

Федеральное агентство по образованию

*АМУРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ*

*Серия «Учебно-методический комплекс дисциплины»*

А.Н. Рыбалёв, В.И. Усенко, В.Л. Русинов

# **ТЕОРИЯ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ**

**ЧАСТЬ 1**

Методическое пособие к выполнению практических и  
самостоятельных работ

**Благовещенск**

2019

ББК 31.2 я 73  
У 74

*Печатается по решению  
редакционно-издательского совета  
энергетического факультета  
Амурского государственного  
университета*

Рыбалев А.Н., Усенко В.И, Русинов В.Л.

**Теория автоматического управления. Часть 1.** Методическое пособие к выполнению практических и самостоятельных работ. – Благовещенск: Амурский гос. ун-т, 2019.

Пособие предназначено для студентов 2-х курса направления подготовки бакалавров «Автоматизация технологических процессов и производств» и полностью соответствует рабочей программе дисциплины «Теория автоматического управления», изучаемой в 4 учебном семестре.

*Рецензенты:* Р.Д. Редозубов, *ведущий инженер, Покровский автоклавный гидро-металлургический комплекс;*  
Ю.В. Мясоедов, *зав. кафедрой энергетики АмГУ, канд. техн. наук, профессор.*

***В авторской редакции.***

© Амурский государственный университет, 2019  
© Рыбалев А.Н., Усенко В.И, Русинов В, 2019

## СОДЕРЖАНИЕ

Введение .....	5
Практическое занятие 1. Математические модели систем управления. Связь между передаточной матрицей и переменными состояниями .....	6
1.1. Первый тип математической модели – ОДУ n-го порядка и передаточные функции .....	7
1.2. Второй тип математической модели – модель в пространстве состояний .....	16
1.3. Каноническая форма управляемости .....	23
1.4. Каноническая форма наблюдаемости .....	25
Практическое занятие 2. Составление моделей одномерной системы в пространстве состояний методами прямого, последовательного и параллельного программирования .....	44
2.1. Метод прямого программирования .....	51
2.2. Метод последовательного программирования .....	54
2.3. Метод параллельного программирования .....	58
Практическое занятие 3. Определение передаточных функций системы с помощью правил преобразования структурных схем .....	64
3.1. Последовательное (series) соединение блоков .....	64
3.2. Параллельное (parallel) соединение блоков .....	68
3.3. Соединение с обратной связью (feedback) .....	71
3.4. Перенос сумматора .....	75
3.5. Переносы линии связи .....	76
Практическое занятие 4. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений классическим и операторным методами .....	82
Практическое занятие 5. Временные характеристики систем и звеньев .....	110
5.1. Временные характеристики .....	110
5.2. Определение временных характеристик численными методами пакета Control .....	122
Практическое занятие 6. Частотные характеристики систем управления .....	131
6.1. Основные частотные характеристики .....	131
6.2. Логарифмические частотные характеристики .....	144
6.3. Использование MatLab при построении частотных характеристик .....	153
Практическое занятие 7. Построение частотных характеристик последовательного соединения звеньев .....	159

Практическое занятие 8. Расчет переходных и частотных характеристик простейшей замкнутой системы регулирования .....	166
8.1. Временные характеристики систем .....	167
8.2. Частотные характеристики .....	174
Приложение А .....	179
Комплексные числа и основные операции над ними .....	179
Понятие о гармонических функциях .....	184
Комплексные изображения гармонических функций времени .....	184
Приложение Б .....	187
Приложение В .....	190
Библиографический список .....	215

## ***ВВЕДЕНИЕ***

В первой части пособия вводятся в рассмотрение базовые понятия теории автоматического управления, изучаемые студентами направления подготовки бакалавров 15.03.04 в курсе «Теория автоматического управления. Часть 1».

Первые два занятия посвящены моделям линейных систем. Рассматриваются модели двух типов: «вход-выход» и «вход-состояние-выход» и вводится понятие операторной передаточной функции. Знание передаточной функции позволяет получить различные виды модели второго типа методами методов прямого, последовательного и параллельного программирования. Изложение сопровождается многочисленными примерами с привлечением вычислительных средств программы Matlab.

Третье занятие посвящено правилам эквивалентных преобразований структурных схем, позволяющим получить математическое описание линейной системы по математическому описанию входящих в нее звеньев. Рассматриваются основные виды соединений звеньев, приводятся формулы для нахождения эквивалентного описания.

На четвертом занятии изучаются методы определения реакции линейной системы на входные воздействия с использованием математических моделей. Рассматриваются классический и операторный методы решения матмоделей, описывающих систему.

На пятом занятии вводятся в рассмотрение понятия эталонных воздействий в виде единичных ступенчатой и импульсной функций и реакций на эти воздействия в виде переходной и импульсной характеристик. Изучаются основные функции пакета Control, предназначенные для определения реакции линейных систем на типовые и произвольные воздействия численными методами.

Шестое занятие посвящено обычным и логарифмическим частотным характеристикам систем управления. Описываются функции пакета Control для их расчета и построения.

На седьмом занятии решается практически важная задача построения логарифмических частотных характеристик последовательного соединения звеньев, т.е. разомкнутых систем управления, которые используются в ТАУ для суждения об устойчивости системы.

Восьмое занятие логически завершает курс «Теория автоматического управления. Часть 1». На нем определяются переходные и частотные характеристики замкнутой системы автоматического управления с отрицательной обратной связью.

Материалы для всех занятий включают задания для самостоятельной работы по темам занятий и примеры их выполнения.

## Практическое занятие 1 **МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ. СВЯЗЬ МЕЖДУ ПЕРЕДАТОЧНОЙ МАТРИЦЕЙ И ПЕРЕМЕННЫМИ СОСТОЯНИЯ.**

Если поведение физической системы может быть представлено одним уравнением или системой уравнений, то говорят о математической модели системы. Модель может быть получена *аналитически*, путем применения соответствующих законов (например, законов Ньютона для механических систем или законов Кирхгофа для электрических) или *экспериментально*, путем обработки результатов экспериментов, проведенных над системой. Матмодель для конкретной системы не является уникальной. Система может быть описана различными способами и, таким образом, иметь несколько математических моделей, вид которых зависит от потребностей исследователя или разработчика. Получение адекватной, но в то же время и достаточно простой матмодели представляет собой важную часть процессов анализа и синтеза системы автоматического управления.

**Математические модели.** Динамика многих систем, будь то механические, электрические, тепловые, экономические, биологические и т.п., в большинстве случаев описывается дифференциальными уравнениями. Эти уравнения могут иметь несколько различных форм. В зависимости от задачи одна форма может подходить больше, чем другие. Например, в задачах оптимального управления удобно использовать модели в пространстве состояний (ss – state-space), а для исследования временных или частотных характеристик – модели в виде передаточных функций (tf – transfer function). После того, как матмодель системы получена, к ней могут быть применены различные аналитические и компьютерные методы для целей анализа и синтеза.

**Простота против точности.** При получении матмодели мы должны пойти на компромисс между простотой модели и ее точностью. Используя упрощенную матмодель, мы часто вынуждены игнорировать определенные физические свойства, присущие системе. В частности, если желательна линейная модель с сосредоточенными параметрами (т.е. модель, использующая обыкновенные дифференциальные уравнения), нам придется отказаться от учета нелинейных эффектов и эффекта распределенности параметров в пространстве, которые могут иметь место в физической системе. Если эти эффекты проявляются незначительно, то между результатами анализа матмодели и результатами экспериментального исследования будет получено хорошее соответствие.

В общем, решая новую задачу, желательно построить упрощенную модель с тем, чтобы иметь общее представление о решении. Затем строится более полная модель, используемая для более точного анализа.

Мы должны также понимать, что линейная модель, вполне адекватно описывающая поведение системы при низкочастотных операциях, может быть непригодна для анализа высокочастотных, так как неучтенные свойства могут проявиться на высоких частотах. Так, например, при описании колебаний в механической системе можно не учитывать массу пружины, но это допустимо лишь на низких частотах, в то время как на высоких такая упрощенная модель теряет адекватность.

**Линейные системы.** Система называется линейной, если к ней применим принцип суперпозиции: реакция (отклик) системы на линейную комбинацию (взвешенную сумму) воздействий равна линейной комбинации (взвешенной сумме) реакций (откликов) на каждое воздействие в отдельности. Следовательно, отклик линейной системы на сумму воздействий, приложенных к одному входу, или совокупность воздействий, приложенных к нескольким входам, можно найти как сумму откликов на каждое воздействие по одному или нескольким каналам.

При решении линейных дифференциальных уравнений этот принцип отражается в том, что можно получить сложное решение как сумму простых.

В экспериментальных исследованиях одним из признаков линейности системы является тот факт, что *следствие пропорционально причине*.

**Стационарные системы.** Дифференциальное уравнение стационарной системы отличается тем, что все его коэффициенты постоянны, тогда как для нестационарных систем они зависят от времени. Примером нестационарной системы является система управления космическим кораблем: масса корабля постоянно уменьшается из-за расхода топлива.

### 1.1. Первый тип математической модели – ОДУ $n$ -го порядка и передаточные функции

Первым типом математической модели будем называть **модель вход-выход (ВВ)**. Динамика стационарной линейной системы может описываться линейным неоднородным обыкновенным дифференциальным уравнением (ОДУ)  $n$ -го порядка с постоянными коэффициентами, связывающим входной  $u(t)$  и выходной  $y(t)$  сигналы:

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y = b_m u^{(m)} + b_{m-1} u^{(m-1)} + \dots + b_1 \frac{du(t)}{dt} + b_0 u, (1.1)$$

где  $n$  – порядок модели, причем  $0 \leq m \leq n$ ;

$a_i, b_i$  – постоянные коэффициенты (параметры модели);

$$y^{(n)} = \frac{d^n y(t)}{dt^n}, \quad y^{(n-1)} = \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}}, \quad u^{(m)} = \frac{d^m u(t)}{dt^m}, \quad u^{(m-1)} = \frac{d^{m-1} u(t)}{dt^{m-1}}.$$

В технических науках часто принято производные по времени обозначать буквами с соответствующим порядку производной числом точек над этими буквами. Так, первую производную обозначают через  $\dot{y} = \frac{dy(t)}{dt}$ ; вторую производную – через  $\ddot{y} = \frac{d^2 y(t)}{dt^2}$  и так далее.

Дифференциальные уравнения получаются на основании фундаментальных физических законов. Этот метод в равной степени применим к механическим, электрическим, гидравлическим, электромеханическим и другим системам. В линейном ОДУ, которое получают чаще всего путем линеаризации нелинейного ДУ, выходную величину системы (искомую функцию времени) и ее производные принято записывать в левой части, а входные величины (известные функции времени) и их производные – в правой части.

**Пример 1.1.** Математическая модель двигателя постоянного тока с одним входом и одним выходом в виде ОДУ.

Двигатель постоянного тока (ДПТ) – это исполнительное устройство, преобразующее электрическую энергию постоянного тока в механическую энергию вращательного движения. Ряд положительных качеств ДПТ, а именно: высокий вращающий момент, возможность регулирования скорости в широком диапазоне, удобство применения в различных САУ позволяют применять их в роботах-манипуляторах, лентопротяжных механизмах, в исполнительных устройствах следящих систем. ДПТ имеет обмотку возбуждения (ОВ) с параметрами  $R_{\text{в}}$  и  $L_{\text{в}}$ , обмотку якоря (ОЯ) с параметрами  $R_{\text{я}}$  и  $L_{\text{я}}$ . В ДПТ *независимого возбуждения* эти обмотки питаются от разных источников, поэтому такой двигатель может быть представлен схемой, приведенной на рис. 1.1.

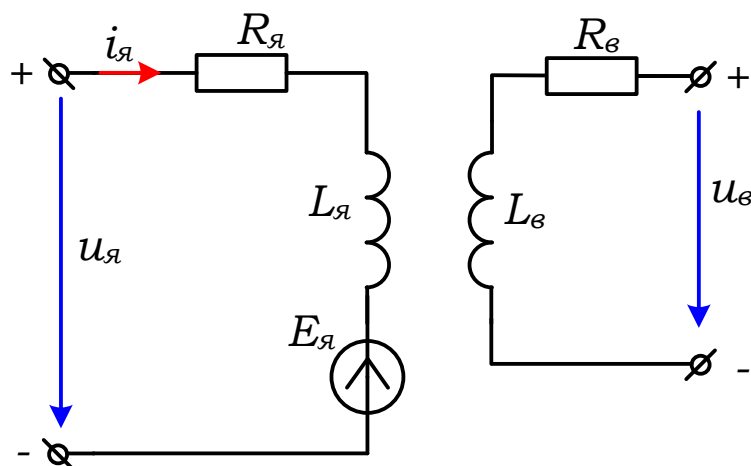


Рис. 1.1. Схема ДПТ независимого возбуждения



Как правило, для управления угловой скоростью двигателя используют метод изменения напряжения, подводимого к якорной цепи (*якорное управление*), а ОВ постоянно подключена к неизменному напряжению, поэтому угловая скорость  $\omega$  и направление вращения вала зависят только от значения и полярности напряжения  $u_{я}$ , подаваемого на якорь.

В общем случае момент сопротивления на валу двигателя  $M_c$  является функцией времени и может рассматриваться как входное воздействие. В частном случае он зависит от угловой скорости, например, пропорционален ей. Тогда двигатель является SISO системой, его входной величиной является напряжение якоря  $u_{я}$ , а выходной – угловая скорость  $\omega$  вала двигателя. Составим модель в пространстве состояний.

В системах управления двигатель значительную часть времени работает в переходных режимах, поэтому для якорной цепи составляется ДУ

$$L_{я} \frac{di_{я}}{dt} + R_{я} i_{я} + e_{я} = u_{я}, \quad (1.2)$$

где  $e_{я}$  – противо-ЭДС, возникающая в якоре при его вращении и направленная навстречу току. Если пренебречь влиянием реакции якоря (воздействие поля якоря на поле возбуждения), то можно считать, что противо-ЭДС пропорциональна угловой скорости вала

$$e_{я} = c_e \Phi \omega = k_e \omega, \quad (1.3)$$

где  $\Phi$  – магнитный поток ОВ;  $c_e$  – конструктивный коэффициент двигателя.

С учетом (1.3) получим уравнение для цепи якоря:

$$L_{я} \frac{di_{я}}{dt} + R_{я} i_{я} + k_e \omega = u_{я}, \quad (1.4)$$

Дифференциальное уравнение движения вала двигателя имеет вид

$$M = M_c + J \frac{d\omega}{dt}, \quad (1.5)$$

где  $M$  – электромагнитный момент двигателя,  $J$  – момент инерции вращающихся частей, приведенный к валу двигателя,  $M_c$  – статический момент или момент сопротивления, который в общем случае равен сумме момента нагрузки и момента трения в подшипниках двигателя.

Вращающий момент двигателя пропорционален току якоря при постоянном потоке:

$$M = c_e \Phi i_{я} = k_e i_{я}. \quad (1.6)$$

Тогда из уравнения для моментов  $k_e i_{я} = M_c + J \frac{d\omega}{dt}$  можно получить выражение для тока якоря:

$$i_{\text{я}} = \frac{M_{\text{с}}}{k_e} + \frac{J}{k_e} \cdot \frac{d\omega}{dt}. \quad (1.7)$$

Будем считать, что статический момент (момент сопротивления) на валу двигателя пропорционален угловой скорости, что имеет место при нагрузке типа «сухое трение», т.е.  $M_{\text{с}} = k_{\text{ст}}\omega$ . В этом случае уравнение (1.7) принимает вид:

$$i_{\text{я}} = \frac{k_{\text{ст}}}{k_e} \omega + \frac{J}{k_e} \cdot \frac{d\omega}{dt}. \quad (1.8)$$

Определим производную тока:

$$\frac{di_{\text{я}}}{dt} = \frac{k_{\text{ст}}}{k_e} \cdot \frac{d\omega}{dt} + \frac{J}{k_e} \cdot \frac{d^2\omega}{dt^2}.$$

Подставив эти выражения в уравнение цепи якоря (1.2), получим:

$$L_{\text{я}} \left( \frac{k_{\text{ст}}}{k_e} \cdot \frac{d\omega}{dt} + \frac{J}{k_e} \cdot \frac{d^2\omega}{dt^2} \right) + R_{\text{я}} \left( \frac{k_{\text{ст}}}{k_e} \omega + \frac{J}{k_e} \cdot \frac{d\omega}{dt} \right) + k_e \omega = u_{\text{я}}, \quad (1.9)$$

откуда получим линейное неоднородное (с ненулевой правой частью) ДУ 2-го порядка с постоянными коэффициентами:

$$\left( \frac{L_{\text{я}} J}{k_e} \right) \frac{d^2\omega(t)}{dt^2} + \left( \frac{R_{\text{я}} J + k_{\text{ст}} L_{\text{я}}}{k_e} \right) \frac{d\omega(t)}{dt} + \left( \frac{k_{\text{ст}} R_{\text{я}} + k_e^2}{k_e} \right) \omega(t) = u_{\text{я}}(t), \quad (1.10)$$

или в приведенном виде:

$$\frac{d^2\omega(t)}{dt^2} + \left( \frac{R_{\text{я}} J + k_{\text{ст}} L_{\text{я}}}{L_{\text{я}} J} \right) \frac{d\omega(t)}{dt} + \left( \frac{k_{\text{ст}} R_{\text{я}} + k_e^2}{L_{\text{я}} J} \right) \omega(t) = \frac{k_e}{L_{\text{я}} J} u_{\text{я}}(t). \quad (1.11)$$

Пусть параметры двигателя имеют следующие значения:

$$R_{\text{я}} = 15 \text{ Ом}; \quad J = 0,018 \text{ кг/м}^2; \quad L_{\text{я}} = 0,1 \text{ Гн}; \quad k_e = 2,45; \quad k_{\text{ст}} = 0,05.$$

Для этих данных запишем ДУ:

$$\frac{d^2\omega(t)}{dt^2} + \left( \frac{15 \cdot 0,018 + 0,1 \cdot 0,05}{0,1 \cdot 0,018} \right) \frac{d\omega(t)}{dt} + \left( \frac{15 \cdot 0,05 + 2,45^2}{0,1 \cdot 0,018} \right) \omega(t) = \frac{2,45}{0,1 \cdot 0,018} u_{\text{я}}(t);$$

$$\frac{d^2\omega(t)}{dt^2} + 152,8 \frac{d\omega(t)}{dt} + 3751 \omega(t) = 1361 u_{\text{я}}(t).$$

Решение этого ДУ представляет собой закон изменения угловой скорости во времени при заданном законе изменения напряжения на якоре. Для решения ДУ можно воспользоваться как классическим, так и операторными методами. Последний основан на операционном исчислении.

Дифференциальное уравнение (1.1) можно записать в символической (операторной) форме, используя оператор дифференцирования  $p = \frac{d}{dt}$ :

$$a_n p^n y(t) + a_{n-1} p^{n-1} y(t) + \dots + a_1 p y(t) + a_0 y = b_m p^m u(t) + b_{m-1} p^{m-1} u(t) + \dots + b_1 p u(t) + b_0 u(t), \quad (1.12)$$

или

$$A(p)y(t) = B(p)u(t), \quad (1.13)$$

где дифференциальные полиномы  $A(p)$  и  $B(p)$  имеют следующие выражения:

$$A(p) = a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p + a_0, \quad (1.14)$$

$$B(p) = b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \dots + b_1 p + b_0. \quad (1.15)$$

В общем случае  $A(p)$  имеет степень  $n$ , а  $B(p)$  – степень  $m$ ,  $0 \leq m \leq n$ , где  $n$  – порядок модели. В случае, когда  $a_n = 1$  (или  $b_m = 1$ ), полином называется *приведенным*. Полином, у которого коэффициент при младшем члене равен 1, т.е.  $a_0 = 1$  (или  $b_0 = 1$ ), называется *нормированным*.

Уравнение (1.13) можно записать в виде

$$y(t) = \frac{B(p)}{A(p)} u(t) = W(p)u(t),$$

где интегро-дифференциальный оператор

$$W(p) = \frac{B(p)}{A(p)} = \frac{b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \dots + b_1 p + b_0}{a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p + a_0} \quad (1.16)$$

называется *операторной передаточной функцией (ПФ) системы*, описываемой уравнением (1.13).

Таким образом, по любому линейному дифференциальному уравнению может быть записана передаточная функция (и наоборот).

ПФ представляет собой дробно-рациональную функцию оператора  $p$  с вещественными коэффициентами. Как видно из (1.16), ПФ может быть записана в виде отношения двух полиномов – полинома  $B(p)$  правой части и полинома  $A(p)$  левой части исходного символического (операторного) уравнения.

Оператор  $A(p)$  называется *характеристическим полиномом ДУ* (1.12), а комплексные числа  $p_i$ ,  $i = \overline{1, n}$ , являющиеся решениями (корнями) характеристического уравнения

$$A(p) = 0 \quad (1.17)$$

или

$$a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p + a_0 = 0, \quad (1.18)$$

называются *полюсами* ПФ.

Комплексные числа  $z_i$ ,  $i = \overline{1, m}$ , являющиеся решением уравнения

$$B(p) = 0$$

или

$$b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \dots + b_1 p + b_0 = 0, \quad (1.19)$$

называются *нулями* ПФ.

Нули и полюсы ПФ могут быть либо действительными, либо комплексно-сопряжёнными числами.

Другая интерпретация понятия ПФ связана с *методом преобразования Лапласа*. В этом случае передаточной функции можно дать следующее определение.

*Передаточной функцией* системы называют отношение операторных изображений выходной и входной переменных *при нулевых начальных условиях*:

$$W(p) = \frac{Y(p)}{X(p)}. \quad (1.20)$$

С помощью передаточной функции выходная величина легко связывается с входной:

$$Y(p) = W(p)X(p). \quad (1.21)$$

ПФ можно найти с помощью дифференциального уравнения, записав его в операторной форме при нулевых начальных условиях. Применительно к электрическим цепям ПФ получают с помощью операторной схемы замещения при нулевых начальных условиях, минуя этап составления ДУ.

Передаточная функция системы (или элемента) однозначно описывает динамическую связь между входной и выходной переменными и не несет никакой информации о внутренних переменных (переменных состояния) и характере их изменения.

В программе MatLab линейные системы, заданные передаточными функциями, называются TF (transfer functions) системами. Такие системы задаются векторами коэффициентов числителей и знаменателей передаточных функций.

ПФ можно записать таким образом, чтобы в числителе и знаменателе находились приведенные полиномы, т.е. полиномы, у которых коэффициенты при старших степенях оператора  $p$  были бы равны единице:

$$\begin{aligned}
 W(p) &= \frac{B(p)}{A(p)} = \frac{b_m}{a_n} \cdot \frac{p^m + \frac{b_{m-1}}{b_m} p^{m-1} + \dots + \frac{b_1}{b_m} + \frac{b_0}{b_m}}{p^n + \frac{a_{n-1}}{a_n} p^{n-1} + \dots + \frac{a_1}{a_n} p + \frac{a_0}{a_n}} = \\
 &= \frac{b_m}{a_n} \cdot \frac{p^m + \frac{b_{m-1}}{b_m} p^{m-1} + \dots + \frac{b_1}{b_m} + \frac{b_0}{b_m}}{p^n + \frac{a_{n-1}}{a_n} p^{n-1} + \dots + \frac{a_1}{a_n} p + \frac{a_0}{a_n}} = K \frac{p^m + c_{m-1} p^{m-1} + \dots + c_1 + c_0}{p^n + d_{n-1} p^{n-1} + \dots + d_1 p + d_0}, \quad (1.22)
 \end{aligned}$$

где  $K = \frac{b_m}{a_n}$  – масштабный коэффициент.

**Пример 1.1.** Математическая модель двигателя постоянного тока с одним входом и одним выходом в виде ПФ.

Выше была получена матмодель ДПТ в виде ОДУ:

$$\frac{d^2 \omega(t)}{dt^2} + \left( \frac{R_{\text{я}} J + k_{\text{ст}} L_{\text{я}}}{L_{\text{я}} J} \right) \frac{d\omega(t)}{dt} + \left( \frac{k_{\text{ст}} R_{\text{я}} + k_e^2}{L_{\text{я}} J} \right) \omega(t) = \frac{k_e}{L_{\text{я}} J} u_{\text{я}}(t).$$

Для получения ПФ запишем ДУ в операторной форме, т.е. для изображений, при нулевых начальных условиях:

$$p^2 \Omega(p) + \left( \frac{R_{\text{я}} J + L_{\text{я}} k_{\text{ст}}}{L_{\text{я}} J} \right) p \Omega(p) + \left( \frac{R_{\text{я}} k_{\text{ст}} + k_e^2}{L_{\text{я}} J} \right) \Omega(p) = \frac{k_e}{L_{\text{я}} J} U_{\text{я}}(p) \quad (1.23)$$

или

$$\left[ p^2 + \left( \frac{R_{\text{я}} J + L_{\text{я}} k_{\text{ст}}}{L_{\text{я}} J} \right) p + \left( \frac{R_{\text{я}} k_{\text{ст}} + k_e^2}{L_{\text{я}} J} \right) \right] \Omega(p) = \frac{k_e}{L_{\text{я}} J} U_{\text{я}}(p). \quad (1.24)$$

Передаточная функция двигателя:

$$W(p) = \frac{\Omega(p)}{U_{\text{я}}(p)} = \frac{\frac{k_e}{L_{\text{я}} J}}{p^2 + \left( \frac{R_{\text{я}} J + L_{\text{я}} k_{\text{ст}}}{L_{\text{я}} J} \right) p + \left( \frac{R_{\text{я}} k_{\text{ст}} + k_e^2}{L_{\text{я}} J} \right)} = \frac{1361}{p^2 + 152,8 p + 3751}.$$

Используя приведенные выше значения параметров двигателя

$R_{\text{я}} = 15 \text{ Ом}; J = 0,018 \text{ кг/м}^2; L_{\text{я}} = 0,1 \text{ Гн}; k_e = 2,45; k_{\text{ст}} = 0,05,$   
получим передаточную функцию в следующем виде:

$$W(p) = \frac{\frac{2,45}{0,1 \cdot 0,018}}{p^2 + \left( \frac{15 \cdot 0,018 + 0,1 \cdot 0,05}{0,1 \cdot 0,018} \right) p + \left( \frac{15 \cdot 0,05 + 2,45^2}{0,1 \cdot 0,018} \right)} = \frac{1361}{p^2 + 152,8 p + 3751}.$$

Имеются два способа задания модели в MatLab в виде передаточной функции (TF модели).

1). Первый способ – с помощью функции **tf**:

```
sys = tf(num, den).
```

Параметры `num` и `den` задают числитель и знаменатель. Для SISO систем `num` и `den` представляют собой векторы-строки коэффициентов полиномов числителя и знаменателя, расположенных в порядке убывания степеней оператора  $p$ . Результат `sys` является объектом класса TF.

Зададим модель ДПТ:

```
num=[0 0 1361]; den=[1 152.8 3751];
W1=tf(num, den)
```

В командном окне

```
Transfer function:
      1361
-----
s^2 + 152.8 s + 3751
```

Теперь эта модель находится в программе MatLab и может быть использована для различного рода вычислений и получения других моделей.

2). Второй способ – определить переменную Лапласа  $s$  или  $p$  с помощью команды `s = tf('s')` или `p = tf('p')`, а затем ввести модель в привычном виде:

```
s=tf('s');
W=1361/(s^2+152.8*s+3751)
```

В командном окне

```
      1361
-----
s^2 + 152.8 s + 3751
```

или

```
p=tf('p');
W=1361/(p^2+152.8*p+3751)
```

В командном окне

```
Transfer function:
```

$$p^2 + 152.8 p + 3751$$

Теперь эта модель находится в программе MatLab и может быть использована для различного рода вычислений и получения других моделей.

Известно, что любой полином степени  $n$  с действительными коэффициентами имеет  $n$  корней, среди которых могут быть как действительные, так и комплексные, попарно сопряженные, корни. Если корнями полинома являются числа  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ , то он может быть представлен в виде

$$p^n + a_{n-1}p^{n-1} + \dots + a_1p + a_0 = (p - \alpha_1)(p - \alpha_2)(p - \alpha_3) \dots (p - \alpha_n)$$

Следовательно, ПФ, заданную в приведенном виде

$$W(p) = K \frac{p^m + c_{m-1}p^{m-1} + \dots + c_1 + c_0}{p^n + d_{n-1}p^{n-1} + \dots + d_1p + d_0},$$

можно записать также через ее нули и полюса:

$$W(p) = K \frac{(p - z_1) \dots (p - z_m)}{(p - p_1) \dots (p - p_n)},$$

где  $z_k$  и  $p_k$  – нули полюса соответственно.

Такая форма представления ПФ называется в MatLab Zero-Pole-Gain моделью или ZPK моделью.

Аналогично ТФ имеются два способа получения ZPK модели.

1). Первый способ – с помощью функции zpk:

$$\text{sys} = \text{zpk}(Z, P, K).$$

Эта команда создает модель по ее заданным нулям и полюсам. Здесь  $Z$  и  $P$  – соответственно, векторы-строки нулей и полюсов ПФ, а  $K$  – обобщенный коэффициент усиления (масштабный коэффициент). Возвращаемая величина – модель объекта в zpk-форме. Например, программа

$$Z = [-141.42i, 141.42i];$$

$$P = [-50.00 + 132.29i, -50.00 - 132.29i]; \quad K = 1;$$

$$H = \text{zpk}(Z, P, K)$$

позволяет получить ZPK модель в виде следующей ПФ:

$$\text{Zero/pole/gain:}$$

$$(s^2 + 2e004)$$

$$(s^2 + 100s + 2e004)$$

Из примера видно, что MatLab не раскладывает полином второй степени на множители первой степени, если его корни – комплексно-сопряженные.

2). Вторым способом – определить переменную Лапласа  $s$  или  $p$  с помощью команды `s = zpk('s')` или `p = zpk('p')`, а затем записать модель в привычном виде.

```
p=zpk('p')
H1=(p^2+20000)/(p^2+100*p+20000)
```

В командном окне

```
Zero/pole/gain:
p
Zero/pole/gain:
(p^2 + 2e004)
-----
(p^2 + 100p + 2e004)
```

Графическое изображение расположения нулей и полюсов ПФ в плоскости комплексной частоты  $p=\sigma+j\omega$  называется *диаграммой нулей и полюсов* или *полюсно-нулевой диаграммой* (ПНД). При построении ПНД нули изображаются кружками, а полюсы – крестиками. Зная расположение нулей и полюсов ПФ системы в плоскости комплексной частоты  $p$ , можно получить полную информацию о свойствах системы, в частности с точностью до масштабного коэффициента найти реакцию системы на заданное воздействие.

Полюсно-нулевая диаграмма в MatLab называется *the pole-zero map* (полюсно-нулевая карта) и строится с помощью команды

```
pzmap(sys)
```

Использование выходных аргументов

```
[p, z] = pzmap(sys)
```

позволяет получить полюса и нули системы без построения диаграммы.

## 1.2. Второй тип математической модели – модель в пространстве состояний

Третьим типом математической модели будем считать модель **вход-состояние-выход** (ВСВ) или *модель в пространстве состояний* (*SS модель*).

Такие модели описывают состояние исследуемого объекта *системой дифференциальных уравнений первого порядка*, записанных относительно некоторых переменных – *переменных состояния*. В набор переменных состояния могут входить любые внутренние переменные при условии, что все они в совокупности однозначно определяют текущее состояние системы в любой момент времени. Это, в частности, означает, что переменные, не входящие в этот набор, могут быть выражены через переменные со-



стояния и входные переменные посредством алгебраических уравнений. Состояние линейной электрической цепи, например, однозначно определяется токами в индуктивностях и напряжениями на емкостях. Остальные токи и напряжения цепи могут быть рассчитаны через указанные величины и параметры источников энергии.

Пусть система управления описывается  $n$  переменными состояниями и имеет  $r$  входов и  $m$  выходов.

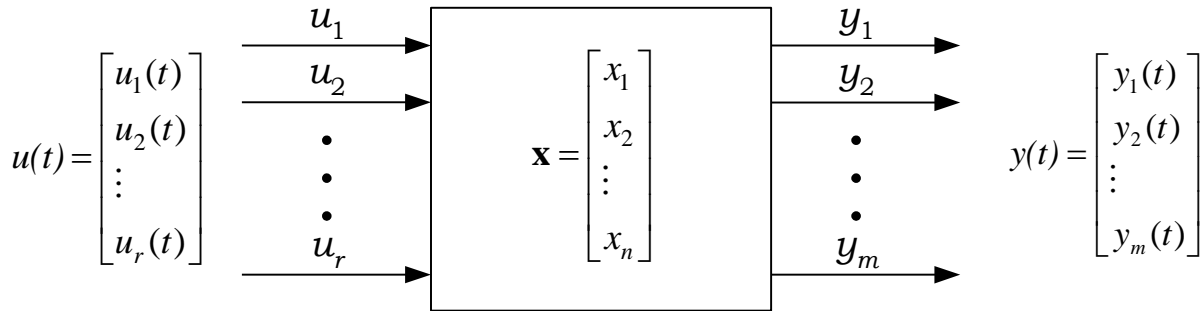


Рис. 1.2. Структурная схема многомерной системы

Состояние системы описывается дифференциальными уравнениями первого порядка относительно каждой из переменных состояния. Эти уравнения для линейных систем имеют следующий вид:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n + b_{11}u_1 + \dots + b_{1r}u_r, \\ \dot{x}_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n + b_{21}u_1 + \dots + b_{2r}u_r, \\ \dots \\ \dot{x}_n = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n + b_{n1}u_1 + \dots + b_{nr}u_r, \end{cases} \quad (1.25)$$

где  $\dot{x}_i = \frac{dx_i}{dt}$ .

Эту же систему можно записать в развернутой матричной форме:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & \dots & b_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \dots & b_{nr} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_r \end{bmatrix}. \quad (1.26)$$

Матрицы-столбцы, состоящие из переменных состояния и входных сигналов, называются *вектором состояния* и *вектором входных сигналов* соответственно:

$$\mathbf{x} = [x_1 \quad x_2 \quad \dots \quad x_n]^T, \quad \mathbf{u} = [u_1 \quad u_2 \quad \dots \quad u_r]^T, \quad (1.27)$$

где полужирное начертание символа  $\mathbf{x}$  или  $\mathbf{u}$  означает вектор (матрица-столбец).

Тогда процессы в системе управления можно описать в компактном виде *дифференциальным уравнением состояния*

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}, \quad (1.28)$$

которое часто называют просто *уравнением состояния*. Уравнение состояния связывает скорость изменения состояния системы с самим состоянием и входными сигналами. В общем случае выходные сигналы линейной системы связаны с переменными состояния и входными сигналами *уравнением выхода*

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{u}, \quad (1.29)$$

где  $\mathbf{y} = [y_1 \ y_2 \ \dots \ y_m]^T$  – вектор выходных переменных.

В (1.28) и (1.29) используются следующие матрицы:

**A** – матрица коэффициентов системы – квадратная матрица состояний размерности  $n \times n$ , где  $n$  – число переменных состояния;

**B** – матрица входа размера  $n \times r$ , где  $r$  – число входных величин;

**C** – матрица выхода размерности  $m \times n$ ;

**D** – матрица обхода, определяющая прямую зависимость выхода от входа, имеющая размерность  $m \times r$ .

Элементы матриц **A**, **B**, **C** и **D** обозначаются такими же, как и матрицы, но строчными, буквами.

Для наглядности размерности можно указать над матрицами уравнения состояния:

$$\begin{array}{ccccccc} n \times 1 & & n \times n & n \times 1 & \begin{array}{c} \overbrace{\phantom{B \cdot U}} \\ \downarrow \phantom{B \cdot U} \phantom{B \cdot U} \phantom{B \cdot U} \\ n \times r \phantom{B \cdot U} \phantom{B \cdot U} \phantom{B \cdot U} \\ \phantom{B \cdot U} \phantom{B \cdot U} \phantom{B \cdot U} \\ r \times 1 \end{array} \\ \mathbf{X} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{X} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{U} \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccc} m \times 1 & & m \times n & n \times 1 & \begin{array}{c} \overbrace{\phantom{D \cdot U}} \\ \downarrow \phantom{D \cdot U} \phantom{D \cdot U} \phantom{D \cdot U} \\ m \times r \phantom{D \cdot U} \phantom{D \cdot U} \\ \phantom{D \cdot U} \phantom{D \cdot U} \\ r \times 1 \end{array} \\ \mathbf{Y} = \mathbf{C} \cdot \mathbf{X} + \mathbf{D} \cdot \mathbf{U} \end{array}$$

Стрелки над матрицами поставлены для демонстрации следующего известного правила. Произведение **B·U** матриц в указанном порядке возможно в том и только в том случае, если число столбцов матрицы **B** равно числу строк матрицы **U**. В матрице, являющейся произведением двух матриц, число строк равно числу строк левого сомножителя, а число столбцов – числу столбцов правого сомножителя. Данное правило можно изобразить с помощью стрелок над размерами матриц: перемножать можно матрицы с одинаковыми внутренними размерами, а наружные размеры дают размерность результирующей матрицы.

Системы с одним входом и одним выходом называют SISO системами (SISO – single-input / single-output). Системы с несколькими входами и выходами называют MIMO системами (multiple-input / multiple-output). Уравнения (1.28) и (1.29) могут быть записаны как для MIMO, так и для SISO систем. Если система имеет один вход, т.е.  $r = 1$ , то матрица  $\mathbf{B}$  является столбцом ( $n \times 1$ ), а вектор  $\mathbf{u}$  превращается в скалярную переменную. Если система имеет только один выход ( $m = 1$ ), то вектор  $\mathbf{y}$  превращается в скалярную переменную, а матрица  $\mathbf{C}$  имеет вид строки длиной  $1 \times n$ .

Смысл модели в переменных состояния заключается в том, что она, сохраняя соотношения между входами и выходами системы, позволяет одновременно исследовать поведение внутренних ее переменных. При надлежащем выборе они могут описывать различные физические величины (токи, напряжения, скорости, ускорения, перемещения, температуры и т.п.), представляющие интерес для исследователя.

В программе MatLab линейные системы в пространстве состояний являются частным случаем LTI (Linear Time-Invariant, линейных стационарных) систем и называются SS (State Space, в пространстве состояний) моделями.

**Пример 1.3.** Математические модели двигателя постоянного тока с одним входом и одним выходом в виде модели в пространстве состояний.

Выше была получена матмодель в виде ОДУ:

$$\frac{d^2 \omega(t)}{dt^2} + \left( \frac{R_{\text{я}} J + k_{\text{ст}} L_{\text{я}}}{L_{\text{я}} J} \right) \frac{d\omega(t)}{dt} + \left( \frac{k_{\text{ст}} R_{\text{я}} + k_e^2}{L_{\text{я}} J} \right) \omega(t) = \frac{k_e}{L_{\text{я}} J} u_{\text{я}}(t).$$

Сформируем по ДУ (1.11) модель в пространстве состояний. В качестве переменных состояния используем выходную величину (угловую скорость) и ее первую производную (угловое ускорение):

$$x_1 = \omega; \quad x_2 = \dot{\omega} = \dot{x}_1 \quad \text{и} \quad \dot{x}_2 = \ddot{\omega}.$$

Выходной величиной является угловая скорость:

$$y = \omega = x_1.$$

Подставим обозначения всех физических переменных в левую часть ДУ так, чтобы в ней была только первая производная второй переменной состояния:

$$\dot{x}_2 + \left( \frac{R_{\text{я}} J + k_{\text{ст}} L_{\text{я}}}{L_{\text{я}} J} \right) x_2 + \left( \frac{k_{\text{ст}} R_{\text{я}} + k_e^2}{L_{\text{я}} J} \right) x_1 = \frac{k_e}{L_{\text{я}} J} u_{\text{я}}.$$

Отсюда получим второе уравнение состояния, которое вместе с первым  $\dot{x}_1 = x_2$  образует систему уравнений состояния:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2; \\ \dot{x}_2 = -\left(\frac{k_{\text{ст}}R_{\text{я}} + k_e^2}{L_{\text{я}}J}\right)x_1 - \left(\frac{R_{\text{я}}J + k_{\text{ст}}L_{\text{я}}}{L_{\text{я}}J}\right)x_2 + \frac{k_e}{L_{\text{я}}J}u_{\text{я}} \end{cases} \quad (1.30)$$

Запишем эти уравнения в развернутой матричной форме

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k_{\text{ст}}R_{\text{я}} + k_e^2}{L_{\text{я}}J} & -\frac{R_{\text{я}}J + k_{\text{ст}}L_{\text{я}}}{L_{\text{я}}J} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{k_e}{L_{\text{я}}J} \end{bmatrix} u_{\text{я}}.$$

Уравнение выхода:

$$y = [1 \quad 0] \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = x_1.$$

Запишем матрицы модели:

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k_{\text{ст}}R_{\text{я}} + k_e^2}{L_{\text{я}}J} & -\frac{R_{\text{я}}J + k_{\text{ст}}L_{\text{я}}}{L_{\text{я}}J} \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{15 \cdot 0,05 + 2,45^2}{0,1 \cdot 0,018} & -\frac{15 \cdot 0,018 + 2,45 \cdot 0,05}{0,1 \cdot 0,018} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3751 & -152,8 \end{bmatrix}; \\ \mathbf{B} &= \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{k_e}{L_{\text{я}}J} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{2,45}{0,1 \cdot 0,018} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1361 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{C} = [1 \quad 0]; \quad D = 0. \end{aligned}$$

Уравнения состояния и выхода:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2; \\ \dot{x}_2 = -3751x_1 - 152,8x_2 + 1361u_{\text{я}}; \\ y = x_1. \end{cases}$$

В программе **MatLab** модель в пространстве состояний создается с помощью функции `ss`:

$$\text{sys} = \text{ss}(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}),$$

которая создает объект `sys` класса `SS`, сохраняющий матрицы уравнений состояния.

**Установим** в общем виде связь между передаточной функцией и уравнениями состояния, для чего уравнения (1.28), (1.29) запишем в символической (операторной) форме:

$$p\mathbf{x}(t) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}(t) + \mathbf{B} \cdot \mathbf{u}(t); \quad (1.31)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C} \cdot \mathbf{x}(t) + \mathbf{D} \cdot \mathbf{u}(t). \quad (1.32)$$

Сгруппируем все члены, содержащие  $\mathbf{x}(t)$ , в левой части уравнения:

$$p\mathbf{x}(t) - \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}(t) = \mathbf{B} \cdot \mathbf{u}(t). \quad (1.33)$$

Для того, чтобы выделить множитель  $\mathbf{x}(t)$  в левой части уравнения, сначала представим член  $p\mathbf{x}(t)$  как  $p\mathbf{E} \cdot \mathbf{x}(t)$ , где  $\mathbf{E}$  – единичная матрица размерности  $n$ . Тогда

$$p\mathbf{E} \cdot \mathbf{x}(t) - \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}(t) = \mathbf{B} \cdot \mathbf{u}(t) \quad (1.34)$$

или

$$(p\mathbf{E} - \mathbf{A})\mathbf{x}(t) = \mathbf{B} \cdot \mathbf{u}(t). \quad (1.35)$$

Этот дополнительный шаг понадобился потому, что вычитание матрицы  $\mathbf{A}$  из скалярной переменной  $p$  не определено: мы не можем выразить  $\mathbf{x}(t)$  непосредственно из (1.33). Из уравнения (1.35) получим

$$\mathbf{x}(t) = (p\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B} \cdot \mathbf{u}(t). \quad (1.36)$$

Введем обозначение

$$\Phi(p) = (p\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1}. \quad (1.37)$$

Эта матрица, обратная матрице  $(p\mathbf{E} - \mathbf{A})$ , называется *резольвентой*. Оригинал этой матрицы  $\Phi(t)$  называется *переходной матрицей состояния* или *фундаментальной матрицей*.

Резольвенту можно найти по формуле

$$\Phi(p) = \frac{(p\mathbf{E} - \mathbf{A})^+}{\det(p\mathbf{E} - \mathbf{A})}, \quad (1.38)$$

где  $(p\mathbf{E} - \mathbf{A})^+$  – присоединенная (союзная) матрица.

С учетом (1.38) получим решение операторных уравнений состояния:

$$\mathbf{x}(t) = \Phi(p)\mathbf{B} \cdot \mathbf{u}(t). \quad (1.39)$$

Определитель матрицы  $p\mathbf{E} - \mathbf{A}$  является характеристическим полиномом системы, т.е.

$$\det(p\mathbf{E} - \mathbf{A}) = A(p). \quad (1.40)$$

Собственные числа матрицы  $\mathbf{A}$  в точности совпадают с корнями характеристического уравнения (полюсами) системы:  $\lambda_i\{\mathbf{A}\} = p_i$ .

Подставляя  $\mathbf{x}(t)$  согласно (1.39) в (1.32), получим уравнение выхода:

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C} \cdot \Phi(p)\mathbf{B} \cdot \mathbf{u}(t) + \mathbf{D} \cdot \mathbf{u}(t) = [\mathbf{C} \cdot \Phi(p)\mathbf{B} + \mathbf{D}] \cdot \mathbf{u}(t), \quad (1.41)$$

откуда

$$\mathbf{W}(p) = \mathbf{C} \cdot \Phi(p) \mathbf{B} + \mathbf{D} = \frac{\mathbf{C}(p\mathbf{E} - \mathbf{A})^+ \mathbf{B}}{\det(p\mathbf{E} - \mathbf{A})} + \mathbf{D}. \quad (1.42)$$

Получим передаточную функцию двигателя по матрицам уравнений состояния.

Матрицы состояния и выхода:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3751 & -152,8 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1361 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{C} = [1 \ 0]; \quad D = 0.$$

Найдем матрицу

$$(p\mathbf{E} - \mathbf{A}) = \begin{bmatrix} p & -1 \\ 3751 & p + 152,8 \end{bmatrix}.$$

Алгебраические дополнения полученной матрицы имеют вид:

$$\Delta_{11} = (-1)^{1+1}(p + 152,8) = p + 152,8; \quad \Delta_{12} = (-1)^{1+2}(3751) = -3751;$$

$$\Delta_{21} = (-1)^{2+1}(-1) = 1; \quad \Delta_{22} = (-1)^{2+2}(p) = p.$$

Союзная матрица:

$$(p\mathbf{E} - \mathbf{A})^+ = \begin{bmatrix} \Delta_{11} & \Delta_{21} \\ \Delta_{12} & \Delta_{22} \end{bmatrix}.$$

Перемножим матрицы, стоящие в числителе формулы для ПФ:

$$\mathbf{C}(p\mathbf{E} - \mathbf{A})^+ \mathbf{B} = [1 \ 0] \begin{bmatrix} \Delta_{11} & \Delta_{21} \\ \Delta_{12} & \Delta_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1361 \end{bmatrix} = [\Delta_{11} \ \Delta_{21}] \begin{bmatrix} 0 \\ 1361 \end{bmatrix} =$$

$$= 1361 \Delta_{21} = 1361.$$

Определитель матрицы  $(p\mathbf{E} - \mathbf{A})$ :

$$\det(p\mathbf{E} - \mathbf{A}) = \begin{vmatrix} p & -1 \\ 3751 & p + 152,8 \end{vmatrix} = p^2 + 152,8p + 3751.$$

Передаточная функция ДПТ:

$$W(p) = \frac{\mathbf{C}(p\mathbf{E} - \mathbf{A})^+ \mathbf{B}}{\det(p\mathbf{E} - \mathbf{A})} + D = \frac{1361}{p^2 + 152,8p + 3751}.$$

В этом примере нам понадобилось только алгебраическое дополнение  $\Delta_{21}$ , так как матрицы  $\mathbf{C}$  и  $\mathbf{B}$  содержат нулевые элементы. Поэтому не обязательно находить все алгебраические дополнения матрицы  $(p\mathbf{E} - \mathbf{A})$ .

По ПФ можно составить большое число SS моделей. Одна из них – это модель в канонической форме управляемости (КФУ).

### 1.3. Каноническая форма управляемости

Правила формирования матриц модели в канонической форме управляемости (КФУ) непосредственно по передаточной функции:

1) в последней строке матрицы  $\mathbf{A}$  находятся коэффициенты характеристического уравнения системы, начиная со свободного члена, взятые со знаком минус;

2) остальные элементы матрицы  $\mathbf{A}$  равны нулю, кроме элементов, расположенных над главной диагональю – они равны единице;

3) матрица  $\mathbf{B}$  представляет собой столбец, последний элемент которого равен единице, остальные элементы – нулевые;

4) матрица  $\mathbf{C}$  представляет собой строку, элементы которой равны коэффициентам числителя исходной ПФ, начиная со свободного члена, взятым со своими знаками.

Составим SS модель в КФУ для системы 3-го порядка с ПФ

$$T(p) = \frac{B(p)}{A(p)} = \frac{b_2 p^2 + b_1 p + b_0}{p^3 + a_2 p^2 + a_1 p + a_0}. \quad (1.43)$$

КФУ имеет следующие уравнения:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \quad (1.44)$$

и

$$y(t) = \mathbf{C}\mathbf{x} = [b_0 \quad b_1 \quad b_2] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}. \quad (1.45)$$

Соответствующие уравнениям матрицы:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = [b_0 \quad b_1 \quad b_2]. \quad (1.46)$$

Составим модель в КФУ для ДПТ с ПФ

$$W(p) = \frac{1361}{p^2 + 152,8 p + 3751}.$$

Матрицы коэффициентов, входа и выхода:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3751 & -152,8 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = [1361 \quad 0].$$

Получим передаточную функцию двигателя по матрицам уравнений состояния.

Матрицы состояния и выхода:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3751 & -152,8 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{C} = [1361 \quad 0]; \quad D = 0.$$

Найдем матрицу

$$(p\mathbf{E} - \mathbf{A}) = \begin{bmatrix} p & -1 \\ 3751 & p + 152,8 \end{bmatrix}.$$

Алгебраические дополнения полученной матрицы имеют вид:

$$\begin{aligned} \Delta_{11} &= (-1)^{1+1}(p + 152,8) = p + 152,8; & \Delta_{12} &= (-1)^{1+2}(3751) = -3751; \\ \Delta_{21} &= (-1)^{2+1}(-1) = 1; & \Delta_{22} &= (-1)^{2+2}(p) = p. \end{aligned}$$

Союзная матрица:

$$(p\mathbf{E} - \mathbf{A})^+ = \begin{bmatrix} \Delta_{11} & \Delta_{21} \\ \Delta_{12} & \Delta_{22} \end{bmatrix}.$$

Перемножим матрицы, стоящие в числителе формулы для ПФ:

$$\mathbf{C}(p\mathbf{E} - \mathbf{A})^+ \mathbf{B} = [1361 \quad 0] \begin{bmatrix} \Delta_{11} & \Delta_{21} \\ \Delta_{12} & \Delta_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = [1361 \cdot \Delta_{11} \quad 1361 \cdot \Delta_{21}] \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 1361.$$

Определитель матрицы  $(p\mathbf{E} - \mathbf{A})$ :

$$\det(p\mathbf{E} - \mathbf{A}) = \begin{vmatrix} p & -1 \\ 3751 & p + 152,8 \end{vmatrix} = p^2 + 152,8p + 3751.$$

Передаточная функция ДПТ:

$$W(p) = \frac{\mathbf{C}(p\mathbf{E} - \mathbf{A})^+ \mathbf{B}}{\det(p\mathbf{E} - \mathbf{A})} + D = \frac{1361}{p^2 + 152,8p + 3751}.$$

В этом примере нам понадобилось только алгебраическое дополнение  $\Delta_{21}$ .

Другая интересная модель – это модель в канонической форме наблюдаемости (КФН).



## 1.4. Каноническая форма наблюдаемости

Правила формирования матриц модели в канонической форме наблюдаемости (КФН) непосредственно по передаточной функции:

1) в первом столбце матрицы **A** находятся коэффициенты характеристического уравнения системы, начиная со свободного члена, взятые со знаком минус, идущие снизу вверх;

2) остальные элементы матрицы **A** равны нулю, кроме элементов, расположенных над главной диагональю – они равны единице;

3) матрица **B** представляет собой столбец, элементы которого равны коэффициентам числителя исходной ПФ, начиная со свободного члена, взятые со своими знаками и идущие снизу вверх;

4) матрица **C** представляет собой строку, первый элемент которой равен единице, остальные элементы – нулевые.

Составим SS модель в КФН для системы 3-го порядка с ПФ

$$T(p) = \frac{B(p)}{A(p)} = \frac{b_2 p^2 + b_1 p + b_0}{p^3 + a_2 p^2 + a_1 p + a_0} \quad (1.47)$$

КФУ имеет следующие уравнения:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a_2 & 1 & 0 \\ -a_1 & 0 & 1 \\ -a_0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_2 \\ b_1 \\ b_0 \end{bmatrix} u(t) \quad (1.48)$$

и

$$y(t) = \mathbf{C}\mathbf{x} = [1 \quad 0 \quad 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}. \quad (1.49)$$

Соответствующие уравнениям матрицы:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -a_2 & 1 & 0 \\ -a_1 & 0 & 1 \\ -a_0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_2 \\ b_1 \\ b_0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = [1 \quad 0 \quad 0]. \quad (1.50)$$

Составим модель в КФН для ДПТ с ПФ

$$W(p) = \frac{1361}{p^2 + 152,8 p + 3751}.$$

Матрицы коэффициентов, входа и выхода:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -152,8 & 1 \\ -3751 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1361 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = [1 \quad 0].$$

Получим передаточную функцию двигателя по матрицам уравнений состояния.

Матрицы состояния и выхода:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -152,8 & 1 \\ -3751 & 0 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1361 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{C} = [1 \quad 0];$$

$$D = 0.$$

Найдем матрицу

$$p\mathbf{E} - \mathbf{A} = \begin{bmatrix} p + 152,8 & -1 \\ 3751 & p \end{bmatrix}$$

Алгебраические дополнения полученной матрицы имеют вид:

$$\Delta_{22} = (-1)^{2+2}(p + 152,8) = p + 152,8; \quad \Delta_{12} = (-1)^{1+2}(3751) = -3751;$$

$$\Delta_{21} = (-1)^{2+1}(-1) = 1; \quad \Delta_{11} = (-1)^{1+1}(p) = p.$$

Союзная матрица:

$$(p\mathbf{E} - \mathbf{A})^+ = \begin{bmatrix} \Delta_{11} & \Delta_{21} \\ \Delta_{12} & \Delta_{22} \end{bmatrix}.$$

Перемножим матрицы, стоящие в числителе формулы для ПФ:

$$\mathbf{C}(p\mathbf{E} - \mathbf{A})^+ \mathbf{B} = [1 \quad 0] \begin{bmatrix} \Delta_{11} & \Delta_{21} \\ \Delta_{12} & \Delta_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1361 \end{bmatrix} = [\Delta_{11} \quad \Delta_{21}] \begin{bmatrix} 0 \\ 1361 \end{bmatrix} = 1361 \Delta_{21} = 1361.$$

Определитель матрицы  $(p\mathbf{E} - \mathbf{A})$ :

$$\det(p\mathbf{E} - \mathbf{A}) = \begin{vmatrix} p + 152,8 & -1 \\ 3751 & p \end{vmatrix} = p^2 + 152,8p + 3751.$$

Передаточная функция ДПТ:

$$W(p) = \frac{\mathbf{C}(p\mathbf{E} - \mathbf{A})^+ \mathbf{B}}{\det(p\mathbf{E} - \mathbf{A})} + D = \frac{1361}{p^2 + 152,8p + 3751}.$$

В этом примере нам понадобилось только алгебраическое дополнение  $\Delta_{21}$ .

**Домашнее задание.**

Задана электрическая схема (рис. 1.3) и параметры элементов, таблица 1.1. Задана SS модель схемы в виде уравнений состояния и уравнения выхода. В качестве переменных состояния выбраны напряжение на

емкости и ток в индуктивности, обозначенные через  $x_1$  и  $x_2$  соответственно.

Требуется:

- 1) составить уравнения состояния для заданной схемы и сравнить их с приведенными в задании уравнениями;
- 2) записать матрицы модели, по ним найти передаточную функцию по напряжению на емкости или по току в индуктивности, создать в MATLAB SS и TF модели;
- 3) по ПФ записать ДУ;
- 4) по ПФ записать SS модели в КФУ и КФН и по этим моделям опять получить передаточные функции;
- 5) создать в MatLab две SS модели в канонических формах (управляемости и наблюдаемости) и по ним получить передаточные функции;
- 6) составить ZPK модель по передаточной функции, найдя предварительно ее нули и полюса.
- 7) построить на одном рисунке три переходные характеристики: с помощью ПФ и двух SS моделей – обычной и одной из канонических (смотри пример выполнения домашнего задания).

Входная величина – напряжение на зажимах схемы, выходная – напряжение на емкости или ток в индуктивности (в зависимости от вида матрицы  $C$ ).

Таблица 1.1. Таблица параметров

Параметры	ВАРИАНТЫ									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$R_1$ , Ом	5	12	10	20	18	12	8	14	10	12
$R_2$ , Ом	12	5	12,5	10	15	10	10	18	15	15
$R_3$ , Ом	15	20	5	12,5	12,5	20	15	15	20	10
$R_n$ , Ом	20	10	15	5	20	12	22	10	22	25
$L$ , Гн	0,08	0,1	0,12	0,14	0,16	0,18	0,2	0,15	0,17	0,19
$C_k$ , мкФ	10	45	20	55	35	15	50	25	40	30

**Примечание.** Номер варианта задается двузначным числом (две последние цифры номера зачетной книжки). Первая цифра этого числа – номер варианта в таблице параметров, вторая цифра – номер схемы. В программе Matlab при введении значения емкости букву  $C$  нужно снабжать индексом, например, набирать  $C_k$ , т.к. латинская буква  $C$  зарезервирована для матрицы схода  $C$ .

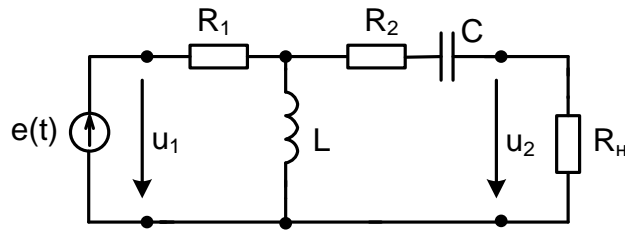


Схема 0

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = -\frac{1}{C(R_i + R_1 + R_2)}x_1 - \frac{R_1}{C(R_i + R_1 + R_2)}x_2 + \frac{1}{C(R_i + R_1 + R_2)}u; \\ \frac{dx_2}{dt} = \frac{R_1}{L(R_i + R_1 + R_2)}x_1 - \frac{(R_i + R_2)R_1}{L(R_i + R_1 + R_2)}x_2 + \frac{R_i + R_2}{L(R_i + R_1 + R_2)}u. \end{cases}$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot u$$

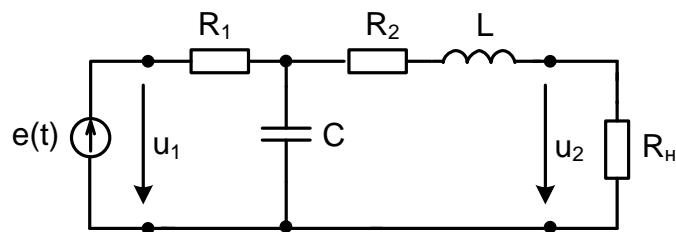


Схема 1

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = -\frac{1}{CR_1}x_1 - \frac{1}{C}x_2 + \frac{1}{CR_1}u; \\ \frac{dx_2}{dt} = \frac{1}{L}x_1 - \frac{R_2 + R_i}{L}x_2. \end{cases}$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot u$$

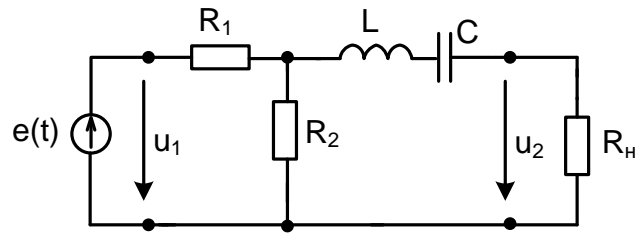


Схема 2

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{C} x_2; \\ \frac{dx_2}{dt} = \frac{1}{L} x_1 - \frac{R_1 R_i + R_2 R_i + R_1 R_2}{L(R_1 + R_2)} x_2 + \frac{R_2}{L(R_1 + R_2)} u. \end{cases}$$

$$y = [1 \quad 0] \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot u$$

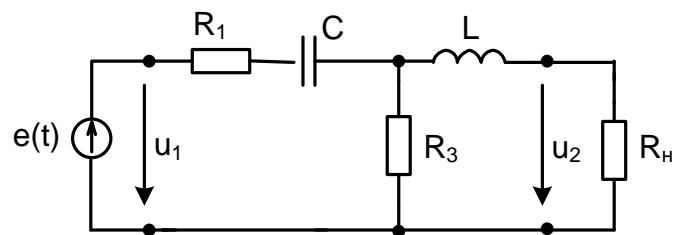


Схема 3

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = -\frac{1}{C(R_1 + R_3)} x_1 + \frac{R_3}{C(R_1 + R_3)} x_2 + \frac{1}{C(R_1 + R_3)} u; \\ \frac{dx_2}{dt} = -\frac{R_3}{L(R_1 + R_3)} x_1 - \frac{R_1 R_3 + R_1 R_i + R_i R_3}{L(R_1 + R_3)} x_2 + \frac{R_3}{L(R_1 + R_3)} u. \end{cases}$$

$$y = [0 \quad 1] \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot u$$

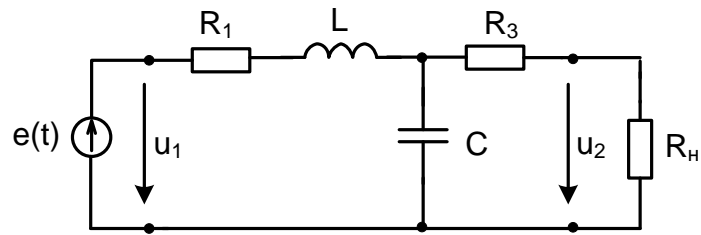


Схема 4

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = -\frac{1}{C(R_3 + R_i)}x_1 + \frac{1}{C}x_2; \\ \frac{dx_2}{dt} = -\frac{1}{L}x_1 - \frac{R_1}{L}x_2 + \frac{1}{L}u. \end{cases} \quad \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot u$$


---

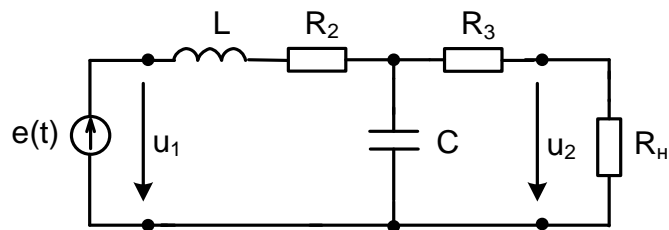


Схема 5

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = -\frac{1}{C(R_3 + R_i)}x_1 + \frac{1}{C}x_2; \\ \frac{dx_2}{dt} = -\frac{1}{L}x_1 - \frac{R_2}{L}x_2 + \frac{1}{L}u. \end{cases}$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot u$$

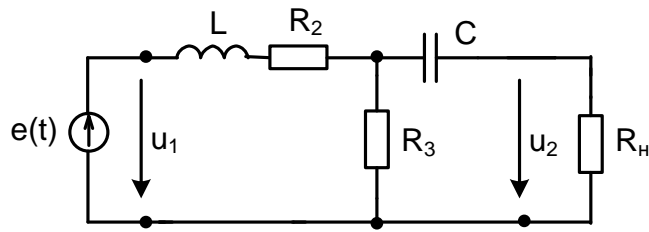


Схема 6

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = -\frac{1}{C(R_3 + R_i)} x_1 + \frac{R_3}{C(R_3 + R_i)} x_2; \\ \frac{dx_2}{dt} = -\frac{R_3}{L(R_3 + R_i)} x_1 - \frac{R_2 R_3 + R_2 R_i + R_3 R_i}{L(R_3 + R_i)} x_2 + \frac{1}{L} u. \end{cases}$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot u$$

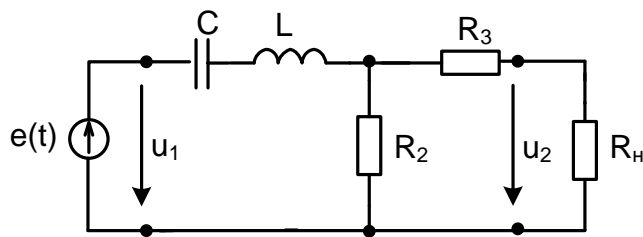


Схема 7

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = \frac{1}{C} x_2; \\ x_2 = -\frac{1}{L} x_1 - \frac{R_{\text{yêâ}}}{L} x_2 + \frac{1}{L} u, \end{cases} \quad \text{где} \quad R_{\text{yêâ}} = \frac{R_2(R_3 + R_i)}{R_2 + R_3 + R_i}.$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot u$$

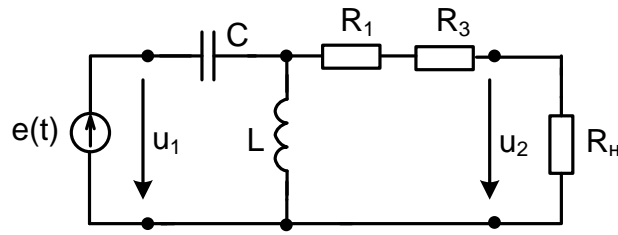


Схема 8

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = -\frac{1}{C(R_1 + R_3 + R_f)}x_1 + \frac{1}{C}x_2 + \frac{1}{C(R_1 + R_3 + R_f)}u; \\ \frac{dx_2}{dt} = -\frac{1}{L}x_1 - \frac{(R + R_1)R_2}{L(R_1 + R_3 + R_f)}x_2 + \frac{1}{L}u. \end{cases}$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot u$$

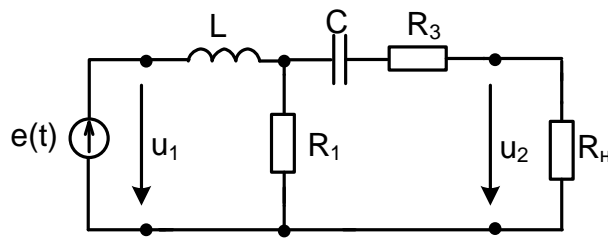


Схема 9

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = -\frac{1}{C(R_1 + R_3 + R_f)}x_1 + \frac{R_1}{C(R_1 + R_3 + R_f)}x_2; \\ \frac{dx_2}{dt} = -\frac{R_1}{L(R_1 + R_3 + R_f)}x_1 - \frac{(R_f + R_3)R_1}{L(R_1 + R_3 + R_f)}x_2 + \frac{1}{L}u. \end{cases}$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot u$$

Рис. 1.3. Электрические схемы, уравнения состояния и уравнения выхода (в принятой в ТАУ форме записи) для выполнения домашнего задания

### Пример выполнения домашнего задания

Дана электрическая схема и параметры ее элементов. В отличие от вариантов заданий, приведенных выше, SS модель схемы не известна, и ее необходимо получить. Далее, требуется найти передаточную функцию, связывающую напряжение на емкости с входным напряжением, и запи-



сать соответствующее ДУ. По ДУ составить SS модель и по ней опять получить передаточную функцию. Естественно, выражения для ПФ, полученные из различных SS моделей, должны совпасть. Затем создать в MatLab SS модели и по ним получить передаточные функции. Построить переходные характеристики для полученных моделей.

*Исходные данные:*

$$R_1 = 4 \text{ Ом}; R_2 = 2 \text{ Ом}; R_3 = 40 \text{ Ом}; C = 2 \cdot 10^{-4} = 10^{-4} \text{ Ф}; L = 0,02 \text{ Гн}.$$

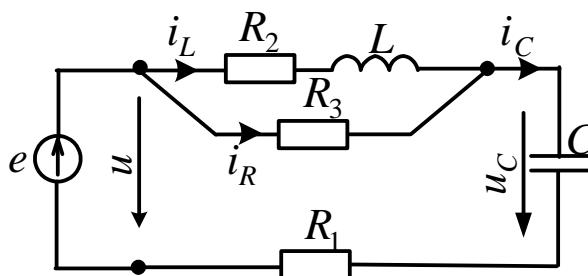


Рис. 1.4. Схема к примеру

**Решение.**

1). Составить уравнения состояния для заданной схемы.

