

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования
«Амурский государственный университет»

Факультет математики и информатики

Кафедра математического анализа и моделирования

Е.М. Веселова

**ИНДИВИДУАЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ
ПО ТЕМЕ «ПРЕДЕЛЫ И НЕПРЕРЫВНОСТЬ ФУНКЦИЙ»**

Благовещенск
Издательство АмГУ
2020

ББК

В20

*Рекомендовано
учебно-методическим советом университета*

Рецензент:

Двоерядкина Н.Н., доц. каф. общей математики и информатики АмГУ, канд.пед.наук., доц.

сост. Веселова, Е.М.

В20 Индивидуальные задания по теме «Пределы и непрерывность функций»: учебно-методическое пособие / сост. Е.М. Веселова. – Благовещенск: Изд-во АмГУ, 2020. – 41 с.

В учебно-методическом пособии представлены варианты заданий для индивидуальных домашних работ по теме «Пределы и непрерывность функций», изучаемой в рамках раздела «Функции одной вещественной переменной» по дисциплине «Математический анализ». Даны методические указания по выполнению индивидуальных заданий и приведены подробные решения задач типового варианта.

Учебное пособие составлено в соответствии с рабочей программой дисциплины «Математический анализ», предназначено для студентов, обучающихся по специальности 24.05.01 «Проектирование, производство и эксплуатация ракет и ракетно-космических комплексов», по направлению подготовки 24.03.01 «Ракетные комплексы и космонавтика», 03.03.02 «Физика», а также может быть использовано студентами других направлений, занимающихся решением задач вычисления пределов функций одной вещественной переменной.

ББК

ВВЕДЕНИЕ

Учебно-методическое пособие представляет собой комплекс индивидуальных домашних заданий по теме «Пределы и непрерывность функций» по дисциплине «Математический анализ». Варианты разделены на задания по отдельным типам примеров, в соответствии с различными видами встречающихся неопределенностей при вычислении пределов и методами их раскрытия.

Важным фактором успешного усвоения материала является самостоятельная работа студента, которая заключается в выполнении индивидуальных домашних заданий. Варианты индивидуальных работ направлены на закрепление теоретического материала и основной задачей их выполнения является получение практических навыков, необходимых при вычислении пределов, освоение различных приемов раскрытия неопределенностей, а также исследование функций одного вещественного переменного на непрерывность.

1 ОБЩИЕ МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

Для успешного освоения раздела «Функции одной вещественной переменной» требуются систематическая работа по изучению теоретического материала и рекомендуемой литературы, решению домашних задач и индивидуальных домашних заданий. Показателем освоения материала служит успешное решение задач предлагаемого индивидуального задания.

Основное внимание при изучении курса обращено на активную самостоятельную работу студентов, как при подготовке, так и в процессе проведения теоретических и практических занятий. Одна из важнейших целей и задач методической модели учебного процесса – развитие у студентов системного мышления.

Перед началом выполнения индивидуального задания необходимо освоить теоретические основы соответствующего раздела. Для лучшего усвоения теории материал разделен на отдельные темы, в которых излагаются различные методы избавления от неопределенностей, встречающихся при вычислении пределов функций одной вещественной переменной. В каждом разделе приведены подробные решения практических примеров, тщательный разбор которых поможет студенту выполнить подобные задания из индивидуального варианта.

После проработки теоретического материала, рассмотрения решенных примеров, студент должен выполнить вариант индивидуального домашнего задания, номер которого указан ведущим преподавателем.

2 ВАРИАНТЫ ИНДИВИДУАЛЬНЫХ ДОМАШНИХ ЗАДАНИЙ

Вариант 1

Задание 1: Вычислить предел функции, раскрыв неопределенность типа $\left[\frac{\infty}{\infty} \right]$.

а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - 2x - x^3}{3x - 2x^2 + x^4}$ б) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^6 + 3x^2 + 5}}{3x^2 + 2x - 11}$ в) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(3 + \frac{3}{\sqrt{1-x}} - \frac{5}{x^3} \right)$

Задание 2: Вычислить предел функции, раскрыв неопределенность типа $\left[\frac{0}{0} \right]$.

а) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^3 - 2x^2}{5x^3 - 4x^2}$ б) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + 3x^2} - 1}{x^2 + x^3}$ в) $\lim_{x \rightarrow 7} \frac{14 - 2x}{7 - \sqrt{42 + x}}$

Задание 3: Вычислить предел функции, используя первый замечательный предел и его следствия.

а) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{3x}$ б) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 6x}{1 - \cos 2x}$ в) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 11x + \sin 4x}{8x}$

Задание 4: Вычислить предел функции, используя второй замечательный предел.

а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+3}{x-2} \right)^x$ б) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x^2+1}{x^2-3} \right)^{x^3-5}$ в) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{9x+2}{9x-4} \right)^{-6,5x}$

Задание 5: Исследовать функцию на непрерывность и построить схематически её график.

а) $f(x) = 3^{\frac{1}{2-x}}$ б) $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x+2}; & -2 \leq x \leq 2 \\ 4-x; & 2 < x < 4 \\ x-3; & 4 \leq x \leq 6 \end{cases}$

Вариант 2

Задание 1: Вычислить предел функции, раскрыв неопределенность типа $\left[\frac{\infty}{\infty} \right]$.

a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 + 6x - 5}{5x^2 - x - 1}$

б) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x^3 - \sqrt{x^5 + 1}}{\sqrt{4x^6 + x} - 3}$

в) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(2x - 1)^3}{-2x^3 + 3x - 1}$

Задание 2: Вычислить предел функции, раскрыв неопределенность типа $\left[\frac{0}{0} \right]$.

a) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x^2 - 8x + 4}{5x^2 - 14x + 8}$

б) $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{1 + 3x} - \sqrt{2x + 6}}{x^2 - 5x}$

в) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{5 - x} - 2}{x - 1}$

Задание 3: Вычислить предел функции, используя первый замечательный предел и его следствия.

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^3 2x}{x^3}$

б) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + \sin x - \cos x}{1 - \sin x - \cos x}$

в) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 3x}{\frac{x}{2}}$

Задание 4: Вычислить предел функции, используя второй замечательный предел.

a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x - 1}{2x + 1} \right)^{5x}$

б) $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \operatorname{tg}^2 \sqrt{x})^{\frac{1}{2x}}$

в) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x + 2}{x - 4} \right)^{3x}$

Задание 5: Исследовать функцию на непрерывность и построить схематически её график.

a) $f(x) = (x + 2) \operatorname{arctg} \frac{1}{x - 1}$

б) $f(x) = \begin{cases} \log_2 x; & 1 \leq x < 3 \\ (x - 4)^2; & 3 \leq x \leq 5 \\ 6 - x; & x > 5 \end{cases}$

Вариант 3

Задание 1: Вычислить предел функции, раскрыв неопределенность типа $\left[\frac{\infty}{\infty} \right]$.

