Министерство науки и высшего образования Российской Федерации

АМУРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

А.М. Попова

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ: ПРЕДЕЛЫ

Методические указания для организации самостоятельной работы студентов

Благовещенск

2020

ББК

Рекомендовано
учебно-методическим советом университета

Рецензент:
Павельчук А.В., канд. физ.-мат. наук, заместитель директора по учебной работе общеобразовательного лицея ФГБОУ ВО АмГУ

Попова А.М.
Математический анализ: пределы: методические указания для организации самостоятельной работы студентов/А.М. Попова – Благовещенск: Изд-во АмГУ, 2020. – 38с.

Методические указания предназначены для студентов первого курса всех направлений подготовки и специальностей.

В них приводятся образец решения типовых заданий, варианты для организации самостоятельной работы и теоретические вопросы.

ВВЕДЕНИЕ

Методические указания «Математический анализ: пределы» рекомендованы для самостоятельной работы студентов различных направлений подготовки и специальностей при изучении соответствующего раздела математики, а также для использования в качестве дополнительного материала при организации преподавателем практических занятий.

Методические указания содержат теоретические вопросы для самоконтроля, вариант контрольной работы с подробным решением, ряд детально разобранных заданий, 30 вариантов типовых задач, которые позволяют формировать индивидуальную домашнюю работу студентов по данному разделу.

Для эффективной работы с методическими указаниями необходима предварительная проработка теоретического материала лекций, а также учебников и пособий, представленных в списке литературы.

Теоретические вопросы

1. Определение функции.
2. Область определения и множества значений функции.
3. Способы задания функции.
4. Четность и нечетность функции.
5. Ограниченность, периодичность функции.
6. Обратная функция. Сложная функция.
7. Классификация функций.
8. Основные элементарные функции и их графики.
9. Преобразования графиков функций.
10. Определение числовой последовательности.
11. Предел числовой последовательности.
12. Предел функции при $x \to x_0$ и $x \to \pm\infty$.
13. Бесконечно малые функции при $x \to x_0$ и $x \to \pm\infty$.
14. Свойства бесконечно малых функций.
15. Связь между бесконечно малыми и бесконечно большими функциями.
16. Основные теоремы о пределах.
17. Виды и раскрытия неопределенностей при нахождении пределов.
18. Первый замечательный предел.
19. Второй замечательный предел.
20. Сравнение бесконечно малых функций. Эквивалентные бесконечно малые, их приложения.
21. Определение непрерывности функции в точке.
22. Непрерывность основных элементарных функций.
23. Точки разрыва и их классификации.
24. Свойства непрерывных функций и их классификация.
25. Свойства непрерывных функций на отрезке.

Вариант контрольной работы

Задание 1. Вычислить пределы.

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3+7x^2-2}{6x^3-4x+3}$

2. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{8x^4-4x^2+3}{2x^5+1}$

3. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1+4x-x^4}{x+3x^2-2x^3}$

4. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-2x}$

5. $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x^2-25}{x-5}$

6. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{2x^3+2x^2+3x+3}{x^3+x^2+x+1}$

7. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{x^2}$

8. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{\sqrt{x^2+16}-4}$

9. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg(2x)}{tg(3x)}$

10. $\lim\limits_{x\to 1}(2-x)^{\frac{2x}{1-x}}$

11. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^{x-1}$

12. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2-2x-5}-x\right)$

Решение:

1. $$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^3+7x^2-2}{6x^3-4x+3}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3\left(2+\frac{7x^2}{x^3}-\frac{2}{x^3}\right)}{x^3\left(6-\frac{4x}{x^3}+\frac{3}{x^3}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{2+\frac{7}{x}-\frac{2}{x^3}}{6-\frac{4}{x^2}+\frac{3}{x^3}}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$$

2. $$\lim_{x\to\infty}\frac{8x^4-4x^2+3}{2x^5+1}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{x^4\left(8-\frac{4x^2}{x^4}+\frac{3}{x^4}\right)}{x^5\left(2+\frac{1}{x^5}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{8-\frac{4x^2}{x^4}+\frac{3}{x^4}}{x\left(2+\frac{1}{x^5}\right)}=\frac{8}{\infty}=0$$

3. $$\lim_{x\to\infty}\frac{1+4x-x^4}{x+3x^2-2x^3}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{x^4\left(\frac{1}{x^4}+\frac{4x}{x^4}-1\right)}{x^3\left(\frac{x}{x^3}+\frac{3x^2}{x^3}-2\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{x\left(\frac{1}{x^4}+\frac{4x}{x^4}-1\right)}{\frac{x}{x^3}+\frac{3x^2}{x^3}-2}=\frac{\infty}{-2}=-\infty$$

4. $$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-5x+6}{x^2-2x}=\left[\frac{2^2-5\cdot 2+6}{2^2-2\cdot 2}=\frac{0}{0}\right]=\begin{pmatrix}\textit{разложим числитель и}\\ \textit{знаменатель на простые}\\ \textit{сомножители}\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}x^2-5x+6=(x-2)(x-3)\\ x^2-2x=x(x-2)\end{pmatrix}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x-3)}{x(x-2)}=\lim_{x\to 2}\frac{x-3}{x}=\frac{2-3}{2}=-\frac{1}{2}$$

5. $$\lim_{x\to 5}\frac{x^2-25}{x-5}=\left(\frac{5^2-25}{5-5}=\frac{0}{0}\right)=\begin{pmatrix}\textit{разложим числитель}\\ \textit{на простые}\\ \textit{сомножители}\end{pmatrix}=$$

$$=\left(x^2-25x=(x-5)(x+5)\right)=\lim_{x\to 5}\frac{(x-5)(x+5)}{x-5}=\lim_{x\to 5}\frac{x+5}{1}=\frac{5+5}{1}=10$$

6. $$\lim_{x\to -1}\frac{2x^3+2x^2+3x+3}{x^3+x^2+x+1}=\left(\frac{2\cdot(-1)^3+2\cdot(-1)^2+3\cdot(-1)+3}{(-1)^3+(-1)^2+(-1)+1}=\frac{0}{0}\right)=$$

$$=\begin{pmatrix}\textit{разложим числитель и}\\ \textit{знаменатель на простые}\\ \textit{сомножители}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2x^3+2x^2+3x+3=(x+1)(2\cdot x^2+3)\\ x^3+x^2+x+1=(x+1)(x^2+1)\end{pmatrix}=$$

$$=\lim_{x\to -1}\frac{(x+1)(2\cdot x^2+3)}{(x+1)(x^2+1)}=\lim_{x\to -1}\frac{2\cdot x^2+3}{x^2+1}=\frac{2\cdot(-1)^2+3}{(-1)^2+1}=\frac{5}{2}$$