Для анализа процессов в электрической цепи используется ее расчетная модель в виде схемы замещения, состоящей из идеализированных двухполюсников. Математической основой такой схемы является система уравнений электрического равновесия, записанных по законам Кирхгофа для мгновенных значений. Для построения схем замещения используются пять идеализированных двухполюсных схемных элементов, два из которых являются активными двухполюсниками – источник напряжения и источник тока, три – пассивными двухполюсниками: сопротивление  $R$ , индуктивность  $L$  и емкость  $C$ . Каждый пассивный элемент схемы отражает только одну существенную особенность электромагнитных процессов, имеющих место в реальных элементах электрических цепей и электротехнических устройств.

**Резистивный элемент (сопротивление)** – идеализированный пассивный элемент, в котором электрическая энергия необратимо преобразуется в другие виды энергии, например в тепловую, световую или механическую энергию. Параметром резистора является его сопротивление, измеряемое в *омах* (Ом).

**Индуктивный элемент (индуктивность)** – идеализированный схемный элемент, в котором происходит запасание только энергии магнитного поля. Количественно способность реального и идеального элементов запасать *энергию магнитного поля* характеризуется параметром, который называется индуктивностью. Индуктивность  $L$  измеряется в *генри* (Гн) и для линейной индуктивной катушки является коэффициентом пропорциональности между потокосцеплением и током.

**Емкостный элемент (емкость)** – идеализированный схемный элемент, в котором происходит запасание только энергии электрического поля. Количественно способность реального и идеального элементов запасать энергию электрического поля характеризуется параметром, который называется емкостью. Емкость  $C$  измеряется в *фарадах* (Ф) и для линейного элемента является коэффициентом пропорциональности между зарядом конденсатора и напряжением на его зажимах.

Для удобства дальнейшего описания процессов в схемах замещения электрических цепей приведем на одном рисунке все пассивные идеализированные элементы – сопротивление, индуктивность, емкость и их компонентные уравнения, т.е. зависимости между напряжениями и токами (рис. 1.5):

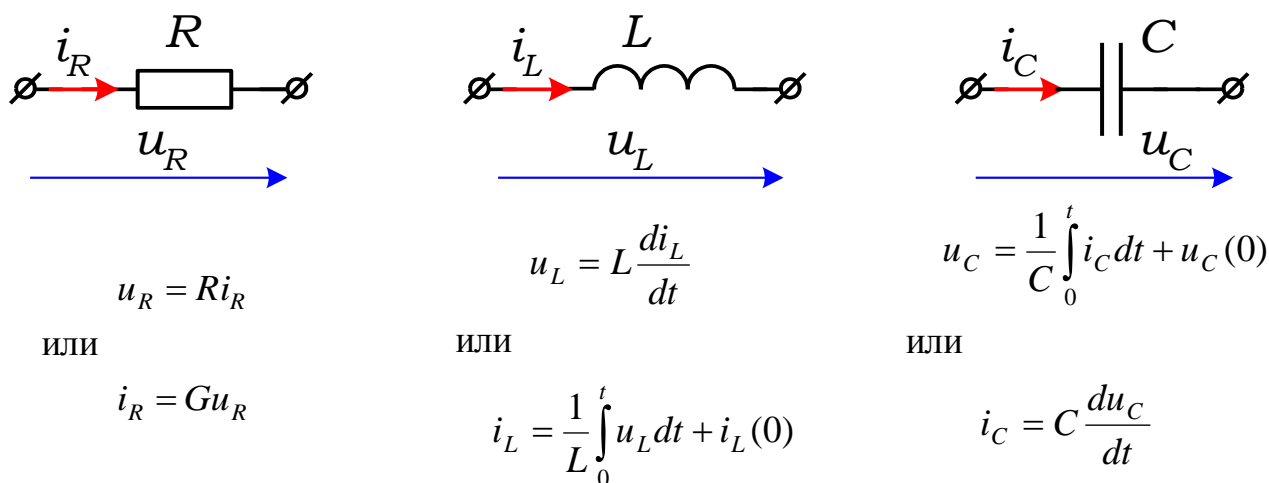


Рис. 1.5. Схемные элементы и их компонентные уравнения

Для получения математической модели цепи на базе схемы замещения для мгновенных значений, т.е. для составления уравнений электрического равновесия, которые описывают поведение цепи, используются законы Кирхгофа для мгновенных значений, называемые законами электрических цепей.

**Первый закон Кирхгофа:** в любом узле электрической схемы алгебраическая сумма мгновенных токов равна нулю:

$$\sum i(t) = 0.$$

**Правило знаков:** всем токам, одинаково ориентированным относительно узла, приписывается одинаковый знак; условимся токи, *отходящие* от узла, брать *со знаком плюс*, а токи, *подходящие* к узлу, – *со знаком минус*. Первый закон Кирхгофа можно сформулировать и так: сумма мгновенных токов, направленных к узлу, равна сумме мгновенных токов, направленных от этого узла.

**Второй закон Кирхгофа:** в любом контуре электрической схемы в любой момент времени алгебраическая сумма мгновенных напряжений на всех элементах контура равна алгебраической сумме мгновенных ЭДС:

$$\sum u(t) = \sum e(t).$$

**Правило знаков:** напряжения на элементах контура в левой части и ЭДС источников в правой части входят в соответствующее уравнение со знаком плюс, если их направления совпадают с произвольно выбранным направлением обхода контура. В противном случае напряжения и ЭДС в уравнении берутся со знаком минус. Напомним, что стрелки для положительных направлений напряжений на пассивных двухполюсниках можно не ставить – достаточно указать положительные направления токов в них, так как направления тока и напряжения на пассивном двухполюснике совпадают.

Если учитывать не ЭДС, а напряжение на зажимах источника ЭДС, то уравнения по второму закону Кирхгофа можно записывать для напряжений: *в любом контуре электрической схемы алгебраическая сумма мгновенных напряжений всех ветвей в каждый момент времени равна нулю:*

$$\sum u_k(t) = 0.$$

Правило знаков сохраняется и в данном случае.

Уравнения электрического равновесия, составленные по законам Кирхгофа, представляют собой в общем случае систему интегродифференциальных уравнений. Эта система уравнений может быть сведена к одному дифференциальному уравнению  $n$ -го порядка относительно любого из неизвестных токов или напряжений, называемому **дифференциальным уравнением цепи**, или к системе  $n$  уравнений 1-го порядка, составленных для переменных состояния. В качестве таких переменных выбираются, как правило, напряжения на емкостях и токи в индуктивностях, которые определяют запас энергии электрического и магнитного полей реактивных элементов, т.е. состояние цепи в любой момент времени.

Энергия, запасенная в индуктивности в произвольный момент времени, является неотрицательной величиной и определяется только мгновенным значением тока:

$$w_L(t) = \frac{L \cdot i_L^2(t)}{2}.$$

Энергия, запасенная в емкости в произвольный момент времени, является неотрицательной величиной и определяется только мгновенным значением напряжения на емкости:

$$w_C(t) = \frac{Cu_C^2(t)}{2}.$$

Оставим для схемы примера уравнения состояния с использованием законов Кирхгофа для мгновенных значений:

$$\begin{cases} i_C = i_R + i_L; \\ L \frac{di_L}{dt} + R_2 i_L + u_C + R_1 i_C = u; \\ R_3 i_R + u_C + R_1 i_C = u. \end{cases}$$

Выражение для тока  $i_R = i_C - i_L$  подставим в третье уравнение и учтем соотношение  $i_C = C \frac{du_C}{dt}$ :

$$R_3(i_C - i_L) + u_C + R_1 i_C = u;$$

$$(R_1 + R_3)i_C - R_3 i_L + u_C = u;$$

$$C(R_1 + R_3) \frac{du_C}{dt} = -u_C + R_3 i_L + u.$$

Теперь запишем первое уравнение состояния:

$$\frac{du_C}{dt} = -\frac{1}{C(R_1 + R_3)} u_C + \frac{R_3}{C(R_1 + R_3)} i_L + \frac{1}{C(R_1 + R_3)} u.$$

Во второе уравнение подставим соотношение  $i_C = C \frac{du_C}{dt}$  и учтем первое уравнение состояния:

$$L \frac{di_L}{dt} + R_2 i_L + u_C + R_1 C \frac{du_C}{dt} = u;$$

$$L \frac{di_L}{dt} + R_2 i_L + u_C + R_1 C \left[ -\frac{1}{C(R_1 + R_3)} u_C + \frac{R_3}{C(R_1 + R_3)} i_L + \frac{1}{C(R_1 + R_3)} u \right] = u;$$

$$L \frac{di_L}{dt} + R_2 i_L + u_C - \frac{R_1}{R_1 + R_3} u_C + \frac{R_1 R_3}{R_1 + R_3} i_L = u - \frac{R_1}{R_1 + R_3} u;$$

$$L \frac{di_L}{dt} + \frac{R_1 R_3 + R_1 R_2 + R_2 R_3}{R_1 + R_3} i_L + \frac{R_3}{R_1 + R_3} u_C = \frac{R_3}{R_1 + R_3} u.$$

Из последнего уравнения получаем второе уравнение состояния:

$$\frac{di_L}{dt} = -\frac{R_3}{L(R_1 + R_3)} u_C - \frac{R_1 R_3 + R_1 R_2 + R_2 R_3}{L(R_1 + R_3)} i_L + \frac{R_3}{L(R_1 + R_3)} u.$$

Объединяя уравнения состояния и записывая уравнение выхода (выходной величиной является напряжение на емкости), получаем модель в пространстве состояний:

$$\begin{cases} \frac{du_C}{dt} = -\frac{1}{C(R_1 + R_3)}u_C + \frac{R_3}{C(R_1 + R_3)}i_L + \frac{1}{C(R_1 + R_3)}u; \\ \frac{di_L}{dt} = -\frac{R_3}{L(R_1 + R_3)}u_C - \frac{R_1R_3 + R_1R_2 + R_2R_3}{L(R_1 + R_3)}i_L + \frac{R_3}{L(R_1 + R_3)}u; \\ u_C = [1 \quad 0] \cdot \begin{bmatrix} u_C \\ i_L \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot u \end{cases}$$

2). Записать матрицы модели, по ним найти передаточную функцию по напряжению на емкости.

Введем для переменных состояния и выходной величины следующие обозначения:

$$x_1 = u_C; \quad x_2 = i_L; \quad y = u_C.$$

Тогда SS модель примет вид:

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + b_1u; \\ \frac{dx_2}{dt} = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + b_2u; \end{cases}$$

$$y = [1 \quad 0] \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot u.$$

Или

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu},$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{Cx} + \mathbf{Du}.$$

(1.52)

Вычислим коэффициенты уравнений состояния:

$$a_{11} = -\frac{1}{C(R_1 + R_3)} = -\frac{1}{2 \cdot 10^{-4}(4 + 40)} = -113,6;$$

$$a_{12} = \frac{R_3}{C(R_1 + R_3)} = \frac{40}{2 \cdot 10^{-4}(4 + 40)} = 4545;$$

$$a_{21} = -\frac{R_3}{L(R_1 + R_3)} = -\frac{40}{0,02 \cdot (4 + 40)} = -45,5;$$

$$a_{22} = -\frac{R_1 R_3 + R_1 R_2 + R_2 R_3}{L(R_1 + R_3)} = -\frac{4 \cdot 40 + 4 \cdot 2 + 2 \cdot 40}{0,02 \cdot (4 + 40)} = -281,8;$$

$$b_1 = \frac{1}{C(R_1 + R_3)} = \frac{1}{2 \cdot 10^{-4}(4 + 40)} = 113,6;$$

$$b_2 = \frac{R_3}{L(R_1 + R_3)} = \frac{40}{0,02 \cdot (4 + 40)} = 45,5.$$

Запишем матрицы уравнений состояния:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -113,6 & 4545 \\ -45,5 & -281,8 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 113,6 \\ 45,5 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{C} = [1 \quad 0]; \quad \mathbf{D} = 0.$$

Сформируем ПФ.

Составим матрицу  $(p\mathbf{E} - \mathbf{A})$ :

$$(p\mathbf{E} - \mathbf{A}) = \begin{bmatrix} p + 113,6 & -4545 \\ 45,5 & p + 281,8 \end{bmatrix}.$$

Найдем алгебраические дополнения полученной матрицы:

$$\Delta_{11} = p + 281,8; \quad \Delta_{12} = -45,5; \quad \Delta_{21} = 4545; \quad \Delta_{22} = p + 113,6.$$

Союзная матрица:

$$(p\mathbf{E} - \mathbf{A})^+ = \begin{bmatrix} \Delta_{11} & \Delta_{21} \\ \Delta_{12} & \Delta_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p + 281,8 & 4545 \\ -45,5 & p + 113,6 \end{bmatrix}.$$

Перемножим матрицы, стоящие в числителе формулы для ПФ:

$$\begin{aligned} \mathbf{C}(p\mathbf{E} - \mathbf{A})^+ \mathbf{B} &= [1 \quad 0] \begin{bmatrix} p + 281,8 & 4545 \\ -45,5 & p + 113,6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 113,6 \\ 45,5 \end{bmatrix} = \\ &= [p + 281,8 \quad 4545] \begin{bmatrix} 113,6 \\ 45,5 \end{bmatrix} = (p + 281,8) \cdot 113,6 + 4545 \cdot 45,5 = 113,6p + 2,386 \cdot 10^5. \end{aligned}$$

Определитель матрицы  $(p\mathbf{E} - \mathbf{A})$ :

$$\det(p\mathbf{E} - \mathbf{A}) = \begin{vmatrix} p + 281,8 & 4545 \\ -45,5 & p + 113,6 \end{vmatrix} = p^2 + 396p + 2,386 \cdot 10^5.$$

Передаточная функция цепи:

$$W(p) = \frac{\mathbf{C}(p\mathbf{E} - \mathbf{A})^+ \mathbf{B}}{\det(p\mathbf{E} - \mathbf{A})} + D = \frac{113,6p + 2,386 \cdot 10^5}{p^2 + 396p + 2,386 \cdot 10^5}.$$

Создадим в MATLAB SS модель и TF модель.

```
clc;
```

```

% Исходные данные
R1=4; R2=2;R3=40;L=0.02;C=200e-6;R13=R1+R3;
% Коэффициенты матриц
a11=-1/(C*R13);a12=R3/(C*R13);b1=1/(C*R13);
a21=-R3/(L*R13);a22=-(R3*R1+R1*R2+R2*R3)/(L*R13);
b2=R3/(L*R13);
% Матрицы SS модели
A=[a11 a12;a21 a22];B=[b1;b2];C=[1 0];D=0;
% SS модель
Hss=ss(A,B,C,D);
% TF модель
W=tf(Hss)
>> Transfer function:
      113.6 s + 2.386e005
-----
      s^2 + 395.5 s + 2.386e005

```

3) По ПФ записать ДУ.

Поскольку передаточная функция – это отношение операторных изображений выхода и входа, т.е

$$W(p) = \frac{Y(p)}{U(p)} \quad \text{или} \quad \frac{Y(p)}{U(p)} = \frac{113,6p + 2,386 \cdot 10^5}{p^2 + 396p + 2,386 \cdot 10^5},$$

запишем сначала по ней операторное уравнение

$$p^2 Y(p) + 396p Y(p) + 2,386 \cdot 10^5 Y(p) = 113,6p U(p) + 2,386 \cdot 10^5 U(p),$$

а затем по нему уже ДУ:

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + 396 \cdot \frac{dy}{dt} + 2,386 \cdot 10^5 y = 113,6 \frac{du}{dt} + 2,386 \cdot 10^5 u .$$

4) По ПФ записать матрицы SS модели в КФУ и КФН и по этим матрицам опять получить передаточные функции.

### 1. Каноническая форма управляемости.

а) Запись матриц SS модели в КФУ.

Используя передаточную функцию  $W(p)$ , составим модель:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2,386 \cdot 10^5 & -396 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad C = [2,386 \cdot 10^5 \quad 113,6]; \quad D = 0.$$

б) Определение ПФ по матрицам SS модели в КФУ.

Составим матрицу  $(pE - A)$ :

$$(p\mathbf{E} - \mathbf{A}) = \begin{bmatrix} p & -1 \\ 2,386 \cdot 10^5 & p + 396 \end{bmatrix}.$$

Найдем алгебраические дополнения полученной матрицы:

$$\Delta_{11} = p + 396; \quad \Delta_{12} = -2,386 \cdot 10^5; \quad \Delta_{21} = 1; \quad \Delta_{22} = p.$$

Союзная матрица:

$$(p\mathbf{E} - \mathbf{A})^+ = \begin{bmatrix} \Delta_{11} & \Delta_{21} \\ \Delta_{12} & \Delta_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p + 396 & 1 \\ -2,386 \cdot 10^5 & p \end{bmatrix}.$$

Перемножим матрицы, стоящие в числителе формулы для ПФ:

$$\begin{aligned} \mathbf{C}(p\mathbf{E} - \mathbf{A})^+ \mathbf{B} &= \begin{bmatrix} 2,386 \cdot 10^5 & 113,6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p + 396 & 1 \\ -2,386 \cdot 10^5 & p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 2,386 \cdot 10^5 & 113,6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ p \end{bmatrix} = 2,386 \cdot 10^5 + 113,6p. \end{aligned}$$

Определитель матрицы  $(p\mathbf{E} - \mathbf{A})$ :

$$\det(p\mathbf{E} - \mathbf{A}) = \begin{vmatrix} p & -1 \\ 2,386 \cdot 10^5 & p + 396 \end{vmatrix} = p^2 + 396p + 2,386 \cdot 10^5.$$

Передаточная функция цепи:

$$W(p) = \frac{\mathbf{C}(p\mathbf{E} - \mathbf{A})^+ \mathbf{B}}{\det(p\mathbf{E} - \mathbf{A})} + D = \frac{113,6p + 2,386 \cdot 10^5}{p^2 + 396p + 2,386 \cdot 10^5}.$$

с). Создание SS и TF моделей в MATLAB

Каноническая форма управляемости SS и TF модели:

```
% Матрицы SS модели в канонической форме управляемости
```

```
A=[0 1; -238600 -396]
```

```
B=[0; 1]
```

```
C=[238600 113.6]
```

```
D=[0]
```

```
% SS модель в канонической форме управляемости
```

```
Gss=ss(A,B,C,D)
```

```
% Модель TF
```

```
>> Transfer function:
```

```
113.6 s + 2.386e005
```

```
-----  
s^2 + 395.5 s + 2.386e005
```

## 2. Каноническая форма наблюдаемости.



а). Запись матриц SS модели в КФН.

Используя передаточную функцию  $W(p)$ , составим модель:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -396 & 1 \\ -2,386 \cdot 10^5 & 0 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 113,6 \\ 2,386 \cdot 10^5 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{C} = [1 \quad 0]; \quad \mathbf{D} = 0.$$

б). Определение ПФ по матрицам SS модели в КФН.

Составим матрицу  $(p\mathbf{E}-\mathbf{A})$ :

$$(p\mathbf{E} - \mathbf{A}) = \begin{bmatrix} p + 396 & -1 \\ 2,386 \cdot 10^5 & p \end{bmatrix}.$$

Найдем алгебраические дополнения полученной матрицы:

$$\Delta_{11} = p; \quad \Delta_{12} = -2,386 \cdot 10^5; \quad \Delta_{21} = 1; \quad \Delta_{22} = p + 396.$$

Союзная матрица:

$$(p\mathbf{E} - \mathbf{A})^+ = \begin{bmatrix} \Delta_{11} & \Delta_{21} \\ \Delta_{12} & \Delta_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p & 1 \\ -2,386 \cdot 10^5 & p + 396 \end{bmatrix}.$$

Перемножим матрицы, стоящие в числителе формулы для ПФ:

$$\begin{aligned} \mathbf{C}(p\mathbf{E} - \mathbf{A})^+ \mathbf{B} &= [1 \quad 0] \begin{bmatrix} p & 1 \\ -2,386 \cdot 10^5 & p + 396 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 113,6 \\ 2,386 \cdot 10^5 \end{bmatrix} = \\ &= [p \quad 1] \begin{bmatrix} 113,6 \\ 2,386 \cdot 10^5 \end{bmatrix} = 113,6p + 2,386 \cdot 10^5. \end{aligned}$$

Определитель матрицы  $(p\mathbf{E}-\mathbf{A})$ :

$$\det(p\mathbf{E} - \mathbf{A}) = \begin{vmatrix} p + 396 & 1 \\ -2,386 \cdot 10^5 & p \end{vmatrix} = p^2 + 396p + 2,386 \cdot 10^5.$$

Передаточная функция цепи:

$$W(p) = \frac{\mathbf{C}(p\mathbf{E} - \mathbf{A})^+ \mathbf{B}}{\det(p\mathbf{E} - \mathbf{A})} + D = \frac{113,6p + 2,386 \cdot 10^5}{p^2 + 396p + 2,386 \cdot 10^5}.$$

Итак, одной и той же передаточной функции соответствуют различные модели в пространстве состояний.

5). Создать в MatLab две SS модели в канонических формах (управляемости и наблюдаемости) и по ним получить передаточные функции.

Каноническая форма управляемости – SS и TF модели:

`% Матрицы SS модели в канонической форме управляемости`

```

A=[0 1; -238600 -396]
B=[0; 1]
C=[238600 113.6]
D=[0]
% SS модель в канонической форме управляемости
Gss=ss(A,B,C,D)
% Модель TF
>> Transfer function:
    113.6 s + 2.386e005
-----
s^2 + 395.5 s + 2.386e005
Каноническая форма наблюдаемости – SS и TF модели:
% Матрицы SS модели в канонической форме наблюдаемо-
сти
A=[-396 1; -238600 0]
B=[113.6; 2.386e005]
C=[1 0]
D=[0]
% SS модель в канонической форме управляемости
Gss=ss(A,B,C,D)
% Модель TF
>> Transfer function:
    113.6 s + 2.386e005
-----
s^2 + 395.5 s + 2.386e005

```

б). Составить ZPK модель по передаточной функции, найдя предварительно ее нули и полюса.

Передаточная функция цепи:

$$W(p) = \frac{113,6p + 2,386 \cdot 10^5}{p^2 + 396p + 2,386 \cdot 10^5} = 113,6 \cdot \frac{p + 2100}{p^2 + 396p + 2,386 \cdot 10^5}.$$

Числитель имеет один корень (нуль):

$$z_1 = -2100.$$

Знаменатель имеет два корня (два полюса):

$$p_{1,2} = -\frac{396}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{396}{2}\right)^2 - 2,386 \cdot 10^5} = -198 \pm j446,5;$$

$$p_1 = -198 + j446,5; \quad p_2 = -198 - j446,5.$$

Поэтому ZPK модель принимает вид:

$$W(p) = K \cdot \frac{p - z_1}{(p - p_1)(p - p_2)} = 113,6 \cdot \frac{p + 2100}{(p + 198 - j446,5)(p + 198 + j446,5)}.$$

7). Построить на одном рисунке три переходные характеристики: с помощью ПФ и двух SS моделей – обычной и одной из канонических.

Построим переходные характеристики – реакцию на единичное напряжение с помощью полученных моделей.

```
step(Hss,W,Gss),grid  
title('Передаточная функция')  
xlabel('t'),ylabel('h(t)')
```

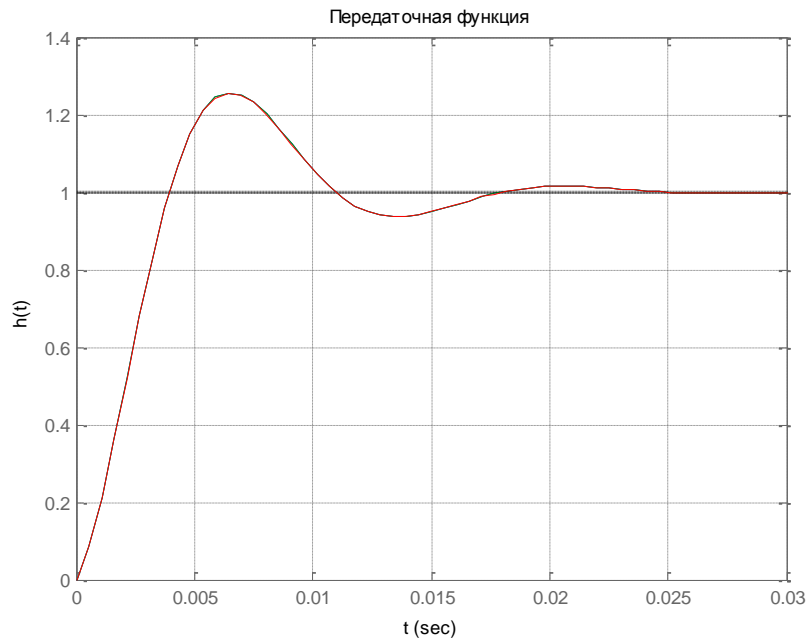


Рис. 1.5. Переходные характеристики

Таким образом, переходные характеристики, построенные для одной и той системы, но по разным ее моделям, полностью совпадают. На рис. 1.5 три кривые выглядят как одна.

## Практическое занятие 2 СОСТАВЛЕНИЕ МОДЕЛЕЙ ОДНОМЕРНОЙ СИСТЕМЫ В ПРОСТРАНСТВЕ СОСТОЯНИЙ МЕТОДАМИ ПРЯМОГО, ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОГО И ПАРАЛЛЕЛЬНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Ранее было показано, как можно получить ПФ системы, используя дифференциальное уравнение или модель в пространстве состояний (SS модель). Теперь рассмотрим методы получения уравнений состояния по ПФ системы. Эти методы основаны на использовании схем моделирования, т.е. структурных схем.

Элементами таких схем являются:

- символьные обозначения сигналов  $x(t)$ ,  $u(t)$ ,  $y(t)$  и т.д.;
- символьные обозначения операторов, например  $W(p)$ ;
- графические обозначения – линии связи и стрелки, указывающие направления действия сигналов (рис. 2.1, а);
- узлы, соответствующие разветвлениям сигналов (рис. 2.1, б);
- блоки с указанием операторов преобразования, входных и выходных сигналов (рис. 2.1, в).

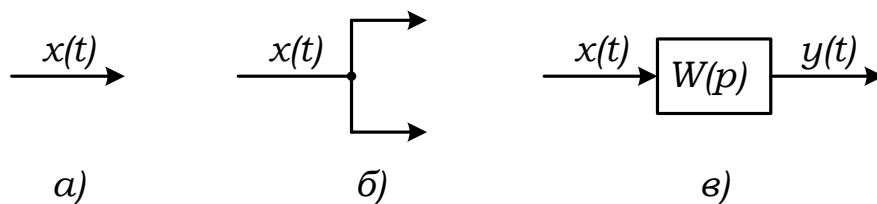


Рис. 2.1. Элементы структурных схем

Блок, для которого установлены причинно-следственным отношением входные и выходные сигналы, называется *кибернетическим блоком*. Выходной сигнал блока несет информацию о внутреннем процессе, причиной которого является входной сигнал.

К простейшим блокам, использующимся в структурных схемах, относятся, в частности:

- блок сравнения (рис. 2.2, а);
- алгебраический сумматор (рис. 2.2, б);
- пропорциональное звено  $y(t)=kx(t)$  (рис. 2.2, в);
- интегратор (рис. 2.2, г).

Основным элементом схем моделирования является интегратор. Этот блок осуществляет интегрирование по времени входного сигнала, т.е. характеризуется уравнением

$$y(t) = \int_0^t x(\tau) d\tau, \quad (2.1)$$

которое в операторной форме принимает вид:

$$Y(p) = \frac{1}{p} X(p). \quad (2.2)$$

Следовательно, ПФ блока, выполняющего операцию интегрирования, имеет вид:

$$W(p) = \frac{Y(p)}{X(p)} = \frac{1}{p}. \quad (2.3)$$

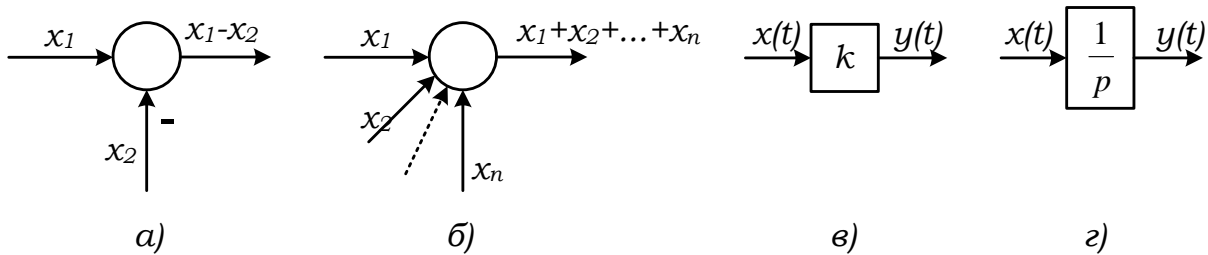


Рис. 2.2. Простейшие блоки структурных схем

Если на выходе интегратора действует сигнал  $y(t)$ , то на его входе – производная этого сигнала  $\frac{dy}{dt}$ . Если последовательно соединить два интегратора, то на входе соединения будет вторая производная выходного сигнала, рис. 2.3:

$$\ddot{y}(t) = \frac{d^2 y}{dt^2}. \quad (2.4)$$

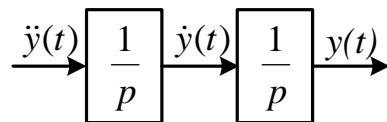


Рис. 2.3. Цепочка из двух интеграторов

Такую цепочку из двух интеграторов можно, например, использовать для построения схем моделирования систем 2-го порядка.

Рассмотрим несколько примеров построения схем моделирования, располагая различными моделями: в пространстве состояний, передаточной функцией и дифференциальным уравнением  $n$ -го порядка.

**Пример 2.1.** Задана модель в пространстве состояний двигателя постоянного тока (см. пример 1.2):

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2; \\ \dot{x}_2 = -3751x_1 - 152,8x_2 + 1361u_a; \\ y = x_1. \end{cases}$$

Требуется составить схему моделирования.

В приведенной модели в качестве переменных состояния выбраны выходная величина (угловая скорость двигателя) и ее первая производная, т.е. скорость изменения выходной величины. Такие величины называют *переменными состояния нормальной формы*. В схеме моделирования два интегратора включены последовательно, причем на выходе правого интегратора действует переменная состояния  $x_1$ , на выходе левого – переменная состояния  $x_2$ . Согласно второму УС, на вход левого интегратора подается взвешенная сумма переменных состояния и управляющего воздействия.

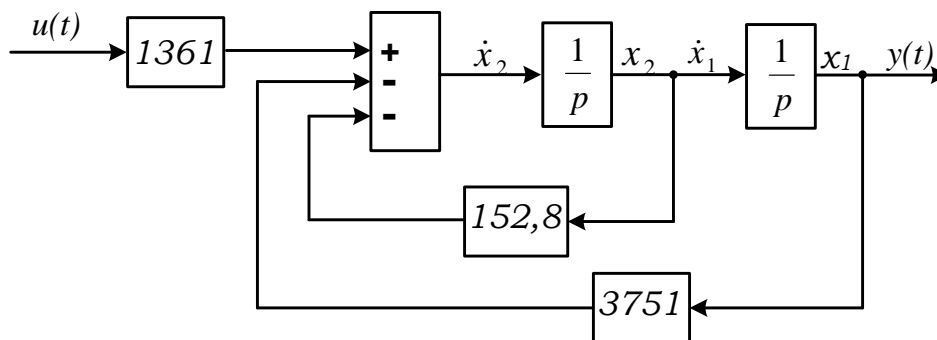


Рис. 2.4. Схема моделирования к примеру 2.1

**Пример 2.2.** Требуется составить схему моделирования звена первого порядка, заданного в виде ПФ

$$W(p) = \frac{k}{Tp + 1} \quad \text{или} \quad W(p) = \frac{k/T}{p + 1/T}.$$

ПФ звена можно представить в виде произведения двух ПФ:

$$W(p) = \frac{1}{p + 1/T} \cdot k/T = W_1(p)W_2(p)$$

Составим структурную схему с последовательным соединением звеньев:

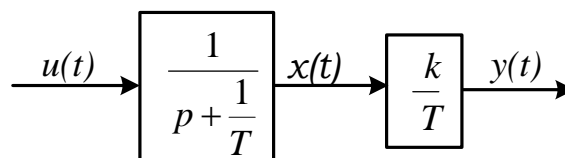


Рис. 2.5. Структурная схема к примеру 2.2

Обозначим сигнал на выходе первого (левого) звена переменной состояния  $x(t)$ . Так как  $W_1(p) = \frac{1}{p + 1/T} = \frac{X(p)}{U(p)}$ , можно записать операторное уравнение для первого звена

$$pX(p) + \frac{1}{T}X(p) = U(p) \text{ или } pX(p) = U(p) - \frac{1}{T}X(p).$$

Система уравнений для соединения в целом:

$$\begin{cases} \dot{x} = -\frac{1}{T}x + u; \\ y = \frac{k}{T}x. \end{cases}$$

Схема моделирования представлена на рис. 2.6.

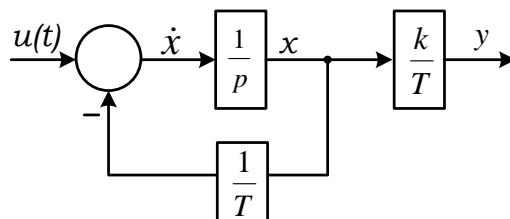


Рис. 2.6. Схема моделирования к примеру 2.2

**Пример 2.3.** Составить схему моделирования системы, описываемой уравнениями состояния и уравнением выхода:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -100x_1 + x_2 - 100u; \\ \dot{x}_2 = -20000x_1; \\ y = x_1 + u. \end{cases}$$

По модели составим схему моделирования:

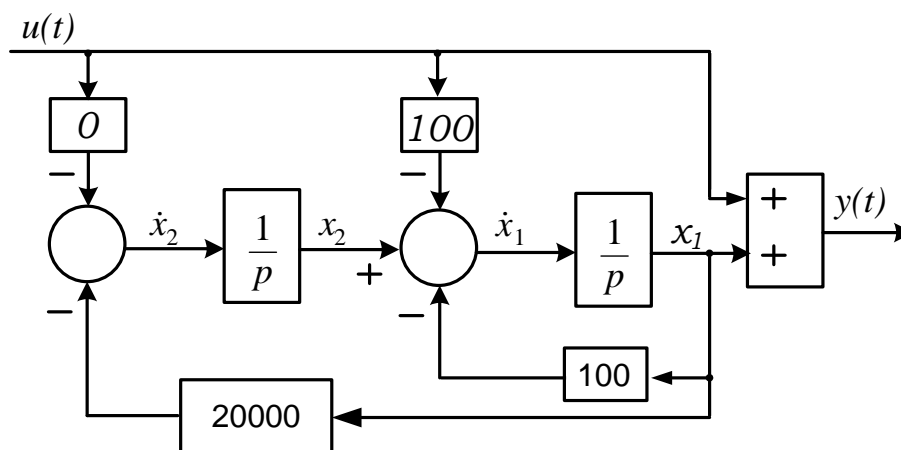


Рис. 2.7. Схема моделирования к примеру 2.3

Схемы моделирования систем управления полезны с двух точек зрения. Во-первых, наличие схем моделирования позволяет составлять и исследовать модели в пространстве состояний. Во-вторых, с помощью этих схем можно осуществлять визуальное моделирование систем в специальных средах визуального моделирования, в частности в среде SIMULINK.

Составим в среде SIMULINK схему моделирования для примера 2.1 и подадим на нее единичное ступенчатое воздействие. Так как для этой модели переменные состояния являются фазовыми переменными (выходная величина и ее скорость изменения), то помимо графиков изменения переменных состояния имеет смысл построить и *фазовую траекторию* переходного процесса, т.е. зависимость  $x_2(x_1)$ . Для этого воспользуемся блоком **XY Graph** из библиотеки **sinks**. Кроме него в схеме используем два осциллографа (Scope) для получения графиков изменения переменных состояния.

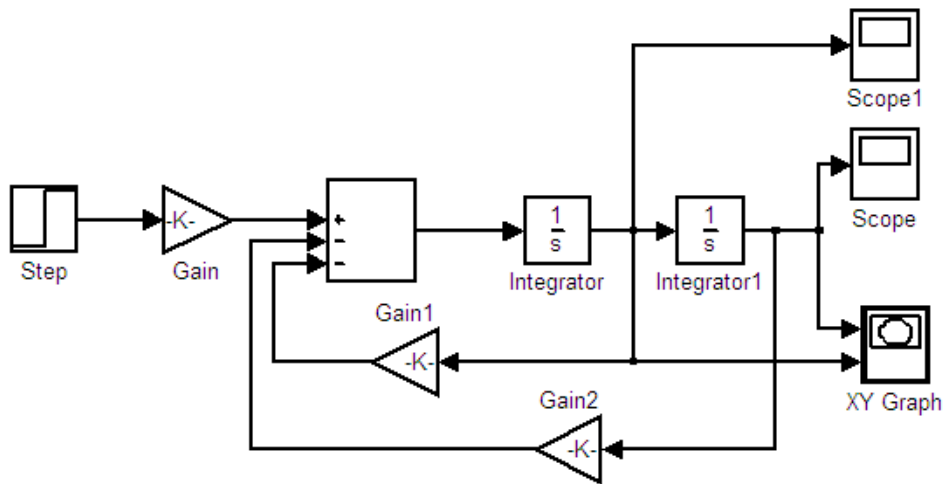


Рис. 2.8. Схема моделирования в SIMULINK к примеру 2.1

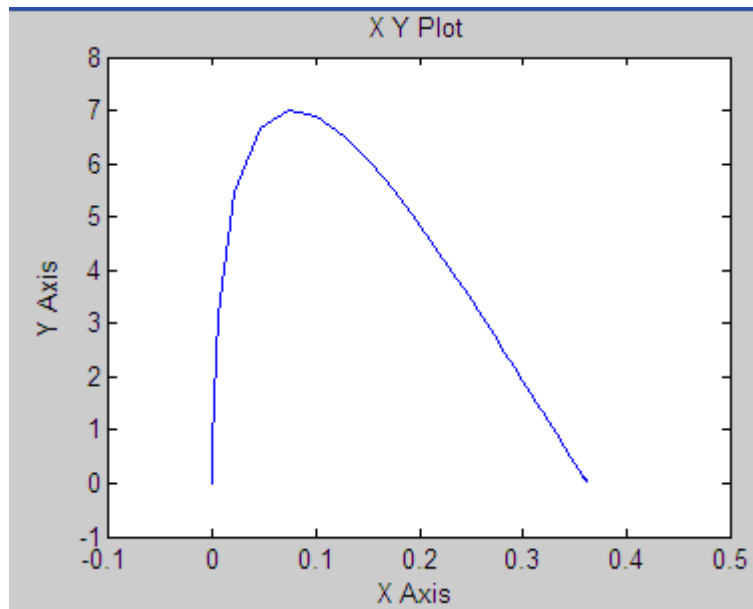


Рис. 2.9. Фазовая траектория переходного процесса



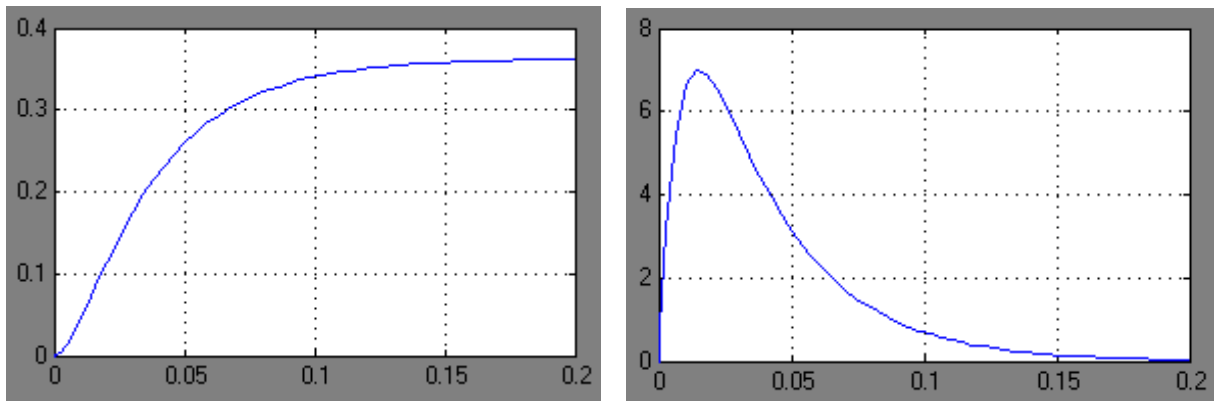


Рис. 2.10. Графики изменения переменных состояния

Составим в среде SIMULINK схему моделирования для примера 2.3, подадим на нее единичное ступенчатое воздействие и построим график изменения выходной переменной.

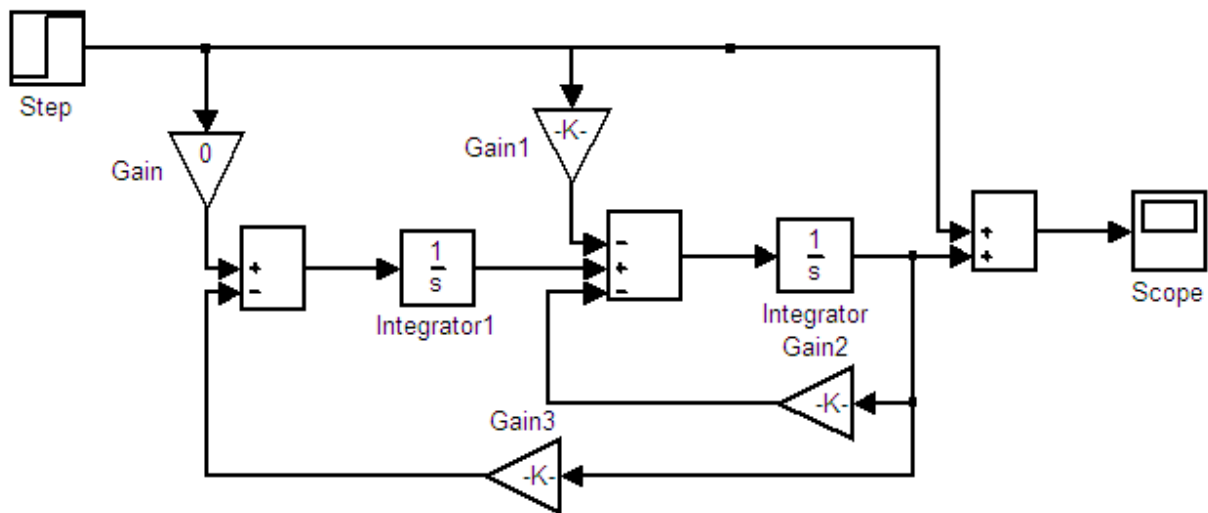


Рис. 2.11. Схема моделирования в SIMULINK к примеру 2.3

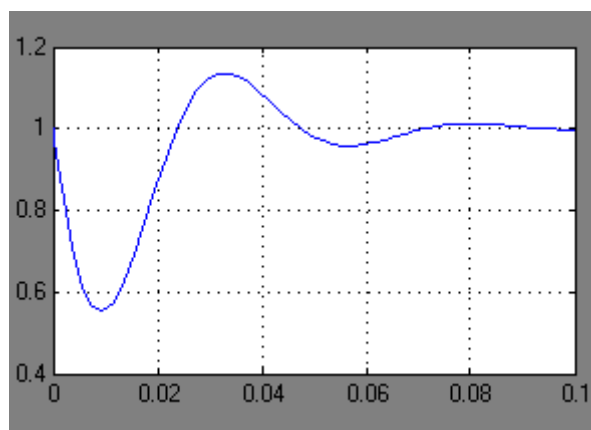


Рис. 2.12. Графики изменения выходной величины в примере 2.3

При составлении схем моделирования нужно учитывать следующее: если схема моделирования строится на основе ДУ системы в переменных состояния, то решение является однозначным. Если же используется

*ПФ, то схема моделирования может иметь различную конфигурацию, т.е. решение уже не будет однозначным.* Для одной ПФ можно построить множество структурных схем и таким образом получить множество моделей в пространстве состояний. Вид модели зависит от метода преобразования. Существует несколько таких методов. Все методы применимы для *физически реализуемых* передаточных функций.

Передаточная функция является физически реализуемой, если порядок ее числителя не больше порядка знаменателя. В таком случае структурную схему системы можно построить, используя лишь блоки интегрирования, масштабирования и суммирования/вычитания, описанные выше. Само понятие физической реализуемости связано с тем, что до появления цифровых компьютеров моделирование систем управления проводилось на аналоговых вычислительных машинах, где перечисленные выше блоки были реализованы в виде электронных схем на базе операционных усилителей.

Если порядок числителя передаточной функции больше порядка знаменателя, то представление системы в виде структурной схемы будет обязательно содержать блоки дифференцирования. *Дифференцирование сигнала в реальном времени является физически нереализуемой операцией*, поскольку для вычисления производной необходимо знать не только текущее и предыдущие его значения, но и будущие, а это в реальном времени невозможно. Действительно, определяя производную функции по ее графику в определенной точке, мы строим касательную в данной точке и находим ее угловой коэффициент. Для того чтобы построить касательную, очевидно, нужно «видеть» график функции как слева, так и справа от точки определения производной.

Однако операция дифференцирования все же применяется и в реальных системах управления, и в системах имитационного моделирования. Выполняется она всегда не точно, а приближенно. С одной стороны, приближенность реализации носит вынужденный характер. Так, например, в цифровой реализации производная часто вычисляется как отношение разности между текущим и предыдущим отсчетами сигнала к величине шага по времени. Очевидно при этом, что чем меньше шаг, тем точнее реализация. Однако это справедливо только для моделей, в которых действуют «чистые», не зашумленные сигналы. В реальных системах приближенность вносится искусственно, например, введением предварительной фильтрации сигнала, т.е. «сглаживания» его фильтром низкой частоты для исключения высокочастотных шумов. Если сигнал не фильтровать, дифференцирование будет усиливать помехи, которые всегда есть в полезном сигнале, и, тем самым, устройство будет большей частью реагировать на шум, а не на полезный сигнал.

## 2.1. Метод прямого программирования

Довольно удобной моделью системы являются уравнения состояния в фазовом пространстве, в которых переменные состояния связаны операциями дифференцирования/интегрирования. Схема моделирования, составленная по такой модели, называется *канонической схемой управляемости*. Для получения такой схемы применяется метод прямого программирования.

Метод прямого программирования применим для систем, ПФ которых может иметь как вещественные, так и комплексно сопряженные нули и полюса.

Рассмотрим данный метод на примере системы третьего порядка с передаточной функцией

$$T(p) = \frac{B(p)}{A(p)} = \frac{b_2 p^2 + b_1 p + b_0}{p^3 + a_2 p^2 + a_1 p + a_0}.$$

Разделим числитель и знаменатель на максимальную степень оператора  $p$  полинома знаменателя:

$$T(p) = \frac{Y(p)}{U(p)} = \frac{b_2 p^{-1} + b_1 p^{-2} + b_0 p^{-3}}{1 + a_2 p^{-1} + a_1 p^{-2} + a_0 p^{-3}}.$$

Умножим числитель и знаменатель ПФ на вспомогательную функцию  $E(p)$ :

$$\frac{Y(p)}{U(p)} = \frac{(b_2 p^{-1} + b_1 p^{-2} + b_0 p^{-3})E(p)}{(1 + a_2 p^{-1} + a_1 p^{-2} + a_0 p^{-3})E(p)} \quad (2.4)$$

Из (2.5) получим:

$$\begin{aligned} U(p) &= E(p)(1 + a_2 p^{-1} + a_1 p^{-2} + a_0 p^{-3}) = \\ &= E(p) + a_2 p^{-1} E(p) + a_1 p^{-2} E(p) + a_0 p^{-3} E(p) \end{aligned} \quad (2.6)$$

Из уравнения (2.6) получим выражение для  $E(p)$ :

$$E(p) = U(p) - a_2 p^{-1} E(p) - a_1 p^{-2} E(p) - a_0 p^{-3} E(p). \quad (2.7)$$

Теперь можно составить фрагмент схемы моделирования, относящийся к входу схемы. Для этого понадобится сумматор, на выходе которого присутствует переменная  $E(p)$ , и три интегратора для получения трех последних слагаемых правой части (2.7), которые и подадим на сумматор с отрицательными знаками согласно (2.7):

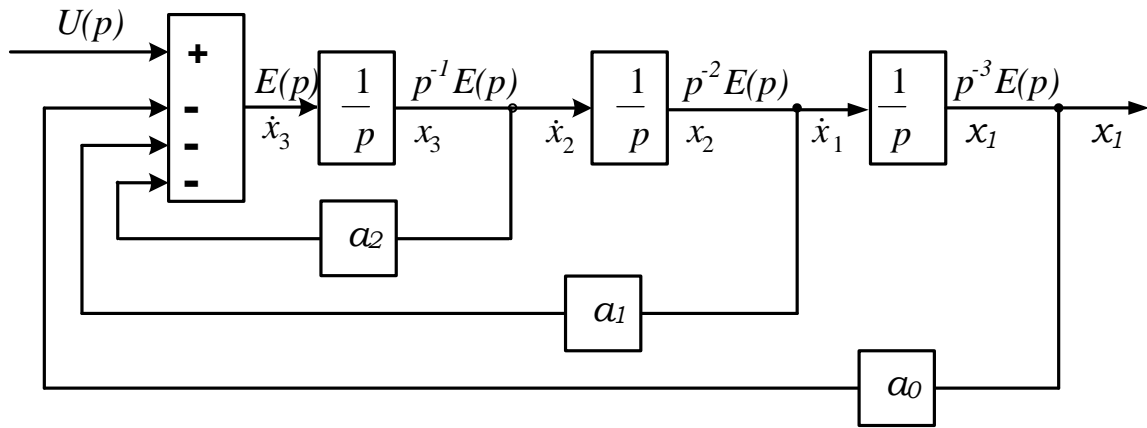


Рис. 2.13. Фрагмент схемы для системы третьего порядка

В такой схеме первая переменная состояния  $x_1(t)$  присутствует на выходе последнего интегратора, вторая переменная состояния  $x_2(t)$  – на выходе предпоследнего интегратора и т.д. Нанесем переменные состояния на схему моделирования. Для такой схемы можно сразу записать уравнения состояния. Они имеют вид:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t); \\ \dot{x}_2(t) = x_3(t); \\ \dot{x}_3(t) = -a_0x_1(t) - a_1x_2(t) - a_2x_3(t) + u(t). \end{cases} \quad (2.8)$$

Отметим, что в прямом программировании вид уравнений состояния определяется только знаменателем ПФ, поэтому они могут быть записаны сразу же по знаменателю передаточной функции.

Запишем уравнения состояния в матричной форме:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u,$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \quad (2.9)$$

Выпишем матрицы состояния:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (2.10)$$

Правила формирования матрицы  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{B}$ :

1) в последней строке матрицы  $\mathbf{A}$  находятся коэффициенты характеристического уравнения системы, начиная со свободного члена, взятые со знаком минус;

2) остальные элементы матрицы  $\mathbf{A}$  равны нулю, кроме элементов, расположенных над главной диагональю – они равны единице.

3) матрица  $\mathbf{B}$  представляет собой столбец, последний элемент которого равен единице, остальные элементы – нулевые.

Если система имеет матрицу состояния  $\mathbf{A}$  вида (2.10), то ее характеристическое уравнение

$$p^3 + a_2 p^2 + a_1 p + a_0 = 0. \quad (2.11)$$

Если структура УС для фазовых переменных определяется только полиномом знаменателя ПФ, то уравнение выхода зависит от числителя ПФ. Для получения этого уравнения представим изображение *выходного* сигнала в виде произведения вспомогательной функции  $E(p)$  на числитель передаточной функции  $T(p)$ :

$$Y(p) = b_2 p^{-1} E(p) + b_1 p^{-2} E(p) + b_0 p^{-3} E(p)$$

Будем рассматривать правую часть этого выражения как сумму изображений переменных состояния с соответствующими коэффициентами передач:

$$\begin{aligned} Y(p) &= b_2 p^{-1} E(p) + b_1 p^{-2} E(p) + b_0 p^{-3} E(p) = \\ &= b_2 X_3(p) + b_1 X_2(p) + b_0 X_1(p) = b_0 X_1(p) + b_1 X_2(p) + b_2 X_3(p). \end{aligned}$$

Уравнение выхода:

$$y(t) = b_0 x_1(t) + b_1 x_2(t) + b_2 x_3(t). \quad (2.12)$$

и

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t) = \begin{bmatrix} b_0 & b_1 & b_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} u(t).$$

Т.о., матрицы уравнений состояния имеют вид:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} b_0 & b_1 & b_2 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{D} = 0. \quad (2.13)$$

Выходной сигнал определяется суммированием переменных состояния с масштабными множителями согласно (2.13). Поэтому для получения полной схемы моделирования нужно дополнить ее фрагмент сумматором и коэффициентами передачи. В результате получаем схему моделирования для переменных состояния нормальной формы, рис. 2.14.

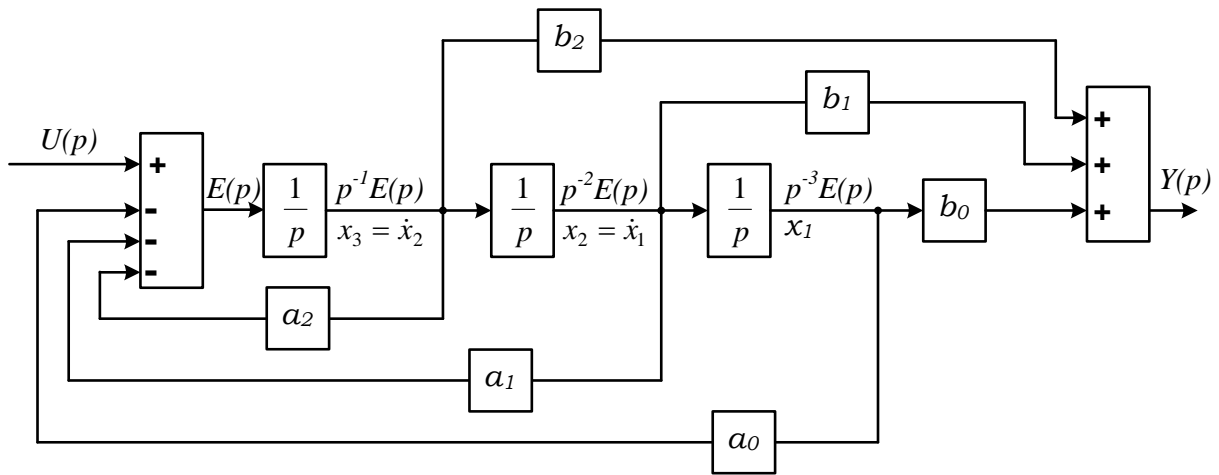


Рис. 2.14. Схема канонической формы управляемости

## 2.2. Метод последовательного программирования

Этот метод применим для передаточных функций, не имеющих комплексно-сопряженных полюсов и нулей. Для получения представления об этом методе рассмотрим ПФ объекта управления, представляющую собой произведение трех апериодических звеньев.

**Пример 2.1.** Объединим частичные коэффициенты усиления в один коэффициент, отнеся его к первому звену:

$$W(p) = \frac{k_1}{p+a_1} \cdot \frac{k_2}{p+a_2} \cdot \frac{k_3}{p+a_3} = \frac{k}{p+a_1} \cdot \frac{1}{p+a_2} \cdot \frac{1}{p+a_3}.$$

При этом структурную схему объекта можно представить в виде последовательного соединения звеньев с указанием переменных состояния на выходе каждого звена, как это показано на рис. 2.15:

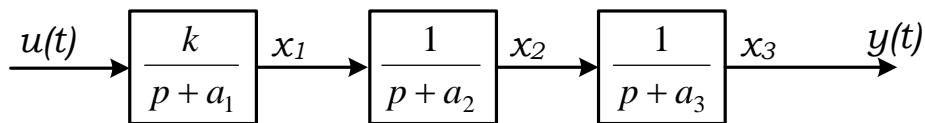


Рис. 2.15. Структурная схема к примеру 2.4

Тогда для изображения первой переменной состояния можно записать выражение

$$X_1(p) = \frac{k}{p+a_1} \cdot U(p) \quad \text{или} \quad pX_1(p) = -a_1X_1(p) + kU(p),$$

а затем записать первое уравнение состояния:

$$\dot{x}_1 = -a_1x_1 + ku.$$

Изображение второй переменной состояния

$$X_2(p) = \frac{1}{p+a_2} \cdot X_1(p) \quad \text{или} \quad pX_2(p) = -a_2X_2(p) + X_1(p)$$

и второе уравнение состояния:

$$\dot{x}_2 = x_1 - a_2x_2.$$

Изображение третьей переменной состояния

$$X_3(p) = \frac{1}{p+a_3} \cdot X_2(p) \quad \text{или} \quad pX_3(p) = -a_3X_3(p) + X_2(p)$$

и третье уравнение состояния:

$$\dot{x}_3 = x_2 - a_3x_3.$$

Уравнение выхода:

$$y = x_3.$$

Запишем уравнения в пространстве состояний:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -a_1x_1 + ku; \\ \dot{x}_2 = x_1 - a_2x_2; \\ \dot{x}_3 = x_2 - a_3x_3. \end{cases}$$

Уравнение выхода:

$$y = x_3.$$

Матрицы уравнений состояния:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -a_1 & 0 & 0 \\ 1 & -a_2 & 0 \\ 0 & 1 & -a_3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} k \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C} = (0 \ 0 \ 1), \quad \mathbf{D} = 0.$$

В главной диагонали матрицы  $\mathbf{A}$  расположены корни характеристического уравнения (собственные числа матрицы), под ней – единичная диагональ, остальные элементы равны нулю. При изменении порядка возрастания индексов у переменных состояния на схеме единичная диагональ расположится под главной диагональю.

По уравнениям состояния построим структурную схему системы (рис. 2.16).

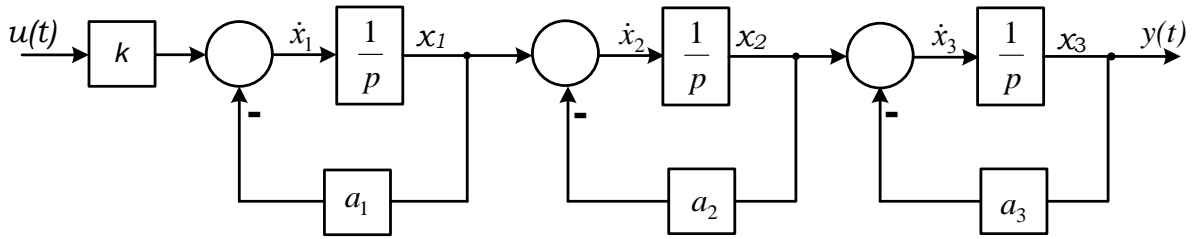


Рис. 2.16. Структурная схема моделирования к примеру 2.4

**Пример 2.5.** Построим модель системы в пространстве состояний методом последовательного программирования для передаточной функции, в числителе которой полином второго порядка. Определив нули и полюса ПФ, представим исходную передаточную функцию в виде произведения элементарных множителей:

$$W(p) = \frac{p^2 + 5p + 4}{2p^3 + 10p^2 + 12p} = \frac{0,5}{p} \cdot \frac{p+1}{p+2} \cdot \frac{p+4}{p+3}.$$

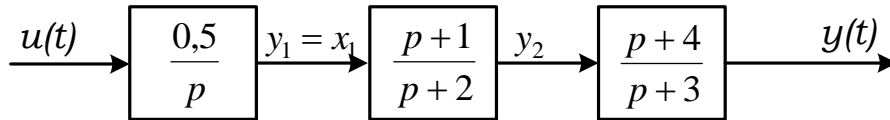


Рис. 2.17. Структурная схема к примеру 2.5

Далее строим последовательно соединенную цепочку моделей.

*Первое звено* представляет собой соединение масштабного коэффициента и интегратора. Обозначим

$$x_1(p) = \frac{0,5}{p} u(p), \quad (2.14)$$

тогда

$$px_1(p) = 0,5u(p), \quad (2.15)$$

или

$$\dot{x}_1 = 0,5u. \quad (2.16)$$

Построим модель *второго звена*. На входе его действует переменная  $x_1$ . Обозначим выходную величину звена через  $y_2$ , т.е.:

$$\frac{y_2(p)}{x_1(p)} = \frac{p+1}{p+2} \quad \text{или} \quad y_2(p) = \frac{p+1}{p+2} \cdot x_1(p) = (p+1) \cdot \frac{x_1(p)}{p+2}.$$

Обозначив  $x_2(p) = \frac{x_1(p)}{p+2}$ , получим

$$px_2(p) + 2x_2(p) = x_1(p);$$



$$px_2(p) = x_1(p) - 2x_2(p)$$

или

$$\dot{x}_2 = x_1 - 2x_2.$$

Выходная величина:

$$y_2(p) = (p+1)x_2(p) = px_2(p) + x_2(p)$$

или

$$y_2 = \dot{x}_2 + x_2 = x_1 - 2x_2 + x_2 = x_1 - x_2.$$

Аналогично поступаем с *третьим звеном*. На входе его действует переменная  $y_2$ . Обозначим выходную величину звена через  $y$ , т.е.:

$$\frac{y(p)}{y_2(p)} = \frac{p+4}{p+3} \quad \text{или} \quad y(p) = \frac{p+4}{p+3} \cdot y_2(p) = (p+4) \cdot \frac{y_2(p)}{p+3}. \quad (2.17)$$

Обозначив  $x_3(p) = \frac{y_2(p)}{p+3}$ , получим

$$px_3(p) + 3x_3(p) = y_2(p);$$

$$px_3(p) = y_2(p) - 3x_3(p);$$

$$\dot{x}_3 = y_2 - 3x_3 = x_1 - x_2 - 3x_3.$$

Выходная величина:

$$y(p) = (p+4)x_3(p) = px_3(p) + 4x_3(p)$$

или

$$y = \dot{x}_3 + 4x_3 = x_1 - x_2 - 3x_3 + 4x_3 = x_1 - x_2 + x_3. \quad (2.18)$$

Выпишем уравнения состояния и выхода для получения модели в пространстве состояний:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 0,5u; \\ \dot{x}_2 = x_1 - 2x_2; \\ \dot{x}_3 = x_1 - x_2 - 3x_3; \\ y = x_1 - x_2 + x_3. \end{cases} \quad (2.19)$$

Матрицы описания системы, таким образом, будут иметь вид:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & -3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0,5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C} = (1 \quad -1 \quad 1), \quad \mathbf{D} = 0.$$

По уравнениям (2.19) построим структурную схему системы (рис. 2.18)

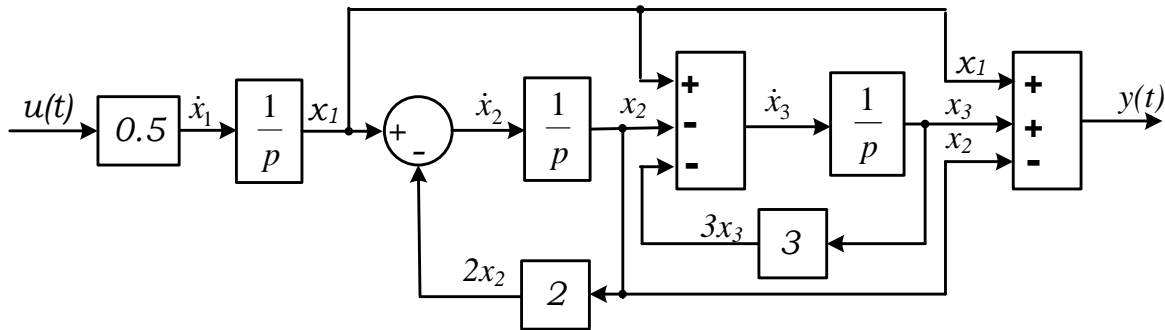


Рис. 2.18. Структурная схема модели к примеру 2.5

Метод последовательного программирования называют переменными состояния в форме простых множителей.

### 2.3. Метод параллельного программирования

Метод параллельного программирования применим для передаточных функций, не имеющих комплексно-сопряженных полюсов и нулей. В методе исходную передаточную функцию представляют в виде суммы элементарных дробей-слагаемых с числителями, подлежащими определению, а структурную схему – в виде параллельного соединения звеньев.

**Пример 2.6.** Построим модель системы в пространстве состояний методом параллельного программирования для передаточной функции, в числителе которой полином второго порядка:

$$W(p) = \frac{p^2 + 5p + 4}{2p^3 + 10p^2 + 12p} = \frac{p^2 + 5p + 4}{2p(p^2 + 5p + 6)} = \frac{A_1}{2p} + \frac{A_2}{p+2} + \frac{A_3}{p+3}. \quad (2.20)$$

Найдем корни *приведенного* полинома второй степени, стоящего в знаменателе (половина второго коэффициента, взятая с обратным знаком, плюс и минус корень квадратный из этой половины в квадрате без свободного члена):

$$p_{1,2} = -2,5 \pm \sqrt{2,5^2 - 6} = -2,5 \pm 0,5; \quad p_1 = -2; \quad p_2 = -3.$$

Следовательно, полином можно записать как

$$p^2 + 5p + 6 = (p + 2)(p + 3),$$

а передаточную функцию в виде:

$$W(p) = \frac{p^2 + 5p + 4}{2p^3 + 10p^2 + 12p} = \frac{p^2 + 5p + 4}{2p(p + 2)(p + 3)}.$$

Теперь представим ПФ в виде суммы элементарных дробей с числителями, подлежащими определению:

$$\frac{p^2 + 5p + 4}{2p(p+2)(p+3)} = \frac{A_1}{2p} + \frac{A_2}{p+2} + \frac{A_3}{p+3}.$$

Для определения коэффициентов приведем правую часть к общему знаменателю и приравняем числители обеих частей:

$$p^2 + 5p + 4 = A_1(p+2)(p+3) + 2A_2p(p+3) + 2A_3p(p+2)$$

или

$$p^2 + 5p + 4 = p^2(A_1 + 2A_2 + 2A_3) + p(5A_1 + 6A_2 + 4A_3) + 6A_1. \quad (2.21)$$

Для нахождения неизвестных коэффициентов приравняем коэффициенты при одинаковых степенях  $p$ . В результате получим следующую систему уравнений

$$\begin{cases} A_1 + 2A_2 + 2A_3 = 1; \\ 5A_1 + 6A_2 + 4A_3 = 5; \\ 6A_1 = 4. \end{cases} \quad (2.22)$$

Решение системы дает следующие значения коэффициентов:

$$A_1 = 2/3, A_2 = 1/2, A_3 = -1/3.$$

Таким образом, ПФ можно записать в виде суммы дробей:

$$W(p) = \frac{p^2 + 5p + 4}{2p^3 + 10p^2 + 12p} = \frac{1/3}{p} + \frac{1/2}{p+2} + \frac{-1/3}{p+3}.$$

Разложение на простые дроби можно осуществить с помощью программы MatLab. Команда

$$[R, P, K] = \text{RESIDUE}(B, A)$$

определяет числители отдельных дробей, полюсы и свободный член разложения на частичные дроби отношения двух полиномов  $B(p)/A(p)$ . Английское слово RESIDUE переводится как остаток или вычет.