а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4 + x}{x^3 - 3x^2 + 1}$

б) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{x}}{\sqrt[4]{x^3 + x} + \sqrt{x^2}}$

в) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(2x^2 - 1)(3x^2 + 1)}{-2x^4 + x^2 - 1}$

Задание 2: Вычислить предел функции, раскрыв неопределенность типа $\left[\frac{0}{0} \right]$.

а) $\lim_{x \rightarrow -5} \frac{x^2 + 2x - 15}{2x^2 + 7x - 15}$

б) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{6x + 1} - 5}{\sqrt{x} - 2}$

в) $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{9 - x^2}{9x + 27}$

Задание 3: Вычислить предел функции, используя первый замечательный предел и его следствия.

а) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x \cdot \cos x}{x}$

б) $\lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{\operatorname{ctg} x}{x - \pi/2}$

в) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 0,5x}{2x}$

Задание 4: Вычислить предел функции, используя второй замечательный предел.

а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{4x + 1}{4x} \right)^{\frac{2x^2}{x+1}}$

б) $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + 2x)^{1/x}$

в) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x + 3}{x - 5} \right)^{-\frac{x}{2}}$

Задание 5: Исследовать функцию на непрерывность и построить схематически её график.

а) $f(x) = 4^{\frac{1}{2-x}} + 3$

б) $f(x) = \begin{cases} 2; & x < -1 \\ |x - 1|; & -1 \leq x < 2 \\ \frac{2 - 3x}{x}; & x \geq 2 \end{cases}$

Вариант 4

Задание 1: Вычислить предел функции, раскрыв неопределенность типа $\left[\frac{\infty}{\infty} \right]$.

а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x+5}{3x^2+2x+4}$

б) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{x^2+1}+x)^2}{\sqrt[3]{x^5+1}}$

в) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(-3x^2+2)(4x^2+1)}{-2x^4+5x^2-1}$

Задание 2: Вычислить предел функции, раскрыв неопределенность типа $\left[\frac{0}{0} \right]$.

а) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x^2-5x-7}{3x^2+x-2}$

б) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{\sqrt{2x}-2}$

в) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+2}{8-2x^2}$

Задание 3: Вычислить предел функции, используя первый замечательный предел и его следствия.

а) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x^2}$

б) $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin^2 x}{1 + \cos x}$

в) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} 5x}{\sin 8x}$

Задание 4: Вычислить предел функции, используя второй замечательный предел.

а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2+1}{x^2-3} \right)^{x^3-5}$

б) $\lim_{x \rightarrow 0} (1+2x^2)^{\frac{\sin x}{x^2}}$

в) $\lim_{x \rightarrow 0} (1+\operatorname{tg} x)^{\frac{\operatorname{ctg} x}{4}}$

Задание 5: Исследовать функцию на непрерывность и построить схематически её график.

а) $f(x) = e^{\frac{1}{x+3}}$

б) $f(x) = \begin{cases} 3; & x \leq -2 \\ x^2 + 1; & -2 < x < 2 \\ \frac{5}{x-1}; & x \geq 2 \end{cases}$

Вариант 5

Задание 1: Вычислить предел функции, раскрыв неопределенность типа $\left[\frac{\infty}{\infty} \right]$.

а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^4 + x^2 - 6}{2x^4 - x + 2}$

б) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^3 + 1} + \sqrt[3]{x}}{\sqrt[4]{x^5 + x} + 3x}$

в) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x^2 + 2)(2x^2 + 1)}{2x^6 + x^3 - 2}$

Задание 2: Вычислить предел функции, раскрыв неопределенность типа $\left[\frac{0}{0} \right]$.

а) $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{2x^2 + 5x - 3}{3x^2 + 11x + 6}$

б) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{2x-1} - \sqrt{5}}{x-3}$

в) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{8 - 2\sqrt{20-x}}{3x-12}$

Задание 3: Вычислить предел функции, используя первый замечательный предел и его следствия.

а) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^3 x}{x^2}$

б) $\lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{\cos x}{\pi/2 - x}$

в) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{4tgx}{5x}$

Задание 4: Вычислить предел функции, используя второй замечательный предел.

а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x^2} \right)^{\frac{5x^3}{2x+1}}$

б) $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\operatorname{ctg}^2 x}$

в) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+3}{2x-5} \right)^{0,5x}$

Задание 5: Исследовать функцию на непрерывность и построить схематически её график.

а) $f(x) = \frac{x+4}{x-5}$

б) $f(x) = \begin{cases} \frac{2x+1}{x}; & x < -1 \\ 2-x^2; & -1 \leq x < 2 \\ -3; & x \geq 2 \end{cases}$

Вариант 6

Задание 1: Вычислить предел функции, раскрыв неопределенность типа $\left[\frac{\infty}{\infty} \right]$.

а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - 5x + 1}{2x^3 + 3x^2}$

б) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{x^3 + 2x - 1}}{x + 2}$

в) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(7x^3 + 2)(2x^2 + 5)}{x^6 + 3x^3 - 4}$

Задание 2: Вычислить предел функции, раскрыв неопределенность типа $\left[\frac{0}{0} \right]$.

а) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{5x - x^2 - 4}{x^2 - 2x - 8}$

б) $\lim_{x \rightarrow 7} \frac{\sqrt{2+x} - 3}{x - 7}$

в) $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{10 - 2\sqrt{35-x}}{3x - 15}$

Задание 3: Вычислить предел функции, используя первый замечательный предел и его следствия.

а) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{5x^2}$

б) $\lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{1 - \sqrt{1 + \operatorname{ctg} x}}{\operatorname{ctg} x}$

в) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1,5 \sin x}{2x}$

Задание 4: Вычислить предел функции, используя второй замечательный предел.

а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x - 3}{2x - 1} \right)^{\frac{4x^2 + 1}{x - 1}}$

б) $\lim_{x \rightarrow 3} (3x - 8)^{\frac{2}{x - 3}}$

в) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x + 1}{3x - 4} \right)^{-2x}$

Задание 5: Исследовать функцию на непрерывность и построить схематически её график.

а) $f(x) = 5^{\frac{1}{x-2}}$

б) $f(x) = \begin{cases} -\frac{2}{x}; & x < -2 \\ \sqrt{x+3}; & -2 \leq x \leq 6 \\ -1; & x > 6 \end{cases}$

Вариант 7

Задание 1: Вычислить предел функции, раскрыв неопределенность типа $\left[\frac{\infty}{\infty} \right]$.

