = C_1 + C_2 + C_4 = 1, \\ x'(0) = 2C_1 - 2C_2 + 2C_3 = 0, \\ x(\pi/4) = C_1 e^{\pi/2} + C_2 e^{-\pi/2} + C_3 = 0, \\ x'(\pi/4) = 2C_1 e^{\pi/2} - 2C_2 e^{-\pi/2} - 2C_4 = -2. \end{cases}$$

Решение этой системы имеет вид $C_1 = C_2 = C_3 = 0$, $C_4 = 1$. Окончательно получаем экстремаль данного функционала $x^*(t) = \cos 2t$. ■

Пример 2.17. Найти экстремали функционала $\int_0^1 e^{-t} x'''^2(t)dt$, удовлетворяющие граничным условиям $x(0) = 0$, $x(1) = e$, $x'(0) = 0$, $x'(1) = 3e$, $x''(0) = 2$, $x''(1) = 7e$.

Запишем уравнение Эйлера-Пуассона для данного функционала. Имеем $f = e^{-t} x'''^2$, тогда получим: $-\frac{d^3}{dt^3}(2e^{-t} x'''^2) = 0$ или $\frac{d^3}{dt^3}(e^{-t} x''') = 0$. Решить это уравнение можно двумя способами.

Первый способ: непосредственно из самого уравнения находим, что $e^{-t} x''' = C_1 t^2 + C_2 t + C_3$, откуда $x''' = \left(\tilde{C}_1 t^2 + \tilde{C}_2 t + \tilde{C}_3\right)e^t$. Далее необходимо три раза проинтегрировать левую и правую часть полученного уравнения. Причем при каждом интегрировании появится необходимость применить формулу интегрирования по частям трижды. Однако проводить интегрирование нет необходимости, очевидно, что общее решение будет иметь вид $x(t) = \left(C_1 t^2 + C_2 t + C_3\right)e^t + C_4 t^2 + C_5 t + C_6$.

Второй способ: дифференцируем трижды в полученном уравнении $\frac{d^3}{dt^3}(e^{-t}x''') = 0$ и получаем дифференциальное уравнение вида

$$e^{-t}x^{VI} - 3e^{-t}x^{V} + 3e^{-t}x^{IV} - e^{-t}x^{III} = 0 \text{ или } x^{VI} - 3x^{V} + 3x^{IV} - x^{III} = 0.$$

Это линейное неоднородное дифференциальное уравнение шестого порядка с постоянными коэффициентами. Соответствующее характеристическое уравнение имеет вид $k^6 - 3k^5 + 3k^4 - k^3 = 0$ или $k^3(k-1)^3 = 0$. Характеристические корни: $k_{1,2,3} = 0,\ k_{4,5,6} = 1$. Тогда общее решение также представляется в виде $x(t) = \left(C_1t^2 + C_2t + C_3\right)e^t + C_4t^2 + C_5t + C_6$.

Дифференцируя дважды, получим:

$$x'(t) = \left(2C_1t + C_2\right)e^t + \left(C_1t^2 + C_2t + C_3\right)e^t + 2C_4t + C_5 =$$

$$= \left(C_1t^2 + (2C_1 + C_2)t + C_2 + C_3\right)e^t + 2C_4t + C_5;$$

$$x''(t) = \left(2C_1t + 2C_1 + C_2\right)e^t + \left(C_1t^2 + (2C_1 + C_2)t + C_2 + C_3\right)e^t + 2C_4 =$$

$$= \left(C_1t^2 + (4C_1 + C_2)t + 2C_1 + 2C_2 + C_3\right)e^t + 2C_4.$$

Константы найдем из граничных условий:

$$\begin{cases} x(0) = C_3 + C_6 = 0, \\ x'(0) = C_2 + C_3 + C_5 = 0, \\ x''(0) = 2C_1 + 2C_2 + C_3 + 2C_4 = 2, \\ x(1) = \left(C_1 + C_2 + C_3\right)e + C_4 + C_5 + C_6 = e, \\ x'(1) = \left(3C_1 + 2C_2 + C_3\right)e + 2C_4 + C_5 = 3e, \\ x''(1) = \left(7C_1 + 3C_2 + C_3\right)e + 2C_4 = 7e. \end{cases}$$

Решение этой системы имеет вид $C_1 = 1,\quad C_2 = C_3 = C_4 = C_5 = C_6 = 0$. Окончательно получаем экстремаль данного функционала $x^*(t) = t^2e^t$. ■

2.6. Функционалы, зависящие от производных высшего порядка нескольких функций

Рассмотрим множество M допустимых вектор-функций $x(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))^T$, удовлетворяющих следующим условиям:

а) функции $x_k(t)$ определены и m раз непрерывно дифференцируемы на отрезке $[t_0, T]$, т.е. $x_k(t) \in C^m[t_0, T], k = 1, \ldots, n$;

б) функции $x_k(t)$ удовлетворяют граничным условиям

$$\begin{aligned} &x_k(t_0) = x_{k0},\ x_k^{(i)}(t_0) = x_{k0}^{(i)},\ k = 1, \ldots, n,\ i = 1, \ldots, m-1, \\ &x_k(T) = x_{kT},\ x_k^{(i)}(T) = x_{kT}^{(i)},\ k = 1, \ldots, n,\ i = 1, \ldots, m-1, \end{aligned} \tag{2.14}$$

где $y_{k0}, y_{kT}, y_{k0}^{(i)}, y_{kT}^{(i)},\ k = 1, \ldots, n,\ i = 1, \ldots, m-1$, заданы.

Среди допустимых вектор-функций $x(t)$, принадлежащих множеству M, требуется найти вектор-функцию $x^*(t) = (x_1^*(t), \ldots, x_n^*(t))^T$, на которой достигает экстремум функционал

$$I[x(t)] = \int_{t_0}^{T} f(t, x_1(t), \ldots, x_1^{(m)}(t), \ldots, x_n(t), \ldots, x_n^{(m)}(t))dt. \tag{2.15}$$

Предполагается, что подынтегральная функция $f(t, x_1, \ldots, x_1^{(m)}, \ldots, x_n, \ldots, x_n^{(m)})$ имеет непрерывные частные производные до (m+2)-го порядка включительно по всем переменным.

Стратегия поиска решения также состоит в нахождении первой вариации функционала и приравнивании его к нулю. Рассуждая аналогично п. 2.4, нетрудно получить, что вектор-функция $x^*(t)$, доставляющая экстремум функционалу, необходимо удовлетворяет ***системе уравнений Эйлера-Пуассона***:

$$f_{x_k} - \frac{d}{dt} f_{x_k'} + \frac{d^2}{dt^2} f_{x_k''} + \ldots + (-1)^{(m)} \frac{d^{(m)}}{dt^{(m)}} f_{x_k^{(m)}} = 0,\ k = 1, \ldots, n. \tag{2.16}$$

Общее уравнение этой системы $x_k = x_k(t, C_1, C_2, .., C_{2mn})$ зависит от $2mn$ произвольных постоянных, которые могут быть определены из граничных условий.

Пример 2.18. Найти экстремали функционала $\int_1^2 \left(x_1'''^2(t) + t^4 x_2''^2(t) \right) dt$, удовлетворяющие граничным условиям $x_1(1) = 1$, $x_1(2) = 29$, $x_1'(1) = 3$, $x_1'(2) = 76$, $x_1''(1) = 18$, $x_1''(2) = 158$, $x_2(1) = 0$, $x_2(2) = 1/4$, $x_2'(1) = 0$, $x_2'(2) = 1/4$.

Запишем систему уравнений Эйлера-Пуассона для данного функционала. Имеем $f = x_1'''^2 + t^4 x_2''^2$, тогда получим:

$$\begin{cases} -\dfrac{d^3}{dt^3}(2x_1''') = 0, \\ \dfrac{d^2}{dt^2}(2t^4 x_2'') = 0. \end{cases}$$

Каждое из уравнений решается независимо от другого. Найдем решение первого дифференциального уравнения, которое можно переписать в виде $x_1^{VI} = 0$. Тогда получим, что его общее решение имеет вид

$$x_1(t) = C_1 + C_2 t + C_3 t^2 + C_4 t^3 + C_5 t^4 + C_6 t^5.$$

Найдем неизвестные коэффициенты из граничных условий. Для этого продифференцируем функцию дважды:

$$x_1'(t) = C_2 + 2C_3 t + 3C_4 t^2 + 4C_5 t^3 + 5C_6 t^4,$$

$$x_1''(t) = 2C_3 + 6C_4 t + 12C_5 t^2 + 20C_6 t^3.$$

Тогда получаем

$$\begin{cases} x_1(1) = C_1 + C_2 + C_3 + C_4 + C_5 + C_6 = 1, \\ x_1'(1) = C_2 + 2C_3 + 3C_4 + 4C_5 + 5C_6 = 3, \\ x_1''(1) = 2C_3 + 6C_4 + 12C_5 + 20C_6 = 18, \\ x_1(2) = C_1 + 2C_2 + 4C_3 + 8C_4 + 16C_5 + 32C_6 = 29, \\ x_1'(2) = C_2 + 4C_3 + 12C_4 + 32C_5 + 80C_6 = 76, \\ x_1''(2) = 2C_3 + 12C_4 + 48C_5 + 160C_6 = 158. \end{cases}$$

Находим решение этой системы: $C_1 = 1,\ C_3 = -1,\ C_6 = 1,\ C_2 = C_4 = C_5 = 0$. Тогда получаем первую экстремаль $x_1^*(t) = C_1 - t^2 + t^5$.

Найдем решение второго уравнения. Имеем $\dfrac{d^2}{dt^2}(t^4 x_2'') = 0$, откуда получим $t^4 x_2'' = 6C_7 + 2C_8 t$ или $x_2'' = \dfrac{6C_7}{t^4} + \dfrac{2C_8}{t^3}$. Интегрируем дважды:

$x_2' = -\frac{2C_7}{t^3} - \frac{C_8}{t^2} + C_9$, $x_2(t) = \frac{C_7}{t^2} + \frac{C_8}{t} + C_9 t + C_{10}$. Найдем неизвестные коэффициенты из граничных условий:

$$\begin{cases} x_2(1) = C_7 + C_8 + C_9 + C_{10} = 0, \\ x_2'(1) = -2C_7 - C_8 + C_9 = 0, \\ x_2(2) = \frac{C_7}{4} + \frac{C_8}{2} + 2C_9 + C_{10} = \frac{1}{4}, \\ x_2'(2) = -\frac{C_7}{4} - \frac{C_8}{4} + C_9 = \frac{1}{4}. \end{cases}$$

Находим решение этой системы: $C_7 = 1,\ C_8 = -2,\ C_9 = 0,\ C_{10} = 1$. Тогда получаем первую экстремаль $x_2^*(t) = \frac{1}{t^2} - \frac{2}{t} + 1$. ■

ГЛАВА 3. Метод вариаций в задаче с подвижными границами

3.1. Функционалы, зависящие от одной функции

Рассмотрим множество M допустимых функций $x(t)$, удовлетворяющих следующим условиям:

а) функции $x(t)$ непрерывно дифференцируемы, т.е. $x(t) \in C^1(\Delta)$, где Δ – некоторый конечный отрезок, внутренними точками которого являются точки t_0 и T, которые заранее не заданы;

б) значения t_0, $x_0 = x(t_0)$ и T, $x_T = x(T)$, определяющие концы допустимых кривых, удовлетворяют граничным условиям

$$\psi(t_0, x_0) = 0, \ \ \varphi(T, x_T) = 0. \qquad (3.1)$$

Среди допустимых кривых $x(t)$, принадлежащих множеству M, требуется найти кривую $x^*(t)$, на которой достигает экстремального значения функционал

$$I[x(t)] = \int_{t_0}^{T} f(t, x(t), x'(t))dt\,. \qquad (3.2)$$

Подынтегральная функция $f(t, x(t), x'(t))$ имеет непрерывные частные производные до второго порядка включительно.

Условия (3.1) определяют подвижные границы (рис. 3.1). Таким образом, экстремум в поставленной задаче ищется на классе гладких функций, концы которых скользят по двум заданным линиям, описываемым уравнениями $\psi(t_0, x_0) = 0$ (для левого конца) и $\varphi(T, x_T) = 0$ (для правого конца).

Можно выделить следующие частные случаи общей постановки задачи:

Случай 1. Концы допустимых кривых скользят по двум заданным вертикальным прямым, описываемыми уравнениями $t = t_0$, $t = T$ (рис. 3.2).