Если кратные корни отсутствуют, то разложение записывается в виде

$$\frac{B(p)}{A(p)} = \frac{R_1}{p-p_1} + \frac{R_2}{p-p_2} + \dots + \frac{R_n}{p-p_n} + K(p).$$

Векторы  $B(p)$  и  $A(p)$  определяют коэффициенты числителя и знаменателя полиномов в порядке убывания степеней  $p$ . Ввод вектора-строки осуществляется в квадратных скобках, элементы которого разделяются пробелами или запятыми. Число элементов вектора, т.е. число коэффициентов полинома, всегда на единицу больше его степени, нулевые коэффи-

циенты должны содержаться в векторе. Числители дробей возвращаются в векторе-столбце  $R$ , полюсы – в векторе-столбце  $P$  и свободный член – в векторе-строке  $K$ . Вектор этого коэффициента оказывается пустым, если степень числителя ПФ меньше степени знаменателя. Каждому полюсу соответствует свой коэффициент.

```
%Ввод полиномов числителя и знаменателя
```

```
B1=[1 5 4];A1=[2 10 12 0];
```

```
%Разложение на простые дроби
```

```
[R,P,K]=residue(B1,A1)
```

**В командном окне**

```
R =-0.3333
```

```
    0.5000
```

```
    0.3333
```

```
P =-3.0000
```

```
   -2.0000
```

```
    0
```

```
K =[]
```

Итак, мы получили ПФ в виде:

$$W(p) = \frac{1/3}{p} + \frac{1/2}{p+2} + \frac{-1/3}{p+3}.$$

Запишем изображение выходной величины :

$$y(p) = W(p) \cdot u(p) = \frac{1/3}{p} \cdot u(p) + \frac{1/2}{p+2} \cdot u(p) + \frac{-1/3}{p+3} \cdot u(p).$$

Представим изображение выходной величины в виде суммы изображений искусственно введенных переменных состояния:

$$y(p) = x_1(p) + x_2(p) + x_3(p).$$

Следовательно:

$$x_1(p) = \frac{1/3}{p} \cdot u(p) = \frac{1}{3} \cdot \frac{u(p)}{p},$$

$$x_2(p) = \frac{1/2}{p+2} \cdot u(p) = \frac{1}{2} \cdot \frac{u(p)}{p+2},$$

$$x_3(p) = \frac{-1/3}{p+3} \cdot u(p) = -\frac{1}{3} \cdot \frac{u(p)}{p+3}.$$

Или

$$px_1(p) = \frac{1}{3} \cdot u(p),$$

$$px_2(p) = -2x_2 + \frac{1}{2}u(p),$$

$$px_3(p) = -3x_3 - \frac{1}{3}u(p).$$

Перейдем к оригиналам, учитывая, что дифференцированию оригинала соответствует умножение его изображения на оператор Лапласа  $p$  (при нулевом начальном значении оригинала):

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \frac{1}{3}u; \\ \dot{x}_2 = -2x_2 + \frac{1}{2}u; \\ \dot{x}_3 = -3x_3 - \frac{1}{3}u; \\ y = x_1 + x_2 + x_3. \end{cases} \quad (2.23)$$

В результате получена очередная SS модель системы, заданной ПФ.

По уравнениям запишем матрицы модели и построим структурную схему (рис. 2.19)

Матрицы описания системы будут иметь вид:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 1/2 \\ -1/3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C} = (1 \ 1 \ 1), \quad \mathbf{D} = 0.$$

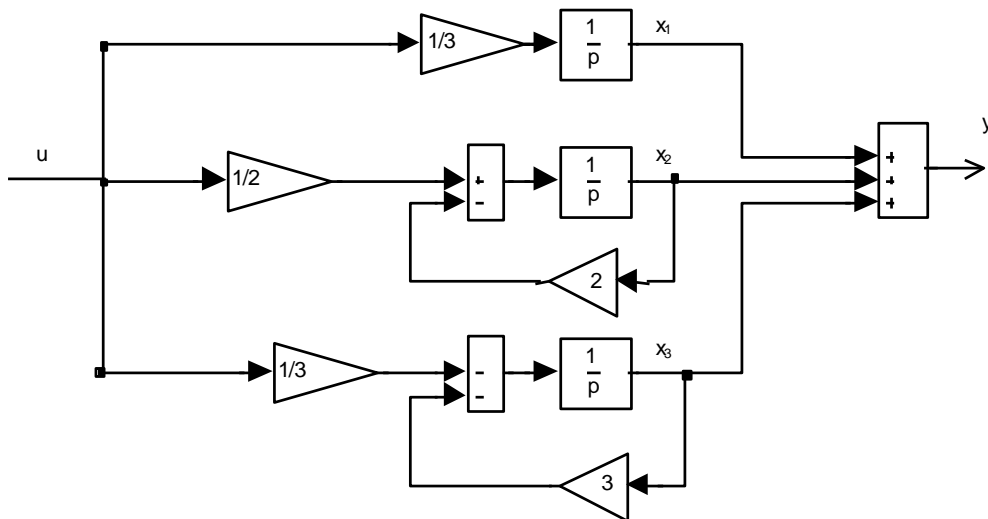


Рис. 2.19. Структурная схема модели при параллельном программировании

Имеются и другие формы представления систем, заданных передаточными функциями в пространстве состояний.

**Домашнее задание.**

Задана передаточная функция системы

$$W(p) = \frac{b_1 p + b_0}{p^2 + a_1 p + a_0}.$$

Для передаточной функции выполнить следующее.

1. Определить матрицы SS модели и записать уравнения этой модели тремя методами: 1) методом прямого программирования; 2) методом последовательного программирования; 3) методом параллельного программирования.
2. Прodelать обратную операцию для получения ПФ.
3. Определить ПФ по матрицам SS модели в MatLab в каждом из трех методов.
4. Построить структурную схему каждой из моделей системы, собрать все структурные схемы в Simulink и показать идентичность поведения моделей путем подачи на вход единичного ступенчатого сигнала с целью получения переходной характеристики.

Значения коэффициентов полиномов приведены в таблице 2.1.

Таблица 2.1. Таблица коэффициентов полиномов

№ Варианта	$b_1$	$b_0$	$a_2$	$a_1$	$a_0$
<b>1</b>	<b>2</b>	<b>3</b>	<b>4</b>	<b>5</b>	<b>6</b>
1	2	4	1	20	36
2				22	57
3				24	80
4				26	105
5				28	132
6				30	161
7				32	192
8				34	225
9				36	260
10				38	297
11	4	16	1	40	175
12				42	216
13				44	259
14				46	304
15				48	400
16				50	451
17				52	504

продолжение таблицы 2.1

1	2	3	4	5	6
18	4	16	1	54	559
19				56	587
20				58	613
21	1	10	1	60	500
22				62	561
23				64	624
24				66	756
25				68	798
26				70	825
27				72	896
28				74	969

### Практическое занятие 3 **ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПЕРЕДАТОЧНЫХ ФУНКЦИЙ СИСТЕМЫ С ПОМОЩЬЮ ПРАВИЛ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ СТРУКТУРНЫХ СХЕМ**

Правила структурных преобразований позволяют получить передаточные функции САР по передаточным функциям ее звеньев, а также представить структуру системы в удобном для анализа и синтеза виде. Формулы преобразований выводятся путем сопоставления передаточных функций структур до и после преобразований. Рассмотрим способы преобразования структурных схем при различных видах соединения блоков.

#### **3.1. Последовательное (series) соединение блоков**

При последовательном соединении выходная величина каждого из звеньев (рис.3.1), кроме последнего, служит входной величиной последующего звена.

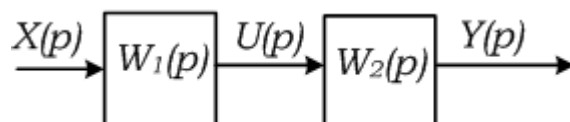


Рис. 3.1. Последовательное соединение блоков

Такая система описывается операторными уравнениями:

$$Y(p) = W_2(p)U(p); \quad U(p) = W_1(p)X(p).$$

Выразим выходную величину через входную:

$$Y(p) = W_2(p)W_1(p)X(p) = W(p)X(p).$$

Следовательно, ПФ двух звеньев, соединенных последовательно, равна произведению их ПФ.

В общем случае ПФ системы из  $n$  последовательно соединенных звеньев равна произведению передаточных функций всех звеньев:

$$W_{ser}(p) = \prod_{i=1}^n W_i(p).$$

При этом возможны случаи, когда отдельные звенья представлены разными моделями (TF, SS или ZPK). Тогда нужно вначале получить TF-модель для каждого звена, а затем воспользоваться приведенным выше правилом.

В программе MATLAB произведение LTI моделей можно производить двумя способами: с помощью знака умножения «\*» и с помощью команды *series*. При этом системы могут быть заданы разными моделями (ZPK, SS или TF). Для определения типа результирующей модели исполь-



зуется правило предпочтения: **SS** > **ZPK** > **TF**. Убедимся в этом на следующем примере.

**Пример 3.1.**

1. Системы заданы их ПФ (TF моделями):

$$W_1(p) = \frac{1}{p+10} \quad \text{и} \quad W_2(p) = \frac{p+14}{p^3+3p^2+3p+1}.$$

ПФ схемы с последовательным соединением:

$$W(p) = W_1(p)W_2(p) = \frac{1}{p+10} \cdot \frac{p+14}{p^3+3p^2+3p+1} = \frac{p+14}{p^4+13p^3+33p^2+31p+10}.$$

Проверка в MATLAB:

```
% ПФ отдельных звеньев
W1=tf(1,[1 10]);W2=tf([1 14],[1 3 3 1]);
% ПФ системы при последовательном соединении
W=W1*W2
```

Transfer function:

$$s + 14$$

-----

$$s^4 + 13 s^3 + 33 s^2 + 31 s + 10$$

% Другой способ определения ПФ

```
W=series(W1,W2)
```

Transfer function:

$$s + 14$$

-----

$$s^4 + 13 s^3 + 33 s^2 + 31 s + 10$$

Первая система задана TF моделью, а вторая – SS моделью (полученной в MATLAB):

$$W_1(p) = \frac{1}{p+10};$$

$$\mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} -3 & -1,5 & -0,25 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{B}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{C}_2 = [0 \ 0,25 \ 1,75], \mathbf{D}_2 = [0].$$

Теперь нужно перемножить две разные модели. Какую модель мы получим в результате?

```
% Модели заданных систем
W1=tf(1,[1 10])% в виде ПФ
A=[-3 -1.5 -0.25;2 0 0;0 2 0];
B=[2;0;0];C=[0 0.25 1.75];D=0;
```

```

sys_2=ss(A,B,C,D); % в виде SS модели
sys=W1*sys_2; % произведение разных моделей
sys_tf=tf(sys) % переход к ПФ (TF модели)
>>

```

```

a =
      x1      x2      x3      x4
      x1     -10      0     0.25     1.75
      x2      0      -3    -1.5    -0.25
      x3      0      2      0      0
      x4      0      0      2      0

```

```

b =
      u1
      x1      0
      x2      2
      x3      0
      x4      0

```

```

c =
      x1  x2  x3  x4
      y1   1   0   0   0

```

```

d =
      u1
      y1      0

```

Continuous-time model.

Transfer function:

$$s + 14$$

```

-----
s^4 + 13 s^3 + 33 s^2 + 31 s + 10

```

В результате перемножения объектов разного типа получена более «старшая» модель, а именно SS модель (согласно правилу предпочтения). Ну а затем можно получить и «младшие» модели.

3. Первая система по-прежнему задана TF моделью, а вторая – ZPK моделью (полученной в MATLAB):

$$W_1(p) = \frac{1}{p+10}; \quad W_2(p) = \frac{p+14}{(p+1)^3}.$$

ZPK модель «старше» TF модели, поэтому получим вначале ZPK, а затем можно получить и ПФ (если нужно).

```

%Модели заданных систем
W1=tf(1,[1 10]); %TF модель
W2_zpk=zpk(-14,[-1 -1 -1],1); %ZPK модель
sys=series(W1,W2_zpk) %произведение разных моделей
sys_tf=tf(sys) %переход к ПФ (TF модели)
>>

```

Zero/pole/gain:

$$(s+14)$$

```

-----
(s+1)^3 (s+10)

```

Transfer function:

$$s + 14$$

$$s^4 + 13 s^3 + 33 s^2 + 31 s + 10$$

Представляет интерес следующий случай, когда перемножаются системы с одинаковыми SS моделями.

4. Первая и вторая системы заданы SS моделями (полученными в MATLAB):

$$\mathbf{A}_1 = [-10], \mathbf{B}_1 = [1], \mathbf{C}_1 = [1], \mathbf{D}_1 = [0];$$

$$\mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} -3 & -1,5 & -0,25 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{B}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{C}_2 = [0 \ 0,25 \ 1,75], \mathbf{D}_2 = [0].$$

В результате должны получиться следующие матрицы:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 & \mathbf{B}_1 \mathbf{C}_2 \\ 0 & \mathbf{A}_2 \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 \mathbf{D}_2 \\ \mathbf{B}_2 \end{bmatrix}, \mathbf{C} = [\mathbf{C}_1 \ \mathbf{D}_1 \mathbf{C}_2], \mathbf{D} = \mathbf{D}_1 \mathbf{D}_2.$$

Проверим это в MATLAB:

```
% SS модели заданных систем
A1=-10;B1=1;C1=1;D1=0;
sys_1=ss(A1,B1,C1,D1);
A2=[-3 -1.5 -0.25;2 0 0;0 2 0];
B2=[2;0;0];C2=[0 0.25 1.75];D2=0;
sys_2=ss(A2,B2,C2,D2); % в виде SS модели
sys=series(sys_2,sys_1) % произведение моделей
W=tf(sys) % переход к ПФ (TF модели)
>>
```

a =	x1	x2	x3	x4
	x1	-10	0	0.25
	x2	0	-3	-1.5
	x3	0	2	0
	x4	0	0	2

b =	u1
	x1
	x2
	x3
	x4

c =	x1	x2	x3	x4
	y1	1	0	0

d =	u1
	y1

Continuous-time model.  
Transfer function:

$$s + 14$$

$$s^4 + 13 s^3 + 33 s^2 + 31 s + 10$$

Предлагается проверить правильность полученного результата.

5. Первая и вторая системы заданы ZPK моделями (полученными в MATLAB):

```
% ZPK модели заданных систем
W1_zpk=zpk([], -10, 1);
W2_zpk=zpk(-14, [-1 -1 -1], 1);
sys=series(W1_zpk, W2_zpk)
W=tf(sys)
Zero/pole/gain:
      (s+14)
```

```
(s+1)^3 (s+10)
Transfer function:
      s + 14
```

$$s^4 + 13 s^3 + 33 s^2 + 31 s + 10$$

Приведенные случаи свидетельствуют о том, что при объединении систем путем их перемножения можно использовать их различные модели, но результат подчиняется правилу предпочтения.

### 3.2. Параллельное (parallel) соединение блоков

При параллельном соединении на вход всех звеньев подается одно и то же воздействие, а отклики звеньев суммируются (рис.3.2):

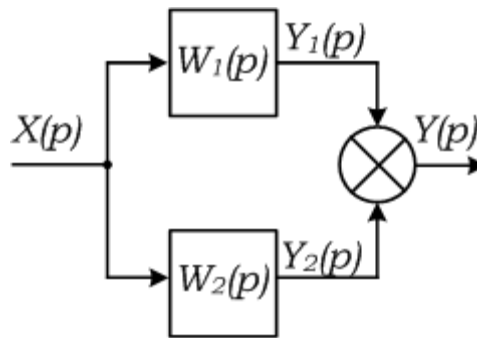


Рис. 3.2. Параллельное соединение блоков

Такая система описывается операторными уравнениями:

$$Y(p) = Y_1(p) + Y_2(p); \quad Y_1(p) = W_1(p)X(p); \quad Y_2(p) = W_2(p)X(p).$$

Требуется найти уравнение связи выходного и входного сигналов. После соответствующих подстановок получим:

$$Y(p) = [W_1(p) + W_2(p)]X(p) = W(p)X(p).$$

Следовательно, ПФ двух звеньев, соединенных параллельно, равна сумме их ПФ. В общем случае ПФ системы из  $n$  параллельно соединенных звеньев равна *сумме* передаточных функций отдельных звеньев:

$$W_{par}(p) = \sum_{i=1}^n W_i(p).$$

В программе MATLAB суммирование LTI моделей можно производить двумя способами: с помощью знака сложения + и с помощью команды *parallel*.

Здесь тоже можно рассмотреть все случаи, приведенные в предыдущем разделе при последовательном соединении систем, и результат будет подчиняться правилу предпочтения. Но мы рассмотрим только два случая, когда системы заданы либо их SS моделями, либо их ZPK моделями.

1. Первая и вторая системы заданы SS моделями:

$$\mathbf{A}_1 = [-10], \quad \mathbf{B}_1 = [1], \quad \mathbf{C}_1 = [1], \quad \mathbf{D}_1 = [0];$$

$$\mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} -3 & -1,5 & -0,25 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C}_2 = [0 \quad 0,25 \quad 1,75], \quad \mathbf{D}_2 = [0].$$

В результате должны получиться следующие матрицы:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 & 0 \\ 0 & \mathbf{A}_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{B}_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = [\mathbf{C}_1 \quad \mathbf{C}_2], \quad \mathbf{D} = \mathbf{D}_1 + \mathbf{D}_2.$$

Проверим это в MATLAB:

```
% SS модели заданных систем
A1=-10;B1=1;C1=1;D1=0;
sys_1=ss(A1,B1,C1,D1); % в виде SS модели
A2=[-3 -1.5 -0.25;2 0 0;0 2 0];
B2=[2;0;0];C2=[0 0.25 1.75];D2=0;
sys_2=ss(A2,B2,C2,D2); % в виде SS модели
sys=parallel(sys_1,sys_2) % сумма моделей
W=tf(sys) % переход к ПФ (TF модели)
>>
a =
      x1      x2      x3      x4
      x1     -10      0      0      0
      x2      0      -3     -1.5    -0.25
      x3      0      2      0      0
      x4      0      0      2      0
b =
      u1
      x1      1
      x2      2
      x3      0
```

```

      x4      0
c =      x1      x2      x3      x4
      y1      1      0      0.25      1.75
d =      u1
      y1      0
Continuous-time model.
Transfer function:
      s^3 + 4 s^2 + 27 s + 141
-----
s^4 + 13 s^3 + 33 s^2 + 31 s + 10

```

ИЛИ

```

sys=sys_1+sys_2 % сумма моделей
a =      x1      x2      x3      x4
      x1      -10      0      0      0
      x2      0      -3      -1.5      -0.25
      x3      0      2      0      0
      x4      0      0      2      0
b =      u1
      x1      1
      x2      2
      x3      0
      x4      0
c =      x1      x2      x3      x4
      y1      1      0      0.25      1.75
d =      u1
      y1      0

```

## 2. Первая и вторая системы заданы ZPK моделями:

```

% ZPK модели заданных систем
W1_zpk=zpk([],-10,1);
W2_zpk=zpk(-14,[-1 -1 -1],1);
sys=parallel(W1_zpk,W2_zpk) % ZPK модель
W=tf(sys) % TF модель
Z=zero(sys) % нули ПФ
P=pole(sys) % полюса ПФ
>>
Zero/pole/gain:
(s+4.675) (s^2 - 0.6754s + 30.16)
-----
      (s+10) (s+1)^3
Transfer function:
      s^3 + 4 s^2 + 27 s + 141
-----
s^4 + 13 s^3 + 33 s^2 + 31 s + 10
Z =
      0.3377 + 5.4812i

```

```

    0.3377 - 5.4812i
    -4.6754
P =
    -10
     -1
     -1
     -1

```

ИЛИ

```

    Sys=W1_zpk+W2_zpk % ZPK модель
Zero/pole/gain:
(s+4.675) (s^2 - 0.6754s + 30.16)
-----
                (s+10) (s+1)^3
W1=tf(Sys) % переход к ПФ (TF модели)
Transfer function:
    s^3 + 4 s^2 + 27 s + 141
-----
s^4 + 13 s^3 + 33 s^2 + 31 s + 10

```

Если же используются системы с TF моделями, то при параллельном соединении получается также TF модель объединенной системы.

### 3.3. Соединение с обратной связью (feedback)

В системах автоматического регулирования часто используется соединение в виде обратной связи (ОС). Так, например, большинство систем являются замкнутыми. В замкнутой системе производится измерение регулируемой переменной (с помощью измерительного преобразователя) и результат измерения в виде сигнала ОС сравнивается с входным сигналом, несущем информацию о заданном значении этой переменной. Сигнал разности между заданным и фактическим значениями (ошибка регулирования) используется как базовый для формирования управляющего воздействия на объект. Это пример *общей* обратной связи. Она всегда является *отрицательной* в том смысле, что вычисляется разность сигналов. Между тем в САР используются и *местные* или *локальные* ОС, охватывающие части системы. Местные ОС могут быть как отрицательными, так и положительными.

Соединение с ОС называют также встречно-параллельным соединением. Рассмотрим структурную схему соединения (рис.3.3) с отрицательной обратной связью (ООС). Для обозначения ООС можно использовать зачерненный сектор элемента сравнения или знак минус возле стрелки:

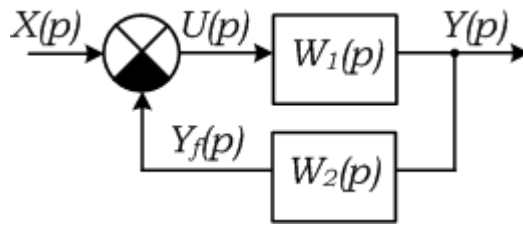


Рис. 3.3. Соединение с ООС

Такая система описывается операторным уравнением:

$$Y(p) = W_1(p)U(p) = W_1(p) \cdot [X(p) - W_2(p)Y(p)] = W_1(p)X(p) - W_1(p)W_2(p)Y(p).$$

При записи этого уравнения учтено, что входным сигналом звена в цепи обратной связи с передаточной функцией  $W_2(p)$  является выходной сигнал структурной схемы.

Элементарные преобразования записанного выше уравнения позволяют получить ПФ участка структурной схемы с ООС:

$$W_{оос}(p) = \frac{Y(p)}{X(p)} = \frac{W_1(p)}{1 + W_1(p)W_2(p)} = \frac{W_1(p)}{1 + W_{раз}(p)}. \quad (3.1)$$

Передаточная функция участка с ООС представляет собой дробь, в числителе которой находится ПФ прямого пути передачи сигнала, а в знаменателе – увеличенная на единицу ПФ разомкнутой системы.

В выражении (3.1) через  $W_{раз}(p)$  обозначена ПФ разомкнутой системы, ее передаточная функция

$$W_{раз}(p) = \frac{Y_f(p)}{U(p)}$$

есть отношение изображения  $Y_f(p)$  сигнала обратной связи  $y_f(t)$  к изображению  $U(p)$  входного сигнала  $u(t)$ . При этом контур регулирования предполагают разомкнутым около элемента сравнения. В этом случае блоки оказываются включенными последовательно, и ПФ разомкнутой системы находится как произведение ПФ звена в цепи прямой передачи и звена в цепи обратной связи:

$$W_{раз}(p) = W_1(p)W_2(p).$$

Естественно, формула, полученная для ПФ участка с ООС, применима и к замкнутой системе управления в целом:

$$W_{зам}(p) = \frac{W_{пр}(p)}{1 + W_{раз}(p)}. \quad (3.2)$$

где  $W_{пр}(p)$  – передаточная функция прямого канала системы.

Проведя преобразования, аналогичные изложенным выше, нетрудно получить, что в случае использования положительной ОС



$$W_{зам}(p) = \frac{W_{np}(p)}{1 - W_{раз}(p)}. \quad (3.3)$$

В Matlab результат соединения с обратной связью двух ЛТИ моделей выполняется с помощью команды `feedback` (`feed` – давать, поставлять и `back` – в обратном направлении).

Syntax (синтаксис):

```
sys = feedback(sys1, sys2)
```

Описание:

`sys = feedback(sys1, sys2)` возвращает ЛТИ модель системы (`sys`) при соединении с отрицательной ОС.

При определении типа результирующей модели также действует правило предпочтения.

По умолчанию, команда `feedback(sys1, sys2)` предполагает ООС и эквивалента команде `feedback(sys1, sys2, -1)`.

При ПОС (положительная обратная связь) используется команда:

```
sys = feedback(sys1, sys2, +1)
```

В частном случае одна из функций,  $W_1(p)$  или  $W_2(p)$ , может равняться единице. В этом случае вместо соответствующей функции в нужном месте нужно поставить единицу.

1). При  $W_1(p) = G(p)$  и  $W_2(p) = 1$ :

$$W_{nf}(p) = \frac{W_1(p)}{1 + W_1(p)W_2(p)} = \frac{G(p)}{1 + G(p)}$$

```
sys = feedback(G, 1)
```

2). При  $W_1(p) = 1$  и  $W_2(p) = G(p)$ :

$$W_{nf}(p) = \frac{W_1(p)}{1 + W_1(p)W_2(p)} = \frac{1}{1 + G(p)}$$

```
sys = feedback(1, G)
```

### Пример 3.2.

1. Системы заданы их ПФ (TF моделями):

$$W_1(p) = \frac{p + 14}{p^3 + 3p^2 + 3p + 1} \quad \text{и} \quad W_2(p) = \frac{1}{p + 10}$$

ПФ системы с ООС:

$$W_{nf}(p) = \frac{W_1(p)}{1 + W_1(p)W_2(p)} = \frac{\frac{p+14}{p^3 + 3p^2 + 3p + 1}}{1 + \frac{p+14}{p^3 + 3p^2 + 3p + 1} \cdot \frac{1}{p+10}} =$$

$$= \frac{p^2 + 24p + 140}{p^4 + 13p^3 + 33p^2 + 32p + 24}.$$

В MATLAB:

```
%Исходные данные
W1=tf([1 14],[1 3 3 1]);W2=tf(1,[1 10]);
W_nf=feedback(W1,W2)
>>
Transfer function:
      s^2 + 24 s + 140
```

```
-----
s^4 + 13 s^3 + 33 s^2 + 32 s + 24
```

2. Система прямой передачи сигнала задана ZPK моделью, а звено в цепи ОС – передаточной функцией:

$$W_1(p) = \frac{p+14}{(p+1)^3} \quad \text{и} \quad W_2(p) = \frac{1}{p+10}.$$

```
% Исходные данные
W1=zpk(-14,[-1 -1 -1],1);
W2=tf(1,[1 10]);
W_zpk=feedback(W1,W2)
W_tf=tf(W_zpk)
>> Zero/pole/gain:
      (s+14) (s+10)
-----
(s+9.994) (s+2.147) (s^2 + 0.8584s + 1.118)
Transfer function:
      s^2 + 24 s + 140
```

```
-----
s^4 + 13 s^3 + 33 s^2 + 32 s + 24
```

Единичная ООС

```
% Исходные данные
G=tf([1 14],[1 3 3 1]);
sys=feedback(G,1)
>> Transfer function:
      s + 14
```

```
-----
s^3 + 3 s^2 + 4 s + 15
```

```
% Исходные данные
G=tf([1 14],[1 3 3 1])
```

```

sys=feedback(1,G)
Transfer function:
s^3 + 3 s^2 + 3 s + 1
-----
s^3 + 3 s^2 + 4 s + 15
% Исходные данные
G=zpk(-14, [-1 -1 -1], 1)
sys=feedback(G, 1)
>>
Zero/pole/gain:
          (s+14)
-----
(s+3.21) (s^2 - 0.2098s + 4.673)

```

Как указано выше, имея одну какую-либо ЛТИ модель, полученную для системы с встречно-параллельным соединением, можно получить остальные модели, что является очень удобным свойством MATLAB.

### 3.4. Перенос сумматора

1) Перенос сумматора с выхода звена на его вход (рис.3.4).

Внешнее воздействие  $F(p)$ , приложенное к выходу звена с передаточной функцией  $W_1(p)$ , можно перевести на его вход, поместив между воздействием и сумматором дополнительное звено с передаточной функцией  $1/W_1(p)$ :

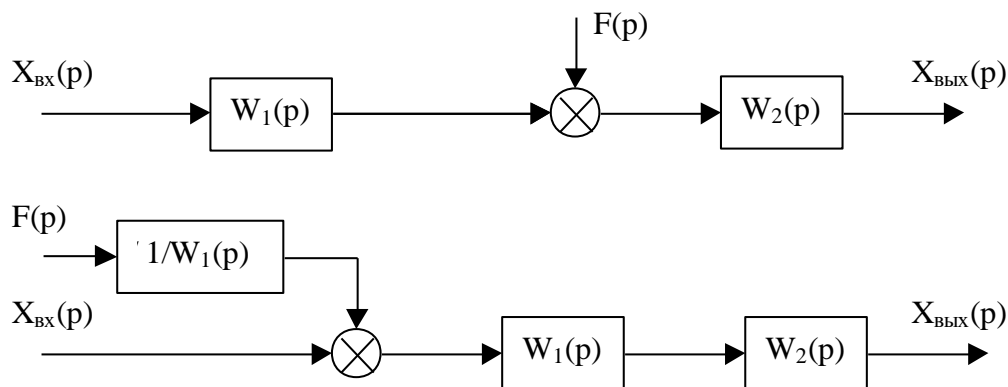


Рис. 3.4. Перенос сумматора с выхода на вход звена.

Для доказательства этого правила запишем выражение для выходной величины в виде:

$$X_{\text{вых}}(p) = W_2(p)[F(p) + W_1(p)X_{\text{вх}}(p)].$$

Передаточные функции  $W_1(p)$  и  $W_2(p)$  на структурной схеме должны быть включены последовательно, поэтому необходимо  $W_1(p)$  вынести за скобки:

$$X_{\text{вых}}(p) = W_2(p) W_1(p) \left[ \frac{1}{W_1(p)} F(p) + X_{\text{вых}}(p) \right].$$

Таким образом, сумматор оказался перенесенным через звено с ПФ  $W_1(p)$ , а между воздействием и сумматором появилось звено с ПФ, обратной  $W_1(p)$ .

2) Перенос сумматора с входа звена на его выход (рис.3.5).

Внешнее воздействие  $F(p)$ , приложенное к входу звена с передаточной функцией  $W_1(p)$ , можно перевести на его выход, поместив между воздействием и сумматором дополнительное звено с передаточной функцией  $W_1(p)$ .

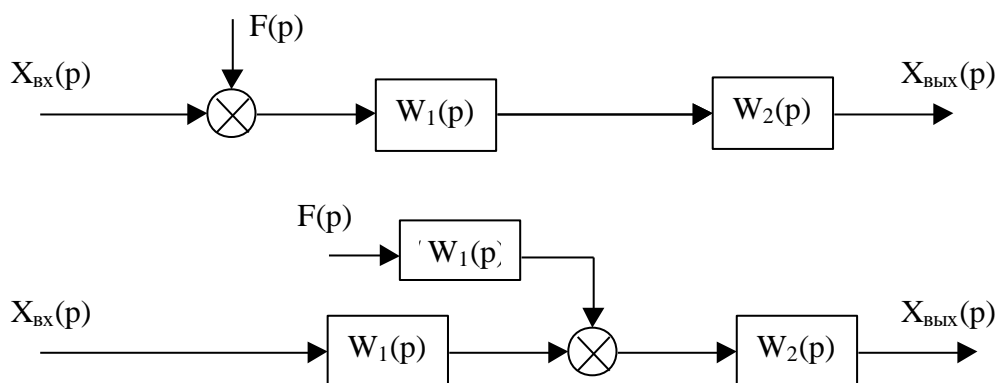


Рис. 3.5. Перенос сумматора с входа на выход звена.

Воспользуемся тем же приемом. До переноса имеем уравнение:

$$X_{\text{вых}}(p) = W_2(p) W_1(p) [F(p) + X_{\text{вых}}(p)].$$

Внесем  $W_1(p)$  в скобки:

$$X_{\text{вых}}(p) = W_2(p) [W_1(p)F(p) + W_1(p)X_{\text{вых}}(p)].$$

Теперь сумматор оказался перенесенным в направлении передачи сигнала.

### 3.5. Переносы линии связи

а) Перенос линии связи с выхода звена на его вход (рис.3.6).

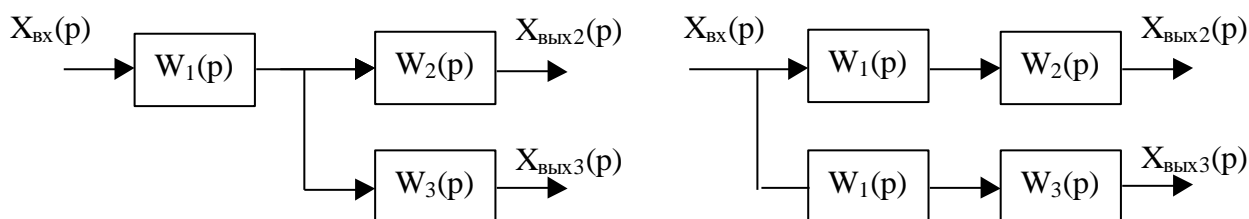


Рис. 3.6. Перенос линии связи с выхода звена на вход.

Точку присоединения любой структурной связи к выходу звена, имеющего передаточную функцию  $W_1(p)$ , можно перенести на его вход, включив в эту связь дополнительное звено с той же передаточной функцией  $W_1(p)$ .

б) Перенос линии связи с входа звена на его выход (рис.3.7).

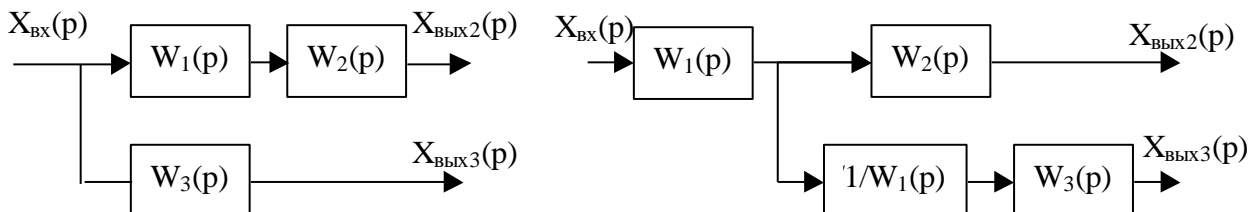


Рис. 3.7. Перенос линии связи с входа звена на выход.

Точку присоединения любой структурной связи к входу звена, имеющего передаточную функцию  $W_1(p)$ , можно перенести на его выход, включив в эту связь дополнительное звено с той же передаточной функцией  $1/W_1(p)$ .

Правила, связанные с переносом, линий, очевидны и не требуют доказательств.

**Пример 3.3.** По структурной схеме системы (рис.3.8) определить ее передаточные функции по управлению и по ошибке управления.

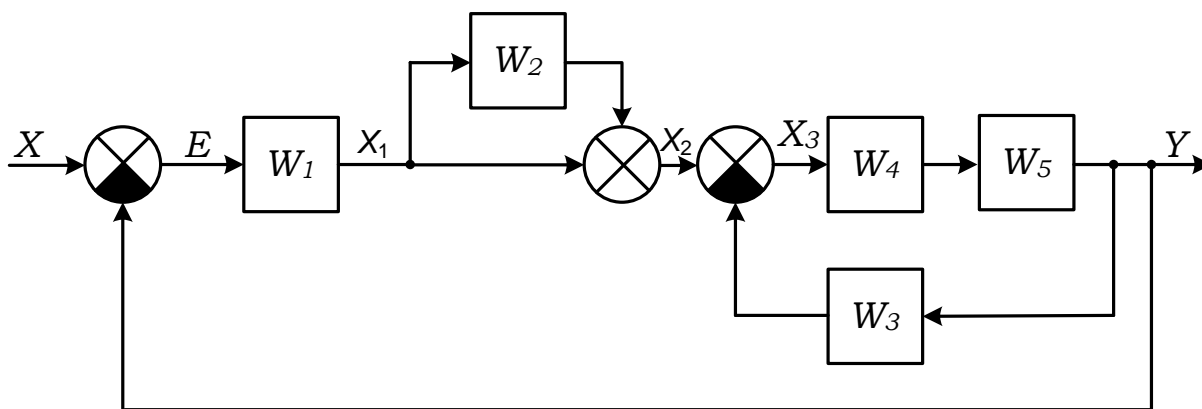


Рис. 3.8. Исходная структурная схема системы

ПФ отдельных звеньев имеют вид:

$$W_1(p) = \frac{1}{p+10}; \quad W_2(p) = \frac{1}{p+1}; \quad W_3(p) = 2;$$

$$W_4(p) = \frac{p^2+1}{p^2+4p+4}; \quad W_5(p) = \frac{1}{p}.$$

**Решение.**

Второй участок схемы с ПФ  $W_2(p)$  и прямой линией со стрелкой представляет собой параллельное соединение двух ПФ, причем одна из

них равна 1, а вторая равна  $W_2(p)$ . Обозначив через  $W_{22}(p)$  передаточную функцию этого участка, получим:

$$W_{22}(p) = \frac{1}{p+1} + 1 = \frac{p+2}{p+1}.$$

Теперь  $W_1(p)$  и  $W_{22}(p)$  соединены последовательно, поэтому объединим их путем перемножения обозначив через  $W_{12}(p)$ :

$$W_{12}(p) = W_1(p) \cdot W_{22}(p) = \frac{1}{p+10} \cdot \frac{p+2}{p+1} = \frac{p+2}{p^2+11p+10}.$$

Передаточные функции  $W_4(p)$  и  $W_5(p)$  соединены последовательно, поэтому

$$W_{45}(p) = W_4(p) \cdot W_5(p) = \frac{p^2+1}{p^2+4p+4} \cdot \frac{1}{p} = \frac{p^2+1}{p^3+4p^2+4p}.$$

Передаточные функции  $W_{45}(p)$  и  $W_3(p)$  представляют собой участок с отрицательной обратной связью (ООС), следовательно, в числителе ПФ этого участка, которую обозначим через  $W_0(p)$ , находится ПФ прямого пути  $W_{45}(p)$ , а в знаменателе – увеличенная на единицу ПФ разомкнутой системы. Следовательно:

$$\begin{aligned} W_0(p) &= \frac{W_{45}(p)}{1 + W_{45}(p)W_3(p)} = \frac{\frac{p^2+1}{p^3+4p^2+4p}}{1 + \frac{p^2+1}{p^3+4p^2+4p} \cdot 2} = \frac{\frac{p^2+1}{p^3+4p^2+4p}}{\frac{p^3+6p^2+4p+2}{p^3+4p^2+4p}} = \\ &= \frac{p^2+1}{p^3+6p^2+4p+2}. \end{aligned}$$

В результате указанных преобразований полезно представить промежуточную схему с ООС (рис. 3.9):

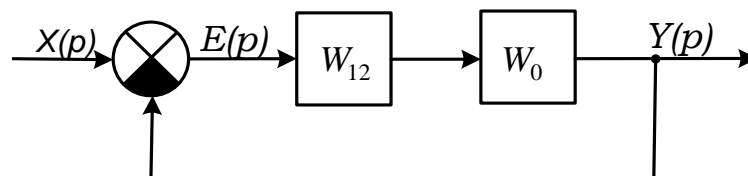


Рис. 3.9. Промежуточная схема системы

ПФ разомкнутой системы:

$$W(p) = W_{12}(p) \cdot W_0(p) = \frac{p+2}{p^2+11p+10} \cdot \frac{p^2+1}{p^3+6p^2+4p+2} =$$

$$= \frac{p+2}{p^2+11p+10} \cdot \frac{p^2+1}{p^3+6p^2+4p+2} = \frac{p^3+2p^2+p+2}{p^5+17p^4+80p^3+106p^2+62p+20}$$

Передаточная функция замкнутой системы с единичной ООС представляет собой дробь, в числителе которой находится ПФ разомкнутой системы, а в знаменателе – увеличенная на единицу ПФ разомкнутой системы.

$$T(p) = \frac{W(p)}{1+W(p)} = \frac{\frac{p^3+2p^2+p+2}{p^5+17p^4+80p^3+106p^2+62p+20}}{1+\frac{p^3+2p^2+p+2}{p^5+17p^4+80p^3+106p^2+62p+20}} = \frac{p^3+2p^2+p+2}{p^5+17p^4+81p^3+108p^2+63p+22}$$

Воспользуемся функциями MATLAB для получения ПФ разомкнутой и замкнутой систем.

```
% Вводим все ПФ
W1=tf(1,[1 10]); W2=tf(1,[1 1]); W3=2;
W4=tf([1 0 1],[1 4 4]); W5=tf(1,[1 0]);
% Находим ПФ участка с ООС Wo
W45=series(W4,W5);Wo=feedback(W45,W3);
%Находим ПФ между двумя сумматорами при параллельном
и последовательном соединении звеньев
W22=parallel(W2,1);W12=series(W1,W22);
% ПФ разомкнутой системы
W=series(W12,Wo)
% ПФ замкнутой системы
T=feedback(W,[1])
>>W=Transfer function:
          s^3 + 2 s^2 + s + 2
-----
s^5 + 17 s^4 + 80 s^3 + 106 s^2 + 62 s + 20
>>T=Transfer function:
          s^3 + 2 s^2 + s + 2
-----
s^5 + 17 s^4 + 81 s^3 + 108 s^2 + 63 s + 22
```

ПФ по ошибке управления замкнутой системы с единичной ООС представляет собой дробь, в числителе которой находится единица, а в знаменателе – увеличенная на единицу ПФ разомкнутой системы. Найдем эту ПФ для данного примера.

Передаточная функция по ошибке управления:

$$T_e(p) = \frac{1}{1+W(p)} = \frac{1}{1 + \frac{p^3 + 2p^2 + p + 2}{p^5 + 17p^4 + 80p^3 + 106p^2 + 62p + 20}} =$$

$$= \frac{p^5 + 17p^4 + 80p^3 + 106p^2 + 62p + 20}{p^5 + 17p^4 + 81p^3 + 108p^2 + 63p + 22}.$$

**Домашнее задание.**

Дана структурная схема САУ с ПИД- регулятором (рис. 3.10). Определить ПФ системы по задающему воздействию и по ошибке управления. Исходными данными при выполнении задания являются: структурная схема системы и передаточные функции всех звеньев.

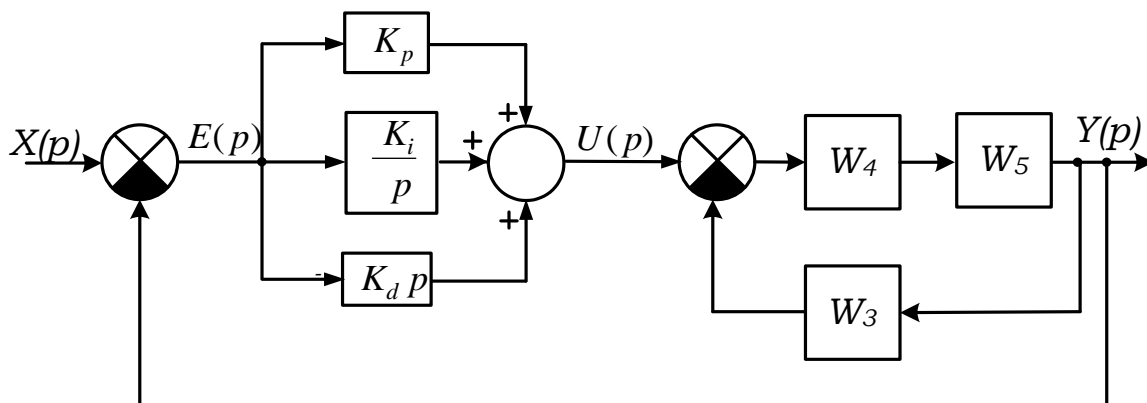


Рис. 3.10. Структурная схема системы для домашнего задания

ПФ отдельных звеньев имеют вид, параметры указаны в таблице 3.1:

$$W_3(p) = K_3; \quad W_4(p) = \frac{K_4}{p + a_0}; \quad W_5(p) = \frac{1}{p}.$$

Таблица 3.1. Таблица коэффициентов ПФ

№ Варианта	$K_p$	$K_i$	$K_d$	$K_3$	$a_0$	$K_4$
1	2	3	4	5	6	7
1	20	10	5	20	5	10
2				22	10	20
3				24	15	30
4				26	20	40
5				28	25	50
6				30	5	10
7				32	10	20
8				34	15	30
9				36	20	40
10				38	25	50



№ Варианта	$K_p$	$K_i$	$K_d$	$K_3$	$a_0$	$K_4$
1	2	3	4	5	6	7
11	30	15	8	40	20	40
12				42	15	30
13				44	25	50
14	40	20	10	46	30	60
15				48	20	40
16				50	40	80
17				52	25	50
18				54	35	70
19				56	40	80
20				58	25	50
21				50	25	15
22	62	40	80			
23	64	30	60			
24	66	20	40			
25	68	35	70			
26	70	25	50			
27	72	45	90			
28	74	40	80			

## Практическое занятие 4 РЕШЕНИЕ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ КЛАССИЧЕСКИМ И ОПЕРАТОРНЫМ МЕТОДАМИ

При анализе системы управления часто требуется определить ее реакцию на входные воздействия (задающие и возмущающие). Для этого требуется решить дифференциальные уравнения, связывающие выходную величину с этими воздействиями. Согласно принципу суперпозиции, справедливому для линейных систем, реакция системы на совокупность воздействий равна сумме реакций на эти воздействия в отдельности. Реакция системы  $y(t)$  на некоторое входное воздействие  $u(t)$  может быть определена путем решения дифференциального уравнения общего вида, связывающего эти функции времени:

$$a_n \frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = b_n \frac{d^n u}{dt^n} + b_{n-1} \frac{d^{n-1} u}{dt^{n-1}} + \dots + b_1 \frac{du}{dt} + b_0 u. \quad (4.1)$$

Поскольку функция  $u(t)$  известна и, следовательно, могут быть вычислены все ее производные, то правая часть уравнения может быть представлена некоторой известной функцией времени:

$$\frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \dots + a_2 \frac{d^2 y}{dt^2} + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = F_n(t). \quad (4.2)$$

Для решения ДУ используются два метода: классический и операторный.

### I. Классический метод решения обыкновенных линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

Как известно, решение неоднородного дифференциального уравнения представляет собой сумму *общего решения*  $y_0(t)$  соответствующего однородного дифференциального уравнения (с нулевой правой частью) и *частного решения*  $\tilde{y}(t)$  неоднородного уравнения:

$$y(t) = y_0(t) + \tilde{y}(t). \quad (4.3)$$

Общее решение называют свободной составляющей, а частное решение – принужденной составляющей.

Вид свободной составляющей зависит от корней характеристического уравнения, составленного для однородного ДУ. Каждый действительный корень  $p_i$  дает экспоненциальную составляющую  $y_{0i}(t) = C_{0i} e^{p_i t}$ , где коэффициент  $C_{0i}$  называется постоянной интегрирования. Для пары комплексно-сопряженных корней  $p_{i,i+1} = \alpha_i \pm j\beta_i$  свободная составляющая записывается с двумя постоянными интегрирования, а именно:

$$y_i(t) = (C_i \cos \beta_i t + C_{i+1} \sin \beta_i t) e^{\alpha_i t}. \quad (4.4)$$

ДУ *первого порядка* с положительными коэффициентами соответствует характеристическое уравнение *первой степени*, которое имеет один отрицательный вещественный корень  $p = -\alpha$ , а свободная составляется записывается в виде:  $y_0(t) = C_0 e^{pt} = C_0 e^{-\alpha t}$ .

ДУ *второго порядка* с положительными коэффициентами соответствует характеристическое уравнение *второй степени*, которое может иметь:

1) два вещественных отрицательных *разных* корня  $p_1 = -\alpha_1, p_2 = -\alpha_2$ . Свободная составляется записывается в виде суммы двух экспоненциальных составляющих:

$$y_0(t) = C_1 e^{p_1 t} + C_2 e^{p_2 t} = C_1 e^{-\alpha_1 t} + C_2 e^{-\alpha_2 t}.$$

2) два вещественных отрицательных *равных* (кратных) корня:  $p_1 = p_2 = -\delta$ . Свободная составляется записывается в более сложном виде:

$$y_0(t) = (C_1 + t C_2) e^{-\delta t}.$$

3) два комплексно-сопряженных корня с отрицательной вещественной частью:  $p_{1,2} = -\alpha \pm j\beta$ . Свободная составляется записывается в виде суммы двух гармонических слагаемых:

$$y_0(t) = (C_1 \cos \beta t + C_2 \sin \beta t) e^{-\alpha t}.$$

Рассмотрим несколько правил записи частного решения (принужденной составляющей) неоднородного ДУ при некоторых видах его правой части (на примере ДУ второго порядка).

**Правило I.** Частное решение  $\tilde{y}$  уравнения

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = A_n t^n + A_{n-1} t^{n-1} + \dots + A_0$$

надо искать в виде

$$\tilde{y} = \begin{cases} Q_n(t), & \text{если } a_0 \neq 0, \\ t Q_n(t), & \text{если } a_0 = 0, a_1 \neq 0, \\ t^2 Q_n(t), & \text{если } a_0 = 0, a_1 = 0. \end{cases}$$

Во всех случаях за  $Q_n(t)$  берется многочлен с неизвестными коэффициентами:

$$Q_n(t) = B_n t^n + B_{n-1} t^{n-1} + \dots + B_0.$$

Значения коэффициентов находятся путем подстановки  $\tilde{y}$  в дифференциальное уравнение.

**Правило II.** Частное решение  $\tilde{y}$  уравнения

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = e^{\alpha t} (A_n t^n + A_{n-1} t^{n-1} + \dots + A_0)$$

надо искать в виде

$$\tilde{y} = \begin{cases} e^{\alpha t} Q_n(t), & \text{если } \alpha \text{ не корень характеристического уравнения} \\ e^{\alpha t} t Q_n(t), & \text{если } \alpha \text{ простой корень этого уравнения} \\ e^{\alpha t} t^2 Q_n(t), & \text{если } \alpha \text{ двойной корень этого уравнения} \end{cases}$$

Отметим, что общий метод нахождения решения неоднородных линейных ДУ разработан Лагранжем и применяется всякий раз, когда известно решение сопровождающего однородного ДУ. Этот метод называется *методом вариации произвольных постоянных*.

**Пример 4.1.** Определить реакцию системы, описываемой дифференциальным уравнением

$$2 \frac{dy}{dt} + y = x(t),$$

на входной сигнал  $x(t) = 1 + 2t$  при нулевом начальном условии  $y(0) = 0$ .

ДУ имеет вид

$$2 \frac{dy}{dt} + y = 1 + 2t.$$

Однородное дифференциальное уравнение:

$$2 \frac{dy}{dt} + y = 0.$$

Его общее решение определяется корнем характеристического уравнения  $2p+1=0$ :

$$y_0(t) = C_0 e^{-0,5t}.$$

Частное решение неоднородного уравнения, согласно правилу I, будем искать в виде

$$\tilde{y}(t) = C_1 + C_2 t.$$

Подставим  $\tilde{y}$  в исходное ДУ:

$$2 \frac{d(C_1 + C_2 t)}{dt} + C_1 + C_2 t = 1 + 2t$$

или

$$2C_2 + C_1 + C_2t = 1 + 2t.$$

Приравняем коэффициенты при одинаковых степенях  $t$ :

$$2C_2 + C_1 = 1; \quad C_2 = 2.$$

Отсюда получаем:  $C_1 = -3$ ,  $C_2 = 2$ .

Теперь решение заданного ДУ содержит одну постоянную интегрирования

$$y(t) = y_0(t) + \tilde{y}(t) = C_0 e^{-0,5t} - 3 + 2t,$$

которую найдем с помощью начального условия:

$$y(0) = C_0 - 3 = 0,$$

откуда  $C = 3$ .

Окончательно запишем

$$y(t) = 3(e^{-0,5t} - 1) + 2t.$$

Временные диаграммы входного и выходного сигналов построены в MATLAB и приведены на рис. 4.1.

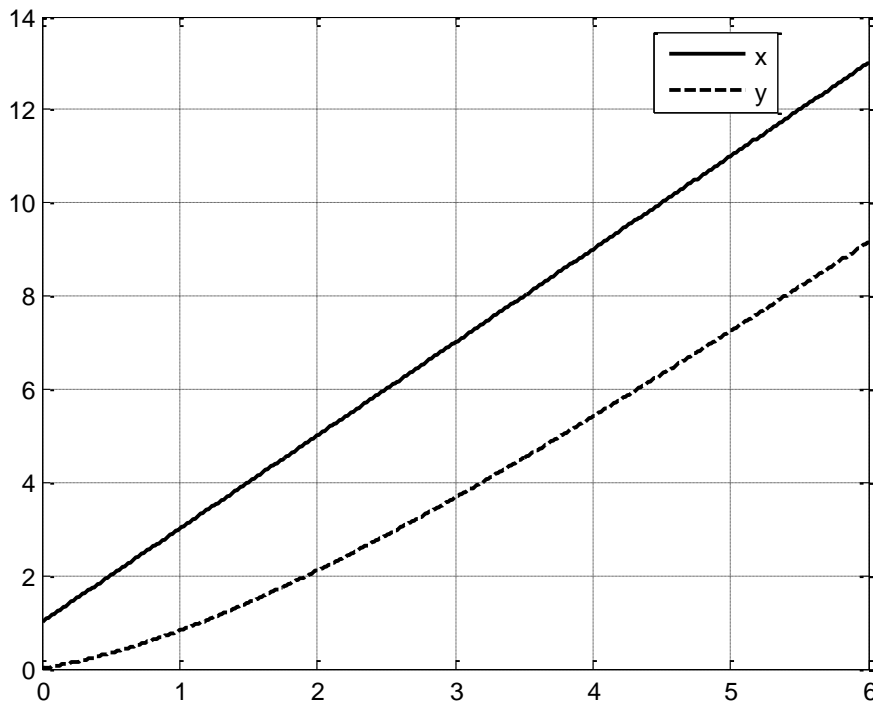


Рис.4.1. Результаты расчетов к примеру 4.1

Графики построены с помощью следующей программы:

```
t=0:0.01:6;  
x=1+2*t;
```

```

y=3*(exp(-0.5*t)-1)+2*t;
plot(t,x,'k-',t,y,'k--'),grid
legend('x','y')

```

**Пример 4.2.** Определить частное решение неоднородного ДУ второго порядка

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + 6 \frac{dy}{dt} + 8y = 10x(t)$$

на входной сигнал  $x(t) = e^{-3t}$  при нулевых начальных условиях, т.е. при  $y(0) = 0$  и  $y'(0) = 0$ .

ДУ имеет вид:

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + 6 \frac{dy}{dt} + 8y = 10e^{-3t}.$$

Составляем характеристическое уравнение и определяем его корни:

$$p^2 + 6p + 8 = 0; \quad p_{1,2} = -3 \pm \sqrt{9-8} = -3 \pm 1; \quad p_1 = -2; \quad p_2 = -4.$$

Общее решение однородного уравнения записывается в виде суммы двух экспонент и содержит две постоянные интегрирования:

$$y_0 = B_1 e^{-2t} + B_2 e^{-4t}.$$

Для нахождения частного решения неоднородного уравнения воспользуемся **Правилом II**:

$$\tilde{y} = C_1 e^{-3t}.$$

Дважды дифференцируем  $\tilde{y}$  и полученные выражения подставляем в исходное неоднородное ДУ, сокращая на  $e^{-3t}$ :

$$\tilde{y}' = -3C_1 e^{-3t} \quad \text{и} \quad \tilde{y}'' = 9C_1 e^{-3t};$$

$$9C_1 - 6 \cdot 3C_1 + 8C_1 = 10.$$

Отсюда получаем значение постоянной интегрирования:  $C_1 = -10$ .

Таким образом, решение неоднородного ДУ равно:

$$y = -10e^{-3t} + B_1 e^{-2t} + B_2 e^{-4t}.$$

Первая производная решения:

$$y' = 30e^{-3t} - 2B_1 e^{-2t} - 4B_2 e^{-4t}.$$

В два последних выражения подставляем начальные условия:

$$\begin{cases} 0 = -10 + B_1 + B_2; \\ 0 = 30 - 2B_1 - 4B_2. \end{cases}$$

В результате решения системы уравнений получаем:  $B_1 = B_2 = 5$ .

Решение заданного неоднородного уравнения принимает вид:

$$y = -10e^{-3t} + 5e^{-2t} + 5e^{-4t}.$$

На рис. 4.2. приведен график решения, построенный в Matlab.

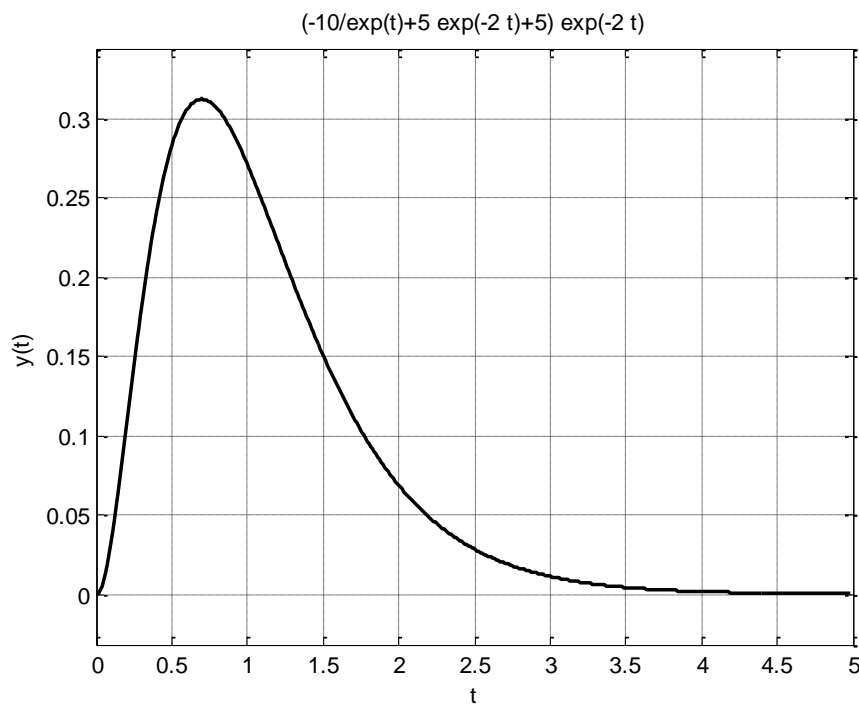


Рис. 4.2. Результаты расчетов к примеру 4.2

**Пример 4.3.** Определить реакцию системы, описываемой дифференциальным уравнением

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + 6 \frac{dy}{dt} + 9y = x(t)$$

на входной сигнал  $x(t) = 90$  при нулевых начальных условиях:

$$dy/dt(0)=y(0) = 0.$$

ДУ имеет вид:

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + 6 \frac{dy}{dt} + 9y = 90.$$

Однородное ДУ:

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + 6 \frac{dy}{dt} + 9y = 0.$$

Его характеристическое уравнение  $p^2 + 6p + 9 = 0$  имеет кратные корни:  $p_{1,2} = -3 \pm \sqrt{3^2 - 9} = -3$ ;  $p_1 = p_2 = -\delta = -3$ .

поэтому решение однородного уравнения записывается в виде:

$$y_0(t) = (C_1 + tC_2)e^{-\delta t} = (C_1 + tC_2)e^{-3t},$$

где  $C_1, C_2$  – постоянные интегрирования.

Правая часть ДУ представляет собой постоянную величину. Поэтому и частное решение также будет постоянной величиной, т.к. ее первая и вторая производные равны нулю.

Частное решение исходного неоднородного уравнения:

$$\tilde{y} = \frac{90}{9} = 10.$$

Запишем общее решение неоднородного уравнения:

$$y(t) = (C_1 + tC_2)e^{-3t} + 10.$$

Первая производная от решения:

$$\frac{dy}{dt} = C_2e^{-3t} - 3e^{-3t}(C_1 + tC_2).$$

Определим  $C_1$  и  $C_2$  из начальных условий:

$$y(0) = C_1 + 10 = 0, \quad C_1 = -10;$$

$$\left. \frac{dy}{dt} \right|_{t=0} = C_2 - 3C_1 = 0, \quad C_2 = 3C_1 = -30.$$

Таким образом, заданное ДУ имеет решение

$$y(t) = 10 - (10 + 30t)e^{-3t} = 10[1 - (1 + 3t)e^{-3t}]$$

**Пример 4.4.** Определить реакцию системы, описываемой дифференциальным уравнением

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + 396 \cdot \frac{dy}{dt} + 2,386 \cdot 10^5 y = 113,6 \frac{du}{dt} + 2,386 \cdot 10^5 u$$

при нулевых начальных условиях. Входной сигнал (входное напряжение) – постоянное напряжение  $u(t) = 100$  В. ДУ взято из примера к практическому занятию 1.

При  $u = 100$  В = const ДУ принимает вид:

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + 396 \cdot \frac{dy}{dt} + 2,386 \cdot 10^5 y = 238,6 \cdot 10^5.$$



Однородное ДУ:

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + 396 \cdot \frac{dy}{dt} + 2,386 \cdot 10^5 y = 0.$$

Его характеристическое уравнение  $p^2 + 396p + 2,386 \cdot 10^5 = 0$  имеет комплексно-сопряженные корни

$$p_{1,2} = -\frac{396}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{396}{2}\right)^2 - 2,386 \cdot 10^5} = -198 \pm j446,5,$$

поэтому решение однородного уравнения записывается в виде:

$$y_0(t) = e^{-198t} (C_1 \cos 446,5t + C_2 \sin 446,5t),$$

где  $C_1, C_2$  – постоянные интегрирования.

Правая часть ДУ представляет собой постоянную величину. Поэтому и частное решение также будет постоянной величиной.

Частное решение исходного неоднородного уравнения:

$$\tilde{y} = \frac{238,6 \cdot 10^5}{2,386 \cdot 10^5} = 100.$$

Запишем общее решение неоднородного уравнения в виде суммы общего и частного решений:

$$y(t) = e^{-198t} (C_1 \cos 446,5t + C_2 \sin 446,5t) + 100.$$

Первая производная от решения:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= -198e^{-198t} (C_1 \cos 446,5t + C_2 \sin 446,5t) + \\ &+ e^{-0,5t} (-446,5C_1 \sin 446,5t + 446,5C_2 \cos 446,5t). \end{aligned}$$

Определим  $C_1$  и  $C_2$  из начальных условий:

$$y(0) = C_1 + 100 = 0, \quad C_1 = -100,$$

$$\left. \frac{dy}{dt} \right|_{t=0} = -198C_1 + 446,5C_2 = 19800 + 446,5C_2 = 0, \quad C_2 = -\frac{19800}{446,5} = -44.$$

Таким образом, заданное ДУ имеет решение

$$y(t) = -(100 \cos 446,5t - 44 \sin 446,5t) e^{-198t} + 100 = 100 - 109 \sin(446,5t + 66^\circ) e^{-198t} \hat{A}$$

Для объединения функций синуса и косинуса можно использовать комплексный метод:

$$100 \cos 446,5t + 44 \sin 446,5t \div 44 j100 = 109 e^{j66^\circ}.$$

Следовательно:

$$109 e^{j66^\circ} \div 109 \sin(446,5t + 66^\circ).$$

## II. Операторный метод решения ОДУ

Операторный метод относится к символическим методам, в которых операции над функциями времени (оригиналами) заменяются операциями над их символами (изображениями). Взаимное соответствие между изображением  $F(p)$  функции времени и самой функцией  $f(t)$  указывается знаком соответствия « $\Leftrightarrow$ »:

$$F(p) \Leftrightarrow f(t) \text{ или } F(p) = L[f(t)]. \quad (4.5)$$

Преобразование Лапласа – это математический метод, в котором осуществляется переход из области вещественного переменного  $t$  в область комплексного переменного  $p = \sigma + j\omega$ . Комплексное число  $p$  называется *оператором Лапласа* или *комплексной частотой*.

Функция комплексной частоты  $F(p)$  называется операторным изображением,  $L$ -изображением или изображением по Лапласу функции  $f(t)$ . Сама исходная функция времени  $f(t)$  является оригиналом по отношению к своему изображению.

### Прямое преобразование Лапласа.

Связь между изображением  $F(p)$  и оригиналом  $f(t)$ , который равен нулю при  $t < 0$ , устанавливается с помощью интеграла Лапласа (прямое преобразование Лапласа):

$$F(p) = L[f(t)] = \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt. \quad (4.6)$$

При этом функция  $f(t)$  должна удовлетворять определенным условиям. Во-первых, она должна удовлетворять условиям Дирихле, т.е. за любой конечный промежуток времени иметь конечное число разрывов первого рода и конечное число максимумов и минимумов. Во-вторых, модуль функции  $f(t)$  должен возрастать медленнее, чем  $Ke^{\alpha t}$ , при этом  $\sigma > \alpha$ .

Применение преобразования Лапласа к системе линейных дифференциальных или интегро-дифференциальных уравнений позволяет получить систему алгебраических уравнений, составленных относительно операторных изображений. В результате решения этой системы получают изображения искомых величин. Их оригиналы (конечная цель расчета) определяются с помощью обратного преобразования Лапласа – по таблицам оригиналов и изображений, методом разложения на простые дроби или по теореме разложения. Напомним некоторые свойства и теоремы преобразования Лапласа.

1. Изображение постоянной величины  $K$  равно этой величине, деленной на оператор Лапласа:

$$K \Leftrightarrow \int_0^{\infty} K e^{-pt} dt = -\frac{K}{p} e^{-pt} \Big|_0^{\infty} = \frac{K}{p}.$$

2. Изображения некоторых выражений с затухающими экспонентами:

$$e^{-\alpha t} \Leftrightarrow \frac{1}{p + \alpha} \quad \text{или} \quad e^{-\frac{t}{T}} \Leftrightarrow \frac{T}{Tp + 1};$$

$$1 - e^{-\alpha t} \Leftrightarrow \frac{\alpha}{p(p + \alpha)} \quad \text{или} \quad 1 - e^{-\frac{t}{T}} \Leftrightarrow \frac{1}{p(Tp + 1)}.$$

3. Изображения гармонических функций:

$$\sin(\omega t + \varphi) \Leftrightarrow \frac{p \sin \varphi + \omega \cos \varphi}{p^2 + \omega^2}; \quad \cos(\omega t + \varphi) \Leftrightarrow \frac{p \cos \varphi - \omega \sin \varphi}{p^2 + \omega^2}.$$

4. Изображения затухающих гармонических функций:

$$e^{-\beta t} \sin(\omega t + \varphi) \Leftrightarrow \frac{(p + \beta) \sin \varphi + \omega \cos \varphi}{(p + \beta)^2 + \omega^2};$$

$$e^{-\beta t} \cos(\omega t + \varphi) \Leftrightarrow \frac{(p + \beta) \cos \varphi - \omega \sin \varphi}{(p + \beta)^2 + \omega^2}.$$

5. Изображение функций вида  $g(t) = A t^n$ :  $G(s) = A \frac{n!}{p^{n+1}}.$

6. Изображение производных функции времени.

Дифференцированию функции  $f(t)$  соответствует умножение изображения этой функции на  $p$  минус начальное значение этой функции:

$$\frac{df(t)}{dt} \Leftrightarrow pF(p) - f(0).$$

Повторным применением можно получить выражение для производной второго порядка:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 f(t)}{dt^2} &= \frac{d}{dt} \left( \frac{df(t)}{dt} \right) \Leftrightarrow p[pF(p) - f(0)] - \frac{df}{dt} \Big|_{t=0} = \\ &= p^2 F(p) - p \cdot f(0_+) - \frac{df}{dt} \Big|_{t=0}. \end{aligned}$$

Для производной  $n$  порядка изображение имеет вид:

$$\frac{d^n f(t)}{dt^n} \Leftrightarrow p^n F(p) - \sum_{k=1}^n p^{n-k} \frac{d^{k-1} f(t)}{dt^{k-1}} \Big|_{t=0}.$$

Если  $f(0)=0$ , то дифференцированию оригинала соответствует умножение изображения функции на  $p$ :

$$\frac{df(t)}{dt} \Leftrightarrow pF(p)$$

При  $f(0) = f'(0) = \dots = f^{(n-1)}(0) = 0$  имеет место формула

$$\frac{d^n f(t)}{dt^n} \Leftrightarrow p^n F(p).$$

7. Изображение интеграла от функции времени.

Интегрированию функции времени от 0 до  $t$  соответствует деление изображения этой функции на  $p$ :

$$\int_0^t f(t) dt \Leftrightarrow \frac{F(p)}{p}.$$

8. Теорема запаздывания.