а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x - 2x^2 + 5x^4}{2 + 3x^2 + x^4}$ б) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2 + 3x + 1} + x}{2x + 3}$ в) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(-5x + 2)x(6x^2 + 1)}{3x^8 + x^4 - 5}$

Задание 2: Вычислить предел функции, раскрыв неопределенность типа $\left[\frac{0}{0} \right]$.

а) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x^2 - 5x - 2}{2x^2 - x - 6}$ б) $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{1 + 3x} - \sqrt{2x + 6}}{x^2 - 5x}$ в) $\lim_{x \rightarrow 9} \frac{27 - 3\sqrt{90 - x}}{7x - 63}$

Задание 3: Вычислить предел функции, используя первый замечательный предел и его следствия.

а) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 3x}{5x}$ б) $\lim_{x \rightarrow \pi/6} \frac{\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right)}{\frac{\sqrt{3}}{2} - \cos x}$ в) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-0,5x}{\sin x}$

Задание 4: Вычислить предел функции, используя второй замечательный предел.

а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3}{x}\right)^{\frac{3x^3}{x^2 + 1}}$ б) $\lim_{x \rightarrow 2} (3x - 5)^{\frac{2x}{x^2 - 4}}$ в) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x + 8}{3x - 4}\right)^{-2x}$

Задание 5: Исследовать функцию на непрерывность и построить схематически её график.

а) $f(x) = \arctg \frac{3}{x - 6}$ б) $f(x) = \begin{cases} 3^x; & -1 \leq x < 1 \\ 5 - 3x; & 1 \leq x < 3 \\ 4; & x = 3 \end{cases}$

Вариант 8

Задание 1: Вычислить предел функции, раскрыв неопределенность типа $\left[\frac{\infty}{\infty} \right]$.

а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^5 + x^6}{x^3 + x^4 + x^5}$

б) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{x^2 + x}}{x + 1}$

в) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x + 2)^3 x(6x + 1)}{x^6 - x^3 - 12}$

Задание 2: Вычислить предел функции, раскрыв неопределенность типа $\left[\frac{0}{0} \right]$.

а) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - x - 6}{2x^2 + x - 21}$

б) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + 1} - 1}{\sqrt{x^2 + 16} - 4}$

в) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{18 - 9\sqrt{1 - x}}{5x + 15}$

Задание 3: Вычислить предел функции, используя первый замечательный предел и его следствия.

а) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \operatorname{tg} x}{x}$

б) $\lim_{x \rightarrow \pi/4} \frac{\cos x - \sin x}{\cos 2x}$

в) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}(-3x)}{2,5x}$

Задание 4: Вычислить предел функции, используя второй замечательный предел.

а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 - 4x + 2} \right)^x$

б) $\lim_{x \rightarrow 1} (7 - 6x)^{\frac{x}{3x-3}}$

в) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{4x + 6}{4x - 1} \right)^{-6x}$

Задание 5: Исследовать функцию на непрерывность и построить схематически её график.

а) $f(x) = \operatorname{arctg} \frac{1}{x + 3}$

б) $f(x) = \begin{cases} \frac{3}{x}; & x < 0 \\ \frac{2x + 10}{3x + 1}; & 0 \leq x < 2 \\ 3; & x \geq 2 \end{cases}$

Вариант 9

Задание 1: Вычислить предел функции, раскрыв неопределенность типа $\left[\frac{\infty}{\infty} \right]$.

а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4 - 2x^3 + 3}{3x^3 - 5}$

б) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{x} - 6x^2}{2x - \sqrt[4]{8x^8 + 1}}$

в) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x^3 + 2)(x^2 - 16)}{2x^6 - x^3 - 1}$

Задание 2: Вычислить предел функции, раскрыв неопределенность типа $\left[\frac{0}{0} \right]$.

а) $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{2x^2 + x - 15}{3x^2 + 7x - 6}$

б) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+x^2} - 1}{x^2}$

в) $\lim_{x \rightarrow 9} \frac{14 - 2\sqrt{40+x}}{-3x + 27}$

Задание 3: Вычислить предел функции, используя первый замечательный предел и его следствия.

а) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 \frac{x}{4}}{x^2}$

б) $\lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{\cos x + \operatorname{tg}(\pi - x)}{2x \cdot \left(\frac{\pi}{2} - x \right)}$

в) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2x}{\sin 0,5x}$

Задание 4: Вычислить предел функции, используя второй замечательный предел.

а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x+2}{3x-1} \right)^{2x+3}$

б) $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \operatorname{tg} x)^{\operatorname{ctg} x}$

в) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{4x+11}{4x-9} \right)^{4x}$

Задание 5: Исследовать функцию на непрерывность и построить схематически её график.

а) $f(x) = 3^{\frac{2}{x-1}}$

б) $f(x) = \begin{cases} 2x^3; & x \leq 1 \\ 2(x-2)^2; & 1 < x \leq 3 \\ 7-2x; & x > 3 \end{cases}$

Вариант 10

Задание 1: Вычислить предел функции, раскрыв неопределенность типа $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$.

а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(2x+5)^3}{-x^3+3x-2}$

б) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{x-6}+2}{x^3+8}$

в) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(2x^3+4x+5)(x^2+x+1)}{(x+2)(x^4+x-1)}$

Задание 2: Вычислить предел функции, раскрыв неопределенность типа $\left[\frac{0}{0}\right]$.

а) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-2x+1}{x^3-x}$

б) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}}{x}$

в) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{3+x}-2}{-x+1}$

Задание 3: Вычислить предел функции, используя первый замечательный предел и его следствия.

а) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\cos 3x}{x \cdot \operatorname{tg} 2x}$

б) $\lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{1-\sin x}{\left(\frac{\pi}{2}-x\right)^2}$

в) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 0,4x}{2\operatorname{tg} x}$

Задание 4: Вычислить предел функции, используя второй замечательный предел.

а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+7}{x-4}\right)^{-9x}$

б) $\lim_{x \rightarrow \pi/2} (\sin x)^{\operatorname{tg}^2 x}$

в) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2-2x+3}{x^2-2x+5}\right)^{x^2+1}$

Задание 5: Исследовать функцию на непрерывность и построить схематически её график.

а) $f(x) = 2^{\frac{3}{x+1}} - 1$

б) $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x; & -1 \leq x < 2 \\ \sqrt{x}; & 2 \leq x \leq 4 \end{cases}$

Вариант 11

Задание 1: Вычислить предел функции, раскрыв неопределенность типа $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$.

а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^2 - 3x + 1}{3x^2 + x - 5}$

б) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^4 - 2}{\sqrt{x^8 + 3x + 4}}$

в) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(2x^2 - 1)(-5x^2 + 1)}{4x^4 + x^2 - 1}$

Задание 2: Вычислить предел функции, раскрыв неопределенность типа $\left[\frac{0}{0}\right]$.