Случай 2. Концы допустимых кривых скользят по двум заданным кривым, описываемыми уравнениями $x = \psi(t)$, $x = \varphi(t)$ (рисунок аналогичен рис. 3.1).

Случай 3. В рамках частного случая 2) можно выделить задачу, в которой заданные кривые являются прямыми линиями, параллельными оси абсцисс: $x = x_0$, $x = x_T$ (рис. 3.3).

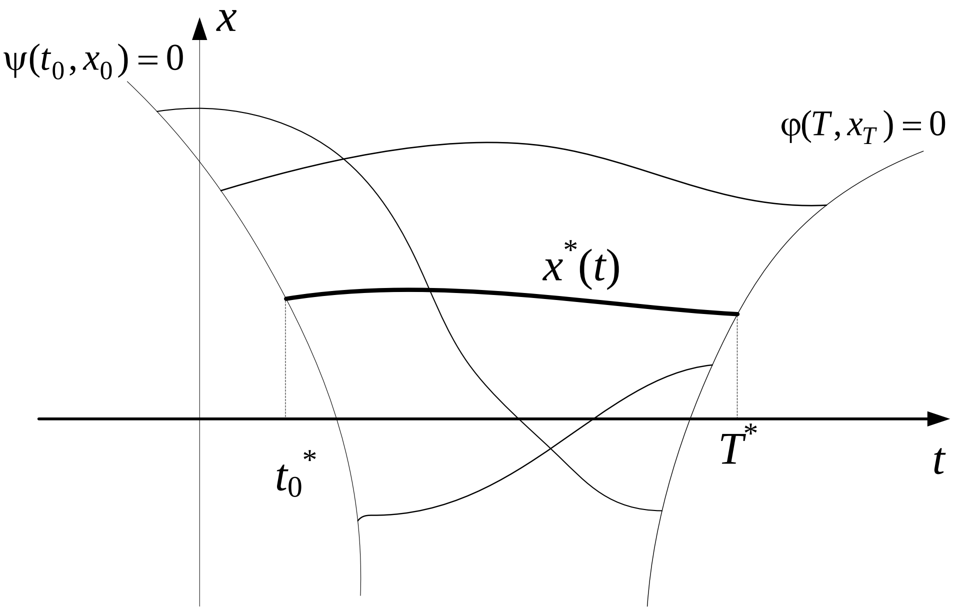


Рисунок 3.1 – Геометрическая иллюстрация к вариационной задаче с подвижными границами. Общий случай и случай 2

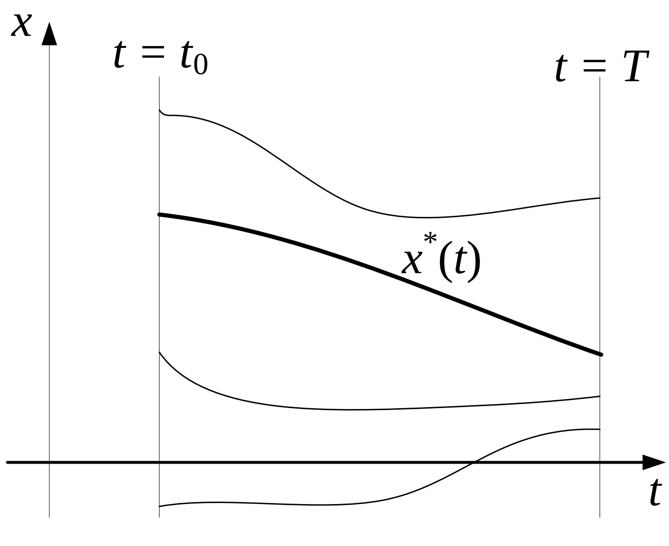


Рисунок 3.2 – Геометрическая иллюстрация к вариационной задаче с подвижными границами. Случай 1

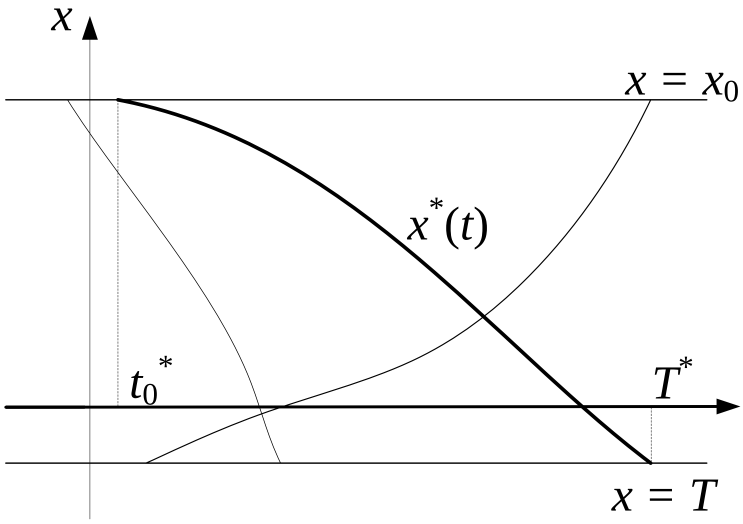


Рисунок 3.3 – Геометрическая иллюстрация к вариационной задаче с подвижными границами. Случай 3

В поставленной задаче наряду с поиском кривой $x^*(t)$ фактически производится выбор значений $t_0{}^*$, T^*, то есть ищется тройка $\left(x^*(t), t_0{}^*, T^*\right)$. При этом ε-окрестность первого порядка (ε > 0) образуется тройками $\left(x(t), t_0, T\right)$, удовлетворяющими условию

$$\left\| x(t) - x^*(t) \right\|_{C^1(\Delta)} < \varepsilon, \qquad \left| t_0 - t_0{}^* \right| < \varepsilon, \ \left| T - T^* \right| < \varepsilon .$$

Функционал в задаче (3.2) точнее записывается в форме

$$I[x(t), t_0, T] = \int_{t_0}^{T} f(t, x(t), x'(t))dt .$$

Стратегия поиска решения поставленной задачи строится на использовании необходимого условия экстремума функционала: $\delta I = 0$.

Пусть на тройке $\left(x^*(t), t_0{}^*, T^*\right)$ функционал $I[x(t), t_0, T]$ достигает экстремум. Тогда допустимые кривые определяются соотношениями

$$x(t) = x^*(t) + \alpha \delta x(t), \ x'(t) = x^*{}'(t) + \alpha \delta x'(t),$$

где $\delta x(t)$ – фиксированная вариация кривой, α – числовой параметр, а допустимые значения пределов интегрирования – формулами $t_0 = t_0{}^* + \alpha \delta t_0, \quad T = T^* + \alpha \delta T$.

Первая вариация функционала вычисляется по формуле:

$$\delta I = \frac{d}{d\alpha} \int\limits_{t_0^{\ *}+\alpha\delta t_0}^{T^*+\alpha\delta T} f\,(t, x^*(t) + \alpha\,\delta x(t), y^*{}'(t) + \alpha\,\delta x'(t))dt \Bigg|_{\alpha=0}.$$

Применив формулу дифференцирования интеграла, зависящего от параметра, и формулу интегрирования по частям, получим необходимое условие экстремума в виде

$$\begin{aligned} \delta I = \int\limits_{t_0^{\ *}}^{T^*} \left[f_x - \frac{d}{dt} f_{x'} \right] \cdot \delta x(t)dt + \\ + f_{x'}\,\delta x(t)\Big|_{t_0^{\ *}}^{T^*} + f\big|_{x=T^*} \cdot \delta T - f\big|_{x=t_0^{\ *}} \cdot \delta t_0 = 0. \end{aligned} \tag{3.3}$$

Из выражения (3.3) видно, что вариация функционала δI состоит из интегральной части, которая определяется вариацией кривой $\delta x(t)$ при фиксированных значениях $t_0^{\ *}$, T^*, и трех слагаемых, зависящих от вариаций δt_0, δT концов интервала интегрирования и вариаций $\delta x(t)$ концов экстремали при $t = t_0^{\ *}$, $t = T^*$.

Из условия $\delta I = 0$ следуют два равенства:

1. $\int\limits_{t_0^{\ *}}^{T^*} \left[f_x - \dfrac{d}{dt} f_{x'} \right] \cdot \delta\, x(t)dt = 0$,

то есть экстремаль $x^*(t)$ в задаче (3.2) должна быть решением уравнения Эйлера $f_x - \dfrac{d}{dt} f_{x'} = 0$.

2. $f_{x'}\delta\, x(t)\Big|_{t_0^{\ *}}^{T^*} + f\big|_{x=T^*} \cdot \delta T - f\big|_{x=t_0^{\ *}} \cdot \delta t_0 = 0.$ (3.4)

Заметим, что $\delta\, x(t)\big|_{x=t_0^{\ *}}$ не совпадает с δx_0, а $\delta\, x(t)\big|_{x=T^*}$ не совпадает с δx_T. На рис. 3.4 геометрически показана связь вариация функции на правом конце $\delta\, x(t)\big|_{x=T^*}$ с вариациями абсциссы и ординаты правого конца. Приняты следующие обозначения $BD = \delta\, x(t)\big|_{x=T^*}$, $FC = \delta x_T$, $DE = \delta T$, $EC \cong x'(T^*) \cdot \delta T$, $BD = FC - EC$, то есть $\delta x(t)\big|_{x=T^*} \cong \delta x_T - x'(T^*) \cdot \delta T$. Заметим, что приближенное равенство справедливо с точностью до бесконечно малых величин более высокого порядка. Для левого конца геометрическая иллюстрация и формулы связи будут аналогичны: $\delta x(t)\big|_{x=t_0^*} \cong \delta x_0 - x'(t_0^*)\cdot\delta t_0$.

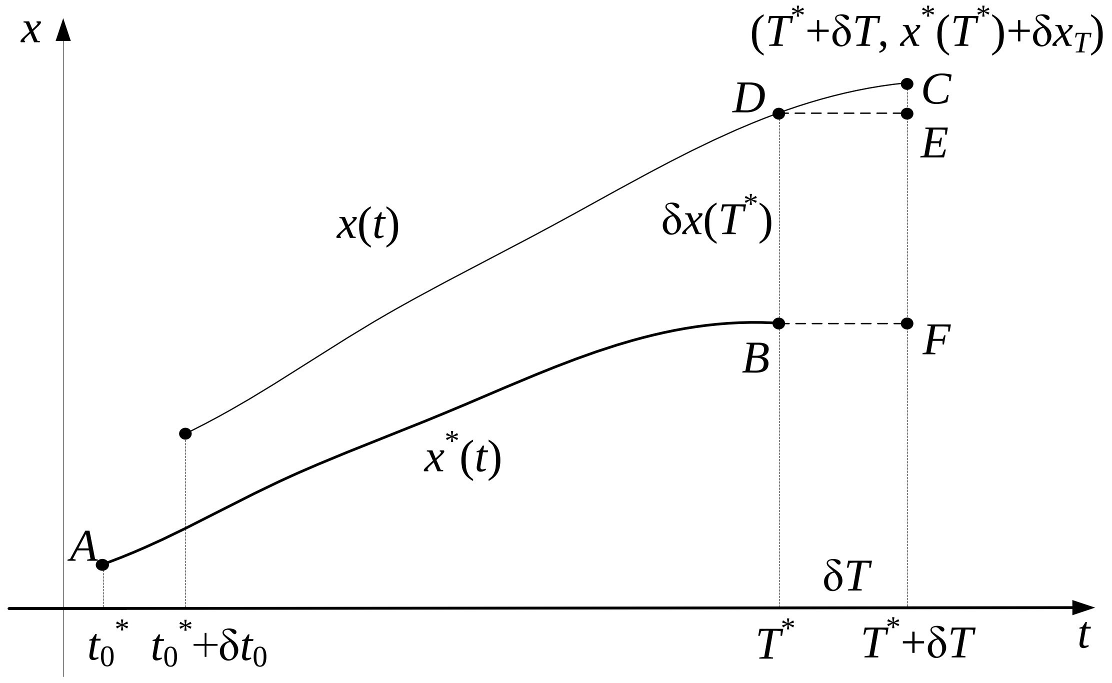


Рисунок 3.4 – Геометрическая иллюстрация связи вариация функции на правом конце с вариациями абсциссы и ординаты правого конца

Поэтому равенство (3.4) можно переписать в форме

$$\begin{aligned} &f_{x'}\big|_{x=T^*}\cdot\delta x_T+\left[f-x' f_{x'}\right]_{x=T^*}\cdot\delta T- \\ &\qquad -f_{x'}\big|_{x=t_0^*}\cdot\delta x_{t_0}-\left[f-x' f_{x'}\right]_{x=t_0^*}\cdot\delta t_0=0. \end{aligned} \tag{3.5}$$

