Министерство науки и высшего образования Российской Федерации

Амурский государственный университет

Л.И. Мороз

ЭЛЕМЕНТЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛОГИКИ: АЛГЕБРА ЛОГИКИ

Учебное пособие

Благовещенск
2020

ББК 22.12 я 73
М 80

Рекомендовано
учебно-методическим советом университета

Рецензент:
Л.В. Никифорова, старший научный сотрудник лаборатории моделирования, обработки информации и управления АмГУ, канд. техн. наук, доцент

Мороз Л.И.
Элементы математической логики: алгебра логики. Учебное пособие / Составитель: Л.И. Мороз – Благовещенск: Амурский гос. ун-т, 2020.

В учебном пособии рассматриваются основные теоретические сведения об алгебре высказываний и булевых функциях, примеры с подробным решением. В пособии приводятся варианты индивидуальных заданий для лабораторных работ и вопросы для самоконтроля.

Учебное пособие предназначено для студентов среднего профессионального образования, обучающихся по направлению подготовки 09.02.03 «Программирование в компьютерных системах», а также может быть использовано студентами других направлений подготовки и специальностей, изучающих математическую логику.

ВВЕДЕНИЕ

Математической дисциплиной, наиболее близко подошедшей к осознанию необходимости символьного отражения диалектического характера процессов изменения, развития, является математическая логика. Математическая логика органично соединяет в себе традиционную логику, восходящую к Аристотелю, и методы современной математики. Результаты, полученные с помощью математической логики, легли в основу проектирования и создания электронно-вычислительных машин и программного обеспечения, нашли широкое применение в областях информатики и систем искусственного интеллекта. Весомый вклад в развитие математической логики внесли труды Лейбница, Д. Буля, Г. Фреге и многих других.

Материал, содержащийся в данном пособии, необходим для организации лабораторных занятий и самостоятельной работы студентов. Здесь приводятся необходимые теоретические сведения, подробные решения типовых примеров, контрольные вопросы для самопроверки, а также индивидуальные задания к лабораторным работам.

Студенты должны научиться применять на практике полученные знания о булевых функциях и алгебре высказываний, уметь формулировать задачи логического характера и применять средства математической логики для их решения. Этот курс тесно связан с такими дисциплинами «Информатика», «Теория алгоритмов», «Архитектура компьютеров».

1 АЛГЕБРА ВЫСКАЗЫВАНИЙ

1.1 Высказывания. Операции над высказываниями

Высказывание – повествовательное предложение, о котором можно сказать, истинно оно или ложно. Побудительные, вопросительные и восклицательные предложения не являются высказываниями. Высказывания, как правило, обозначаются латинскими буквами.

Пример:

A: «Самара находится на берегу Волги»; B: «10 > 3».

Высказывания делятся на простыми и сложными.

Простое (элементарное) высказывание состоит из одного утверждения и не содержит логические операции.

Сложное (составное) высказывание содержит простые высказывания, объединенные логическими операциями.

Логические операции над высказываниями и их логические значения можно представить в виде таблиц, которые называются *таблицами истинности*.

Логические операции:

1) *инверсия* (отрицание; НЕ; $-$, $\neg$);

X	$\overline{X}$
0	1
1	0

2) *дизъюнкция* (логическое сложение; ИЛИ; $\vee$);

X	Y	$X \vee Y$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

3) *конъюнкция* (логическое умножение; И; $\wedge$, $\&$);

X	Y	$X \wedge Y$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

4) *импликация* (логическое следование; ЕСЛИ, ТО; $\rightarrow$);

X	Y	$X \rightarrow Y$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

5) *эквиваленция* (эквивалентность; ТОГДА И ТОЛЬКО ТОГДА, КОГДА; $\leftrightarrow$)

X	Y	$X \leftrightarrow Y$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Пример: Определить являются ли данные предложения высказываниями:

а) Луна – спутник Земли;

б) Фигура F подобна фигуре F';

в) Студент факультета среднего профессионального образования;

г) 7>3.

Решение.

а) Это предложение является высказыванием, причем истинным.

б) Предложение не является высказыванием: мы не можем определить, истинно оно или ложно, так как не знаем, о каких фигурах идет речь.

в) Данное предложение ничего не утверждает о студенте, следовательно не является высказыванием.

г) Высказывание, истинное.

1.2 Формулы логики высказываний

Формула логики высказываний – это сложное высказывание, которое получено из простых высказываний, связанных между собой логическими операциями.

Все возможные логические значения формулы, в зависимости от значений входящих в нее элементарных высказываний, могут быть описаны полностью с помощью таблицы истинности.

Если формула содержит n элементарных высказываний, то она принимает 2^n значений, состоящих из нулей и единиц.

Тождественно истинная формула A – это формула, которая при любом значении всех переменных элементарных высказываний всегда истинна.

Тождественно ложная формула B – это формула, которая при любом значении всех переменных элементарных высказываний всегда ложна.

Приоритет логических операций:

1. отрицание
2. конъюнкция
3. дизъюнкция
4. следование, эквивалентность

Пример:

Составить таблицу истинности для формулы $\left(\left(P \vee \overline{Q}\right) \to Q\right) \wedge \left(\overline{P} \vee Q\right)$.

Решение. Так как в формуле использованы два высказывания P, Q, то таблица будет состоять из 4 строк. В соответствии с приоритетами логических операций составим таблицу истинности:

P	Q	$\overline{Q}$	$(P \vee \overline{Q})$	$((P \vee \overline{Q}) \to Q)$	$\overline{P}$	$(\overline{P} \vee Q)$	$F(P,Q)$
0	0	1	1	0	1	1	0
0	1	0	0	1	1	1	1
1	0	1	1	0	0	0	0
1	1	0	1	1	0	1	1

1.3 Равносильные формулы алгебры высказываний

Две формулы алгебры высказываний называются *равносильными*, если при любых значениях всех переменных элементарных высказываний, входящих в эти формулы, они принимают одинаковые значения.

Справедливы следующие равносильности для операций алгебры высказываний:

1. $\overline{\overline{A}} \cong A$ – закон двойного отрицания;
2. $A \wedge B \cong B \wedge A$ – коммутативный закон конъюнкции;
3. $A \vee B \cong B \vee A$ – коммутативный закон дизъюнкции;
4. $A \wedge (B \wedge C) \cong (A \wedge B) \wedge C$ – ассоциативный закон конъюнкции;
5. $A \vee (B \vee C) \cong (A \vee B) \vee C$ – ассоциативный закон дизъюнкции;
6. $A \wedge (B \vee C) \cong (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$ – дистрибутивный закон конъюнкции относительно дизъюнкции;
7. $A \vee (B \wedge C) \cong (A \vee B) \wedge (A \vee C)$ – дистрибутивный закон дизъюнкции относительно конъюнкции;
8. $A \wedge (A \vee B) \cong A$ – первый закон поглощения де Моргана;
9. $A \vee (A \wedge B) \cong A$ – второй закон поглощения де Моргана;
10. $\overline{A \wedge B} \cong \overline{A} \vee \overline{B}$ – первый закон де Моргана;
11. $\overline{A \vee B} \cong \overline{A} \wedge \overline{B}$ – второй закон де Моргана;
12. $A \vee A \cong A$ – идемпотентность дизъюнкции;
13. $A \wedge A \cong A$ – идемпотентность конъюнкции;
14. $A \vee \overline{A} \cong 1$;

15. $A \wedge \overline{A} \cong 0$;

16. $A \vee 0 \cong A$;

17. $A \wedge 1 \cong A$;

18. $A \rightarrow B \cong \overline{A} \vee B$;

19. $A \leftrightarrow B \cong (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$.

Пример:

Преобразуйте формулу $X \rightarrow \overline{(Y \leftrightarrow Z)}$ равносильным образом, чтобы она содержала только логические связки $^{-}, \wedge, \vee$.

Решение. Проделаем требуемые равносильные преобразования: $X \rightarrow \overline{(Y \leftrightarrow Z)} \cong \overline{X} \vee \overline{(Y \leftrightarrow Z)} \cong \overline{X} \vee ((Y \rightarrow Z) \wedge (Z \rightarrow Y)) \cong \overline{X} \vee ((\overline{Y} \vee Z) \wedge (\overline{Z} \vee Y))$.

Пример:

Используя равносильные преобразования, приведите формулу $(P \leftrightarrow Q) \wedge (P \vee Q)$ к возможно более простой форме.

Решение.

$$(P \leftrightarrow Q) \wedge (P \vee Q) \cong (P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P) \wedge (P \vee Q) \cong (\overline{P} \vee Q) \wedge (\overline{Q} \vee P) \wedge (P \vee Q) \cong$$
$$\cong (\overline{P} \vee Q) \wedge (P \vee (\overline{Q} \wedge Q)) \cong (\overline{P} \vee Q) \wedge (P \vee 0) \cong (\overline{P} \vee Q) \wedge P \cong (\overline{P} \wedge P) \vee (Q \wedge P) \cong 0 \vee (Q \wedge P) \cong$$
$$\cong Q \wedge P.$$

1.4 Совершенные нормальные формы

Элементарной конъюнкцией высказываний называется конъюнкция этих высказываний и их отрицаний.

Элементарной дизъюнкцией высказываний называется дизъюнкция этих высказываний и их отрицаний.

Дизъюнктивной нормальной формой (ДНФ) формулы *А* называется равносильная ей формула, представляющая собой дизъюнкцию элементарных конъюнкций.

Конъюнктивной нормальной формой (КНФ) формулы *А* называется равносильная ей формула, представляющая собой конъюнкцию элементарных дизъюнкций.

Совершенной дизъюнктивной нормальной формой формулы *A* (СДНФ) называется дизъюнктивная нормальная форма формулы *A*, удовлетворяющая следующим свойствам:

1. Каждое логическое слагаемое формулы содержит все переменные, входящие в функцию.

2. Все логические слагаемые формулы различны.

3. Ни одно логическое слагаемое формулы не содержит одновременно переменную и ее отрицание.

4. Ни одно логическое слагаемое формулы не содержит одну и ту же переменную дважды.