а) $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{8x^3 - 1}{6x^2 - 5x + 1}$

б) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - \sqrt[3]{x}}{1 - \sqrt{x}}$

в) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{8 - x} - 3}{1 + x}$

Задание 3: Вычислить предел функции, используя первый замечательный предел и его следствия.

а) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos^3 x}{x^2}$

б) $\lim_{x \rightarrow -\pi/2} \frac{\cos^2 x}{1 + \sin^3 x}$

в) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 0,5x}{4x}$

Задание 4: Вычислить предел функции, используя второй замечательный предел.

а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + 4}{x^2 + 1} \right)^{2x}$

б) $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\operatorname{ctg} 2x}$

в) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x + 3}{2x - 5} \right)^{\frac{5x}{2}}$

Задание 5: Исследовать функцию на непрерывность и построить схематически её график.

а) $f(x) = \frac{3x}{x - 2}$

б) $f(x) = \begin{cases} -\frac{5}{x}; & x \leq -1 \\ -6x; & -1 < x \leq 0 \\ 0; & x > 0 \end{cases}$

Вариант 12

Задание 1: Вычислить предел функции, раскрыв неопределенность типа $\left[\frac{\infty}{\infty} \right]$.

a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{8x^5 - 3x^2 + 9}{2x^5 + 2x^2 + 5}$ б) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^5 + 1} + \sqrt{x^3}}{\sqrt[5]{x^3 + 7} + 9}$ в) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(-8x^3 + 2)(-3x^3 + 1)}{-2x^6 + 5x^3 + 7}$

Задание 2: Вычислить предел функции, раскрыв неопределенность типа $\left[\frac{0}{0} \right]$.

a) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + x - 2}{x^3 - x^2 - x + 1}$ б) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x}{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}$ в) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{12 - 2\sqrt{40-x}}{-3x + 12}$

Задание 3: Вычислить предел функции, используя первый замечательный предел и его следствия.

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos 3x}{x}$ б) $\lim_{x \rightarrow \pi/4} \frac{\sin x - \cos x}{\operatorname{tg} x - 1}$ в) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{9 \operatorname{tg} x}{2,25x}$

Задание 4: Вычислить предел функции, используя второй замечательный предел.

a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x}{2x+1} \right)^{\frac{x^2}{x+1}}$ б) $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \sin 2x)^{\frac{1}{\arcsin 3x}}$ в) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x-7}{2x+4} \right)^{-0,5x}$

Задание 5: Исследовать функцию на непрерывность и построить схематически её график.

a) $f(x) = \operatorname{arctg} \frac{1}{3-x}$ б) $f(x) = \begin{cases} \sin x, & 0 \leq x < \pi/2 \\ 1; & x = \pi/2 \\ \cos x; & \pi/2 < x \leq 3\pi/2 \end{cases}$

Вариант 13

Задание 1: Вычислить предел функции, раскрыв неопределенность типа $\left[\frac{\infty}{\infty} \right]$.

a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4 - x^3 + 1}{x^3 + 2x^2 + x}$ б) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^2 + 8x + 7}{\sqrt{x^4 + x^8}}$ в) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(7x^3 + 2)(2x^2 + 5)}{x^6 + 3x^3 - 4}$

Задание 2: Вычислить предел функции, раскрыв неопределенность типа $\left[\frac{0}{0} \right]$.

a) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 - x}{x^4 + 2x^2 - 3}$ б) $\lim_{x \rightarrow 6} \frac{x - 6}{\sqrt{x + 3} - 3}$ в) $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{10 - 2\sqrt{35 - x}}{3x - 15}$

Задание 3: Вычислить предел функции, используя первый замечательный предел и его следствия.

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x + \sin x}{x}$ б) $\lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{\cos x}{\pi - 2x}$ в) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} 4x}{\sin 8x}$

Задание 4: Вычислить предел функции, используя второй замечательный предел.

a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x - 1}{3x + 2} \right)^{x+1}$ б) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\arcsin x}{x} \right)^{\frac{1}{x}}$ в) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + 3\operatorname{tg} x \right)^{\frac{\operatorname{ctg} x}{4}}$

Задание 5: Исследовать функцию на непрерывность и построить схематически её график.

a) $f(x) = \frac{x^2 - 16}{x^2 + x - 12}$ б) $f(x) = \begin{cases} x + 2; & x < -1 \\ x^2; & -1 \leq x < 2 \\ 5 - x; & x \geq 2 \end{cases}$

Вариант 14

Задание 1: Вычислить предел функции, раскрыв неопределенность типа $\left[\frac{\infty}{\infty} \right]$.

a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 2x - 35}{-x^2 + 15x - 56}$ б) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{3x^7 + 4} + \sqrt{x}}{\sqrt[5]{x^3 + 3x} + 18x}$ в) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(3x+1)(6x^2 + 5x + 1)}{(2x+5)(3x-4)(x+2)}$

Задание 2: Вычислить предел функции, раскрыв неопределенность типа $\left[\frac{0}{0} \right]$.

a) $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 7x + 10}{x^2 - 9x + 20}$ б) $\lim_{x \rightarrow 9} \frac{3 - \sqrt{x}}{4 - \sqrt{2x - 2}}$ в) $\lim_{x \rightarrow 9} \frac{18 - 2x}{11 - \sqrt{112 + x}}$

Задание 3: Вычислить предел функции, используя первый замечательный предел и его следствия.

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^3 x}{4x^2}$ б) $\lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{\cos x}{\sqrt[3]{(1 - \sin x)^2}}$ в) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \sin 13x}{-3x}$

Задание 4: Вычислить предел функции, используя второй замечательный предел.

a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-7}{x-8} \right)^{\frac{2x+4}{3}}$ б) $\lim_{x \rightarrow \pi/4} (\sin 2x)^{\operatorname{tg}^2 2x}$ в) $\lim_{x \rightarrow \infty} (3x+2)[\ln(x+2) - \ln(x+3)]$

Задание 5: Исследовать функцию на непрерывность и построить схематически её график.

a) $f(x) = \frac{1}{1 + 5^{\frac{1}{2-x}}}$ б) $f(x) = \begin{cases} |x|; & -2 \leq x \leq 2 \\ \sqrt{x-1}; & 2 < x < 5 \\ 2; & x = 5 \end{cases}$

Вариант 15

Задание 1: Вычислить предел функции, раскрыв неопределенность типа $\left[\frac{\infty}{\infty} \right]$.

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3 + x + 5x^4}{x^4 - 12x + 1} \quad \text{б) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{3x^2 + x^7} + \sqrt{4x}}{\sqrt[4]{x^5 + 7} + 5x} \quad \text{в) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(-7x^2 + 2)(-2x^4 + 1)}{2x^6 + x^3 - 2}$$

Задание 2: Вычислить предел функции, раскрыв неопределенность типа $\left[\frac{0}{0} \right]$.