Заметим, что с учетом замены (3.4) на (3.5) вариация функционала и соответствующее необходимое условие экстремума записывается в форме

$$\begin{aligned} \delta I=\int_{t_0^*}^{T^*}\left[f_x-\frac{d}{dt}f_{x'}\right]\cdot\delta x(t)dt+f_{x'}\big|_{t=T^*}\cdot\delta x_T+\left[f-x' f_{x'}\right]_{t=T^*}\cdot\delta T- \\ -f_{x'}\big|_{t=t_0^*}\cdot\delta x_{t_0}-\left[f-x' f_{x'}\right]_{t=t_0^*}\cdot\delta t_0=0. \end{aligned} \tag{3.6}$$

Однако, вариации δx_T, δT не связаны с вариациями δx_0, δt_0. Поэтому (3.5) можно переписать в виде

$$\begin{cases} f_{x'}\big|_{t=t_0^*} \cdot \delta x_{t_0} + \left[f - x' f_{x'} \right]_{t=t_0^*} \cdot \delta t_0 = 0, \\ f_{x'}\big|_{t=T^*} \cdot \delta x_T + \left[f - x' f_{x'} \right]_{t=T^*} \cdot \delta T = 0. \end{cases} \qquad (3.7)$$

В силу наличия граничных условий вариации δx_T и δT, а также δx_0 и δt_0 связаны:

$$\begin{cases} \delta\psi = \left.\dfrac{\partial \psi}{\partial t}\right|_{\left(t_0^*, x^*(t_0^*)\right)} \cdot \delta t_0 + \left.\dfrac{\partial \psi}{\partial x}\right|_{\left(t_0^*, x^*(t_0^*)\right)} \cdot \delta x_0 = 0, \\ \delta\varphi = \left.\dfrac{\partial \varphi}{\partial t}\right|_{\left(T^*, x^*(T^*)\right)} \cdot \delta T + \left.\dfrac{\partial \varphi}{\partial x}\right|_{\left(T^*, x^*(T^*)\right)} \cdot \delta x_T = 0. \end{cases} \qquad (3.8)$$

Условия (3.7), (3.8) называются ***условиями трансверсальности***.

Тем самым, окончательно получаем, что если на функции $x^*(t) \in C^1(\Delta)$, удовлетворяющей граничным условиям (3.1), достигается слабый экстремум в задаче (3.2), то она необходимо удовлетворяет ***уравнению Эйлера*** $f_x - \dfrac{d}{dt} f_{x'} = 0$ и ***условиям трансверсальности*** (3.7), (3.8).

Замечание 3.1.1. Если один из концов допустимых кривых закреплен, то условие трансверсальности для него не записываются, поскольку в этом случае соответствующие вариации равны нулю.

Замечание 3.1.2. Если рассматривается задача, в которой концы кривых скользят по двум заданным вертикальным прямым $t = t_0$, $t = T$ (**случай 1**), поскольку t_0 и T заданы, то вариации $\delta t_0 = 0,\ \delta T = 0$. Следовательно, условия трансверсальности (3.7) имеют вид

$$\begin{cases} f_{x'}\big|_{t=t_0^*} \cdot \delta x_{t_0} = 0, \\ f_{x'}\big|_{t=T^*} \cdot \delta x_T = 0. \end{cases},$$

и в силу произвольности вариаций δx_T, δx_{t_0} получаем условия трансверсальности

$$\begin{cases} f_{x'}\big|_{t=t_0^*} = 0, \\ f_{x'}\big|_{t=T^*} = 0. \end{cases}, \qquad (3.9)$$

Условия (3.7) выполняются, так как уравнения прямых можно записать в виде

$$\psi(t_0) = t - t_0^*, \ \varphi(T) = t - T^*.$$

Замечание 3.1.3. Если концы допустимых кривых скользят по двум заданным кривым $x = \psi(t), \ x = \varphi(t)$ (**случай 2**), то условия (3.1) можно записать в виде

$$\psi(t_0, x_0) = x_0 - \psi(t_0) = 0, \qquad \varphi(T, x_T) = x_T - \varphi(T) = 0.$$

Следовательно, из (3.7) получаем

$$-\psi'(t_0^*)\cdot\delta t_0 + 1\cdot\delta x_0 = 0, \qquad -\varphi'(T^*)\cdot\delta T + 1\cdot\delta x_T = 0,$$

или $\delta x_0 = \psi'(t_0^*)\cdot\delta t_0, \ \delta x_T = \varphi'(T^*)\cdot\delta T$.

Тогда из (3.7) следует

$$\begin{cases} \left[f + (\psi' - x') f_{x'}\right]_{t=t_0^*} \cdot \delta t_0 = 0, \\ \left[f + (\varphi' - x') f_{x'}\right]_{t=T^*} \cdot \delta T = 0. \end{cases}$$

В силу произвольности вариаций $\delta t_0, \ \delta T$ получаем условия трансверсальности для данного случая:

$$\begin{cases} \left[f + (\psi' - x') f_{x'}\right]_{t=t_0^*} = 0, \\ \left[f + (\varphi' - x') f_{x'}\right]_{t=T^*} = 0. \end{cases} \qquad (3.10)$$

Замечание 3.1.4. Если рассматривается случай задания кривых в виде $x = x_0 = \psi(t) = const$, $x = x_T = \varphi(t) = const$ (**случай 3**), то условия (3.10) упрощаются

$$\begin{cases} \left[f - x' f_{x'}\right]_{t=t_0^*} = 0, \\ \left[f - x' f_{x'}\right]_{t=T^*} = 0. \end{cases} \qquad (3.11)$$

Замечание 3.1.5. Если условия (3.1) отсутствуют, то вариации δx_T, δT, δx_0, δt_0 произвольны. Тогда из условия (3.7) следует, что

$$\begin{cases} f_{x'}\big|_{x=t_0^*} = 0, \\ \left[f - x' f_{x'} \right]_{x=t_0^*} = 0, \\ f_{x'}\big|_{x=T^*} = 0, \\ \left[f - x' f_{x'} \right]_{x=T^*} = 0, \end{cases} \qquad (3.12)$$

Замечание 3.1.6. Если условия (3.1) записаны в форме $x(t_0) = x_0$, $x(T) = x_T$, то есть рассматривается задача с неподвижными границами, то, поскольку вариации $\delta x_T = \delta T = \delta x_0 = \delta t_0 = 0$, условия трансверсальности (3.7) выполняются, а произвольные постоянные в общем уравнении Эйлера определяются граничными условиями.

Пример 3.1. Найти кривую, на которой функционал $I[x(t)] = \int_1^2 \left(2t \cdot x(t) + x(t) \cdot x'(t) + x'^2(t) \right) dt$ может достигать экстремум, если левый ее конец фиксирован в точке $A(1, 0)$, а правый лежит на прямой $t = 2$ (рис. 3.5).

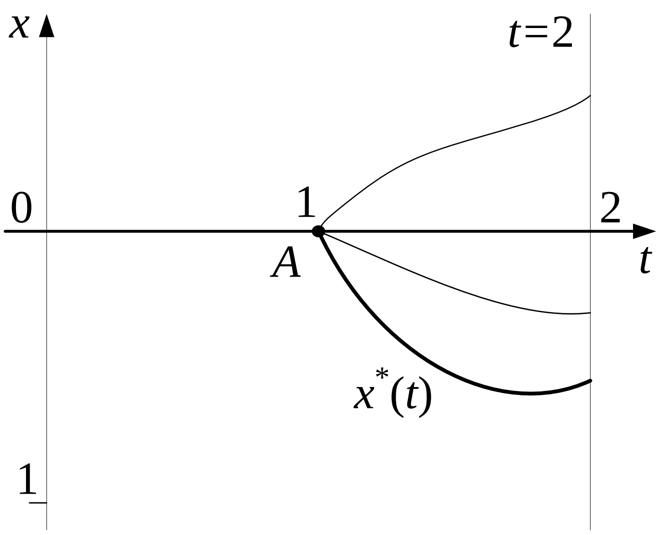


Рисунок 3.5 – Геометрическая иллюстрация к примеру 3.1

Запишем уравнение Эйлера для данного функционала. Имеем $f(t, x, x') = 2t \cdot x + x \cdot x' + x'^2$, тогда $f_x = 2t + x'$, $f_{x'} = x + 2x'$, $\dfrac{d}{dt} f_{x'} = x' + 2x''$.

Получаем следующее дифференциальное уравнение: $2t + x' - x' - 2x'' = 0$ или $x'' = t$. Интегрируя его дважды, получаем общее решение:

$$x(t) = \frac{t^3}{6} + C_1 t + C_2, \tag{3.13}$$

представляющее собой двухпараметрическое семейство кубических парабол.

Далее определим, что дают граничные условия. Левый конец допустимых кривых закреплен в точке $A(1, 0)$, следовательно, условие трансверсальности для него выписывать не нужно, имеет место условие $x(1) = 0$. Применяя это условие к общему решению (3.13), имеем: $x(1) = \frac{1}{6} + C_1 + C_2 = 0$. Откуда находим $C_2 = -\frac{1}{6} - C_1$ и получаем однопараметрическое семейство кубических парабол

$$x(t) = \frac{t^3}{6} + C_1 t - C_1 - \frac{1}{6}. \tag{3.14}$$

Условия на правом конце соответствуют случаю 1, когда конец допустимой кривой скользит по вертикальной прямой, следовательно, для него условие трансверсальности принимают вид $f_{x'}\big|_{t=T^*} = 0$. Получаем:

$$f_{x'}\big|_{(x^*(t),T^*)} = (x + 2x')\big|_{(x^*(t),T^*)} = \left(\frac{t^3}{6} + C_1 t - C_1 - \frac{1}{6} + 2\cdot\left(\frac{t^2}{2} + C_1\right)\right)\Bigg|_{t=T^*=2} =$$

$$= \frac{8}{6} + 2C_1 - C_1 - \frac{1}{6} + 2\cdot\left(\frac{4}{2} + C_1\right) = \frac{31}{6} + 3C_1 = 0,$$

откуда находим $C_1 = -\frac{31}{18}$ и окончательно получаем решение

$$x^*(t) = \frac{t^3}{6} - \frac{31}{18}t + \frac{14}{9} \text{ и } x_T{}^* = x^*(2) = -\frac{5}{9}. \blacksquare$$

Пример 3.2. Среди всех гладких кривых, соединяющих точку $O(0, 0)$ и прямую $x = –2$, найти такую, на которой функционал $I[x(t)] = \int_0^T \left(2t \cdot x'(t) - x'^2(t)\right)dt$ может достигать экстремум (рис. 3.6).

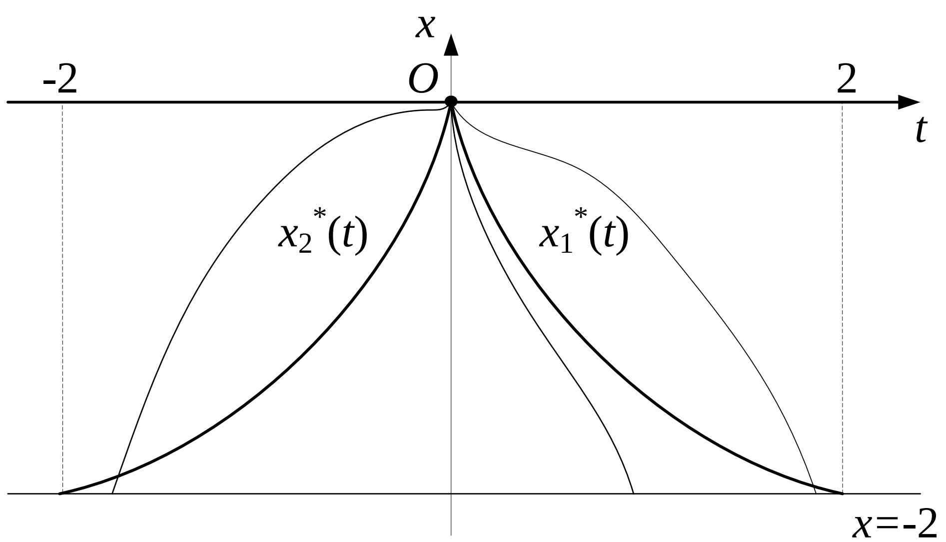


Рисунок 3.6 – Геометрическая иллюстрация к примеру 3.2

Интегрант $f(t, x, x') = 2t \cdot x' - x'^2$ не зависит явно от x, тогда уравнение Эйлера принимает вид $f_{x'} = C$. Тогда получаем $f_{x'} = 2t - 2x' = -2C_1$. Откуда $x' = t + C_1$ и $x(t) = \dfrac{t^2}{2} + C_1 t + C_2$ – общее решение (двухпараметрическое семейство парабол). Поскольку один из концов допустимых кривых закреплен в точке $O(0, 0)$, то находим $x(0) = C_2 = 0$. Тогда $x(t) = \dfrac{t^2}{2} + C_1 t$.