Способы получения СДНФ:

1 способ (с помощью таблицы истинности): для каждого набора значений переменных, на котором функция $F(x_1, x_2, .. x_k) = 1$, запишем конъюнкцию элементарных переменных высказываний, записав x_k, если значение x_k на указанном наборе значений есть 1 и отрицание x_k, если его значение есть 0. Дизъюнкция всех записанных конъюнкций и будет искомой формулой.

2 способ (с помощью равносильных преобразований):

– с помощью преобразований получить ДНФ;

– если в ДНФ входящая в нее элементарная конъюнкция *B* не содержит переменную *x*, то используют равносильность $B \equiv B \wedge (x \vee \bar{x}) \equiv (B \wedge x) \vee (B \wedge \bar{x})$, в итоге получают две элементарных конъюнкции;

– если в ДНФ входят две одинаковые элементарные конъюнкции, то лишнюю отбрасывают.

Совершенной конъюнктивной нормальной формой формулы *A* (СКНФ) называется конъюнктивная нормальная форма формулы *A*, удовлетворяющая тем же свойствам, что и СДНФ.

Способы получения СКНФ:

1 способ (с помощью таблицы истинности): для каждого набора значений переменных, на котором функция $F(x_1, x_2, .. x_k) = 0$, запишем дизъюнкцию элементарных переменных высказываний, записав x_k, если значение x_k на указанном наборе значений есть 0 и отрицание x_k, если его значение есть 1. Конъюнкция всех записанных дизъюнкций и будет искомой формулой.

2 способ (с помощью равносильных преобразований):

– с помощью преобразований получить КНФ;

– если в КНФ входящая в нее элементарная конъюнкция B не содержит переменную x, то используют равносильность $B \equiv B \vee (x \wedge \bar{x}) \equiv (B \vee x) \wedge (B \vee \bar{x})$, в итоге получают две элементарных дизъюнкции;

– если в КНФ входят две одинаковые элементарные дизъюнкции, то лишнюю отбрасывают.

Замечания:

1. Каждой не тождественно ложной формуле A соответствует единственная СДНФ A.

2.Каждой не тождественно истинной формуле A соответствует единственная СКНФ A.

Пример:

Приведите равносильными преобразованиями формулу $\overline{(X \vee Z)} \wedge (X \to Y)$ к дизъюнктивной нормальной форме.

Решение.

$$\overline{(X \vee Z)} \wedge (X \to Y) \cong \bar{X} \wedge \bar{Z} \wedge (\bar{X} \vee Y) \cong (\bar{X} \wedge \bar{Z} \wedge \bar{X}) \vee (\bar{X} \wedge \bar{Z} \wedge Y) \cong$$
$$\cong (\bar{X} \wedge \bar{Z}) \vee (\bar{X} \wedge \bar{Z} \wedge Y).$$

Пример:

Приведите равносильными преобразованиями формулу $\overline{(X \vee Z)} \wedge (X \to Y)$ к конъюнктивной нормальной форме.

Решение:

$$\overline{(X \vee Z)} \wedge (X \to Y) \cong (\bar{X} \wedge \bar{Z}) \wedge (\bar{X} \vee Y) \cong (\bar{X} \wedge \bar{Z} \wedge \bar{X}) \vee (\bar{X} \wedge \bar{Z} \wedge Y) \cong$$
$$\cong (\bar{X} \wedge \bar{Z}) \vee (\bar{X} \wedge \bar{Z} \wedge Y) \cong ((\bar{X} \wedge \bar{Z}) \vee \bar{X}) \wedge ((\bar{X} \wedge \bar{Z}) \vee Y) \wedge ((\bar{X} \wedge \bar{Z}) \vee \bar{Z}) \cong$$
$$\bar{X} \wedge ((\bar{X} \vee Y) \wedge (\bar{Z} \vee Y)) \wedge \bar{Z} \cong (\bar{X} \wedge (\bar{X} \vee Y)) \wedge ((\bar{Z} \vee Y) \wedge \bar{Z}) \cong \bar{X} \wedge \bar{Z}.$$

Пример:

Для формулы алгебры высказываний $\overline{(X \wedge Y)} \to \overline{(X \vee Z)}$ найдите СДНФ с помощью таблицы истинности.

Решение.

Построим таблицу истинности:

X	Y	Z	$\overline{(X \wedge Y)}$	$\overline{(X \vee Z)}$	$\overline{(X \wedge Y)} \to \overline{(X \vee Z)}$
0	0	0	1	1	1
0	0	1	1	0	0
0	1	0	1	1	1
0	1	1	1	0	0
1	0	0	1	0	0
1	0	1	1	0	0
1	1	0	0	0	1
1	1	1	0	0	1

Выберем наборы значений переменных, на которых формула обращается в 1. Совершенная дизъюнктивная нормальная форма данной формулы примет вид: $(\overline{X} \wedge \overline{Y} \wedge \overline{Z}) \vee (\overline{X} \wedge Y \wedge \overline{Z}) \vee (X \wedge Y \wedge \overline{Z}) \vee (X \wedge Y \wedge Z)$.

Пример:

Для формулы алгебры высказываний $\overline{(X \wedge Y)} \to \overline{(X \vee Z)}$ найдите СКНФ с помощью таблицы истинности.

Воспользуемся таблицей истинности из предыдущего примера. Выберем наборы значений переменных, на которых формула обращается в 0. СКНФ для данной формулы: $(X \vee Y \vee \overline{Z}) \wedge (X \vee \overline{Y} \vee \overline{Z}) \wedge (\overline{X} \vee Y \vee Z) \wedge (\overline{X} \vee Y \vee \overline{Z})$.

1.5 Логическое следование формул. Решение логических задач

Формула $H(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ называется *логическим следствием* формул $F_1(X_1, X_2, \ldots, X_n), \ldots, F_m(X_1, X_2, \ldots, X_n)$, если формула $H(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ превращается в истинное высказывание при всякой такой подстановке вместо всех ее пропозициональных переменных $X_1, X_2, \ldots, X_n$ конкретных высказываний, при которой в истинное высказывание превращаются все формулы $F_1(X_1, X_2,...,X_n),...,F_m(X_1, X_2,...,X_n)$.

Чтобы выявить логическое следование формул $F_1(X_1, X_2,...,X_n),...,F_m(X_1, X_2,...,X_n)$ и $H(X_1, X_2,...,X_n)$, составляют для них таблицы истинности. Если в какой-то строке таблицы все формулы $F_1(X_1, X_2,...,X_n),...,F_m(X_1, X_2,...,X_n)$ принимают значение 1,то в этой строке непременно и формула $H(X_1, X_2,...,X_n)$принимает значение 1 . Это и будет означать, что $H(X_1, X_2,...,X_n)$ является логическим следствием формул $F_1(X_1, X_2,...,X_n),...,F_m(X_1, X_2,...,X_n)$.

Необходимые и достаточные условия

Если некоторая математическая теорема имеет структуру, выражаемую формулой $X \to Y$, то высказывание Y называется необходимым условием для высказывания X (другими словами, если X истинно, то Y с необходимостью должно быть также истинным), а высказывание X называется достаточным условием для высказывания Y (другими словами, для того чтобы Y было истинным, достаточно, чтобы истинным было высказывание X).

Решение логических задач

Суть решения состоит в том, что, имея конкретные условия логической задачи, стараются записать их виде логической функции.

При этом учитывают, что каждое высказывание может быть либо истинным, либо ложными, значит, его можно обозначить логической переменной. В дальнейшем путем равносильных преобразований упрощают полученную формулу, что, как правило, приводит к ответу на все вопросы задачи, но иногда все-таки требуется применять логические рассуждения.

Пример:

Вспоминая результаты прошлогоднего чемпионата по футболу, пяти болельщиков сказали:

1. Александр был вторым, а Богдан пятым.

2. Владимир был вторым, а Дмитрий третьим.

3. Геннадий был первым, а Богдан третьим.

4. Александр был третьим, а Егор шестым.

5. Владимир был третьим, а Егор четвертым.

Впоследствии выяснилось, что каждый зритель ошибся в одном из двух своих высказываний. Каково было истинное распределение мест в чемпионате?

Решение.

Введем обозначения для высказываний болельщиков через символ X_y, где X – первая буква имени участника чемпионата, а y – номер места, которое он занял в чемпионате.

Так как в паре высказываний каждого болельщика одно истинно, а второе ложно, то будут истинными дизъюнкции этих высказываний:

$A_2 \vee Б_5$; $B_2 \vee Д_3$; $Г_1 \vee Б_3$; $A_3 \vee E_6$; $B_3 \vee E_4$.

В итоге получим следующую формулу

$F \equiv (A_2 \vee Б_5) \wedge (B_2 \vee Д_3) \wedge (Г_1 \vee Б_3) \wedge (A_3 \vee E_6) \wedge (B_3 \vee E_4)$, которая будет истинной.

Путем равносильных преобразований легко показать, что $F \equiv Б_5 \wedge B_2 \wedge Г_1 \wedge A_3 \wedge E_4 \equiv 1$, и значит $Б_5 \equiv 1$; $B_2 \equiv 1$; $Г_1 \equiv 1$; $A_3 \equiv 1$; $E_4 \equiv 1$, что и дает ответ на вопрос задачи. Автоматически получаем, что Дмитрий был шестым.

Пример:

На вопрос, кто из трех студентов изучал математическую логику, был получен ответ: если изучал первый, то изучал и третий, однако неверно, что если изучал второй, то изучал и третий. Кто изучал логику?

Решение. Пусть: A – «логику изучал первый», B – «логику изучал второй», C – «логику изучал третий».

Тогда условия задачи дают:

1) $A \rightarrow C \equiv 1$; 2) $\overline{B \rightarrow C} \equiv 1$.