7. $$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x^2}=\left(\frac{\sqrt{1+0^2}-1}{0^2}=\frac{0}{0}\right)=\begin{pmatrix}\textit{домножим числитель и}\\ \textit{знаменатель на сопряженный}\\ \textit{элемент числителя}\end{pmatrix}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{1+x^2}-1\right)\left(\sqrt{1+x^2}+1\right)}{x^2\left(\sqrt{1+x^2}+1\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{1+x^2-1}{x^2\left(\sqrt{1+x^2}+1\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x^2\left(\sqrt{1+x^2}+1\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{1+x^2}+1}=\frac{1}{\sqrt{1+0^2}+1}=\frac{1}{2}$$

8. $$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{\sqrt{x^2+16}-4}=\left(\frac{\sqrt{1+0}-1}{\sqrt{0+16}-4}=\frac{0}{0}\right)=\begin{pmatrix}\textit{домножим числитель и}\\ \textit{знаменатель на сопряженный}\\ \textit{элемент знаменателя}\end{pmatrix}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{1+x^2}-1\right)\left(\sqrt{x^2+16}+4\right)}{\left(\sqrt{x^2+16}-4\right)\left(\sqrt{x^2+16}+4\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{1+x^2}-1\right)\left(\sqrt{x^2+16}+4\right)}{x^2+16-16}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{1+x^2}-1\right)\left(\sqrt{x^2+16}+4\right)}{x^2}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{1+x^2}-1\right)\left(\sqrt{1+x^2}+1\right)\left(\sqrt{x^2+16}+4\right)}{x^2\left(\sqrt{1+x^2}+1\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\left(1+x^2-1\right)\left(\sqrt{x^2+16}+4\right)}{x^2\left(\sqrt{1+x^2}+1\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{x^2+16}+4\right)}{\left(\sqrt{1+x^2}+1\right)}=\frac{8}{2}=4$$

9. $$\lim_{x\to 0}\frac{tg(2x)}{tg(3x)}=\left[\frac{0}{0}\right]=\begin{pmatrix} tg(2x)\approx 2x \\ tg(3x)\approx 3x \end{pmatrix}=\lim_{x\to 0}\frac{2x}{3x}=\frac{2}{3}$$

10. $$\lim_{x\to 1}(2-x)^{\frac{2x}{1-x}}=\left[1^\infty\right]=\begin{pmatrix} \text{введем замену}: a=x-1 \\ x=a+1,\ a\to 0 \end{pmatrix}=\lim_{a\to 0}\left(2-(a+1)\right)^{\frac{2(a+1)}{1-(a+1)}}=$$

$$=\lim_{a\to 0}\left(1+(-a)\right)^{\frac{2a+2}{-a}}=\lim_{a\to 0}\left(\left(1+(-a)\right)^{\frac{1}{-a}}\right)^{2a+2}=e^{\lim\limits_{a\to 0}(2a+2)}=e^2$$

11. $$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{x-1}=\left[1^\infty\right]=\begin{pmatrix} \text{выделим целую} \\ \text{часть}\ \dfrac{(x+1)}{(x-1)}=1+\dfrac{2}{x-1} \end{pmatrix}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x-1}\right)^{x-1}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{\frac{x-1}{2}}\right)^{\frac{x-1}{2}}\right)^2=e^2$$

12. $$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2-2x-5}-x\right)=\left[\infty-\infty\right]=\begin{pmatrix} \text{домножим выражение} \\ \text{в скобках на} \\ \text{сопряженный элемент} \end{pmatrix}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{\left(\sqrt{x^2-2x-5}-x\right)\left(\sqrt{x^2-2x-5}+x\right)}{\sqrt{x^2-2x-5}+x}\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-2x-5-x^2}{\sqrt{x^2-2x-5}+x}\right)=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{-2x-5}{x\sqrt{1-\frac{2x}{x^2}-\frac{5}{x^2}}+x}\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x\left(-2-\frac{5}{x}\right)}{x\left(\sqrt{1-\frac{2x}{x^2}-\frac{5}{x^2}}+1\right)}\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{-2-\frac{5}{x}}{\sqrt{1-\frac{2x}{x^2}-\frac{5}{x^2}}+1}\right)=-1$$

Образец выполнения индивидуального задания

Пример 1: Найти область определения функции:

1. $y=\dfrac{1}{\sqrt{-x^2+x+2}}+\lg(x-1)$

2. $y=\arcsin\dfrac{2x}{1+x}$

Решение:

1. Т.к. функция представляет собой сумму функций, то область определения функции будет состоять из всех тех значений, которые принадлежат одновременно области определения функций $\dfrac{1}{\sqrt{-x^2+x+2}}$ и $\lg(x-1)$. Поэтому область определения заданной функции определяется как совокупность значений x, при которых одновременно выполняются неравенства $-x^2+x+2>0$ и $x-1>0$. Это будет интервал (1;2).

2. Найти область определения функции определяется неравенств $\left|\dfrac{2x}{1+x}\right|\le 1$.

Возводя в квадрат, получим $4x^2\le 1+2x+x^2$ или $3x^2-2x-1\le 0$. Решая это неравенство, найдем, что областью определения функции будет отрезок $\left[-\dfrac{1}{3};1\right]$.

Пример 2: Построить графики функций:

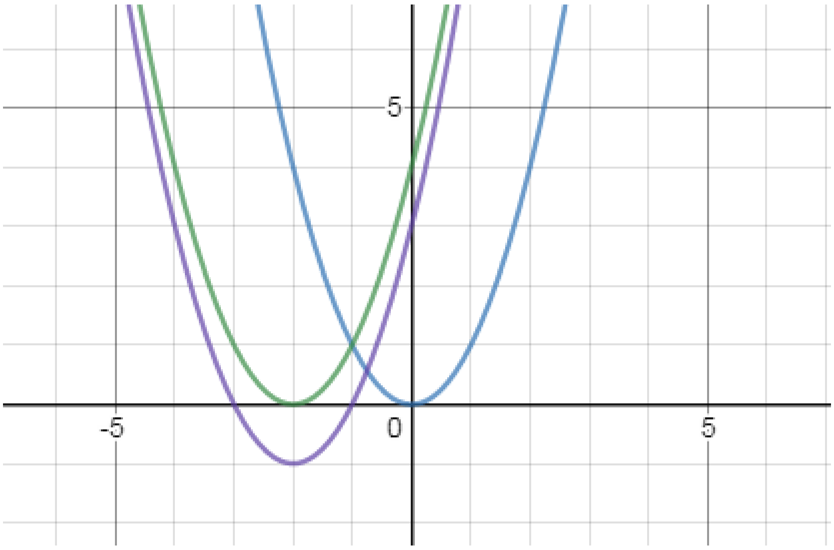
1. $y=x^2+4x+3$

2. $y=-2\sin 3x$

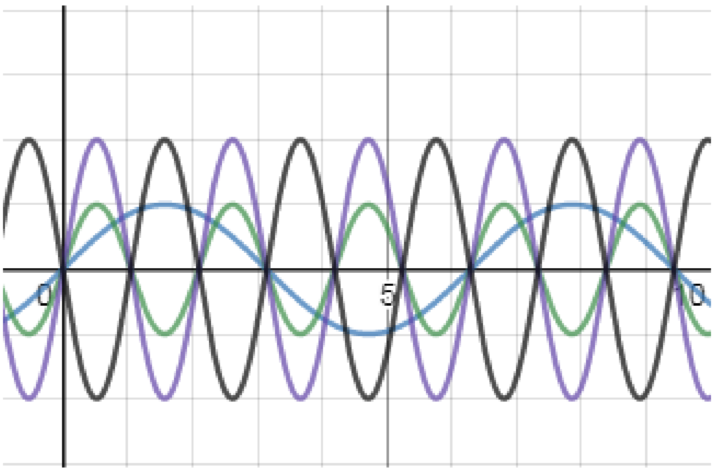
Решение:

1. Преобразуем $y=x^2+4x+3=x^2+4x+4-1=(x+2)^2-1$. Строим график

$y = x^2$ (голубой цвет). Вершина в т.О(0;0), ветви направлены вверх. Затем смещаем график влево по оси ОХ на 2 ед, получив график $y = (x+2)^2$ (зеленым цветом). Затем смещаем полученный график вниз по оси OY на 1 ед., получив график $y = (x+2)^2 - 1$ (фиолетовым цветом).



2. $y = -2\sin 3x$. Шаг 1: строим график $y = \sin x$ (голубым цветом). Шаг 2: строим график $y = \sin(3x)$, полученный график сжимаем относительно оси ОХ в 3 раза (зеленым цветом). Шаг 3: строим график $y = 2\sin(3x)$, полученный график растягиваем в 2 раза относительно оси OY (фиолетовым цветом). Шаг 4: строим график $y = -2\sin(3x)$, полученный график «переворачиваем» относительно оси ОХ (черным цветом).



Пример 3: Вычислить пределы:

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2+x+1}{3x^2-1}$

2. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x-3}{x^2+1}$

3. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3+4}{x^2+5}$

4. $\lim\limits_{x\to 1}\left(3x^2+x+5\right)$

5. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\dfrac{1+\sin x}{1-\cos 2x}\right)$

6. $\lim\limits_{x\to -2}\left(\dfrac{x^2+6x+8}{x^3+8}\right)$

7. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\cos x}{\sqrt[4]{1+x^2}-1}$

8. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x+1}$

9. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^3}{3x^2-4}-\dfrac{x^2}{3x+2}\right)$

10. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{\sqrt{6+x}-2}{x+2}$

Решение:

1. $$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+x+1}{3x^2-1}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2\left(1+\frac{x}{x^2}+\frac{1}{x^2}\right)}{x^2\left(3-\frac{1}{x^2}\right)}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{x}{x^2}+\frac{1}{x^2}}{3-\frac{1}{x^2}}=\frac{1}{3}$$

2. $$\lim_{x\to\infty}\frac{2x-3}{x^2+1}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{x\left(2-\frac{3}{x}\right)}{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{2-\frac{3}{x}}{x\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}=\left[\frac{2}{\infty}\right]=0$$

3. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3+4}{x^2+5}=\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3\left(2+\dfrac{4}{x^3}\right)}{x^2\left(1+\dfrac{5}{x^2}\right)}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x\left(2+\dfrac{4}{x^3}\right)}{1+\dfrac{5}{x^2}}=\left[\dfrac{\infty}{1}\right]=\infty$

4. $\lim\limits_{x\to1}\left(3x^2+x+5\right)=\lim\limits_{x\to1}\left(3\cdot1^2+1+5\right)=\lim\limits_{x\to1}9=9$

5. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\dfrac{1+\sin x}{1-\cos2x}\right)=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\dfrac{1+\sin\dfrac{\pi}{2}}{1-\cos\left(2\cdot\dfrac{\pi}{2}\right)}\right)=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\dfrac{1+1}{1-(-1)}\right)=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}1=1$

6. $\lim\limits_{x\to-2}\left(\dfrac{x^2+6x+8}{x^3+8}\right)=\lim\limits_{x\to-2}\left(\dfrac{(-2)^2+6\cdot(-2)+8}{(-2)^3+8}\right)=\left[\dfrac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{(x+2)(x+4)}{(x+2)(x^2-2x+4)}=$

$=\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{x+4}{x^2-2x+4}=\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{-2+4}{(-2)^2-2\cdot(-2)+4}=\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{2}{12}=\dfrac{1}{6}$

числитель и знаменатель раскладываем на простые сомножители, разделив их на $(x+2)$: т.е. $\begin{array}{l}x^2+6x+8=(x+2)(x+4)\\ x^3+8=(x+2)(x^2-2x+4)\end{array}$.

7. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln\cos x}{\sqrt[4]{1+x^2}-1}=\left[\dfrac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln[1+(\cos x-1)]}{\dfrac{x^2}{4}}=4\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos x-1}{x^2}=$

$=-4\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}=-4\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2/2}{x^2}=-2$

8. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x+1}=\left[1^\infty\right]=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x}\right)^{\frac{x+1}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x+1}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)}=e^1=e$

9. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^3}{3x^2-4}-\dfrac{x^2}{3x+2}\right)=\left[\infty-\infty\right]=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^3\cdot(3x+2)-x^2\cdot(3x^2-4)}{(3x^2-4)\cdot(3x+2)}\right)=$

$=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x^4+2x^3-3x^4+4x^2}{9x^3+6x^2-12x-8}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x^3+4x^2}{9x^3+6x^2-12x-8}\right)=\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]=$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3\left(2+\frac{4x^2}{x^3}\right)}{x^3\left(9+\frac{6x^2}{x^3}-\frac{12x}{x^3}-\frac{8}{x^3}\right)}\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2+\frac{4x^2}{x^3}}{9+\frac{6x^2}{x^3}-\frac{12x}{x^3}-\frac{8}{x^3}}\right)=\frac{2}{9}$$

10. $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{\sqrt{6+x}-2}{x+2}=\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{\sqrt{6+(-2)}-2}{-2+2}=\left[\dfrac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{\left(\sqrt{6+x}-2\right)\cdot\left(\sqrt{6+x}+2\right)}{(x+2)\cdot\left(\sqrt{6+x}+2\right)}=$

$$=\lim_{x\to-2}\frac{6+x-4}{(x+2)\cdot\left(\sqrt{6+x}+2\right)}=\lim_{x\to-2}\frac{x+2}{(x+2)\cdot\left(\sqrt{6+x}+2\right)}=\lim_{x\to-2}\frac{1}{\sqrt{6+x}+2}=$$

$$=\lim_{x\to-2}\frac{1}{\sqrt{6+(-2)}+2}=\frac{1}{4}$$

Пример 4: Определить точки разрыва функции и исследовать их характер.

1. $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$

2. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x+1}, & x\le 1\\ 2^x, & x>1\end{cases}$

Решение:

1. Функция $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$ не определена в т. $x=1$, следовательно, она не является непрерывной в этой точке. Т.к. $\lim\limits_{x\to1-0}\dfrac{x^2-1}{x-1}=\lim\limits_{x\to1+0}\dfrac{x^2-1}{x-1}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(x-1)(x+1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1}(x+1)=2$, то $x=1-$ точка устранимого разрыва первого рода.

2. Функция $y=\dfrac{1}{x+1}-$ определена и непрерывна на множестве $(-\infty;-1)\cup(-1;1]$, т.к. в т. $x=-1$ знаменатель обращается в 0. Вычислим односторонние пределы в т. $x=-1$:

$\lim\limits_{x\to-1-0}\dfrac{1}{x+1}=\left(\dfrac{1}{-0}\right)=-\infty$; $\lim\limits_{x\to-1+0}\dfrac{1}{x+1}=\left(\dfrac{1}{0}\right)=\infty$; т.к. оба односторонних предела в т. $x=-1$ бесконечны, то $x=-1$ является точкой разрыва второго рода.

Функция $y = 2^x$ при $x > 1$ определена и непрерывна. Функция $y = f(x)$ определена в т. $x = 1$, $f(1) = \frac{1}{2}$. Вычислим односторонние пределы в т. $x = 1$:

$\lim\limits_{x \to 1-0} \frac{1}{x+1} = \frac{1}{2}$; $\lim\limits_{x \to 1+0} 2^x = 2$. Односторонние пределы функции $y = f(x)$ в т. $x = 1$ конечны, но не равны между собой. Следовательно, т. $x = 1$ является точкой разрыва первого рода. Скачок функции в этой точке равен: $2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2} = 1\frac{1}{2}$.

Варианты заданий для самостоятельной работы

Задание 1: Найти область определения функции, заданной формулами.

Задание 2: Построить графики функций.

Задание 3: Определить точки разрыва функции и исследовать их характер.

Задание 4-11: Вычислить.

Вариант 1.

1. $y = 3x + 2$
2. $y = \left| \frac{7x+5}{5x+6} \right|$
3. $f(x) = \frac{1+x}{x^3+1}$; $f(x) = \begin{cases} x, \ x \le 0 \\ 1-x, & 0 < x \le 1 \\ \frac{1}{1-x}, & x > 1 \end{cases}$
4. $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{(3-n)^2 + (3+n)^2}{(3-n)^2 - (3+n)^2}$;
5. $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{2x^3 + 7x^2 - 2}{6x^3 - 4x + 3}$;
6. $\lim\limits_{x \to 2} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 2x}$;
7. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sqrt{1+x^2} - 1}{x^2}$;

8. $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{12}{x^3-8}\right)$;

9. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg\,3x}{tg\,5x}$;

10. $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+5tg^2x\right)^{3ctg^2x}$;

11. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+1}{n-1}\right)^{n-1}$.

Вариант 2.

1. $y=\dfrac{3x-1}{5x+6}$

2. $y=\left|\dfrac{4-x}{5+2x}\right|$

3. $f(x)=\dfrac{1-x}{(1+x)^2}$; $f(x)=\begin{cases} x+1, & x\le 0 \\ x^2, & 0<x\le 2 \\ \dfrac{1}{x}, & x>2 \end{cases}$

4. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(3-n)^4-(2-n)^4}{(1-n)^4-(1+n)^4}$;

5. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1+4x-x^4}{x+3x^2-2x^3}$;

6. $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x^2-25}{x-5}$;

7. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1+x^2}-1}{x^2}$;

8. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{2x+1}{x^3-1}-\dfrac{1}{x-1}\right)$;

9. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg\,2x}{tg\,3x}$;

10. $\lim\limits_{x\to 0}(1+2\sin x)^{3\cos x}$;

11. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2n+3}{2n+1}\right)^{n+1}$.

Вариант 3.

1. $y=\sqrt{3x-1}+\frac{1}{\sqrt{5-x}}$

2. $y=\frac{4x+7}{2x-5}$

3. $f(x)=\frac{x}{(x+1)^2}$; $f(x)=\begin{cases} e^x, & x\le 0 \\ 2x-1, & x>0 \end{cases}$

4. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(3-n)^4-(2-n)^4}{(1-n)^3-(1+n)^3}$;

5. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4x^6-x^3+2x}{2x^6-1}$;

6. $\lim\limits_{x\to -1}\frac{x^2-1}{x^2+3x+2}$;

7. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$;

8. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^3}{2x^2-1}-\frac{x^2}{2x+1}\right)$;

9. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{Sin\,2x}{x}$;

10. $\lim\limits_{x\to 0}(1+tg\,x)^{\frac{3}{2}}$;

11. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n-1}{n+3}\right)^{n+2}$.

Вариант 4.