Смещению функции времени  $f(t)$  на  $t_0$  соответствует умножение изображения на  $e^{-pt_0}$ :

$$f(t - t_0) \Leftrightarrow e^{-pt_0} F(p).$$

9. Теорема о конечном значении.

Для получения конечного значения оригинала необходимо его изображение умножить на оператор Лапласа и в полученном выражении устремить к нулю этот оператор:

$$f_{ss} = \lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p \cdot F(p),$$

если предел левой части существует. Теорема о конечном значении неприменима к функциям, которые не имеют конечного значения.

10. Теорема о начальном значении.

Для получения начального значения оригинала необходимо его изображение умножить на оператор Лапласа и в полученном выражении устремить к бесконечности этот оператор:

$$f(0) = \lim_{t \rightarrow 0} f(t) = \lim_{p \rightarrow \infty} p \cdot F(p),$$

если этот предел существует.

**Обратное преобразование Лапласа (отыскание оригинала по изображению).**

Заключительным этапом операторного метода является отыскание оригинала (искомой функции времени) по изображению. Обычно в ТАУ используются два метода: разложение изображения на простые дроби и использование таблиц. Одна из таких таблиц приведена ниже (табл. 4.1).

1. Разложение изображения на простые дроби и нахождение оригинала для каждого слагаемого.

Если дробно-рациональная функция общего вида

$$F(p) = \frac{N(p)}{D(p)} = \frac{p^m + b_{m-1}p^{m-1} + \dots + b_1p + b_0}{p^n + a_{n-1}p^{n-1} + \dots + a_1p + a_0}, \quad m < n,$$

не имеет кратных полюсов (все корни знаменателя разные), то функцию  $F(p)$  можно записать в виде:

$$F(p) = \frac{N(p)}{D(p)} = \frac{\prod_{i=1}^m (p - z_i)}{\prod_{i=1}^n (p - p_i)} = \frac{(p - z_1)(p - z_2)\dots(p - z_m)}{(p - p_1)(p - p_2)\dots(p - p_n)} =$$

$$= \frac{r_1}{p - p_1} + \frac{r_2}{p - p_2} + \dots + \frac{r_n}{p - p_n}.$$

Допустим, нужно определить коэффициент  $r_2$ . Сначала умножим все члены  $F(p)$  на  $(p - p_2)$ :

$$\frac{(p - p_2)N(p)}{(p - p_1)(p - p_2)\dots(p - p_n)} = \frac{r_1(p - p_2)}{p - p_1} + r_2 + \dots + \frac{r_n(p - p_2)}{p - p_n}.$$

Если теперь принять  $p = p_2$ , то все члены в правой части, кроме  $r_2$ , обратятся в нуль, а выражение в левой части сократится на бином  $(p - p_2)$ . Тогда

$$r_2 = \left. \frac{N(p)}{(p - p_1)(p - p_3)\dots(p - p_n)} \right|_{p = p_2} = \frac{(p_2 - z_1)(p_2 - z_2)\dots(p_2 - z_m)}{(p_2 - p_1)(p_2 - p_3)\dots(p_2 - p_n)}.$$

Рассмотренный подход определения коэффициентов разложения вручную применим и в случае комплексно-сопряженных корней (полюсов).

Пусть  $F(p)$  имеет пару комплексно-сопряженных полюсов, которые обозначим как  $p_1 = a - jb$  и  $p_2 = a + jb$ . Тогда изображение можно записать в виде:

$$F(p) = \frac{r_1}{p - p_1} + \frac{r_2}{p - p_2} = \frac{r_1}{p - a + jb} + \frac{r_2}{p - a - jb}.$$

Коэффициенты разложения будут комплексными. Найдем их:

$$r_1 = (p - a + jb)F(p) \Big|_{p=a-jb} = R e^{j\theta};$$

$$r_2 = (p - a - jb)F(p) \Big|_{p=a+jb} = R e^{-j\theta} = r_1^*,$$

где звездочка является признаком комплексно-сопряженного числа.

Далее запишем:

$$F(p) = \frac{r_1}{p - a + jb} + \frac{r_2}{p - a - jb} = \frac{R e^{j\theta}}{p + (-a + jb)} + \frac{R e^{-j\theta}}{p + (-a - jb)}.$$

Используя преобразование  $e^{-\alpha t} \Leftrightarrow \frac{1}{p + \alpha}$ , получим оригинал:

$$f(t) = R e^{j\theta} \cdot e^{-(-a+jb)t} + R e^{-j\theta} \cdot e^{-(-a-jb)t} = R e^{j\theta} \cdot e^{at} e^{-jbt} + R e^{-j\theta} \cdot e^{at} e^{jbt} =$$

$$= R e^{at} [e^{j(bt-\theta)} + e^{-j(bt-\theta)}] =$$

$$= R e^{at} [\cos(bt - \theta) + j \sin(bt - \theta) + \cos(bt - \theta) - j \sin(bt - \theta)] =$$

$$= 2R e^{at} \cdot \cos(bt - \theta) = 2R e^{at} \cdot \sin(bt - \theta + \frac{\pi}{2}).$$

Иногда встречаются изображения с кратными полюсами, т.е. полином в знаменателе функции  $A(p)$  имеет кратные корни.

Пусть

$$F(p) = \frac{N(p)}{(p - p_1)(p - p_2)^q} = \frac{r_1}{p - p_1} + \frac{r_{21}}{(p - p_2)^1} + \frac{r_{22}}{(p - p_2)^2} \dots + \frac{r_{2q}}{(p - p_2)^q},$$

откуда видно, что корню кратности  $q$  в разложении на простые дроби соответствуют  $q$  слагаемых. Коэффициенты первого  $r_1$  и последнего  $r_{2q}$  слагаемых находятся как обычно. Остальные коэффициенты,  $r_{2j}$ , где  $j = 1, 2, \dots, q-1$  вычисляются по формуле:

$$r_{2j} = \frac{1}{(q-j)!} \cdot \frac{d^{q-j}}{dp^{q-j}} [(p - p_2)^q \cdot F(p)] \Big|_{p = p_2}. \quad (4.7)$$

Здесь используется производная по  $p$  порядка  $(q-j)$  функции, стоящей в квадратных скобках.

Второй способ разложения на простые дроби выражения

$$F(p) = \frac{N(p)}{D(p)} = \frac{r_1}{p - p_1} + \frac{r_2}{p - p_2} + \dots + \frac{r_n}{p - p_n}$$

состоит из следующих операций:

1) приводим обе части равенства к общему знаменателю и отбрасываем его;

2) составляем систему уравнений, приравнивая коэффициенты при равных степенях  $p$  левой и правой части равенства;

3) решаем систему уравнений, определяя коэффициенты разложения.

При наличии кратных корней можно комбинировать оба способа.

## 2. Использование таблиц для обратных преобразований Лапласа.

Знаменатели изображений в таблице 4.1 представлены в виде произведения элементарных сомножителей, являющихся знаменателями передаточных функций типовых динамических звеньев.

Таблица 4.1

№ п/п	Изображение	Оригинал
1	$\frac{1}{Tp+1}$	$\alpha e^{-\alpha t}, \text{ где } \alpha = 1/T$
2	$\frac{1}{p(Tp+1)}$	$1 - e^{-\alpha t}, \text{ где } \alpha = 1/T$
3	$\frac{\tau p+1}{p(Tp+1)}$	$1 + (\alpha\tau - 1)e^{-\alpha t}, \text{ где } \alpha = 1/T$
4	$\frac{1}{(Tp+1)^2}$	$\alpha^2 t e^{-\alpha t}, \text{ где } \alpha = 1/T$
5	$\frac{1}{p^2(Tp+1)}$	$\frac{1}{\alpha}(-1 + e^{-\alpha t}) + t, \text{ где } \alpha = 1/T$
6	$\frac{1}{p(Tp+1)^2}$	$1 - (1 + \alpha t)e^{-\alpha t}, \text{ где } \alpha = 1/T$
7	$\frac{\tau p+1}{(Tp+1)^2}$	$\alpha^2 [\tau + (1 - \alpha\tau)]e^{-\alpha t}, \text{ где } \alpha = 1/T$
8	$\frac{\tau p+1}{p(Tp+1)^2}$	$1 - [1 + \alpha(1 - \alpha\tau)t]e^{-\alpha t}, \text{ где } \alpha = 1/T$
9	$\frac{1}{(Tp+1)^3}$	$\frac{\alpha^3 t^2}{2} e^{-\alpha t}, \text{ где } \alpha = 1/T$
10	$\frac{1}{p(Tp+1)^3}$	$1 - \left(1 + \alpha t + \frac{\alpha^2 t^2}{2}\right) e^{-\alpha t}, \text{ где } \alpha = 1/T$
11	$\frac{1}{(T_1 p+1)(T_2 p+1)}$	$\frac{1}{T_1 - T_2} (e^{-\alpha_1 t} - e^{-\alpha_2 t}), \text{ где } \alpha_i = 1/T_i$

№ п/п	Изображение	Оригинал
12	$\frac{p}{(T_1 p + 1)(T_2 p + 1)}$	$C_1 e^{-\alpha_1 t} - C_2 e^{-\alpha_2 t}, \text{ где } C_1 = \frac{1}{T_1(T_2 - T_1)};$ $C_2 = \frac{1}{T_2(T_2 - T_1)}; \alpha_i = 1/T_i$
13	$\frac{\tau + 1}{(T_1 p + 1)(T_2 p + 1)}$	$C_1 e^{-\alpha_1 t} + C_2 e^{-\alpha_2 t}, \text{ где } C_1 = \frac{T_1 - \tau}{T_1(T_1 - T_2)};$ $C_2 = \frac{\tau - T_2}{T_2(T_1 - T_2)}; \alpha_i = 1/T_i$
14	$\frac{1}{p(T_1 p + 1)(T_2 p + 1)}$	$1 + C_1 e^{-\alpha_1 t} - C_2 e^{-\alpha_2 t}, \text{ где } C_1 = \frac{T_1}{T_2 - T_1};$ $C_2 = \frac{T_2}{T_2 - T_1}; \alpha_i = 1/T_i$
15	$\frac{\tau + 1}{p(T_1 p + 1)(T_2 p + 1)}$	$1 + C_1 e^{-\alpha_1 t} + C_2 e^{-\alpha_2 t}, \text{ где } C_1 = \frac{\tau - T_1}{T_1 - T_2};$ $C_2 = \frac{T_2 - \tau}{T_1 - T_2}; \alpha_i = 1/T_i$
16	$\frac{1}{(T_1 p + 1)(T_2 p + 1)(T_3 p + 1)}$	$C_1 e^{-\alpha_1 t} + C_2 e^{-\alpha_2 t} + C_3 e^{-\alpha_3 t}, \text{ где } C_1 = \frac{T_1}{(T_1 - T_2)(T_1 - T_3)};$ $C_2 = \frac{T_2}{(T_2 - T_1)(T_2 - T_3)}; C_3 = \frac{T_3}{(T_3 - T_1)(T_3 - T_2)};$ $\alpha_i = 1/T_i$
17	$\frac{1}{p(T_1 p + 1)(T_2 p + 1)(T_3 p + 1)}$	$1 - C_1 e^{-\alpha_1 t} - C_2 e^{-\alpha_2 t} - C_3 e^{-\alpha_3 t},$ $\text{ где } C_1 = \frac{T_1^2}{(T_1 - T_2)(T_1 - T_3)}; C_2 = \frac{T_2^2}{(T_2 - T_1)(T_2 - T_3)};$ $C_3 = \frac{T_3^2}{(T_3 - T_1)(T_3 - T_2)}; \alpha_i = 1/T_i$
18	$\frac{1}{T^2 p^2 + 2\xi T p + 1}$	$C e^{-\gamma t} \sin \lambda t, \text{ где } C = \frac{1}{\lambda T^2}; \gamma = \frac{\xi}{T};$ $\lambda = \frac{\sqrt{1 - \xi^2}}{T}$



№ п/п	Изображение	Оригинал
19	$\frac{\tau p + 1}{T^2 p^2 + 2\xi T p + 1}$	$Ce^{-\gamma t} \sin(\lambda t + \Theta)$ , где $C = \frac{\sqrt{(1-2\lambda\tau)T^2 - \tau^2}}{\lambda T^3}$ ; $\Theta = \arctg \frac{\tau\lambda}{1-\gamma\tau}$ ; $\gamma = \frac{\xi}{T}$ ; $\lambda = \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{T}$
20	$\frac{1}{p(T^2 p^2 + 2\xi T p + 1)}$	$1 - Ce^{-\gamma t} \sin(\lambda t + \Theta)$ , где $C = \frac{1}{\lambda T}$ ; $\Theta = \arctg \frac{\lambda}{\gamma}$ ; $\gamma = \frac{\xi}{T}$ ; $\lambda = \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{T}$
21	$\frac{\tau p + 1}{p(T^2 p^2 + 2\xi T p + 1)}$	$1 + Ce^{-\gamma t} \sin(\lambda t - \Theta)$ , где $C = \frac{\sqrt{\tau^2 + (1-2\gamma\tau)T^2}}{\lambda T^2}$ ; $\Theta = \arctg \frac{\lambda T^2}{\tau - \gamma T^2}$ ; $\gamma = \frac{\xi}{T}$ ; $\lambda = \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{T}$

Применение преобразования Лапласа к решению дифференциальных уравнений включает в себя несколько этапов:

1) переход от дифференциальных уравнений для оригиналов к алгебраическим уравнениям для изображений (прямое преобразование Лапласа);

2) решение операторных уравнений относительно изображений искомых величин;

3) нахождение оригиналов (обратное преобразование Лапласа).

Решим операторным методом те ДУ, которые были решены выше классическим методом.

**Пример 4.5.** Определить решение неоднородного ДУ первого порядка

$$2 \frac{dy}{dt} + y = 1 + 2t$$

с начальным условием  $y(0) = 0$ .

Запишем уравнение для изображений:

$$2pY(p) + Y(p) = \frac{1}{p} + \frac{2}{p^2}$$

и найдем изображение искомой функции:

$$Y(p) = \frac{\frac{1}{p} + \frac{2}{p^2}}{2p+1} = \frac{p+2}{p^2(2p+1)}.$$

Найдем оригинал  $y(t)$ . Для этого представим изображение в виде суммы элементарных дробей:

$$Y(p) = \frac{p+2}{p^2(2p+1)} = \frac{r_1}{p^2} + \frac{r_2}{p} + \frac{r_3}{2p+1}.$$

Приведем правую часть к общему знаменателю и отбросим знаменатели обеих частей:

$$p+2 = r_1(2p+1) + r_2p(2p+1) + r_3p^2$$

или

$$p+2 = p^2(2r_2+r_3) + p(2r_1+r_2) + r_1.$$

Приравняем коэффициенты при одинаковых степенях оператора  $p$ :

$$2r_2+r_3=0; \quad 2r_1+r_2=0; \quad r_1=2.$$

Отсюда получаем значения коэффициентов:

$$r_1=2, \quad r_2=-3, \quad r_3=6.$$

Тогда изображение выхода принимает вид:

$$Y(p) = \frac{2}{p^2} - \frac{3}{p} + \frac{6}{2p+1} = \frac{2}{p^2} - \frac{3}{p} + \frac{3}{p+0,5}.$$

Найдем оригинал решения как сумму оригиналов отдельных слагаемых:

$$y = 2t - 3 + 3e^{-0,5t} = 3(e^{-0,5t} - 1) + 2t.$$

**Пример 4.6.** Определить решение неоднородного ДУ второго порядка

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 6\frac{dy}{dt} + 8y = 10e^{-3t}$$

при нулевых начальных условиях.

Запишем уравнение для изображений:

$$p^2Y(p) + 6pY(p) + 8Y(p) = \frac{10}{p+3}$$

и найдем изображение искомой функции:

$$Y(p) = \frac{10}{(p^2+6p+8)(p+3)} = \frac{10}{(p+2)(p+4)(p+3)} = \frac{r_1}{p+2} + \frac{r_2}{p+4} + \frac{r_3}{p+3}, \quad (4.8)$$

Для нахождения неизвестных коэффициентов простых дробей при отсутствии кратных корней используем первый способ.

Умножим обе части (4.8) на полином  $(p+2)$  и в полученное выражение подставим первый корень, затем на полином  $(p+4)$  и подставим второй корень и, наконец, на полином  $(p+3)$  и подставим третий корень:

$$\frac{10}{(p_1+4)(p_1+3)} = r_1; \quad \frac{10}{(p_1+2)(p_1+3)} = r_2; \quad \frac{10}{(p_1+2)(p_1+4)} = r_3.$$

Отсюда получаем значения коэффициентов разложения:

$$r_1 = \frac{10}{(-2+4)(-2+3)} = 5; \quad r_2 = \frac{10}{(-4+2)(-4+3)} = 5;$$

$$r_3 = \frac{10}{(-3+2)(-3+4)} = -10.$$

Теперь запишем изображение выходной величины

$$Y(p) = \frac{5}{p+2} + \frac{5}{p+4} + \frac{-10}{p+3}$$

и ее оригинал

$$y = 5e^{-2t} + 5e^{-4t} - 10e^{-3t}.$$

Разложение  $Y(p)$  на простые дроби выполним также с помощью программы MATLAB. Для этого запишем изображение в виде отношения двух полиномов:

$$Y(p) = \frac{10}{(p+3)(p^2+6p+8)} = \frac{10}{p^3+9p^2+26p+24}$$

```
Ynum=[10]
Yden=[1 9 26 24]
[r,p,k]=residue(Ynum,Yden)
r =
    5.0000
   -10.0000
    5.0000
p =
   -4.0000
   -3.0000
   -2.0000
k = []
```

В первой строке программы задается полином числителя (*numerator* – числитель дроби, англ.), во второй – полином знаменателя изображения (*denominator* – знаменатель дроби).

Полином в MATLAB задается вектором его коэффициентов, начиная со старшей степени. Ввод вектора-строки осуществляется в квадратных

скобках, элементы которого разделяются пробелами или запятыми. Число элементов вектора, т.е. число коэффициентов полинома, всегда на единицу больше его степени, нулевые коэффициенты должны содержаться в векторе. Дадим описание функции `residue` (остаток, вычет):

$[r,p,k] = \text{residue}(B,A)$  находит коэффициенты  $k$ , полюса  $p$  и коэффициенты  $r$  (вычеты) числителя дробно-рационального разложения отношения двух полиномов  $B(s)/A(s)$ . Если знаменатель не имеет кратных (одинаковых) корней, то отношение полиномов можно представить в виде:

$$\frac{B(p)}{A(p)} = \frac{r_1}{p-p_1} + \frac{r_2}{p-p_2} + \dots + \frac{r_n}{p-p_n} + k(p).$$

Вычеты возвращаются в вектор-столбце  $\mathbf{r}$ , полюса – в вектор-столбце  $\mathbf{p}$  и коэффициенты – в вектор-строке  $\mathbf{k}$ . Число полюсов равно  $n = \text{length}(A(p)) - 1 = \text{length}(\mathbf{r}) = \text{length}(\mathbf{p})$ . Вектор коэффициентов  $\mathbf{k}$  оказывается пустым, если степень числителя  $B(p)$  меньше степени знаменателя  $A(p)$  отношения полиномов. Каждому полюсу соответствует свой коэффициент. Так, в примере полюсу  $p_1 = -4$  соответствует коэффициент  $r_1 = 5$ , полюсу  $p_2 = -3$  соответствует коэффициент  $r_2 = -10$ , полюсу  $p_3 = -2$  соответствует коэффициент  $r_3 = 5$ . Коэффициент  $k$  равен нулю.

Это позволяет записать изображение в виде

$$Y(p) = \frac{10}{p^3 + 9p^2 + 26p + 24} = \frac{r_1}{p-p_1} + \frac{r_2}{p-p_2} + \frac{r_3}{p-p_3} = \frac{5}{p+4} + \frac{-10}{p+3} + \frac{5}{p+2},$$

а затем определить оригинал.

**Пример 4.7.** Определить реакцию системы, описываемой дифференциальным уравнением

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + 6 \frac{dy}{dt} + 9y = x(t)$$

на входной сигнал  $x(t) = 90$  при нулевых начальных условиях:

$$dy/dt(0) = y(0) = 0.$$

ДУ имеет вид:

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + 6 \frac{dy}{dt} + 9y = 90.$$

Запишем уравнение для изображений:

$$p^2 Y(p) + 6pY(p) + 9Y(p) = \frac{90}{p}$$

и найдем изображение искомой функции:

$$Y(p) = 90 \cdot \frac{1}{p(p^2 + 6p + 9)}.$$

Корни полинома в скобках найдены выше:  $p_1 = p_2 = -3$ . Поэтому

$$Y(p) = \frac{90}{p(p+3)(p+3)} = \frac{90}{p(p+3)^2} = \frac{90}{9} \cdot \frac{1}{p\left(\frac{1}{3}p+1\right)^2} = 10 \cdot \frac{1}{p\left(\frac{1}{3}p+1\right)^2}.$$

Для нахождения оригинала воспользуемся таблицей 4.1, строчка 5:

$$\frac{1}{p(Tp+1)^2} \Leftrightarrow 1 - (1 + \alpha t)e^{-\alpha t}, \text{ где } \alpha = 1/T.$$

Так как  $T = 1/3$  и  $\alpha = 3$ , то оригинал принимает вид:

$$y(t) = 10[1 - (1 + 3t)]e^{-3t}.$$

Получено такое же выражение, как и классическим методом.

Решим задачу в Matlab:

```
syms Y p t
Y=90/(p*(p^2+2*p+1))
y=ilaplace(Y,p,t);
y=vpa(y,3)
figure(1)
ezplot(y,[0 22]),grid
```

В командном окне

```
Y=90/(p*(p^2 + 2*p + 1))
y=90.0 - 90.0*t*exp(-1.0*t) - 90.0*exp(-1.0*t)
```

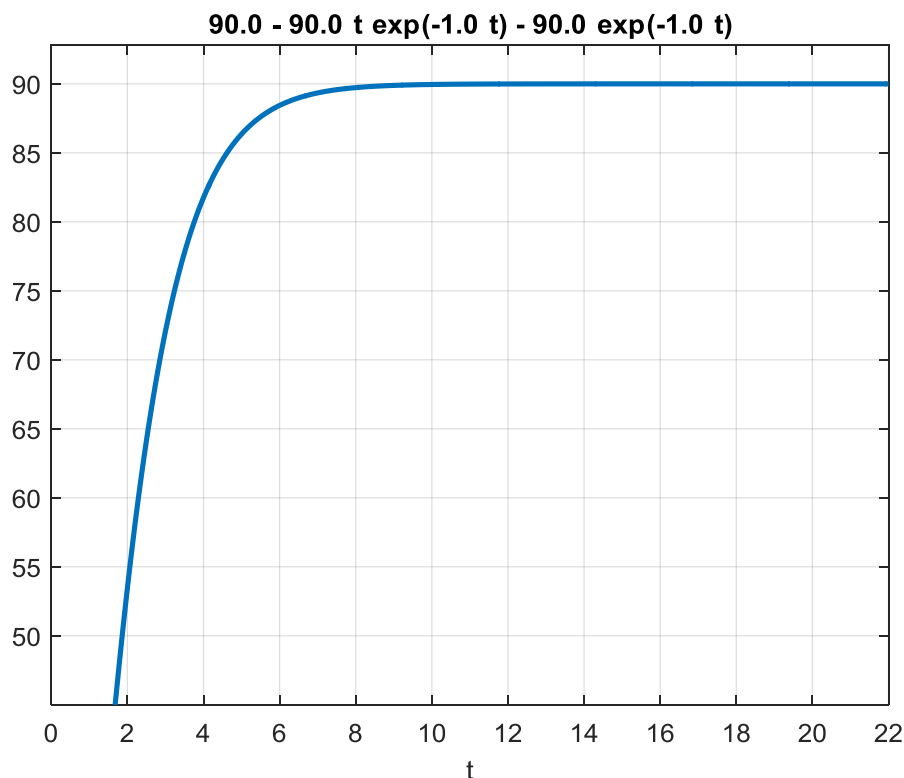


Рис. 4.3. Результаты расчетов по примеру 4.7

В программе `syms` – это функция для создания символических объектов (symbolic objects). После нее следуют аргументы: *символ изображения*, оператор Лапласа  $s$  (в компьютерных программах обозначается символом  $s$ ), время  $t$ .

**Пример 4.8.** Определить реакцию системы, описываемой дифференциальным уравнением

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + 396 \cdot \frac{dy}{dt} + 2,386 \cdot 10^5 y = 113,6 \frac{du}{dt} + 2,386 \cdot 10^5 u$$

при нулевых начальных условиях. Входной сигнал (входное напряжение) – постоянное напряжение  $u(t) = 100$  В. ДУ взято из примера к практическому занятию 1.

При  $u = 100$  В = const ДУ принимает вид:

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + 396 \cdot \frac{dy}{dt} + 2,386 \cdot 10^5 y = 238,6 \cdot 10^5.$$

Запишем уравнение для изображений:

$$p^2 Y(p) + 396 p Y(p) + 2,386 \cdot 10^5 Y(p) = \frac{238,6 \cdot 10^5}{p}$$

и найдем изображение искомой функции:

$$Y(p) = 238,6 \cdot 10^5 \cdot \frac{1}{p(p^2 + 396 p + 2,386 \cdot 10^5)}.$$

Полином в знаменателе имеет комплексно-сопряженные корни:

$$p_{1,2} = -\frac{396}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{396}{2}\right)^2 - 2,386 \cdot 10^5} = -198 \pm j446,5.$$

Поэтому изображение нужно записать в виде:

$$\begin{aligned} Y(p) &= 238,6 \cdot 10^5 \cdot \frac{1}{p(p^2 + 396 p + 2,386 \cdot 10^5)} = \\ &= \frac{238,6 \cdot 10^5}{2,386 \cdot 10^5} \cdot \frac{1}{p \left( \frac{1}{2,386 \cdot 10^5} p^2 + \frac{396}{2,386 \cdot 10^5} p + \frac{2,386 \cdot 10^5}{2,386 \cdot 10^5} \right)} = \\ &= 100 \cdot \frac{1}{p(0,419 \cdot 10^{-5} p^2 + 1,66 \cdot 10^{-3} p + 1)} = K \cdot \frac{1}{p(T^2 p^2 + 2\xi T p + 1)}. \end{aligned}$$

Воспользуемся формулой из таблицы 4.1 (строчка 20):

$$T = \sqrt{0,419 \cdot 10^{-5}} = 2,05 \cdot 10^{-3}; \xi = \frac{1,66 \cdot 10^{-3}}{2T} = \frac{1,66 \cdot 10^{-3}}{2 \cdot 2,05 \cdot 10^{-3}} = 0,405;$$

$$\lambda = \frac{\sqrt{1 - \xi^2}}{T} = \frac{\sqrt{1 - (0,405)^2}}{2,05 \cdot 10^{-3}} = 446; \quad \gamma = \frac{\xi}{T} = \frac{0,405}{2,05 \cdot 10^{-3}} = 198; \quad K = 100;$$

$$C = \frac{1}{\lambda T} = \frac{1}{446 \cdot 2,05 \cdot 10^{-3}} = 1,09; \quad \Theta = \operatorname{arctg} \frac{\lambda}{\gamma} = \operatorname{arctg} \frac{446}{198} = 66^\circ.$$

Следовательно:

$$y(t) = K[1 - Ce^{-\lambda t} \sin(\lambda t + \Theta)] = 100[1 - 1,09e^{-198t} \sin(446t + 66^\circ)] = \\ = 100 - 109e^{-198t} \sin(446t + 66^\circ).$$

Такое же выражение получено классическим методом.

Операторный метод очень удобен для решения уравнений состояния, особенно при нулевых начальных условиях, что чаще всего и имеет место в ТАУ.

**Пример 4.9.** Определить законы изменения переменных состояния с помощью операторного метода. Начальные условия нулевые.

Модель задана в виде следующей системы уравнений состояния:

$$\begin{cases} \frac{dx_1(t)}{dt} = a_{11}x_1(t) + a_{12}x_2(t) + b_1u(t) \\ \frac{dx_2(t)}{dt} = a_{21}x_1(t) + a_{22}x_2(t) + b_2u(t) \end{cases}$$

Запишем систему уравнений в операторной форме (при нулевых начальных условиях):

$$\begin{cases} pX_1(p) = a_{11}X_1(p) + a_{12}X_2(p) + b_1U(p) \\ pX_2(p) = a_{21}X_1(p) + a_{22}X_2(p) + b_2U(p) \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} (p - a_{11})X_1(p) - a_{12}X_2(p) = b_1U(p) \\ -a_{21}X_1(p) + (p - a_{22})X_2(p) = b_2U(p) \end{cases}$$

Решим систему операторных уравнений с помощью определителей:

– главный определитель

$$\Delta(p) = \begin{vmatrix} p - a_{11} & -a_{12} \\ -a_{21} & p - a_{22} \end{vmatrix} = p^2 + (-a_{11} - a_{22})p + a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

– вспомогательные определители

$$\Delta_1(p) = \begin{vmatrix} b_1 U(p) & -a_{12} \\ b_2 U(p) & p - a_{22} \end{vmatrix} = [b_1 p + (a_{12} b_2 - a_{22} b_1)] U(p)$$

$$\Delta_2(p) = \begin{vmatrix} p - a_{11} & b_1 U(p) \\ -a_{21} & b_2 U(p) \end{vmatrix} = [b_2 p + (a_{21} b_1 - a_{11} b_2)] U(p)$$

Изображения переменных состояния:

$$X_1(p) = \frac{\Delta_1(p)}{\Delta(p)} = \frac{b_1 p + (a_{12} b_2 - a_{22} b_1)}{p^2 + (-a_{11} - a_{22})p + a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}} \cdot U(p)$$

$$X_2(p) = \frac{\Delta_2(p)}{\Delta(p)} = \frac{b_2 p + (a_{21} b_1 - a_{11} b_2)}{p^2 + (-a_{11} - a_{22})p + a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}} \cdot U(p)$$

Если входное воздействие является постоянной величиной, т.е.  $u(t) = U = const$ , то  $U(p) = \frac{U}{p}$ , и выражения для изображений принимают

вид:

$$X_1(p) = \frac{[b_1 p + (a_{12} b_2 - a_{22} b_1)] U}{p[p^2 + (-a_{11} - a_{22})p + a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}]}$$

$$X_2(p) = \frac{\Delta_2(p)}{\Delta(p)} = \frac{[b_2 p + (a_{21} b_1 - a_{11} b_2)] U}{p[p^2 + (-a_{11} - a_{22})p + a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}]}$$

Пусть коэффициенты уравнений имеют значение (см. практику 1):

$$a_{11} = -113,6; a_{12} = 4545; a_{21} = -45,5; a_{22} = -281,8;$$

$$b_1 = 113,6; b_2 = 45,5.$$

На входе действует ступенчатая функция, т.е.  $U = 100$ . Найдем изображения переменных состояния:

$$\begin{aligned} X_1(p) &= \frac{[b_1 p + (a_{12} b_2 - a_{22} b_1)] U}{p[p^2 + (-a_{11} - a_{22})p + a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}]} = \\ &= \frac{[113,6 p + (4545 \cdot 45,5 - (-281,8) 113,6)] \cdot 100}{p[p^2 + (113,6 + 281,8)p + 113,6 \cdot 281,8 + 4545 \cdot 45,5]} = \\ &= \frac{11360 p + 238,6 \cdot 10^5}{p(p^2 + 396 p + 2,386 \cdot 10^5)}; \end{aligned}$$

$$X_2(p) = \frac{[b_2 p + (a_{21} b_1 - a_{11} b_2)] U}{p[p^2 + (-a_{11} - a_{22})p + a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}]} =$$



$$= \frac{[45,5p + (-45,5 \cdot 113,6 - (-113,6)45,5)] \cdot 100}{p[p^2 + (113,6 + 281,8)p + 113,6 \cdot 281,8 + 4545 \cdot 45,5]} =$$

$$= \frac{4550p}{p(p^2 + 396p + 2,386 \cdot 10^5)} = \frac{4550}{p^2 + 396p + 2,386 \cdot 10^5}.$$

Найдем корни полинома второй степени в знаменателе:

$$p_{1,2} = -\frac{396}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{396}{2}\right)^2 - 2,386 \cdot 10^5} = -198 \pm j446,5;$$

$$p_1 = -198 + j446,5; \quad p_2 = -198 - j446,5.$$

Знаменатель нужно записать в форме, применяемой в таблице, т.е. в нормированном виде. Для этого числитель и знаменатель изображений разделим на свободный член знаменателя:

$$X_1(p) = \frac{11360p + 238,6 \cdot 10^5}{p(p^2 + 396p + 2,386 \cdot 10^5)} = \frac{\frac{11360}{2,386 \cdot 10^5} p + \frac{238,6 \cdot 10^5}{2,386 \cdot 10^5}}{p \left( \frac{1}{2,386 \cdot 10^5} p^2 + \frac{396}{2,386 \cdot 10^5} p + \frac{2,386 \cdot 10^5}{2,386 \cdot 10^5} \right)} =$$

$$= \frac{4,76 \cdot 10^{-2} p + 100}{p(4,19 \cdot 10^{-6} p^2 + 1,66 \cdot 10^{-3} p + 1)} = 100 \cdot \frac{4,76 \cdot 10^{-4} p + 1}{p(4,19 \cdot 10^{-6} p^2 + 1,66 \cdot 10^{-3} p + 1)} =$$

$$= K_1 \cdot \frac{\tau p + 1}{p(T^2 p^2 + 2\xi T p + 1)};$$

$$X_2(p) = \frac{4550p}{p(p^2 + 396p + 2,386 \cdot 10^5)} = \frac{\frac{4550}{2,386 \cdot 10^5}}{\frac{1}{2,386 \cdot 10^5} p^2 + \frac{396}{2,386 \cdot 10^5} p + \frac{2,386 \cdot 10^5}{2,386 \cdot 10^5}} =$$

$$= \frac{1,91 \cdot 10^{-2}}{4,19 \cdot 10^{-6} p^2 + 1,66 \cdot 10^{-3} p + 1} = K_2 \cdot \frac{1}{T^2 p^2 + 2\xi T p + 1}.$$

Рассмотрим изображение первой переменной состояния (напряжение на емкости):

$$X_1(p) = 100 \cdot \frac{4,76 \cdot 10^{-4} p + 1}{p(4,19 \cdot 10^{-6} p^2 + 1,66 \cdot 10^{-3} p + 1)} = K_1 \cdot \frac{\tau p + 1}{p(T^2 p^2 + 2\xi T p + 1)};$$

$$\tau = 4,76 \cdot 10^{-4}; \quad T = \sqrt{4,19 \cdot 10^{-6}} = 2,05 \cdot 10^{-3};$$

$$\xi = \frac{1,66 \cdot 10^{-3}}{2T} = \frac{1,66 \cdot 10^{-3}}{2 \cdot 2,05 \cdot 10^{-3}} = 0,405; \quad K_1 = 100.$$

Воспользуемся формулой из таблицы 4.1 (строчка 21):

$$x_1(t) = u_c(t) = K_1 [1 - Ce^{-\gamma t} \sin(\lambda t + \Theta)] = 100 [1 - 1,09 e^{-198t} \cdot \sin(446t + 66^\circ)] = \\ = 100 - 109 e^{-198t} \cdot \sin(446t + 66^\circ),$$

$$\text{где } \gamma = \frac{\xi}{T} = \frac{0,405}{2,05 \cdot 10^{-3}} = 198; \quad \lambda = \frac{\sqrt{1 - \xi^2}}{T} = \frac{\sqrt{1 - (0,405)^2}}{2,05 \cdot 10^{-3}} = 446;$$

$$\Theta = \arctg \frac{\lambda}{\gamma} = \arctg \frac{446}{198} = 66^\circ; \quad C = \frac{1}{\lambda T} = \frac{1}{446 \cdot 2,05 \cdot 10^{-3}} = 1,09.$$

Рассмотрим изображение второй переменной состояния (ток в индуктивности):

$$X_2(p) = 1,91 \cdot 10^{-2} \cdot \frac{1}{4,19 \cdot 10^{-6} p^2 + 1,66 \cdot 10^{-3} p + 1} = K_2 \cdot \frac{1}{T^2 p^2 + 2\xi T p + 1}.$$

Воспользуемся формулой из таблицы 4.1 (строчка 17):

$$T = 2,05 \cdot 10^{-3}; \quad \xi = 0,405; \quad K_2 = 1,91 \cdot 10^{-2}; \quad \gamma = 198; \quad \lambda = 446;$$

$$C = \frac{1}{\lambda T^2} = \frac{1}{\lambda T^2} = \frac{1}{198 \cdot (2,05 \cdot 10^{-3})^2} = 1,2 \cdot 10^3.$$

Следовательно:

$$x_2(t) = Ce^{-\gamma t} \sin \lambda t = 1,2 \cdot 10^3 e^{-198t} \sin 446t.$$

### III. Решение ОДУ с помощью MATLAB.

Функция `dsolve` позволяет найти символьное решение (решение в аналитическом виде) обыкновенного дифференциального уравнения. *Входными* аргументами `dsolve` являются строки с ДУ, начальными условиями (при их наличии) и независимой переменной. Все они вводятся в апострофах через запятую. Если начальные условия отсутствуют, решение содержит постоянные интегрирования  $C_1$ ,  $C_2$  и т.д. Независимую переменную можно не указывать, тогда по умолчанию используется  $t$ . Для обозначения производной используется буква  $D$ . Символы  $D2, D3, \dots, DN$  соответствуют второй, третьей и т.д. производным, соответственно. Так, символ  $D2y$  есть эквивалент второй производной искомой функции  $\frac{d^2 y}{dt^2}$ .

Визуализация *символьной функции* одной переменной осуществляется при помощи функции `ezplot`. Если в качестве входного аргумента

указана только символьная функция, то команда `ezplot(y)` в графическое окно выводит график функции на отрезке  $[-2\pi, 2\pi]$ . Можно задать второй входной аргумент в виде вектора с границами отрезка, на котором требуется построить график функции. В данном случае это выглядит так: `ezplot(y, [0 5]), grid`.

Полезно отметить одно из свойств символьных вычислений: вычисления с рациональными дробями позволяют получить значение символьного выражения с любой степенью точности, т.е. найти сколь угодно много значащих цифр результата. Для задания точности *символьных* выражений предназначена функция `vpa` (Variable precision arithmetic). По умолчанию удерживаются 32 значащие цифры. Второй дополнительный параметр `vpa` задает число значащих цифр. Для глобальной установки применяется функция `digits`, во входном аргументе которой указывается требуемое количество цифр.

Решим ДУ приведенных выше примеров в MatLab.

1). ДУ из примера 4.1:

$$2 \frac{dy}{dt} + y = 1 + 2t$$

с начальным условием  $y(0) = 0$ .

Получим общее решение ОДУ данного примера, не указывая начального условия:

```
y=dsolve('2*Dy+y=1+2*t')
```

$$y = -3 + 2*t + \exp(-1/2*t) * C_1$$

Постоянная  $C_0$  здесь обозначена через  $C_1$ .

Теперь используем во входном аргументе программы начальное условие:

```
y = dsolve('2*Dy+y=1+2*t', 'y(0)=0')
```

$$y = -3 + 2*t + 3*\exp(-1/2*t).$$

Естественно, получилось то же частное решение неоднородного ДУ.

Знак равенства при введении ДУ можно ставить в любом месте. Например, заданное уравнение можно ввести в виде

$$2 \frac{dy}{dt} = -y + 1 + 2t \quad \text{или} \quad 2 \frac{dy}{dt} + y - 1 - 2t = 0.$$

Результат будет один и тот же. Убедимся в этом:

```
y=dsolve('2*Dy=-y+1+2*t', 'y(0)=0')
```

$$y = -3 + 2*t + 3*\exp(-1/2*t)$$

или

```
y=dsolve('2*Dy+y-1-2*t=0','y(0)=0')
y = -3+2*t+3*exp(-1/2*t).
```

2). ДУ из примера 4.2:

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + 6 \frac{dy}{dt} + 8y = 10e^{-3t}$$

при нулевых начальных условиях  $y(0) = 0$  и  $y'(0) = 0$ .

Решим это уравнение в MATLAB:

```
y=dsolve('D2y+6*Dy+8*y=10*exp(-3*t)', 'Dy(0)=0', 'y(0)=0')
y = (-10/exp(t)+5*exp(-2*t)+5)*exp(-2*t)
```

Проверим правильность полученного результата, подставив выражение для  $y(t)$  в исходное ДУ. Вычисление производных любого порядка проще производить при помощи функции `diff`. Символьная запись функции указывается в первом входном аргументе, переменная, по которой производится дифференцирование – во втором, а порядок производной – в третьем:

```
y=dsolve('D2y+6*Dy+8*y=10*exp(-3*t)', 'Dy(0)=0, y(0)=0')
S=simplify(diff(y,t,2)+6*diff(y,t,1)+8*y)
```

В командном окне появляется результат:

```
y = (-10/exp(t)+5*exp(-2*t)+5)*exp(-2*t)
S = 10*exp(-3*t)
```

Функция `dsolve` может решать несколько ДУ с начальными условиями или без них. С этой целью преобразуем ДУ данного примера

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + 6 \frac{dy}{dt} + 8y = 10e^{-3t}$$

в уравнения состояния. Пусть  $x_1 = y$ ,  $x_2 = \dot{x}_1$ . Тогда  $\dot{x}_2 = \ddot{y}$ , и уравнения состояния записываются в виде:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2; \\ \dot{x}_2 = -8x_1 - 6x_2 + 10e^{-3t}. \end{cases}$$

Пусть начальные условия – нулевые, т.е.  $x_1(0) = 0$  и  $x_2(0) = \dot{y}(0) = 0$ . Воспользуемся MATLAB, используя в качестве выходных аргументов переменные состояния:

```
[x1,x2]=dsolve('Dx1=x2','Dx2=-8*x1-6*x2+10*exp(-3*t)', 'x1(0)=0, x2(0)=0')
x1 = -10*exp(-3*t)+5*exp(-4*t)+5*exp(-2*t)
```

$$x_2 = 30 \cdot \exp(-3 \cdot t) - 20 \cdot \exp(-4 \cdot t) - 10 \cdot \exp(-2 \cdot t)$$

Вторая переменная состояния – это скорость изменения первой переменной, т.е. ее производная.

3). ДУ из примера 4.3:

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + 6 \frac{dy}{dt} + 9y = 90$$

при нулевых начальных условиях:  $dy/dt(0) = y(0) = 0$ .

Воспользуемся программой MATLAB для решения:

```
y = dsolve('D2y+6*Dy+9*y=90', 'Dy(0)=0, y(0)=0')
```

```
y = 10 - 30*t*exp(-3*t) - 10*exp(-3*t)
```

В примере 3 получено то же выражение:

$$y(t) = 10[1 - (1 + 3t)]e^{-3t}.$$

### Домашнее задание.

1. Решить *вручную* дифференциальное уравнение, полученное в первом занятии, классическим и операторным методами при нулевых начальных условиях. Входной сигнал (входное напряжение) – постоянное напряжение  $u_1(t) = 100$  В. Проверить решение ДУ в MatLab с помощью функций `dsolve` и `ilaplace`. Построить в MatLab график выходной величины.

2. По заданному ДУ сформировать уравнения состояния в КФУ и решить их операторным методом, а затем в MatLab. Построить графики переменных состояния в функции времени.

## Практическое занятие 5 **ВРЕМЕННЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ СИСТЕМ И ЗВЕНЬЕВ.**

### 5.1. Временные характеристики

Свойства элементов и систем управления определяются по их реакции на типовые воздействия. К таким воздействиям относятся ступенчатые, линейные, параболические и гармонические. Использование типового входного сигнала позволяет проектировщику сравнить несколько вариантов создаваемой системы.

Важное место в теории систем автоматического управления занимает исследование реакции систем на единичные воздействия. Рассмотрим математическое описание таких воздействий.

#### 1. Единичная ступенчатая функция.

Одним из самых распространенных является ступенчато изменяющийся сигнал. Например, когда с помощью тумблера или реле мы подключаем к сети электрический обогреватель, мы имеем дело со ступенчато изменяющимся воздействием.

Если высота ступенчатой функции равна единице, то она называется единичной ступенчатой функцией.

Единичная ступенчатая функция  $1(t)$  определяется следующим образом:

$$1(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0, \\ 0, & t < 0, \end{cases}$$

График этой функции приведен на рис. 5.1, а.

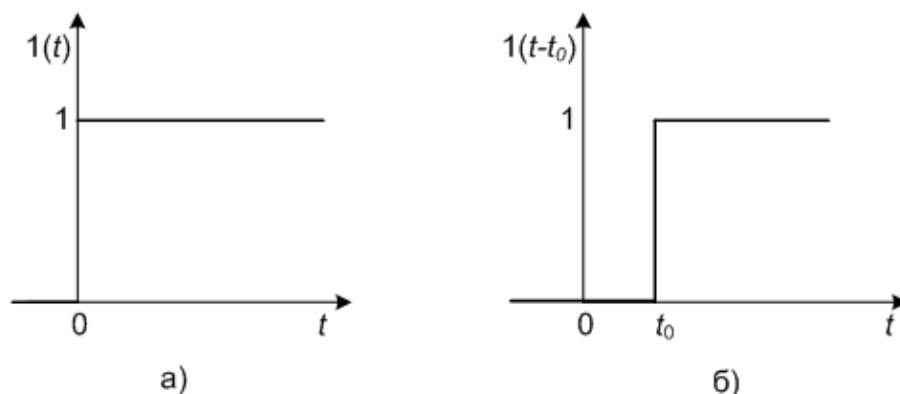


Рис. 5.1. Ступенчатая функция

Умножение ступенчатой функции на константу  $A$  изменяет ее уровень на эту величину, в результате получается неединичная ступенчатая функция:

$$A \cdot 1(t) = \begin{cases} A, & t \geq 0, \\ 0, & t < 0. \end{cases}$$

Мы можем сместить ступенчатую функцию на время  $t_0$  (Рис. 1, б). Тогда получим ее выражение в виде

$$1(t-t_0) = \begin{cases} 1, & t \geq t_0, \\ 0, & t < t_0 \end{cases} \quad \text{и} \quad A \cdot 1(t-t_0) = \begin{cases} A, & t \geq t_0, \\ 0, & t < t_0 \end{cases}$$

Изображения по Лапласу этих функций с учетом теоремы запаздывания имеют вид:

$$1(t) \Leftrightarrow \frac{1}{p}; \quad 1(t-t_0) \Leftrightarrow e^{-pt_0} \cdot \frac{1}{p} = \frac{e^{-pt_0}}{p}.$$

Поскольку

$$f(t) \cdot 1(t-t_0) = \begin{cases} f(t), & t \geq t_0; \\ 0, & t < t_0, \end{cases}$$

единичную ступенчатую функцию удобно использовать для аналитического представления различных внешних сигналов, скачкообразно изменяющихся в некоторый момент  $t_0$ .

## 2. Единичная импульсная функция или $\delta$ -функция.

Единичная импульсная функция есть идеализация прямоугольного импульса длительностью  $\Delta t$  и высотой  $1/\Delta t$ , рис. 5.2, а. Площадь такого импульса равна 1, т.к.  $\Delta t \cdot (1/\Delta t) = 1$ , и не зависит от  $\Delta t$ . При уменьшении длительности  $\Delta t$  его высота возрастает, причем при  $\Delta t \rightarrow 0$  она стремится к бесконечности, но площадь остается равной 1. Импульс бесконечно малой длительности, бесконечно большой высоты, площадь которого равна 1, будем называть *единичным импульсом*. Импульсная функция, определяющая единичный импульс, обозначается  $\delta(t-t_0)$  и называется  *$\delta$ -функцией или функцией Дирака*, рис. 5.2, б.

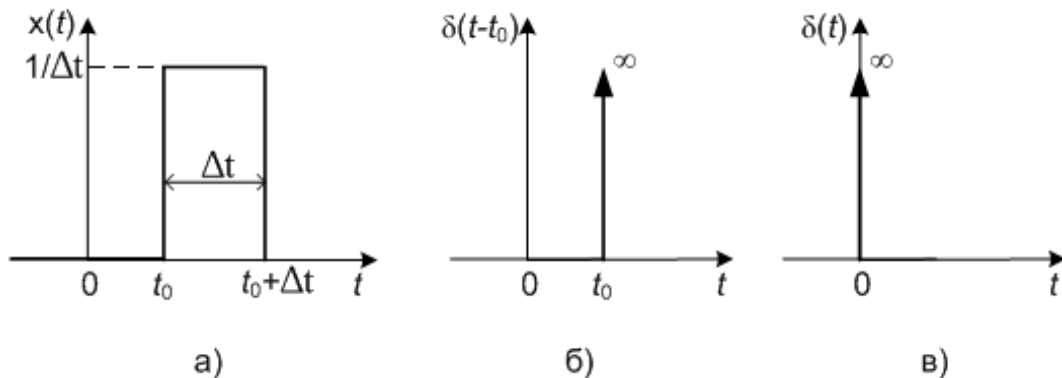


Рис. 5.2. Функция Дирака

Таким образом, импульсная функция может быть описана следующим образом:

$$\left\{ \begin{array}{l} \delta(t-t_0) = \begin{cases} 0, & t \neq t_0; \\ \infty, & t = t_0, \end{cases} \\ \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-t_0) \cdot dt = 1. \end{array} \right.$$

При  $t_0 = 0$  для  $\delta$ -функции используется обозначение  $\delta(t)$ . На временных диаграммах функции  $\delta(t-t_0)$  и  $\delta(t)$  принято изображать в виде вертикальной стрелки со значком  $\infty$  правее острия (рис.5.2, в).

Между единичными функциями имеется связь:

$$\delta(t-t_0) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1(t-t_0) - 1(t-t_0 - \Delta t)}{\Delta t} = \frac{d}{dt} 1(t-t_0),$$

откуда

$$1(t-t_0) = \int_{-\infty}^t \delta(t-t_0) \cdot dt.$$

Таким образом, импульсная функция представляет собой производную от единичной ступенчатой функции, а единичная ступенчатая функция – интеграл от импульсной функции.

При  $t_0 = 0$  получим:

$$\delta(t) = \frac{d}{dt} 1(t) \quad \text{и} \quad 1(t) = \int_{-\infty}^t \delta(t) \cdot dt.$$

Изображение импульсной функции по Лапласу имеет вид:

$$L[\delta(t)] = 1 \quad \text{и} \quad L[\delta(t-t_0)] = e^{-pt_0}.$$

**Переходная характеристика (ПХ)** – это реакция системы на единичное ступенчатое воздействие  $1(t)$  при **нулевых** начальных условиях. ПХ обозначается символом  $h(t)$ . Размерность ПХ есть отношение размерности отклика к размерности внешнего воздействия. Изображение по Лапласу ПХ будем обозначать как  $H(p)$ . Для получения  $H(p)$  можно воспользоваться передаточной функцией системы. Как известно, для получения изображения выходного сигнала необходимо передаточную функцию умножить на изображение входного сигнала:

$$H(p) = Y(p) = W(p)X(p).$$

Так как в качестве входного воздействия выступает единичная функция  $x(t) = 1(t)$ , а ее изображение равно  $X(p) = \frac{1}{p}$ , то



$$h(t) \Leftrightarrow H(p) = W(p) \frac{1}{p} = \frac{W(p)}{p}.$$

Таким образом, для определения переходной характеристики (ПХ) линейной системы нужно ее передаточную функцию разделить на оператор Лапласа, чтобы получить изображение ПХ, а затем воспользоваться обратным преобразованием Лапласа.

**Импульсная характеристика (ИХ)** – это реакция системы на входное воздействие в виде несмещенного дельта-импульса  $\delta(t)$  при **нулевых** начальных условиях. ИХ обозначают символом  $w(t)$  и называют также *весовой характеристикой*. Размерность ИХ равна отношению размерности отклика к произведению размерности внешнего воздействия на время.

Т.к. изображение единичного импульса равно 1, то изображение импульсной характеристики равно передаточной функции системы:

$$w(t) \Leftrightarrow W(p).$$

Итак, импульсная характеристика системы есть ничто иное, как оригинал ее передаточной функции. Кроме того, ИХ можно найти путем дифференцирования переходной характеристики, если последняя известна:

$$w(t) = \frac{d}{dt} h(t).$$

Используя теорему запаздывания, можно записать изображение реакции на смещенный дельта-импульс  $\delta(t)$ :

$$w(t - t_0) \Leftrightarrow W(p) \cdot e^{-pt_0}.$$

### **Реакция системы на линейное воздействие.**

Менее распространенным в САУ является линейно изменяющееся входное воздействие (рис. 5.3). Однако такой сигнал в ряде случаев имеет место.

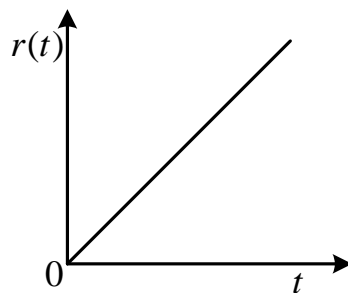


Рис. 5.3. Тестовый линейный входной сигнал

Например, при автоматической посадке самолета требуется выдерживать определенный угол наклона глissады. Обычно он составляет порядка  $3^\circ$ .

**Глissада** — в авиации: траектория полёта летательного аппарата, по которой он снижается, в том числе — непосредственно перед посадкой. Стандартная глissада начинается на высоте 400 метров и заканчивается на высоте 15 метров.

При закаливании стали требуется, чтобы температура в течение определенного промежутка времени увеличивалась с постоянной скоростью. Поэтому на входе системы регулирования температуры сигнал должен иметь вид линейной функции. Таким образом, изучение реакции систем управления на линейное входное воздействие представляет определенный интерес.

Аналитическое выражение линейного входного сигнала:

$$r(t) = \begin{cases} t, & t > 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

Изображения по Лапласу линейного входного сигнала имеет вид:

$$r(t) \Leftrightarrow \frac{1}{p^2} \text{ или } R(p) = \frac{1}{p^2}.$$

### **Свободное движение системы.**

Кроме переходной и импульсной характеристик, показывающих реакцию системы на типовые воздействия, в некоторых случаях рассматривают и свободное движение системы, выведенной из состояния равновесия. Причем под состоянием равновесия может пониматься как состояние покоя, когда все переменные системы неизменны, так и состояние движения по траектории, предписанной входными воздействиями (вынужденного движения). Систему описывают уравнениями в отклонениях от данного состояния. Отклонения входных воздействий задают равными нулю, поэтому описание системы принимает вид однородного дифференциального уравнения высокого порядка или системы однородных дифференциальных уравнений первого порядка. Отклонения выходной величины и ее производных (или отклонения переменных состояния, если система описывается уравнениями в пространстве состояний) задают определенным образом. Переходный процесс, возникающий в системе вследствие вывода ее из состояния равновесия, представляет собой свободное движение системы. Если система устойчива, все отклонения стремятся к нулю, а характеристики процесса (длительность, колебательность и т.д.) могут использоваться для оценки качества системы.

**Пример 5.1.** Определить переходную и импульсную характеристики, а также реакцию на линейный входной сигнал апериодического звена с передаточной функцией

$$W(p) = \frac{1}{2p+1}.$$

1. *Переходная характеристика.*

Изображение переходной характеристики:

$$H(p) = \frac{W(p)}{p} = \frac{1}{p(2p+1)}.$$

Воспользовавшись формулой

$$1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \Leftrightarrow \frac{1}{p(\tau p + 1)},$$

запишем оригинал, т.е. ПХ:

$$h(t) = 1 - e^{-\frac{t}{2}} = 1 - e^{-0,5t}.$$

2. *Импульсная характеристика.*

ИХ найдем с помощью ПХ:

$$w(t) = \frac{dh(t)}{dt} = \frac{d(1 - e^{-0,5t})}{dt} = 0,5e^{-0,5t}.$$

Для определения ИХ другим способом запишем ПФ в виде:

$$W(p) = \frac{1}{2p+1} = \frac{0,5}{p+0,5} = 0,5 \frac{1}{p+0,5}.$$

Этому изображению соответствует оригинал

$$w(t) = 0,5e^{-0,5t}.$$

3. *Реакция на линейный входной сигнал.*

Изображение выходного сигнала (реакции):

$$Y(p) = \frac{W(p)}{p^2} = \frac{1}{p^2(2p+1)}.$$

Воспользуемся формулой из табл. 4.1 (строчка 5)

$$\frac{1}{p^2(2p+1)} = \frac{1}{p^2(Tp+1)} \Leftrightarrow T(-1 + e^{-\alpha t}) + t = -T + Te^{-\alpha t} + t,$$

$$\text{где } T = 2, \quad \alpha = \frac{1}{T} = \frac{1}{2} = 0,5$$

и запишем оригинал:

$$y(t) = t - T + Te^{-\alpha t} = t - 2 + 2e^{-0,5t}.$$

Проверим правильность решения с помощью MatLab:

```
syms p
W = 1 / (2*p+1);
H = W/p;
L = H/p;
h = ilaplace(H)
h = 1 - exp(-t/2)
w = ilaplace(W)
w = exp(-t/2)/2
l = ilaplace(L)
l = t + 2*exp(-t/2) - 2
```

Таким образом, реакция на линейное воздействие имеет три составляющих: линейную функцию, константу и экспоненту. Здесь нужно сделать два важных замечания.

1). Экспонента имеет тот же показатель степени, что и в случае реакции на единичное ступенчатое воздействие. Она домножена на постоянную времени  $T$ . Если постоянная времени много больше единицы, то экспонента вносит основной вклад в реакцию системы. Это может создать определенные проблемы при проектировании систем, предназначенных для обработки линейных входных воздействий.

2). Установившееся движение системы определяется уравнением

$$y_{уст}(t) = t - T = t - 2,$$

из которого видно, что установившееся значение ошибки воспроизведения воздействия, изменяющегося с единичной скоростью, воздействия равна  $T$ . При проектировании САУ может быть выдвинуто требование отсутствия ошибки или, по крайней мере, ее минимизации. Данная проблема будет рассмотрена в дальнейшем.

**Пример 5.2.** Определить переходную и импульсную характеристики, а также реакцию на линейный входной сигнал апериодического звена второго порядка с передаточной функцией

$$W(p) = \frac{10}{(p+2)(p+4)} = \frac{10}{p^2 + 6p + 8}.$$

*1. Переходная характеристика.*

Изображение переходной характеристики:

$$H(p) = \frac{W(p)}{p} = \frac{10}{p(p+2)(p+4)} = \frac{r_1}{p} + \frac{r_2}{p+2} + \frac{r_3}{p+4}.$$

Корни знаменателя:  $p_1 = 0$ ;  $p_2 = -2$ ;  $p_3 = -4$ .

Находим числители дробей:

$$r_1 = \frac{10}{(p_1 + 2)(p_1 + 4)} = \frac{10}{2 \cdot 4} = 1,25; \quad r_2 = \frac{10}{p_2(p_2 + 4)} = \frac{10}{-2 \cdot (-2 + 4)} = -2,5;$$

$$r_3 = \frac{10}{p_3(p_3 + 2)} = \frac{10}{-4 \cdot (-4 + 2)} = 1,25.$$

Следовательно:

$$H(p) = \frac{1,25}{p} + \frac{-2,5}{p+2} + \frac{1,25}{p+4};$$

$$h(t) = 1,25 - 2,5e^{-2t} + 1,25e^{-4t}.$$

## 2. Импульсная характеристика.

Импульсную характеристику найдем по формуле:

$$w(t) = \frac{dh(t)}{dt} = 5e^{-2t} - 5e^{-4t}.$$

Проверим результат в MatLab:

```
b=10;a=[1 6 8 0];
[r,p,k]=residue(b,a)
syms Y p t
Y=(10)/(p^3+6*p^2+8*p);
y=ilaplace(Y,p,t);
y=vpa(y,3)
r = 1.2500
    -2.5000
    1.2500
p = -4
    -2
     0
k = []
y = 1,25-2.50*exp(-2.*t)+1.25*exp(-4.*t)
```

## 3. Реакция на линейный входной сигнал.

Изображение отклика равно:

$$Y(p) = \frac{W(p)}{p^2} = \frac{10}{p^2(p+2)(p+4)} = \frac{10}{2 \cdot 4} \cdot \frac{1}{p^2 \left( \frac{1}{2}p+1 \right) \left( \frac{1}{4}p+1 \right)} =$$
$$= 1,25 \cdot \frac{1}{p^2(0,5p+1)(0,25p+1)} = K \cdot \frac{1}{p^2(T_1p+1)(T_2p+1)}; T_1 = 0,5; T_2 = 0,25.$$

Воспользуемся формулой из табл. 4.1 (строчка 22):

$$\frac{1}{p^2(0,5p+1)(0,25p+1)} = \frac{1}{p^2(T_1p+1)(T_2p+1)} \Leftrightarrow -A + C_1e^{-\alpha_1 t} - C_2e^{-\alpha_2 t} + t,$$

$$\text{где } A = T_1 + T_2 = 0,5 + 0,25 = 0,75; C_1 = \frac{T_1^2}{T_1 - T_2} = \frac{0,5^2}{0,5 - 0,25} = 1;$$

$$C_2 = \frac{T_2^2}{T_1 - T_2} = \frac{0,25^2}{0,5 - 0,25} = 0,25; \alpha_1 = \frac{1}{T_1} = \frac{1}{0,5} = 2; \alpha_2 = \frac{1}{T_2} = \frac{1}{0,25} = 4.$$

Следовательно, отклик изменяется по закону:

$$y(t) = 1,25(-A + C_1e^{-\alpha_1 t} - C_2e^{-\alpha_2 t} + t) = -0,9375 + 1,25e^{-2t} - 0,3125e^{-4t} + 1,25t.$$

Проверим правильность решения с помощью MatLab:

$$W = 10 / (p*p + 6*p + 8);$$

$$L = W/p/p;$$

$$l = ilaplace(L);$$

$$l = vpa(l, 4)$$

$$l = 1.25*t + 1.25*exp(-2.0*t) - 0.3125*exp(-4.0*t) - 0.9375$$

**Пример 5.3.** Определить переходную и импульсную характеристики, а также реакцию на линейный входной сигнал колебательного звена с передаточной функцией

$$W(p) = \frac{1}{p^2 + p + 1}$$

1. *Переходная характеристика.*

Изображение переходной характеристики:

$$H(p) = \frac{W(p)}{p} = \frac{1}{p(p^2 + p + 1)}.$$

Оригинал найдем с помощью таблицы изображений и оригиналов:

$$H(p) = \frac{W(p)}{p} = \frac{1}{p(p^2 + p + 1)} = \frac{1}{p(T^2 p^2 + 2\xi Tp + 1)};$$

$$T = 1; \quad \xi = \frac{1}{2T} = 0,5 = \frac{1}{2}; \quad \lambda = \frac{\sqrt{1 - \xi^2}}{T} = \frac{\sqrt{1 - (0,5)^2}}{1} = \sqrt{0,75} = \frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$\gamma = \frac{\xi}{T} = \frac{1}{2}; \quad C = \frac{1}{\sqrt{0,75}} = \frac{2}{\sqrt{3}}; \quad \Theta = \arctg \frac{\lambda}{\gamma} = \arctg \frac{\sqrt{3} \cdot 2}{2} = 60^\circ.$$

Следовательно:

$$\begin{aligned}
h(t) &= 1 - Ce^{-\lambda t} \sin(\lambda t + \Theta) = 1 - \frac{2}{\sqrt{3}} e^{-0,5t} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t + 60^\circ\right) = \\
&= 1 - \frac{2}{\sqrt{3}} e^{-0,5t} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t + 60^\circ\right) = 1 - \frac{2}{\sqrt{3}} \left( \sin \frac{\sqrt{3}}{2}t \cdot \cos 60^\circ + \cos \frac{\sqrt{3}}{2}t \cdot \sin 60^\circ \right) e^{-0,5t} = \\
&= 1 - \frac{2}{\sqrt{3}} \left( \sin \frac{\sqrt{3}}{2}t \cdot \frac{1}{2} + \cos \frac{\sqrt{3}}{2}t \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \right) e^{-0,5t} = 1 - \left( \cos \frac{\sqrt{3}}{2}t + 0,557 \sin \frac{\sqrt{3}}{2}t \right) e^{-0,5t}.
\end{aligned}$$

Проверим правильность решения с помощью MatLab:

```

H=1/(p^3+p^2+p)
h=ilaplace(H,p,t);
h=vpa(h,3)

h=1.-1.*exp(-.500*t)*cos(.865*t)-.576*exp(-
.500*t)*sin(.865*t)

```

### 2. Импульсная характеристика.

Импульсная характеристика – это оригинал передаточной функции. Оригинал найдем с помощью таблицы 4.1 изображений и оригиналов (строчка 18):

$$W(p) = \frac{1}{p^2 + p + 1} = \frac{1}{T^2 p^2 + 2\xi Tp + 1},$$

$$\text{ããã } T = 1; \quad \xi = \frac{1}{2}; \quad \lambda = \frac{\sqrt{3}}{2}; \quad \gamma = \frac{1}{2}; \quad C = \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

Следовательно:

$$w(t) = Ce^{-\lambda t} \sin \lambda t = \frac{2}{\sqrt{3}} e^{\frac{-t}{2}} \sin \frac{\sqrt{3}}{2}t = 1,155 e^{-0,5t} \sin 0,865t.$$

Проверим правильность решения с помощью MatLab:

```

W=1/(p^2+p+1)
w=ilaplace(W,p,t);
w=vpa(w,4)

w = 1.155*exp(-.500*t)*sin(.865*t)

```

### 3. Реакция на линейный входной сигнал.

Изображение отклика равно:

$$Y(p) = \frac{W(p)}{p^2} = \frac{1}{p^2(p^2 + p + 1)} = \frac{1}{p^2(T^2 p^2 + 2\xi Tp + 1)}; \quad T = 1; \quad \xi = 0,5.$$

Воспользуемся формулой из табл. 4.1 (строчка 22):

$$\frac{1}{p^2(p^2 + p + 1)} = \frac{1}{p^2(T^2 p^2 + 2\xi T p + 1)} \Leftrightarrow -A + t + C e^{-\gamma t} \sin(\lambda t + \Theta),$$

$$\text{где } \lambda = \frac{\sqrt{3}}{2}; \quad \gamma = \frac{1}{2}; \quad A = 2\gamma T^2 = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1^2 = 1; \quad C = \frac{1}{\lambda} = \frac{2}{\sqrt{3}};$$

$$\Theta = 2 \operatorname{arctg} \frac{\lambda}{\gamma} = 2 \operatorname{arctg} \frac{\lambda}{\frac{1}{2}} = 2 \operatorname{arctg} \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = 2 \operatorname{arctg} \sqrt{3} = 120^\circ.$$

Следовательно, отклик изменяется по закону:

$$\begin{aligned} y(t) &= -A + t + C e^{-\gamma t} \sin(\lambda t + \Theta) = -1 + t + \frac{2}{\sqrt{3}} e^{-0,5t} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t + 120^\circ\right) = \\ &= -1 + t + \frac{2}{\sqrt{3}} \left( \sin \frac{\sqrt{3}}{2}t \cdot \cos 120^\circ + \cos \frac{\sqrt{3}}{2}t \cdot \sin 120^\circ \right) e^{-0,5t} = \\ &= -1 + t + \frac{2}{\sqrt{3}} \left( \sin \frac{\sqrt{3}}{2}t \cdot \cos 120^\circ + \cos \frac{\sqrt{3}}{2}t \cdot \sin 120^\circ \right) e^{-0,5t} = \\ &= -1 + t + \left( -0,577 \sin \frac{\sqrt{3}}{2}t + \cos \frac{\sqrt{3}}{2}t \right) e^{-0,5t}. \end{aligned}$$

Проверим правильность решения с помощью MatLab:

$$W = 1 / (p*p+p+1);$$

$$L = W/p/p;$$

$$l = \operatorname{ilaplace}(L);$$

$$l = \operatorname{vpa}(l, 4)$$

$$l = t + \exp(-0.5*t) * (\cos(0.866*t) - 0.5774*\sin(0.866*t)) - 1.0$$

**Пример 5.4.** Определить свободное движение системы, описываемой дифференциальным уравнением

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{dy}{dt} + y = 0,$$

выведенной из состояния равновесия при начальных условиях:

$$\left. \frac{dy}{dt} \right|_{t=0} = 0; \quad y(0) = 1.$$

Введем обозначения  $y = x_1$ ;  $\frac{dy}{dt} = x_2 = \dot{x}_1$  и составим модель в пространстве состояний:



$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2; \\ \dot{x}_2 = -x_1 - x_2. \end{cases}$$

Начальные значения переменных состояния:  $x_1(0)=1$ ;  $x_2(0)=0$ .