Составим конъюнкцию этих высказываний и упростим ее

$$(A \to C) \wedge \left(\overline{B \to C}\right) \equiv \left(\overline{A} \vee C\right) \wedge \left(\overline{\overline{B}} \wedge \overline{C}\right) \equiv \left(\overline{A} \vee C\right) \wedge \left(B \wedge \overline{C}\right) \equiv$$
$$\equiv \left(\overline{A} \wedge B \wedge \overline{C}\right) \vee \left(C \wedge B \wedge \overline{C}\right) \equiv \left(\overline{A} \wedge B \wedge \overline{C}\right) \vee 0 \equiv \overline{A} \wedge B \wedge \overline{C} \equiv 1.$$

Так как здесь отрицания нет только над *B*, то логику изучал второй студент.

Вопросы:

1. Какие элементы входят в язык логики?
2. Что включают в себя логические выражения?
3. Дайте определение таблице истинности. Каков порядок построения таблицы истинности?
4. Какие логические выражения называются равносильными? Назовите их.
5. Докажите с помощью таблиц истинности основные законы алгебры Буля.
6. Дайте определение конъюнктивной нормальной форме. Как выполняется ее построение?
7. Дайте определение дизъюнктивной нормальной форме. Как выполняется ее построение?
8. Что называют совершенной дизъюнктивной нормальной формой? Как выполняется ее построение?
9. Что называют совершенной конъюнктивной нормальной формой? Как выполняется ее построение?
10. Каков порядок логических операций при составлении (решении) логических выражений?

Индивидуальные задания:

1. Определите является ли высказывание истинным.
2. Следующие составные высказывания расчлените на простые и запишите символически, введя буквенные обозначения для их простых составляющих.
3. Постройте таблицу истинности для заданного выражения.
4. Упростите выражение.

5. Преобразуйте формулу с помощью равносильностей так, чтобы они содержали только логические связки $\bar{\ }, \vee, \wedge$.

6. Приведите формулу (из задания №3) к КНФ, ДНФ.

7. Приведите формулу (из задания №5) к СКНФ, СДНФ.

Вариант 1	1. $(X<1)\vee\overline{(X>4)}\vee(X>3)$ при $X = 1$. 2. Если в параллелограмме не все углы прямые или не все стороны равны между собой, то этот параллелограмм – не прямоугольники не ромб. 3. $(X\vee\bar{Y}\vee Z)\wedge((X\to\bar{\bar{Y}})\vee\bar{Z})$. 4. $\overline{(A\wedge\bar{B})}\leftrightarrow\overline{(B\vee\bar{A})}$. 5. $((X\to Y)\wedge(Y\to X))\to(X\vee Y)$.
Вариант 2	1. $(X>1)\wedge\overline{(X<5)}\vee(X<3)$ при $X = 2$. 2. Произведение трех чисел равно нулю тогда и только тогда, когда одно из них равно нулю. 3. $(\bar{X}\leftrightarrow\bar{Y}\vee Z)\to((X\to\bar{\bar{Y}})\vee X)$. 4. $\overline{(A\vee\bar{B})}\wedge\overline{(B\vee\bar{A})}$. 5. $((X\vee\bar{Y})\to(Y\leftrightarrow X))\vee(X\vee Y)$.
Вариант 3	1. $\overline{(X>3)}\vee(X<3)\vee(X<1)$ при $X = 3$. 2. Если производная функции в точке равна нулю и вторая производная этой функции в той же точке отрицательна, то данная точка есть точка локального максимума функции. 3. $(X\wedge(Y\vee Z))\vee((X\to\bar{\bar{Y}})\vee Z)$. 4. $\overline{(\bar{A}\vee B)}\vee\overline{(\bar{B}\vee\bar{A})}$. 5. $((\bar{X}\vee\bar{Y})\to(\bar{Y}\to X))\vee(X\wedge Y)$.
Вариант 4	1. $(X>4)\vee\overline{(X>1)}\vee(X>4)$ при $X = 4$. 2. Если прямая параллельна каждой из двух пересекающихся плоскостей, то она параллельна и линии их пересечения.

	3. $\overline{\left(\overline{X}\wedge(Y\vee Z)\right)}\vee\left(\left(\overline{X}\to\overline{\overline{Y}}\right)\vee Z\right)$. 4. $\overline{\left(\overline{A}\wedge B\right)}\wedge\overline{(B\vee A)}$. 5. $\left(\left(\overline{X}\leftrightarrow\overline{Y}\right)\to\left(\overline{Y}\to\overline{X}\right)\right)\vee\left(X\wedge\overline{Y}\right)$.
Вариант 5	1. $\overline{(X<5)}\vee(X<3)\wedge\left(\overline{(X<2)}\vee(X<1)\right)$ при $X = 4$. 2. Если прямая l перпендикулярна двум прямым a и b, лежащим в плоскости π, и прямые a и b не параллельны, то прямая l перпендикулярна всякой прямой с, лежащей в плоскости π. 3. $X\to(Y\vee Z)\vee\left(\left(\overline{X}\to Y\right)\vee Z\right)$. 4. $\overline{\left(\overline{A}\wedge B\right)}\wedge\overline{\left(\overline{B}\wedge A\right)}$. 5. $\left(\left(\overline{X}\to\overline{Y}\right)\to(Y\to X)\right)\vee\left(X\to\overline{Y}\right)$.
Вариант 6	1. $\overline{(X>2)}\vee(X<2)\vee(X>4)$ при $X = 4$. 2. Если прямая l перпендикулярна двум прямым a и b, лежащим в плоскости π, и неперпендикулярная некоторой прямой с, лежащей в этой же плоскости, то прямые a и b параллельны. 3. $(Y\vee Z\leftrightarrow X)\vee((X\to Y)\vee Z)$. 4. $\overline{\left(\overline{A}\vee B\right)}\vee\overline{\left(\overline{B}\wedge A\right)}$. 5. $\left(\left(\overline{X}\leftrightarrow\overline{Y}\right)\to(Y\wedge X)\right)\vee(X\to Y)$.
Вариант 7	1. $(X>4)\vee\overline{(X>1)}\vee(X>4)$ при $X = 1$. 2. Если две прямые a и b, лежащие в плоскости π, непараллельны a и b и прямая l неперпендикулярна некоторой прямой с, лежащей в плоскости π, то l неперпендикулярна одной из прямых a или b. 3. $\left(\overline{Y}\vee Z\to X\right)\vee((Z\to Y)\vee Y)$. 4. $\left(\overline{A}\vee B\right)\vee\overline{(B\vee A)}$. 5. $\left(\left(\overline{X}\wedge\overline{Y}\right)\to\left(Y\wedge\overline{X}\right)\right)\vee(X\to Y)$.
Вариант 8	1. $\overline{(X>3)\vee(X<3)}\vee(X<1)$ при $X = 1$. 2. Если какие-либо два из трех векторов $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ коллинеарны, то их смешанное произведение равно нулю $[\vec{a}\times\vec{b}]\cdot\vec{c} = 0$.

	3. $\left(\bar{Y} \to \bar{Z} \to X\right) \wedge \left(\left(Z \to X\right) \vee Y\right)$. 4. $\overline{\left(\bar{A} \wedge B\right) \vee \overline{\left(B \vee A\right)}}$. 5. $\left(\overline{\left(\bar{X} \wedge \bar{Y}\right)} \to \left(Y \wedge \bar{X}\right)\right) \vee \left(\overline{\overline{X \wedge \bar{Y}}}\right)$.
Вариант 9	1. $\overline{\left(X < 5\right) \vee \left(X < 3\right)} \vee \overline{\left(X < 2\right) \vee \left(X < 1\right)}$ при $X = 3$. 2. Логарифм некоторого положительного числа будет положительным, если основание логарифма и логарифмируемое число будут больше 1 или если основание логарифма и логарифмируемое число будут заключены между 0 и 1. 3. $\left(\bar{\bar{Y}} \to \left(X \wedge \bar{Z}\right)\right) \wedge \left(\left(Z \vee X\right) \vee Y\right)$. 4. $\overline{\overline{\left(\bar{A} \wedge B\right)} \vee \overline{\left(B \vee A\right)}}$. 5. $\left(\left(\bar{X} \wedge \bar{Y}\right) \to \left(Y \wedge \bar{X}\right)\right) \vee \left(\bar{\bar{X}}\right)$.
Вариант 10	1. $\left(X > 1\right) \wedge \overline{\left(X < 5\right) \vee \left(X < 3\right)}$ при $X = 4$. 2. Если в параллелограмме не все углы прямые или не все стороны равны между собой, то этот параллелограмм не прямоугольник или не ромб. 3. $\left(Y \wedge \left(X \wedge \bar{Z}\right)\right) \wedge \left(\left(Z \wedge \bar{X}\right) \vee Y\right)$. 4. $\overline{\left(B \vee A\right)} \wedge \left(B \vee A\right) \wedge \bar{B}$. 5. $\left(\left(\bar{X} \leftrightarrow \bar{Y}\right) \vee \left(X \wedge \bar{X}\right)\right) \vee \left(X \to Y\right)$.
Вариант 11	1. $\overline{\left(X > 2\right) \vee \left(X < 2\right)} \vee \left(X > 4\right)$ при $X = 1$. 2. Если в треугольнике любая его медиана не является высотой и биссектрисой, то этот треугольник не равнобедренный и не равносторонний. 3. $\left(\bar{Y} \wedge \left(\bar{X} \wedge \bar{Z}\right)\right) \to \left(\overline{\left(Z \wedge \bar{X}\right)} \vee Y\right)$. 4. $\left(B \vee \bar{A}\right) \wedge \left(\bar{B} \vee A\right) \wedge \bar{B}$. 5. $\left(\left(\bar{X} \wedge \bar{Y}\right) \vee \left(X \wedge \bar{X}\right)\right) \vee \overline{\left(X \to Y\right)}$.
Вариант 12	1. $\overline{\left(X > 2\right) \vee \left(X < 2\right)} \vee \left(X > 4\right)$ при $X = 3$. 2. Если две последние цифры числа нули или образуют число,