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow -2/3} \frac{3x^2 + 5x + 2}{3x^2 + 8x + 4} \quad \text{б) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{\sqrt{x} - 1} \quad \text{в) } \lim_{x \rightarrow 9} \frac{27 - 3\sqrt{90 - x}}{7x - 63}$$

Задание 3: Вычислить предел функции, используя первый замечательный предел и его следствия.

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 3x}{2x} \quad \text{б) } \lim_{x \rightarrow \pi/4} \frac{\sin x - \cos x}{\pi - 4x} \quad \text{в) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-0,5x}{\sin x}$$

Задание 4: Вычислить предел функции, используя второй замечательный предел.

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x + 8}{3x - 4} \right)^{-2x} \quad \text{б) } \lim_{x \rightarrow 1} (3 - 2x)^{\operatorname{tg} \frac{\pi x}{2}} \quad \text{в) } \lim_{x \rightarrow +\infty} (2x + 1)[\ln(x + 3) - \ln x]$$

Задание 5: Исследовать функцию на непрерывность и построить схематически её график.

$$\text{a) } f(x) = \frac{x - 3}{x + 3} \quad \text{б) } f(x) = \begin{cases} x^2; & -2 \leq x < 1 \\ \sqrt{x - 1}; & 1 \leq x < 5 \\ 7 - x; & 5 \leq x < 7 \end{cases}$$

Вариант 16

Задание 1: Вычислить предел функции, раскрыв неопределенность типа $\left[\frac{\infty}{\infty} \right]$.

a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + 2x^2 + 3x + 4}{x^7 - x^2 + x - 1}$ б) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{7x^2 + 2} + \sqrt{x^9}}{\sqrt[4]{x^8 + x} - x}$ в) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 5x - 24}{-x^2 + 13x - 40}$

Задание 2: Вычислить предел функции, раскрыв неопределенность типа $\left[\frac{0}{0} \right]$.

a) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 - x}{x^4 + 2x^2 - 3}$ б) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{3x}$ в) $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 + 5x + 6}{x^2 - 2x - 15}$

Задание 3: Вычислить предел функции, используя первый замечательный предел и его следствия.

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{x^2}$ б) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x \cdot \cos x}{\operatorname{arctg} 4x}$ в) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 3x - \cos x}{x^2}$

Задание 4: Вычислить предел функции, используя второй замечательный предел.

a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+6}{x-4} \right)^{\frac{2x}{5}}$ б) $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \sin x)^{\frac{1}{\sin x}}$ в) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x-5)[\ln(x-3) - \ln x]$

Задание 5:

Исследовать функцию на непрерывность и построить схематически её график.

a) $f(x) = \frac{x-2}{x-1}$ б) $f(x) = \begin{cases} 1-x; & x \leq 1 \\ \frac{1}{1-x}, & x > 1 \end{cases}$

Вариант 17

Задание 1: Вычислить предел функции, раскрыв неопределенность типа $\left[\frac{\infty}{\infty} \right]$.

а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5 + x - 3x^2}{4 - x + 2x^2}$

б) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^3 + 1}}{\sqrt[5]{x^3 + x - x}}$

в) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x^4 + 2)(x^4 - 6)}{x^{10} - x^5 - 20}$

Задание 2: Вычислить предел функции, раскрыв неопределенность типа $\left[\frac{0}{0} \right]$.

а) $\lim_{x \rightarrow -3/2} \frac{4x^2 - 9}{2x + 3}$

б) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{1 - x^2}}{x^2}$

в) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{-18 + 9\sqrt{2 - x}}{-3x - 6}$

Задание 3: Вычислить предел функции, используя первый замечательный предел и его следствия.

а) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{x}{2} \cdot \sin 4x}{2x^2}$

б) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x - \operatorname{tg}^2 x}{x^4}$

в) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 5x - \cos 3x}{2x^2}$

Задание 4: Вычислить предел функции, используя второй замечательный предел.

а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x + 1}{3x - 4} \right)^{-2x}$

б) $\lim_{x \rightarrow -3} (7 + 2x)^{\frac{x+5}{x+3}}$

в) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x[\ln(x+1) - \ln x]$

Задание 5: Исследовать функцию на непрерывность и построить схематически её график.

а) $f(x) = 3^{\frac{2}{x+4}}$

б) $f(x) = \begin{cases} x^3; & x \leq \pi/2 \\ \operatorname{tg} x, & x > \pi/2 \end{cases}$

Вариант 18

Задание 1: Вычислить предел функции, раскрыв неопределенность типа $\left[\frac{\infty}{\infty} \right]$.

a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x^4 - 2x^3 + 2}{x^4 + 3}$

б) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{4x^2 + x + 1}}{5x + 3}$

в) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(-5x + 2)x(6x^2 + 1)}{3x^8 + x^4 - 5}$

Задание 2: Вычислить предел функции, раскрыв неопределенность типа $\left[\frac{0}{0} \right]$.

a) $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 8x + 15}{x^2 - 25}$

б) $\lim_{x \rightarrow 8} \frac{\sqrt{1-x} - 3}{2 + \sqrt[3]{x}}$

в) $\lim_{x \rightarrow 8} \frac{\sqrt{9+2x} - 5}{\sqrt[3]{x} - 2}$

Задание 3: Вычислить предел функции, используя первый замечательный предел и его следствия.

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 2x}{x \cdot \operatorname{tg} 3x}$

б) $\lim_{x \rightarrow 10} \frac{\sin 7\pi x}{\sin 8\pi x}$

в) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \sin 5x}{\frac{3x}{2}}$

Задание 4: Вычислить предел функции, используя второй замечательный предел.

a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x+2}{3x+1} \right)^{\frac{x^2}{x+1}}$

б) $\lim_{x \rightarrow \pi} \left(\operatorname{ctg} \frac{x}{4} \right)^{\frac{1}{\sin(x-\pi)}}$

в) $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \sin 2x)^{\frac{\cos 2x}{6}}$

Задание 5: Исследовать функцию на непрерывность и построить схематически её график.

a) $f(x) = \frac{1}{2^{\frac{1}{x+3}} + 1}$

б) $f(x) = \begin{cases} x - 5; & x \leq 0 \\ e^{\frac{1}{x}}, & x > 0 \end{cases}$

Вариант 19

Задание 1: Вычислить предел функции, раскрыв неопределенность типа $\left[\frac{\infty}{\infty} \right]$.

а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 3x - 88}{-x^2 + 15x - 56}$ б) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1} + 7\sqrt{x}}{\sqrt[4]{6x^{11} + x^3}}$ в) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(2x-1)(x-2)(x-3)}{3x^3 + 2x^2 + x}$

Задание 2: Вычислить предел функции, раскрыв неопределенность типа $\left[\frac{0}{0} \right]$.

а) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{3x^2 + 7x + 4}{x^3 + 4x^2 - 2x - 5}$ б) $\lim_{x \rightarrow 7} \frac{\sqrt{2+x} - 3}{x-7}$ в) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{2 + \sqrt[3]{x-6}}{2+x}$

Задание 3: Вычислить предел функции, используя первый замечательный предел и его следствия.

а) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x}{\arctg x}$ б) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 2x - \cos x}{1 - \cos x}$ в) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1,5 \sin x}{2x}$

Задание 4: Вычислить предел функции, используя второй замечательный предел.

а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{4x^2 + 2}{4x^2 - 3} \right)^{x^2 + 5}$ б) $\lim_{x \rightarrow 1} (2e^{x-1} - 1)^{\frac{x}{x-1}}$ в) $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + 3 \sin 2x)^{\frac{\cos 2x}{2}}$

Задание 5: Исследовать функцию на непрерывность и построить схематически её график.

а) $f(x) = \frac{1}{(x+3)^2}$ б) $f(x) = \begin{cases} x^2; & x \leq 2 \\ \frac{1}{x-2}, & x > 2 \end{cases}$

Вариант 20

Задание 1: Вычислить предел функции, раскрыв неопределенность типа $\left[\frac{\infty}{\infty} \right]$.

a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + 1}{3x^3 - 2x + 1}$ б) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + 2\sqrt[3]{x - 7x^5}}{\sqrt{16x^6 + 1}}$ в) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x^5 - 1)(x - 7)(x^3 - 3)}{x^3 + 5x^2 + 9x}$

Задание 2: Вычислить предел функции, раскрыв неопределенность типа $\left[\frac{0}{0} \right]$.

a) $\lim_{x \rightarrow 11} \frac{x^2 - 8x - 33}{-x^2 + 14x + 33}$ б) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt{1 + 3x} - 1}$ в) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^3 - 7x^2 + 5x + 2}{4x^2 - 6x - 4}$

Задание 3: Вычислить предел функции, используя первый замечательный предел и его следствия.

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 5x}{1 - \cos 3x}$ б) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + x \sin x} - 1}{x^2}$ в) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x - \sin x}{\frac{x}{2}}$

Задание 4: Вычислить предел функции, используя второй замечательный предел.

a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^3 + 1}{x^3 + 8} \right)^{\frac{2x}{x+1}}$ б) $\lim_{x \rightarrow 1/3} (4 - 9x)^{\frac{2x+1}{3x-1}}$ в) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (4x + 1)(\ln(2x - 5) - \ln(2x + 7))$

Задание 5: Исследовать функцию на непрерывность и построить схематически её график.

a) $f(x) = -e^{\frac{3}{x-2}}$ б) $f(x) = \begin{cases} x^3; & x \leq 1 \\ x^2 - 4x + 3, & 1 < x \leq 3 \\ 1, & x > 3 \end{cases}$

Вариант 21

Задание 1: Вычислить предел функции, раскрыв неопределенность типа $\left[\frac{\infty}{\infty} \right]$.

а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^3 + 5x + 1}{7x^3 + 6}$

б) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{x}}{\sqrt[5]{x^2 + 7} - x}$

в) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - 2x - x^3}{3x - 2x^2 + x^4}$

Задание 2: Вычислить предел функции, раскрыв неопределенность типа $\left[\frac{0}{0} \right]$.

а) $\lim_{x \rightarrow -4} \frac{x^2 - 7x - 44}{x^2 + 2x - 8}$

б) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + 3x} - \sqrt{1 - 2x}}{x + x^2}$

в) $\lim_{x \rightarrow 10} \frac{x^3 - 1000}{x^3 - 20x^2 + 100x}$

Задание 3: Вычислить предел функции, используя первый замечательный предел и его следствия.

а) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 - \cos 2x}}{x}$

б) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 7x \cdot \arcsin 2x}{x \cdot \sin 3x \cdot \cos 5x}$

в) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 6x}{0,5x}$

Задание 4: Вычислить предел функции, используя второй замечательный предел.

а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+2}{x+4} \right)^{x^2+5}$

б) $\lim_{x \rightarrow 2\pi} (\cos x)^{\frac{1}{\sin^2 2x}}$

в) $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + 2\operatorname{tg} x)^{\frac{\operatorname{ctg} x}{6}}$

Задание 5: Исследовать функцию на непрерывность и построить схематически её график.

а) $f(x) = \frac{x+3}{x-3}$

б) $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x + 3; & x \leq 0 \\ 2, & 0 < x \leq 3 \\ x - 1, & x > 3 \end{cases}$

Вариант 22

Задание 1: Вычислить предел функции, раскрыв неопределенность типа $\left[\frac{\infty}{\infty} \right]$.

а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + x + 1}{x^2 + 5}$

б) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{4x^2 + x + 1}}{5x + 3}$

в) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^5 + x^6}{x^3 + x^4 + x^5}$

Задание 2: Вычислить предел функции, раскрыв неопределенность типа $\left[\frac{0}{0} \right]$.

а) $\lim_{x \rightarrow 8} \frac{x^2 - 5x - 24}{-x^2 + 13x - 40}$

б) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+x} - \sqrt[3]{3x+1}}{6x}$

в) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 - x - 2}{x^3 - x^2 + 4x - 4}$

Задание 3: Вычислить предел функции, используя первый замечательный предел и его следствия.

а) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} 5x}{3x}$

б) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^3 x}{x \sin 2x}$

в) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 9x + \sin 7x}{\frac{x}{2}}$

Задание 4: Вычислить предел функции, используя второй замечательный предел.

а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x-4}{2x+1} \right)^{3x+5}$

б) $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + 3 \sin x)^{\frac{\cos x}{2}}$

в) $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \operatorname{tg} x)^{-2 \operatorname{ctg} x}$

Задание 5: Исследовать функцию на непрерывность и построить схематически её график.

а) $f(x) = -\frac{|x-2|}{x-2}$

б) $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x}, & 0 \leq x \leq 1 \\ 2-x, & 1 < x \leq 2 \\ 2x-6, & 2 < x \leq 4 \end{cases}$

Вариант 23

Задание 1: Вычислить предел функции, раскрыв неопределенность типа $\left[\frac{\infty}{\infty} \right]$.

а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^4 + 2x + 1}{5x^3 + 6}$

б) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7 + \sqrt{x^3 + 1} + \sqrt{3x}}{\sqrt[4]{x^3 + x}}$

в) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{x}}{\sqrt[4]{x^3 + x} - x}$

Задание 2: Вычислить предел функции, раскрыв неопределенность типа $\left[\frac{0}{0} \right]$.