Решим задачу операторным методом.

Учитывая, что

$$\frac{df(t)}{dt} \Leftrightarrow pF(p) - f(0),$$

запишем уравнения состояния в операторной форме:

$$\begin{cases} pX_1(p) - x_1(0) = X_2(p); \\ pX_2(p) = -X_1(p) - X_2(p). \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} pX_1(p) - X_2(p) = x_1(0); \\ X_1(p) + (p+1)X_2(p) = 0. \end{cases}$$

Решим систему операторных уравнений с помощью определителей.

Главный определитель системы:

$$\Delta(p) = \begin{vmatrix} p & -1 \\ 1 & p+1 \end{vmatrix} = p^2 + p + 1.$$

Вспомогательные определители:

$$\Delta_1(p) = \begin{vmatrix} x_1(0) & -1 \\ 0 & p+1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & p+1 \end{vmatrix} = p+1; \quad \Delta_2(p) = \begin{vmatrix} p & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1.$$

Изображения переменных состояния:

$$X_1(p) = \frac{\Delta_1(p)}{\Delta(p)} = \frac{p+1}{p^2 + p + 1}; \quad X_2(p) = \frac{\Delta_2(p)}{\Delta(p)} = \frac{-1}{p^2 + p + 1}.$$

Найдем оригинал первой переменной состояния, воспользовавшись таблицей изображений и оригиналов. Для изображения

$$X(p) = \frac{\tau p + 1}{T^2 p^2 + 2\xi T p + 1} \quad \text{при} \quad 0 \leq \xi < 1$$

оригинал записывается в виде:

$$x(t) = C e^{-\alpha t} \sin(\beta t + \Theta),$$

где

$$C = \frac{\sqrt{(1-2\alpha\tau)T^2 + \tau^2}}{\beta T^3}; \quad \Theta = \arctg \frac{\tau\beta}{1-\alpha\tau}; \quad \alpha = \frac{\xi}{T}; \quad \beta = \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{T}.$$

Применяя эти формулы, получим оригинал:

$$x_1(t) = \frac{2}{\sqrt{3}} e^{-0,5t} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t + \frac{\pi}{3}\right).$$

В Matlab построим график этой функции, рис.5.4:

```
t=0:0.01:10;
x1=2/sqrt(3)*exp(-0.5*t).*sin(sqrt(3)/2*t+pi/3);
plot(t,x1),grid
```

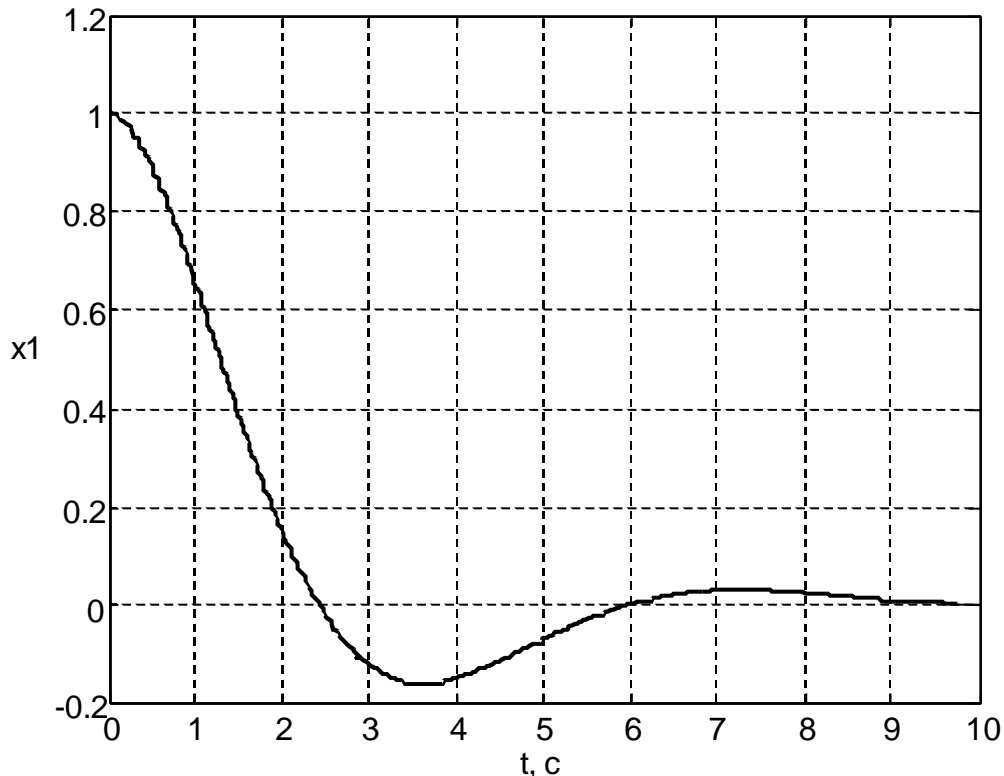


Рис. 5.4. График функции  $x_1(t)$  (пример 5.4)

## 5.2. Определение временных характеристик численными методами пакета Control

Пакет Control System Toolbox предоставляет большие возможности для получения временных откликов систем управления. С его помощью можно строить переходные (*step*) и импульсные (*impulse*) характеристики, находить отклик на произвольное заданное внешнее воздействие (*lsim*), генерировать входные тестовые сигналы для *lsim*, определять свободное движение системы (*initial*). Рассмотрим отдельно все указанные функции и применим их для построения временных характеристик.

### 1). Переходная характеристика

Для построения переходных характеристик линейных систем используется функция *step*, имеющая несколько вариантов вызова:

```
step(sys)
```

```

step(sys,t)
step(sys1,sys2,...,sysN)
step(sys1,sys2,...,sysN,t)
step(sys1,'PlotStyle1',...,sysN,'PlotStyleN')
[y,t,x] = step(sys)

```

Описание.

Функция `step(sys)`, вызываемая без выходных (левосторонних) аргументов, строит на экране отклик системы (SS, ZPK или TF) на единичный скачок, т.е. переходную характеристику. Для систем с несколькими входами строится система ПХ для каждого канала. Продолжительность переходного процесса определяется автоматически на основе системы полюсов.

Функция `step(sys,t)` использует явно заданный диапазон. Можно указать или конечное время моделирования или вектор значений времени: `t = 0:dt:Tfinal`.

Для построения на одном графике ПХ нескольких систем (например, с целью сравнения) используется вызов `step(sys1,sys2,...,sysN)` или `step(sys1,sys2,...,sysN,t)`.

Можно определить цвет и стиль линий графика. Например, команда `step(sys1,'y:',sys2,'g--')` строит ПХ первой системы в виде точечной желтой линии, а второй системы – пунктирной зеленой линии.

Вызываемая с выходными аргументами, команда `[y,t] = step(sys)` график не строит, но возвращает значения ПХ и соответствующих значений времени.

Постоим ПХ для двух первых примеров, рис. 5.5.

```

% Передаточные функции звеньев
w1=tf(1,[2 1]);w2=tf(10,[1 6 8]);
% Переходные характеристики
figure(1)
step(w1,'k-.',w2,'k-',10),grid
legend('W1','W2')

```

Построим также ПХ звена из примера 5.3:

```

W=tf(1,[1 1 1])
step(W,10),grid

```

График переходной характеристики приведен на рис. 5.6.

Важно отметить, что графики и окна в целом, создаваемые функцией `step` и другими функциями пакета `Control`, значительно расширяют возможности стандартных графиков и окон `Matlab` (создаваемых, например, функцией `plot`), добавляя элементы интерфейса, связанные с теорией автоматического управления.

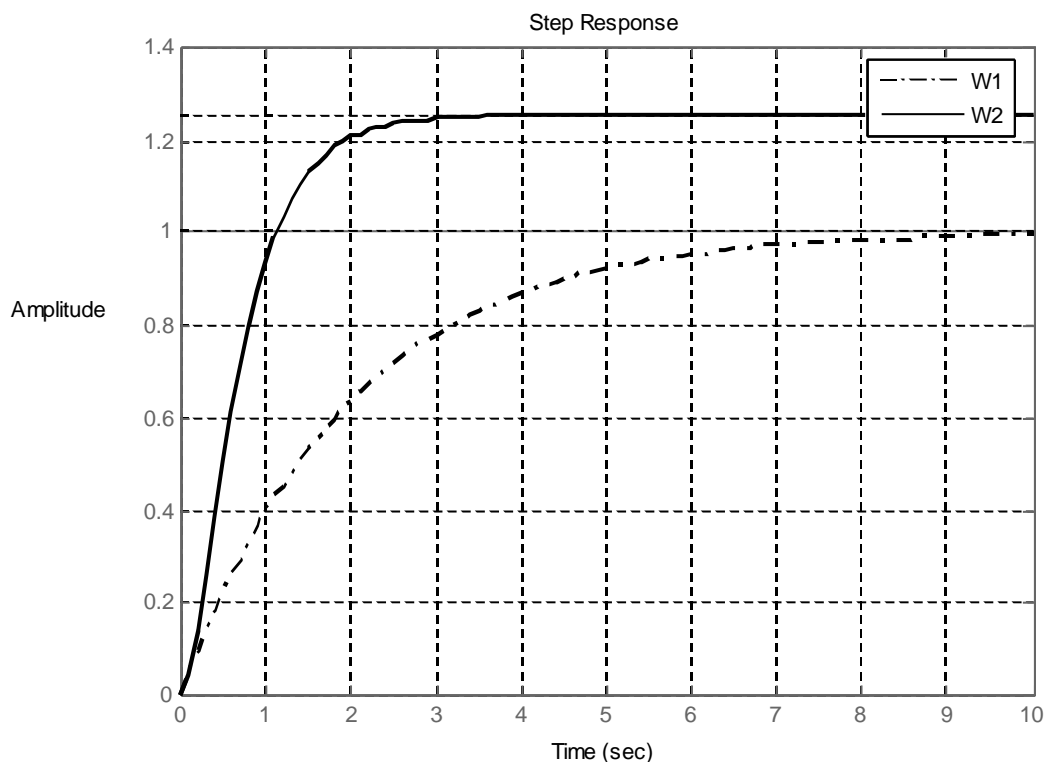


Рис. 5.5. Переходные характеристики (примеры 5.1, 5.2)

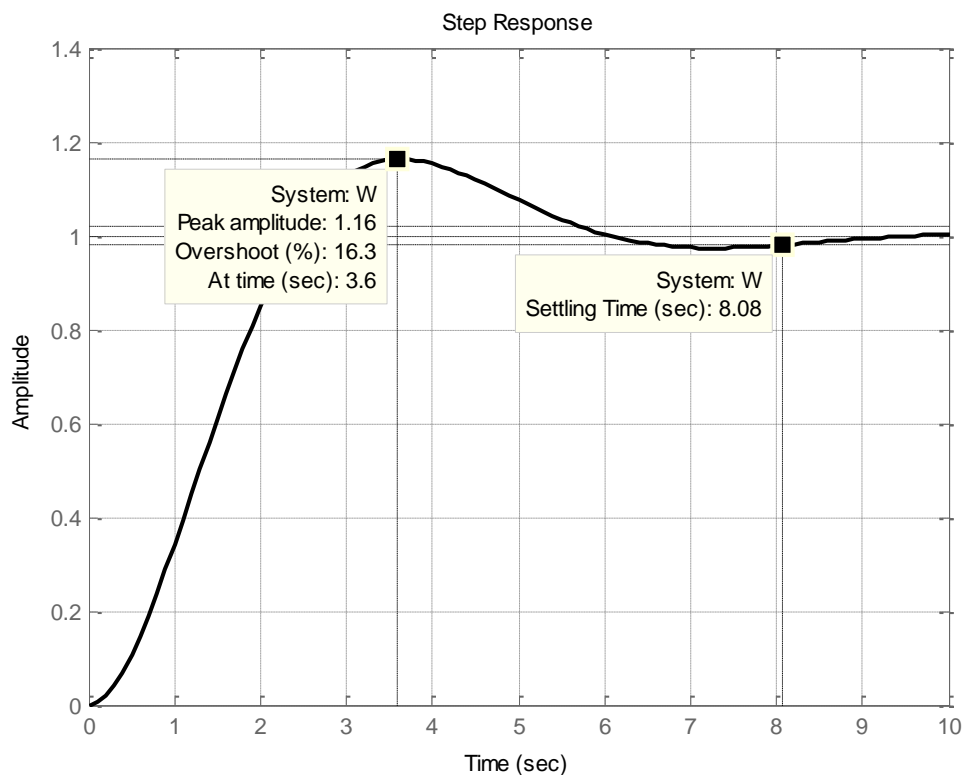


Рис. 5.6. Переходная характеристика (пример 5.3)

Так, с помощью контекстно-зависимого меню, вызываемого щелчком правой кнопки мыши, на графике можно отобразить ряд численных показателей качества процесса:

- перерегулирование (Overshoot)  $\sigma = 16,3\%$ ;
- время наступления первого максимума  $t_m = 3,6$  с при 2 % «коридоре»;
- время переходного процесса (Settling Time)  $t_{n.n} = 8,08$  с.

Анализ передаточной функции показывает, что параметры колебательного звена имеют значения:

- собственная частота колебаний  $\omega_0 = 1 \text{ c}^{-1}$

$$T = \frac{1}{\omega_0} = 1 \text{ c}$$

- постоянная времени  $\omega_0$
- коэффициент демпфирования  $\xi = 0,5$ .

## 2). Импульсная характеристика.

Для построения импульсных характеристик линейных систем используется функция `impulse`:

```
impulse(sys)
impulse(sys,t)
impulse(sys1,sys2,...,sysN)
impulse(sys1,sys2,...,sysN,t)
impulse(sys1,'PlotStyle1',...,sysN,'PlotStyleN')
[y,t] = impulse(sys)
```

Варианты вызова этой функции – такие же, как и у функции `step`.

Строить ИХ нескольких систем на одном графике не совсем удобно, ведь ИХ есть производная ПХ, а это значит, что в начальный момент времени значения ИХ могут значительно отличаться.

MATLAB позволяет разместить в графическом окне несколько осей и вывести на них различные графики. С этой целью окно разбивается на определенное число частей по вертикали и горизонтали с использованием функции `subplot`, которая располагает оси в виде матрицы и используется с тремя параметрами: `subplot(i, j, n)`. Здесь *i* и *j* – число подграфиков соответственно по вертикали и горизонтали, а *n* – номер подграфика, который надо сделать текущим. Номер отсчитывается от левого верхнего угла построено.

Построим ИХ для трех первых примеров, рис. 5.7:

```
%Передаточные функции звеньев
W1=tf(1,[2 1]), W2=tf(10,[1 6 8]), W3=tf(1,[1 1 1])
%Импульсные характеристики
[w,t]=impulse(W1)
subplot(2,2,1), plot(t,w, 'LineWidth',2), grid
xlabel('t'), ylabel('w1(t)')
[w,t]=impulse(W2)
subplot(2,2,2), plot(t,w, 'LineWidth',2), grid
```

```

xlabel('t'),ylabel('w2(t)')
[w,t]=impulse(W3)
subplot(2,2,3), plot(t,w, 'LineWidth',2),grid
xlabel('t'),ylabel('w3(t)')

```

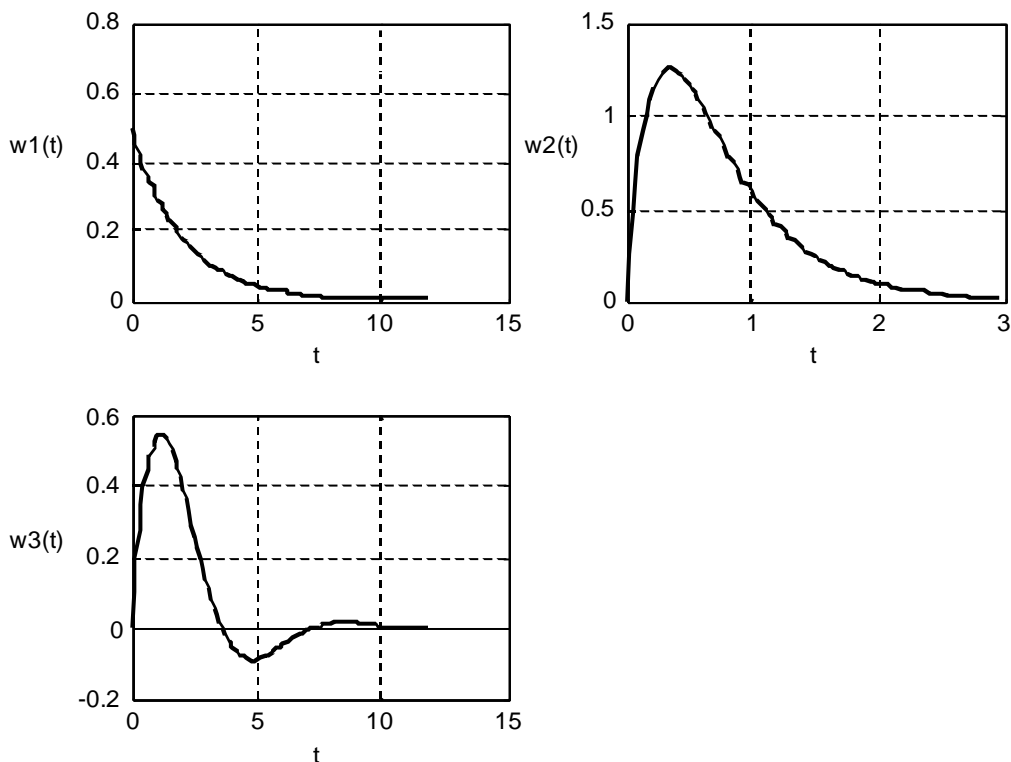


Рис. 5.7. Импульсные переходные характеристики (примеры 6.1, 6.2, 6.3)

### 3) Реакция системы на произвольное входное воздействие.

Реакцию системы на произвольное воздействие можно рассчитать с помощью функции `lsim`, предварительно задав передаточную функцию, интервал времени и входное воздействие, рис.5.8:

```

W=tf(10,[1 6 8]);
t=0:0.01:3;
u=exp(-3*t);
y1=lsim(W,u,t);
plot(t,u,t,y1),grid

```

Функция `lsim` находит отклик LTI моделей на произвольный временной входной сигнал. Команда `lsim(SYS,u,t)` строит отклик LTI модели `SYS` на входной сигнал `u`, заданный на интервале времени `t`. Например, программа

```

t = 0:0.01:5;    u = sin(t);    lsim(sys,u,t)

```

находит отклик системы `SYS` на входной сигнал  $u(t)=\sin(t)$  на интервале от 0 до 5 единиц времени (секунд, минут, часов – в зависимости от масштаба, принятого при описании системы) с шагом 0,01.

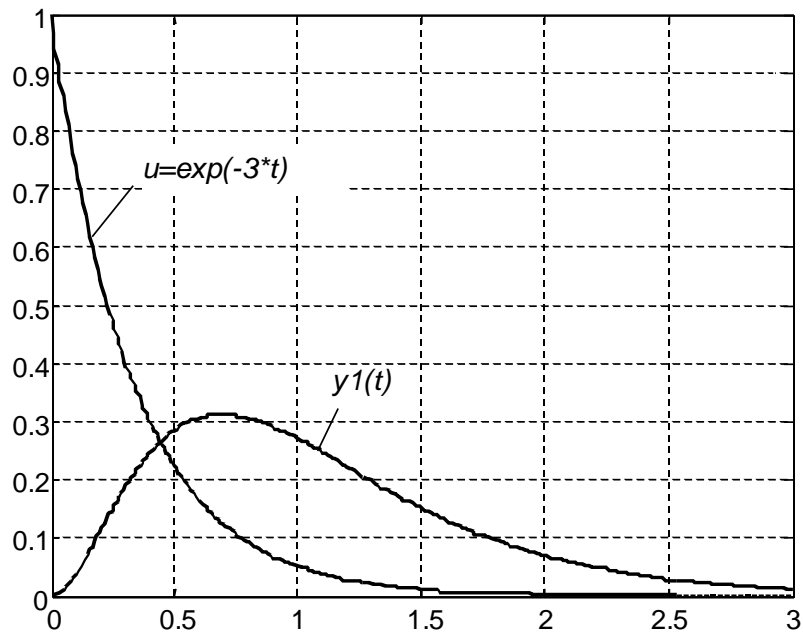


Рис. 5.8. Результаты расчета

Построим график отклика колебательного звена на входной сигнал  $u(t)=1+\sin(t)$ , рис. 5.9:

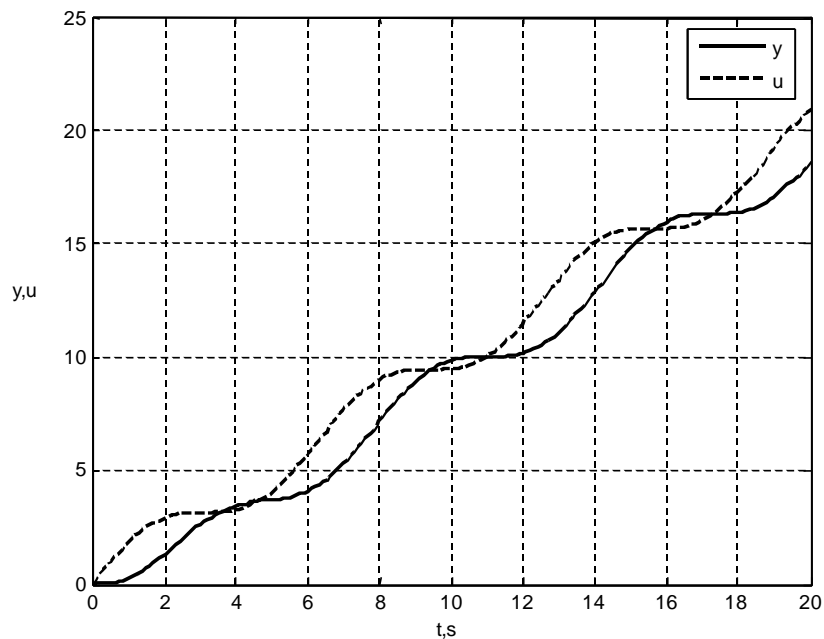


Рис. 5.9. Результаты расчета

```

W=tf(1,[1 1 1])
t=0:0.1:20;
u=t+sin(t);
y=lsim(W,u,t),grid
plot(t,y,'k',t,u,'k--'),grid
legend('y','u')

```

4). Свободное движение системы, выведенной из состояния равновесия

В MatLab свободное движение системы, описываемой SS-моделью, рассчитывается с помощью функции `initial`.

Синтаксис функции:

```
initial(sys,x0)
initial(sys,x0,t)
initial(sys1,sys2,...,sysN,x0)
initial(sys1,sys2,...,sysN,x0,t)
initial(sys1,'PlotStyle1',...,sysN,'PlotStyleN',x0)
[y,t,x] = initial(sys,x0)
```

Вводимая без выходных аргументов, функция `initial(sys,x0)` строит график изменения переменных состояния при движении из состояния  $x_0$  (вектор-столбец). Функция `initial(sys,x0,t)` явно задает временной интервал. Для построения графиков для нескольких моделей используется функция `initial(sys1,sys2,...,sysN,x0)` или `initial(sys1,sys2,...,sysN,x0,t)`.

Вводимая с выходными аргументами, функция `[y,t,x] = initial(sys,x0)` или `[y,t,x] = initial(sys,x0,t)` возвращает значения выходной величины, времени и переменных состояния. График не строится.

Построим график изменения выходной величины системы

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}; \quad y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

при начальных значениях переменных состояния:  $x_1(0)=1$ ;  $x_2(0)=0$ .

```
A=[0 1;-1 -1];C=[1 0];x0 = [1 ; 0];
Sys=ss(A, [], C, []);
initial(Sys,x0),grid
```

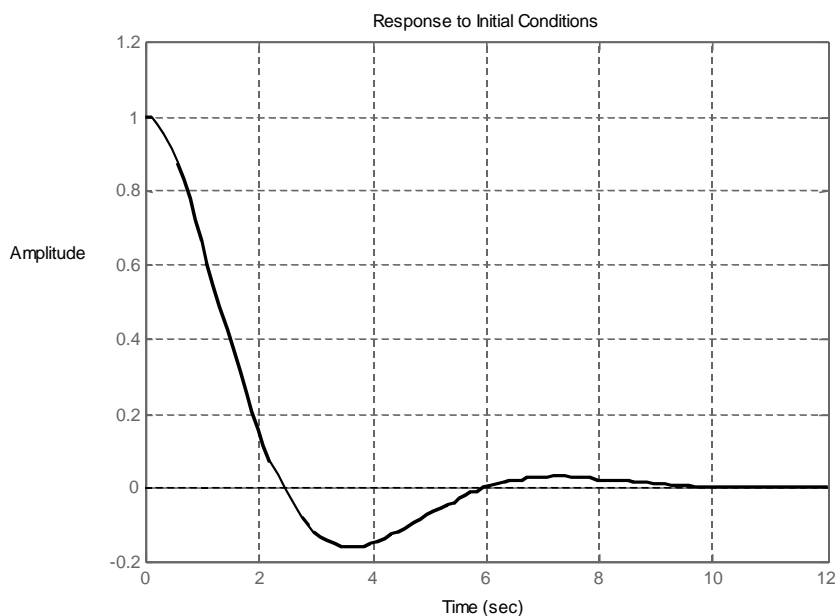


Рис. 5.10. Результаты выполнения программы



**Домашнее задание.** Дана структурная схема САУ с пропорциональным регулятором (рис. 5.11). Определить ПФ системы по задающему воздействию и по ошибке управления. Исходными данными при выполнении задания являются: структурная схема системы и передаточные функции всех звеньев.

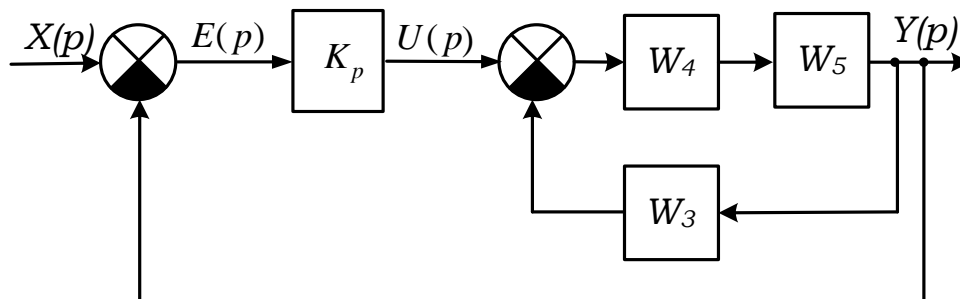


Рис. 5.11. Структурная схема системы для домашнего задания

ПФ отдельных звеньев имеют вид:

$$W_3(p) = K_3; \quad W_4(p) = \frac{K_4}{p + a_0}; \quad W_5(p) = \frac{1}{p}.$$

Таблица 5.1. Таблица коэффициентов ПФ

№ Варианта	$K_p$	$K_3$	$a_0$	$K_4$
1	20	20	5	10
2		22	10	20
3		24	15	30
4		26	20	40
5		28	25	50
6		30	5	10
7		32	10	20
8		34	15	30
9		36	20	40
10		38	25	50
11	30	40	20	40
12		42	15	30
13		44	25	50
14	40	46	30	60
15		48	20	40
16		50	40	80
17		52	25	50
18		54	35	70
19		56	40	80

№ Варианта	$K_p$	$K_3$	$a_0$	$K_4$
20		58	25	50
21	50	60	50	100
22		62	40	80
23		64	30	60
24		66	20	40
25		68	35	70
26		70	25	50
27		72	45	90
28		74	40	80

**Требуется:**

1. Определить аналитическим методом переходную и импульсную характеристики замкнутой системы, а также ее реакцию на линейный входной сигнал.

2. Определить свободное движение системы из состояния, в котором выходная величина равна 10 В, а скорость ее изменения – нулю.

3. Определить все отклики в Matlab с построением временных диаграмм.

## Практическое занятие 6 ЧАСТОТНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ

### 6.1. Основные частотные характеристики

В этой работе рассматриваются частотные характеристики линейных систем и их элементов.

При анализе в частотной области тестовым сигналом является гармоническое воздействие. Реакция линейной системы на такое воздействие, точнее ее вынужденная составляющая, также является гармонической. Свойства системы проявляются в том, что амплитуда и фаза выходных колебаний будут отличаться от амплитуды и фазы входных, причем это отличие может существенно зависеть от частоты. Таким образом, в общем смысле частотные характеристики описывают способность системы или элемента «воспроизводить» входной гармонический сигнал на своем выходе. Все реальные объекты и системы инерционны, поэтому при увеличении частоты имеет место следующая тенденция: амплитуда выходных колебаний уменьшается, а их фазовый сдвиг (отставание по фазе от входных колебаний) – увеличивается. Система просто «не успевает» воспроизвести входной сигнал.

При построении и исследовании частотных характеристик мгновенные значения воздействия на систему и ее отклика являются гармоническими функциями времени (мгновенные значения) со своими амплитудами и начальными фазами:

$$x(t) = X_m \sin(\omega t + \varphi_x), \quad y(t) = Y_m \sin(\omega t + \varphi_y).$$

При этом соотношения между мгновенными значениями можно заменить соотношениями между комплексными изображениями.

Каждой гармонической функции времени, например, входному воздействию  $x(t)$  и реакции  $y(t)$ , можно поставить в соответствие комплексное число, называемое *мгновенным* или *текущим комплексом* гармонической функции, модуль которого равен амплитуде, а аргумент – ее фазе:

$$\underline{x} = X_m e^{j(\omega t + \varphi_x)}; \quad \underline{y} = Y_m e^{j(\omega t + \varphi_y)}.$$

Значение текущего или мгновенного комплекса в начальный момент времени называется комплексной амплитудой:

$$\dot{X}_m = X_m e^{j\varphi_x}; \quad \dot{Y}_m = Y_m e^{j\varphi_y}. \quad (6.1)$$

Комплексная амплитуда – это комплексное число, модуль которого равен амплитуде, а аргумент – начальной фазе гармонической функции. Используя понятие комплексной амплитуды, текущие комплексы можно записать в виде:

$$\underline{x} = X_m e^{j(\omega t + \varphi_x)} = X_m e^{j\varphi_x} e^{j\omega t} = \dot{X}_m e^{j\omega t}; \quad (6.2)$$

$$\underline{y} = Y_m e^{j(\omega t + \varphi_y)} = Y_m e^{j\varphi_y} e^{j\omega t} = \dot{Y}_m e^{j\omega t}. \quad (6.3)$$

Сомножитель  $e^{j\omega t}$ , входящий в это выражение, представляет собой вектор, называемый *оператором вращения*, имеет единичную длину и вращается в комплексной плоскости против часовой стрелки с угловой скоростью  $\omega$ .

Найдем комплексное изображение производной гармонической функции времени. При этом учтем, что комплексная амплитуда не зависит от времени, а оператор вращения – от времени зависит:

$$\frac{d}{dt} x(t) \Leftrightarrow \frac{d}{dt} (\dot{X}_m e^{j\omega t}) = j\omega \dot{X}_m e^{j\omega t};$$

$$\frac{d}{dt} y(t) \Leftrightarrow \frac{d}{dt} (\dot{Y}_m e^{j\omega t}) = j\omega \dot{Y}_m e^{j\omega t}.$$

Таким образом, дифференцированию гармонической функции времени соответствует умножение ее комплексного изображения (текущего комплекса или комплексной амплитуды) на  $j\omega$ . Производной второго порядка соответствует умножение комплексного изображения гармонической функции на  $(j\omega)^2 = -\omega^2$  и т.д.

Введем в рассмотрение основополагающие понятия теории анализа и синтеза систем в частотной области.

*Амплитудно-частотная характеристика (АЧХ)* – зависимость отношения амплитуды выходных колебаний к амплитуде входных от частоты:

$$A(\omega) = \frac{Y_m(\omega)}{X_m(\omega)}.$$

*Фазочастотная характеристика (ФЧХ)* – зависимость разности фаз выходных и входных колебаний от частоты:

$$\varphi(\omega) = \varphi_y(\omega) - \varphi_x.$$

*Комплексная частотная характеристика (КЧХ)* – зависимость отношения комплексной амплитуды выходных колебаний к комплексной амплитуде входных от частоты:

$$W(j\omega) = \frac{\dot{Y}_m(\omega)}{\dot{X}_m} = \frac{Y_m e^{j\varphi_y}}{X_m e^{j\varphi_x}} = A(\omega) e^{j\varphi(\omega)}.$$

КЧХ, объединяющая амплитудно-частотную и фазочастотную характеристики, называется также *амплитудно-фазовой частотной характеристикой (АФЧХ)*.

Как любая комплексная функция вещественного аргумента, КЧХ имеет вещественную и мнимую составляющие:

$$W(j\omega) = A(\omega)[\cos \varphi(\omega) + j \sin \varphi(\omega)] = P(\omega) + jQ(\omega).$$

*Вещественная* частотная характеристика (ВЧХ) – зависимость вещественной части КЧХ от частоты:

$$P(\omega) = \operatorname{Re}\{W(j\omega)\} = A(\omega) \cos \varphi(\omega).$$

*Мнимая* частотная характеристика (ВЧХ) – зависимость мнимой части КЧХ от частоты:

$$Q(\omega) = \operatorname{Im}\{W(j\omega)\} = A(\omega) \sin \varphi(\omega).$$

Связь между характеристиками  $A(\omega)$  и  $\varphi(\omega)$ , с одной стороны, и  $P(\omega)$  и  $Q(\omega)$  – с другой, очевидна:

$$\begin{cases} A(\omega) = \sqrt{P^2(\omega) + Q^2(\omega)}; \\ \varphi(\omega) = \operatorname{arctg} \frac{Q(\omega)}{P(\omega)}. \end{cases} \quad (6.4)$$

КЧХ или АФЧХ звена или системы можно получить непосредственно по операторной передаточной функции, которая, как показано ранее, представляет собой отношение двух полиномов

$$W(p) = \frac{y(t)}{x(t)} = \frac{N(p)}{D(p)}, \quad (6.5)$$

где под  $p$  понимают оператор дифференцирования  $\frac{d}{dt}$ , при этом умножению на  $p^n$  соответствует взятие  $n$ -ной производной. С учетом этого дифференциальное уравнение записывается в виде:

$$D(p)y(t) = N(p)x(t). \quad (6.6)$$

Подставим выражения для текущих комплексов в ДУ. При этом учтем следующие выражения для  $k$ -х производных входного и выходного сигналов, справедливость которых показана ранее:

$$\begin{aligned} p^k x(t) &\Leftrightarrow (j\omega)^k \dot{X}_m e^{j\omega t}, \\ p^k y(t) &= (j\omega)^k \dot{Y}_m e^{j\omega t}. \end{aligned}$$

После подстановки получим:

$$D(j\omega)\dot{Y}_m e^{j\omega t} = N(j\omega)\dot{X}_m e^{j\omega t},$$

откуда

$$\frac{N(j\omega)}{D(j\omega)} = \frac{\dot{Y}_m e^{j\omega t}}{\dot{X}_m e^{j\omega t}} = \frac{\dot{Y}_m}{\dot{X}_m} = \frac{Y_m e^{j\psi_y}}{X_m e^{j\psi_x}} = \frac{Y_m}{X_m} e^{j(\psi_y - \psi_x)} = A(\omega) e^{j\varphi(\omega)}.$$

Следовательно:

$$W(j\omega) = A(\omega) e^{j\varphi(\omega)}. \quad (6.7)$$

Таким образом, АФЧХ линейного звена или системы управления в целом можно получить путем замены в передаточной функции оператора  $p$  на оператор  $j\omega$ .

Порядок преобразований при этом следующий. После подстановки  $p = j\omega$  получаем:

$$W(j\omega) = \frac{N(j\omega)}{D(j\omega)} = \frac{P_N(\omega) + jQ_N(\omega)}{P_D(\omega) + jQ_D(\omega)}.$$

Освобождаясь от мнимости в знаменателе, окончательно имеем

$$W(j\omega) = \frac{(P_N(\omega) + jQ_N(\omega))(P_D(\omega) - jQ_D(\omega))}{P_D^2(\omega) + jQ_D^2(\omega)} = P(\omega) + jQ(\omega),$$

где

$$\begin{cases} P(\omega) = \frac{P_N(\omega)P_D(\omega) + Q_N(\omega)Q_D(\omega)}{P_D^2(\omega) + jQ_D^2(\omega)}, \\ Q(\omega) = \frac{Q_N(\omega)P_D(\omega) - P_N(\omega)Q_D(\omega)}{P_D^2(\omega) + jQ_D^2(\omega)}. \end{cases}$$

На комплексной плоскости АФЧХ изображается кривой, которая представляет собой геометрическое место точек концов вектора  $W(j\omega) = A(\omega)e^{j\varphi(\omega)}$ , соответствующих изменению частоты от  $\omega = 0$  до  $\omega = \infty$ . Эту кривую называют годографом Найквиста в честь выдающегося американского инженера Гарри Найквиста (*Harry Nyquist*).

На годографе указывают точки, соответствующие некоторым значениям частоты  $\omega$ , и стрелкой показывают направление перемещения конца вектора  $A(\omega)e^{j\varphi(\omega)}$  при увеличении частоты. Естественно, годограф позволяет одновременно судить как об АЧХ и ФЧХ, так и о ВЧХ и МЧХ. Годограф обладает одним недостатком – на нем скрыты значения частоты. Но если построить другие частотные характеристики, например, АЧХ и ФЧХ или ВЧХ и МЧХ, то по ним можно определить частоту для любой точки годографа.

Таким образом, для любого типового звена (или системы) при наличии передаточной функции можно построить *пять частотных характе-*

ристик: АЧХ и ФЧХ, ВЧХ и МЧХ, а также годограф АФЧХ (годограф Найквиста).

**Пример 6.1.** Построить все частотные характеристики апериодического звена первого порядка с ПФ

$$W(p) = \frac{k}{Tp + 1} = \frac{10}{0,5p + 1}.$$

Для получения КЧХ в ПФ звена подставим  $j\omega$  вместо  $p$ :

$$W(j\omega) = \frac{k}{1 + jT\omega}.$$

Выделим модуль и аргумент КЧХ:

$$W(j\omega) = \frac{k}{\sqrt{1 + T^2\omega^2} \cdot e^{j\arctg(T\omega)}} = \frac{k}{\sqrt{1 + T^2\omega^2}} e^{-j\arctg(T\omega)} = A(\omega)e^{j\varphi(\omega)}.$$

Следовательно, АЧХ и ФЧХ определяются выражениями:

$$A(\omega) = \frac{k}{\sqrt{1 + T^2\omega^2}} = \frac{10}{\sqrt{1 + 0,25\omega^2}}; \quad \varphi(\omega) = -\arctg(0,5\omega).$$

Задаваясь рядом значений угловой частоты, найдем соответствующие значения модуля и аргумента КЧХ, таблица 6.1.

Таблица 6.1.

$\omega$	0	1	2	3	4	6	8	10	14	18	22	25
A	10	8,9	7,1	5,6	4,5	3,2	2,4	2	1,4	1,1	0,9	0,8
$\varphi$ , град	0	-27	-45	-56	-63	-72	-76	-79	-82	-83,7	-84,8	-85,4

По данным таблицы строим АЧХ и ФЧХ, нанося точки на координатную плоскость и соединяя их плавной линией (рис.6.1).

Выделим вещественную и мнимую части КЧХ:

$$\begin{aligned} W(j\omega) &= \frac{k}{1 + jT\omega} = \frac{k(1 - jT\omega)}{(1 + jT\omega)(1 - jT\omega)} = \\ &= \frac{k}{1 + (T\omega)^2} + j \frac{-kT\omega}{1 + (T\omega)^2} = P(\omega) + jQ(\omega); \end{aligned}$$

$$P(\omega) = \frac{k}{1 + (T\omega)^2} = \frac{10}{1 + 0,25\omega^2}; \quad Q(\omega) = \frac{-kT\omega}{1 + (T\omega)^2} = \frac{-5\omega}{1 + 0,25\omega^2}.$$

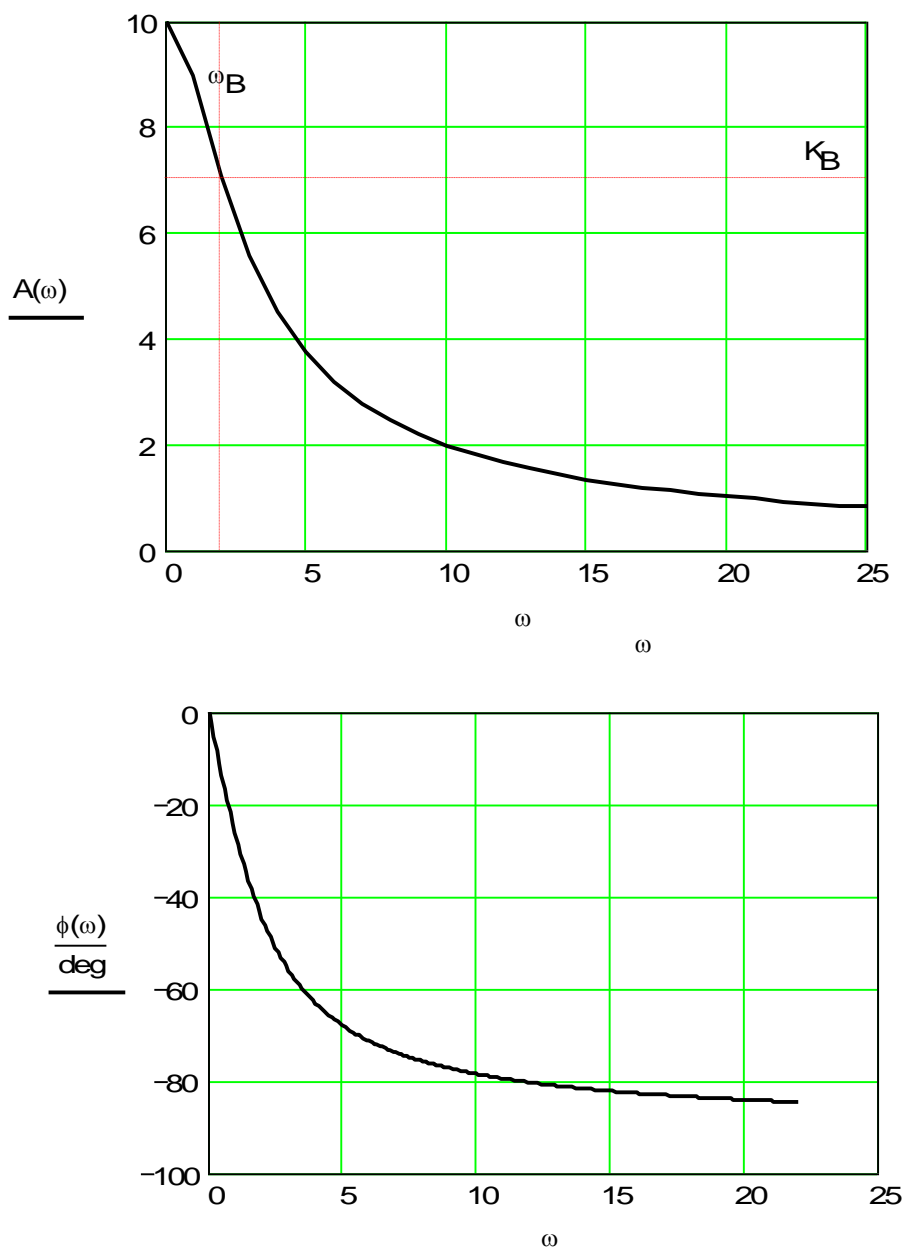


Рис. 6.1. АЧХ и ФЧХ к примеру 6.1

Задаваясь рядом значений угловой частоты, подсчитаем соответствующие значения вещественной и мнимой частей КЧХ, таблица 6.2:

Таблица 6.2.

$\omega$	0	1	2	3	4	6	8	10	14	18	22	25
$P$	10	8	5	3,1	2	1	0,59	0,38	0,2	0,12	0,08	0,06
$Q$	0	-4	-5	-4,6	-4	-3	-2,4	-1,9	-1,4	-1,1	-0,9	-0,79

По данным таблицы 6.2 строим ВЧХ и МЧХ, нанося точки на координатную плоскость и соединяя их плавной линией (рис.6.2).



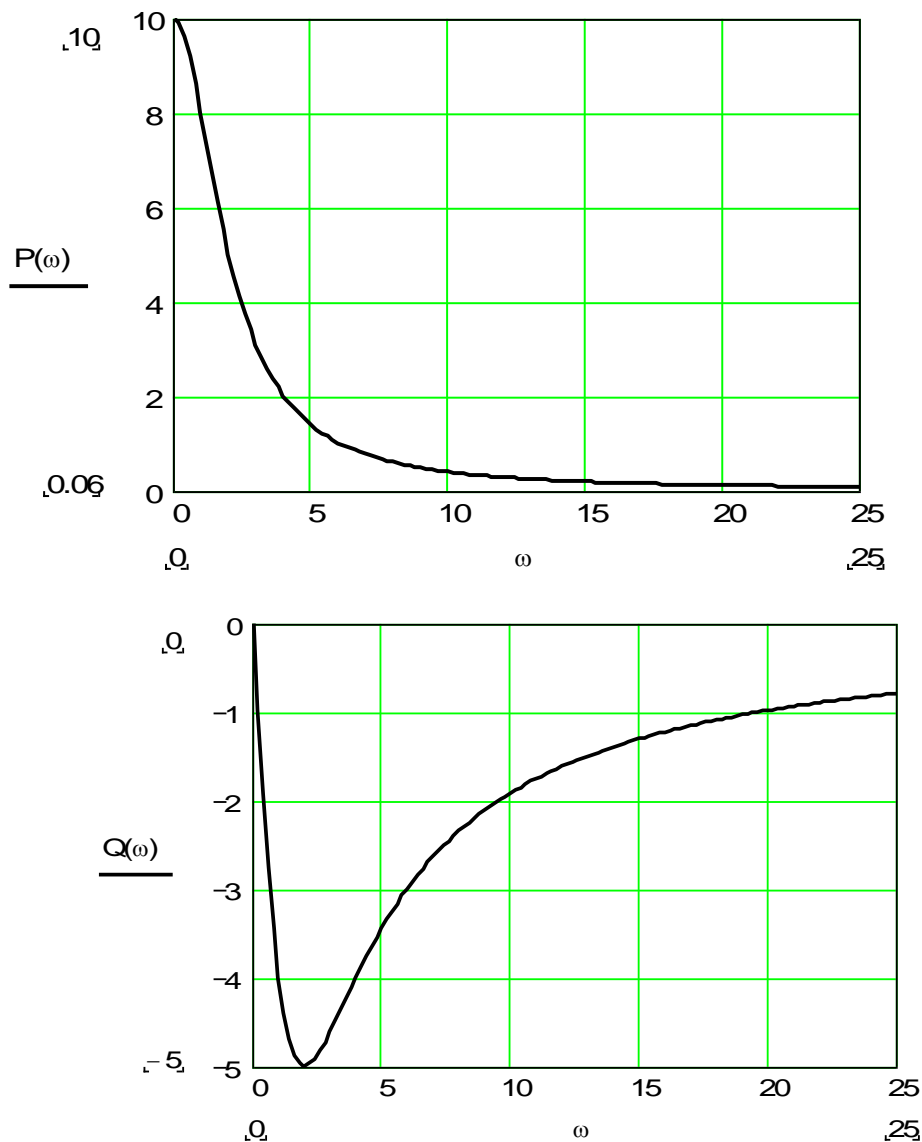


Рис. 6.2. ВЧХ и МЧХ к примеру 6.1

Значения вещественной и мнимой частей при соответствующих частотах позволяют построить годограф КЧХ. Менее удобно применять значения модуля и аргумента, так как приходится откладывать углы. Годограф приведен на рис.6.3.

Амплитудно-частотная характеристика используется в частности для определения *полосы пропускания* (ПП) системы.

Полоса пропускания определяется диапазоном частот входного сигнала, которые система способна воспроизвести на своем выходе. В различных сферах понятие «воспроизвести» имеет различные числовые интерпретации. В теории управления полоса пропускания оценивается частотой, начиная с которой значение амплитудно-частотной характеристики становится меньше 0,05, т.е. амплитуда выходных колебаний становится в 20 и более раз меньше амплитуды входных.

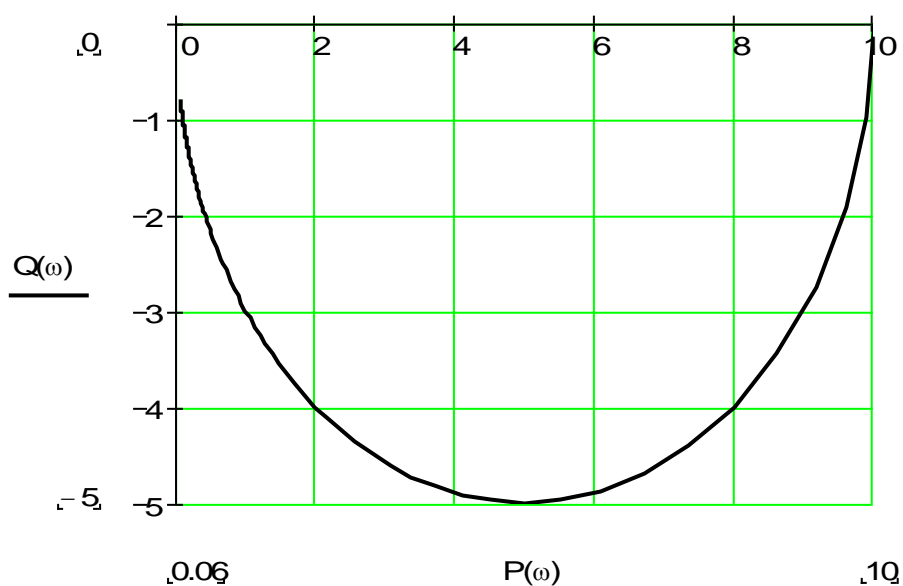


Рис. 6.3. КЧХ и МЧХ к примеру 6.1

В электронике для оценки усилителей используют другое определение полосы пропускания. Она оценивается частотой, при которой коэффициент усиления усилителя в  $\sqrt{2}$  раз меньше его значения на низких частотах, если идет речь об усилителях переменного напряжения или тока, или на нулевой частоте для усилителей постоянного напряжения или тока. При этом следует иметь в виду, что ослабление амплитуды в  $\sqrt{2}$  раз означает ослабление мощности в два раза, поскольку мощность сигнала всегда пропорциональна квадрату амплитуды. Воспользуемся этой интерпретацией полосы пропускания и найдем соответствующую частоту для звена первого порядка. На нулевой частоте значение АЧХ равно коэффициенту передачи системы, поэтому искомое значение можно найти из условия:

$$\frac{k}{\sqrt{1+T^2\omega^2}} = \frac{k}{\sqrt{2}},$$

откуда  $\omega_B = \frac{1}{T}$ . В данном примере  $\omega_B = \frac{1}{T} = \frac{1}{0,5} = 2 \text{ с}^{-1}$ . Следовательно, постоянная времени имеет определенный смысл и в частотной области.

Допустим теперь, что в системе первого порядка нужно увеличить быстродействие в 2 раза. Это значит, что мы должны каким-то образом уменьшить в два раза постоянную времени  $T$ . Тогда, в соответствии с полученным выше выражением, ПП увеличится в 2 раза. Этот пример демонстрирует общее правило: чем выше быстродействие системы (уже ее переходная характеристика), тем больше ее полоса пропускания (шире ее частотная характеристика) и наоборот.

**Пример 6.2.** Построить частотные характеристики колебательного звена первого порядка с ПФ

$$W(p) = \frac{520}{p^2 + 7,5p + 260}.$$

Запишем ПФ в стандартной форме:

$$W(p) = \frac{k}{T^2 p^2 + 2\xi T p + 1} = \frac{520}{p^2 + 7,5p + 260} = \frac{520/260}{\frac{1}{260} p^2 + \frac{7,5}{260} p + 1}.$$

Следовательно:

$$k = \frac{520}{260} = 2; \quad T = \sqrt{\frac{1}{260}} = 0,062 \text{ c}^{-1}; \quad \xi = \frac{7,5}{2 \cdot 0,062} = 0,2326.$$

Запишем выражение для комплексной частотной характеристики колебательного звена, подставив  $j\omega$  вместо  $p$  в его передаточную функцию, учитывая, что  $(j\omega)^2 = -\omega^2$ :

$$W(j\omega) = \frac{k}{1 - T^2 \omega^2 + j2\xi T \omega} = A(\omega)e^{j\varphi(\omega)} = P(\omega) + jQ(\omega).$$

Выделим модуль и аргумент КЧХ:

$$W(j\omega) = \frac{k}{\sqrt{(1 - T^2 \omega^2)^2 + 4\xi^2 T^2 \omega^2} \cdot e^{j \arctg\left(\frac{2\xi T \omega}{1 - T^2 \omega^2}\right)}} = A(\omega)e^{j\varphi(\omega)}.$$

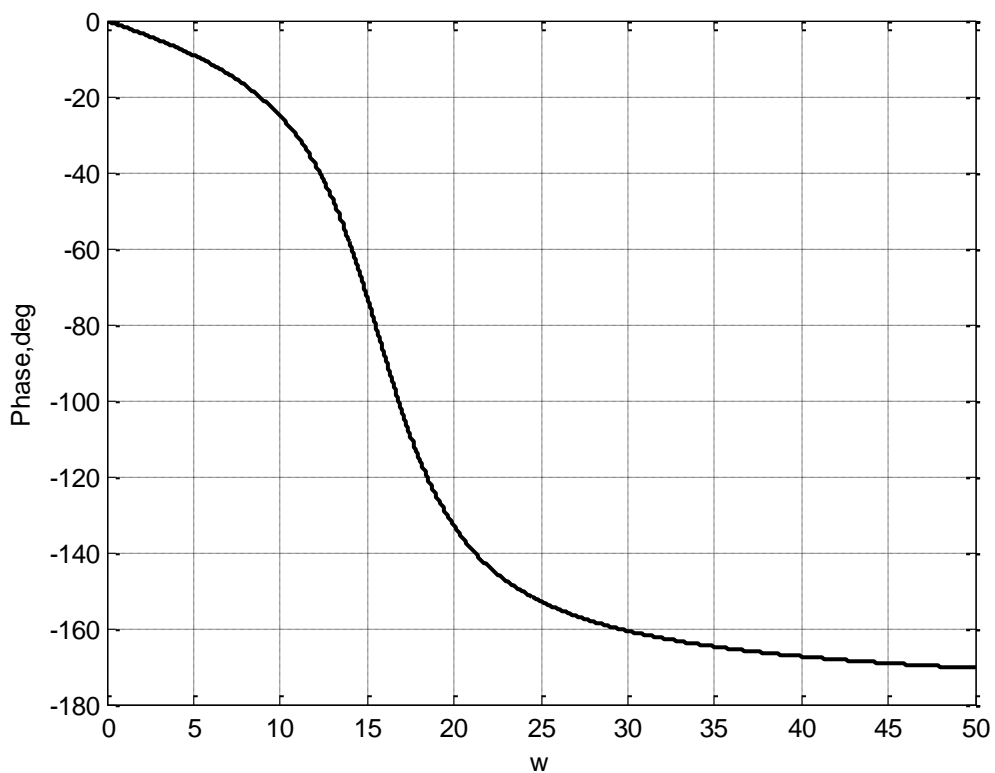
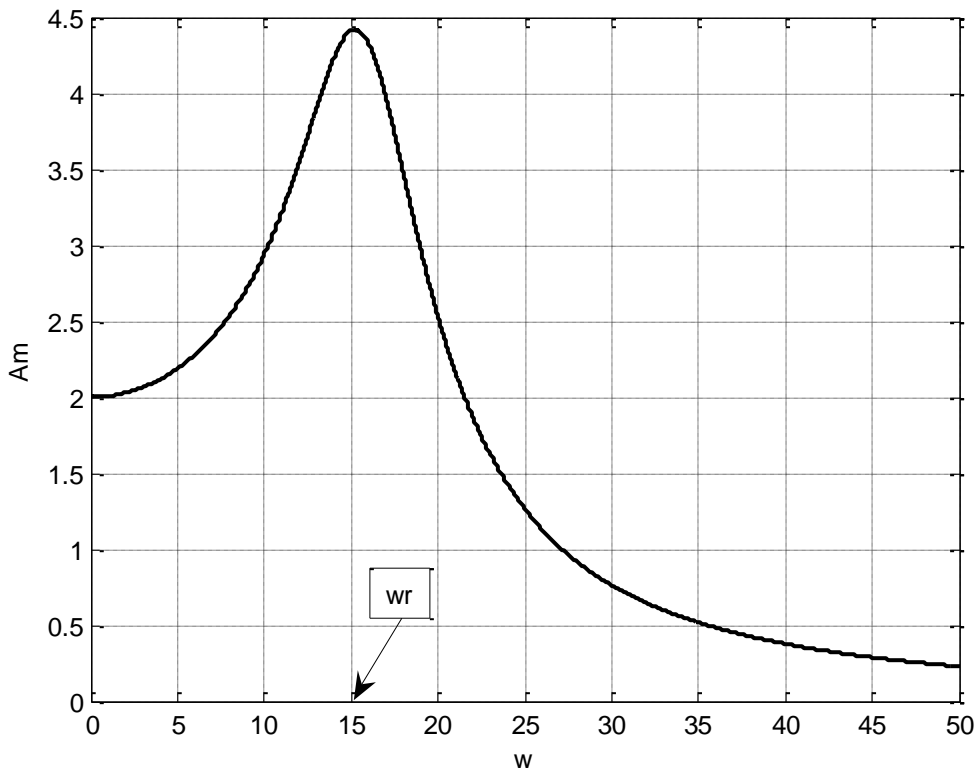
Следовательно, АЧХ и ФЧХ определяются выражениями:

$$A(\omega) = \frac{k}{\sqrt{(1 - T^2 \omega^2)^2 + 4\xi^2 T^2 \omega^2}}; \quad \varphi(\omega) = -\arctg\left(\frac{2\xi T \omega}{1 - T^2 \omega^2}\right).$$

АЧХ и ФЧХ колебательного звена имеют вид, рис. 6.4:

Появление максимума на АЧХ называют резонансом, а частоту  $\omega_r$ , при которой достигается этот максимум, называют резонансной частотой. Чтобы найти значение для резонансной частоты, нужно выражение для АЧХ продифференцировать по частоте и результат приравнять нулю. В результате получим:

$$\omega_r = \omega_0 \sqrt{1 - 2\xi^2} = \frac{\sqrt{1 - 2\xi^2}}{T}, \quad \xi < \frac{\sqrt{2}}{2} = 0,707.$$



*Рис. 6.4. АЧХ и ФЧХ колебательного звена*

Для нашего случая

$$\omega_r = \frac{\sqrt{1 - 2 \cdot 0,2326^2}}{0,062} = 15,2 \text{ 1/с.}$$

Подставляя это значение в выражение для АЧХ, получим максимальное значение АЧХ:

$$A_m = \frac{k}{2\xi\sqrt{1-\xi^2}} = \frac{2}{2 \cdot 0,2326 \sqrt{1-0,2326^2}} = 4,42.$$

Таким образом, максимум АЧХ зависит только от коэффициента демпфирования  $\xi$  так же, как и максимум переходной характеристики.

Для определения вещественных и мнимых частотных характеристик можно выделить вещественную и мнимую части КЧХ:

$$\begin{aligned} W(j\omega) &= \frac{k}{1 - T^2\omega^2 + j2\xi T\omega} = \frac{k(1 - T^2\omega^2 - j2\xi T\omega)}{(1 - T^2\omega^2)^2 + (2\xi T\omega)^2} = \\ &= \frac{k(1 - T^2\omega^2)}{(1 - T^2\omega^2)^2 + (2\xi T\omega)^2} + j \frac{-2k\xi T\omega}{(1 - T^2\omega^2)^2 + (2\xi T\omega)^2} = P(\omega) + jQ(\omega); \\ P(\omega) &= \frac{k(1 - T^2\omega^2)}{(1 - T^2\omega^2)^2 + (2\xi T\omega)^2}; \quad Q(\omega) = \frac{-2k\xi T\omega}{(1 - T^2\omega^2)^2 + (2\xi T\omega)^2}. \end{aligned}$$

Из выражения для КЧХ следует, что при условии  $1 - T^2\omega^2 = 0$ , т.е. при частоте  $\omega = \omega_0 = \frac{1}{T}$ , значение КЧХ становится мнимым числом:

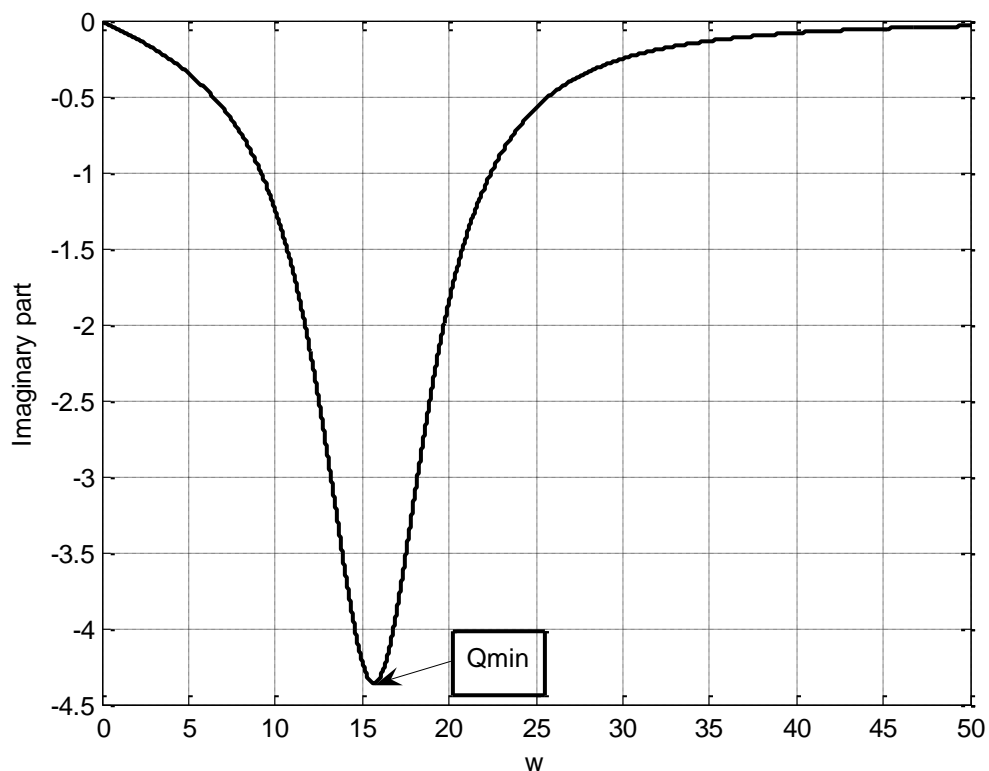
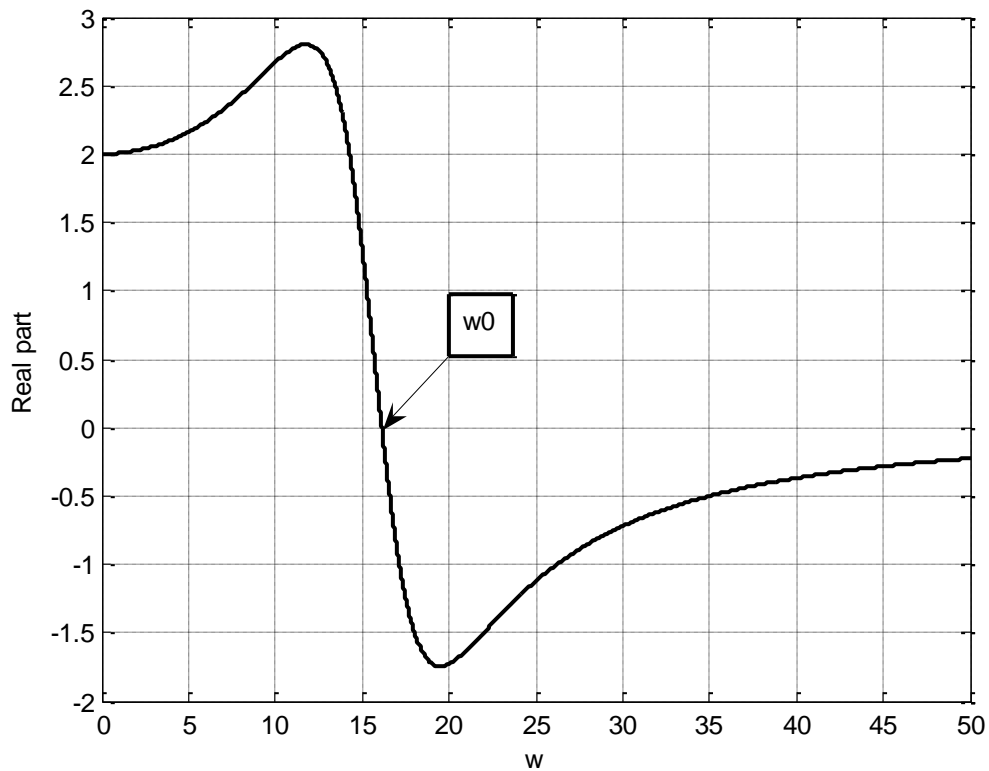
$$W(j\omega)|_{\omega=\omega_0} = \frac{k}{j2\xi} = -j \frac{k}{2\xi} = \frac{k}{2\xi} e^{-j90^\circ}.$$

При этой частоте ВЧХ пересекает ось частот, т.е. равна нулю, а МЧХ становится равной

$$Q(\omega_0) = \frac{-k}{2\xi} = \frac{-2}{2 \cdot 0,2326} = -4,3; \quad \omega_0 = \frac{1}{T} = \frac{1}{0,062} = 16,12 \text{ 1/с.}$$

Графики ВЧХ и МЧХ для рассматриваемого КЗ имеют вид, рис. 6.5:

И, наконец, последней и наиболее главной из частотных характеристик является *амплитудно-фазовая частотная характеристика (АФЧХ)* или *годограф КЧХ* – геометрическое место на комплексной плоскости концов вектора  $W(j\omega)$ , соответствующих изменению частоты от  $\omega = 0$  до  $\omega = \infty$ .