1. $y=\frac{\cos x}{x^2-5x+4}$

2. $y=\dfrac{9x+4}{3x+2}$

3. $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x^3-3x+2}$; $f(x)=\begin{cases}-x, & x<0\\ tgx, & 0\le x<\dfrac{\pi}{4}\\ 2, & x\ge\dfrac{\pi}{4}\end{cases}$

4. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(1-n)^4-(1+n)^4}{(1+n)^3-(1-n)^3}$;

5. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{8x^4-4x^2+3}{2x^5+1}$;

6. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{2x^3-2x^2+x-1}{x^3-x^3+3x-3}$;

7. $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{x^2-4}{\sqrt{1-4x}-3}$;

8. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2-x}\right)$;

9. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2x}{Sin5x}$;

10. $\lim\limits_{x\to0}(1+\sin x)^{\frac{5}{x}}$;

11. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n^2+2}{2n^2+1}\right)^{n^2}$.

Вариант 5.

1. $y=\sqrt{x^2-5x+6}$

2. $y=\dfrac{x+5}{x+3}$

3. $f(x)=\dfrac{\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x+1}}{\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{x}}$; $f(x)=\begin{cases}x^2, & |x|<1\\ 2, & |x|\ge1\end{cases}$

4. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(6-n)^2-(6+n)^2}{(6+n)^2-(1-n)^2}$;

5. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{10x^5-5x^2+5}{5x^5+2x-1}$;

6. $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-12x+20}$;

7. $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{\sqrt{2x+3}-3}{x^2-9}$;

8. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-4x}\right)$;

9. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{Sin3x}{x}$;

10. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(1-3ctg^2x\right)^{tg^2x}$;

11. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n-10}{n+1}\right)^{3n+1}$.

Вариант 6.

1. $y=\sqrt{4-x^2}$

2. $y=\dfrac{5-2x}{x-2}$

3. $f(x)=arctg\,\dfrac{1}{x}$; $f(x)=\begin{cases}x^2+1, & x<0\\ 1-x, & 0\le x\le 2\\ 2, & x>2\end{cases}$

4. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)^3-(n+1)^2}{(n-1)^3-(n+1)^3}$;

5. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^4-6x^2+2}{x^3+4x-2}$;

6. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^3-x^3-x+1}{x^3+x^2-x-1}$;

7. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x+1}{\sqrt{3x+7}-2}$;

8. $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(\sqrt{x^2+ax+b}-\sqrt{x^2+cx+b}\right)$;

9. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x}{Sin\,2x}$;

10. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}(1+\cos x)^{5\sec x}$;

11. $\lim\limits_{n\to \infty}\left(\dfrac{6n-7}{6n+4}\right)^{3n+2}$.

Вариант 7.

1. $y=x+\cos 2x$

2. $y=1+\dfrac{1}{x-2}$

3. $f(x)=\sqrt{x}arctg\,\dfrac{1}{x}$; $f(x)=\begin{cases}-2x, & x\le 0\\ \sqrt{x}, & 0<x<4\\ 3, & x\ge 4\end{cases}$

4. $\lim\limits_{n\to \infty}\dfrac{(1+2n)^3-8n^3}{(1+2n)^2+4n^2}$;

5. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{5x^3-6x-3}{x^3-2x^2+4}$;

6. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{2x^3+2x^2+3x+3}{x^3+x^2+x+1}$;

7. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{x}-2}{x^2-6x+8}$;

8. $\lim\limits_{x\to \infty}[x-\sqrt{(x+a)(x+b)}]$;

9. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg\ ax}{bx}$;

10. $\lim\limits_{x\to 1}(1+5\ln x)^{\frac{1}{\ln x}}$;

11. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{3n+1}{3n-1}\right)^{2n+3}$.

Вариант 8.

1. $y = ctg\,\dfrac{x}{2}$

2. $y = 2 - \dfrac{3}{x+1}$

3. $f(x) = \dfrac{1-2\cos x}{\pi - 3x}$; $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \le 0 \\ x, & 0 < x \le 2 \\ 1, & x > 2 \end{cases}$

4. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(3-4n)^2}{(n-1)^3-(4+1)^3}$;

5. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{14x^2+3x}{7x^3+2x-8}$;

6. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^3-27}{x^3-6x+x}$;

7. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-x-2}{\sqrt{4x+1}-3}$;

8. $\lim\limits_{x\to\infty}[x\cdot\sqrt{(x^2+1)}-\sqrt{x^2-1)}]$;

9. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg5x}{4x}$;

10. $\lim\limits_{x\to 0}(1+3tg\,x)^{ctgx}$;

11. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+3}{n+5}\right)^{n+4}$.

Вариант 9.

1. $y = \arccos(x+2)$

2. $y = 1-\sqrt[3]{2x+1}$

3. $f(x)=\dfrac{1}{1-e^{\frac{x}{1-x}}}$; $f(x)=\begin{cases}(x+1)^2, & x\le 0\\ \dfrac{1}{x-1}, & x>0\end{cases}$

4. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(3-n)^3}{(n+1)^2-(n+1)^3}$;

5. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3+3x-1}{3x^3+x^2-4}$;

6. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^4+x^3}{x^4-2x^3}$;

7. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x+1}{\sqrt{x3+7}-2}$;

8. $\lim\limits_{x\to -\infty} x\cdot[\sqrt{x(x-2)}-\sqrt{x^2-3}]$;

9. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{a^2-x^2}{Sin2(x-a)}$;

10. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(1+\cos x)^{3\sec x}$;

11. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n-1}{n}\right)^{3n+5}$.

Вариант 10.

1. $y=\log_2\log_3\log_4 x$

2. $y=\dfrac{1}{x}+2$

3. $f(x)=\dfrac{3^{\frac{1}{x-2}}}{3^{\frac{1}{x-2}+1}}$; $f(x)=\begin{cases}\dfrac{-x}{2}, & x\le 0\\ \cos x, & 0<x\le\dfrac{\pi}{2}\\ x-\dfrac{\pi}{2}, & x>\dfrac{\pi}{2}\end{cases}$

4. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)^2+(n-1)^3+(n+2)^3}{(4-n)^3}$;

5. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{2x^2-3x+1}{x^3+2x-3}$;

6. $\lim\limits_{x\to 10} \frac{x^3-1000}{x^3-20x^2+100x}$;

7. $\lim\limits_{x\to 5} \frac{x^2-25}{\sqrt{2x-1}-3}$;

8. $\lim\limits_{x\to\infty} (\sqrt{(x^2-3x+2}-x)$;

9. $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\sin(2x-2)}{1-x}$;

10. $\lim\limits_{x\to 2} (2x-3)^{\frac{3x}{x-2}}$;

11. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{1-n}$.

Вариант 11.