Условия на втором конце соответствуют случаю 3, когда конец допустимой кривой скользит по горизонтальной прямой, следовательно, для него условие трансверсальности принимают вид $\left[f - x' f_{x'}\right]_{t=T^*} = 0$. Получаем:

$$\left[f - x' f_{x'}\right]_{(x^*(t),T^*)} = \left(2t \cdot x' - x'^2 - x' \cdot (2t - 2x')\right)\Big|_{(x^*(t),T^*)} = x'^2\Big|_{(x^*(t),T^*)} =$$

$$= (t + C_1)^2\Big|_{t=T^*} = (T^* + C_1)^2 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad T^* + C_1 = 0.$$

Кроме того, на втором конце имеет место следующее уравнение $x(T^*) = -2$. Тогда, подставляя выражение для допустимой кривой, находим $x(T^*) = \dfrac{T^{*2}}{2} + C_1 T^* = -2$. Окончательно имеем систему для определения параметров T^* и C_1:

$$\begin{cases} T^* + C_1 = 0, \\ \dfrac{T^{*2}}{2} + C_1 T^* = -2. \end{cases}$$

Данная система имеет два решения: $T^* = 2,\ C_1 = -2$ и $T^* = -2,\ C_1 = 2$. Тогда окончательно получаем два решения:

$$x_1{}^*(t) = \frac{t^2}{2} - 2t,\ T_1{}^* = 2 \text{ и } x_2{}^*(t) = \frac{t^2}{2} + 2t,\ T_2{}^* = -2. \ \blacksquare$$

Пример 3.3. Найти кривую, на которой функционал $I[x(t)] = \int\limits_0^T x'^3(t)dt$ может достигать экстремум, если один ее конец фиксирован в точке $O(0, 0)$, а правый скользит по прямой $x + 2t = 1$ (рис. 3.7).

Интегрант $f(t, x, x') = x'^3$ зависит только от x', следовательно, сразу можем записать общее решение уравнения Эйлера $x(t) = C_1 t + C_2$. Поскольку один из концов допустимых кривых закреплен в точке $O(0, 0)$, то находим $x(0) = C_2 = 0$. Тогда $x(t) = C_1 t$.

Условия на втором конце соответствуют случаю 2, поскольку уравнение прямой можно записать в виде $x = 1 - 2t$. Для него условие трансверсальности принимают вид $\left[f + (\varphi' - x') f_{x'}\right]_{t=T^*} = 0$, где $\varphi(t) = 1 - 2t$. Получаем:

$$\left[f + (\varphi' - x') f_{x'}\right]_{(x^*(t), T^*)} = \left(x'^3 + (-2 - x') \cdot 3x'^2\right)\Big|_{(x^*(t), T^*)} =$$
$$= \left(-2x'^3 - 6x'^2\right)\Big|_{(x^*(t), T^*)} = -2C_1^3 - 6C_1^2 = 0.$$

Кроме того, на втором конце имеет место следующее уравнение $x(T^*) = 1 - 2T^*$. Тогда, подставляя выражение для допустимой кривой, находим $x(T^*) = C_1 T^* = 1 - 2T^*$. Окончательно имеем систему для определения параметров T^* и C_1:

$$\begin{cases} -2C_1^3 - 6C_1^2 = 0, \\ C_1 T^* = 1 - 2T^*, \end{cases} \qquad \text{или} \qquad \begin{cases} C_1^2(3 + C_1) = 0, \\ C_1 T^* = 1 - 2T^*. \end{cases}$$

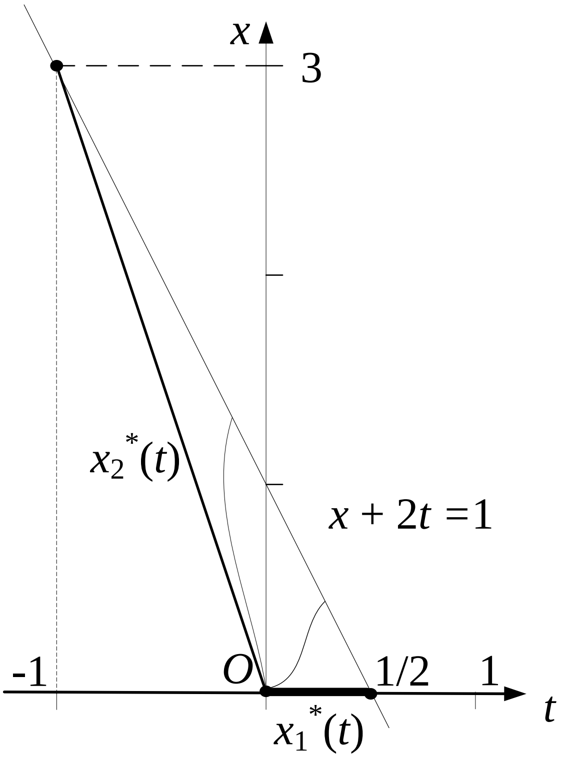


Рисунок 3.7 – Геометрическая иллюстрация к примеру 3.3

Первое уравнение системы имеет два решения – $C_1 = 0$ и $C_1 = -3$. При $C_1 = 0$ находим $T^* = 1/2$, при $C_1 = -3$ имеем $T^* = -1$. Тогда окончательно получаем два решения:

$$x_1^*(t) = 0,\ T_1^* = 1/2,\ x_{1T}^* = 0 \text{ и } x_2^*(t) = -3t,\ T_1^* = -1,\ x_{1T}^* = 3. \blacksquare$$

Пример 3.4. Найти расстояние между кривыми $x(t) = t^2 + 2$ и $x(t) = t - 1$ (рис. 3.8).

Данная задача относится к классическим задачам вариационного исчисления и сводится нахождению экстремума функционала

$$L[x(t)] = \int_{t_0}^{T} \sqrt{1 + x'^2(t)}\,dt,$$

выражающего длину дуги кривой, при условии, что концы допустимых кривых скользят по двум заданным кривым. Из рис. 3.8 видно, что краевые условия в задаче имеют вид: для левого конца – $x(t_0) = t_0^2 + 2$, для правого конца – $x(T) = T - 1$.

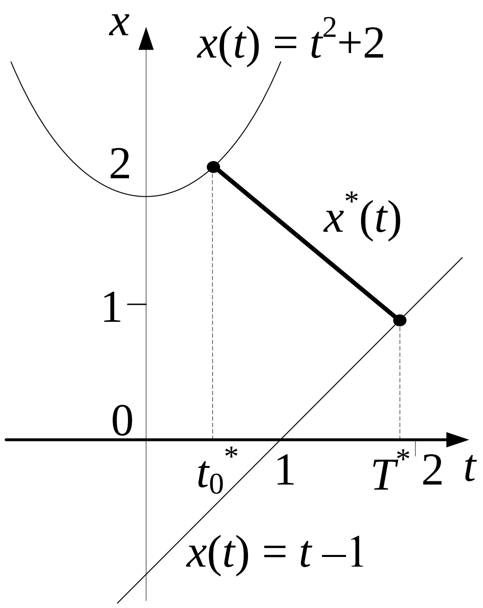


Рисунок 3.8 – Геометрическая иллюстрация к примеру 3.4

Поскольку интегрант $f(t, x, x') = \sqrt{1 + x'^2}$ зависит только от x', то общее решение уравнения Эйлера принимает вид $x(t) = C_1 t + C_2$.

Краевые условия относятся к случаю 2, тогда условия трансверсальности принимают вид:

$$\begin{cases} \left[f + (\psi' - x') f_{x'} \right]_{t = t_0^*} = 0, \\ \left[f + (\varphi' - x') f_{x'} \right]_{t = T^*} = 0, \end{cases}$$

где $\psi(t) = t^2 + 2$, $\varphi(t) = t - 1$. Найдем для левого конца:

$$\left[f + (\psi' - x') f_{x'} \right]_{(x^*(t), t_0^*)} = \left[\sqrt{1 + x'^2} + (2t - x') \frac{x'}{\sqrt{1 + x'^2}} \right] \Bigg|_{(x^*(t), t_0^*)} =$$

$$= \frac{1 + x'^2 + 2t\, x' - x'^2}{\sqrt{1 + x'^2}} \Bigg|_{(x^*(t), t_0^*)} = \frac{1 + 2t\, x'}{\sqrt{1 + x'^2}} \Bigg|_{(x^*(t), t_0^*)} = \frac{1 + 2C_1 t_0^*}{\sqrt{1 + C_1^2}} = 0,$$

откуда $1 + 2C_1 t_0^* = 0$. Аналогично для правого конца:

$$\left[f + (\varphi' - x') f_{x'} \right]_{(x^*(t), T^*)} = \left[\sqrt{1 + x'^2} + (1 - x') \frac{x'}{\sqrt{1 + x'^2}} \right] \Bigg|_{(x^*(t), T^*)} =$$

$$=\frac{1+x'^2+x'-x'^2}{\sqrt{1+x'^2}}\bigg|_{(x^*(t),T^*)}=\frac{1+x'}{\sqrt{1+x'^2}}\bigg|_{(x^*(t),T^*)}=\frac{1+C_1}{\sqrt{1+C_1^2}}=0,$$

откуда $1+C_1=0$.

С учетом граничных условий $x(t_0^*)=C_1t_0^*+C_2=t_0^{*2}+2$ и $x(T^*)=C_1T^*+C_2=T^*-1$ окончательно получаем систему для определения неизвестных C_1,C_2,t_0^*,T^*:

$$\begin{cases}1+2C_1t_0^*=0,\\ 1+C_1=0,\\ C_1t_0^*+C_2=t_0^{*2}+2,\\ C_1T^*+C_2=T^*-1.\end{cases}$$

Из второго уравнения системы находим $C_1=-1$, тогда из первого уравнения $t_0^*=-\frac{1}{2C_1}=\frac{1}{2}$. Подставляя найденные значения в третье уравнение, вычислим $C_2=t_0^{*2}+2-C_1t_0^*=\frac{11}{4}$. Тогда четвертое уравнение дает $T^*=\frac{15}{8}$.

Окончательно получаем решение $x^*(t)=-t+\frac{11}{4}$, $t_0^*=\frac{1}{2}$, $T^*=\frac{15}{8}$. Тогда расстояние между заданными кривыми будет равно:

$$L=\int_{1/2}^{15/8}\sqrt{1+x'^2(t)}dt=\int_{1/2}^{15/8}\sqrt{1+(-1)^2}dt=\frac{11\sqrt{2}}{8}\text{ (ед.). ■}$$

3.2. Задача Больца

Рассмотрим множество M допустимых функций $x(t)$, удовлетворяющих следующим условиям:

а) функции $x(t)$ непрерывно дифференцируемы, т.е. $x(t)\in C^1(\Delta)$, где Δ – некоторый конечный отрезок, значение $t_0\in\Delta$ задано, а T не задано и является внутренней точкой отрезка Δ;

б) левый конец закреплен, т.е. $x(t_0) = x_0$, где x_0 задано; правый конец удовлетворяет граничному условию

$$\varphi(T, x_T) = 0, \tag{3.15}$$

где $x_T = x(T)$, а $\varphi(t, x)$ – заданная непрерывно дифференцируемая функция.

Среди допустимых кривых $x(t)$, принадлежащих множеству M, требуется найти кривую $x^*(t)$, для которой выполнено условие

$$I[x^*(t)] = \underset{x(t)\in M}{extr}\left\{\int_{t_0}^{T} f(t, x(t), x'(t))dt + g(T, x(T))\right\}. \tag{3.16}$$

Подынтегральная функция $f(t, x(t), x'(t))$ имеет непрерывные частные производные до второго порядка включительно по всем переменным, функция $g(t, x)$ непрерывно дифференцируема по всем переменным.

Функционал $\int_{t_0}^{T} f(t, x(t), x'(t))dt + g(T, x(T))$ называется ***функционалом Больца***. Кроме интегрального члена он содержит ***терминальный член*** $g(T, x(T))$.