*Рис. 6.5.* ВЧХ и МЧХ колебательного звена

Годограф удобнее строить по вещественной и мнимой частям КЧХ, хотя можно для этой цели использовать и АЧХ и ФЧХ. Напомним, что на годографе указывают точки, соответствующие некоторым значениям час-

тоты  $\omega$ , и стрелкой показывают направление перемещения конца вектора  $A(\omega)e^{j\varphi(\omega)}$  при увеличении частоты. На рис. 6.5 показана АФЧХ системы

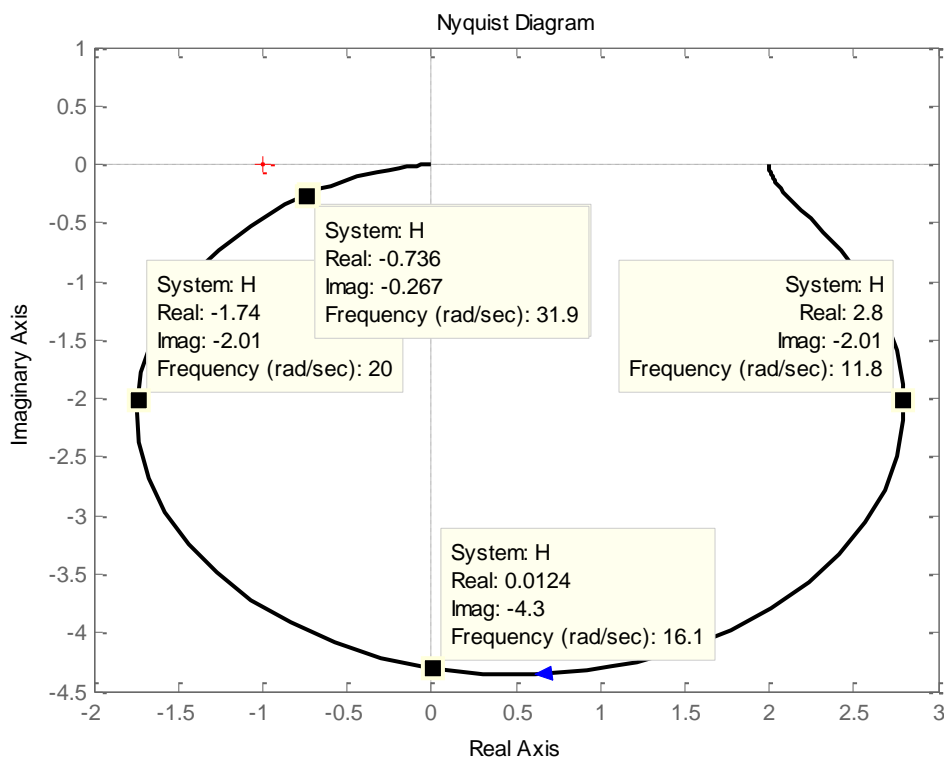


Рис. 6.6. Годограф рассматриваемой передаточной функции

АЧХ и ФЧХ системы имеют один недостаток. В равномерном масштабе по оси частот  $\omega$  графики частотных характеристик быстро изменяются на низких частотах и медленно – на высоких. В результате графики получаются малоинформативными. Чтобы преодолеть этот недостаток, применяют логарифмическую шкалу частот. Единицей измерения на этой шкале обычно является декада (дек) – интервал, на концах которого значения частоты отличаются друг от друга в 10 раз.

Примеры декад:  $[1, 10]$ ,  $[0.2, 2]$ ,  $[a \cdot 10^n, a \cdot 10^{n+1}]$ . В таблице 6.3 приведены значения логарифма частоты на декаде  $[1, 10]$ .

Таблица 6.3.

$\omega$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\lg(\omega)$	0	0,301	0,477	0,602	0,699	0,778	0,845	0,903	0,954	1

Для сопоставления обычного и логарифмического масштабов оси частот нужно использовать формулу, непосредственно следующую из понятия десятичного логарифма:

$$\lg(10^n \omega) = \lg(10^n) + \lg(\omega) = n + \lg(\omega).$$

Таким образом, увеличение/уменьшение частоты в 10 раз увеличивает/уменьшает ее логарифм на 1 дек.

Несмотря на логарифмический масштаб, обозначение меток шкалы частот чаще всего производят обычным способом, т.е. указывают значения частоты (в рад/сек), а не ее логарифма.

При исследовании динамических свойств и синтезе систем автоматического регулирования вместо АЧХ часто используются логарифмические амплитудно-частотные характеристики (ЛАЧХ), получаемые через десятичный логарифм АЧХ, единицами измерения которого являются белы и децибелы.

## 6.2. Логарифмические частотные характеристики

Частотные характеристики системы могут быть графически изображены в разных координатах. Например, это можно сделать в полярных координатах (на комплексной плоскости) – в виде годографа КЧХ. Однако такой подход имеет один недостаток: вид годографа сложным и весьма неочевидным образом зависит от состава системы, в частности от ее полюсов и нулей. То же самое можно сказать и про другие частотные характеристики, рассмотренные выше. Применительно к задачам анализа и синтеза желательно, чтобы частотная характеристика системы строилась непосредственно по ее передаточной функции без громоздких вычислений, и таким образом связь между характеристикой и составом системы была очевидной.

Таковыми свойствами обладают *логарифмические частотные характеристики* (ЛЧХ). В англоязычной литературе ЛЧХ называют диаграммами Боде, названными в честь инженера Х. У. Боде (Hendrik Bode), который широко использовал их при исследовании усилителей с обратной связью.

К логарифмическим частотным характеристикам относятся следующие характеристики:

*логарифмическая амплитудно-частотная характеристика* (ЛАЧХ),  $L(\omega) = 20\lg A(\omega)$ . Строится в логарифмическом масштабе как по оси частот, так и по оси амплитуд, измеряется в децибелах (дБ);

*логарифмическая фазочастотная характеристика* (ЛФЧХ),  $\varphi(\omega)$ . Строится в логарифмическом масштабе по оси частот и в равномерном, желательно градусном, масштабе по оси фазового угла.

Обратная зависимость АЧХ от ЛАЧХ имеет вид

$$A(\omega) = 10^{0,05L(\omega)}.$$

Значение коэффициента усиления  $A = 1$  соответствует логарифмическому усилению  $L = 0$ . Отрицательная логарифмическая амплитуда  $L < 0$



означает ослабление сигнала с коэффициентом  $0 < A < 1$ , а значение  $L > 0$  – усиление с амплитудой  $A > 0$ .

Основное преимущество ЛАЧХ состоит в том, что сомножители вида  $(1 + j\omega T)$ , входящие в ПФ, при построении учитываются в виде суммы членов  $20 \lg|1 + j\omega T|$ , и диаграмма Боде легко получается путем сложения характеристик, соответствующих каждому отдельному сомножителю.

Суть диаграммы Боде можно проиллюстрировать на примере следующей ПФ:

$$W(p) = \frac{K(1 + T_2 p)}{p(1 + T_1 p)} = \frac{K(1 + p/\omega_2)}{p(1 + p/\omega_1)}.$$

ПФ имеет вещественный нуль  $z_2 = -\frac{1}{T_2} = -\omega_2$ , вещественный полюс

$p_1 = -\frac{1}{T_1} = -\omega_1$  и полюс в начале координат. Как будет показано ниже, модули нулей и полюсов играют роль характерных частот на логарифмических характеристиках, поэтому соответствующим образом и обозначены.

Запишем КЧХ и выделим модули сомножителей:

$$W(j\omega) = \frac{K \cdot (1 + j\omega/\omega_2)}{j\omega \cdot (1 + j\omega/\omega_1)} = \frac{K \cdot A_2(\omega) e^{j\varphi_2(\omega)}}{\omega e^{j90^\circ} \cdot A_1(\omega) e^{j\varphi_1(\omega)}} = A(\omega) e^{j\varphi(\omega)}, \quad (6.1)$$

где

$$A(\omega) = \frac{K \cdot A_2(\omega)}{\omega \cdot A_1(\omega)}, \quad \varphi_i(\omega) = \text{arctg}\left(\frac{\omega}{\omega_i}\right) \text{ и } \varphi(\omega) = \varphi_2(\omega) - \varphi_1(\omega) - 90^\circ.$$

Далее воспользуемся свойством логарифмов:

$$\lg\left(\frac{ab}{cd}\right) = \lg(ab) - \lg(cd) = \lg a + \lg b - \lg c - \lg d.$$

С учетом этого выражения ЛАЧХ принимает вид:

$$L(\omega) = 20 \lg\left(\frac{K \cdot A_2(\omega)}{\omega \cdot A_1(\omega)}\right) = 20 \lg K + 20 \lg A_2(\omega) - 20 \lg \omega - 20 \lg A_1(\omega).$$

Из этого выражения становится очевидным преимущество измерения модуля в децибелах: отдельные сомножители числителя ПФ входят в  $L(\omega)$  со знаком плюс, а сомножители знаменателя – со знаком минус.

Рассмотрим элементарные сомножители передаточной функции с точки зрения построения логарифмических частотных характеристик.

*Постоянный коэффициент усиления*

ЛАЧХ постоянного коэффициента усиления определяется выражением

$$L(\omega) = 20 \lg K = \text{const}, \text{ дБ},$$

т.е. логарифмическая амплитудная характеристика имеет вид прямой линии с нулевым наклоном (горизонтальная линия). Если  $K > 1$ , то  $20 \lg K > 0$ ; если  $K < 1$ , то  $20 \lg K < 0$ . Логарифмическая фазовая характеристика равна нулю во всем диапазоне частот:

$$\varphi(\omega) = 0.$$

*Нули и полюсы в начале координат*

В случае, когда ПФ имеет нуль в начале координат, ЛАЧХ соответствующей элементарной составляющей определяется выражением

$$L(\omega) = 20 \lg |j\omega| = 20 \lg \omega,$$

ЛАЧХ имеет вид прямой линии с наклоном 20 дБ/дек, пересекающей ось частот при  $\omega=1$ , как показано на рис. 6.7, а.

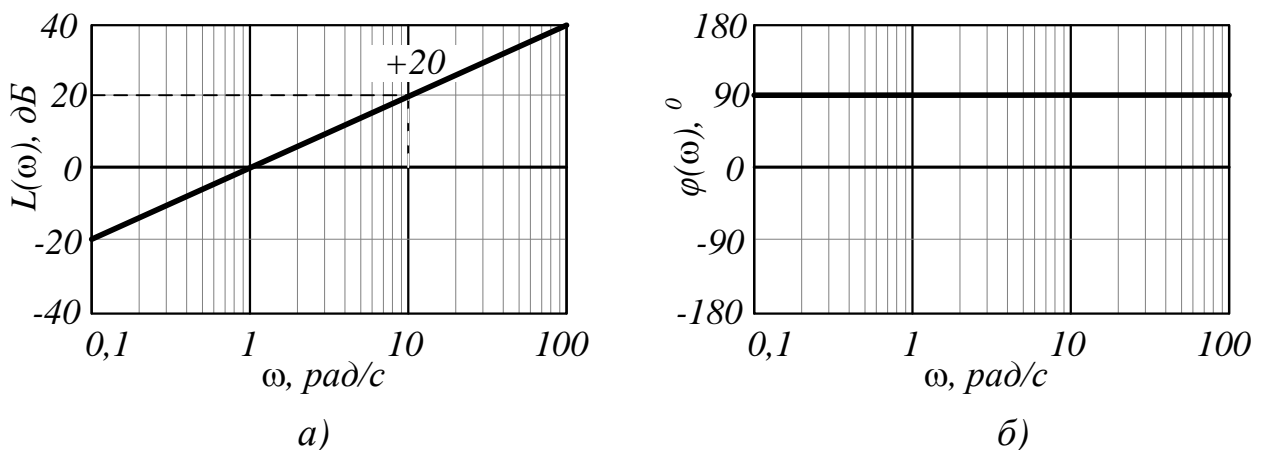


Рис. 6.7. Диаграмма Бode для нуля в начале координат

Сдвиг по фазе равен  $90^\circ$ , поскольку  $p|_{p=j\omega} = j\omega = \omega e^{j90^\circ}$ , и ЛФЧХ представляет собой горизонтальную линию на высоте  $90^\circ$  (

Рис. 6., б):

$$\varphi(\omega) = 90^\circ.$$

*Полюсу в начале координат* соответствуют ЛАЧХ и ЛФЧХ:

$$L(\omega) = 20 \lg \left| \frac{1}{j\omega} \right| = 20 \lg 1 - 20 \lg \omega = -20 \lg \omega \quad \text{и} \quad \varphi(\omega) = -90^\circ.$$

ЛАЧХ имеет вид прямой линии с наклоном  $-20$  дБ/дек, пересекающей ось частот при  $\omega=1$ , как показано на рис. 6.7, а. ЛФЧХ представляет собой горизонталь на высоте  $-90^\circ$  (рис. 6.8, б):

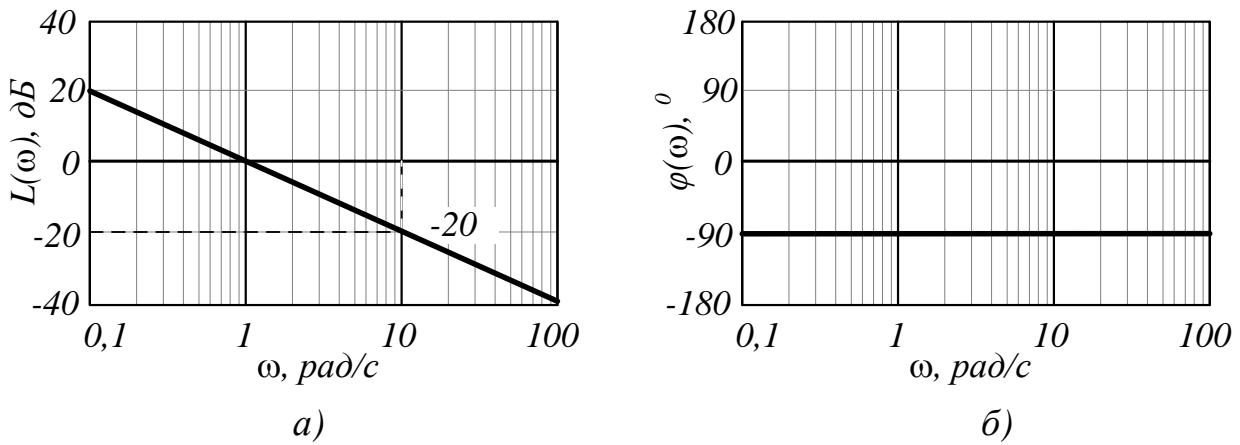


Рис. 6.8. Диаграмма Бode для полюса в начале координат

Отметим, что в обоих случаях фазовый сдвиг не зависит от частоты.

*Полюсы и нули на действительной оси*

Теперь рассмотрим отдельный элемент первого порядка из выражения (6.8), стоящий в числителе, и запишем для него ЛАЧХ:

$$L_i(\omega) = 20 \lg \left| 1 + j \frac{\omega}{\omega_i} \right| = 20 \lg \sqrt{1 + \left( \frac{\omega}{\omega_i} \right)^2} \quad (6.2)$$

На рис. 6.9 представлен график этой функции в зависимости от  $\lg \omega$ .

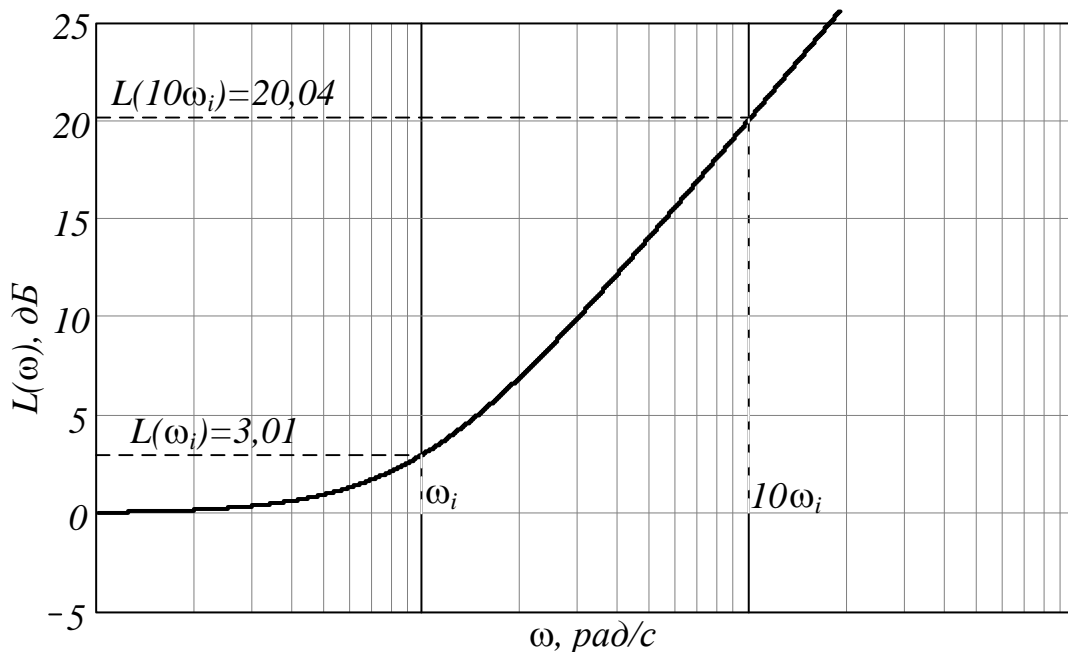


Рис. 6.9. Частотная характеристика элемента первого порядка

На частоте  $\omega = \omega_i$  отношение  $\frac{\omega}{\omega_i} = 1$ , и выражение (6.9) принимает значение:  $L_i(\omega_i) = 20 \lg \sqrt{1+1} = 20 \lg \sqrt{2} = 3,01$ . Обычно это значение округляют до 3 дБ и говорят, что для сомножителя первого порядка в числи-

теле ПФ модуль его КЧХ на частоте излома равен 3 дБ. Если такой же сомножитель находится в знаменателе, то на частоте излома модуль его КЧХ равен -3 дБ. Кроме того, на частоте  $10\omega_i$  модуль сомножителя первого порядка в числителе равен

$$L_i(\omega_i) = 20 \lg \sqrt{1 + \left(\frac{10\omega_i}{\omega_i}\right)^2} = 20 \lg \sqrt{101} = 20,04$$

или приблизительно 20 дБ.

В случае вещественных нулей и полюсов можно применять аппроксимацию частотной характеристики, заменяя ее ЛАЧХ отрезками прямых линий. Рассмотрим такую аппроксимацию, соответствующую элементу первого порядка:

$$L_i(\omega) = 20 \lg \sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_i}\right)^2}.$$

Для частот, намного меньших частоты излома  $\omega_i$ , т.е. при  $\frac{\omega}{\omega_i} \ll 1$ ,

$L_i(\omega_i) \approx 20 \lg \sqrt{1} = 0$ , и характеристика аппроксимируется прямой линией, совпадающей с осью  $\omega$ .

Для частот, намного больших частоты излома  $\omega_i$ , т.е. при  $\frac{\omega}{\omega_i} \gg 1$ ,

$L_i(\omega_i) \approx 20 \lg \left(\frac{\omega}{\omega_i}\right)$ , и характеристика аппроксимируется также прямой ли-

нией. Эта прямая имеет наклон 20 дБ/дек: если  $\frac{\omega}{\omega_i} = 1$ , то  $L_i(\omega) = 0$ ; если

$\frac{\omega}{\omega_i} = 10$ , т.е. через декаду, то  $L_i(\omega) = 20 \lg \left(\frac{\omega}{\omega_i}\right) = 20 \lg(10) = 20$  дБ.

Эти две прямые пересекаются при  $\omega = \omega_i$  и являются асимптотами для точной кривой (рис. 6.10).

При частоте  $\omega = \omega_i$  происходит резкое изменение наклона асимптотической характеристики, поэтому частота  $\omega_i$  названа *частотой излома*. Для большей ясности на всех прямолинейных участках диаграммы Бode обычно указывается их наклон. Максимальная ошибка от замены точной кривой ее асимптотами имеет место на частоте излома  $\omega_i$  и составляет 3 дБ, как было показано выше.

Таким образом, для полинома первого порядка вида  $(1 + T_i p)$ , находящегося в числителе (знаменателе) ПФ, асимптотическая ЛАЧХ строится так:

1) на логарифмической оси частот находим точку, соответствующую частоте излома  $\omega_i = \frac{1}{T_i}$ ; 2) из этой точки влево проводим прямую, совпадающую с осью частот, а вправо вверх (вниз) – прямую под наклоном 20 дБ/дек (–20 дБ/дек).

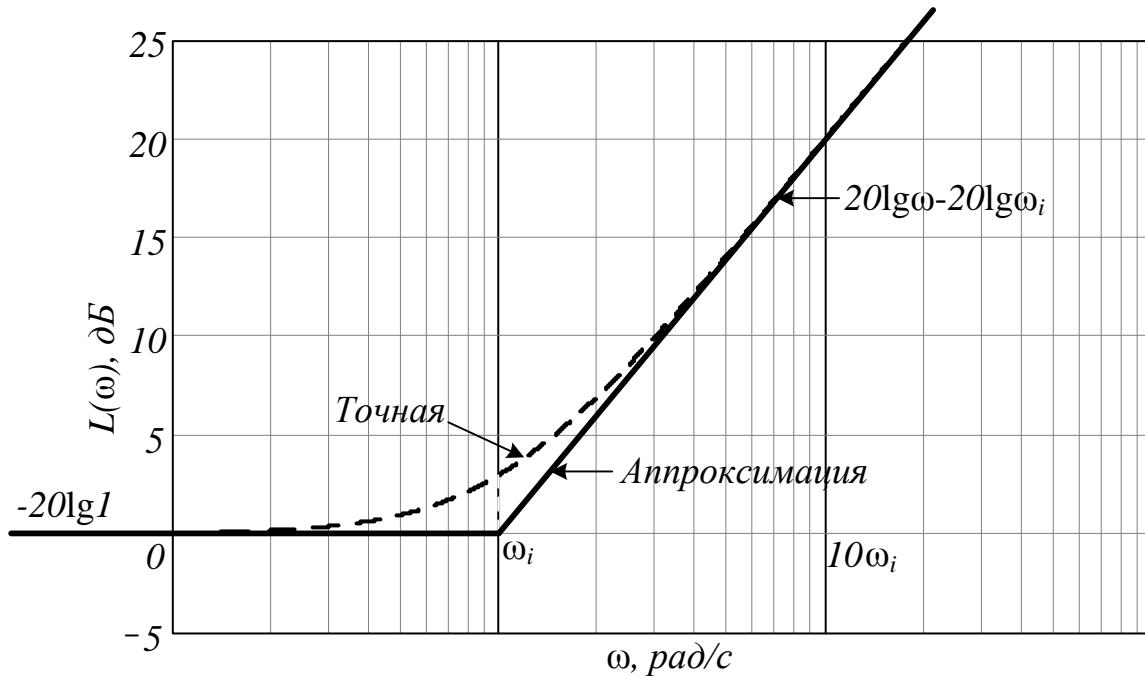


Рис. 6.10. Аппроксимация частотной характеристики элемента первого порядка

Фазовый сдвиг (сдвиг по фазе) элемента первого порядка в числителе ПФ определяется выражением

$$\varphi_i(\omega) = \text{arctg}\left(\frac{\omega}{\omega_i}\right).$$

Значения  $\varphi$  при различных отношениях  $\omega/\omega_i$  приведены в таблице 6.4, а сама ЛФЧХ изображена на рис. 6.11.

Таблица 6.4.

$\frac{\omega}{\omega_i}$	Точное значение, $\varphi^0$	Кусочно-линейная аппроксимация, $\varphi^0$
0,05	2,9	0
0,1	5,7	0
0,2	11,3	13,5
0,5	26,6	31,5
0,8	38,7	40,6
1,0	45,0	45,0
2	63,4	58,5

$\frac{\omega}{\omega_i}$	Точное значение, $\varphi^0$	Кусочно-линейная аппроксимация, $\varphi^0$
5	78,7	76,5
8	82,9	85,6
10	84,3	90
20	87,1	90

Для приближенного построения ЛФЧХ можно использовать кусочно-линейную аппроксимацию, которая имеет два излома – на частотах  $0,1\omega_i$  и  $10\omega_i$ . Между этими частотами прямая имеет наклон 45 град/дек. Значения  $\varphi$  при аппроксимации также приведены в таблице 6.4.

В случае вещественного ненулевого полюса фазовая характеристика отличается только знаком:

$$\varphi_i(\omega) = -a \operatorname{arctg} \left( \frac{\omega}{\omega_i} \right),$$

а амплитудная характеристика имеет наклон  $-20$  дБ/дек.

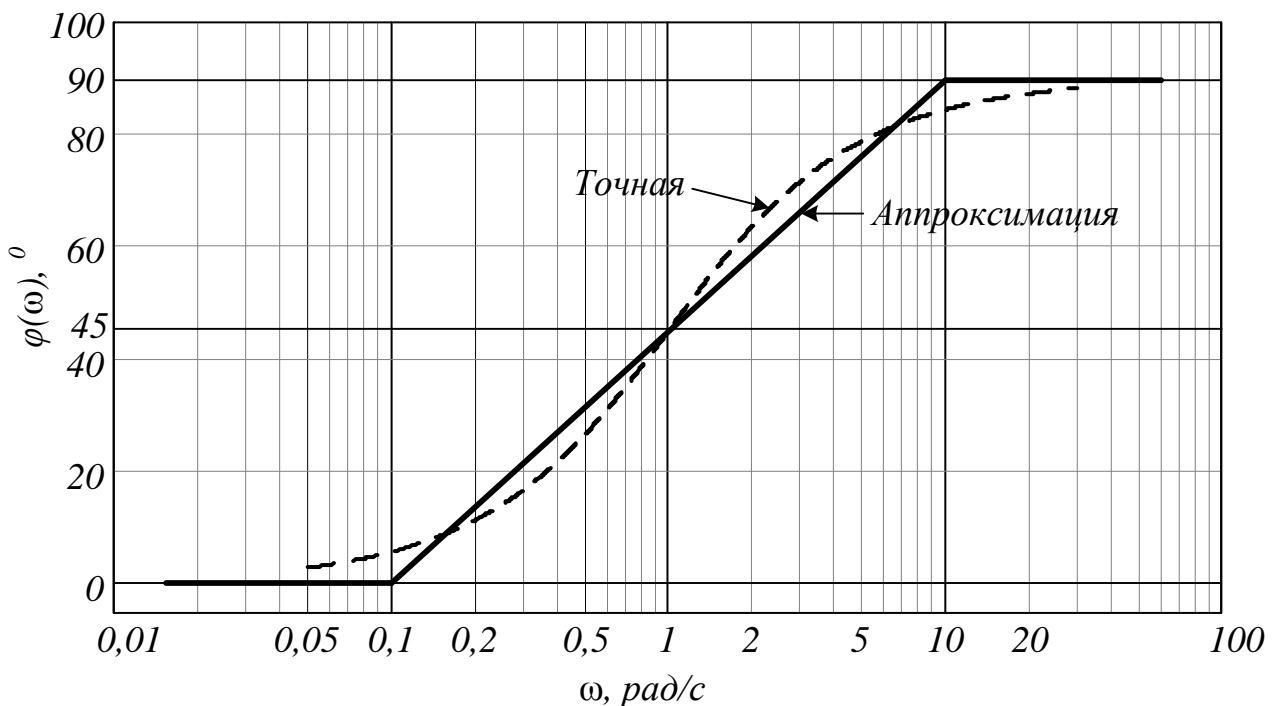


Рис. 6.11. Фазовая характеристика в случае вещественного нуля

Рассмотрим ПФ колебательного звена:

$$W_k(p) = \frac{1}{T^2 p^2 + 2\xi T p + 1}, \quad 0 \leq \xi < 1.$$

В этом случае ПФ имеет комплексно-сопряженные полюсы.

*Комплексные полюсы или нули*

Произведя замену  $p$  на  $j\omega$ , получим модуль и аргумент полинома:

$$W_{\kappa}(j\omega) = \frac{1}{1 - (\omega T)^2 + j2\xi\omega T} = \frac{1}{\sqrt{(1 - (\omega T)^2)^2 + 4\xi^2(\omega T)^2}} \cdot e^{j \arctg \frac{2\xi\omega T}{1 - (\omega T)^2}}.$$

Обозначим через  $\omega_i = 1/T$  и назовем ее частотой излома. Кроме того, пусть  $u = \frac{\omega}{\omega_i}$ . Тогда получим:

$$W_{\kappa}(j\omega) = \frac{1}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_i}\right)^2 + j2\xi\left(\frac{\omega}{\omega_i}\right)} = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_i}\right)^2\right)^2 + 4\xi^2\left(\frac{\omega}{\omega_i}\right)^2}} \cdot e^{-j \arctg \frac{2\xi\left(\frac{\omega}{\omega_i}\right)}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_i}\right)^2}}$$

или

$$W_{\kappa}(j\omega) = \frac{1}{1 - u^2 + j2\xi u} = \frac{1}{\sqrt{(1 - u^2)^2 + 4\xi^2 u^2}} \cdot e^{-j \arctg \left(\frac{2\xi u}{1 - u^2}\right)} = A(\omega) e^{j\varphi(\omega)}.$$

Тогда логарифмическую амплитудную характеристику можно представить в виде

$$L(\omega) = -20 \lg \left[ \sqrt{(1 - u^2)^2 + 4\xi^2 u^2} \right] = -10 \lg \left[ (1 - u^2)^2 + 4\xi^2 u^2 \right],$$

фазовую характеристику в виде

$$\varphi(\omega) = -\arctg \left( \frac{2\xi u}{1 - u^2} \right).$$

Модуль и аргумент  $W_{\kappa}(j\omega)$  являются функциями коэффициента демпфирования  $\xi$ , что в общем случае не позволяет использовать кусочно-линейную аппроксимацию. Однако в некоторых случаях это допустимо.

Если  $u = \frac{\omega}{\omega_i} \ll 1$ , то  $L(\omega) = -10 \lg 1 = 0$  дБ, а фазовая характеристика близка к  $0^0$ .

Если  $u = \frac{\omega}{\omega_i} \gg 1$ , то  $L(\omega) = -10 \lg u^4 = -40 \lg u$ , что соответствует наклону  $-40$  дБ/дек. Фазовая характеристика стремится к значению  $-180^0$ .

Асимптоты амплитудной характеристики пересекаются при значении  $L(\omega) = 0$  дБ, т.е. при  $u = \frac{\omega}{\omega_i} = 1$ . Однако расхождение между точной амплитудной характеристикой и ее аппроксимацией зависит от  $\xi$  и должно принципиально учитываться. Отклонение характеристик на частоте излома, т.е. при  $u = 1$ , вычисляется по формуле:

$$\Delta L(\xi) = -20 \lg \sqrt{4\xi^2} = -20 \lg(2\xi) = -20 \lg 2 - 20 \lg \xi \approx -6 - 20 \lg \xi.$$

При  $\xi = 0,25$  отклонение составляет  $\Delta L(\omega) \approx -6 - 20 \lg 0,25 \approx 6$  дБ, а при  $\xi = 1,0$  отклонение  $\Delta L(\omega) \approx -6 - 20 \lg 1 \approx -6$ . Поэтому можно считать, что при  $0,25 \leq \xi < 1$  максимальная погрешность аппроксимации амплитуды не превышает 6 дБ, и вместо нелинейной ЛАЧХ достаточно строить асимптотическую. При  $0 < \xi < 0,25$  нужно обязательно строить реальную ЛАЧХ с резонансным пиком величиной  $\Delta L(\xi)$  для колебательного звена или антирезонансной впадиной глубиной  $-\Delta L(\xi)$  для форсирующего звена второго порядка, т.е. для ПФ, имеющей комплексные нули. Резонансная частота определяется выражением:  $\omega_r = \omega_i \sqrt{1 - \xi^2}$  при  $\xi < 1/\sqrt{2} \approx 0,707$ , а максимальное значение модуля равно  $A_m = A(\omega_r) = \frac{1}{2\xi\sqrt{1 - \xi^2}}$ ,  $\xi < 0,707$ .

В случае комплексных нулей ЛАЧХ представляется в виде

$$L(\omega) = 20 \lg \left[ \sqrt{(1 - u^2)^2 + 4\xi^2 u^2} \right] = 10 \lg \left[ (1 - u^2)^2 + 4\xi^2 u^2 \right],$$

фазовая характеристика в виде

$$\varphi(\omega) = \operatorname{arctg} \left( \frac{2\xi u}{1 - u^2} \right).$$

В предыдущих примерах полюсы и нули ПФ располагались в левой полуплоскости. Однако система может иметь нули в правой полуплоскости и при этом быть устойчивой. Если нули двух ПФ расположены симметрично относительно мнимой оси, то этим функциям соответствуют одинаковые амплитудные, но разные фазовые характеристики. Если сравнивать КЧХ двух этих систем, то можно увидеть, что при изменении частоты от 0 до  $\infty$  система, все нули которой являются левыми, будет давать меньший фазовый сдвиг. Поэтому ПФ, все нули которой являются левыми, называется **минимально-фазовой**. Если ПФ имеет нули в правой полуплоскости, то она называется **неминимально-фазовой**.



### 6.3. Использование MatLab при построении частотных характеристик

Для построения ЛАЧХ и ЛФЧХ в MatLab используется функция `bode`. Вызываемая без выходных, т.е. левосторонних аргументов, функция `bode(sys)` выводит диаграммы Боде любой ЛТИ модели на экран. Эта модель может быть непрерывной или дискретной, одномерной (SISO) или многомерной (MIMO). Амплитуда выводится в дБ, фаза – в градусах. Диапазон частот определяется автоматически на основе вычисления полюсов системы. Функция `bode(sys,w)` использует заданный диапазон или вектор частот. Функция `bode(sys1, sys2,...,sysN)` или `bode(sys1, sys2,...,sysN,w)` строит диаграмму Боде нескольких ЛТИ моделей на одном графике. Все системы должны иметь одно и тоже число входов и выходов, но могут быть смешанного типа (непрерывные и дискретные). Эта команда полезна для сравнения частотного отклика нескольких систем.

Команда

`bode(sys1, 'PlotStyle1', ..., sysN, 'PlotStyleN')` определяет цвет, стиль линий и маркеры для построения. Например, `bode(sys1, 'r--', sys2, 'gx')` использует красные пунктирные линии для первой системы `sys1` и зеленые 'x' маркеры для второй системы `sys2`.

Вызываемая с выходными аргументами

```
[mag, phase, w] = bode(sys)
```

или

```
[mag, phase] = bode(sys, w),
```

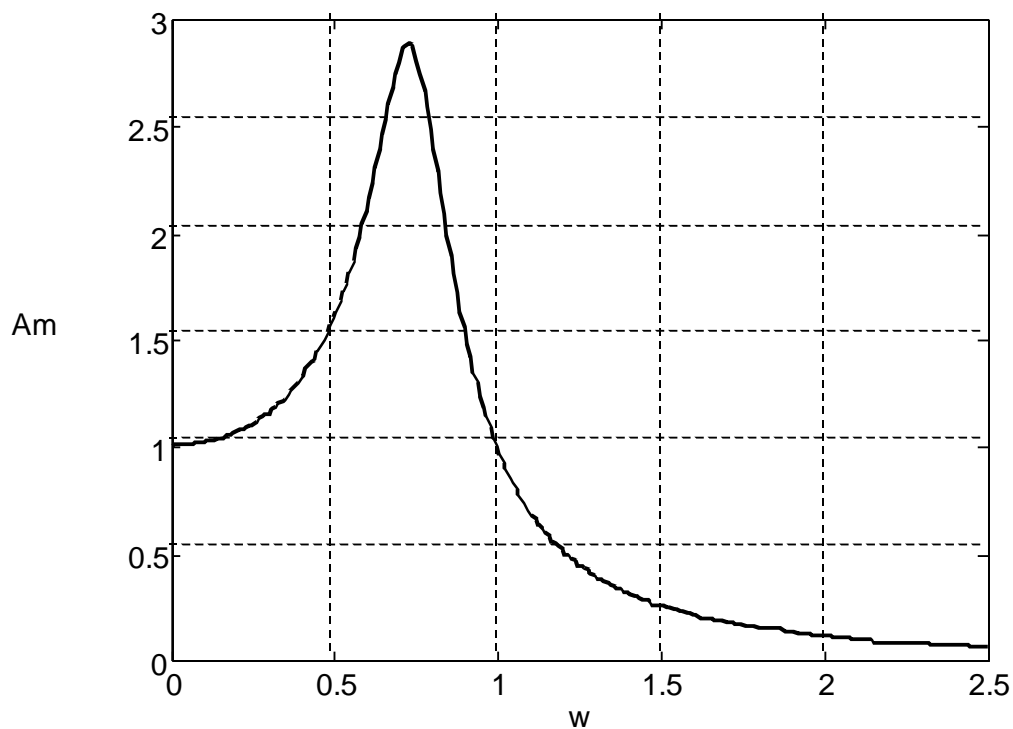
эта функция возвращает значения АЧХ и ФЧХ системы для частот  $\omega$  (в рад/с).

Выходные аргументы `mag` и `phase` представляют собой трехмерные массивы, в которых первая размерность соответствует номеру выхода, вторая – номеру входа, а третья – частоте. Если рассматривается SISO-система, первые две размерности этих аргументов – единичные. Поэтому трехмерные массивы можно преобразовать в вектора-столбцы с помощью операции (:).

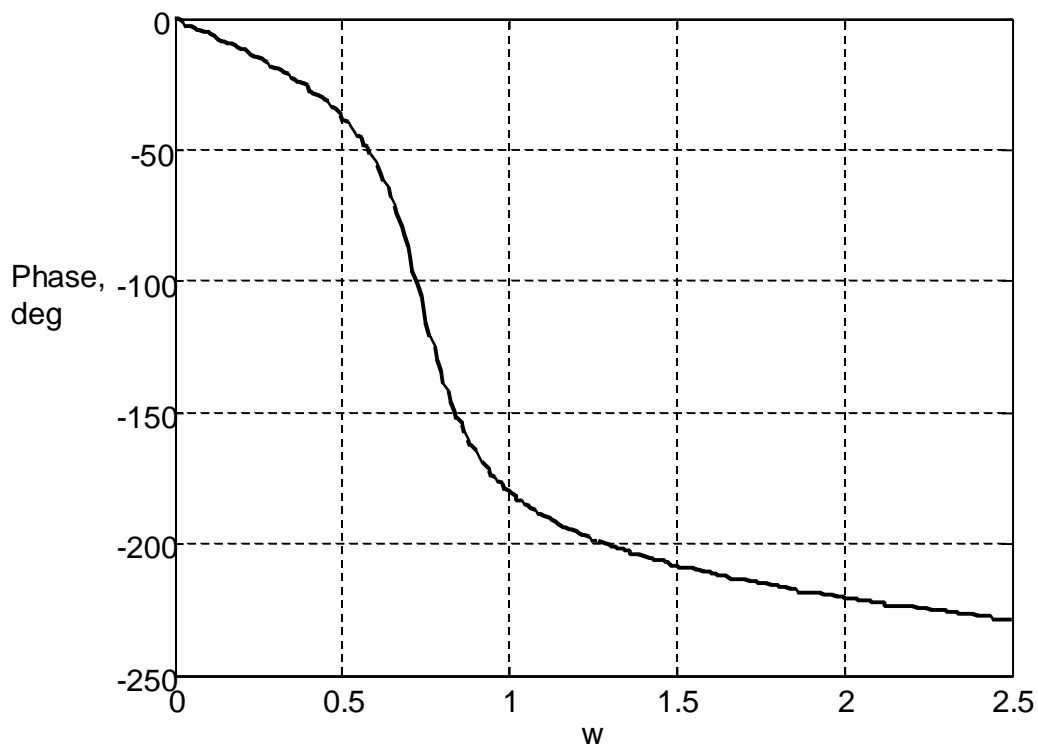
Пример:

```
W=tf(1, [1 2 1 1])
w=0:0.01:2.5;
[Am, Ph, w]=bode(W, w);
figure(1)
plot(w, Am(:), 'k-'), grid
xlabel('w'), ylabel('Am')
figure(2)
```

```
plot(w, Ph(:)), grid
xlabel('w'), ylabel('Phase, deg')
```



*Рис. 6.12. АЧХ системы*



*Рис. 6.13. ФЧХ системы*

Для построения АФЧХ используется функция `nyquist`. Синтаксис у этой функции такой же, как у функции `bode`:

```
nyquist(sys)
nyquist(sys, w)
```

```
nyquist(sys1,sys2,...,sysN)
nyquist(sys1,sys2,...,sysN,w)
nyquist(sys1,'PlotStyle1',...,sysN,'PlotStyleN')
[re,im,w] = nyquist(sys)
[re,im] = nyquist(sys,w)
```

Вызываемая с выходными аргументами

```
[re,im,w] = nyquist(sys)
```

или

```
[re,im] = nyquist(sys,w),
```

эта функция возвращает действительную и мнимую части КЧХ для заданных частот, что позволяет построить ВЧХ и МЧХ:

```
W=tf(1,[1 2 1 1])
w=0:0.01:2.5;
[Re,Im,w]=nyquist(W,w)
figure(1)
plot(w,Re(:)),grid
xlabel('w'),ylabel('Real part')
figure(2)
plot(w,Im(:)),grid
xlabel('w'),ylabel('Imaginary part')
figure(3)
nyquist(W,w)
```

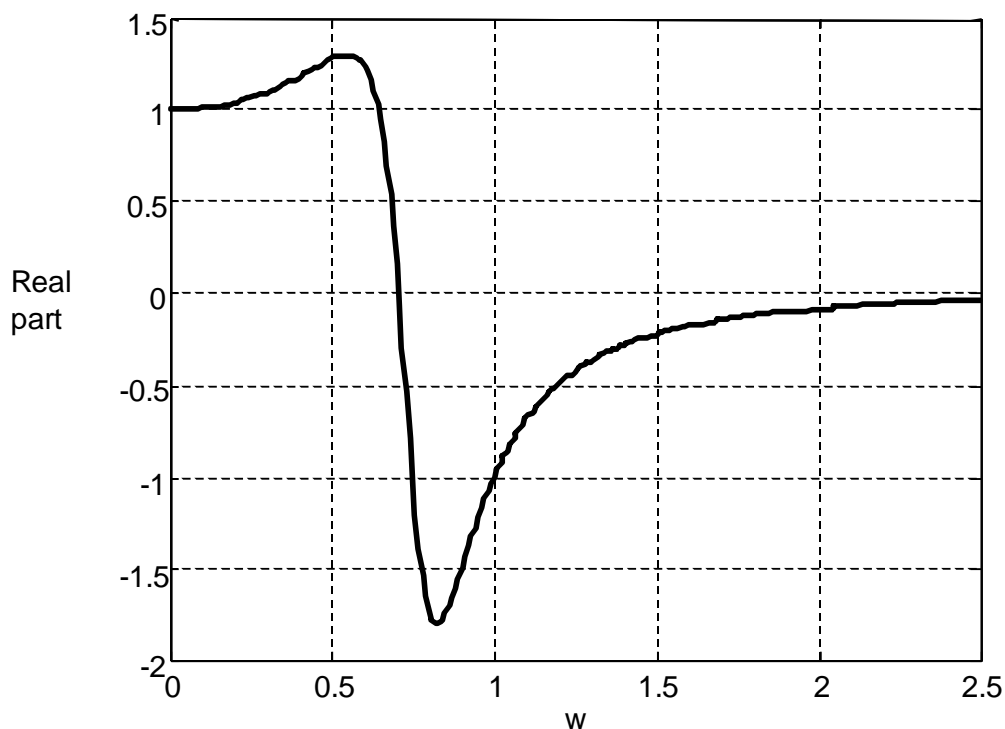


Рис. 6.14. ВЧХ системы

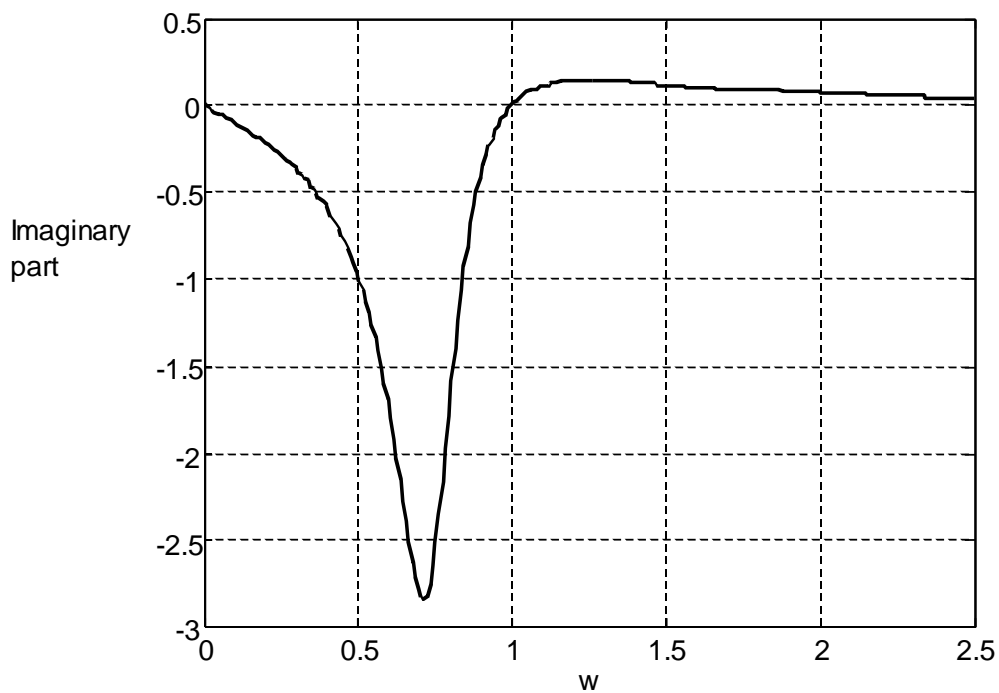


Рис. 6.15. МЧХ системы

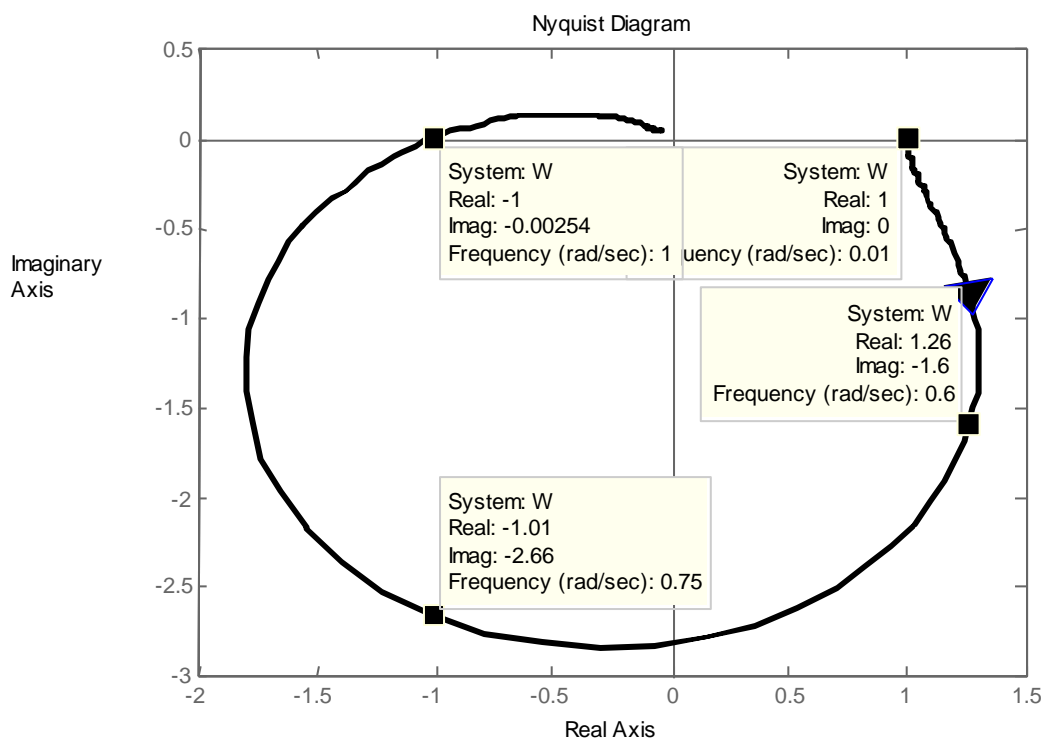


Рис.6.16. АФЧ системы

АФЧХ строится как для положительных, так и для отрицательных частот. Само понятие отрицательных частот является искусственным и используется в некоторых разделах теории автоматического управления, в частности при построении частотных характеристик импульсных систем. Для того чтобы получить годограф только для положительных частот, нужно с помощью правой кнопки мыши вызвать контекстное меню, вы-

брать команду **Show** и убрать галочку перед словами **Negative Frequencies**.

Функции `bodemag(sys)`, `bodemag(sys1, sys2, ..., sysN)` и `bodemag(sys1, 'PlotStyle1', ..., sysN, 'PlotStyleN')` строят ЛАЧХ без ЛФЧХ.

Нужно отметить, что к функции `bodemag(sys)` можно и не обращаться, т.к. с помощью правой кнопки на графике и ниспадающего меню **Show Magnitude Phase** можно оставить ту или иную логарифмическую характеристику.

Функции `bode(sys, w)` или `bode(sys1, sys2, ..., sysN, w)` явно определяют диапазон частот для построения графика. Для построения диаграмм на конкретном частотном интервале нужно ввести вектор желаемых частот в логарифмическом масштабе, для чего нужно использовать команду `logspace` (логарифмический масштаб).

Функция `y=logspace(a, b)` генерирует вектор-строку `y` из 50 точек между декадами  $10^a$  и  $10^b$ ; `y=logspace(a, b, n)` генерирует `n` точек между декадами  $10^a$  и  $10^b$ .

#### Домашнее задание.

1. Для апериодического звена с передаточной функцией

$$W_k(p) = \frac{1}{Tp + 1}$$

построить АЧХ и ФЧХ вручную. По этим характеристикам построить годограф КЧХ с нанесением 6-8 точек. Построить вручную ЛАЧХ и ЛФЧХ апериодического звена. Значение постоянной времени звена приведено в таблице 6.5.

1. Для колебательного звена с передаточной функцией

$$W_k(p) = \frac{1}{T^2 p^2 + 2\xi Tp + 1}$$

построить АЧХ, ФЧХ, ВЧХ и МЧХ – в MatLab. По ВЧХ и МЧХ построить вручную годограф КЧХ с нанесением 6-8 точек. Построить вручную ЛАЧХ и ЛФЧХ колебательного звена. Значения постоянной времени и коэффициента демпфирования звена приведены в таблице 6.5.

Таблица 6.5. Исходные данные для домашнего задания

№ Варианта	$T, c$	$\xi$
1	0,01	0,05
2	0,02	0,06
3	0,025	0,07
4	0,04	0,08

№ Варианта	$T, c$	$\xi$
5	0,05	0,09
6	0,08	0,10
7	0,1	0,11
8	0,125	0,12
9	0,2	0,13
10	0,25	0,14
11	0,4	0,15
12	0,8	0,16
13	0,01	0,17
14	0,02	0,18
15	0,025	0,19
16	0,04	0,20
17	0,05	0,05
18	0,08	0,06
19	0,1	0,07
20	0,125	0,08
21	0,2	0,09
22	0,25	0,10
23	0,4	0,11
24	0,8	0,12
25	0,01	0,13
26	0,02	0,14
27	0,025	0,15
28	0,04	0,16

## Практическое занятие 7 ПОСТРОЕНИЕ ЧАСТОТНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОГО СОЕДИНЕНИЯ ЗВЕНЬЕВ

Передаточная функция системы  $W(p)$  может быть представлена в виде произведения передаточных функций элементарных или типовых звеньев (см. Приложение)  $W_i(p)$ , например, так:

$$W(p) = K \frac{(\tau_2 p + 1)(\tau_4 p + 1)}{p(T_1 p + 1)(T_3 p + 1)(T_5 p + 1)}.$$

Желательно нумеровать постоянные времени сквозным образом по мере убывания их модулей, т.е.  $T_1 > \tau_2 > T_3 > \tau_4 > T_5$ .

Структурная схема такой системы представляет собой последовательное соединение звеньев.

Комплексная частотная характеристика  $W(j\omega)$  представляет собой произведение типовых комплексных характеристик  $W_i(j\omega)$ :

$$W(j\omega) = \prod_i W_i(j\omega) = \prod_i A_i(\omega) e^{j\varphi_i(\omega)} = \left\{ \prod_i A_i(\omega) \right\} e^{j \sum_i \varphi_i(\omega)} = A(\omega) e^{j\varphi(\omega)}.$$

Таким образом, АЧХ, ФЧХ и ЛАЧХ системы с последовательным соединением звеньев имеют вид:

$$A(\omega) = \prod_i A_i(\omega), \quad \varphi(\omega) = \sum_i \varphi_i(\omega),$$

$$L(\omega) = 20 \lg \prod_i A_i(\omega) = \sum_i 20 \lg A_i(\omega) = \sum_i L_i(\omega).$$

Записанные формулы указывают на возможность суммирования, в том числе и графического, логарифмических частотных характеристик звеньев при их последовательном соединении.

Особенно просто определяются частотные характеристики последовательного соединения звеньев через их ЛАЧХ, заданные в асимптотическом виде, и ФЧХ, построенные в полулогарифмическом масштабе.

Построение ЛАЧХ последовательного соединения звеньев проиллюстрируем на примере системы с ПФ:

$$W(p) = \frac{K(1 + T_2 p)}{p(1 + T_1 p)} = \frac{K(1 + p/\omega_2)}{p(1 + p/\omega_1)}.$$

ПФ имеет вещественный нуль  $z_2 = -\frac{1}{T_2} = -\omega_2$ , вещественный полюс  $p_1 = -\frac{1}{T_1} = -\omega_1$  и полюс в начале координат. Частоты  $\omega_i$ , обратные соответ-

ствующим постоянным времени  $T_i$ , называются *частотами сопряжения или излома* по причине, которая станет ясной позднее.

Запишем КЧХ и выделим модули сомножителей:

$$W(j\omega) = \frac{K \cdot (1 + j\omega/\omega_2)}{j\omega \cdot (1 + j\omega/\omega_1)} = \frac{K \cdot A_2(\omega) e^{j\varphi_2(\omega)}}{\omega e^{j90^\circ} \cdot A_1(\omega) e^{j\varphi_1(\omega)}} = A(\omega) e^{j\varphi(\omega)}, \quad (7.1)$$

где

$$A(\omega) = \frac{K \cdot A_2(\omega)}{\omega \cdot A_1(\omega)}, \quad \varphi_i(\omega) = \operatorname{arctg}\left(\frac{\omega}{\omega_i}\right) \quad \text{и} \quad \varphi(\omega) = \varphi_2(\omega) - \varphi_1(\omega) - 90^\circ.$$

С учетом свойств логарифма выражение для ЛАЧХ принимает вид:

$$L(\omega) = 20 \lg \left( \frac{K \cdot A_2(\omega)}{\omega \cdot A_1(\omega)} \right) = 20 \lg K + 20 \lg A_2(\omega) - 20 \lg \omega - 20 \lg A_1(\omega).$$

**Пример 7.1.** Система описывается передаточной функцией

$$W(p) = \frac{K}{p \left( \frac{p}{\omega_1} + 1 \right) \left( \frac{p}{\omega_2} + 1 \right)} = \frac{100}{p \left( \frac{p}{10} + 1 \right) \left( \frac{p}{100} + 1 \right)}.$$

Требуется построить асимптотические частотные характеристики и определить частоту, при которой  $L(\omega) = 0$ .

Построим амплитудную характеристику, выполняя следующие операции.

1. ЛАЧХ безынерционного звена с коэффициентом передачи  $K$  равна  $L(\omega) = 20 \lg K = 20 \lg 100 = 40$  дБ и представляет собой горизонтальную линию на уровне 40 дБ.

2. ЛАЧХ интегрирующего звена с передаточной функцией  $1/p$  имеет вид прямой линии с наклоном  $-20$  дБ/дек, пересекающей ось частот (уровень 0 дБ) в точке  $\omega = 1$ .

3. ЛАЧХ апериодического звена с передаточной функцией  $1/(0,1p+1)$  аппроксимируется двумя асимптотами, сопрягающимися на частоте  $\omega_1=10$  рад/с. Высокочастотная асимптота (справа от частоты сопряжения) имеет наклон  $-20$  дБ/дек, а низкочастотная асимптота (слева) проходит на уровне 0 дБ.

4. ЛАЧХ апериодического звена с передаточной функцией  $1/(0,01p+1)$  аппроксимируется также двумя асимптотами, сопрягающимися на частоте  $\omega_1=100$  рад/с. Высокочастотная асимптота (справа от частоты сопряжения) имеет наклон  $-20$  дБ/дек, а низкочастотная асимптота (слева) проходит на уровне 0 дБ.



5. Результирующая асимптотическая ЛАЧХ получаются путем суммирования ординат асимптот, соответствующих каждому сомножителю ПФ, как показано сплошной линией на рис. 7.1.

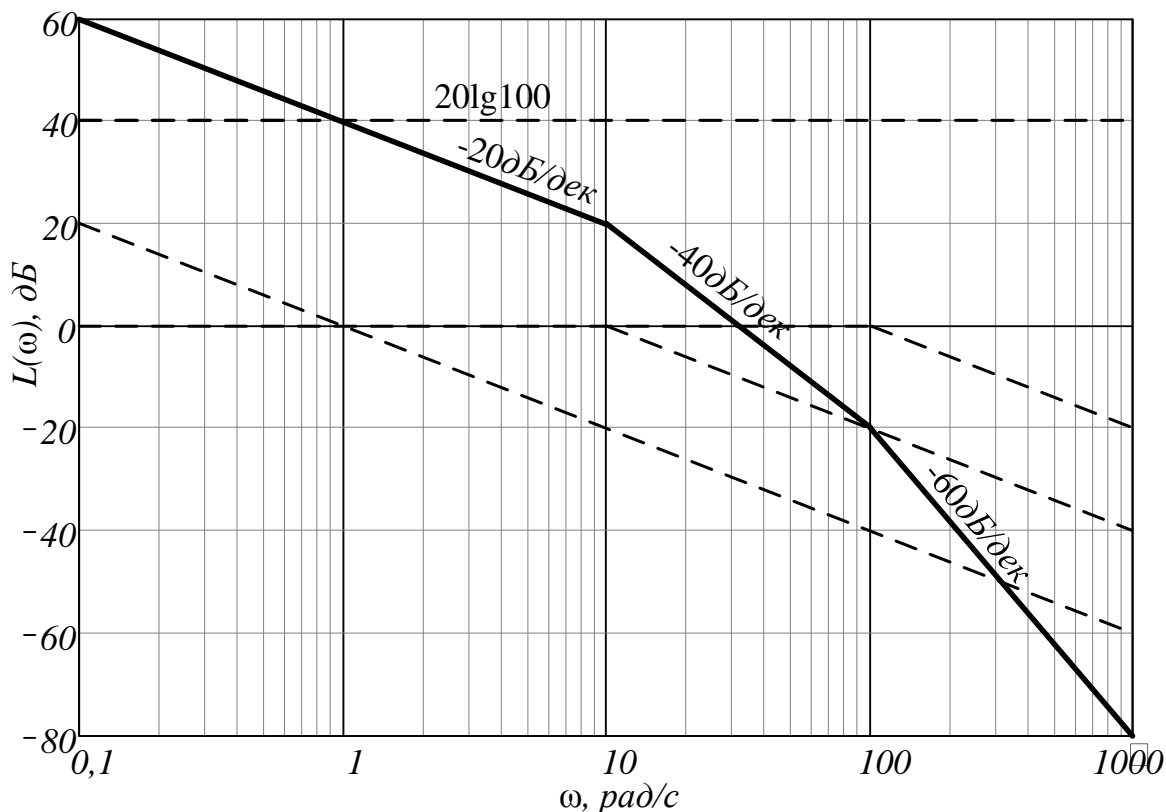


Рис. 7.1. Построение результирующей асимптотической ЛАЧХ

При построении ЛАЧХ системы с полюсом в начале координат и коэффициентом усиления  $K$  можно начать построения с интегрирующего звена, имеющего передаточную функцию  $K/p$ . Его ЛАЧХ  $L(\omega) = 20 \lg \left( \frac{K}{\omega} \right)$

представляет собой линию с наклоном  $-20$  дБ/дек, пересекающей ось частот (уровень  $0$  дБ) в точке  $\omega = K$ . Далее нужно определить и упорядочить частоты излома ЛАЧХ системы и достроить ее по следующему простому правилу: каждый нуль передаточной функции изменяет наклон ЛАЧХ на  $+20$  дБ/дек, а каждый полюс – на  $-20$  дБ/дек. В нашем случае на частоте  $\omega = 10$  рад/сек наклон ЛАЧХ изменится от  $-20$  дБ/дек до  $-40$  дБ/дек и, далее, на частоте  $\omega = 100$  рад/сек от  $-40$  дБ/дек до  $-60$  дБ/дек.

Построим фазовую характеристику, выполнив следующие операции.

1. ФЧХ звена с коэффициентом передачи  $K$  равна  $0^\circ$ .
2. ФЧХ интегрирующего звена с передаточной функцией  $1/p$  равна  $-90^\circ$  на всех частотах.
3. ФЧХ апериодического звена с передаточной функцией  $1/(0,1p+1)$  аппроксимируется кусочно-линейной функцией следующим образом.

На низких частотах, вплоть до частоты  $\omega_1 = 10$  рад/с минус одна дека, т.е. до частоты  $1$  рад/с, ФЧХ звена равна  $0^\circ$ .

Начиная с частоты 1 рад/с в течение двух декад ФЧХ линейно уменьшается и на частоте  $\omega_1$  плюс одна декада, т.е. на частоте 100 рад/с, становится равной  $-90^\circ$ .

На высоких частотах, начиная с частоты 100 рад/с, ФЧХ равна  $-90^\circ$ .

Нетрудно заметить, что на частоте  $\omega_1$  ФЧХ равна  $-45^\circ$ , что соответствует истинному значению ФЧХ. На других частотах имеет место ошибка аппроксимации.

4. ФЧХ апериодического звена с передаточной функцией  $1/(0,01p+1)$  аппроксимируется кусочно-линейной функцией аналогично предыдущему звену.

5. Результирующая асимптотическая ФЧХ получается простым сложением характеристик, соответствующих каждому сомножителю ПФ, как показано сплошной линией на рис. 7.2.

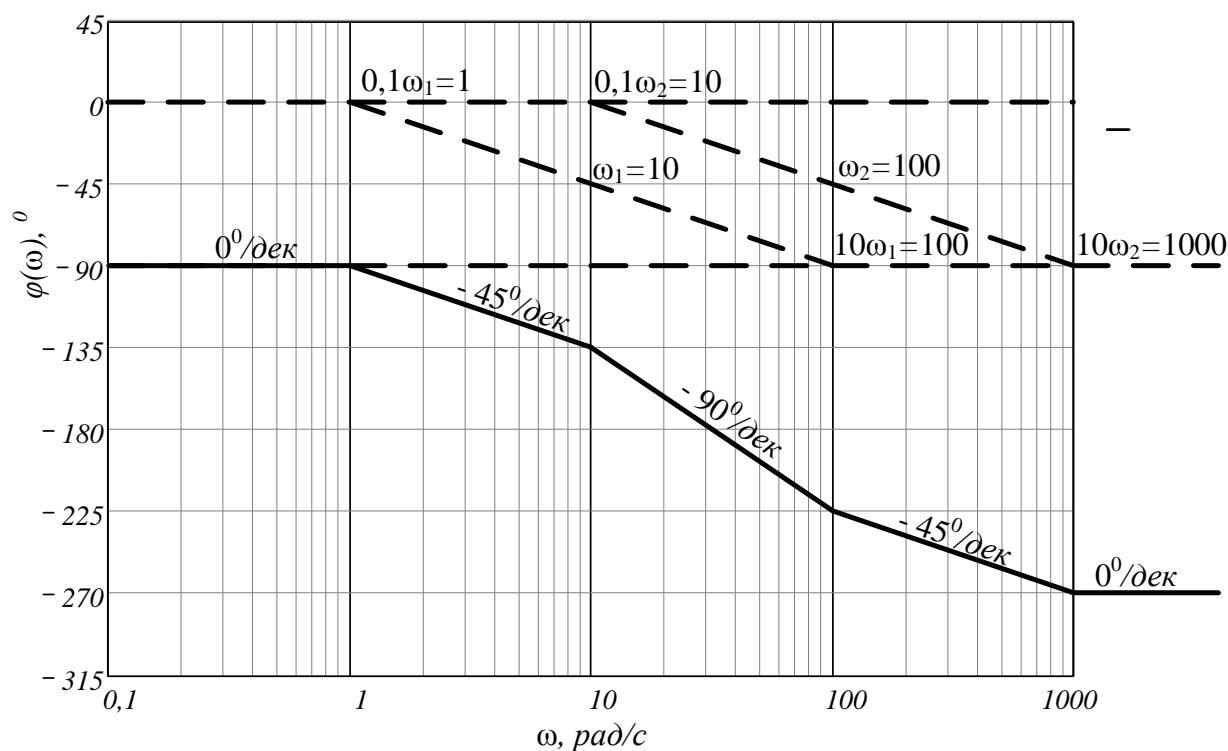


Рис. 7.2. Построение результирующей асимптотической ЛФЧХ

**Пример 7.2.** На рис. 7.3 изображена ЛАЧХ. Определить ПФ системы.

**Решение.**

Низкочастотная асимптота имеет наклон  $-20$  дБ/дека. Это говорит о том, что в структуре системы имеется интегрирующее звено. Запишем его передаточную функцию в виде  $K/p$ . Коэффициент  $K$  можно найти, зная значение ЛАЧХ звена на любой частоте, однако удобнее для этой цели использовать частоту, на которой ЛАЧХ принимает нулевое значение (пересекает ось частот).

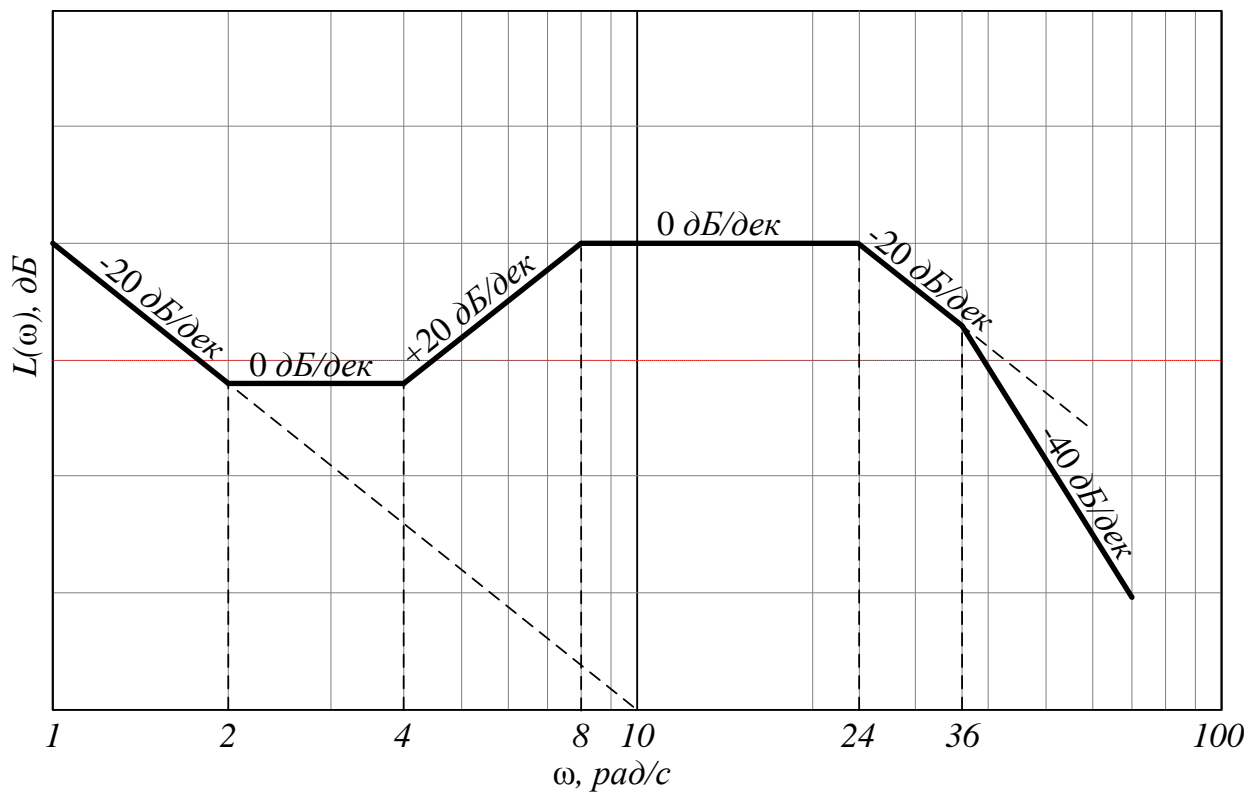


Рис. 7.3. ЛАЧХ к примеру 7.2.

В этом случае ЛАЧХ звена

$$L(\omega) = 20 \lg \left( \frac{K}{\omega} \right) = 0$$

и, следовательно,

$$\frac{K}{\omega} = 1,$$

откуда  $K = \omega$ .