1. $y=\log_{1/3}|x|$

2. $y=-\sqrt{2x-1}$

3. $f(x)=\frac{1}{x}\ln\frac{1+x}{1-x}$; $f(x)=\begin{cases} \sqrt{-x}, & x\le 0 \\ 2, & 0<x\le 2 \\ x, & x>2 \end{cases}$

4. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2(n+1)^3-(n-2)^3}{n^2+2n-3}$;

5. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{3x^3-2x+1}{x^2+3x+4}$;

6. $\lim\limits_{x\to 1} \left(\frac{1}{1-x}-\frac{2}{1-x^2}\right)$;

7. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+16}-4}$;

8. $\lim\limits_{x\to\infty} [\sqrt{x\cdot(x+2)}-\sqrt{x^2-2x+3)}]$;

9. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}$;

10. $\lim\limits_{x\to 1}(2-x)^{\frac{2x}{1-x}}$;

11. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+4}{n+2}\right)^{2n+1}$.

Вариант 12.

1. $y=\log_7(4x-x^2)$

2. $y=\sqrt[3]{8x-1}$

3. $f(x)=e^{x+\frac{1}{x}}$; $f(x)=\begin{cases}-x, & x\le 0\\ \sin x, & 0<x\le\pi\\ x-2, & x>\pi\end{cases}$

4. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)^3+(n+2)^3}{(n+4)^3+(n+5)^2}$;

5. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2+x-3}{x^3+3x+1}$;

6. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-8}{x^2-3x+2}$;

7. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}}{x}$;

8. $\lim\limits_{x\to\infty}[\sqrt{(x^2+3x-2}-\sqrt{x^2-3)}]$;

9. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 6x}{2tg\,3x}$;

10. $\lim\limits_{x\to 1}(2x-1)^{\frac{2x}{x-1}}$;

11. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n-5}{n-3}\right)^{2n-5}$.

Вариант 13.

1. $y=3^{1/x}$

2. $y=\sqrt{x+1}$

3. $f(x)=\dfrac{\sqrt{7+x}-3}{x^2-4}$; $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x}, & x\le 1\\ arctgx, & x>1\end{cases}$

4. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+3)^3+(n+4)^3}{(n+3)^4-(n+4)^4}$;

5. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3-8x+1}{3x^2-x+4}$;

6. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-6x+8}{x^2-8x+12}$;

7. $\lim\limits_{n\to 0}\dfrac{\sqrt{x+n}-\sqrt{x}}{n}$;

8. $\lim\limits_{x\to\infty}[\sqrt{x^2+3x-2}-\sqrt{x^2-3}]$;

9. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{Sin^2 3x}{x^2}$;

10. $\lim\limits_{x\to 1}(3-2x)^{\frac{x}{1-x}}$;

11. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{3n-2}{3n+1}\right)^{2n-3}$.

Вариант 14.

1. $y=\arcsin\dfrac{1}{x+3}$

2. $y=\sqrt{1-4x}$

3. $f(x)=x\sin\dfrac{\pi}{x}$; $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x+1}, & x\le 4\\ \sqrt{x-4}, & x>4\end{cases}$

4. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)^4-(n-1)^4}{(n+1)^3+(n-1)^3}$;

5. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2+5x+1}{x^2+2x-3}$;

6. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-9}$;

7. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-9}{\sqrt{2x+3}-3}$;

8. $\lim\limits_{x\to\infty}[x^2(\sqrt{(5+x^3}-\sqrt{3+x^3}]$;

9. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{tg^2\,3x}$;

10. $\lim\limits_{x\to 0}(1-2tg\,x)^{3ctg\,x}$;

11. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+3}{n-3}\right)^{2n}$.

Вариант 15.

1. $y=x^3+5x+6$

2. $y=\left|x^2+2x-15\right|$

3. $f(x)=\dfrac{x\ln(x+1)}{x-1}$; $f(x)=\begin{cases}-\dfrac{1}{x-2}, & x\le 4\\ -\sqrt{x}, & x>4\end{cases}$

4. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{8n^3-2n}{(n+1)^4-(n-1)^4}$;

5. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2-4x+1}{x^3+3x-4}$;

6. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-7x+10}{x^2-8x+12}$;

7. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-6x+8}{\sqrt{x}-2}$;

8. $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+8x+3}-\sqrt{x^2+4x+3})$;

9. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg\,kx}{x}$;

10. $\lim\limits_{x\to 0}(1-5\sin x)^{2\operatorname{cosec} x}$;

11. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{4n-1}{4n+3}\right)^{3n}$.

Вариант 16.

1. $y = x - \sin 2x$
2. $y = \left|x^2 - 3x - 4\right|$
3. $f(x) = arctg\,\dfrac{1}{1-x^2}$; $f(x) = \begin{cases} -\dfrac{1}{x}, & x \le 1 \\ 2^x, & x > 1 \end{cases}$
4. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+6)^3-(n+1)^3}{(2n+3)^2+(n+4)^2}$;
5. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^4-2x+5}{3x-15+x^3}$;
6. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-9}{x^2-3x}$;
7. $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x}}{\Delta x}$;
8. $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{(x^2+1)}-\sqrt{x^2-1})$;
9. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^2-a^2}{Sin\,2(a-x)}$;
10. $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\sin x\right)^{\frac{3}{x}}$;
11. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+3}{n-3}\right)^{n-3}$.

Вариант 17.

1. $y = \sqrt{x-2} + \sqrt{2-x}$
2. $y = 4 - 2x^2 - 2x$

3. $f(x)=e^{\frac{1}{x+1}}$; $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x}, & x\le\frac{\pi}{2}\\ \sin x, & x>\frac{\pi}{2}\end{cases}$

4. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(2n-1)^3-(n+5)^3}{(3n-1)^3+(2n+3)^3}$;

5. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5x^6-2x+1}{3x^5-5-3x^6}$;

6. $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^2+x-2}{2x^2+x-3}$;

7. $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt[3]{1+mx}-1}{x}$;

8. $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+1}-x)$;

9. $\lim\limits_{x\to0}\frac{Sin^2\frac{x}{3}}{x^2}$;

10. $\lim\limits_{x\to0}(1+tg\,x)^{\frac{7}{x}}$;

11. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{3n+1}{3n+2}\right)^{n+2}$.

Вариант 18.