В рассматриваемой задаче для простоты изложения полагается, что левый конец допустимых кривых закреплен. В качестве обобщений могут быть рассмотрены задачи с подвижным левым концом, удовлетворяющим условию $\psi(t_0, x_0) = 0$, а так же функционалы с терминальным членом $g(T, x(T)) + q(t_0, x(t_0))$ или, в общем случае, $g(T, x(T), t_0, x(t_0))$.

В рассматриваемой задаче (3.16) фактически ищется пара $(x^*(t), T^*)$, на котором функционал достигает экстремум.

Стратегия поиска решения задачи Больца опирается на необходимое условие экстремума функционала: $\delta I = 0$. Так как рассматриваемая задача отличается от изложенной в п. 3.1 только наличием терминального члена и отсутствуем условия $\psi(t_0, x_0) = 0$, то найдем вклад терминального члена в выражение для первой вариации функционала:

$$\delta g = \left.\frac{\partial g}{\partial t}\right|_{(T^*, x^*(T^*))} \cdot \delta T + \left.\frac{\partial g}{\partial x}\right|_{(T^*, x^*(T^*))} \cdot \delta x_T .$$

Добавим δg к выражению (3.6) для δI, учитывая, что $\delta t_0 = 0,\ \delta x_0 = 0$, поскольку левый конец допустимых кривых закреплен:

$$\delta I = \int_{t_0}^{T^*} \left[f_x - \frac{d}{dt} f_{x'} \right] \cdot \delta x(t) dt +$$

$$+ \left.\left(f_{x'} + \frac{\partial g}{\partial x} \right)\right|_{(T^*, x^*(T^*))} \cdot \delta x_T + \left.\left(f + \frac{\partial g}{\partial t} - x' f_{x'} \right)\right|_{(T^*, x^*(T^*))} \cdot \delta T = 0.$$

Из равенства $\delta I = 0$ и произвольности вариации $\delta y(x)$ получаем, что экстремаль $x^*(t)$ должна удовлетворять:

а) уравнению Эйлера

$$f_x - \frac{d}{dt} f_{x'} = 0; \tag{3.17}$$

б) условию трансверсальности

$$\left.\left(f_{x'} + \frac{\partial g}{\partial x} \right)\right|_{(T^*, x^*(T^*))} \cdot \delta x_T + \left.\left(f + \frac{\partial g}{\partial t} - x' f_{x'} \right)\right|_{(T^*, x^*(T^*))} \cdot \delta T = 0. \tag{3.18}$$

В силу наличия граничного условия (3.15) вариации δx_T и δT связаны:

$$\delta \varphi = \left.\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right|_{(T^*, x^*(T^*))} \cdot \delta T + \left.\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right|_{(T^*, x^*(T^*))} \cdot \delta x_T = 0. \tag{3.19}$$

Тем самым, окончательно получаем, что если на функции $x^*(t) \in C^1(\Delta)$, удовлетворяющей граничным условиям (3.15), достигается слабый экстремум в задаче (3.16), то она необходимо удовлетворяет уравнению Эйлера (3.17) и условиям трансверсальности (3.18), (3.19).

Замечание 3.2.1. Если T задано, то есть правый конец допустимых кривых скользит по прямой, описываемой уравнением $t = T$ (**случай 1**), то, поскольку $\delta T = 0$, а δx_T произвольно, условие трансверсальности (3.18) принимает вид

$$\left(f_{x'} + \frac{\partial g}{\partial x} \right)\Bigg|_{(T^*, x^*(T^*))} = 0. \qquad (3.20)$$

Замечание 3.2.2. Если правый конец допустимых кривых скользит по кривой с уравнением $x = \varphi(t)$ (**случай 2**), то граничное условие можно записать в виде $\varphi(T, x_T) = x_T - \varphi(T) = 0$. Тогда из (3.19) получаем

$$-\varphi'(T^*) \cdot \delta T + 1 \cdot \delta x_T = 0 \qquad \text{или} \qquad \delta x_T = \varphi'(T^*) \cdot \delta T.$$

Подставляя полученную связь между вариациями в (3.18) и учитывая произвольность δT, находим

$$\left[f + \frac{\partial g}{\partial t} + (\varphi' - x') \cdot f_{x'} + \frac{\partial g}{\partial x} \cdot \varphi' \right]\Bigg|_{(T^*, x^*(T^*))} = 0. \qquad (3.21)$$

Замечание 3.2.3. Если граничное условие (3.15) отсутствует, то вариации δx_T и δT произвольны. Поэтому из условия (3.18) следует

$$\left(f_{x'} + \frac{\partial g}{\partial x} \right)\Bigg|_{(T^*, x^*(T^*))} = 0, \qquad \left(f + \frac{\partial g}{\partial t} - x' f_{x'} \right)\Bigg|_{(T^*, x^*(T^*))} = 0. \qquad (3.22)$$

Пример 3.5. Найти кривую, на которой функционал $I[x(t)] = \int\limits_0^2 x'^2(t)dt + 10x^2(2)$ может достигать экстремум, если один ее конец фиксирован в точке $A(0, 1)$.

Интегрант $f(t, x, x') = x'^2$ зависит только от x', следовательно, сразу можем записать общее решение уравнения Эйлера в виде $x(t) = C_1 t + C_2$. Поскольку один из концов допустимых кривых закреплен в точке $A(0, 1)$, то находим $x(0) = C_2 = 1$. Тогда $x(t) = C_1 t + 1$.

Условия на втором конце соответствуют случаю 1, поскольку значение $T^* = 2$ задано. В этом случае условие трансверсальности принимают вид $\left(f_{x'} + \frac{\partial g}{\partial x} \right)\Big|_{(T^*, x^*(T^*))} = 0$, где $g(t, x) = 10x^2$. Получаем:

$$\left(f_{x'} + \frac{\partial g}{\partial x} \right)\Bigg|_{(T^*, x^*(T^*))} = \left(2x' + 20x\right)\Big|_{(T^*, x^*(T^*))} = \left(2C_1 + 20\,(C_1 t + 1)\right)\Big|_{T^*} =$$

$$= 2C_1 + 20\,(2C_1 + 1) = 42C_1 + 20 = 0,$$

откуда находим $C_1 = -\dfrac{20}{42} = -\dfrac{10}{21}$. Тогда получаем решение $x(t) = -\dfrac{10}{21}t + 1$. ■

Пример 3.6. Найти кривую, на которой функционал $I[x(t)] = \int\limits_0^T (4\,x(t) - x'^2(t))dt + x^2(T)$ может достигать экстремум, если один ее конец фиксирован в точке $O(0, 0)$, а второй скользит по прямой $x + t = 1$.

Составим уравнение Эйлера для функционала. Имеем $f(t, x, x') = 4\,x - x'^2$, тогда $f_x = 4$, $f_{x'} = -2x'$, $\dfrac{d}{dt} f_{x'} = -2x''$. Тогда получим

$4 + 2x'' = 0$, откуда $x'' = -2$, $x' = -2t + C_1$, $x(t) = -t^2 + C_1 t + C_2$.

Поскольку один из концов допустимых кривых закреплен в точке $O(0, 0)$, то находим $x(0) = C_2 = 0$. Тогда $x(t) = C_1 t - t^2$.

Условия на втором конце соответствуют случаю 2, поскольку уравнение прямой можно переписать в виде $x = 1 - t$. В этом случае условие трансверсальности принимают вид $\left[f + \dfrac{\partial g}{\partial t} + (\varphi' - x') \cdot f_{x'} + \dfrac{\partial g}{\partial x} \cdot \varphi' \right]\Bigg|_{(T^*, x^*(T^*))} = 0$, где $g(t, x) = x^2$, $\varphi(t) = 1 - t$. Получаем:

$$\left[4\,x - x'^2 + 0 + (-1 - x') \cdot (-x') + 2x \cdot (-1)\right]_{(T^*, x^*(T^*))} =$$

$$= \left[x' + 2x\right]_{(T^*, x^*(T^*))} = \left[C_1 - 2t + 2(C_1 t - t^2)\right]_{T^*} = C_1 - 2T^* + 2(C_1 T^* - T^{*2}) = 0.$$

Далее, на правом конце при $t = T^*$ допустимая кривая и граничная кривая пересекаются, т.е. $x(T^*) = \varphi(T^*)$. Таким образом, получаем систему для определения неизвестных C_1 и T^*:

$$\begin{cases} C_1 - 2T^* + 2(C_1 T^* - T^{*2}) = 0, \\ C_1 T^* - T^{*2} = 1 - T^*. \end{cases}$$

Подставив правую часть второго уравнения в выражение в скобках в первом уравнении, получим $C_1 - 2T^* + 2(1 - T^*) = 0$, откуда находим $C_1 = 4T^* - 2$. Далее, данное выражение подставляем во второе уравнение:

$$(4T^* - 2)T^* - T^{*2} = 1 - T^*, \qquad 3T^{*2} - T^* - 1 = 0.$$

Получаем два значения для T^*: при $T^* = \dfrac{1 - \sqrt{13}}{6}$ находим $C_1 = -\dfrac{2(\sqrt{13} + 2)}{3}$, при $T^* = \dfrac{1 + \sqrt{13}}{6}$ находим $C_1 = -\dfrac{2(\sqrt{13} - 2)}{3}$.

Окончательно получаем два решения: $x_1^*(t) = -\dfrac{2(\sqrt{13} + 2)}{3} t - t^2$, $T_1^* = \dfrac{1 - \sqrt{13}}{6}$ и $x_2^*(t) = -\dfrac{2(\sqrt{13} - 2)}{3} t - t^2$, $T_2^* = \dfrac{1 + \sqrt{13}}{6}$. ■

ГЛАВА 4. Прямые методы вариационного исчисления

4.1. Конечно-разностный метод Эйлера

Метод Эйлера является простейшим явным, одношаговым численным методом первого порядка точности.

Для иллюстрации метода, рассмотрим простейшую вариационную задачу о нахождении экстремума функционала

$$I[x(t)] = \int_{t_0}^{T} f(t, x(t), x'(t))dt \tag{4.1}$$

при заданных граничных условиях $x(t_0) = x_0, \quad x(T) = x_T$.

Основу метода Эйлера для вариационной задачи составляет то, что значение функционала рассматривается не на произвольных, допустимых в вариационной задаче кривых, а лишь на ломанных, составленных из заданного числа *n* прямолинейных звеньев с заданными абсциссами вершин

$$t_0 + \Delta t,\ t_0 + 2\Delta t,\ \ldots,\ t_0 + (n-1)\Delta t, \tag{4.2}$$

где $\Delta t = (T - t_0)/n$.

На ломанных, составленных из заданного числа *n* прямолинейных звеньев с заданными абсциссами вершин, функционал $I[x(t)]$ принимает вид функции $\Phi(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})$ ординат вершин ломанной. Ординаты $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ выбираются таким образом, чтобы $\Phi(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})$ достигала экстремума. Отсюда следует вывод о том, что ординаты определяются из системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ)

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_i} = 0,\ i = \overline{1, n-1}. \tag{4.3}$$

В результате выше описанного метода, получается ломаная, являющаяся приближенным решением вариационной задачи. Чем меньше будет шаг аппроксимации Δt, тем ближе приближенные значения решения x_i будут к точным значениям $x(t_i)$.

Пример 4.1. Найти приближенно решение задачи об экстремуме функционала $I[x(t)] = \int\limits_0^1 \left(x^2 + x'^2 + 2xe^t\right)dt$ при граничных условиях $x(0) = 0$, $x(1) = 0$.

Точное решение поставленной задачи было найдено в п. 2.1 (пример 2.4) и имеет вид $x^*(t) = -\dfrac{e^2}{2(e^2-1)}e^t + \dfrac{e^2}{2(e^2-1)}e^{-t} + \dfrac{1}{2}te^t$.

Разобьем равномерно отрезок [0, 1] точками $t_i = t_{i-1} + \Delta t,\ i = \overline{1, n}\quad (t_n = T)$, где $\Delta t = (T - t_0)/n = (1-0)/n = 1/n$, n – количество элементарных отрезков.

Обозначим $x_i = x(t_i),\ \ i = \overline{1, n-1},$ – значение решения в узле t_i. При этом $x_0 = x_n = 0$.