	делящееся на 4, то число тоже делится на 4. 3. $\left(\overline{Y}\rightarrow\left(\overline{X}\wedge\overline{Z}\right)\right)\rightarrow\left(Z\wedge X\vee Y\right)$. 4. $\left(\overline{B}\vee\overline{A}\right)\wedge\left(\overline{\overline{B}}\vee A\right)\wedge\overline{B}$. 5. $\left(\left(X\wedge Y\right)\leftrightarrow\left(Y\wedge\overline{X}\right)\right)\vee\overline{\left(X\vee Y\right)}$.
Вариант 13	1. $\left(X>4\right)\vee\overline{\left(X>1\right)}\vee\left(X>4\right)$ при $X = 0$. 2. (X>4) v ¬(X>1) v (X>4) при X=0 3. Число делится на 6, если оно делится одновременно и на 2 и на 4. 3. $\left(\overline{Y}\wedge\left(\overline{X}\wedge\overline{Z}\right)\right)\leftrightarrow\left(Z\wedge X\vee Y\right)$. 4. $\left(B\vee\overline{A}\right)\wedge\left(B\wedge A\right)\wedge B$. 5. $\left(\left(X\wedge Y\right)\vee\left(\overline{Y}\leftrightarrow\overline{X}\right)\right)\vee\overline{\left(X\vee Y\right)}$.
Вариант 14	1. $\left(X>1\right)\wedge\overline{\left(X<5\right)}\vee\left(X<3\right)$ при $X = 3$. 2. Число делится на 8, если три последние цифры его нули или образуют число, делящееся на 8. 3. $\overline{\left(\overline{Y}\wedge\left(\overline{\overline{X}}\wedge\overline{Z}\right)\right)}\rightarrow\left(Z\wedge\overline{X}\vee Y\right)$. 4. $\left(B\vee\overline{\overline{A}}\right)\vee\left(B\vee A\right)\wedge B$. 5. $\left(\left(X\rightarrow Y\right)\vee\left(Y\vee\overline{X}\right)\right)\vee\overline{\left(X\rightarrow Y\right)}$.
Вариант 15	1. $\left(X>1\right)\wedge\overline{\left(X<5\right)}\vee\left(X<3\right)$ при $X = 2$. 2. Если две прямые лежат в одной плоскости и не пересекаются, то такие прямые параллельны. 3. $\left(\overline{X}\vee Y\right)\rightarrow\left(X\wedge Z\right)\rightarrow\left(\overline{Z}\vee\overline{X}\vee Y\right)$. 4. $\left(B\vee A\right)\wedge\overline{A}\vee\overline{B}$. 5. $\left(\left(\overline{X}\wedge Y\right)\leftrightarrow\left(\overline{Y}\vee\overline{X}\right)\right)\vee\overline{X}$.
Вариант 16	1. $\overline{\left(X>3\right)\vee\left(X<3\right)}\vee\left(X<1\right)$ при $X = 4$. 2. Если одна из двух параллельных прямых пересекает данную плоскость, то и другая прямая пересекает эту плоскость. 3. $\overline{\left(\overline{X}\vee Y\right)}\rightarrow\left(X\wedge Z\right)\wedge\left(\overline{Z}\vee\overline{X}\vee Y\right)$.

	4. $(\overline{B}\vee A)\wedge(\overline{A}\vee\overline{B})$. 5. $((\overline{X}\wedge Y)\wedge(\overline{Y}\leftrightarrow\overline{X}))\vee\overline{X}$.
Вариант 17	1. $\overline{\overline{(X>2)}\vee(X>3)}$ при $X = 3$. 2. Если две точки прямой находятся в некоторой плоскости, то эта прямая лежит в этой плоскости. 3. $\overline{(\overline{X}\vee\overline{Y})}\to(X\wedge Z)\wedge(\overline{X}\to Y)$. 4. $\overline{(\overline{B}\vee A)}\wedge(\overline{A}\vee\overline{B})$. 5. $((\overline{X}\to Y)\wedge(\overline{Y}\to\overline{X}))\to\overline{X}$.
Вариант 18	1. $(X>1)\wedge\overline{(X<5)\vee(X<3)}$ при $X = 2$. 2. На улице пасмурная погода тогда и только тогда, когда не светит солнце. 3. $\overline{(\overline{X}\vee Y)}\leftrightarrow(\overline{Z}\vee\overline{X}\vee Y)$. 4. $(\overline{B}\vee\overline{A})\wedge(\overline{\overline{A}\vee\overline{B}})$. 5. $(\overline{(\overline{X}\wedge Y)}\wedge(\overline{Y}\leftrightarrow\overline{X}))\vee\overline{\overline{X}}$.
Вариант 19	1. $(X>4)\vee(X>1)\vee(X>4)$ при $X = 3$. 2. Если прямая, не лежащая в данной плоскости, параллельна какой-нибудь прямой на этой плоскости, то эта прямая параллельна данной плоскости. 3. $\overline{(\overline{X}\vee Y)}\leftrightarrow(\overline{\overline{Z}\vee\overline{X}}\wedge Y)$. 4. $\overline{(\overline{B}\vee\overline{A})}\vee(\overline{\overline{A}\vee\overline{B}})$. 5. $(\overline{(\overline{X}\to Y)}\wedge(\overline{Y}\to\overline{X}))\vee\overline{\overline{X}}$.
Вариант 20	1. $\overline{\overline{(X>2)}\vee(X>3)}$ при $X = 2$. 2. Если плоскость β проходит через данную прямую *a*, параллельную плоскости α, и пересекает эту плоскость по прямой *b*, то *b*‖*a*. 3. $\overline{(\overline{X}\leftrightarrow Y)}\leftrightarrow(\overline{\overline{Z}\vee\overline{X}})$. 4. $\overline{\overline{(B\vee\overline{A})}\vee(\overline{A\vee B})}$.

	5. $\left(\overline{\left(\overline{\overline{X}} \to Y\right)} \leftrightarrow \left(Y \to \overline{X}\right)\right)$.
Вариант 21	1. $(X > 4) \vee \overline{(X > 1)} \vee (X > 4)$ при $X = 5$. 2. Если одна из двух параллельных прямых $a \parallel b$ параллельна данной плоскости α, то другая прямая либо параллельна этой плоскости, либо лежит в этой плоскости. 3. $\left(X \vee \overline{Y} \wedge \overline{Z}\right) \wedge \left(\left(X \to \overline{\overline{Y}}\right) \vee \overline{Z}\right)$. 4. $\overline{\left(A \wedge \overline{B}\right)} \to \overline{\left(B \vee \overline{A}\right)}$. 5. $\left(\left(\overline{X} \to Y\right) \wedge \left(\overline{\overline{\overline{Y}}} \to X\right)\right) \to (X \vee Y)$.
Вариант 22	1. $\overline{(X < 2)} \vee (X < 2) \vee (X < 4)$ при $X = 4$. 2. Мэдисон будет есть пудинг только тогда, когда он с заварным кремом. 3. $X \to (Y \to Z) \vee \left(\left(\overline{X} \to Y\right) \vee Z\right)$. 4. $\overline{\left(\overline{A} \wedge B\right)} \to A \to \overline{\left(\overline{B} \wedge A\right)}$. 5. $\left(\overline{\left(\overline{X} \to \overline{Y}\right)} \to (Y \to X)\right) \vee \left(X \to \overline{Y}\right)$.
Вариант 23	1. $\overline{(X > 2)} \vee (X < 2) \vee (X > 4)$ при $X = 2$. 2. Если социологические исследования показывают, что потребитель отдаёт предпочтение удобству и многообразию выбора, то фирме следует сделать упор на усовершенствование товара или увеличение многообразия новых форм. 3. $X \vee (Y \vee Z) \vee \left(\left(\overline{X} \to Y\right) \vee Z\right)$. 4. $\overline{\left(\overline{A} \wedge B\right)} \wedge \overline{\left(\overline{B} \vee A\right)}$. 5. $\left(\left(\overline{X} \to \overline{Y}\right) \to X\right) \vee \left(X \to \overline{Y}\right)$.
Вариант 24	1. $\overline{(X > 2)} \vee (X < 2) \vee (X > 4)$ при $X = 3$. 2. Логарифм некоторого положительного числа будет положительным, если основание логарифма и логарифмируемое число будут больше 1 или если основание логарифма и логарифмируе-

	мое число будут заключены между 0 и 1. 3. $X \wedge (Y \vee Z) \vee ((\overline{X} \rightarrow Y) \vee Z)$. 4. $\overline{(\overline{A} \wedge B)} \wedge \overline{(B \wedge A)}$. 5. $((X \rightarrow Y) \rightarrow (Y \rightarrow X)) \vee (X \rightarrow \overline{Y})$.
Вариант 25	1. $(X > 1) \wedge \overline{(X < 5)} \vee (X < 3)$ при $X = 4$. 2. Если в треугольнике любая его медиана не является высотой и биссектрисой, то этот треугольник не равнобедренный и не равносторонний. 3. $\overline{X} \rightarrow (Y \vee Z) \vee ((\overline{X} \rightarrow Y) \vee Z)$. 4. $\overline{(\overline{A} \wedge B)} \wedge \overline{(\overline{B} \wedge \overline{A})}$. 5. $((\overline{X} \rightarrow \overline{Y}) \vee (Y \rightarrow X)) \vee (X \rightarrow \overline{Y})$.

2 БУЛЕВЫ ФУНКЦИИ

2.1 Основные булевы функции и их свойства

Булевой функцией от одного аргумента называется функция *f* от одного аргумента, заданная на множестве B={0,1} и принимающая значения в том же двухэлементном множестве.

Функция вида $y = f(x_1, x_2, ..., x_n)$, аргументы x_i и значения y которой принадлежат множеству $B = \{0,1\}$, называется *булевой функцией от n аргументов.*

Важнейшая особенность булевых функций состоит в том, что они, как и их аргументы, принимают свои значения из двухэлементного множества $B = \{0, 1\}$, т.е. характеризуются одним из двух возможных состояний.

Совокупность конкретных значений аргументов булевой функции называется *кортежем* и обозначается как $(x_1, x_2, ..., x_n)$.

Булевы функции можно рассматривать как *единичный n-мерный куб*. Каждый набор из нулей и единиц длины *n* задает вершину этого куба. На рисунке 2.1 представлен *единичные куб* B^n при n=3.