а) $\lim_{x \rightarrow -5} \frac{x^2 + 7x + 10}{x^2 - 2x - 35}$

б) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{5-x} - 2}{\sqrt{2-x} - 1}$

в) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 6x^2 + 11x - 6}{x^2 - 3x + 2}$

Задание 3: Вычислить предел функции, используя первый замечательный предел и его следствия.

а) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \cdot \operatorname{ctg} 2x}{\sin 3x}$

б) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{1 - \operatorname{tg} x} - 1}$

в) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 5x + \cos x}{-2x}$

Задание 4: Вычислить предел функции, используя второй замечательный предел.

а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{x} \right)^{\frac{2x^2 - 1}{x + 1}}$

б) $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \operatorname{tg} x)^{5 \operatorname{ctg} x}$

в) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \sin \frac{x}{2} \right)^{-\cos \frac{x}{2}}$

Задание 5: Исследовать функцию на непрерывность и построить схематически её график.

а) $f(x) = \frac{x^2 - 9}{x^2 + x - 12}$

б) $f(x) = \begin{cases} 5^x; & -1 \leq x < 1 \\ (x-2)^2, & 1 \leq x < 3 \\ 4-x, & x \geq 3 \end{cases}$

Вариант 24

Задание 1: Вычислить предел функции, раскрыв неопределенность типа $\left[\frac{\infty}{\infty} \right]$.

а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + 2x + 3}{4x^3 + 1}$

б) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{8 - \sqrt{x^4 + 2} + \sqrt{x^3}}{\sqrt[4]{x^5 + 5} - x}$

в) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 + 6x - 5}{5x^2 - x - 1}$

Задание 2: Вычислить предел функции, раскрыв неопределенность типа $\left[\frac{0}{0} \right]$.

а) $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 - 8x - 33}{x^2 + 12x + 27}$

б) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{2x-1} - \sqrt{5}}{x-3}$

в) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - x^2 - x + 1}{x^3 + x^2 - x - 1}$

Задание 3: Вычислить предел функции, используя первый замечательный предел и его следствия.

а) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 4x}{2x \cdot \operatorname{tg} 2x}$

б) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{\cos 7x - \cos 3x}$

в) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \sin 5x}{\frac{3x}{2}}$

Задание 4: Вычислить предел функции, используя второй замечательный предел.

а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + 1}{x^2 - 1} \right)^{x^2}$

б) $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + 3 \operatorname{tg} x)^{\frac{\operatorname{ctg} x}{4}}$

в) $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \sin 2x)^{\frac{\cos 2x}{6}}$

Задание 5: Исследовать функцию на непрерывность и построить схематически её график.

а) $f(x) = \operatorname{arctg} \frac{1}{x-1}$

б) $f(x) = \begin{cases} \cos x; & 0 \leq x \leq \pi/2 \\ \frac{1}{2}, & \pi/2 < x \leq \pi \\ \sin x, & \pi < x \leq 2\pi \end{cases}$

Вариант 25

Задание 1: Вычислить предел функции, раскрыв неопределенность типа $\left[\frac{\infty}{\infty} \right]$.

a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^3 + 2x + 3}{1 - 4x^3}$

б) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^5 + 1}}{\sqrt[4]{x^3 + x}}$

в) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{x^2 + 1} + x)^2}{\sqrt[3]{x^5 + 1}}$

Задание 2: Вычислить предел функции, раскрыв неопределенность типа $\left[\frac{0}{0} \right]$.

a) $\lim_{x \rightarrow 12} \frac{x^2 - 6x - 72}{x^2 - 14x + 24}$

б) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{(1+x)^3} - 1}{x}$

в) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 2x^2 - x - 2}{3x^3 - 2x^2 - 7x - 2}$

Задание 3: Вычислить предел функции, используя первый замечательный предел и его следствия.

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{\cos x}}{x \sin x}$

б) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt[3]{(1 - \cos x)^2}}$

в) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x + \sin 5x}{\frac{7x}{3}}$

Задание 4: Вычислить предел функции, используя второй замечательный предел.

a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{5x}{5x-1} \right)^{x^2}$

б) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right)^{3 \operatorname{ctg} \frac{x}{2}}$

в) $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \sin 3x)^{\frac{3 \cos 3x}{5}}$

Задание 5: Исследовать функцию на непрерывность и построить схематически её график.

a) $f(x) = \frac{|x+3|}{x+3}$

б) $f(x) = \begin{cases} e^x; & x \leq 0 \\ 2x - 1, & x > 0 \end{cases}$

3 РЕШЕНИЕ ТИПОВОГО ВАРИАНТА

Задание 1: Вычислить предел функции, раскрыв неопределенность типа $\left[\frac{\infty}{\infty} \right]$.

a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4 - 2x^3 + 3}{3x^3 - 5}$

Решение:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4 - 2x^3 + 3}{3x^3 - 5} &= \left. \begin{array}{l} \text{подставляем предельное значение, получаем} \\ \text{неопределенность вида } \left[\frac{\infty}{\infty} \right]; \text{ выделим наивысшую степень} \\ \text{переменной в числителе и знаменателе} \end{array} \right| = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4 \left(1 - \frac{2}{x} + \frac{3}{x^4} \right)}{x^3 \left(3 - \frac{5}{x^3} \right)} = \left. \begin{array}{l} \text{разделим числитель и знаменатель} \\ \text{на переменную в наивысшей степени} \end{array} \right| = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{2}{x} + \frac{3}{x^4}}{\frac{1}{x} \left(3 - \frac{5}{x^3} \right)} = \\ &= \left. \text{подставляем предельное значение} \right| = \frac{1 - 2 \cdot 0 + 3 \cdot 0}{0 \cdot (3 - 5 \cdot 0)} = \frac{1}{0} = \infty. \end{aligned}$$

Ответ: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4 - 2x^3 + 3}{3x^3 - 5} = \infty.$

б) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^4 - 2}{\sqrt{x^8 + 3x + 4}}$

Решение:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^4 - 2}{\sqrt{x^8 + 3x + 4}} &= \left. \begin{array}{l} \text{подставляем предельное значение, получаем} \\ \text{неопределенность вида } \left[\frac{\infty}{\infty} \right]; \text{ выделим наивысшую степень} \\ \text{переменной в числителе и знаменателе} \end{array} \right| = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4 \left(3 - \frac{2}{x^4} \right)}{x^4 \sqrt{1 + \frac{3}{x^7} + \frac{4}{x^8}}} = \left. \text{сократим дробь на } x^4 \right| = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3 - \frac{2}{x^4}}{\sqrt{1 + \frac{3}{x^7} + \frac{4}{x^8}}} = \\ &= \left. \text{подставляем предельное значение} \right| = \frac{3 - 2 \cdot 0}{\sqrt{1 + 3 \cdot 0 + 4 \cdot 0}} = \frac{3}{1} = 3. \end{aligned}$$