Заменим производные приближенно по формуле «правых» разностей

$$x'(t_i) \approx \frac{x_{i+1} - x_i}{\Delta t}, \quad i = \overline{0, n}. \tag{4.4}$$

Интеграл вычислим приближенно по формуле «левых» прямоугольников

$$\int\limits_{t_0}^{T} g(t)dt \approx \sum_{i=0}^{n-1} g(t_i)\cdot\Delta t. \tag{4.5}$$

Имеем

$$\int\limits_0^1 \left(x^2(t) + x'^2(t) + 2x(t)e^t\right)dt \approx \sum_{i=0}^{n-1}\left(x^2(t_i) + x'^2(t_i) + 2x(t_i)e^{t_i}\right)\cdot\Delta t =$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1}\left(x_i^2 + \left(\frac{x_{i+1}-x_i}{\Delta t}\right)^2 + 2x_i e^{t_i}\right)\cdot\Delta t =$$

$$= \left(x_0^2 + \left(\frac{x_1-x_0}{\Delta t}\right)^2 + 2x_0 e^{t_0}\right)\cdot\Delta t + \left(x_1^2 + \left(\frac{x_2-x_1}{\Delta t}\right)^2 + 2x_1 e^{t_1}\right)\cdot\Delta t + \ldots$$

$$\ldots + \left(x_{i-1}^2 + \left(\frac{x_i-x_{i-1}}{\Delta t}\right)^2 + 2x_{i-1} e^{t_{i-1}}\right)\cdot\Delta t + \left(x_i^2 + \left(\frac{x_{i+1}-x_i}{\Delta t}\right)^2 + 2x_i e^{t_i}\right)\cdot\Delta t + \ldots$$

$$\ldots + \left(x_{n-2}^2 + \left(\frac{x_{n-1}-x_{n-2}}{\Delta t}\right)^2 + 2x_{n-2} e^{t_{n-2}}\right)\cdot\Delta t +$$

$$+\left(x_{n-1}^2+\left(\frac{x_n-x_{n-1}}{\Delta t}\right)^2+2x_{n-1}e^{t_{n-1}}\right)\cdot\Delta t=\Phi(x_1,x_2,\ldots,x_{n-1}).$$

Продифференцируем данную функцию по переменным $x_i\ (i=\overline{1,n-1})$ и приравняем к нулю. Получим систему следующего вида:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x_i}=\frac{2}{\Delta t}\left(\frac{x_i-x_{i-1}}{\Delta t}\right)\cdot\Delta t+\left(2x_i-\frac{2}{\Delta t}\left(\frac{x_{i+1}-x_i}{\Delta t}\right)+2e^{t_i}\right)\cdot\Delta t=0,\ \ i=\overline{1,n-1},$$

или после упрощений

$$-\frac{2}{\Delta t}\cdot x_{i-1}+\left(\frac{4}{\Delta t}+2\cdot\Delta t\right)\cdot x_i-\frac{2}{\Delta t}\cdot x_{i+1}=-2\cdot\Delta t\cdot e^{t_i},\quad i=\overline{1,n-1}. \qquad (4.6)$$

Учитывая, что $x_0=x_n=0$, система (4.6) в развернутом виде принимает вид:

$$\begin{cases}\left(\frac{4}{\Delta t}+2\cdot\Delta t\right)\cdot x_1-\frac{2}{\Delta t}\cdot x_2=-2\cdot\Delta t\cdot e^{t_1},\\ -\frac{2}{\Delta t}\cdot x_{i-1}+\left(\frac{4}{\Delta t}+2\cdot\Delta t\right)\cdot x_i-\frac{2}{\Delta t}\cdot x_{i+1}=-2\cdot\Delta t\cdot e^{t_i},\quad i=\overline{2,n-2}\\ -\frac{2}{\Delta t}\cdot x_{n-2}+\left(\frac{4}{\Delta t}+2\cdot\Delta t\right)\cdot x_{n-1}=-2\cdot\Delta t\cdot e^{t_{n-1}}.\end{cases} \qquad (4.7)$$

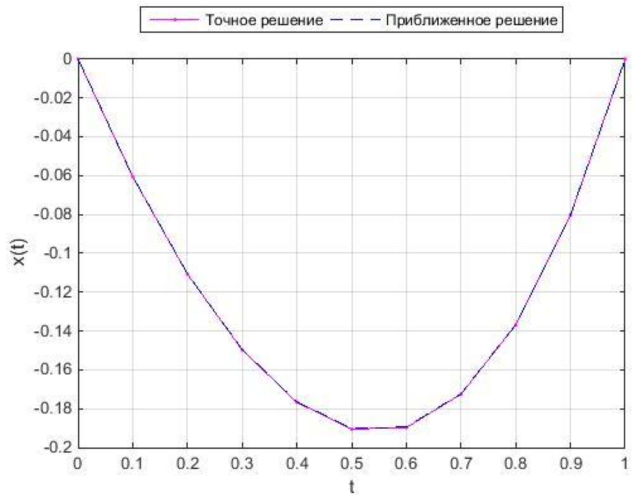
Воспользуемся ППП MATLAB для нахождения решения системы (4.7).

```
function eiler
clc; clear all;
%входные данные
t0=0; T=1;        %границы отрезка
n=100;             %число элементарных отрезков
dt=(T-t0)/n;      %шаг сетки
for i=1:(n+1)
    t(i)=t0+(i-1)*dt;
end;
x=zeros(n+1, 1);
x(1)=0; x(n+1)=0;   %граничные условия
%задание СЛАУ
for i=1:(n-1)
    A(i, i)=4/dt+2*dt;
    b(i, 1)=-2*dt*exp(t(i+1));
end;
for i=1:(n-2)
    A(i, i+1)=-2/dt;
    A(i+1, i)=-2/dt;
end;
%приближенное решение
```

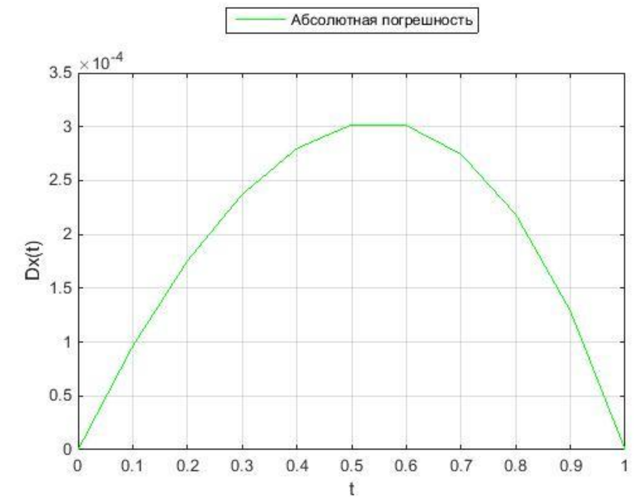
```
x(2:n, 1)=A^-1*b;
%точное решение
C=exp(2)/(exp(2)-1)/2;
x_tochn = -C*exp(t)+C*exp(-t)+t.*exp(t)/2;
x_tochn=x_tochn';
%построение графиков
figure(1)
plot(t, x_tochn, 'm.-', t, x, 'b--')
grid on
xlabel('t')
ylabel('x(t)')
legend('Точное решение','Приближенное решение', 'Location',
'northoutside','Orientation', 'horizontal')

figure(2)
plot(t, abs(x_tochn-x), 'g')
grid on
xlabel('t')
ylabel('Dx(t)')
legend('Абсолютная
погрешность','Location','northoutside','Orientation','horizontal')

figure(3)
plot(t(2:n), abs((x(2:n)-x_tochn(2:n))./x(2:n)*100), 'b')
grid on
xlabel('t')
ylabel('dx(t), %')
legend('Относительная погрешность (во внутренних узлах
сетки)','Location','northoutside','Orientation','horizontal')
```

В результате расчетов были получены следующие графики решений при $n = 10$ (рис. 4.1), при $n = 20$ (рис. 4.2) и при $n = 50$ (рис. 4.3).

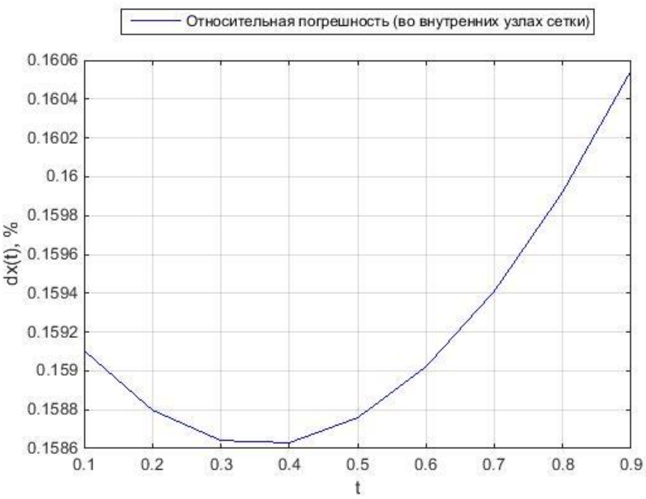
Как видно из построенных графиков, с увеличением числа точек разбиения отрезка, погрешность уменьшается. При $n = 50$ максимальное значение абсолютная погрешность будет равно $6{,}46 \cdot 10^{-3}$ %. ■



а)

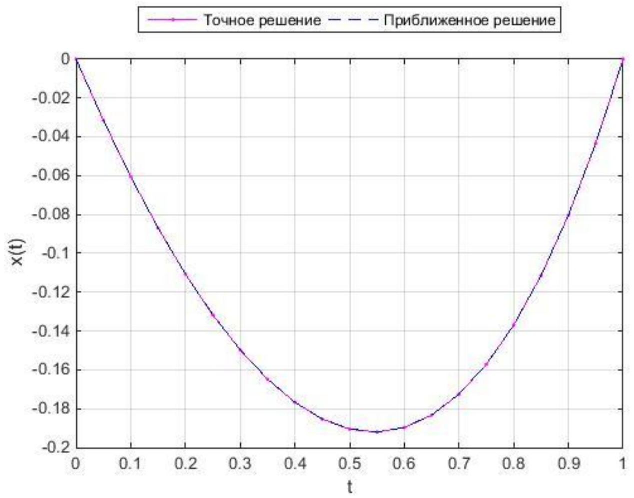


б)

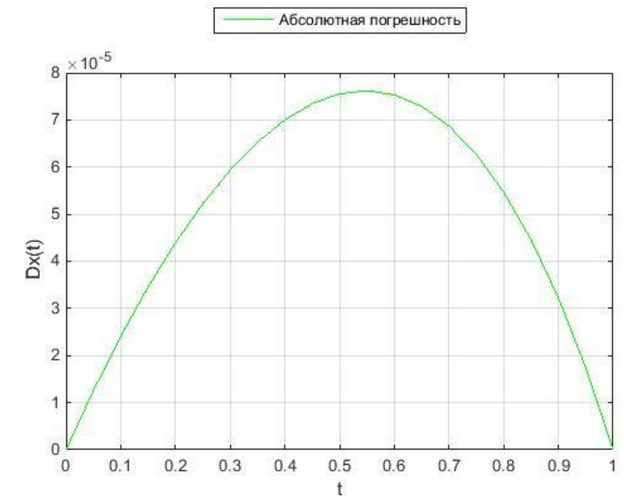


в)

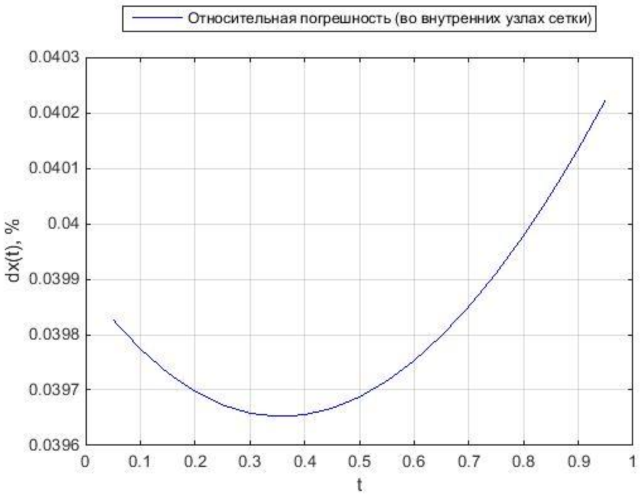
Рисунок 4.1 – Результаты численных расчетов для $n = 10$ (*а* – графики точного и численного решений, *б* – абсолютная погрешность, *в* – относительная погрешность)



а)