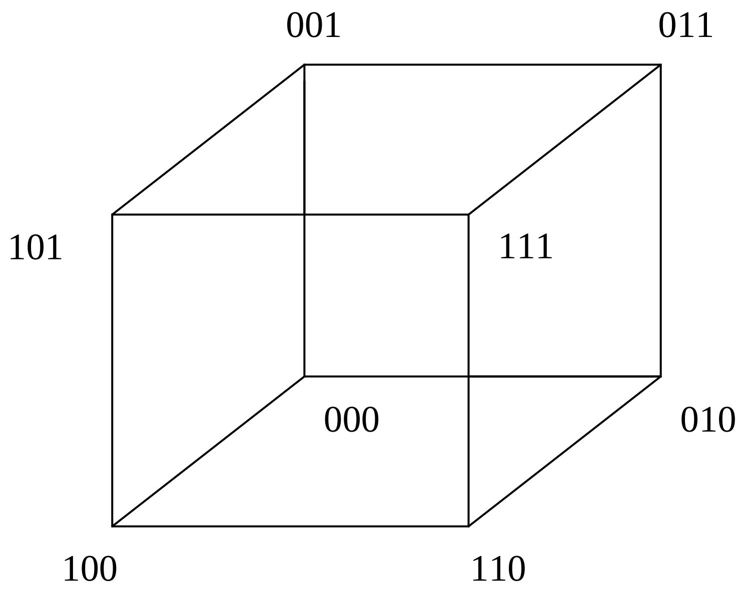


Рис. 2.1. Задание подынтегральной функции.

Пример:

В множество двоичных наборов для булевой функции $y = f(x)$ входит $|B^1| = 2^1 = 2$: (0) и (1); в множество двоичных наборов для булевой функции $y = f(x_1, x_2, x_3)$ входит $|B^3| = 2^3 = 8$ наборов: $(0,0,0)$, $(0,0,1)$, $(0,1,0)$, $(0,1,1)$, $(1,0,0)$, $(1,0,1)$, $(1,1,0)$, $(1,1,1)$.

Способы задания булевых функций:

- вербальный (словесный);
- табличный (с помощью таблицы истинности);
- порядковым номером, который имеет функция;
- аналитический (в виде формулы).

Всевозможные булевы функции двух переменных $f(x_1, x_2)$:

		0	$\cdot$	$\to'$	x	$\leftarrow'$	y	$\oplus$	$\vee$	$\downarrow$	$\leftrightarrow$	y'	$\leftarrow$	x'	$\to$	$\mid$	1
x_1	x_2	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	f_9	f_{10}	f_{11}	f_{12}	f_{13}	f_{14}	f_{15}
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1

Здесь x' – отрицание x; $x \oplus y$ – сложение по модулю два; $x \mid y$ – штрих Шеффера; $x \downarrow y$ – стрелка Пирса.

Количество булевых функций от n переменных вычисляется как 2^{2^n}. В случаем двух переменных их количество составляет $2^{2^n} = 2^{2^2} = 2^4 = 16$.

Свойства булевых функций:

1. $x \vee x = x$ – идемпотентность дизъюнкции,
2. $x \cdot x = x$ – идемпотентность конъюнкции,
3. $x \vee y = y \vee x$ – коммутативность дизъюнкции,
4. $x \cdot y = y \cdot x$ – коммутативность конъюнкции,
5. $(x \vee y) \vee z = x \vee (y \vee z)$ – ассоциативность дизъюнкции,
6. $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$ – ассоциативность конъюнкции,
7. $x \vee 1 = 1$, $x \cdot 1 = x$,

8. $x \vee 0 = x$, $x \cdot 0 = 0$,

9. $x \vee (y \cdot z) = (x \vee y) \cdot (x \vee z)$ – дистрибутивность дизъюнкции относительно конъюнкции,

10. $x \cdot (y \vee z) = (x \cdot y) \vee (x \cdot z)$ – дистрибутивность конъюнкции относительно дизъюнкции,

11. $(x \vee y)' = x' \cdot y'$, $(x \cdot y)' = x' \vee y'$ – законы де Моргана,

12. $x \vee x' = 1$, $x \cdot x' = 0$,

13. $x'' = x$,

14. $x \leftrightarrow x = 1$, $x \leftrightarrow x' = 0$,

15. $x \leftrightarrow y = y \leftrightarrow x$ – коммутативность эквивалентности,

16. $(x \leftrightarrow y) \leftrightarrow z = x \leftrightarrow (y \leftrightarrow z)$ – ассоциативность эквивалентности,

17. $x \leftrightarrow y = (x \to y) \cdot (y \to x)$

18. $x' \leftrightarrow y' = x \leftrightarrow y$, $x' \to y' = y \to x$,

19. $x \to y = x' \vee y$,

20. $x \to x = 1$, $x \to x' = x'$, $x' \to x = x$,

21. $x \oplus 0 = x$, $x \oplus 1 = \bar{x}$,

22. $x \oplus x = 0$,

23. $x \oplus y = y \oplus x$,

24. $(x \oplus y) \oplus z = z \oplus (y \oplus x)$,

25 $(x \oplus y) \oplus y = x$,

26. $(x \oplus y) \cdot z = z \cdot y \oplus x \cdot z$,

27. $x \vee y = x \cdot y \oplus x \oplus y$,

28. $x \mid y = (x \cdot y)'$,

29. $x \downarrow y = (x \vee y)'$

Пример:

Постройте таблицу значений для булевой функции $f(x, y, z) = ((x \to (y \vee z)) \cdot (y \cdot z)') \to x$

Решение.

x	y	z	$y \vee z$	$x \to (y \vee z)$	$y \cdot z$	$(y \cdot z)'$	$(x \to (y \vee z)) \cdot (y \cdot z)'$	f
0	0	0	0	1	0	1	1	1
0	0	1	1	1	0	1	1	1
0	1	0	1	1	0	1	1	1
0	1	1	1	1	1	0	0	0
1	0	0	0	0	0	1	0	0
1	0	1	1	1	0	1	1	0
1	1	0	1	1	0	1	1	0
1	1	1	1	1	1	0	0	0

Пример:

Докажите, что булева функция штрих Шеффера обладает следующими свойствами $((x \mid x)' \mid (y \mid y)')' = x \cdot y.$

Решение.

$((x \mid x)' \mid (y \mid y)')' = (x'' \mid y'')' = (x \mid y)' = (x' \vee y')' = x \cdot y$.

2.2. Полином Жегалкина

Алгебра Жегалкина – это алгебра над множеством двух бинарных булевых функций $(\cdot, \oplus)$ и функции 1.

Полиномом Жегалкина от переменных $x_1, x_2, .. x_k$ называется булева функция вида

$$\sum_{(i_1,\, i_2,\, \ldots,\, i_k)} a_{i_1, i_2, .. i_k} x_{i_1} x_{i_2} .. x_{i_k} ,$$

представляющая собой сумму по модулю два (сумму Жегалкина) конъюнктивных одночленов $x_1, x_2, .. x_k$ от всевозможных наборов переменных $x_1, x_2, .. x_k$, причем коэффициент $a_{i_1, i_2, .. i_k}$ может принимать значение 1 или 0, что показывает входит данный конъюнктивный одночлен в сумму или нет.

Для трех переменных полином Жегалкина имеет вид:

$f(x, y, z) = a_0 \oplus a_1 x \oplus a_2 y \oplus a_3 z \oplus a_4 xy \oplus a_5 xz \oplus a_6 yz \oplus a_7 xyz$.

Булева функция $f(x_1, \ldots, x_k)$ называется ***линейной***, если в представляющем ее полиноме Жегалкина отсутствуют слагаемые, имеющие степень выше первой, т.е. $a_0 \oplus a_1 x_1 \oplus a_2 x_2 \oplus \ldots \oplus a_k x_k$.

Любая булева функция единственным образом (с точностью до следования слагаемых) представима в виде полинома Жегалкина.

Для построения полинома Жегалкина можно использовать различные методы:

- Метод неопределенных коэффициентов;
- Метод треугольника Паскаля;
- Преобразование ДНФ;
- Преобразование СДНФ.

1) *Метод неопределенных коэффициентов*

Применяя метод неопределенных коэффициентов, найдем полином Жегалкина для функции. Для этого сначала необходимо построить таблицу истинности данной булевой функции $f(x,y,z)$.

x	y	z	xy	$xy \vee z$	$(xy \vee z)$
0	0	0	0	0	1
0	0	1	0	1	1
0	1	0	0	0	1
0	1	1	0	1	0
1	0	0	0	0	1
1	0	1	0	1	1
1	1	0	1	1	0
1	1	1	1	1	0

Общий вид полинома Жегалкина для функции $f(x,y,z)$:

$$f(x,y,z) = a_0 \oplus a_1 x \oplus a_2 y \oplus a_3 z \oplus a_4 xy \oplus a_5 xz \oplus a_6 yz \oplus a_7 xyz$$

Последовательно подставляем наборы значений переменных и находим коэффициенты $a_0, \ldots a_7$.

$$f(0,0,0) = a_0 = 1;$$

$$f(0,0,1) = a_0 \oplus a_3 = 1 \quad \Rightarrow 1 \oplus a_3 = 1 \quad \Rightarrow a_3 = 0;$$

$$f(0,1,0) = a_0 \oplus a_2 = 1 \quad \Rightarrow 1 \oplus a_2 = 1 \quad \Rightarrow a_2 = 0;$$

$$f(0,1,1) = a_0 \oplus a_2 \oplus a_3 \oplus a_6 = 0 \quad \Rightarrow 1 \oplus 0 \oplus 0 \oplus a_6 = 0 \quad \Rightarrow a_6 = 1;$$

$$f(1,0,0) = a_0 \oplus a_1 = 1 \quad \Rightarrow 1 \oplus a_1 = 1 \quad \Rightarrow a_1 = 0;$$

$$f(1,0,1) = a_0 \oplus a_1 \oplus a_3 \oplus a_5 = 1 \quad \Rightarrow 1 \oplus 0 \oplus 0 \oplus a_5 = 1 \quad \Rightarrow a_6 = 0;$$

$$f(1,1,0) = a_0 \oplus a_1 \oplus a_2 \oplus a_4 = 0 \quad \Rightarrow 1 \oplus 0 \oplus 0 \oplus a_4 = 0 \quad \Rightarrow a_4 = 1;$$

$$f(1,1,1)=a_0 \oplus a_1 \oplus a_2 \oplus a_3 \oplus a_4 \oplus a_5 \oplus a_6 \oplus a_7 = 0$$
$$\Rightarrow 1 \oplus 0 \oplus 0 \oplus 0 \oplus 1 \oplus 0 \oplus 1 \oplus a_7 = 0 \qquad \Rightarrow a_7 = 1.$$