Продолжая низкочастотную асимптоту до пересечения ее с осью частот, как показано на рис. 7.3, находим эту частоту и коэффициент:  $K = \omega = 10$ .

На частоте  $\omega_1 = 2$  рад/с наклон ЛАЧХ изменяется на +20 дБ/дек. Это означает, что в структуре системы имеется форсирующее звено первого порядка с передаточной функцией  $T_1 p + 1$ , где  $T_1 = 1/\omega_1 = 0,5$  с.

На частоте  $\omega_2 = 4$  рад/с наклон ЛАЧХ снова изменяется на +20 дБ/дек. В структуре системы имеется второе форсирующее звено первого порядка с передаточной функцией  $T_2 p + 1$ , где  $T_2 = 1/\omega_2 = 0,25$  с.

На частоте  $\omega_3 = 8$  рад/с наклон ЛАЧХ изменяется на -20 дБ/дек. Это означает, что в структуре системы имеется апериодическое звено первого порядка с передаточной функцией  $1/(T_3 p + 1)$ , где  $T_3 = 1/\omega_3 = 0,125$  с.

На частоте  $\omega_4 = 24$  рад/с наклон ЛАЧХ вновь изменяется на  $-20$  дБ/дек. В структуре системы имеется еще одно апериодическое звено первого порядка с передаточной функцией  $1/(T_4 p + 1)$ , где  $T_4 = 1/\omega_4 = 0,042$  с.

И, наконец, на частоте  $\omega_5 = 36$  рад/с наклон ЛАЧХ в последний раз изменяется и становится равным  $-40$  дБ/дек. Изменение наклона на  $-20$  дБ/дек свидетельствует о наличии третьего апериодического звена первого порядка с передаточной функцией  $1/(T_5 p + 1)$ , где  $T_5 = 1/\omega_5 = 0,028$  с.

Таким образом, передаточная функция системы примет вид:

$$W(p) = \frac{K}{p} \times (T_1 p + 1) \times (T_2 p + 1) \times \frac{1}{T_3 p + 1} \times \frac{1}{T_4 p + 1} \times \frac{1}{T_5 p + 1} =$$

$$= \frac{K(T_1 p + 1)(T_2 p + 1)}{p(T_3 p + 1)(T_4 p + 1)(T_5 p + 1)} = \frac{10(0,5 p + 1)(0,25 p + 1)}{p(0,125 p + 1)(0,042 p + 1)(0,028 p + 1)}.$$

**Домашнее задание.** Дана передаточная функция системы одного из трех видов

$$W_1(p) = \frac{K(\tau_2 p + 1)}{p(T_1 p + 1)(T_3 p + 1)}; \quad W_2(p) = \frac{K(\tau_2 p + 1)}{(T_1 p + 1)^2 (T_3 p + 1)};$$

$$W_3(p) = \frac{K(\tau_2 p + 1)}{(T_1 p + 1)(T_3 p + 1)^2}.$$

Значения постоянных времени и номер ПФ заданы в таблице 7.1.

Таблица 7.1. Данные для домашнего задания

№ Варианта	$T_1$ , с	$\tau_2$ , с	$T_3$ , с	ПФ
1	0,080	0,042	0,010	$W_1(p)$
2	0,084		0,012	
3	0,088		0,014	
4	0,092		0,016	
5	0,096		0,018	
6	0,100		0,020	
7	0,104		0,022	
8	0,108		0,024	
9	0,112		0,026	
10	0,116		0,028	
11	0,120	0,050	0,010	$W_2(p)$
12	0,124		0,012	
13	0,128		0,014	
14	0,132		0,016	

№ Варианта	$T_1, c$	$\tau_2, c$	$T_3, c$	ПФ
15	0,136		0,018	
16	0,140		0,020	
17	0,144		0,022	
18	0,148		0,024	
19	0,152		0,026	
20	0,156		0,028	
21	0,160	0,058	0,010	$W_3(p)$
22	0,164		0,012	
23	0,168		0,014	
24	0,172		0,016	
25	0,176		0,018	
26	0,180		0,020	
27	0,184		0,022	
28	0,188		0,024	
29	0,192		0,026	
30	0,196		0,028	

Требуется построить вручную асимптотические логарифмические характеристики и проверить правильность их построения в MatLab.

## Практическое занятие 8 РАСЧЕТ ПЕРЕХОДНЫХ И ЧАСТОТНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК ПРОСТЕЙШЕЙ ЗАМКНУТОЙ СИСТЕМЫ РЕГУЛИРОВАНИЯ

Как указывалось ранее, большинство систем автоматического регулирования являются замкнутыми системами, т.е. системами, использующими принцип управления с обратной связью (ОС).

*В системе с ОС производится непрерывное измерение выходной (регулируемой) величины. Управляющее воздействие на объект регулирования формируется путем вычисления и математической обработки разности между заданным и фактическим (измеренным) значениями регулируемой величины.*

Устройство для измерения физической величины называется *измерительным преобразователем (ИП)*. Например, в робототехнических системах применяются ИП положения (потенциометры, поворотные шифраторы), на тепловых станциях и в промышленности – ИП давления, уровня, температуры и т.д.

Устройство, непосредственно оказывающее воздействие на объект, называется *исполнительным механизмом (ИМ)*. В робототехнических системах это электро-, пневмо- и гидроприводы кинематических пар, на тепловых станциях и в промышленности – нагревательные элементы, регулирующие клапаны, заслонки и задвижки с их приводами, другие механизмы.

И, наконец, устройства, производящие математическую обработку входных сигналов (в том числе сигнала ОС) и формирующие выходные сигналы (в том числе сигналы управления ИМ) называются *управляющими устройствами (УУ)*. В частном случае, когда УУ выполняет исключительно функции регулирования, их называют *регуляторами*. В настоящее время большинство УУ строится на базе микропроцессорной техники, и они обрабатывают сигналы в цифровом виде.

Для анализа систем управления используются их временные и частотные характеристики. Эти характеристики получают непосредственно по передаточной функции замкнутой системы:

$$W_{зам}(p) = \frac{W_{пр}(p)}{1 + W_{раз}(p)}.$$

где  $W_{пр}(p)$  – передаточная функция прямого канала,  $W_{раз}(p)$  - передаточная функция разомкнутой системы (под разомкнутой системой понимается последовательное соединение элементов прямого канала и элементов ОС).

В большинстве случаев при анализе и синтезе систем их описание приводится к структуре с единичной ОС, тогда

$$W_{зам}(p) = \frac{W_{раз}(p)}{1 + W_{раз}(p)}.$$

Передаточная функция участка с ООС представляет собой дробь, в числителе которой находится ПФ разомкнутой системы, а в знаменателе – увеличенная на единицу ПФ разомкнутой системы.

### 8.1. Временные характеристики систем

Рассмотрим ряд примеров, в которых определяются переходная или импульсная характеристики замкнутой системы.

**Пример 8.1.** Определить *переходную* характеристику системы, структурная схема которой представлена на рис. 8.1:

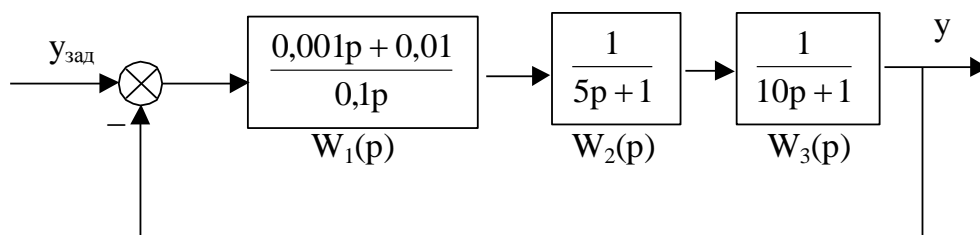


Рис. 8.1. Структурная схема системы

Передаточная функция разомкнутой системы:

$$W(p) = W_1(p)W_2(p)W_3(p) = \frac{0,001p + 0,01}{0,1p(5p + 1)(10p + 1)} = \frac{0,001p + 0,01}{5p^3 + 1,5p^2 + 0,1p}.$$

Передаточная функция замкнутой системы:

$$T(p) = \frac{W(p)}{1 + W(p)} = \frac{\frac{0,001p + 0,01}{5p^3 + 1,5p^2 + 0,1p}}{1 + \frac{0,001p + 0,01}{5p^3 + 1,5p^2 + 0,1p}} = \frac{0,001p + 0,01}{5p^3 + 1,5p^2 + 0,101p + 0,01}. \quad (8.1)$$

Изображение переходной характеристики

$$h(p) = \frac{T(p)}{p} = \frac{1}{p} \cdot \frac{0,001p + 0,01}{5p^3 + 1,5p^2 + 0,101p + 0,01} = \frac{1}{p} \cdot \frac{B(p)}{D(p)}.$$

Найдем корни полинома в знаменателе:

$$D = [5 \ 1.5 \ 0.101 \ 0.01];$$

$$R = \text{roots}(D)$$

$$p1 = R(1); p2 = R(2); p3 = R(3);$$

$$p1 = -0.2513$$

$$p2 = -0.0244 + 0.0858i$$

$$p3 = -0.0244 - 0.0858i$$

Итак, полином  $D(p)$  имеет один действительный и два комплексно-сопряженных корня:

$$p_1 = -0,2513 ; p_2 = -0,0244 + j0,0858 = 0,0892 e^{j105,84^\circ} ;$$

$$p_3 = -0,0244 - j0,0858 = 0,0892 e^{-j105,84^\circ} .$$

Преобразуем полином общего вида в знаменателе в приведенный полином, а бином в числителе – в нормированный:

$$\begin{aligned} h(p) &= \frac{1}{p} \cdot \frac{0,001p + 0,01}{5p^3 + 1,5p^2 + 0,101p + 0,01} = \frac{0,01}{5p} \cdot \frac{\frac{0,001}{0,01}p + \frac{0,01}{0,01}}{\frac{5}{5}p^3 + \frac{1,5}{5}p^2 + \frac{0,101}{5}p + \frac{0,01}{5}} = \\ &= \frac{2 \cdot 10^{-3}}{p} \cdot \frac{0,1p + 1}{p^3 + 0,3p^2 + 2,02 \cdot 10^{-2}p + 2 \cdot 10^{-3}} = \frac{2 \cdot 10^{-3}}{p} \cdot \frac{0,1p + 1}{(p - p_1)(p - p_2)(p - p_3)} . \end{aligned}$$

Если имеется пара комплексно-сопряженных корней, то произведение двух биномов, соответствующих этой паре, нужно представить полиномом колебательного звена с постоянной времени и коэффициентом демпфирования  $\xi$ .

Подставим значения корней и сделаем необходимые преобразования:

$$\begin{aligned} h(p) &= \frac{2 \cdot 10^{-3}}{p} \cdot \frac{0,1p + 1}{(p + 0,2513)(p + 0,0244 - j0,0858)(p + 0,0244 + j0,0858)} = \\ &= \frac{2 \cdot 10^{-3}}{p} \cdot \frac{0,1p + 1}{(p + 0,2513)(p^2 + 4,88 \cdot 10^{-2}p + 7,96 \cdot 10^{-3})} = \\ &= \frac{2 \cdot 10^{-3}}{p} \cdot \frac{1}{0,2513 \cdot 7,96 \cdot 10^{-3}} \cdot \frac{0,1p + 1}{\left(\frac{1}{0,2513}p + 1\right)\left(\frac{1}{7,96 \cdot 10^{-3}}p^2 + \frac{4,88 \cdot 10^{-2}}{7,96 \cdot 10^{-3}}p + 1\right)} = \\ &= \frac{0,1p + 1}{p(3,98p + 1)(126p^2 + 6p + 1)} = \frac{\tau p + 1}{p(T_1 p + 1)(T^2 p^2 + 2\xi T p + 1)} . \end{aligned}$$

В этих выражениях:

$$\tau = 0,1; \quad T_1 = 3,98 \text{ c}^{-1}; \quad T = \sqrt{126} = 11,22; \quad \xi = \frac{6}{2T} = \frac{6}{2 \cdot 11,22} = 0,273.$$

Воспользуемся табличной формулой:



$$\frac{\tau p + 1}{p(T_1 p + 1)(T^2 p^2 + 2\xi T p + 1)} \Leftrightarrow 1 - C e^{-\gamma t} \sin(\lambda t - \Theta) + C_1 e^{-\alpha t},$$

где

$$\gamma = \frac{\xi}{T} = \frac{0,273}{11,22} = 2,44 \cdot 10^{-2}; \quad \lambda = \frac{\sqrt{1 - \xi^2}}{T} = \frac{\sqrt{1 - 0,276^2}}{11,22} = 8,58 \cdot 10^{-2};$$

$$\alpha = \frac{13}{T_1} = \frac{1}{3,98} = 25,13 \cdot 10^{-2}; \quad C = \frac{1}{\lambda T} \sqrt{\frac{T^2(1 - 2\gamma\tau) + \tau^2}{T^2(1 - 2\gamma T_1) + T_1^2}}$$

$$= -\frac{1}{8,58 \cdot 10^{-2} \cdot 11,22} \sqrt{\frac{11,22^2(1 - 2 \cdot 2,44 \cdot 10^{-2} \cdot 0,1) + 0,1^2}{11,22^2(1 - 2 \cdot 2,44 \cdot 10^{-2} \cdot 3,98) + 3,98^2}} = 1,074;$$

$$C_1 = \frac{(\tau - T_1)T_1}{T^2(1 - 2\gamma T_1) + T_1^2} = \frac{(0,1 - 3,98) \cdot 3,98}{11,22^2(1 - 2 \cdot 2,44 \cdot 10^{-2} \cdot 3,98) + 3,98^2} = -13,16 \cdot 10^{-2};$$

$$\Theta = \arctg \frac{\lambda T_1}{1 - \gamma T_1} - \arctg \frac{\lambda T^2}{\gamma T^2 - \tau} = \arctg \frac{8,58 \cdot 10^{-2} \cdot 3,98}{1 - 2,44 \cdot 10^{-2} \cdot 3,98} -$$

$$- \arctg \frac{8,58 \cdot 10^{-2} \cdot 11,22^2}{2,44 \cdot 10^{-2} \cdot 11,22^2 - 0,1} = -53,95^\circ.$$

Запишем оригинал, т.е. переходную характеристику:

$$h(t) = 1 - C e^{-\gamma t} \sin(\lambda t - \Theta) + C_1 e^{-\alpha t} =$$

$$= 1 - 1,074 e^{-2,44 \cdot 10^{-2} t} \sin(8,58 \cdot 10^{-2} t + 53,95^\circ) - 13,16 \cdot 10^{-2} e^{-25,13 \cdot 10^{-2} t}.$$

Найдем ПХ с помощью Matlab:

```
syms p t
h=(0.001*p+0.01)/(5*p^4+1.5*p^3+0.101*p^2+0.01*p);
h=ilaplace(h);
h=vpa(h,3)
h=exp(t*(-0.0244+0.0858i))*(-0.434+0.316i)+
exp(t*(-0.0244-0.0858i))*(-0.434-0.316i)-
exp(-0.251*t)*0.132+1.0
```

Для лучшего восприятия результата запишем его в привычном виде:

$$h(t) = e^{-0,0244t + j0,0858t} \cdot (-0,434 + j0,316) + e^{-0,0244t - j0,0858t} \cdot (-0,434 - j0,316) -$$

$$-0,132e^{-0,251t} + 1.$$

Показатели степени двух экспонент и постоянные интегрирования – комплексно сопряженные функции и числа соответственно. Запишем постоянные интегрирования в показательной форме и проведем следующие преобразования:

$$\begin{aligned}
 h(t) &= e^{-0,0244t + j0,0858t} \cdot 0,537e^{j143,94^\circ} + e^{-0,0244t - j0,0858t} \cdot 0,537e^{-j143,94^\circ} - \\
 &- 0,132e^{-0,251t} + 1 = e^{-0,0244t} \left( e^{j0,0858t} \cdot 0,537e^{j143,94^\circ} + e^{-j0,0858t} \cdot 0,537e^{-j143,94^\circ} \right) - \\
 &- 0,132e^{-0,251t} + 1 = e^{-0,0244t} \cdot 0,537 \left[ e^{j(0,0858t + 143,94^\circ)} + e^{-j(0,0858t + 143,94^\circ)} \right] - \\
 &- 0,132e^{-0,251t} + 1 .
 \end{aligned}$$

Формула Эйлера  $e^{\pm j\alpha} = \cos \alpha \pm j \sin \alpha$  позволяет избавиться от мнимой составляющей в квадратных скобках и привести решение к следующему виду:

$$\begin{aligned}
 h(t) &= e^{-0,0244t} \cdot 0,537 \cdot 2\cos(0,0858t + 143,94^\circ) - 0,132e^{-0,251t} + 1 = \\
 &= e^{-0,0244t} \cdot 1,074\cos(0,0858t + 143,94^\circ) - 0,132e^{-0,251t} + 1 .
 \end{aligned}$$

Применяя тригонометрическую формулу  $\cos \alpha = -\sin(\alpha - 90^\circ)$ , окончательно получим:

$$h(t) = 1 - 1,074e^{-0,0244t} \sin(0,0858t + 53,94^\circ) - 0,132e^{-0,251t} .$$

Результаты расчета вручную и в Matlab практически совпадают.

С помощью MatLab построим переходную характеристику и определим перерегулирование (overshoot) и время установления колебаний (Settling Time), рис. 8.2:

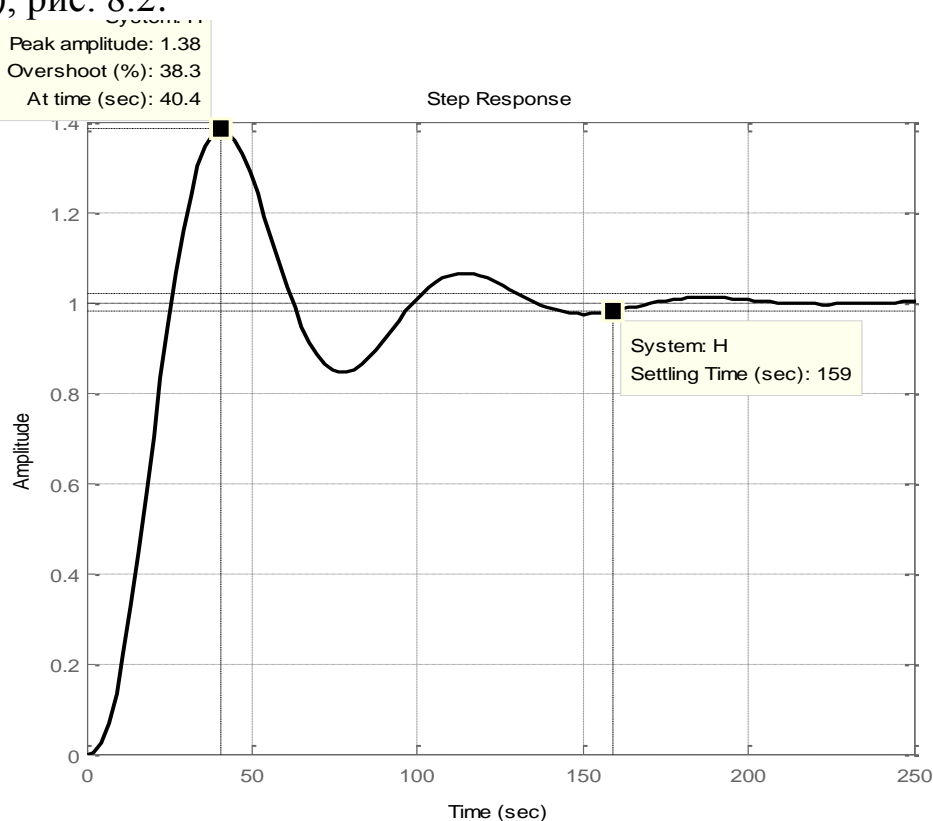


Рис. 8.2. Переходная характеристика системы

```

s=tf('s')
H=(0.001*s+0.01)/(5*s^3+1.5*s^2+0.101*s+0.01)
step(H)

```

Первый максимум  $h_m = 1.38$  наступает при  $t = 40,4$  с, перерегулирование составляет  $\sigma = 38,3\%$ , время установления колебаний  $t_y = 159$  с.

**Пример 8.2.** Определить импульсную и переходную характеристики СУ с ООС (рис. 8.3).

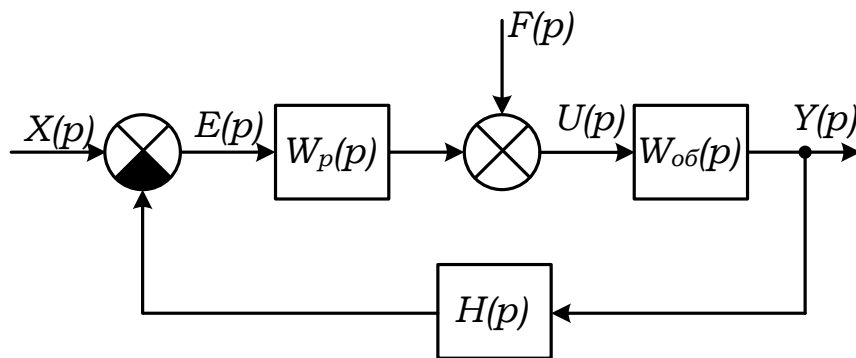


Рис. 8.3. Структурная схема замкнутой САУ

Передаточные функции блоков структурной схемы:

$$W_p(p) = \frac{5 \cdot 10^4}{p + 1000}; \quad W_{об}(p) = \frac{1}{p(p + 20)}; \quad H(p) = 1.$$

ПФ разомкнутой системы:

$$W(p) = W_p(p)W_{об}(p) = \frac{5 \cdot 10^4}{p + 1000} \cdot \frac{1}{p(p + 20)} = \frac{5 \cdot 10^4}{p^3 + 1020p^2 + 20 \cdot 10^3 p}.$$

ПФ по заданию замкнутой системы:

$$T(p) = \frac{W(p)}{1 + W(p)} = \frac{\frac{5 \cdot 10^4}{p^3 + 1020p^2 + 20 \cdot 10^3 p}}{1 + \frac{5 \cdot 10^4}{p^3 + 1020p^2 + 20 \cdot 10^3 p}} = \frac{5 \cdot 10^4}{p^3 + 1020p^2 + 20 \cdot 10^3 p + 5 \cdot 10^4}.$$

Для получения ИХ нужно найти оригинал ПХ. Найдем корни знаменателя:

```

P=[1 1020 20000 50000];
R=roots(P);
p1=R(1), p2=R(2), p3=R(3)

p1 = -1.0001e+003
p2 = -17.0096
p3 = -2.9394

```

ПФ замкнутой системы запишем в виде

$$T(p) = \frac{5 \cdot 10^4}{(p-p_1)(p-p_2)(p-p_3)} = \frac{5 \cdot 10^4}{(p+1000)(p+17)(p+2,94)} =$$

$$= \frac{A_1}{p+1000} + \frac{A_2}{p+17} + \frac{A_3}{p+2,94}.$$

Для получения первого коэффициента умножим обе части выражения на полином  $(p+1000)$  и подставим в полученное выражение значение первого корня. Тогда в правой части останется только  $A_1$ , а в левой – этот полином сократится. В результате получим:

$$A_1 = \frac{5 \cdot 10^4}{(p_1-p_2)(p_1-p_3)} = \frac{5 \cdot 10^4}{(-1000+17)(-1000+2,94)} = 0,051.$$

Аналогично найдем остальные коэффициенты:

$$A_2 = \frac{5 \cdot 10^4}{(p_2-p_1)(p_2-p_3)} = \frac{5 \cdot 10^4}{(-17+1000)(-17+2,94)} = -3,615.$$

$$A_3 = \frac{5 \cdot 10^4}{(p_3-p_1)(p_3-p_2)} = \frac{5 \cdot 10^4}{(-2,94+1000)(-2,94+17)} = 3,564.$$

Следовательно:

$$T(p) = \frac{0,051}{p+1000} + \frac{-3,615}{p+17} + \frac{3,564}{p+2,94}.$$

Проверка правильности разложения:

```
P=[1 1020 20000 50000];
N=50000;
[r,p,k]=residue(N,P)
```

```
a = 0.0510
    -3.6149
     3.5639
p = 1.0e+003 *
    -1.0001
    -0.0170
    -0.0029
k = []
```

Запишем оригинал, т.е. импульсную характеристику:

$$w(t) = 0,051e^{-1000t} - 3,615e^{-17t} + 3,564e^{-2,94t}.$$

Построим график ИХ в Matlab, рис. 8.4:

```
N=50000; P=[1 1020 20000 50000];
T=tf(N,P)
```

impulse (T, 1.2) grid

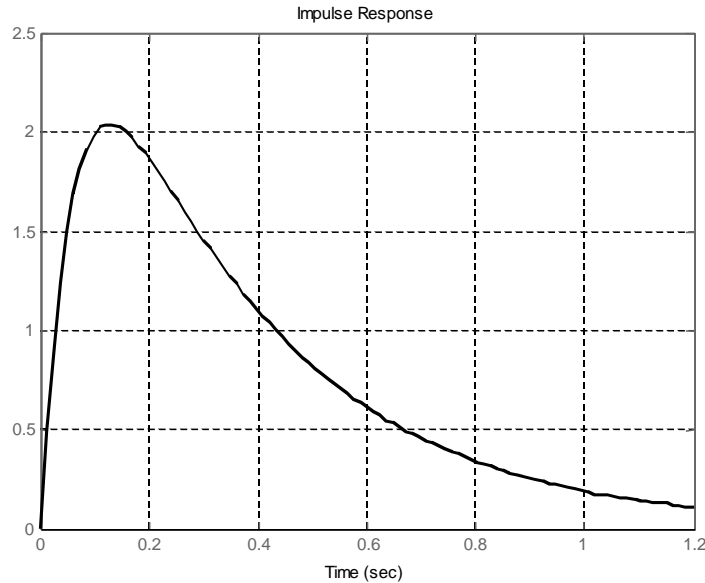


Рис. 8.4. Импульсная характеристика замкнутой САУ

Запишем изображение переходной характеристики:

$$h(p) = \frac{1}{p} \cdot T(p) = \frac{5 \cdot 10^4}{p(p^3 + 1020 p^2 + 20 \cdot 10^3 p + 5 \cdot 10^4)}$$

Воспользуемся данными предыдущего расчета:

$$h(p) = \frac{5 \cdot 10^4}{p(p^3 + 1020 p^2 + 20 \cdot 10^3 p + 5 \cdot 10^4)} = \frac{5 \cdot 10^4}{p(p + 1000)(p + 17)(p + 2,94)}$$

Запишем биномы в знаменателе с постоянными времени:

$$\begin{aligned} h(p) &= \frac{5 \cdot 10^4}{p(p + 10^3)(p + 17)(p + 2,94)} = \frac{5 \cdot 10^4}{10^3 \cdot 17 \cdot 2,94} \cdot \frac{1}{p \left( \frac{p}{10^3} + 1 \right) \left( \frac{p}{17} + 1 \right) \left( \frac{p}{2,94} + 1 \right)} = \\ &= \frac{1}{p(10^{-3} p + 1)(0,0558 p + 1)(0,34 p + 1)} = \frac{1}{p(T_1 p + 1)(T_2 p + 1)(T_3 p + 1)}. \end{aligned}$$

Постоянные времени имеют значения:

$$T_1 = 10^{-3} \text{ с}; \quad T_2 = 0,058 \text{ с}; \quad T_3 = 0,34 \text{ с}.$$

Для нахождения оригинала воспользуемся табличной формулой:

$$\frac{1}{p(T_1 p + 1)(T_2 p + 1)(T_3 p + 1)} \Leftrightarrow 1 - C_1 e^{-\alpha_1 t} - C_2 e^{-\alpha_2 t} - C_3 e^{-\alpha_3 t},$$

где

$$C_1 = \frac{T_1^2}{(T_1 - T_2)(T_1 - T_3)}; C_2 = \frac{T_2^2}{(T_2 - T_1)(T_2 - T_3)}; C_3 = \frac{T_3^2}{(T_3 - T_1)(T_3 - T_2)}; \alpha_i = \frac{1}{T_i}$$

Найдем постоянные, учитывая, что коэффициенты затухания  $\alpha$  являются модулями корней полинома знаменателя:

$$C_1 = \frac{T_1^2}{(T_1 - T_2)(T_1 - T_3)} = \frac{(10^{-3})^2}{(10^{-3} - 0,058)(10^{-3} - 0,34)} = 5,17 \cdot 10^{-5};$$

$$C_2 = \frac{T_2^2}{(T_2 - T_1)(T_2 - T_3)} = \frac{(0,058)^2}{(0,058 - 10^{-3})(0,058 - 0,34)} = -0,209;$$

$$C_3 = \frac{T_3^2}{(T_3 - T_1)(T_3 - T_2)} = \frac{(0,34)^2}{(0,34 - 10^{-3})(0,34 - 0,058)} = 1,21;$$

$$\alpha_1 = |p_1| = |-1000| = 100 \text{ c}^{-1}; \quad \alpha_2 = |p_2| = 17 \text{ c}^{-1}; \quad \alpha_3 = |p_3| = 2,94 \text{ c}^{-1}.$$

Следовательно:

$$h(t) = 1 - C_1 e^{-\alpha_1 t} - C_2 e^{-\alpha_2 t} - C_3 e^{-\alpha_3 t} = \\ = 1 - 5,17 \cdot 10^{-5} e^{-1000t} + 0,209 e^{-17t} - 1,21 e^{-2,94t}.$$

Найдем ПХ с помощью Matlab:

```
syms p t
h=5*10^4/(p^4+1020*p^3+20*10^3*p^2+5*10^4*p)
h=ilaplace(h);
h=vpa(h,3)
h=exp(t*(-17.0+2.24e-8*i))*(0.213+2.26e-9*i)+
exp(t*(-2.94-2.24e-8*i))*(-1.21-2.29e-9*i)-
-5.1e-5*exp(-1000.0*t)+1.0
```

Так как мнимые части очень малы, то ими можно пренебречь. В результате получим:

$$h(t) = 0,213 e^{-17t} - 1,21 e^{-2,94t} - 5,1 \cdot 10^{-5} e^{-1000t} + 1.$$

Результаты расчета вручную и в Matlab практически совпадают.

## 8.2. Частотные характеристики

Рассмотрим пример построения частотных характеристик замкнутой системы.

**Пример 8.3.** Построить ВЧХ, МЧХ, АЧХ, ФЧХ и годограф КЧХ системы из примера 8.1.

ПФ замкнутой системы имеет вид:

$$T(p) = \frac{0,001p + 0,01}{5p^3 + 1,5p^2 + 0,101p + 0,01}.$$

Подстановка в ПФ произведения  $j\omega$  вместо оператора  $p$  позволяет получить КЧХ (АФЧХ) системы:

$$\begin{aligned} T(j\omega) &= \frac{0,001j\omega + 0,01}{5(j\omega)^3 + 1,5(j\omega)^2 + 0,101j\omega + 0,01} = \\ &= \frac{0,001j\omega + 0,01}{-5j\omega^3 - 1,5\omega^2 + 0,101j\omega + 0,01} = \frac{0,001j\omega + 0,01}{(0,01 - 1,5\omega^2) + j(0,101\omega - 5\omega^3)} = \\ &= \frac{(0,001j\omega + 0,01)((0,01 - 1,5\omega^2) - j(0,101\omega - 5\omega^3))}{(0,01 - 1,5\omega^2)^2 + (0,101\omega - 5\omega^3)^2} = \\ &= \frac{(-0,005\omega^4 - 0,014899\omega^2 + 0,0001) + j(0,0485\omega^3 - 0,001\omega)}{(0,01 - 1,5\omega^2)^2 + (0,101\omega - 5\omega^3)^2}. \end{aligned}$$

Вещественная и мнимая частотные характеристики:

$$P(\omega) = \frac{-0,005\omega^4 - 0,014899\omega^2 + 0,0001}{(0,01 - 1,5\omega^2)^2 + (0,101\omega - 5\omega^3)^2};$$

$$Q(\omega) = \frac{0,0485\omega^3 - 0,001\omega}{(0,01 - 1,5\omega^2)^2 + (0,101\omega - 5\omega^3)^2}.$$

Задавая частотами в диапазоне от 0 до 0,5 рад/сек, рассчитаем  $P(\omega)$  и  $Q(\omega)$  и построим АФЧХ как зависимость  $Q(\omega)$  от  $P(\omega)$ , рис. 8.5.

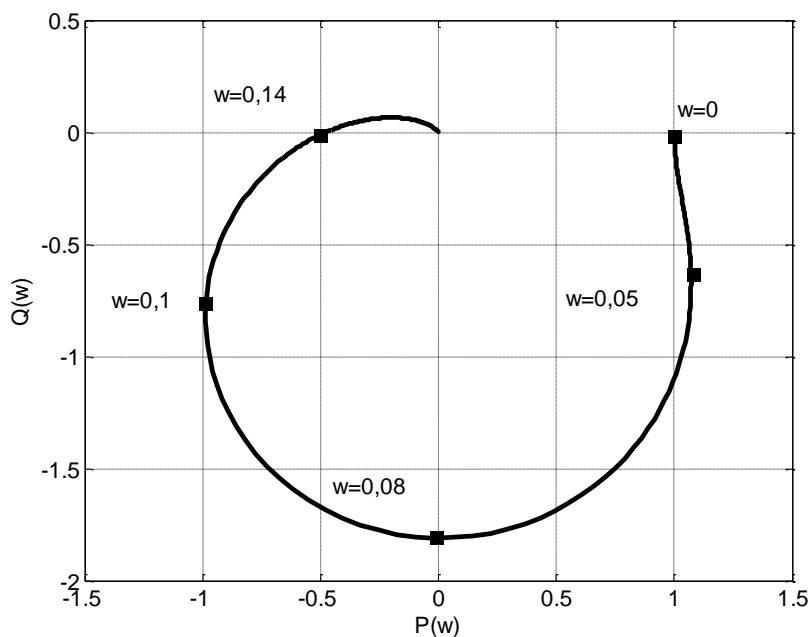


Рис. 8.5. АФЧХ системы

АЧХ и ФЧХ системы рассчитаем и построим по известным уравнениям

$$A(\omega) = \sqrt{P^2(\omega) + Q^2(\omega)}, \quad (8.2)$$

$$\varphi(\omega) = \arctg \frac{Q(\omega)}{P(\omega)}, \quad (8.3)$$

используя ранее полученные значения  $P(\omega)$  и  $Q(\omega)$ , рис. 8.6, 8.7.

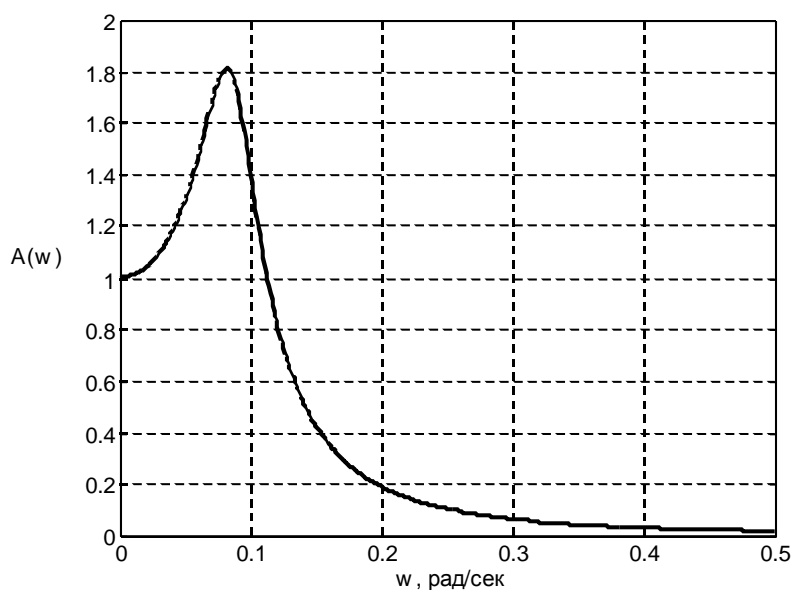


Рис. 8.6. АЧХ системы

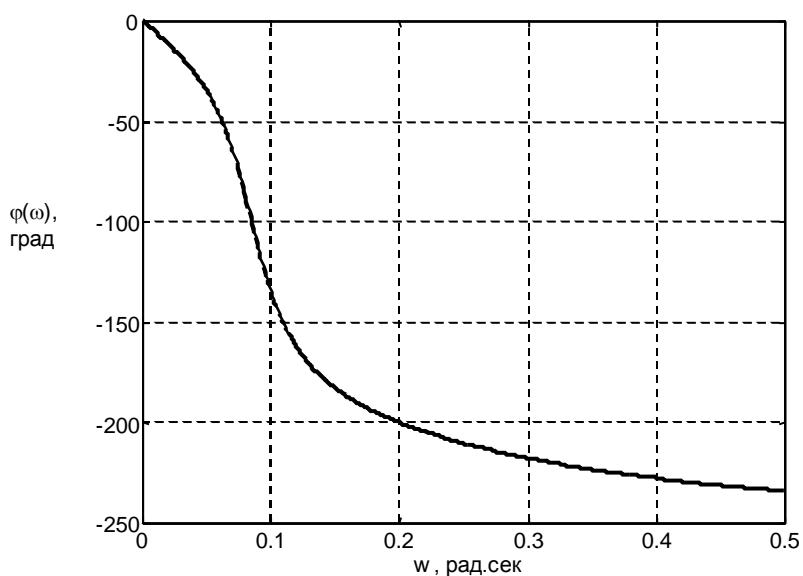


Рис. 8.7. ФЧХ системы

При расчете ФЧХ формулу (8.3) следует применять с учетом периодичности функции  $\arctg$ . Так, например, в нашем случае при  $P(\omega) < 0$  и



$Q(\omega) < 0$  АФЧХ лежит в третьем квадранте и  $-90^\circ > \varphi(\omega) > -180^\circ$ . Однако расчет по формуле (13) дает положительное значение  $\varphi(\omega)$ .

Для того чтобы не ошибиться в определении ФЧХ, следует ориентироваться на график АФЧХ, корректируя полученные по (8.3) значения  $\varphi(\omega)$  на величину, кратную  $-180^\circ$ .

Следующий код Matlab рассчитывает и строит АФЧХ, ВЧХ, МЧХ, АЧХ и ФЧХ системы:

```
j = sqrt(-1);
w = 0:.001:.5;
W = (.001*j*w + .01) ./ (5*(j*w).^3 + 1.5*(j*w).^2 +
    .101*j*w + .01);
figure(1)
l = plot(W),
set(l, 'Color', [0 0 0], 'LineWidth', 2), grid
figure(2)
l = plot(w, real(W)),
set(l, 'Color', [0 0 0], 'LineWidth', 2), grid
figure(3)
l = plot(w, imag(W)),
set(l, 'Color', [0 0 0], 'LineWidth', 2), grid
figure(4)
l = plot(w, abs(W)),
set(l, 'Color', [0 0 0], 'LineWidth', 2), grid
figure(5)
l = plot(w, unwrap(angle(W))*180/pi),
set(l, 'Color', [0 0 0], 'LineWidth', 2), grid
```

Результаты выполнения показаны на рис. 8.8 – 8.10.

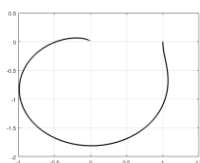
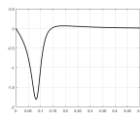
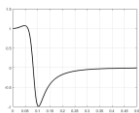
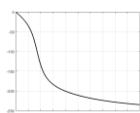
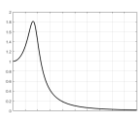


Рис. 8.8. АФЧХ системы (figure 1)

Программа не использует функции пакета Control, решая задачу «прямым способом», с помощью базовых функций Matlab по работе с комплексными числами и матрицами: `real` (вычисление вещественной части), `imag` (вычисление мнимой части), `abs` (нахождение модуля), `angle` (нахождение аргумента). «Проблему арктангенса», описанную выше решает функция `unwrap`.



*Рис. 8.9.* ВЧХ и МЧХ системы (figure 2, 3)



*Рис. 8.10.* АЧХ и ФЧХ системы (figure 4, 5)

### **Домашнее задание.**

Передаточная функция разомкнутой системы приведена в домашнем задании к работе 7. Получить ПФ замкнутой системы с единичной ООС и построить для нее временные и частотные характеристики: ВЧХ и МЧХ – в Matlab, а остальные (АЧХ, ФЧХ и годограф КЧХ) – вручную. Переходную характеристику найти операторным методом и в Matlab, а импульсную – путем дифференцирования переходной характеристики.

## ПРИЛОЖЕНИЕ А

### КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА И ОСНОВНЫЕ ОПЕРАЦИИ НАД НИМИ

*Действительные числа (real numbers).*

Действительные числа состоят из рациональных и иррациональных чисел. Множество действительных чисел может быть представлено с помощью точек на прямой линии, называемой *осью действительных чисел (действительная ось)* так, что каждая точка представляет собой единственное действительное число и каждое действительное число представляется единственной точкой на этой оси, как показано на рис. А.1.

Операции сложения, вычитания, умножения и деления могут быть проделаны с любыми числами в этой системе. Квадратный корень из положительного действительного числа может быть представлен на действительной оси, но квадратный корень из отрицательного числа не существует в системе действительных чисел.

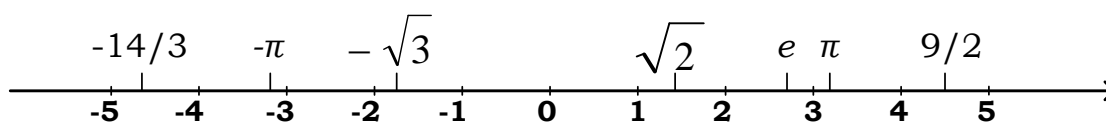


Рис. А.1. Ось действительных чисел

*Мнимые числа (imaginary numbers).*

Квадратный корень из отрицательного числа называется чисто мнимым или *мнимым числом*, например  $\sqrt{-1}$ ,  $\sqrt{-2}$ ,  $\sqrt{-3}$ ,  $\sqrt{-25}$ . Если обозначить  $j = \sqrt{-1}$ , то  $\sqrt{-2} = \sqrt{-1 \cdot 2} = \sqrt{-1} \cdot \sqrt{2} = j\sqrt{2}$ ,  $\sqrt{-7} = j\sqrt{7}$ ,  $\sqrt{-25} = j5$ . Из этого следует, что

$$j^2 = -1, j^3 = j^2 j = (-1)j = -j, j^4 = (j^2)^2 = 1, j^5 = j.$$

Мнимое число  $j = \sqrt{-1}$  называется *мнимой единицей*.

Все мнимые числа могут быть представлены с помощью точек на прямой линии, называемой *осью мнимых чисел (мнимая ось)*, как показано на рис. А.2.

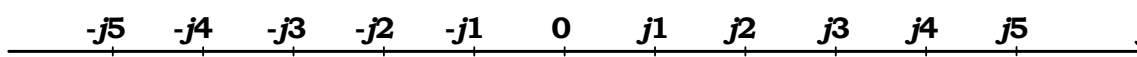


Рис. А.2. Ось мнимых чисел

Выбор слова «мнимый» можно считать не совсем удачным, так как мнимые числа существуют так же, как и действительные числа. Этот термин просто означает, что такие числа не могут быть представлены на оси

действительных чисел, но располагаются на второй числовой оси, на оси мнимых чисел.

*Комплексные числа (complex numbers)*

Комплексным числом называется выражение вида

$$\underline{A} = a + jb, \quad (\text{A.1})$$

где  $a$  и  $b$  – действительные числа, называемые действительной и мнимой частями комплексного числа;  $j = \sqrt{-1}$  – мнимая единица. Вещественную и мнимую части комплексного числа иногда обозначают так:

$$a = \text{Re}[\underline{A}], \quad b = \text{Im}[\underline{A}].$$

Выражение (A.1) – это *алгебраическая форма записи* комплексного числа.

Если, как показано на рис. А.3, оси действительных и мнимых чисел расположить перпендикулярно, с общей точкой 0, то такую плоскость можно назвать комплексной плоскостью и утверждать, что каждая точка плоскости соответствует комплексному числу и наоборот, т.е. образом комплексного числа является точка на комплексной плоскости. Абсцисса этой точки равна  $a$ , ордината равна  $b$ .

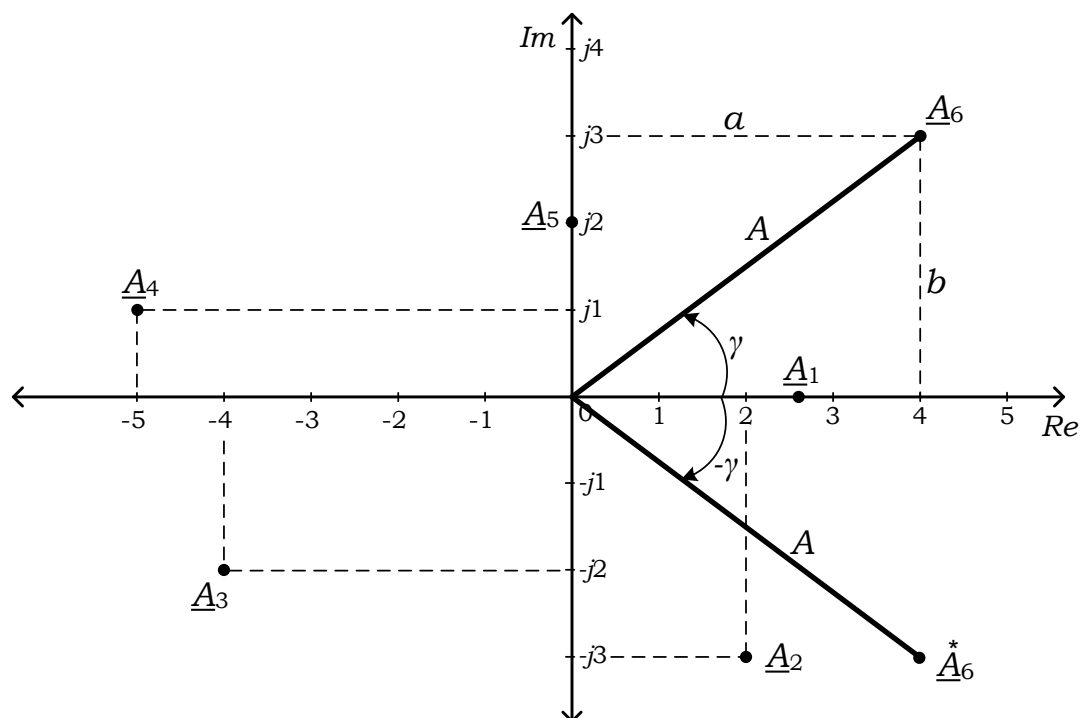


Рис. А.3. Комплексная плоскость

На рис. А.3 изображены с помощью точек шесть комплексных чисел. Каждой точке комплексной плоскости и, следовательно, каждому комплексному числу  $\underline{A}$  можно поставить в соответствие вектор, проведенный из начала координат в эту точку. Длина вектора, изображающего

комплексное число, называется **модулем** этого числа. Модуль находится по теореме Пифагора:

$$A = \sqrt{a^2 + b^2}. \quad (\text{A.2})$$

Угол  $\gamma$ , образованный вектором и положительным направлением действительной оси, называется **аргументом** комплексного числа:

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{b}{a}. \quad (\text{A.3})$$

Положительное направление отсчета аргумента  $\gamma$  – против часовой стрелки. Аргумент комплексного числа может иметь бесконечное множество значений, отличающихся друг от друга на  $2\pi n$ , где  $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ . Главное значение аргумента заключено в промежутке  $-\pi \leq \gamma \leq \pi$ .

Таким образом, модуль и аргумент комплексного числа являются полярными координатами точки, изображающей комплексное число, например комплексное число  $\underline{A}_6$ . Запись комплексного числа с помощью полярных координат называется *показательной формой записи*:

$$\underline{A} = A e^{j\gamma}. \quad (\text{A.4})$$

Как видно из рис. А.3, действительная  $a$  и мнимая части  $b$  комплексного числа  $\underline{A}$  есть проекции вектора, изображающего это число, на действительную и мнимую оси:

$$a = \operatorname{Re}[\underline{A}] = A \cos \gamma; \quad b = \operatorname{Im}[\underline{A}] = A \sin \gamma. \quad (\text{A.5})$$

Используя эти выражения в алгебраической форме, получим тригонометрическую форму записи комплексного

$$\underline{A} = A e^{j\alpha} = A \cos \alpha + j A \sin \alpha, \quad (\text{A.6})$$

при  $A=1$  получаем формулу Эйлера

$$e^{j\alpha} = \cos \gamma + j \sin \gamma. \quad (\text{A.7})$$

При выполнении арифметических операций используется как алгебраическая, так и показательная формы комплексного числа. Для сложения и вычитания требуется алгебраическая форма, а при умножении и делении лучше использовать показательную форму. Поэтому при расчетах с помощью инженерного калькулятора нужно уметь переходить от одной формы комплексного числа к другой.

**Перевод комплексного числа из показательной в алгебраическую форму** производится с использованием формулы Эйлера, т.е. по формуле  $\underline{A} = A e^{j\gamma} = A \cos \gamma + j A \sin \gamma = a + jb$ . Даже если аргумент  $\gamma$  является отрицательным числом, то на калькуляторе можно набирать положитель-

ный угол, а перед  $j$  в алгебраической форме ставить знак минус. Т.о., можно сформулировать правило: при переходе от одной формы комплексного числа к другой знак перед мнимой единицей  $j$  сохраняется.

**Перевод комплексного числа из алгебраической в показательную форму:** 1) модуль определяется по теореме Пифагора  $A = \sqrt{(a)^2 + (b)^2}$ ; 2) аргумент находится по формуле  $\gamma = \arctg \frac{b}{a}$ , если вещественная часть – число положительное, в противном случае можно пользоваться более общим алгоритмом  $\gamma = \arccos \frac{a}{A}$ . При определении аргумента по этому алгоритму знак перед  $j$  остается неизменным как в алгебраической, так и в показательной формах.

Два комплексных числа  $\underline{A} = a + jb = Ae^{j\gamma}$  и  $\underline{A}^* = a - jb = Ae^{-j\gamma}$  называются комплексно-сопряженными, если их действительные части равны, а мнимые отличаются только знаком. Точки на комплексной плоскости, изображающие сопряженные числа, симметричны относительно действительной оси, например, комплексно сопряженные числа  $\underline{A}_6$  и  $\underline{A}_6^*$ , рис. А.3.

Арифметические операции над комплексными числами выполняются так же, как над обыкновенными двучленами, имея в виду, что  $j^2 = -1$ .

### Сложение и вычитание комплексных чисел

Чтобы сложить два комплексных числа, нужно просуммировать вещественные и мнимые части отдельно. То же правило относится и к вычитанию. С практической точки зрения, операции сложения и вычитания комплексных чисел удобнее производить, используя алгебраическую форму записи.

**Пример.** Дано  $\underline{A}_1 = 5 - j2$  и  $\underline{A}_2 = -3 - j8$ . Тогда

$$\underline{A}_1 + \underline{A}_2 = (5 - j2) + (-3 - j8) = 2 - j10;$$

$$\underline{A}_2 - \underline{A}_1 = (-3 - j8) - (5 - j2) = -8 - j6.$$

### Умножение комплексных чисел

Произведение двух комплексных чисел, записанных в показательной форме, производится по правилу: модули перемножаются, аргументы складываются.

**Пример.** Дано  $\underline{A}_1 = 5 - j2 = 5,385e^{-j21,8^\circ}$  и  $\underline{A}_2 = -3 - j8 = 8,544e^{-j110,56^\circ}$ .

Тогда

$$\underline{A}_1 \underline{A}_2 = 5,385e^{-j21,8^\circ} \cdot 8,544e^{-j110,56^\circ} = 46,01e^{-j132,36^\circ} =$$

$$= 46,01\cos 132,36^\circ - j46,01\sin 132,36^\circ = -30,96 - j34,03.$$

Умножение комплексных чисел можно выполнять и в алгебраической форме по правилу перемножения полиномов.

**Пример.** Дано  $\underline{A}_1 = 5 - j2$  и  $\underline{A}_2 = -3 - j8$ .

Тогда

$$\underline{A}_1 \underline{A}_2 = (5 - j2) \cdot (-3 - j8) = 5 \cdot (-3) + 5 \cdot (-j8) + (-j2) \cdot (-3) + (-j2) \cdot (-j8) = \\ = -15 - j40 + j6 - 16 = -31 - j34 = 46,01e^{-j132,36^\circ}.$$

*Произведение комплексно-сопряженных чисел дает квадрат модуля.* Действительно:

$$\underline{A} \underline{A}^* = Ae^{j\gamma} Ae^{-j\gamma} = A^2 \quad \text{или} \quad \underline{A} \underline{A}^* = (a + jb)(a - jb) = a^2 + b^2 = A^2.$$

### Деление комплексных чисел

Деление двух комплексных чисел, записанных в показательной форме, производится по правилу: модули делятся, аргументы вычитаются.

**Пример.** Дано  $\underline{A}_1 = 5 - j2 = 5,385e^{-j21,8^\circ}$  и  $\underline{A}_2 = -3 - j8 = 8,544e^{-j110,56^\circ}$ .

Тогда

$$\frac{\underline{A}_1}{\underline{A}_2} = \frac{5,385e^{-j21,8^\circ}}{8,544e^{-j110,56^\circ}} = 0,6303e^{j(-21,8^\circ + 110,56^\circ)} = 0,6303e^{j88,76^\circ} = \\ = 0,6303\cos 88,76^\circ + j0,6303\sin 88,76^\circ = 0,0137 + j0,6301.$$

Деление комплексных чисел можно выполнять и в алгебраической форме путем умножения числителя и знаменателя на комплексное число, сопряженное знаменателю.

**Пример.** Дано  $\underline{A}_1 = 5 - j2 = 5,385e^{-j21,8^\circ}$  и  $\underline{A}_2 = -3 - j8 = 8,544e^{-j110,56^\circ}$ .

Тогда

$$\frac{\underline{A}_1}{\underline{A}_2} = \frac{5 - j2}{-3 - j8} = \frac{(5 - j2)(-3 + j8)}{(-3 - j8)(-3 + j8)} = \frac{1 + j46}{3^2 + 8^2} =$$

$$0,0137 + j0,6301 = 0,6303e^{j88,76^\circ}.$$

### Извлечение корня из комплексного числа

Любое комплексное число  $Ae^{j\gamma}$  может быть записано как  $Ae^{j(\gamma + 2\pi n)}$ , где  $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ . Таким образом

$$\underline{A} = Ae^{j\gamma} = Ae^{j(\gamma + 2\pi n)} \quad \text{и} \quad \sqrt[k]{\underline{A}} = \sqrt[k]{A} e^{j\left(\frac{\gamma + 2\pi n}{k}\right)} = \sqrt[k]{A} e^{j\frac{\gamma}{k}} e^{j\frac{2\pi n}{k}} = \sqrt[k]{A} e^{j\frac{\gamma}{k}} e^{j\frac{360^\circ n}{k}}.$$

Эта формула позволяет получить  $k$  различных корней комплексного числа, придавая  $n$  значения  $0, 1, 2, 3, \dots, k-1$ .

**Пример.** Если  $\underline{A} = 8e^{j60^\circ}$ , то  $\sqrt[3]{\underline{A}} = \sqrt[3]{8} e^{j\frac{60^\circ}{3}} e^{j\frac{360^\circ}{3}n} = 2e^{j20^\circ} e^{j120^\circ n}$ . Придавая  $n$  значения  $0, 1$  и  $2$ , получим три корня:  $2e^{j20^\circ}$ ,  $2e^{j140^\circ}$  и  $2e^{j260^\circ}$ .

### Понятие о гармонических функциях

Гармоническая функция  $a(t)$  характеризуется тремя параметрами: **амплитудой**  $A_m$  (наибольшее положительное значение), **угловой частотой**  $\omega=2\pi f=2\pi/T$  и начальной фазой  $\psi_a$ . В радиотехнике традиционно используют косинусную форму записи гармонической функции, в электротехнике и ТАУ – синусную форму записи, которой и будем пользоваться в дальнейшем:

$$a(t) = A_m \sin(\omega t + \psi_u) \quad (\text{A.8})$$

Аргумент  $\theta = \omega t + \psi_u$  функции называется **мгновенной фазой** или просто **фазой**. Начальная фаза есть значение фазы в начальный момент времени ( $t = 0$ ) и представляет собой угол между началом синусоиды и началом координат. Если начало синусоиды сдвинуто влево, то начальная фаза положительна, вправо – отрицательна, если совпадает с началом координат – начальная фаза равна нулю. Фаза и начальная фаза являются безразмерными величинами и выражаются в *радианах* (рад). Однако начальную фазу можно записывать и в градусах, что удобнее для восприятия.

#### Комплексные изображения гармонических функций времени

Каждой гармонической функции времени, например, входному воздействию  $u(t)$ , можно поставить в соответствие комплексное число  $\underline{u}$ , называемое **мгновенным** или **текущим комплексом** гармонической функции, модуль которого равен амплитуде, а аргумент – ее фазе:

$$\underline{u} = U_m e^{j(\omega t + \psi_u)} = U_m [\cos(\omega t + \psi_u) + j \sin(\omega t + \psi_u)]. \quad (\text{A.9})$$

Из этого выражения следует, что исходная синусоидальная функция (мгновенное значение) находится под знаком мнимой части:

$$u(t) = \text{Im}[\underline{u}] = \text{Im}[U_m e^{j(\omega t + \psi_u)}] = \text{Im}[U_m e^{j\psi_u} e^{j\omega t}] = U_m \sin(\omega t + \psi_u). \quad (\text{A.10})$$

Значение текущего или мгновенного комплекса в начальный момент времени  $U_m e^{j\psi_u}$  называется комплексной амплитудой:

$$\dot{U}_m = U_m e^{j\psi_u}. \quad (\text{A.11})$$

Определение комплексной амплитуды синусоидальной функции называют в комплексном методе прямым преобразованием гармонической функции. Т.о., *комплексная амплитуда – это комплексное число, модуль которого равен амплитуде, а аргумент – начальной фазе гармонической функции*. Используя понятие комплексной амплитуды, текущий комплекс можно записать в виде:

$$\underline{u} = U_m e^{j(\omega t + \psi_u)} = U_m e^{j\psi_u} e^{j\omega t} = \dot{U}_m e^{j\omega t}. \quad (\text{A.12})$$



Сомножитель  $e^{j\omega t}$ , входящий в это выражение, представляет собой вектор, называемый **оператором вращения**. Он имеет единичную длину и вращается в комплексной плоскости против часовой стрелки с угловой скоростью  $\omega$ . Всякий неподвижный вектор, изображающий комплексное число, будучи умноженный на оператор вращения  $e^{j\omega t}$ , начинает вращаться в комплексной плоскости против часовой стрелки с угловой скоростью  $\omega$ . Оператор вращения является общим для текущих комплексных напряжений и токов всех ветвей и не несет информации о токах и напряжениях конкретных ветвей. Информация об амплитудах и начальных фазах этих величин содержится в их комплексных амплитудах. Поэтому каждой гармонической функции времени  $a(t)$  можно поставить в соответствие комплексное число  $\dot{A}_m$  (комплексную амплитуду), которое можно рассматривать как изображение этой гармонической функции в комплексной плоскости. Связь между оригиналом и изображением записывается с помощью знака соответствия:

$$a(t) \Leftrightarrow \dot{A}_m. \quad (\text{A.13})$$

Комплексное изображение гармонической функции в виде неподвижного вектора, модулем которого является действующее значение, а аргументом – начальная фаза, будем называть комплексом действующего значения или просто **комплексом тока** или **комплексом напряжения**:

$$\dot{I} = I e^{j\psi_i}, \quad \dot{U} = U e^{j\psi_u}. \quad (\text{A.14})$$

Формулу (A.14) можно использовать для получения мгновенного значения синусоидальной функции, если найдена ее комплексная амплитуда (обратное преобразование). Для этого необходимо умножить комплексную амплитуду на оператор вращения и выделить мнимую часть полученного комплексного числа.

Определим операции над комплексными амплитудами. Очевидно, что умножению гармонической функции времени на произвольное число соответствует умножение комплексной амплитуды на это же число:

$$\alpha \cdot a(t) \Leftrightarrow \alpha \cdot \dot{A}_m.$$

Суммированию гармонических функций времени одной частоты соответствует суммирование комплексных амплитуд:

$$a_1(t) + a_2(t) + \dots + a_N(t) \Leftrightarrow \dot{A}_{m1} + \dot{A}_{m2} + \dots + \dot{A}_{mN}.$$

Найдем комплексное изображение производной гармонической функции времени. При этом учтем, что комплексная амплитуда не зависит от времени, а оператор вращения – от времени зависит:

$$\frac{d}{dt}a(t) \Leftrightarrow \frac{d}{dt}(\dot{A}_m e^{j\omega t}) = j\omega \dot{A}_m e^{j\omega t}.$$

Таким образом, дифференцированию гармонической функции времени соответствует умножение ее комплексного изображения (текущего комплекса и комплексной амплитуды) на  $j\omega$ :

$$\frac{d}{dt}a(t) \Leftrightarrow j\omega \dot{A}_m e^{j\omega t}. \quad (\text{A.15})$$

Определим комплексное изображение интеграла от гармонической функции времени  $a(t)$ :

$$\int a(t) dt \Leftrightarrow \int \dot{A}_m e^{j\omega t} dt = \frac{1}{j\omega} \dot{A}_m e^{j\omega t}.$$

Следовательно, интегрированию гармонической функции времени соответствует деление ее комплексного изображения на  $j\omega$ :

$$\int a(t) dt \Leftrightarrow \frac{1}{j\omega} \dot{A}_m e^{j\omega t}. \quad (\text{A.16})$$

Рассмотренные операции над комплексными изображениями гармонических функций позволяют перейти от дифференциальных уравнений для оригиналов к алгебраическим уравнениям для комплексных изображений. Например, для последовательной  $RLC$ -цепи уравнение для мгновенных значений записывается в виде:

$$Ri(t) + L \frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C} \int i(t) dt = U_m \sin(\omega t + \psi_u).$$

Заменим в уравнении оригиналы их комплексными изображениями – комплексными амплитудами:

$$R\dot{I}_m + j\omega L\dot{I}_m + \frac{1}{j\omega C} \dot{I}_m = \dot{U}_m.$$

Решаем это алгебраическое уравнение относительно комплексной амплитуды тока:

$$\dot{I}_m = \frac{\dot{U}_m}{R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{\dot{U}_m}{R + j\omega L - j\frac{1}{\omega C}} = \frac{\dot{U}_m}{R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)} = \frac{\dot{U}_m}{R + jX} = \frac{\dot{U}_m}{\underline{Z}}.$$

Итак, мы убедились в том, применение комплексного метода для установившегося синусоидального режима позволяет вместо дифференциальных уравнений для оригиналов записать алгебраические уравнения для комплексных изображений, решить эти уравнения относительно изображений и записать оригиналы, т.е. гармонические функции времени. Такой переход к оригиналам не вызывает затруднений, так как амплитуда и начальная фаза, необходимые для записи синусоиды, содержатся в комплексной амплитуде.

## ПРИЛОЖЕНИЕ Б

### КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА В MATLAB

При вводе комплексных чисел в Matlab можно использовать как букву  $i$ , так и букву  $j$  в качестве мнимой единицы. При желании, знак умножения можно не применять при создании комплексного числа, а ставить букву  $i$  или  $j$  после мнимой части:

```
Z=3+j*4
```

```
Z=3+4j
```

В командном окне появятся числа

```
Z = 3.0000 + 4.0000i
```

```
Z = 3.0000 + 4.0000i
```

По умолчанию, Matlab использует букву  $i$  для записи мнимой единицы.

Комплексные числа при умножении, делении и возведении в степень необходимо заключать в квадратные скобки.

Комплексное число можно вводить и в показательной форме, задавая аргумент в радианах, но выводит программа комплексное число в форме алгебраической:

```
Z=2.5*exp(j*pi/3)
```

В командном окне

```
Z = 1.2500 + 2.1651i
```

Если угол задан в радианах, то в аргументе экспоненты его нужно превратить в радианы:

```
Z=2.5*exp(j*60*pi/180)
```

В командном окне

```
Z = 1.2500 + 2.1651i
```

Для возвращения действительной и мнимой частей введенного ранее комплексного числа используются функции `real` и `imag`:

```
x=real(Z)
```

```
y=imag(Z)
```

В командном окне

```
x = 1.2500
```

```
y = 2.1651
```

Для получения модуля и аргумента (в радианах) комплексного числа используются функции `abs` и `angle`:

```
A=abs(Z)
```

```
theta=angle(Z)
```

В командном окне

```
A = 2.5000
```

```
theta = 1.0472
```

Аргумент можно получить и в градусах путем умножения на 180 и деления на  $\pi$ :

```
theta=angle(Z)*180/pi
```

В командном окне

```
theta = 60.0000
```

Выводимый аргумент находится между  $\pm \pi$ :

```
Z1=-3-4j
```

```
fi=angle(Z1)*180/pi
```

В командном окне

```
Z1 = -3.0000 - 4.0000i
```

```
fi = -126.8699
```

Для получения аргумента в интервале  $\pm \pi$  можно использовать функцию `atan2`, которая записывается в виде

```
P = atan2(Y,X),
```

где  $Y, X$  – соответственно мнимая и действительная части комплексного числа  $Z = X + jY$ :

```
Z1=-3-4j
```

```
r=abs(Z1)
```

```
Theta=atan2(imag(Z1),real(Z1))*180/pi
```

В командном окне

```
Z1 = -3.0000 - 4.0000i
```

```
r = 5
```

```
Theta = -126.8699
```

Для получения сопряженного комплекса используется функция `conj`:

```
Z1C=conj(Z1)
```

В командном окне

```
Z1C = -3.0000 + 4.0000i
```

Найдем произведение комплексно-сопряженных чисел, которое, как известно, равно квадрату модуля:

```
M=Z1*Z1C
```

В командном окне

```
M = 25
```

Для получения аргумента между  $\pm \pi$  можно воспользоваться алгоритмом, приведенным выше, в котором используется функция `cos`, а  $j$  переходит в показательную форму со своим знаком:

```
arg=acos(real(Z1)/abs(Z1))*sign(imag(Z1))*180/pi
```

В командном окне

```
arg = -126.8699
```

Здесь использована функция `sign` (Signum function), которая возвращает 1, если число больше нуля, 0 – если число равно нулю и -1, если число меньше нуля:

```
Y=sign(imag(Z1))
```

В командном окне

```
Y = -1
```

И, наконец, для создания комплексного числа из действительной и мнимой частей можно использовать функцию `complex`, входными аргументами которой являются действительная и мнимая части:

```
C=complex(-3,-4)
```

В командном окне

```
C = -3.0000 - 4.0000i
```

## ПРИЛОЖЕНИЕ В

### ТИПОВЫЕ ЗВЕНЬЯ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

Как показано выше в пособии, любую сложную передаточную функцию можно представить в виде произведения передаточных функций первого и второго порядков, разложив ее числитель и знаменатель по нулям и полюсам. Динамические звенья, которые описываются неразложимыми далее передаточными функциями, будем называть *элементарными*. Элементарных звеньев всего семь. Их передаточные функции имеют следующий вид:

1)  $W(p)=K$  – нули и полюса отсутствуют;

2)  $W(p) = \frac{1}{p}$  – нулевой полюс;

3)  $W(p) = \frac{-\alpha}{p - \alpha}$  – вещественный полюс  $p = \alpha$ ;

4)  $W(p) = \frac{\alpha^2 + \beta^2}{p^2 - 2\alpha p + (\alpha^2 + \beta^2)}$  – пара комплексно сопряженных полюсов  $p_{1,2} = \alpha \pm j\beta$ ;

5)  $W(p) = p$  – нулевой нуль;

6)  $W(p) = \frac{p - \alpha}{-\alpha}$  – вещественный нуль  $z = \alpha$ ;

7)  $W(p) = \frac{p^2 - 2\alpha p + (\alpha^2 + \beta^2)}{\alpha^2 + \beta^2}$  – пара комплексно сопряженных ну-

лей  $z_{1,2} = \alpha \pm j\beta$ ;

Многие элементы реальных систем автоматического управления близки по своим динамическим свойствам элементарным звеньям, однако в большинстве случаев описать элемент одним элементарным звеном не удастся. Это связано в частности с тем обстоятельством, что реальные устройства помимо «основного», динамического преобразования (например, интегрирования) практически всегда выполняют и статическое преобразование сигнала (усиление, преобразование одной физической величины в другую). Следует также отметить, что технические устройства, как правило, *устойчивы* или, как минимум, *нейтральны*, т.е. вещественные части полюсов их передаточных функций – отрицательные или нулевые.