1. $y=\sqrt{2-3x}+\lg x$

2. $y=4x-x^2-3$

3. $f(x)=e^{-\frac{1}{x^2}}$; $f(x)=\begin{cases}-\frac{1}{x}, & x\le\frac{\pi}{2}\\ \cos x, & x>\frac{\pi}{2}\end{cases}$

4. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+10)^2+(3n+1)^2}{(n+6)^3-(n-1)^3}$;

5. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4x^2-2x-1}{3x-5x^2+5}$;

6. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-2x}{3x^2-12}$;

7. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt{1+x}}{x}$;

8. $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{9x^2+1}-3x)$;

9. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-1}{Sin(3x-3)}$;

10. $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+4tg^2x\right)^{2ctg^2x}$;

11. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^2+1}{n^2+2}\right)^{n^2}$.

Вариант 19.

1. $y=\dfrac{1}{\sqrt{x^2-3x}}$

2. $y=\sqrt{x^2-5x+6}$

3. $f(x)=e^{\frac{1}{x+1}}$; $\qquad f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x}, & x\le\dfrac{\pi}{2}\\ \sin x, & x>\dfrac{\pi}{2}\end{cases}$

4. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(2n+1)^3+(3n+2)^3}{(2n+3)^3-(n-7)^3}$;

5. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^7-2x-1}{x^3+2x^2+x-5}$;

6. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+x-12}{2x^2-9x+9}$;

7. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x^2+5}-3}{x-2}$;

8. $\lim\limits_{x\to\infty}(2x-\sqrt{4x^2+3x})$;

9. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg\,7x}{2x}$;

10. $\lim\limits_{x\to 0}(1-3\sin x)^{2\cos x}$;

11. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n-4}{n+2}\right)^{n+1}$.

Вариант 20.

1. $y=\sin 3x$
2. $y=(x-4)^2$
3. $f(x)=1-x\sin\dfrac{1}{x}$; $\qquad f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x}, & x\le 1\\ 3^x, & x>1\end{cases}$
4. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+7)^3-(n+2)^3}{(3n+2)^2+(4n+1)^2}$;
5. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{8x-3x^3+5}{3x^2-x+4}$;
6. $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x^4+27x}{2x^2-18}$;
7. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2+a^2}-a}{\sqrt{x^2+b^2}-b}$;
8. $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{(x+a}-\sqrt{x})$;
9. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{Sin\,5x}{3tg\,6x}$;
10. $\lim\limits_{x\to 0}(1-tg\,x)^{\frac{7}{x}}$;
11. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n-9}{n+3}\right)^{2n+1}$.

Вариант 21.

1. $y=\cos(3x+2)$
2. $y=\dfrac{x}{2}+|x|-1$

3. $f(x)=3^{\frac{x}{4-x^2}}$; $f(x)=\begin{cases} -\dfrac{1}{x-1}, & x\le 10 \\ \lg x, & x>10 \end{cases}$

4. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(2n+1)^3-(2n+3)^3}{(2n+1)^2+(2n+3)^2}$;

5. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{6x^2-5x+7}{2x-3x^2-1}$;

6. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{2x^2+3x-2}{3x^2+2x-8}$;

7. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x+6}-3}{x-3}$;

8. $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+ax+b}-\sqrt{x^2+cx+d})$;

9. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{Sin^2 5x}$;

10. $\lim\limits_{x\to 1}(1-3\ln x)^{\frac{2}{\ln x}}$;

11. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{5n-3}{5n+4}\right)^{3n-1}$.

Вариант 22.

1. $y=tg5x$
2. $y=-|5x+2|$
3. $f(x)=\dfrac{1}{x}\sin x$; $f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{x}, & x<0 \\ x, & 0<x\le 2 \\ 3, & x>2 \end{cases}$

4. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^3-(n-1)^3}{(n+1)^4-n^4}$;

5. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^2-2x+4}{3x^3-2x^2-1}$;

6. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2+x}{5x^3+5}$;

7. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+9}-1}$;

8. $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[3]{x})$;

9. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg^2\,8x}{x^2}$;

10. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(1-3\cos x)^{7\sec x}$;

11. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{4n+1}{4n-1}\right)^{3n+2}$.

Вариант 23.

1. $y=\arcsin(x+2)$
2. $y=3^{x-2}$
3. $f(x)=\dfrac{e^{-x}-1}{x}$; $\quad f(x)=\begin{cases}\cos\dfrac{\pi}{2}, & x<1\\ 2x-1, & x\ge 1\end{cases}$
4. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+2)^4-(n-2)^4}{(n+5)^2+(n-5)^2}$;
5. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{12x^2-3x}{8x^3-1+5x}$;
6. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{3x^2-5x+2}{2x^2-x-1}$;
7. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x^2+21}-5}{x-2}$;
8. $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+3x+2}-x)$;
9. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{ax}{tg\,bx}$;

10. $\lim\limits_{x\to 1}(3x-2)^{\frac{2x}{x-1}}$;

11. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+2}{n+3}\right)^{n+5}$.

Вариант 24.

1. $y = arctg(2x+1)$

2. $y = \left(\dfrac{1}{4}\right)^{x+3}$

3. $f(x) = (x+1)arctg\,\dfrac{1}{x}$; $\quad f(x) = \begin{cases} x^2, & x<1 \\ \dfrac{1}{x}, & x \ge 1 \end{cases}$

4. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)^4-(n-1)^4}{(n+1)^3+(n-1)^3}$;

5. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^3-2-5x^2}{4x^2+3-x}$;

6. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4x+4}{x^2-5x+6}$;

7. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x+2}-\sqrt{6-x}}{x^2-4}$;

8. $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{4x^2+3x}-2x)$;

9. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{7x}{Sin3x}$;

10. $\lim\limits_{x\to 4}(5-x)^{\frac{3x}{4-x}}$;

11. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n-3}{n}\right)^{5n+3}$.

Вариант 25.

1. $y = \log_2(-x)$

2. $y = 2^{\frac{x-1}{x+1}}$

3. $f(x)=\dfrac{1}{x^2(x-1)}$; $\qquad f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x}, & x<1\\ x^2, & x\ge 1\end{cases}$

4. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)^3-(n-1)^3}{(n+1)^2-(n-1)^2}$;

5. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{10x^6-2x^2-1}{3x^5+x+x^3}$;

6. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{2x^2-x-3}{x^2-3x-4}$;

7. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{5-x^2}-2}{1-x}$;

8. $\lim\limits_{x\to\infty}(x-\sqrt{(x^2+1)})$;

9. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{Sin10x}{x}$;

10. $\lim\limits_{x\to 2}(3x-5)^{\frac{2x}{x-2}}$;

11. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+5}{n+4}\right)^{2-n}$.