Подставляя найденные коэффициенты, получаем полином Жегалкина:

$$f(x,y,z)=1 \oplus xy \oplus yz \oplus xyz\,.$$

2) *Метод треугольника Паскаля*

Найдем полигон Жегалкина для функции из предыдущего примера с помощью метода треугольника Паскаля.

x	y	z	$f(x,y,z)$	Треугольник Паскаля	Слагаемые
0	0	0	1	[1] 1 1 0 1 1 0 0	1
0	0	1	1	0 0 1 1 0 1 0	z
0	1	0	1	0 1 0 1 1 1	y
0	1	1	0	[1] 1 1 0 0	yz
1	0	0	1	0 0 1 0	x
1	0	1	1	0 1 1	xz
1	1	0	0	[1] 0	xy
1	1	1	0	[1]	xyz

Пояснение: В верхнюю строчку треугольника запишем вектор значений булевой функции f = (11101100). В каждой следующей строке, начиная со второй, любой элемент треугольника вычислим как сумма по модулю два (⊕) двух соседних элементов предыдущей строки. Таким образом, элементы второй строки примут значения: 1⊕1=0, 1⊕1=0, 1⊕0=1, 0⊕1=1, 1⊕1=0, 1⊕0=1, 0⊕0=01⊕1=0, 1⊕1=0, 1⊕0=1, 0⊕1=1, 1⊕1=0, 1⊕0=1, 0⊕0=0. Элементы остальных строк вычисляются аналогичным образом.

Левой стороне треугольника Паскаля соответствуют наборы значений переменных исходной функции $f(x,y,z)$. Соединяя знаком конъюнкции переменные, значения которых в наборе равны 1, мы получим слагаемое в полиноме Жегалкина. Набору (000) соответствует 1, набору (001) соответствует z, и т.д.

Так как единицам левой стороны треугольника соответствуют слагаемые 1, yz, xy, xyz то полином Жегалкина:

$$f(x,y,z)=1 \oplus xy \oplus yz \oplus xyz\,.$$

3) *Преобразование ДНФ*

Применяя основные законы алгебры логики, приведем данную функцию к ДНФ.

$f(x,y,z)=(xy\vee z)\to\bar{y}=\overline{xy\vee z}\vee\bar{y}=(\bar{x}\,\bar{y})\bar{z}\vee\bar{y}=\bar{x}\,\bar{z}\vee\bar{y}\,\bar{z}\vee\bar{y}=\bar{x}\,\bar{z}\vee\bar{y}$ – ДНФ.

Далее, используя законы де Моргана, в полученной ДНФ избавляемся от дизъюнкции:

$\bar{x}\,\bar{z}\vee\bar{y}=\overline{\overline{\bar{x}\,\bar{z}}\,y}$.

Заменяем каждое отрицание $\bar{x}=1\oplus x$ и применяем написанные выше логические законы, получаем:

$\overline{\overline{\bar{x}\,\bar{z}}\,y}=1\oplus\overline{\bar{x}\,\bar{z}}\,y=1\oplus((1\oplus\bar{x}\,\bar{z})y)=1\oplus((1\oplus(1\oplus x)(1\oplus z))y)=$

$=1\oplus(1\oplus 1\oplus z\oplus x\oplus xz)y=1\oplus(z\oplus x\oplus xz)y=1\oplus xy\oplus yz\oplus xyz$ – полином Жегалкина.

4) *Преобразование СДНФ*

x	y	z	$f(x,y,z)$
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	0

Для построения СДНФ по таблице истинности выбираем наборы, на которых функция f принимает значение, равное 1. Если значение переменной в этом наборе равно 0, то она берется с отрицанием, если значение переменной равно 1, то переменная берется без отрицание. Соединив знаком конъюнкции переменные соответствующего набора, получим элементарную конъюнкцию. Тогда дизъюнкция всех таких элементарных конъюнкций есть СДНФ.

$f(x,y,z)=\bar{x}\,\bar{y}\,\bar{z}\vee\bar{x}\,\bar{y}\,z\vee\bar{x}\,y\,\bar{z}\vee x\bar{y}\,\bar{z}\vee x\bar{y}\,z$.

Чтобы построить полином Жегалкина через СДНФ, необходимо исключить операции дизъюнкции и отрицания, затем раскрыть скобки.

$$f(x,y,z)=\bar{x}\,\bar{y}\,\bar{z}\vee\bar{x}\,\bar{y}\,z\vee\bar{x}\,y\,\bar{z}\vee x\,\bar{y}\,\bar{z}\vee x\,\bar{y}\,z=$$

$$=(1\oplus x)(1\oplus y)(1\oplus z)\vee(1\oplus x)(1\oplus y)\,z\vee(1\oplus x)\,y\,(1\oplus z)\vee x(1\oplus y)(1\oplus z)\vee x(1\oplus y)\,z=$$

$=1\oplus xy\oplus yz\oplus xyz$ – полином Жегалкина.

2.3 Классы булевых функций

Система булевых функций называется *полной*, если любая булева функция является некоторой суперпозицией функций из этой системы, иначе система называется *неполной*.

Для любой булевой функции справедливо соотношение

$$f(x_1,x_2,\ldots,x_k)=(x_1 f(x_1,x_2,\ldots,x_k))\vee(\bar{x}_1 f(0,x_2,\ldots,x_k)).$$

Американский математик Эмиль Пост сформулировал необходимое и достаточное условие полноты системы булевых функций. Для этого он ввел в рассмотрение следующие замкнутые классы булевых функций:

- функции, сохраняющие константу T_0 и T_1,
- самодвойственные функции S,
- монотонные функции M,
- линейные функции L.

Булева функция называется:

а) *сохраняющей* 0, если $f(0,0,0)=0$;

б) *сохраняющей* 1, если $f(1,1,1)=1$.

Булева функция называется *монотонной*, если она удовлетворяет условию

$$x_1\le y_1, x_2\le y_2,\ldots,x_n\le y_n\Rightarrow f(x_1,x_2,\ldots,x_k)\le f(y_1,y_2,\ldots,y_k).$$

Булева функция f^* называется *двойственной* по отношению к функции f, если $\overline{f(x_1,x_2,\ldots x_k)}=f(\bar{x}_1,\bar{x}_2,\ldots\bar{x}_k).$

Булева функция называется *самодвойственной*, если двойственная к ней функция совпадает с ней.

Функция называется *линейной*, если она может быть записана в следующем виде: $f(x, y, z) = a_0 \oplus a_1 x_1 \oplus a_2 x_2 \oplus \ldots \oplus a_k x_k$, где $a \in \{0{,}1\}$.

Теорема Поста. Набор булевых функций является полным тогда и только тогда, когда он не содержится полностью ни в одном из классов *S, M, L*, T_0, T_1.

Иными словами, когда в нем имеется хотя бы одна функция, не сохраняющая ноль, хотя бы одна функция, не сохраняющая один, хотя бы одна несамодвойственная функция, хотя бы одна немонотонная функция и хотя бы одна нелинейная функция.

Для некоторых булевых функций определим их принадлежность к замкнутым классам:

Функция	Класс				
	T_0	T_1	S	M	L
$f_0(x,y)$	+			+	+
$f_1(x,y)$	+	+		+	
$f_2(x,y)$	+				
$f_3(x,y)$	+	+	+	+	+
$f_4(x,y)$	+				
$f_5(x,y)$	+	+	+	+	+
$f_6(x,y)$	+				+
$f_7(x,y)$	+	+		+	
$f_8(x,y)$					
$f_9(x,y)$		+			+
$f_{10}(x,y)$			+		+
$f_{11}(x,y)$		+			
$f_{12}(x,y)$			+		+
$f_{13}(x,y)$		+			
$f_{14}(x,y)$					
$f_{15}(x,y)$		+		+	+

Пример:

Доказать полноту следующей системы функций: $x \oplus y \oplus z,\ x \cdot y,\ 0,\ 1.$

Решение:

Для полноты системы функций необходимо и достаточно, чтобы в каждом столбце таблицы Поста был хотя бы один минус.

Рассмотрим каждую из функций.

1. $f_1(x,y,z)=x\oplus y\oplus z$.

f_1 – функция, сохраняющая 0, т.к. $f(0{,}0{,}0)=0\oplus 0\oplus 0=0$;

f_1 – функция, сохраняющая 1 ,т.к. $f(1{,}1{,}1)=1\oplus 1\oplus 1=1$.

Найдем двойственную ей функцию:

$f_1^{*}=\overline{f_1(\bar{x},\bar{y},\bar{z})}=(x\oplus 1)\oplus(y\oplus 1)\oplus(z\oplus 1)\oplus 1=x\oplus y\oplus z\oplus 1\oplus 1\oplus 1\oplus 1=$

$=x\oplus y\oplus z$, т.е. $f_1\in S$.

Очевидно, что f_1 – линейная функция.

Проверим функцию на монотонность: выберем два набора значений переменных:

(0,1,0)< (0,1,1); $f_1(0{,}1{,}0)=1\Rightarrow f_1(0{,}1{,}1)=0$, т.е. $f_1\notin M$.

Аналогичным образом рассуждаем для остальных функций. В итоге таблица Поста будет иметь следующий вид:

Функция	T_0	T_1	S	L	M
$x\oplus y\oplus z$	+	+	+	+	-
$x\cdot y$	+	+	-	-	+
0	+	-	-	+	+
1	-	+	-	+	+

Доказали, что система является полной.