На практике при описании элементов структурной схемы системы часто используют т.н.  *типовые*  звенья. Типовые звенья строятся из одного, двух или даже трех элементарных и поэтому позволяют описать многие реальные физические объекты и устройства.

Классификацию типовых звеньев можно осуществить, рассматривая частные формы дифференциального уравнения второго порядка

$$a_2 \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) = b_1 \frac{dx(t)}{dt} + b_0 x(t),$$

которому соответствует передаточная функция

$$W(p) = \frac{b_1 p + b_0}{a_2 p^2 + a_1 p + a_0}.$$

В табл. В.1 приведены значения коэффициентов в уравнении (ДУ) и названия для наиболее часто встречающихся звеньев.

Таблица В.1 – Значения коэффициентов ДУ типовых звеньев

№	Наименование звена	$a_2$	$a_1$	$a_0$	$b_1$	$b_0$
1	Безынерционное (усилительное, пропорциональное)	0	0	1	0	$k$
2	Идеальное интегрирующее	0	1	0	0	$k$
3	Апериодическое 1-го порядка	0	$T$	1	0	$k$
4	Реальное интегрирующее	$T$	1	0	0	$k$
5	Апериодическое 2-го порядка	$T_1 T_2$	$T_1 + T_2$	1	0	$k$
6	Колебательное	$T^2$	$2\xi T$	1	0	$k$
7	Идеальное дифференцирующее	0	0	1	$k$	0
8	Реальное дифференцирующее	0	$T$	1	$k$	0
9	Форсирующее	0	0	1	$kT$	$k$
10	Изодромное	0	$T$	0	$kT$	$k$
11	Интегро-дифференцирующее	0	$T_1$	1	$KT_2$	$k$

Звенья, у которых  $a_0 \neq 0$  и  $b_0 \neq 0$ , обладают статизмом, т.е. обладают однозначной связью между входом и выходом в статическом режиме: при подаче на вход постоянной величины с течением времени устанавливается постоянное значение выходной величины. К их названиям часто добавляются слова *статическое* или *позиционное*.

Кроме перечисленных в таблице В.1 к типовым звеньям относят также звено запаздывания.

Ниже приведено описание типовых звеньев, включая их переходные и частотные характеристики.

**1) Безынерционное (усилительное пропорциональное) звено** описывается уравнением

$$x_{вых} = kx_{вх}.$$

Коэффициент  $k$  называется коэффициентом усиления, если  $x_{вх}$  и  $x_{вых}$  – сигналы одной физической природы, или коэффициентом передачи, если физическая природа этих сигналов различна. Согласно уравнению звена выходной сигнал повторяет входной, усиленный по модулю в  $k$  раз. Строго говоря, реальных безынерционных звеньев не бывает – любые процессы преобразования энергии или информации занимают некоторое время. Однако если инерционность некоторого звена системы намного меньше инерционности других звеньев, ею целесообразно пренебречь, так как это упростит математическое описание системы, не снижая его адекватности или достоверности. Например, присутствующие во многих САР полупроводниковые усилители можно считать безынерционными звеньями, так как время преобразования (усиления) сигнала в них на несколько порядков меньше времени реакции на управляющий сигнал объектов управления и исполнительных механизмов.

Передаточная функция усилительного звена не имеет нулей и полюсов:

$$W(p) = k. \tag{B.1}$$

Амплитудно-частотная характеристика усилительного звена:

$$W(j\omega) = k.$$

Логарифмическая амплитудно-частотная характеристика:

$$L(\omega) = 20 \lg k.$$

Фазочастотная характеристика:

$$\varphi(\omega) = 0.$$

**2) Идеальное интегрирующее звено** описывается дифференциальным уравнением



$$\frac{dx_{\text{вых}}}{dt} = kx_{\text{вх}}. \quad (\text{B.2})$$

Выходной сигнал интегрирующего звена пропорционален интегралу от входного:

$$x_{\text{вых}} = k \int_0^t x_{\text{вх}}(\tau) d\tau.$$

При  $x_{\text{вх}} = \text{const}$  коэффициент  $k$  представляет собой отношение скорости изменения выходного сигнала к величине входного.

Передаточная функция звена не имеет нулей, но имеет один нулевой полюс:

$$W(p) = \frac{k}{p}.$$

Переходная характеристика звена определяется уравнением

$$x_{\text{вых}} = kt$$

и представляет собой линейно возрастающий во времени сигнал.

Амплитудно-частотная характеристика звена:

$$A(\omega) = \frac{k}{\omega}.$$

Фазочастотная характеристика:

$$\varphi(\omega) = -\frac{\pi}{2}.$$

Логарифмическая амплитудно-частотная характеристика имеет вид:

$$L(\omega) = 20 \lg k - 20 \lg \omega.$$

Это прямая с наклоном  $-20$  Дб/дек, пересекающая ось абсцисс при частоте  $\omega = k$

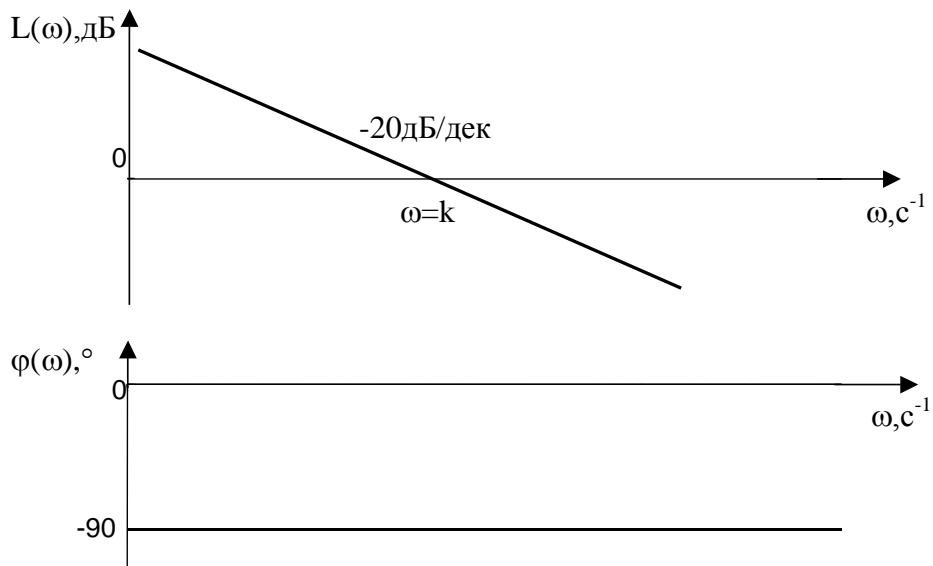


Рис. В.1. Логарифмические частотные характеристики интегрирующего звена.

**3) Аperiodическое звено первого порядка** описывается дифференциальным уравнением вида

$$T \frac{dx_{\text{вых}}}{dt} + x_{\text{вых}} = kx_{\text{вх}}, \quad (\text{В.3})$$

где  $T$  – постоянная времени звена  $\text{с}^{-1}$ ;  $k$  – его коэффициент передачи (усиления).

Передаточная функция аperiodического звена:

$$W(p) = \frac{k}{Tp + 1}.$$

Она имеет единственный полюс  $p = -1/T$ .

Уравнение переходной характеристики звена:

$$h(t) = k \left( 1 - e^{-\frac{t}{T}} \right).$$

График переходной характеристики показан на рис. В.2.

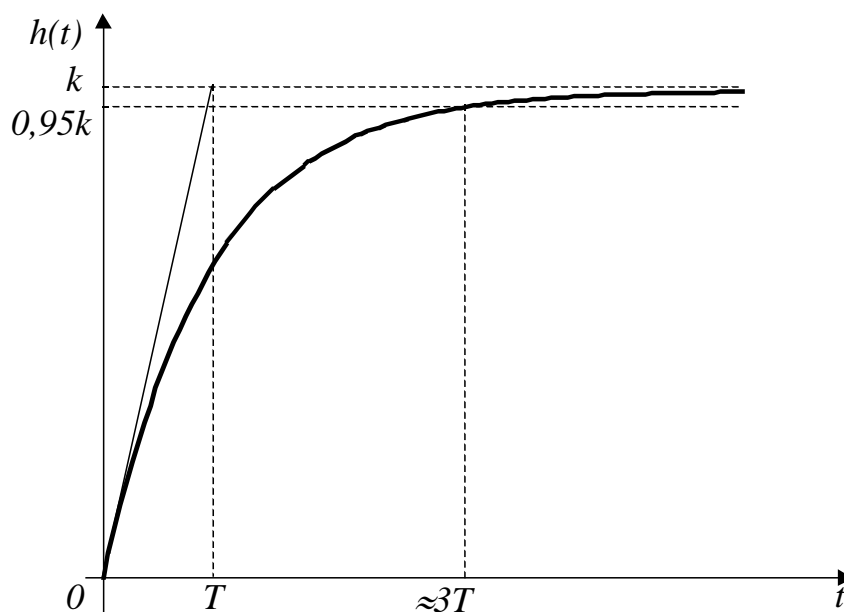


Рис. В.2. Переходная характеристика аperiodического звена первого порядка

Постоянная времени аperiodического звена имеет определенный физический смысл – это время, в течение которого выходная величина достигла бы установившегося значения, если бы изменялась с постоянной начальной скоростью. Действительно, из (В.3) при  $x_{вх} = 1$ ,  $x_{вых} = 0$  получаем

$$\frac{dx_{вых}}{dt}(0) = \frac{k}{T}.$$

Откуда время достижения установившегося состояния

$$t_y = k / \frac{dx_{вых}}{dt}(0) = T.$$

Амплитудно-частотная характеристика аperiodического звена:

$$A(\omega) = \frac{k}{\sqrt{T^2\omega^2 + 1}}.$$

Фазочастотная характеристика:

$$\varphi(\omega) = -\text{arctg}(T\omega).$$

Логарифмируя, получим ЛАЧХ аperiodического звена:

$$L(\omega) = 20 \lg A(\omega) = 20 \lg k - 20 \lg \sqrt{T^2\omega^2 + 1}.$$

Эта характеристика имеет асимптоты:

- 1) при  $\omega \rightarrow 0$ ,  $L(\omega) \rightarrow 20 \lg k$ ;
- 2) при  $\omega \rightarrow \infty$ ,  $L(\omega) \rightarrow 20 \lg k - 20 \lg(T\omega)$ .

Первая асимптота – горизонтальная линия на уровне  $20lgk$ , вторая – прямая с наклоном  $-20$  дБ/дек.

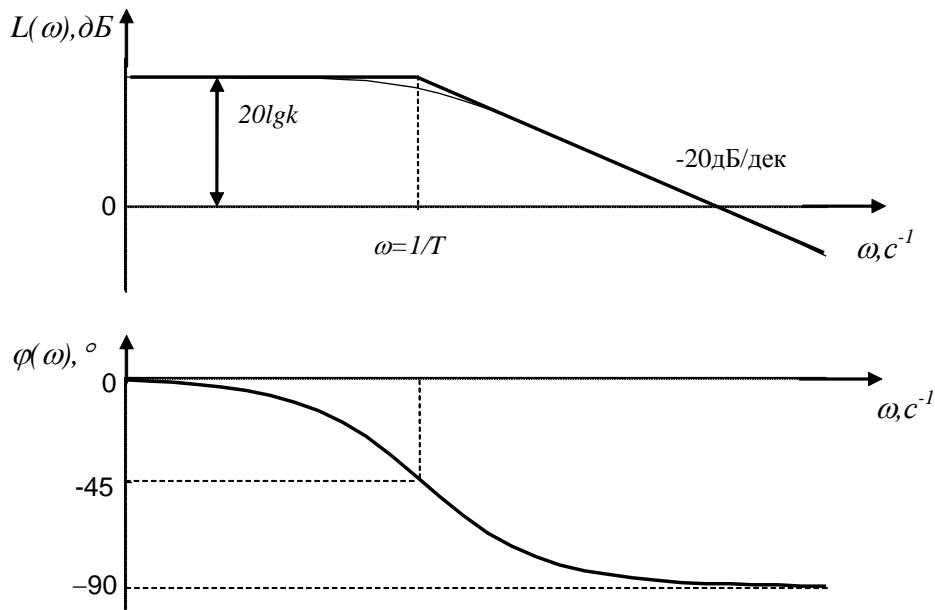


Рис. В.3. Логарифмические частотные характеристики аperiodического звена.

Пересекаются асимптоты в точке  $\omega=1/T$ . На этой же частоте сама ЛАХ в наибольшей степени отличается от асимптот (отличие  $\Delta L \approx 3$  дБ).

#### 4) Реальное интегрирующее звено

описывается дифференциальным уравнением

$$T \frac{d^2 x_{\text{вых}}}{dt^2} + \frac{dx_{\text{вых}}}{dt} = kx_{\text{вх}}. \quad (\text{В.4})$$

где  $T$  – постоянная времени звена  $\text{с}^{-1}$ .

Передаточная функция звена имеет два полюса  $p_1 = 0$  и  $p_2 = -1/T$ :

$$W(p) = \frac{k}{Tp^2 + p} = \frac{k}{p(Tp + 1)}.$$

Уравнение переходной характеристики звена:

$$h(t) = kt + kT \left( e^{-\frac{t}{T}} - 1 \right).$$

График переходной характеристики приведен на рис. В.4.

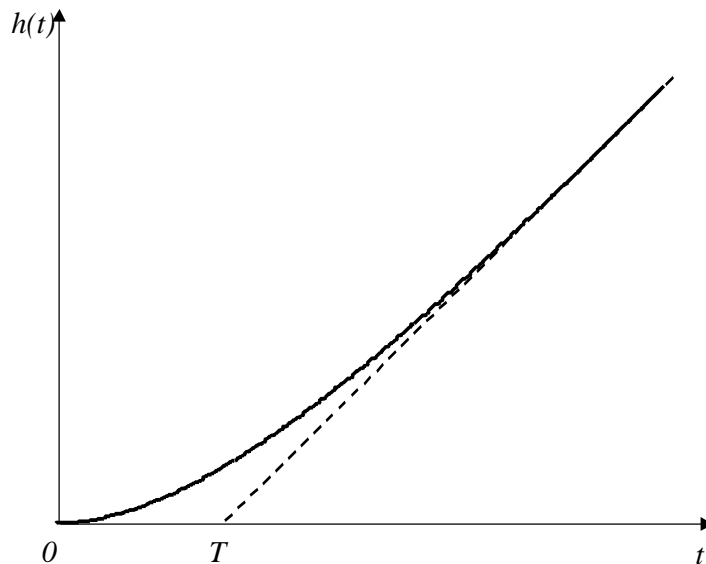


Рис. В.4. Переходная характеристика реального интегрирующего звена

При  $t \rightarrow \infty$   $h(t) \rightarrow kt - kT$ .

Амплитудно-частотная характеристика реального интегрирующего звена есть произведение АЧХ идеального интегрирующего звена и апериодического звена первого порядка:

$$A(\omega) = \frac{k}{\omega \sqrt{T^2 \omega^2 + 1}} = \frac{k}{\omega} \cdot \frac{1}{\sqrt{T^2 \omega^2 + 1}}.$$

Фазочастотная характеристика есть сумма ФЧХ идеального интегрирующего звена и апериодического звена первого порядка:

$$\varphi(\omega) = -\frac{\pi}{2} - \text{arctg}(T\omega).$$

Логарифмическая амплитудно-частотная характеристика определяется выражением:

$$L(\omega) = 20 \lg A(\omega) = 20 \lg k - 20 \lg \omega - 20 \lg \sqrt{T^2 \omega^2 + 1}$$

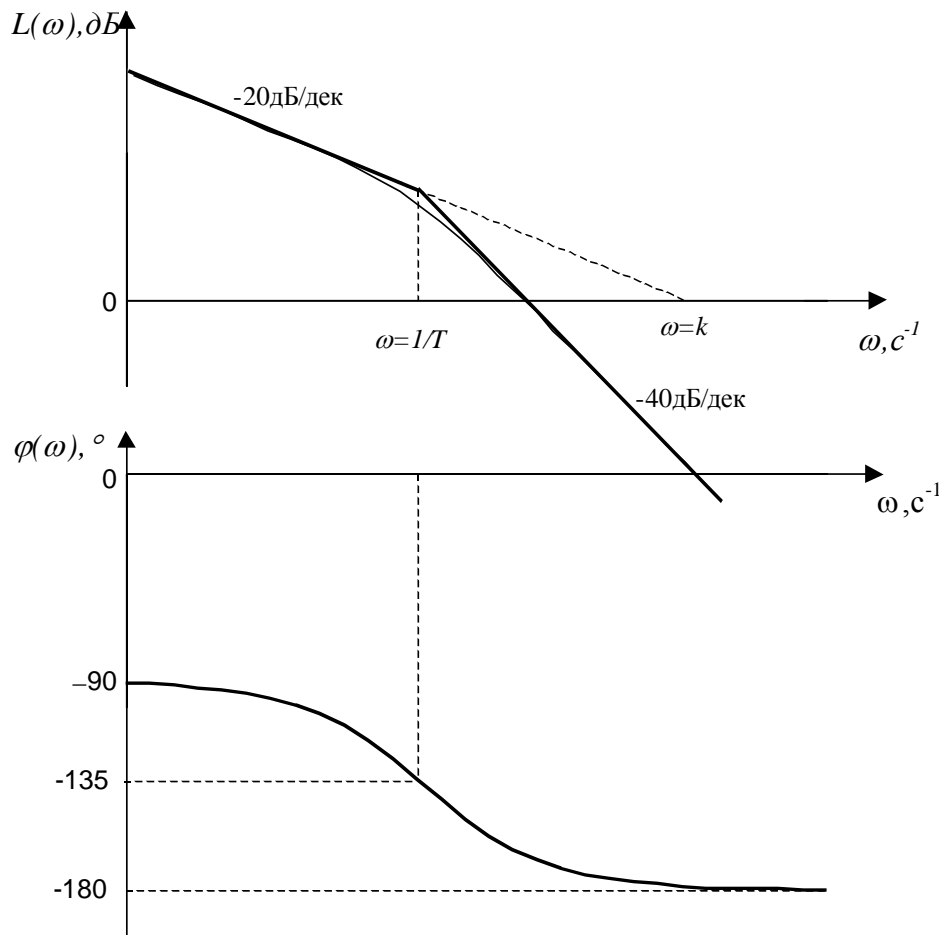


Рис. В.5. Логарифмические частотные характеристики реального интегрирующего звена

### 5) Аперидическое звено второго порядка

описывается дифференциальным уравнением вида

$$T_1 T_2 \frac{d^2 x_{\text{вх}}}{dt^2} + (T_1 + T_2) \frac{dx_{\text{вх}}}{dt} + x_{\text{вх}} = k x_{\text{вх}}, \quad (\text{В.5})$$

где  $T_1, T_2$  – постоянные времени звена  $\text{с}^{-1}$ ;  $k$  – его коэффициент передачи (усиления).

Передаточная функция аперидического звена:

$$W(p) = \frac{k}{T_1 T_2 p^2 + (T_1 + T_2) p + 1} = \frac{k}{(T_1 p + 1)(T_2 p + 1)}.$$

Она имеет два полюса  $p_1 = -1/T_1$  и  $p_2 = -1/T_2$ .

Уравнение переходной характеристики звена при  $T_1 \neq T_2$ :

$$h(t) = k \left( 1 + \frac{T_1}{T_2 - T_1} e^{-\frac{t}{T_1}} - \frac{T_2}{T_2 - T_1} e^{-\frac{t}{T_2}} \right).$$

При  $T_1 = T_2 = T$

$$h(t) = k \left( 1 - e^{-\frac{t}{T}} - \frac{t}{T} e^{-\frac{t}{T}} \right).$$

График переходной характеристики показан на рис. В.6.

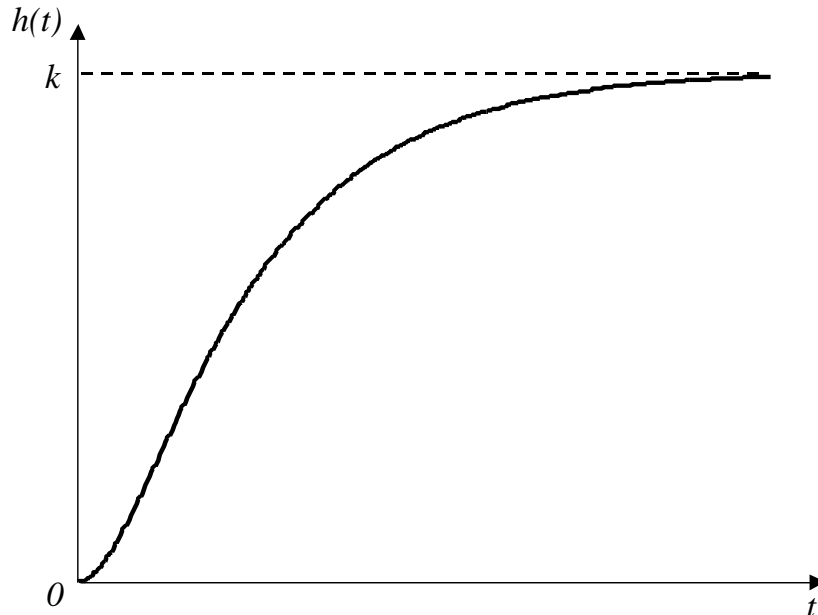


Рис. В.6. Переходная характеристика апериодического звена второго порядка

В отличие от переходной характеристики апериодического звена первого порядка характеристика звена второго порядка имеет выраженный начальный участок, на котором скорость изменения выходного сигнала увеличивается от нуля до своего максимального значения. Если одна из постоянных времени значительно меньше другой, длительность этого участка мала и характеристика близка к характеристике, приведенной на рис. В.2.

Амплитудно-частотная характеристика звена есть произведение АЧХ двух звеньев первого порядка:

$$A(\omega) = \frac{k}{\sqrt{T_1^2 \omega^2 + 1}} \times \frac{1}{\sqrt{T_2^2 \omega^2 + 1}} = \frac{k}{\sqrt{(T_1^2 \omega^2 + 1)(T_2^2 \omega^2 + 1)}}.$$

Фазочастотная характеристика есть сумма ФЧХ двух звеньев первого порядка:

$$\varphi(\omega) = -\text{arctg}(T_1 \omega) - \text{arctg}(T_2 \omega).$$

ЛАЧХ звена:

$$L(\omega) = 20 \lg A(\omega) = 20 \lg k - 20 \lg \sqrt{T_1^2 \omega^2 + 1} - 20 \lg \sqrt{T_2^2 \omega^2 + 1}.$$

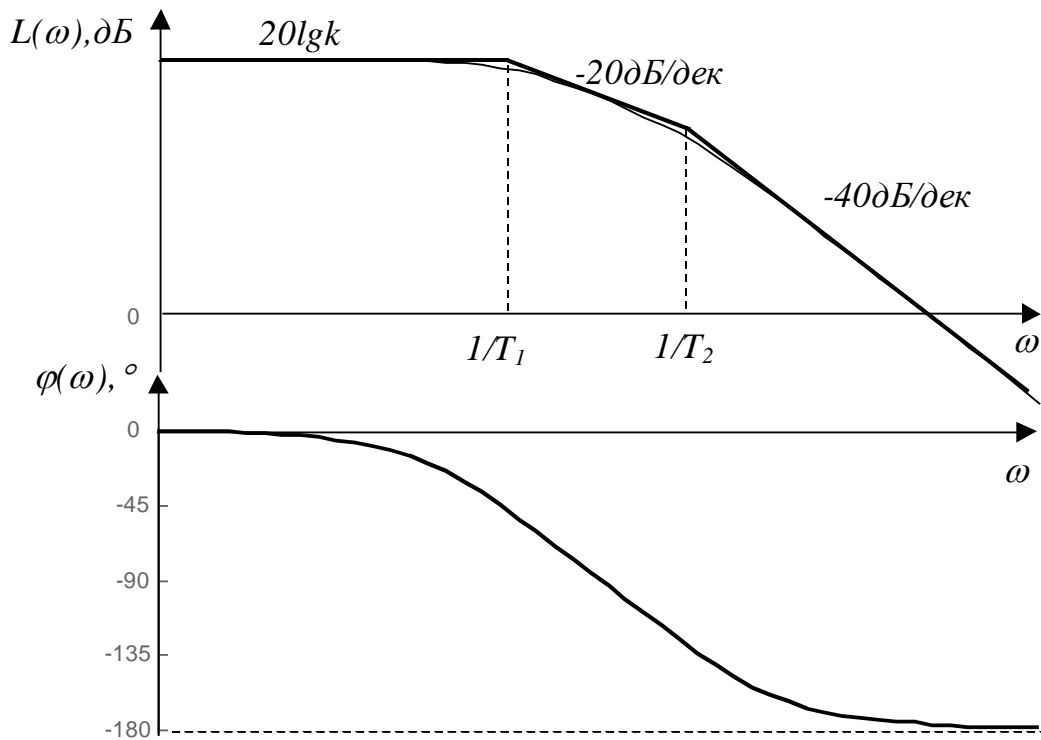


Рис. В.7. Логарифмические частотные характеристики аperiodического звена второго порядка ( $T_1 > T_2$ )

### б) Колебательное звено

описывается дифференциальным уравнением второго порядка, которое можно привести к виду

$$T^2 \frac{d^2 x_{\text{вых}}}{dt^2} + 2T\xi \frac{dx_{\text{вых}}}{dt} + x_{\text{вых}} = kx_{\text{вх}}, \quad 0 \leq \xi < 1, \quad (\text{В.6})$$

где  $T$  – постоянная времени звена,  $\text{с}^{-1}$ ;  $k$  – коэффициент передачи звена;  $\xi$  – коэффициент демпфирования.

Передаточная функция звена

$$W(p) = \frac{k}{T^2 p^2 + 2\xi T p + 1}.$$

Передаточная функция имеет пару комплексно сопряженных полюсов

$$p_{1,2} = \alpha \pm j\beta,$$

где

$$\alpha = -\frac{\xi}{T}, \quad \beta = \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{T}.$$

Переходная характеристика колебательного звена может быть выражена через его полюса:



$$h(t) = k \left( 1 - \frac{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}{\beta} e^{\alpha t} \sin \left( \beta t - \operatorname{arctg} \frac{\beta}{\alpha} \right) \right)$$

или через параметры передаточной функции:

$$h(t) = k \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}} e^{-\frac{\xi}{T}t} \sin \left( \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{T} t + \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi} \right) \right).$$

Переходная характеристика колебательного звена представляет собой сумму постоянной величины, равной коэффициенту передачи  $k$ , и затухающей синусоиды с частотой  $\beta$ . Скорость затухания синусоиды определяется вещественной частью полюсов  $\alpha$ .

Переходные характеристики колебательных звеньев при различных значениях постоянных времени и коэффициента демпфирования показаны на рис. В.8.

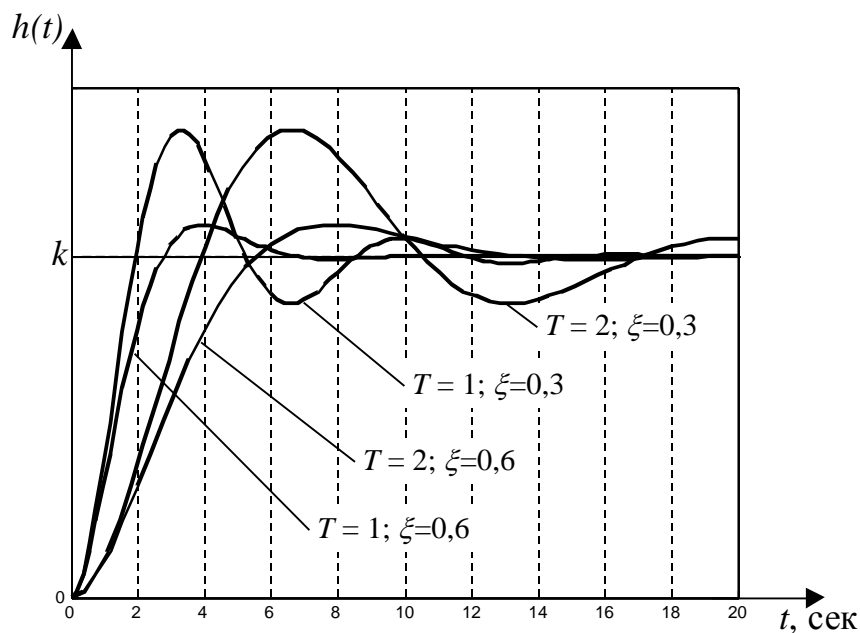


Рис. В.8. Переходные характеристики колебательных звеньев

Увеличение постоянной времени  $T$  ведет к снижению скорости затухания и частоты колебаний, что в свою очередь дает увеличение длительности переходной характеристики. Размах колебаний остается неизменным.

Увеличение коэффициента демпфирования  $\xi$  ведет к увеличению скорости затухания колебаний и уменьшению их размаха и частоты, т.е. к подавлению (демпфированию) колебаний.

Отметим, что при  $\xi \geq 1$  полюса звена становятся отрицательными вещественными числами:

$$p_{1,2} = -\frac{\xi}{T} \pm \frac{\sqrt{\xi^2 - 1}}{T},$$

и, следовательно, звено становится апериодическим второго порядка.

С другой стороны, при  $\xi = 0$ :

$$h(t) = k \left( 1 - \sin \left( \frac{1}{T} t + \frac{\pi}{2} \right) \right) = k \left( 1 - \cos \left( \frac{1}{T} t \right) \right).$$

Это уравнение незатухающих колебаний относительно уровня  $h = k$  с частотой  $\omega = 1/T$  и амплитудой, равной коэффициенту передачи.

Звено, у которого  $\xi = 0$ , называется *консервативным*.

Амплитудно-частотная характеристика колебательного звена:

$$A(\omega) = \frac{k}{\sqrt{(1 - T^2 \omega^2)^2 + 4\xi^2 T^2 \omega^2}}.$$

Фазочастотная характеристика:

$$\varphi(j\omega) = -\arctg \left( \frac{2\xi T \omega}{1 - T^2 \omega^2} \right).$$

ЛАЧХ звена имеет вид:

$$L(\omega) = 20 \lg k - 20 \lg \sqrt{(1 - T^2 \omega^2)^2 + 4\xi^2 T^2 \omega^2}.$$

Эта характеристика имеет асимптоты:

а) при  $\omega \rightarrow 0$ ,  $L(\omega) \rightarrow 20 \lg k$ ;

б) при  $\omega \rightarrow \infty$ ,  $L(\omega) \rightarrow 20 \lg k - 40 \lg T \omega$ .

Первая асимптота является горизонтальной прямой, уровень которой  $20 \lg k$ , вторая – прямая с наклоном  $-40$  дБ/дек (рис.П.10).

При значениях коэффициента демпфирования  $0,5 < \xi < 1$  характеристика близка к ломаной, образованной двумя этими асимптотами. Если же  $\xi < 0,5$ , то имеет место заметный «горб» в ЛАЧХ на частоте

$$\omega_k = \frac{1}{T} \cdot \sqrt{1 - 2\xi^2},$$

который может быть рассчитан следующим образом:

$$\Delta L = 20 \lg \frac{1}{2\xi \cdot \sqrt{1 - \xi^2}}.$$

В упрощенных расчетах можно принять

$$\Delta L = 20 \lg \frac{1}{2\xi}, \quad \omega_k = \frac{1}{T}.$$

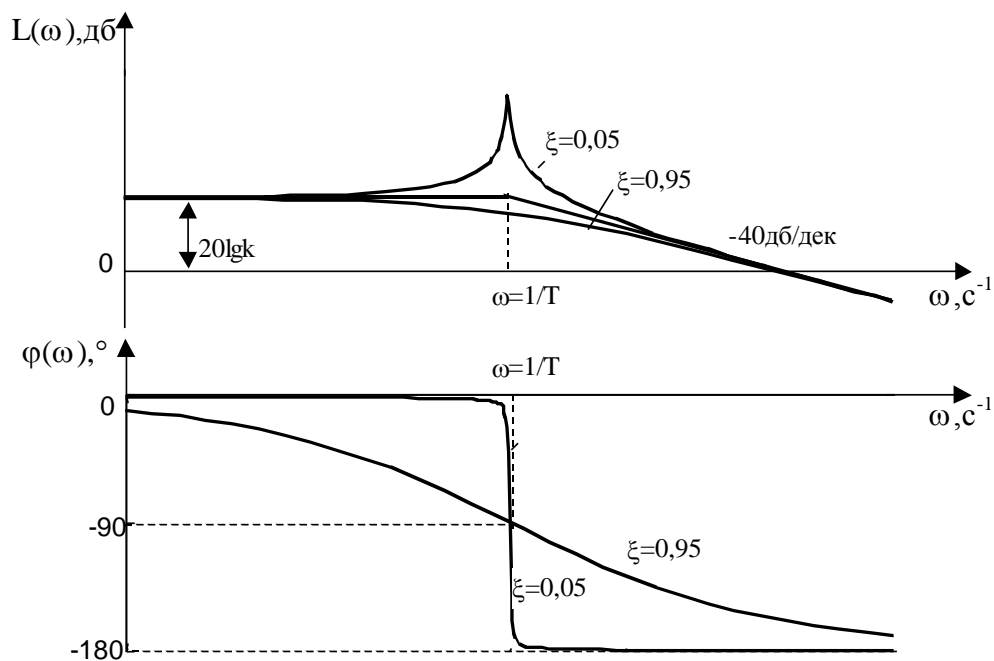


Рис. В.9. Логарифмические частотные характеристики колебательного звена

### 7) Идеальное дифференцирующее звено

описывается дифференциальным уравнением:

$$x_{\text{вых}} = k \frac{dx_{\text{вх}}}{dt}. \quad (\text{В.7})$$

Его передаточная функция

$$W(p) = kp.$$

Поскольку звено физически нереализуемо, ее переходная характеристика не приводится.

Амплитудно-частотная характеристика идеального дифференцирующего звена:

$$A(\omega) = k\omega.$$

Фазочастотная характеристика:

$$\varphi(\omega) = \frac{\pi}{2}.$$

Логарифмическая амплитудно-частотная характеристика имеет вид:

$$L(\omega) = 20 \lg k + 20 \lg \omega.$$

Это прямая с наклоном 20 дБ/дек, проходящая через ось абсцисс при частоте  $\omega=1/k$ .

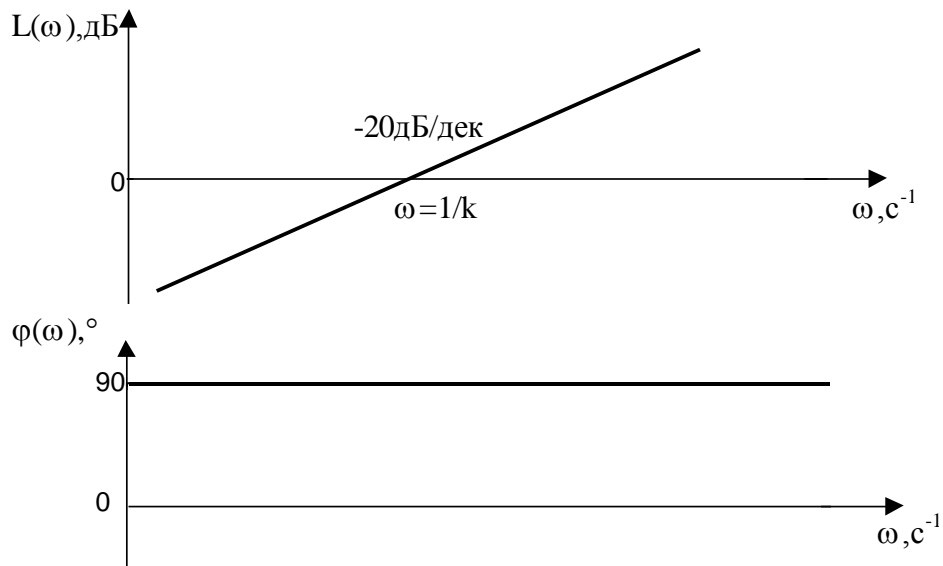


Рис.В.10. Логарифмические частотные характеристики идеального дифференцирующего звена

### 8) Реальное дифференцирующее звено

описывается уравнением

$$T \frac{dx_{\text{вых}}}{dt} + x_{\text{вых}} = k \frac{dx_{\text{вх}}}{dt}, \quad (B.8)$$

где  $T$  – постоянная времени звена  $\text{с}^{-1}$ .

Передаточная функция звена имеет один полюс  $p_1 = -1/T$  и один нуль  $z = 0$ .

$$W(p) = \frac{kp}{Tp + 1}.$$

Уравнение переходной характеристики звена:

$$h(t) = \frac{k}{T} e^{-\frac{t}{T}}.$$

График переходной характеристики приведен на рис. В.11.

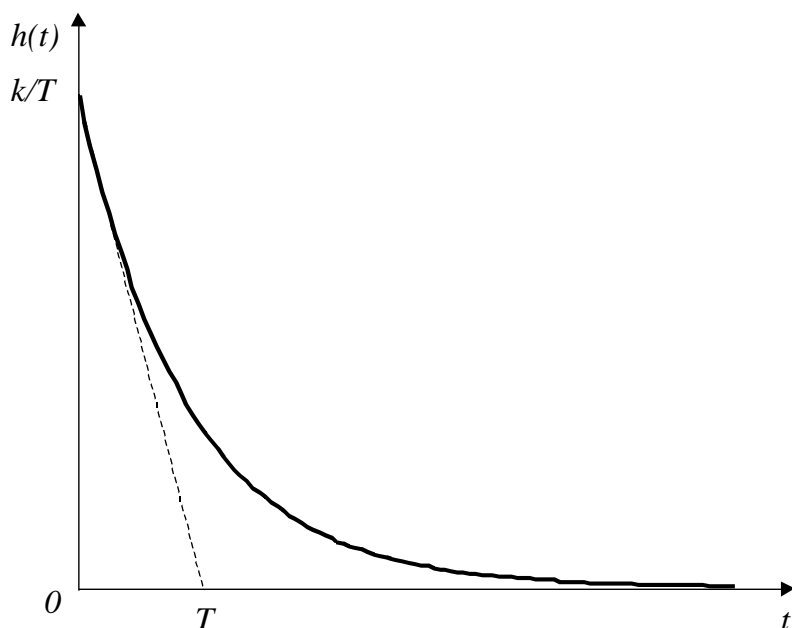


Рис. В.11. Переходная характеристика реального дифференцирующего звена

Амплитудно-частотная характеристика звена есть произведение АЧХ идеального дифференцирующего звена и апериодического звена первого порядка:

$$A(\omega) = k\omega \times \frac{1}{\sqrt{T^2\omega^2 + 1}} = \frac{k\omega}{\sqrt{T^2\omega^2 + 1}}.$$

Фазочастотная характеристика есть сумма ФЧХ указанных звеньев:

$$\varphi(\omega) = \frac{\pi}{2} - \text{arctg}(T_2\omega).$$

ЛАЧХ звена:

$$L(\omega) = 20 \lg A(\omega) = 20 \lg k + 20 \lg \omega - 20 \lg \sqrt{T^2\omega^2 + 1}.$$

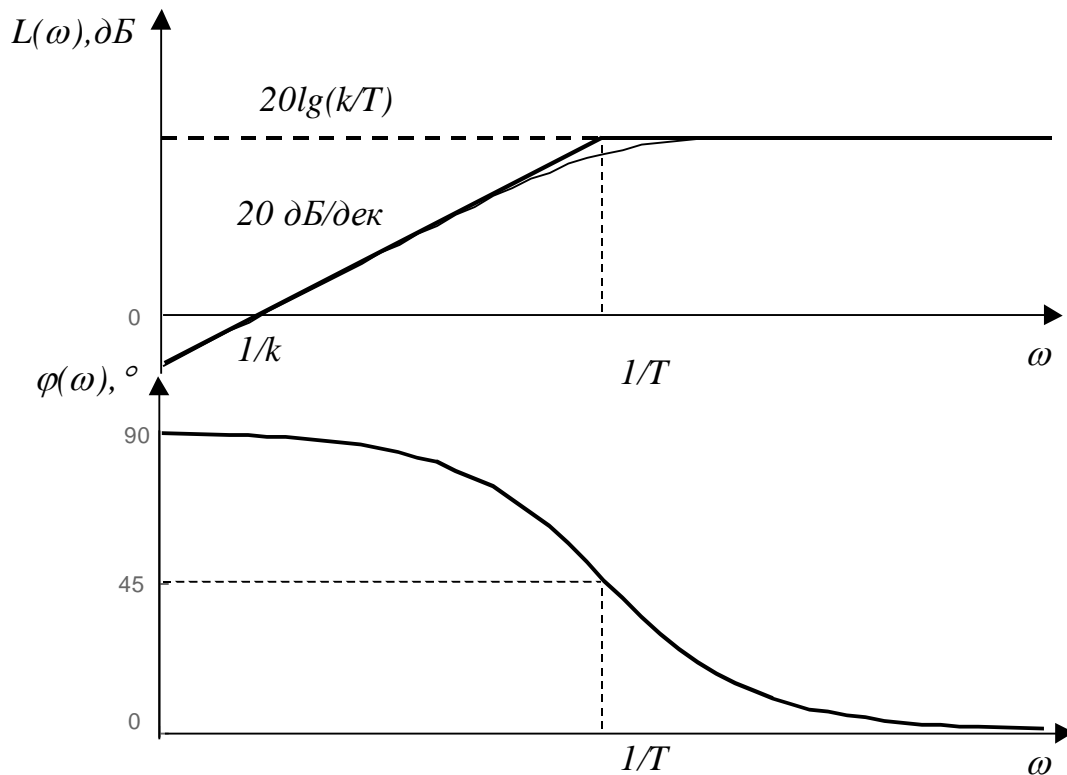


Рис. В.12. Логарифмические частотные характеристики реального дифференцирующего звена

### 9) Идеальное форсирующее звено

описывается дифференциальным уравнением

$$x_{\text{вых}} = k \left( T \frac{dx_{\text{вх}}}{dt} + 1 \right). \quad (\text{В.9})$$

Звено имеет передаточную функцию

$$W(p) = k(Tp + 1).$$

Поскольку звено физически нереализуемо, ее переходная характеристика не приводится.

Амплитудно-частотная характеристика:

$$A(\omega) = k \sqrt{T^2 \omega^2 + 1}.$$

Фазочастотная характеристика:

$$\varphi(\omega) = \text{arctg}(T\omega).$$

Логарифмическая амплитудно-частотная характеристика:

$$L(\omega) = 20 \lg A(\omega) = 20 \lg k + 20 \lg T\omega.$$

Эта характеристика имеет асимптоты:

- 1) при  $\omega \rightarrow 0$ ,  $L(\omega) \rightarrow 20 \lg k$  ;
- 2) при  $\omega \rightarrow \infty$ ,  $L(\omega) \rightarrow 20 \lg k + 20 \lg T\omega$ .

Первая асимптота – горизонтальная прямая, вторая – прямая с наклоном +20 дБ/дек (рис.В.13).

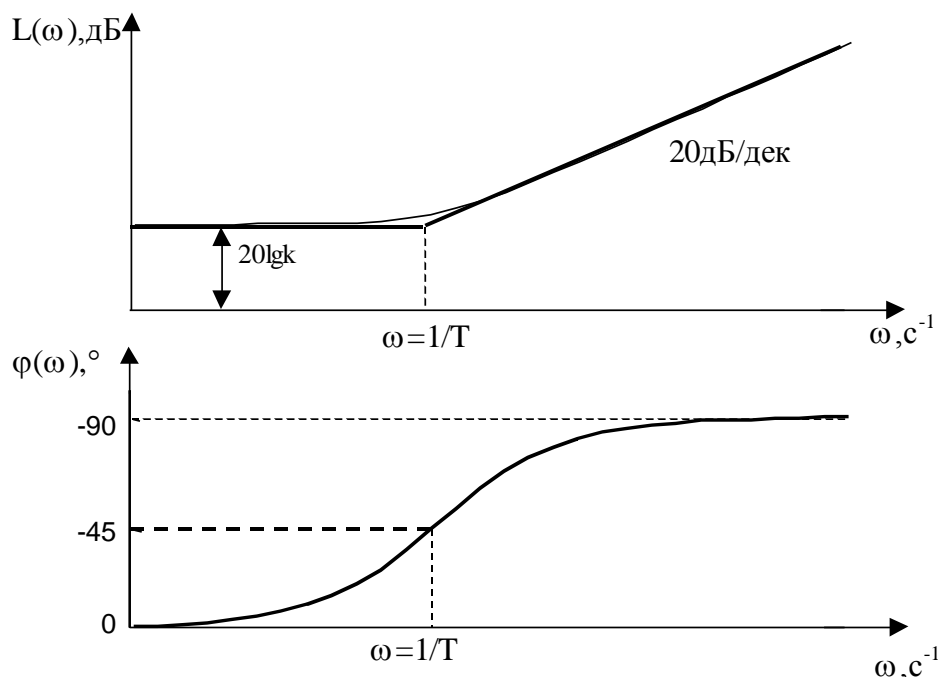


Рис. В.13. Логарифмические частотные характеристики форсирующего звена.

Пересекаются асимптоты в точке  $\omega=1/T$ . Наибольшее отличие ЛАЧХ от асимптот наблюдается на частоте  $\omega=1/T$  и составляет  $\Delta L \approx 3$ дБ.

### 10) Изодромное звено

описывается уравнением

$$T \frac{dx_{\text{вых}}}{dt} = k(T \frac{dx_{\text{вх}}}{dt} + x_{\text{вх}}). \quad (\text{В.10})$$

где  $T$  – постоянная времени звена  $\text{с}^{-1}$  (*постоянная изодрома*).

Передаточная функция звена имеет один нулевой полюс и один нуль  $z = -1/T$ :

$$W(p) = \frac{k(Tp + 1)}{Tp} = k \left( 1 + \frac{1}{Tp} \right).$$

Реакция звена на входной сигнал складывается из пропорциональной и интегральной составляющих.

Уравнение переходной характеристики звена:

$$h(t) = k \left( 1 + \frac{t}{T} \right).$$

График переходной характеристики приведен на рис. В.14.

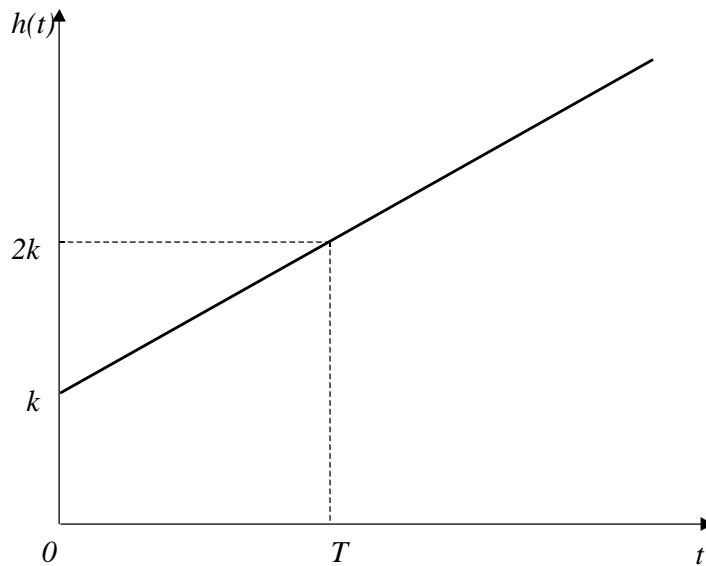


Рис. В.14. Переходная характеристика реального интегрирующего звена

Физический смысл постоянной времени изодрома: это время в течение которого интегральная составляющая выходного сигнала достигнет значения пропорциональной составляющей при нулевых начальных условиях и постоянном сигнале на входе звена.

Амплитудно-частотная характеристика изодромного звена есть произведение АЧХ идеального интегрирующего и форсирующего звеньев:

$$A(\omega) = \frac{k}{T\omega} \times \sqrt{T^2\omega^2 + 1} = \frac{k\sqrt{T^2\omega^2 + 1}}{T\omega}.$$

Фазочастотная характеристика есть сумма ФЧХ указанных звеньев:

$$\varphi(\omega) = -\frac{\pi}{2} + \operatorname{arctg}(T\omega).$$

Логарифмическая амплитудно-частотная характеристика определяется выражением:

$$L(\omega) = 20 \lg A(\omega) = 20 \lg(k/T) - 20 \lg \omega + 20 \lg \sqrt{T^2\omega^2 + 1}$$



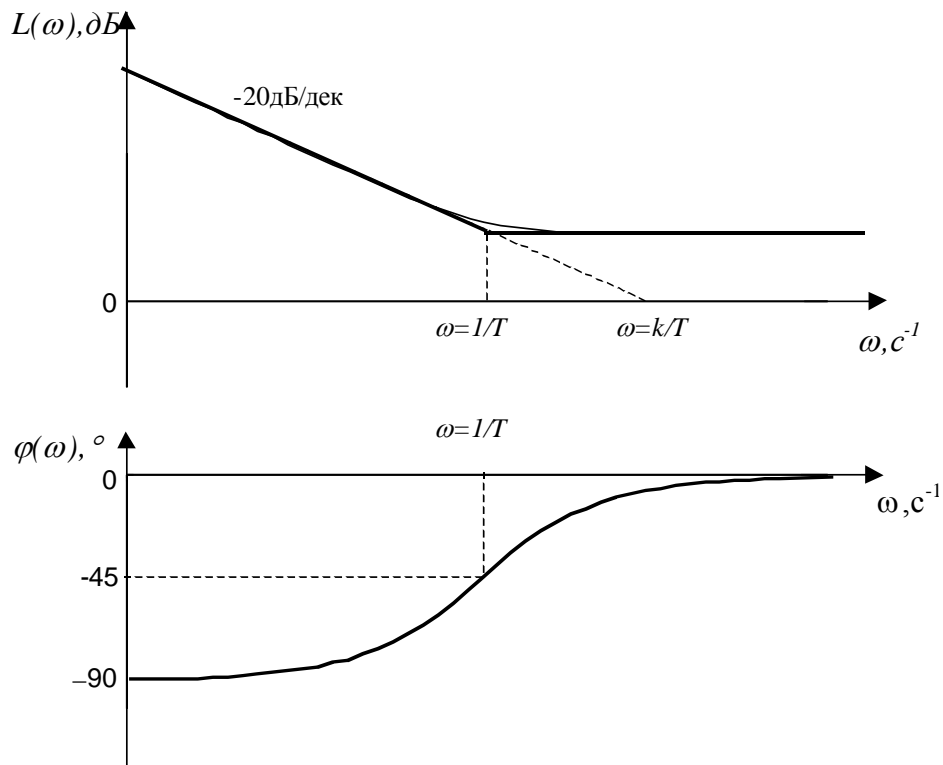


Рис. В.15. Логарифмические частотные характеристики изодромного звена

### 11) Интегро-дифференцирующее звено

описывается уравнением

$$T_1 \frac{dx_{\text{вых}}}{dt} + x_{\text{вых}} = k \left( T_2 \frac{dx_{\text{вх}}}{dt} + x_{\text{вх}} \right). \quad (\text{В.11})$$

Передаточная функция звена имеет один полюс  $z = -1/T_1$  и один нуль  $z = -1/T_2$ :

$$W(p) = \frac{k(T_2 p + 1)}{(T_1 p + 1)}.$$

Уравнение переходной характеристики звена:

$$h(t) = k \left( 1 - e^{-\frac{t}{T_1}} + \frac{T_2}{T_1} e^{-\frac{t}{T_1}} \right).$$

В зависимости от соотношения постоянных времени переходная характеристика может быть как возрастающей (рис. В.16), так и убывающей функцией.

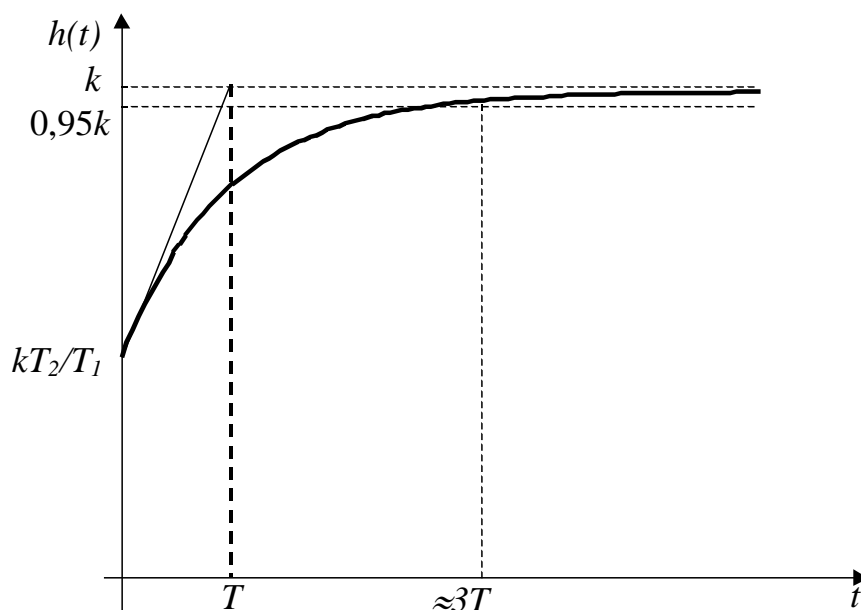


Рис. В.16. Переходная характеристика интегро-дифференцирующего звена (при  $T_1 > T_2$ )

Амплитудно-частотная характеристика интегро-дифференцирующего звена есть произведение АЧХ форсирующего и апериодического первого порядка звеньев:

$$A(\omega) = \sqrt{T_2^2 \omega^2 + 1} \times \frac{k}{\sqrt{T_1^2 \omega^2 + 1}} = k \sqrt{\frac{T_2^2 \omega^2 + 1}{T_1^2 \omega^2 + 1}}.$$

Фазочастотная характеристика есть сумма ФЧХ указанных звеньев:  
 $\varphi(\omega) = \text{arctg}(T_2 \omega) - \text{arctg}(T_1 \omega).$

Логарифмическая амплитудно-частотная характеристика определяется выражением:

$$L(\omega) = 20 \lg A(\omega) = 20 \lg k + 20 \lg \sqrt{T_2^2 \omega^2 + 1} - 20 \lg \sqrt{T_1^2 \omega^2 + 1}.$$

В зависимости от соотношения постоянных времени ЛАЧХ может быть как возрастающей (при  $T_1 < T_2$ ), так и убывающей (при  $T_1 > T_2$ ) функцией. ФЧХ может иметь как максимум (при  $T_1 < T_2$ ), так и минимум (при  $T_1 > T_2$ ). На рис. В.17. приведены логарифмические характеристики звена для случая, когда  $T_1 > T_2$ .

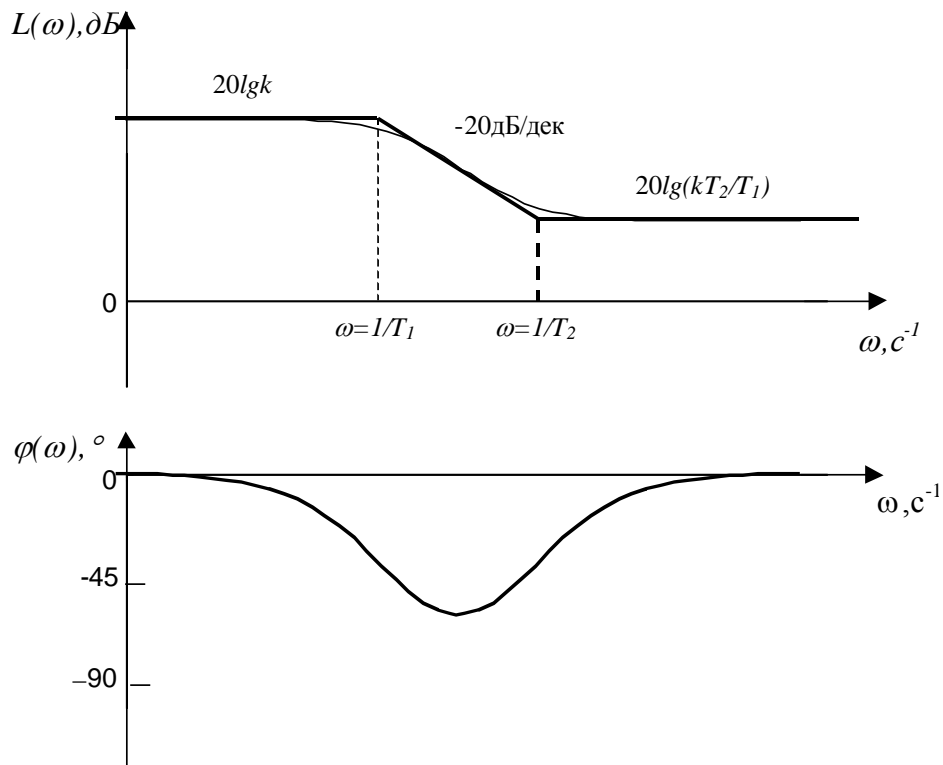


Рис. В.17. Логарифмические частотные характеристики интегрирующего звена (при  $T_1 > T_2$ )

## 12) Звено запаздывания

– это звено, у которого сигнал на выходе пропорционален сигналу на входе, но отстает от него на время  $\tau$ :

$$x_{\text{вых}} = kx_{\text{вх}}(t - \tau). \quad (\text{В.12})$$

Таким звеном, например, может быть описан транспортер, перемещающий сыпучий материал, если в качестве входной величины принять положение шибера (заслонки), регулирующего подачу этого материала, а в качестве выходной – сигнал электронных весов, расположенных на некотором расстоянии от зоны загрузки транспортера.

Согласно теореме операционного исчисления о запаздывании оригинала изображение по Лапласу правой части уравнения имеет вид:

$$x_{\text{вх}}(t - \tau) \Rightarrow x_{\text{вх}}(p)e^{-p\tau}.$$

Следовательно, передаточная функция звена:

$$W(p) = \frac{x_{\text{вых}}(p)}{x_{\text{вх}}(p)} = ke^{-p\tau}.$$

Переходная характеристика звена представляет собой ступенчатый сигнал величины  $k$ , «сдвинутый» от нулевого момента времени вправо на величину  $\tau$ .

$$h(t) = k \cdot 1(t - \tau).$$

Частотные характеристики звена можно получить с помощью преобразования:

$$W(j\omega) = k e^{-j\tau\omega} = k(\cos(\tau\omega) - j \sin(\tau\omega)).$$

Вещественная и мнимая частотные характеристики звена:

$$P(\omega) = k \cos(\tau\omega), \quad Q(\omega) = -k \sin(\tau\omega).$$

Амплитудно-частотная и фазочастотная характеристики:

$$A(\omega) = k, \quad \varphi(\omega) = -\tau\omega.$$

Таким образом, звено характеризуется отрицательным фазовым сдвигом, пропорциональным величине запаздывания  $\tau$  и частоте  $\omega$ .

Запаздывание часто появляется в математическом описании многих процессов в результате аппроксимации их динамических характеристик, полученных экспериментальным путем, передаточными функциями низких порядков. Например, динамические характеристики многих тепловых объектов приближенно получают обработкой так называемой *кривой разгона* – экспериментально снятой кривой реакции выходной величины на ступенчатое изменение входной (рис. В.18).

В простейшем случае объект описывают передаточной функцией первого порядка с запаздыванием:

$$W(p) = \frac{\Delta x_{\text{вых}}(p)}{\Delta x_{\text{вх}}(p)} = \frac{k}{Tp + 1} e^{-\tau p}.$$

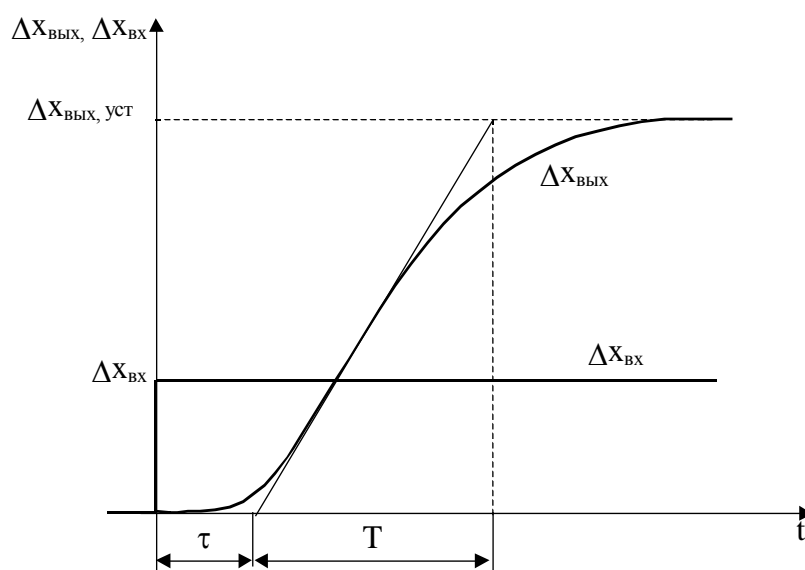


Рис. В.18. Использование запаздывания для аппроксимации разгонных характеристик

Временные параметры передаточной функции  $\tau$  и  $T$  определяют непосредственно по разгонной кривой (рис. В.18), а коэффициент передачи рассчитывают как

$$k = \frac{\Delta x_{\text{вых,уст}}}{\Delta x_{\text{вх}}}.$$

Классы пакета Control Matlab TF, SS, ZPK поддерживают запаздывание в составе динамических систем. Один из вариантов описание звена с запаздыванием приведен в следующем примере в следующем примере.

**Пример В.1.** Построить в Matlab годограф и переходную характеристику колебательного звена

$$W(p) = \frac{2600}{p^2 + 20p + 2600}$$

с запаздыванием на входе  $\tau = 0.05$ с.

ПФ звена с запаздыванием на входе записывается в виде:

$$W_k(p) = \frac{2600 e^{-0.05p}}{p^2 + 20p + 2600}.$$

Следующий фрагмент программы вводит звено с запаздыванием и строит его переходную характеристику:

```
Wk=tf(2600,[1 20 2600],'InputDelay',0.05)
figure(1)
step(H,Wk),grid
```

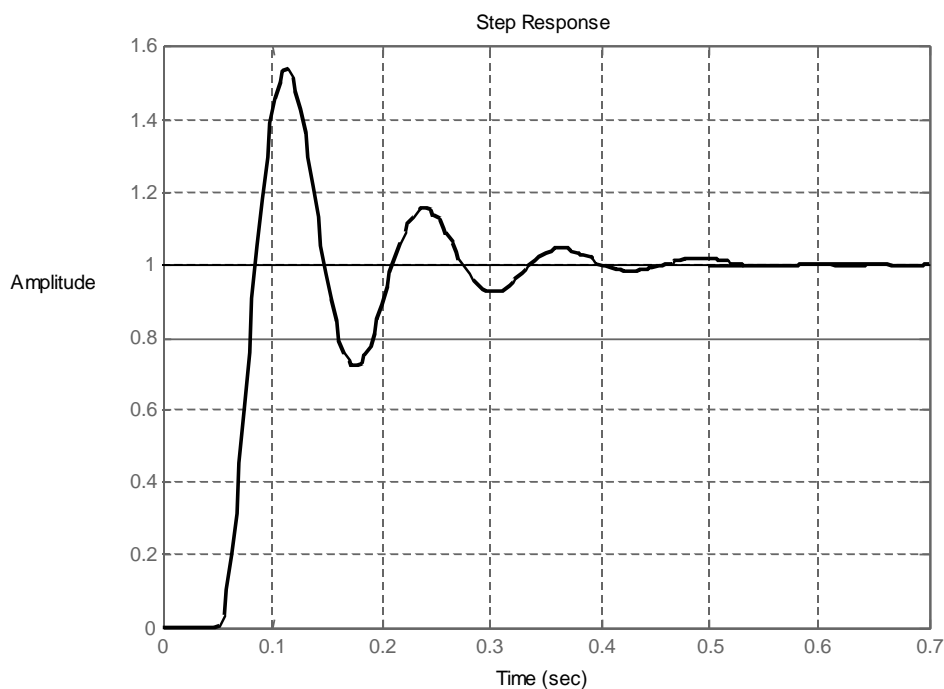


Рис. В.19. Переходная характеристика звена с запаздыванием

Иногда необходимо описать запаздывание дробно-рациональной передаточной функцией. Для этого следует воспользоваться аппроксимацией  $e^{-pT}$  с помощью функции `pade`:

$$e^{-pT} = 1 - pT + \frac{1}{2!}(pT)^2 + \dots \approx \frac{\text{num}(p)}{\text{den}(p)} .$$

В программе Matlab функция `pade` подсчитывает Pade аппроксимацию временного запаздывания в виде дробно-рациональной ПФ.

Вызов функции:

```
[num, den] = pade (T, N)
```

Векторы-строки **num** (числитель) и **den** (знаменатель) содержат коэффициенты числителя и знаменателя в порядке уменьшения степеней оператора  $p$ . Оба полинома имеют порядок, равный  $N$ . Временная задержка обозначена через  $T$ .

## БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. А.М. Александров и др. Линейные одномерные системы автоматического управления: Учебное пособие по курсу «Теория автоматического управления»/ А.М. Александров, С.И. Губаренко, И.В. Меркурьев – М.: Изд.-во МЭИ, 1998 – 86 с.
2. В.А. Бессекерский. Теория автоматического управления: Учебное пособие/ В.А. Бессекерский, Е.П. Попов. – СПб: Профессия, 2004 – 750 с.
3. А.А. Ерофеев. Теория автоматического управления: Учеб. Рек. Мин. образ. РФ/ А.А. Ерофеев – 2 изд., доп. и перераб. – СПб: Политехника, 2003 – 303 с.
4. Теория автоматического управления: Учебник. Рек. Мин. образ. РФ/ В.И. Брюханов, М.Г. Косов, С.П. Протопопов и др.: Ред. Ю.М. Соломенцев. – 4 изд., стер. М.: Высшая школа, 2003 – 270 с.
5. А.Н. Рыбалев. Теория автоматического управления: Пособие к курсовому проектированию. Учебное пособие. Благовещенск, Амурский гос. ун-т, 2004, 145 с.
6. Е.Л. Еремин. Динамические модели и S-моделирование систем. Моногр. АмГУ. Фак. мат. и информ. Благовещенск: Изд-во Амур. гос. ун-та, 2003, 338 с.,
7. Е.Л. Еремин. Моделирование динамических систем (практикум на языке MATLAB): Учеб. пособие. АмГУ. Фак. мат. и информ. Благовещенск: Изд-во Амур. гос. ун-та, 2004, 152 с. – для углубленного изучения вопросов моделирования динамических систем.
8. Методы классической и современной теории автоматического управления: в 3 т.: Учебник. Рек. Минобразования РФ/ Ред. Н.Д. Егупов. М.: Изд-во Моск. гос. техн. ун-та, 2000 – для углубленного изучения некоторых направлений теории автоматического управления.
9. Бугров Я.С., Никольский С.М. Высшая математика. Дифференциальные уравнения. Кратные интегралы. Ряды. Функции комплексного переменного: Учебник для вузов. 4-е изд. Ростов н/Д: изд-во Феникс, 1998. 512 с.

Андрей Николаевич Рыбалев,  
*заведующий кафедрой АПП и Э АмГУ;*

Валентин Иванович Усенко,  
*доцент кафедры АПП и Э АмГУ;*

Владислав Леонидович Русинов,  
*ассистент кафедры АПП и Э АмГУ.*

**Теория автоматического управления. Часть 1. Учебное пособие.**

---

Изд-во АмГУ. Подписано к печати 15.02.11. Формат 60x84/16. Усл. печ. 11,62.  
Тираж 100. Заказ 186.