Вариант 26.

1. $y=\log_5(2x-1)$

2. $y=2^{x^2-4x+5}$

3. $f(x)=\dfrac{\sqrt{x-1}-3}{x-10}$; $\qquad f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x+1}, & x<1\\ 2^x, & x\ge 1\end{cases}$

4. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)^3-(n-1)^3}{(n+1)^2+(n-1)^2}$;

5. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^3-2x-5}{3x-4}$;

6. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+3x-4}{x^2+4x-5}$;

7. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{2x-6}{\sqrt{x+1}-\sqrt{7-x}}$;

8. $\lim\limits_{x\to\infty}[\sqrt{(x^2-3}-\sqrt{x^2+3x-2}]$;

9. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5x}{Sin7x}$;

10. $\lim\limits_{x\to 1}(4-3x)^{\frac{3x}{1-x}}$;

11. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+3}{n+1}\right)^{3n+1}$.

Вариант 27.

1. $y=\dfrac{1}{\log_5(1-3x)}$

2. $y=2\sin 3x+1$

3. $f(x)=\dfrac{2+x}{4-x^2}$; $\quad f(x)=\begin{cases}\sqrt{-x}, & x\le 0\\ \sin x, & x>0\end{cases}$

4. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+2)^3+(n-2)^3}{n^4+2n^2-1}$;

5. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^5+x^4-1}{3x^3-4x^5+2}$;

6. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{7x-x^2-12}{2x^2-11x+15}$;

7. $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{\sqrt[3]{x-6}-1}{x-7}$;

8. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{x-}-\dfrac{1}{x^3-1}\right)$;

9. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{Sin^2x}{Sin^2 2x}$;

10. $\lim\limits_{x\to 0}(1+3tg\,x)^{2ctg\,x}$;

11. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n-7}{n-5}\right)^{3n-4}$.

Вариант 28.

1. $y=\left(\frac{1}{2}\right)^{1/x-3}$

2. $y=\log_4|x+2|$

3. $f(x)=x^2\sin\frac{1}{x}$; $\quad f(x)=\begin{cases}2^x, & x\le -1\\ \frac{1}{x+1}, & x>-1\end{cases}$

4. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)^3+(n-1)^3}{n^3-3n}$;

5. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{7x-2x^2-x^3}{5x^4-3x+7}$;

6. $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2+3x-10}{3x^2-3x-2}$;

7. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{x+7}-2}{x^2-1}$;

8. $\lim\limits_{x\to 2}\left(\frac{1}{x^2-4}-\frac{1}{x-2}\right)$;

9. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{tg\,5x}$;

10. $\lim\limits_{x\to 0}(1+2\sin x)^{5\operatorname{cosec} x}$;

11. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2n-3}{2n+3}\right)$.

Вариант 29.

1. $y=\frac{\sin x}{x^2-5x+4}$

2. $y=\log_2(x-2)$

3. $f(x)=\dfrac{1}{\ln x}$; $f(x)=\begin{cases}2x, & x\le 0\\ x^2+1, & 0<x\le 1\\ 2, & x>1\end{cases}$

4. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)^3+(n-1)^3}{n^3+1}$;

5. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2-x^5+7}{4x^5+x^4-2x}$;

6. $\lim\limits_{x\to-3}\dfrac{3-8x-3x^2}{x^2+x-6}$;

7. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{3x+1}}{6x}$;

8. $\lim\limits_{x\to3}\left(\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{2}{x^3-8}\right)$;

9. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{4x}{Sin9x}$;

10. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(1-3\cos x)^{2\sec x}$;

11. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+4}{n-4}\right)^{3n}$.

Вариант 30.

1. $y=\sqrt{x^2-4x+4}$

2. $y=\sin x+\cos x$

3. $f(x)=e^{\frac{1}{x-\frac{1}{x}}}$; $f(x)=\begin{cases}2x+1, & x\le 1\\ 2^x+1, & x>1\end{cases}$

4. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+2)^2-(n-2)^2}{(n+3)^2}$

5. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x^3+2x-1}{5x+3-x^2}$.

6. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3x^2-5x-2}{6-7x+2x^2}$.

7. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{\sqrt{6+x}-2}{x+2}$;

8. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{\sin\frac{4}{2}}$;

9. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg\,5x}{tg\,2x}$;

10. $\lim\limits_{x\to 0}(1-5tg\,x)^{2ctg\,x}$;

11. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{5n-2}{5n+3}\right)^{4n}$.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Бугров, Я. С. Высшая математика в 3 т. Т. 1. Дифференциальное и интегральное исчисление в 2 кн. Книга 1 : учебник для академического бакалавриата / Я. С. Бугров, С. М. Никольский. — 7-е изд., стер. — Москва : Издательство Юрайт, 2016. — 253 с.
2. Высшая математика в упражнениях и задачах: учеб. пособие: В 2 ч / П. Е. Данко [и др.]. – 7-е изд., испр. – М.: ОНИКС: Мир и Образование, 2008. – Ч. 1. – 2008. – 368 с.
3. Гулиян Б.Ш. Математика. Базовый курс: учебник/ Гулиян Б.Ш., Хамидуллин Р.Я.– Электрон. текстовые данные.– М.: Московский финансово-промышленный университет «Синергия», 2013. – 712 с.
4. Икрянников В.И. Практикум по высшей математике: учебное пособие / В.И. Икрянников, Э.Б. Шварц. – Электрон. текстовые данные. – Новосибирск: Новосибирский государственный технический университет, 2011. – 439 с.
5. Назаров А.И., Назаров И.А. Курс математики для нематематических специальностей и направлений бакалавриата: Учебное пособие. – 3-е изд., испр. - СПб.: Издательство «Лань», 2011. – 576 с.
6. Осипов А.В. Лекции по высшей математике: Учебное пособие. – 2-е изд., испр. – СПб.: Издательство «Лань», 2014. – 320 с.
7. Петрушко, И.М. Курс высшей математики. Введение в математический анализ. Дифференциальное исчисление. Лекции и практикум. – Электрон. дан. – СПб.: Лань, 2009. – 288 с.

8. Шипачев, В. С. Высшая математика: учебник и практикум / В.С. Шипачев. – 8-е изд., перераб. и доп. – М.: Издательство Юрайт, 2017. – 447 с.

СОДЕРЖАНИЕ

Ангелина Михайловна Попова,

старший преподаватель кафедры общей математики и информатики АмГУ