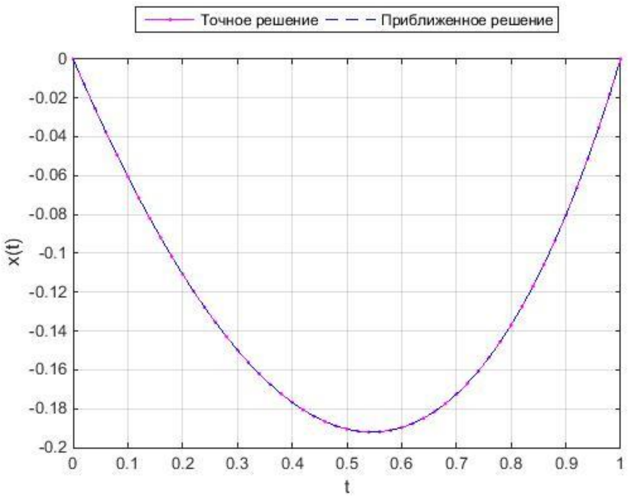


б)

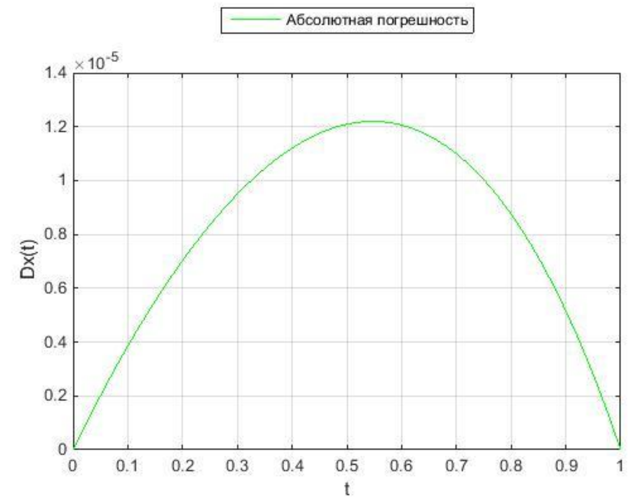


в)

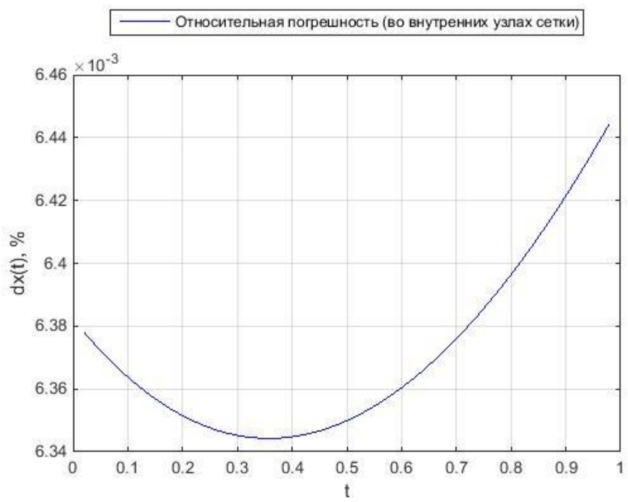
Рисунок 4.2 – Результаты численных расчетов для n = 20 (*а* – графики точного и численного решений, *б* – абсолютная погрешность, *в* – относительная погрешность)



а)



б)



в)

Рисунок 4.3 – Результаты численных расчетов для $n = 50$ (*а* – графики точного и численного решений, *б* – абсолютная погрешность, *в* – относительная погрешность)

4.2. Метод Ритца

Метод Ритца является прямым приближенным численным методом решения вариационных задач. Метод был назван в честь Вальтера Ритца, предложившим его в 1909 году.

Основная суть метода содержится в том, что при поиске экстремума функционала $I[x(t)]$ под рассмотрение попадает не все допустимое пространство функции, а лишь разнообразные линейные комбинации допустимых функций вида:

$$x_n(t) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \cdot \varphi_k(t), \tag{4.8}$$

где α_k – константы,

$\{\varphi_k(t)\}$ – система координатных функций, которая является линейно независимой и образует полную систему функций в рассматриваемом пространстве.

Функционал $I[x(t)]$ обращается в функцию аргументов $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ при таких допустимых функциях $x_n(t)$, что на некоторые координатные функции $\varphi_k(t)$ имеют особые условия гладкости или удовлетворяют граничным условиям:

$$I[x_n(t)] = \Phi(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n). \tag{4.9}$$

Значения $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ определяются из необходимого условия экстремума функции $\Phi(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$. Для этого продифференцируем функцию Φ по переменным α_k и приравняем производные к нулю:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \alpha_k} = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{4.10}$$

В результате поиска решения системы нелинейных уравнений находим значения коэффициентов α_i и подставляем их в (4.8). Получаем в конечном итоге последовательность $\{x_n(t)\}$, для которой последовательность функционалов $\{I[x_n(t)]\}$ сходится к экстремуму функционала $I[x(t)]$.

Пример 4.2. Найти приближенно решение задачи об экстремуме функционала $I[x(t)]=\int\limits_0^1\left(x^2+x'^2+2xe^t\right)dt$ при граничных условиях $x(0)=0$, $x(1)=0$.

Точное решение имеет вид $x^*(t)=-\dfrac{e^2}{2(e^2-1)}e^t+\dfrac{e^2}{2(e^2-1)}e^{-t}+\dfrac{1}{2}te^t$.

Решение задачи будем искать в виде $x_n(t)=\sum\limits_{k=1}^{n}\alpha_k\cdot\varphi_k(t)$

Систему координатных функций выберем таким образом, чтобы каждая из функций удовлетворяла граничным условиям, например,

$\varphi_k(t)=(1-t)\cdot t^k$, $k=1,2,3,\ldots$

Кроме того, функции $\varphi_k(t)$ являются линейно независимыми и образуют в пространстве $C^1\left[t_0,T\right]$ полную систему.

При $k=1$ получаем $x_1(t)=\alpha_1\cdot\varphi_1(t)=\alpha_1\cdot(t-t^2)$. Подставляя это выражение в интегральный функционал, получим:

$$I[x_1(t)]=\int\limits_0^1\left(\left(\alpha_1\cdot(t-t^2)\right)^2+\left(\alpha_1\cdot(t-t^2)\right)'^2+2\left(\alpha_1\cdot(t-t^2)\right)e^t\right)dt=$$

$$=\alpha_1^2\cdot\int\limits_0^1\left[\left(t-t^2\right)^2+\left(1-2t\right)^2\right]dt+2\alpha_1\cdot\int\limits_0^1\left(t-t^2\right)e^t dt.$$

Вычисляя интегралы, находим:

$$I[x_1(t)]=\frac{11}{30}\cdot\alpha_1^2\cdot+2\cdot(3-e)\cdot\alpha_1=\Phi(\alpha_1).$$

Коэффициент α_1 находим из условия: $\dfrac{d\Phi(\alpha_1)}{d\alpha}=\dfrac{11}{15}\cdot\alpha_1+2\cdot(3-e)=0$. Откуда $\alpha_1=\dfrac{30}{11}\cdot(e-3)$. Тем самым, получаем первое приближение к решению

$$x_1(t)=\alpha_1\cdot\varphi_1(t)=\frac{30\cdot(e-3)}{11}\cdot(t-t^2). \tag{4.11}$$

Положим $k=2$ и будем находить второе приближение к рению в виде $x_2(t)=\alpha_1\cdot\varphi_1(t)+\alpha_2\cdot\varphi_2(t)=\alpha_1\cdot(t-t^2)+\alpha_2\cdot(t^2-t^3)$. Подставляя это выражение в интегральный функционал, получим:

$$I[x_2(t)]=\int_0^1\left(\left(\alpha_1\cdot(t-t^2)+\alpha_2\cdot(t^2-t^3)\right)^2+\left(\alpha_1\cdot(t-t^2)+\alpha_2\cdot(t^2-t^3)\right)'^2+\right.$$

$$\left.+2\left(\alpha_1\cdot(t-t^2)+\alpha_2\cdot(t^2-t^3)\right)e^t\right)dt=$$

$$=\int_0^1\left(\left(\alpha_1\cdot(t-t^2)+\alpha_2\cdot(t^2-t^3)\right)^2+\left(\alpha_1\cdot(1-2t)+\alpha_2\cdot(2t-3t^2)\right)'^2+\right.$$

$$\left.+2\left(\alpha_1\cdot(t-t^2)+\alpha_2\cdot(t^2-t^3)\right)e^t\right)dt=$$

$$=\alpha_1^2\cdot\int_0^1\left(\left(t-t^2\right)^2+\left(1-2t\right)^2\right)dt+$$

$$+2\alpha_1\cdot\alpha_2\cdot\int_0^1\left(\left(t-t^2\right)\cdot\left(t^2-t^3\right)+\left(1-2t\right)\cdot\left(2t-3t^2\right)\right)dt+$$

$$+\alpha_2^2\cdot\int_0^1\left(\left(t^2-t^3\right)^2+\left(2t-3t^2\right)^2\right)dt+2\alpha_1\cdot\int_0^1\left(t-t^2\right)e^t dt+2\alpha_2\cdot\int_0^1\left(t^2-t^3\right)e^t dt.$$

Вычисляя интегралы, получаем:

$$\Phi(\alpha_1,\alpha_2)=\frac{11}{30}\cdot\alpha_1^2+\frac{11}{30}\cdot\alpha_1\cdot\alpha_2+\frac{1}{7}\cdot\alpha_2^2+2\cdot(3-e)\cdot\alpha_1+2\cdot(3e-8)\cdot\alpha_2.$$

Коэффициенты α_1 и α_2 находим из условия равенства нулю частных производных:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\Phi}{\partial\alpha_1}=\dfrac{11}{15}\cdot\alpha_1+\dfrac{11}{30}\cdot\alpha_2+2\cdot(3-e)=0,\\ \dfrac{\partial\Phi}{\partial\alpha_2}=\dfrac{11}{30}\cdot\alpha_1+\dfrac{2}{7}\cdot\alpha_2+2\cdot(3e-8)=0.\end{cases}$$

Последнюю систему перепишем в виде:

$$\begin{cases}\dfrac{11}{15}\cdot\alpha_1+\dfrac{11}{30}\cdot\alpha_2=2\cdot(e-3),\\ \dfrac{11}{30}\cdot\alpha_1+\dfrac{2}{7}\cdot\alpha_2=2\cdot(8-3e).\end{cases}$$

Решение данной системы имеет вид: $\alpha_1=\dfrac{17460e-47760}{473}$, $\alpha_2=\dfrac{7980-2940e}{43}$. Тогда получаем второе приближение к решению

$$x_2(t)=\frac{17460e-47760}{473}\cdot(t-t^2)+\frac{7980-2940e}{43}\cdot(t^2-t^3). \qquad (4.12)$$

Для сравнения полученных решений построим их графики (рис. 4.4) и графики абсолютных и относительных погрешностей (рис. 4.5 и 4.6).