2.4 Применение булевых функций к релейно-контактным схемам

Под *релейно-контактной схемой* понимают устройство из проводников и двухпозиционных контактов, через которое полюсы источника тока связаны с некоторым потребителем.

Контакты могут быть *замыкающими* или *размыкающими*. На чертежах все замыкающие контакты, подключенные к реле x, обозначаются символом x, а размыкающие – символом x'.

Итак, каждый контакт имеет два устойчивых состояния: замкнутое и разомкнутое. Состояние каждого контакта можно рассматривать как логическую переменную x. При срабатывании реле x всем замыкающим контактам сопоставляется 1, размыкающим x' – 0. При отключении реле создается противоположная ситуация.

Всей схеме также ставится в соответствие логическая переменная y, которая равна 1, если схема проводит ток, и 0 в противном случае. Переменная y, соответствующая схеме, является булевой функцией от переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$, соответствующих реле. Эта функция называется *функцией проводимости схемы,* а ее таблица – *условиями работы схемы.*

Две релейно-контактные схемы называются *равносильными,* если одна из них проводит ток тогда и только тогда, когда другая схема проводит ток, т.е. обе схемы обладают одинаковыми функциями проводимости. Из двух равносильных схем более простой считается та, которая содержит меньшее число контактов.

В теории релейно-контактных схем различают две главные задачи:

– *задача анализа* состоит в изучении характера работы данной схемы и ее упрощении;

– *задача синтеза* состоит в построении схемы по минимальной булевой функции, полученной из заданных условий работы схемы.

Рассмотрим некоторые релейно-контактные схемы и найдем их функции проводимости.

1) На рисунке 2.2 изображено последовательное соединение двух контактов x и y.

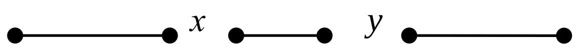


*Рис. 2.2.*Последовательное соединение контактов.

Данная схема проводит электрический ток тогда и только тогда, когда оба независимых переключателя x и y замкнуты. Следовательно, функцией проводимости этой схемы будет булева функция от двух аргументов, которая принимает значение 1 в том и только том случае, когда оба ее аргумента принимают значение 1. Такой функцией является конъюнкция $f(x, y) = x \cdot y$.

2) На рисунке 2.3 изображено параллельное соединение двух контактов x и y.

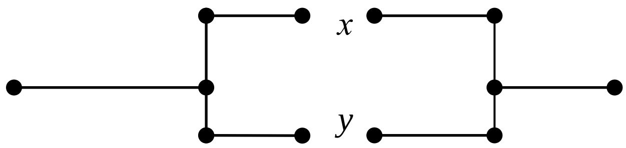


*Рис. 2.3.*Последовательное соединение контактов.

Данная схема проводит ток тогда и только тогда, когда по меньшей мере один из двух независимых переключателей *x* или *y* замкнут. Следовательно, функцией проводимости этой схемы будет такая булева функция от двух переменных, которая принимает значение 1 в том и только том случае, когда хотя бы одна из переменных *x* или *y* принимает значение 1. Такой функцией является дизъюнкция $f(x, y) = x \vee y$.

Пример:

По данной релейно-контактной схеме найдем ее функцию проводимости и условия работы:

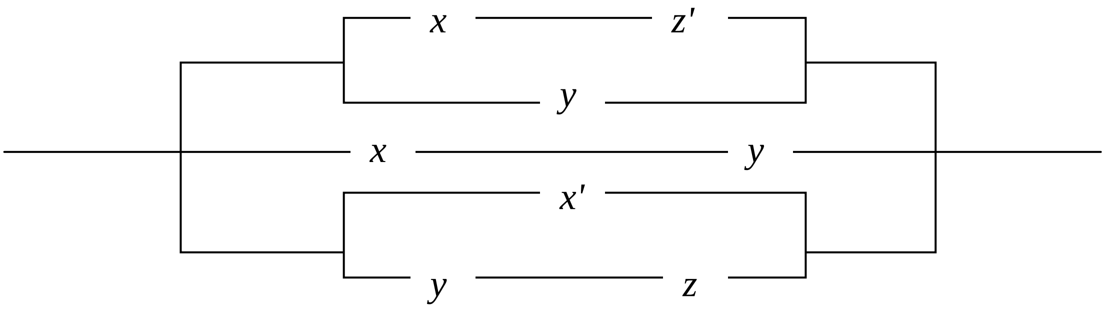


Схема состоит из трех параллельных ветвей. первая ветвь, в свою очередь, состоит из двух параллельных ветвей, в одной из которых последовательно соединены два контакта x и z', а в другой один контакт *y*. Поэтому первая из трех параллельных ветвей имеет следующую функцию проводимости: $xz' \vee y$.

Вторая параллельная ветвь состоит из двух последовательно соединенных контактов *x* и *y* и поэтому имеет смысл следующая функция проводимости: *xy*.

Третья ветвь схемы состоит из двух параллельных ветвей, в одной из которых единственный контакт x', а в другой последовательно соединены контакты y и z. Поэтому функция проводимости для третьей ветви схемы есть $x' \vee y$ z.

Т.к. данная схема состоит из трех параллельно соединенных ветвей, то функция проводимости примет вид: $\pi(x, y, z) = (xz' \vee y) \vee xy \vee (x' \vee yz)$.

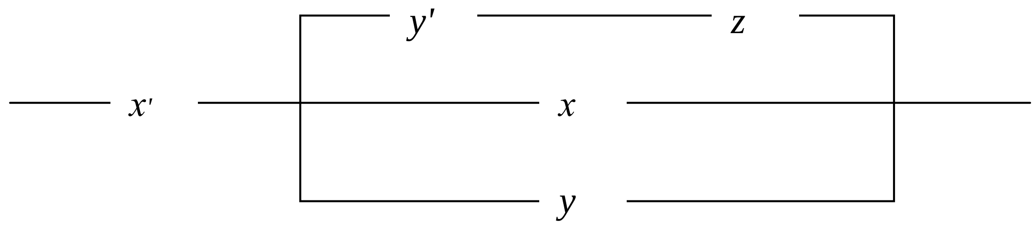
Пример.

Построим релейно-контактную схему с заданной функцией проводимости $x'(y' \cdot z \vee x \vee y)$.

Схема представляет собой последовательное соединения контакта и схемы с функцией проводимости $(y' \cdot z \vee x \vee y)$.

Последняя схема, в свою очередь, состоит из трех параллельных ветвей. В первой ветви последовательно соединены контакты y' и z, вторая содержит контакт x, третья – только контакт y.

Итак, искомая схема имеет вид:



Вопросы:

1. Какие переменные называются булевыми переменными?

2. Как определить число всех булевых функций, зависящих от 5 переменных.

3. Назовите способы задания булевых функций.

4. Что представляет собой таблица истинности булевой функции. Назовите правила её построения.

5. Дайте определение формулы для задания булевой функции. Что такое суперпозиция булевых функций?

6. Какие формулы называются равносильными или эквивалентными?

7. Дайте определение двойственной функции.

8. Дайте определение самодвойственной функции.

9. Сформулируйте принцип двойственности булевых функций.

10. Какая функция называется монотонной?

11. Определите понятие полинома Жегалкина.

12. Дайте определение линейности булевой функции.

13. Приведите примеры линейных и нелинейных функций двух переменных.

14. Перечислите важнейшие замкнутые классы булевых функций.

15. Какая система булевых функций называется функционально полной?

16. Сформулируйте теорему о полноте двух систем булевых функций.

17. Сформулируйте теорему Поста о полноте булевых функций.

18. Как с помощью булевых функции описать параллельное и последовательное соединения.

Индивидуальные задания:

1. Постройте таблицу значений для заданной булевой функции.

2. Проверьте справедливость равенства, выражающего свойства дистрибутивности одних булевых относительно других.

3. Исследуете на полноту булевых функций.

4. Постройте релейно-контактную схему с заданной функцией проводимости.

Вариант 1	1. $f(x,y,z)=((x\to z)y')\to x'$. 2. $(x\to y)\vee z=(x\vee z)\to(y\vee z)$. 3. $\{x\cdot y\vee y'\cdot z,\ 0,\ 1\}$. 4. $(x\cdot y\vee z'\vee x')\cdot(x'\vee y)$.
Вариант 2	1. $f(x,y,z)=((x\vee y')\to z)((x\mid y)\leftrightarrow z')$. 2. $(x\leftrightarrow y)\vee z=(x\vee z)\leftrightarrow(y\vee z)$. 3. $\{x\cdot y\vee x\cdot z\vee y\cdot z,\ x',\ 1\}$.