Воспользуемся ППП MATLAB для построения графиков полученных решений.

```
function ritz
clc; clear all;
%входные данные
t0=0; T=1;       %границы отрезка
n=100;            %число элементарных отрезков
dt=(T-t0)/n;     %шаг сетки
for i=1:(n+1)
    t(i)=t0+(i-1)*dt;
end;
%точное решение
C=exp(2)/(exp(2)-1)/2;
x_tochn = -C*exp(t)+C*exp(-t)+t.*exp(t)/2;
%первое приближение
x1=30*(exp(1)-3)/11*(t-t.^2);
%второе приближение
x2=(17460*exp(1)-47760)/473*(t-t.^2)+(7980-2940*exp(1))/43*(t.^2-
t.^3);
%построение графиков
figure(1)
plot(t, x_tochn, 'k--', t, x1, 'b-', t, x2, 'm.')
grid on
xlabel('t')
ylabel('x(t)')
legend('Точное решение','Приближенное решение
x_1(t)','Приближенное решение x_2(t)')

figure(2)
plot(t, abs(x_tochn-x1), 'r')
grid on
xlabel('t')
ylabel('Dx(t)')
title('Абсолютная погрешность |x(t)-x_1(t)|')

figure(3)
plot(t, abs(x_tochn-x2), 'r')
grid on
xlabel('t')
ylabel('Dx(t)')
title('Абсолютная погрешность |x(t)-x_2(t)|')

figure(4)
plot(t(2:n), abs((x_tochn(2:n)-x1(2:n))./x_tochn(2:n)*100), 'r')
grid on
xlabel('t')
ylabel('dx(t), %')
title('Относительная погрешность (во внутренних узлах сетки) для
```

```
x_1(t)')

figure(5)
plot(t(2:n), abs((x_tochn(2:n)-x2(2:n))./x_tochn(2:n)*100), 'r')
grid on
xlabel('t')
ylabel('dx(t), %')
title('Относительная погрешность (во внутренних узлах сетки) для
x_2(t)')
```

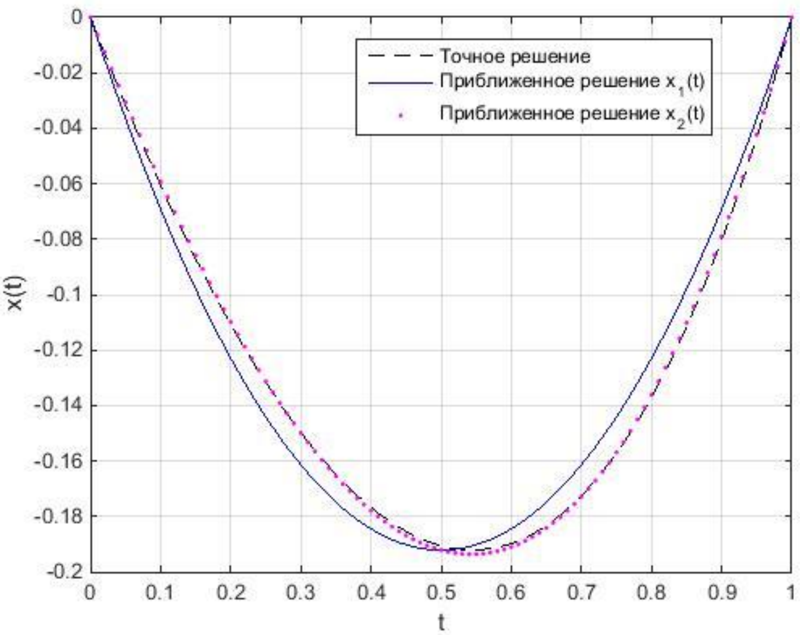
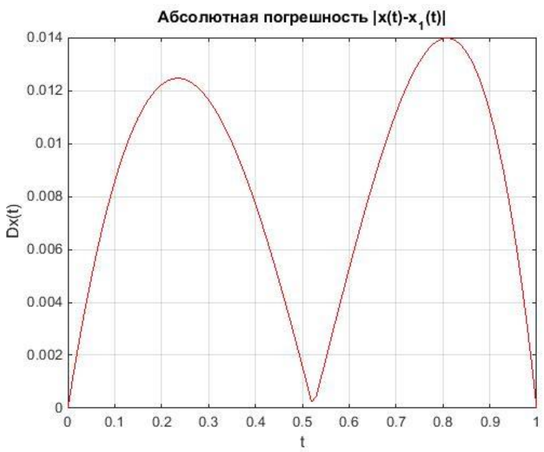
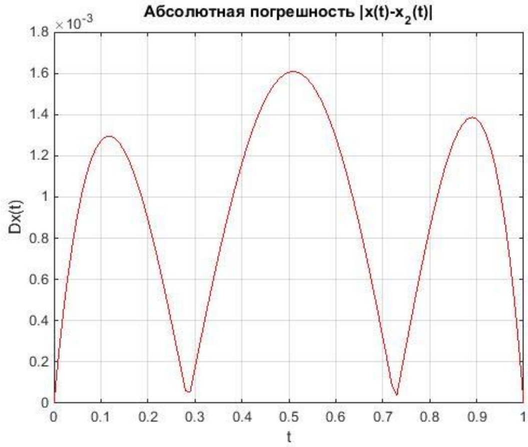


Рисунок 4.4 – Графики точного и приближенных решений

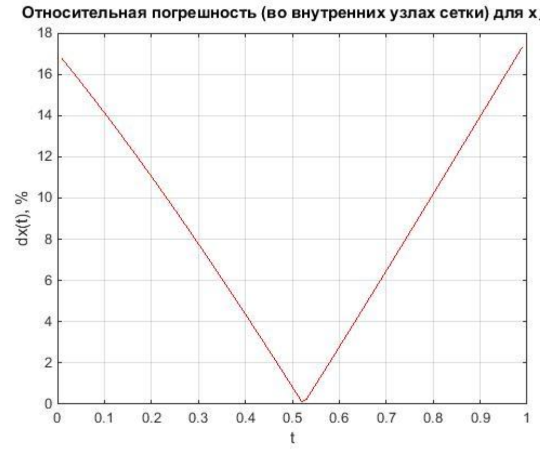


а)

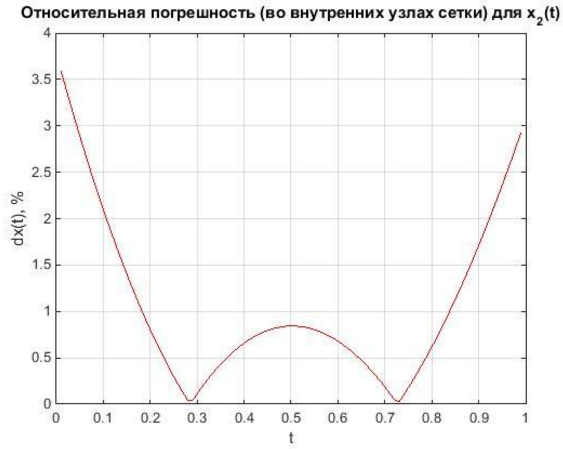


б)

Рисунок 4.5 – Абсолютная погрешность (*а* – для первого приближения $x_1(t)$, *б* – для второго приближения $x_2(t)$)



а)



б)

Рисунок 4.6 – Относительная погрешность (*а* – для первого приближения $x_1(t)$, *б* – для второго приближения $x_2(t)$)

Из построенных графиков видно, что второе приближение (4.12) в сравнении с первым приближением (4.11) дает меньшую погрешность. На интервале $(0.1, 0.9)$ для первого приближения относительная погрешность достигает 14%, для второго приближения – около 2%. ■

Примечание. В случае если заданы ненулевые граничные условия вида $x(t_0) = x_0$, $x(T) = x_T$, можно сделать следующую замену

$$x(t) = a \cdot t + b + z(t),$$

где $z(t)$ удовлетворяет нулевым граничным условиям $z(t_0) = 0$, $z(T) = 0$, а коэффициенты a и b подбираются так, чтобы выполнялись граничные условия для $x(t)$. Получаем:

$$\begin{cases} x(t_0) = a \cdot t_0 + b + z(t_0) = a \cdot t_0 + b = x_0, \\ x(T) = a \cdot T + b + z(T) = a \cdot T + b = x_T. \end{cases}$$

Откуда находим значения коэффициентов $a = \dfrac{x_T - x_0}{T - t_0}$, $b = \dfrac{x_T - x_0}{T - t_0}$ и получаем выражение для искомой замены $x(t) = \dfrac{x_T - x_0}{T - t_0} \cdot t + \dfrac{x_T - x_0}{T - t_0} + z(t)$. Далее найденную функцию подставить в интегральный функционал и выполнить соответствующие преобразования. В результате получаем следующую вариационную задачу: найти функцию $z(t)$, на которой функционал

$$J[z(t)] = I\left[\frac{x_T - x_0}{T - t_0} \cdot t + \frac{x_T - x_0}{T - t_0} + z(t)\right]$$

достигает экстремума и которая удовлетворяет граничным условиям $z(t_0) = 0$, $z(T) = 0$. В этом случае в качестве координатных функций можно брать следующие функции $\varphi_k(t) = (T - t) \cdot (t - t_0)^k$ или $\varphi_k(t) = (t - t_0) \cdot (T - t)^k$. После решения задачи и определения $z(t)$ следует вернуться к исходной функции $x(t)$.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1 Абдрахманов, В.Г. Элементы вариационного исчисления и оптимального управления. Теория, задачи, индивидуальные задания [Электронный ресурс]: учеб. пособие / В.Г. Абдрахманов, А.В. Рабчук. – Электрон. дан. – С.-Петербург: Лань, 2014. – 112 с. – Режим доступа: https://e.lanbook.com/book/45675

2 Авербух Ю.В. Простейшие задачи вариационного исчисления [Электронный ресурс]: учебно-методическое пособие / Ю.В. Авербух, Т.И. Сережникова. – Электрон. текстовые данные. – Екатеринбург: Уральский федеральный университет, 2014. – 41 с. – Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/65975.html

3 Андреева, Е.А. Вариационное исчисление и методы оптимизации: Учебн. пособие / Е.А. Андреева, В.М. Цирулева. – Тверь: Твер. гос. ун-т, 2001. – 576 с.

4 Болдырев, Ю.Я. Вариационное исчисление и методы оптимизации: учебное пособие для вузов / Ю.Я. Болдырев. – М.: Издательство Юрайт, 2017. – 240 с. – (Серия: Университеты России). Режим доступа: https://www.biblio-online.ru/book/9ACC282C-3884-4D46-8397-EAF6AF1DD0FF

5 Бренерман, М. Х. Вариационное исчисление: учебное пособие / М. Х. Бренерман, В. А. Жихарев. – Казань: Казанский национальный исследовательский технологический университет, 2017. – 148 с. – Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/79275.html

6 Гюнтер, Н.М. Курс вариационного исчисления [Электронный ресурс]: учеб. пособие / Н.М. Гюнтер. – Электрон. дан. – С.-Петербург: Лань, 2009. – 320 с. – Режим доступа: https://e.lanbook.com/book/119

7 Краснов, М.Л. Вся высшая математика: Учебник. Т. 6 / М.Л. Краснов и др. – М.: Эдиториал УРСС, 2003. – 256 с.

8 Пантелеев, А.В. Вариационное исчисление в примерах и задачах: Учеб. пособие / А.В. Пантелеев. – М.: Высшая школа, 2006. – 272 с.

9 Пантелеев, А.В. Методы оптимизации в примерах и задачах / А.В. Пантелеев, Т.А. Летова. – М.: Высш.шк., 2002. – 544 с.

10 Романко, В.К. Курс дифференциальных уравнений и вариационного исчисления: учебное пособие / Романко В.К. 4-е издание. – Москва: Лаборатория знаний, 2015. – 347 с. – Режим доступа: https://book.ru/book/923866

11 Романко, В.К. Сборник задач по дифференциальным уравнениям и вариационному исчислению: задачник / Романко В.К. и др. 5-е издание. – Москва: Лаборатория знаний, 2015. – 222 с. – Режим доступа: https://book.ru/book/923857

12 Рябикова, Т.В. Вариационные методы в задачах статики и динамики строительных конструкций [Электронный ресурс]: учебное пособие / Т.В. Рябикова, А.А. Семенов. – Электрон. текстовые данные. – СПб.: Санкт-Петербургский государственный архитектурно-строительный университет, ЭБС АСВ, 2016. – 116 с. – Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/74323.html

13 Толпегин, О. А. Математическое программирование. Вариационное исчисление: учебное пособие для вузов / О.А. Толпегин. – 2-е изд., испр. и доп. – Москва: Издательство Юрайт, 2020. – 233 с. – Режим доступа: https://biblio-online.ru/bcode/446093

14 Тракимус, Ю.В. Основы вариационного исчисления в примерах и задачах [Электронный ресурс]: учебное пособие / Ю.В. Тракимус. – Электрон. текстовые данные.– Новосибирск: Новосибирский государственный технический университет, 2011. – 72 с. – Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/45416.html

15 Трухан, А.А. Обыкновенные дифференциальные уравнения и методы их решения. Ряды. Элементы вариационного исчисления: учебное пособие / А.А. Трухан, Т.В. Огородникова. – Санкт-Петербург: Лань, 2020. – 268 с. – Режим доступа: https://e.lanbook.com/book/111893

16 Хеннер, В.К. Обыкновенные дифференциальные уравнения, вариационное исчисление, основы специальных функций и интегральных уравнений [Электронный ресурс]: учеб. пособие / В.К. Хеннер, Т.С. Белозерова, М.В. Хеннер. – Электрон. дан. – С.-Петербург: Лань, 2017. – 320 с. – Режим доступа: https://e.lanbook.com/book/96873

17 Шехтер, Р.С. Вариационный метод в инженерных расчетах / Р.С. Шехтер. – М.: Изд-во «Мир», 1971. – 292 с.

СОДЕРЖАНИЕ

Надежда Николаевна Максимова,

доцент кафедры математического анализа и моделирования,

кандидат физико-математических наук

Вариационные методы. Учебно-методическое пособие

Изд-во АмГУ. Подписано к печати __.__.2019. Формат 60x84/16.

Усл. печ. л. 4,88.

Тираж __. Заказ __.

Отпечатано в типографии АмГУ.