	4. $(x'\vee y)\cdot(yz\vee x)\vee uz$.
Вариант 3	1. $f(x,y,z)=x'\to(x\leftrightarrow(y\oplus(x\cdot z)))$. 2. $x\to(y\to z)=(x\to y)\to(x\to z)$. 3. $\{x\cdot y\vee x\cdot z\vee y\cdot z,\ x\leftrightarrow y,\ x\oplus y\}$ 4. $x(y\cdot z\vee y'\cdot z')\vee x'\cdot(y'\cdot z\vee y\cdot z')$.
Вариант 4	1. $f(x,y,z)=((((x\mid y)\downarrow z)\mid y)\downarrow z)$. 2. $x\to(y\cdot z)=(x\to y)\cdot(x\to z)$. 3. $\{y\to x\cdot z,\ 0,\ 1\}$. 4. $(x'\vee y)\cdot t\cdot y'x'\cdot(y\vee z)$.
Вариант 5	1. $f(x,y,z)=(x'\cdot y'\cdot z')\downarrow(x\cdot y\cdot z)$. 2. $x\to(y\vee z)=(x\to y)\vee(x\to z)$. 3. $\{x\oplus y\oplus z,\ x\cdot y,\ x'\}$. 4. $x(y\cdot z\vee t)\vee x\cdot y\cdot z'\vee z\cdot(y\vee x')$.
Вариант 6	1. $f(x,y,z)=x'\cdot y'\oplus y\cdot z'\oplus x\cdot y$. 2. $x\to(y\leftrightarrow z)=(x\to y)\leftrightarrow(x\to z)$. 3. $\{x\cdot y\oplus z,\ (x\leftrightarrow y)\oplus z,\ 1\}$. 4. $(x\vee y\cdot z)\cdot(x\cdot t\vee z\cdot(x'\vee y))$.
Вариант 7	1. $f(x,y,z)=(x\downarrow y)'\oplus z\cdot x\oplus x\cdot y$. 2. $x\cdot(y\cdot z)=(x\cdot y)\cdot(x\cdot z)$. 3. $\{(y\to x)\cdot(y'\to z),\ 0,\ 1\}$. 4. $xy'\vee u\cdot(v\vee z)\cdot x'\vee x'\cdot u\cdot v$.
Вариант 8	1. $f(x,y,z)=(x\mid y)'\oplus(y\mid z)\oplus xyz$. 2. $x\vee(y\vee z)=(x\vee y)\vee(x\vee z)$. 3. $\{x\oplus y\oplus z,\ x'\}$. 4. $x'\cdot(y\vee t')x'\cdot y\cdot z'\vee z\cdot(y'\vee x')$
Вариант 9	1. $f(x,y,z)=((x\oplus y)\cdot(y\oplus z)')'$.

	2. $x \to (x \cdot y) = x \to y$. 3. $\{xy \vee xz \vee yz,\ x'\}$. 4. $((z \vee x) \cdot y'u \vee x'v) \cdot x \cdot z$.
Вариант 10	1. $f(x,y,z) = (x \cdot y \cdot z) \mid (x' \cdot y' \cdot z')$. 2. $x \to (x \leftrightarrow y) = x \to y$. 3. $\{xy \oplus xz \oplus yz,\ 0,\ 1\}$. 4. $x' \cdot (y'z \vee x \vee y)$.
Вариант 11	1. $f(x,y,z) = ((x \vee z) \to y') \vee x'$. 2. $(x' \to y) \vee z' = (x' \vee z) \to (y \vee z')$. 3. $\{x \vee y' \cdot z,\ x \vee y,\ 0\}$. 4. $(x \cdot y' \vee z' \cdot x') \vee (x' \cdot y)'$.
Вариант 12	1. $f(x,y,z) = ((x \vee y') \downarrow z) \vee ((x \cdot y) \leftrightarrow z')$. 2. $(x \cdot y') \vee z = (x \cdot z) \vee (y' \cdot z)$. 3. $\{x \cdot y \vee x \cdot z,\ x',\ 1\}$. 4. $(x' \vee y) \cdot (uz \vee x') \vee uz$.
Вариант 13	1. $f(x,y,z) = x' \to (x \oplus (y \oplus (x \cdot z)))$. 2. $x \to (y \oplus z) = (x \to y) \oplus (x \to z)$. 3. $\{x \vee x \cdot z \vee y \cdot z,\ x \vee y,\ x \oplus y\}$ 4. $x \vee (y \cdot z' \vee y \cdot z') \vee x' \cdot (y' \cdot z \vee y \cdot z')$.
Вариант 14	1. $f(x,y,z) = ((((x \mid y) \mid z) \mid y) \downarrow z)$. 2. $x \to (y \downarrow z) = (x \to y) \downarrow (x \to z)$. 3. $\{y \vee x \cdot z,\ 0,\ 1\}$. 4. $(x' \cdot y) \vee t \cdot y'x' \vee (y \vee z)$.
Вариант 15	1. $f(x,y,z) = (x' \cdot y' \cdot z') \downarrow (x \oplus z)$. 2. $x \mid (y \vee z) = (x \mid y) \vee (x \mid z)$. 3. $\{x \oplus y \oplus z,\ x \to y,\ x'\}$.

	4. $x\vee\left(y'\cdot z'\vee t\right)\vee z'\vee z\cdot\left(y\vee x'\right)$.
Вариант 16	1. $f\left(x,y,z\right)=\left(x'\downarrow y'\right)\oplus y\cdot z'\oplus x\cdot y$. 2. $x\downarrow\left(y\mid z\right)=\left(x\downarrow y\right)\mid\left(x\downarrow z\right)$. 3. $\{x\cdot y\cdot z,\ (x\vee y)\oplus z,\ 1\}$. 4. $\left(x\vee y'\cdot z'\right)\vee\left(t\vee z\cdot\left(x'\cdot y\right)\right)$.
Вариант 17	1. $f\left(x,y,z\right)=(x\oplus y)'\oplus z\cdot x$. 2. $x\cdot\left(y\oplus z\right)=\left(x\cdot y\right)\oplus\left(x\cdot z\right)$. 3. $\{(y\to x)\cdot(y'\to z),\ x\cdot y,\ 1\}$. 4. $x'\cdot y'\vee u'\cdot x'\vee x'\cdot v$.
Вариант 18	1. $f\left(x,y,z\right)=(x\downarrow y)'\oplus(y\mid z)\oplus xyz$. 2. $x\vee\left(y\vee z\right)=\left(x\vee y\right)\oplus\left(x\vee z\right)$. 3. $\{y\oplus z,\ x',0\}$. 4. $x'\vee y\vee z'\vee z\cdot\left(y'\vee x'\right)$
Вариант 19	1. $f\left(x,y,z\right)=((x\mid y)\cdot(y\mid z)')'$. 2. $x\to\left(x\oplus y\right)=x\to y$. 3. $\{x\cdot y\vee x\cdot z'\vee y\cdot z,\ x'\}$. 4. $\left(\left(z'\vee x\right)\cdot y'\vee u'\vee x'v\right)\cdot x\cdot z$.
Вариант 20	1. $f\left(x,y,z\right)=\left(x\vee y\cdot z\right)\oplus\left(x'\cdot y'\cdot z'\right)$. 2. $x\to\left(x\leftrightarrow y\right)=x\downarrow y$. 3. $\{xz\oplus yz,\ 0,\ 1\}$. 4. $x'\cdot\left(y'z'\cdot t\vee x\vee y\right)$.
Вариант 21	1. $f\left(x,y,z\right)=\left(\left(x\to z\right)\mid y'\right)\to x'$. 2. $\left(x\leftrightarrow y\right)\vee z=\left(x\vee z\right)\leftrightarrow\left(y\vee z\right)$. 3. $\{x\cdot y'\vee y'\cdot z,\ x'',\ 1\}$. 4. $\left(x'\vee z'\vee y'\right)\cdot\left(x'\vee y\right)$.
Вариант 22	1. $f\left(x,y,z\right)=\left(\left(x\oplus y'\right)\to z\right)\left(\left(x\mid y\right)\leftrightarrow z'\right)$.

	2. $(x \leftrightarrow y) \vee z = (x \vee z) \mid (y \vee z)$. 3. $\{(x \oplus z) \vee y \cdot z,\ x',\ 1\}$. 4. $(x' \vee y) \vee (y \vee z \vee x) \vee u' \cdot z$.
Вариант 23	1. $f(x, y, z) = x' \to (x \vee (y \oplus (x \cdot z)))$. 2. $x \cdot (y \to z) = (x \to y) \to (x \to z)$. 3. $\{x \cdot y \vee x \cdot z \vee (y \mid z),\ x \mid y,\ x \oplus y\}$ 4. $x(y \cdot z \vee y' \cdot z') \vee x' \cdot (y' \cdot z \vee y \cdot z')$.
Вариант 24	1. $f(x, y, z) = ((((x \oplus y) \oplus z) \mid y) \downarrow z)$. 2. $x \to (y \oplus z) = (x \to y) \cdot (x \oplus z)$. 3. $\{y \mid x \mid z,\ 0,\ 1\}$. 4. $(x' \vee y') \cdot t \cdot y' \cdot x' \cdot (y \vee z')$.
Вариант 25	1. $f(x, y, z) = (x' \cdot y' \cdot z') \oplus (x \cdot y \cdot z)$. 2. $x \to (y \vee z) = (x \to y) \cdot (x \to z)$. 3. $\{x \oplus y \oplus 1,\ x \cdot y,\ x'\}$. 4. $(y \cdot z \vee t') \vee x \cdot y' \cdot z' \vee z \cdot (y' \vee x')$.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Вечтомов Е. М., Широков Д. В. Математика: логика, теория множеств и комбинаторика: учебное пособие для СПО – 2-е изд. – М.: Юрайт, 2018. – 243 с.

2. Палий, И. А. Дискретная математика: учебное пособие для СПО – 2-е изд. – М.: Юрайт, 2018. – 352 с.

3. Атяскина Т.В. Элементы математической логики: практикум – Оренбург: Оренбургский государственный университет, 2016. – 98 с.

4. Игошин В. И. Задачи и упражнения по математической логике и теории алгоритмов: учеб. пособие для студентов высш .учеб .заведений. – 3-еизд., стер . – М.: Академия, 2007. – 304с.

5. Игошин В. И. Математическая логика и теория алгоритмов: учеб. пособие для студентов высш. учеб. заведений. – 2-еизд., стер. – М.: Академия, 2008. – 448с.

6. Лихтарников Л. М., Сукачева Т. Г. Математическая логика: курс лекций: задачник-практикум и решения. – СПб.: Лань, 1999. – 288с.

7. Дискретная математика. Алгебра логики (Алгебра высказываний): метод, указания к выполнению самостоят, и контрол. работы / сост. Л.В. Балабко. – Архангельск: Изд-во ФГАОУ ВПО «Северный (Арктический) федеральный университет имени М.В. Ломоносова», 2011. – 42 с.

СОДЕРЖАНИЕ

Составитель

Любовь Игоревна Мороз,

старший преподаватель кафедры математического анализа и моделирования АмГУ

Элементы математической логики: алгебра логики. *Учебное пособие.*

Изд-во АмГУ. Подписано к печати 11.06.2020. Формат 60×84/16.

Усл. печ. л. 4,2. Тираж 100. Заказ ***.

Отпечатано в типографии АмГУ.