Ответ: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^4 - 2}{\sqrt{x^8 + 3x + 4}} = 3.$

$$в) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x^3 - \sqrt{x^5 + 1}}{\sqrt{4x^6 + x} - 3}$$

Решение:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x^3 - \sqrt{x^5 + 1}}{\sqrt{4x^6 + x} - 3} = \left. \begin{array}{l} \text{подставляем предельное значение, получаем} \\ \text{неопределенность вида } \left[\frac{\infty}{\infty} \right]; \text{ выделим наивысшую степень} \\ \text{переменной в числителе и знаменателе} \end{array} \right| =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x^3 - x^{\frac{5}{2}} \sqrt{1 + \frac{1}{x^5}}}{x^3 \sqrt{4 + \frac{1}{x^5} - \frac{3}{x^6}}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 \left(6 - \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} \sqrt{1 + \frac{1}{x^5}} \right)}{x^3 \sqrt{4 + \frac{1}{x^5} - \frac{3}{x^6}}} = \left| \text{сократим дробь на } x^3 \right| =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6 - \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} \sqrt{1 + \frac{1}{x^5}}}{\sqrt{4 + \frac{1}{x^5} - \frac{3}{x^6}}} = \left| \text{подставляем предельное значение} \right| = \frac{6 - 0 \cdot \sqrt{1 + 0}}{\sqrt{4 + 0 - 3 \cdot 0}} = \frac{6}{2} = 3.$$

Ответ: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x^3 - \sqrt{x^5 + 1}}{\sqrt{4x^6 + x} - 3} = 3.$

Задание 2: Вычислить предел функции, раскрыв неопределенность типа $\left[\frac{0}{0} \right].$

$$а) \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 + 7x + 10}{x^2 - 3x - 10}$$

Решение:

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 + 7x + 10}{x^2 - 3x - 10} = \left. \begin{array}{l} \text{при подстановке предельного значения получаем} \\ \text{неопределенность вида } \left[\frac{0}{0} \right]; \text{ разложим числитель и} \\ \text{знаменатель на множители} \end{array} \right| =$$

$$= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 + 7x + 10}{x^2 - 3x - 10} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x + 2)(x + 5)}{(x + 2)(x - 5)} = \left| \text{сократим дробь на } (x + 2) \right| =$$

$$= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x + 5}{x - 5} = \left| \text{подставляем предельное значение} \right| = \frac{-2 + 5}{-2 - 5} = -\frac{3}{7}.$$

Ответ: $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 + 7x + 10}{x^2 - 3x - 10} = -\frac{3}{7}.$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{\sqrt{x} - 1}$$

Решение:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{\sqrt{x} - 1} &= \left. \begin{array}{l} \text{при подстановке предельного значения получаем} \\ \text{неопределенность вида } \left[\frac{0}{0} \right]; \text{ дополним числитель до} \\ \text{разности кубов, домножив числитель и знаменатель} \\ \text{на неполный квадрат суммы } (\sqrt[3]{x})^2 + \sqrt[3]{x} + 1; \\ \text{избавимся от иррациональности в знаменателе,} \\ \text{домножив дробь на сопряженное к знаменателю } \sqrt{x} + 1 \end{array} \right| = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt[3]{x} - 1) \cdot (\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x} + 1) \cdot (\sqrt{x} + 1)}{(\sqrt{x} - 1) \cdot (\sqrt{x} + 1) \cdot (\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x} + 1)} = \left. \begin{array}{l} \text{сворачиваем в числителе разность кубов,} \\ \text{в знаменателе - разность квадратов} \end{array} \right| = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1) \cdot (\sqrt{x} + 1)}{(x-1) \cdot (\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x} + 1)} = \left. \begin{array}{l} \text{сократим дробь на множитель } (x-1) \end{array} \right| = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x} + 1} = \left. \begin{array}{l} \text{подставляем предельное значение} \end{array} \right| = \frac{1+1}{1+1+1} = \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

Ответ: $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{\sqrt{x} - 1} = \frac{2}{3}.$

$$\text{в) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x+x^2} - \sqrt{1-x+x^2}}{x}$$

Решение:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x+x^2} - \sqrt{1-x+x^2}}{x} &= \left. \begin{array}{l} \text{при подстановке предельного значения получаем} \\ \text{неопределенность вида } \left[\frac{0}{0} \right]; \text{ домножим дробь на} \\ \text{сопряженное к числителю} \end{array} \right| = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{1+x+x^2} - \sqrt{1-x+x^2}) \cdot (\sqrt{1+x+x^2} + \sqrt{1-x+x^2})}{x \cdot (\sqrt{1+x+x^2} + \sqrt{1-x+x^2})} = \\ &= \left. \begin{array}{l} \text{сворачиваем в числителе} \\ \text{разность квадратов} \end{array} \right| = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1+x+x^2 - (1-x+x^2)}{x \cdot (\sqrt{1+x+x^2} + \sqrt{1-x+x^2})} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1+x+x^2 - 1 + x - x^2}{x \cdot (\sqrt{1+x+x^2} + \sqrt{1-x+x^2})} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2+2x}{x \cdot (\sqrt{1+x+x^2} + \sqrt{1-x+x^2})} = \end{aligned}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2(1+x)}{x \cdot (\sqrt{1+x+x^2} + \sqrt{1-x+x^2})} = \left| \text{подставляем предельное значение} \right| =$$

$$= \frac{2 \cdot (1+0)}{0 \cdot (\sqrt{1+0+0} + \sqrt{1-0+0})} = \frac{2}{0 \cdot 2} = \frac{1}{0} = \infty.$$

Ответ: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x+x^2} - \sqrt{1-x+x^2}}{x} = \infty.$

Задание 3: Вычислить предел функции, используя первый замечательный предел и его следствия.

а) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 6x}{\frac{3x}{2}}$

Решение:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 6x}{\frac{3x}{2}} = \left| \begin{array}{l} \text{при подстановке предельного значения получаем} \\ \text{неопределенность вида } \left[\frac{0}{0} \right] \end{array} \right| = \frac{2}{3} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 6x}{x} =$$

$$= \frac{2}{3} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin 6x}{\cos 6x}}{x} = \frac{2}{3} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\cos 6x} \cdot \frac{\sin 6x}{x} \right) = \left| \text{так как } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos 6x} = 1, \text{ получаем} \right| =$$

$$= \frac{2}{3} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 6x}{x} = \frac{2}{3} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{6 \cdot \sin 6x}{6x} = \frac{2}{3} \cdot 6 \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 6x}{6x} = 2 \cdot 2 = 4.$$

Ответ: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 6x}{\frac{3x}{2}} = 4.$

б) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 4x - \cos^3 4x}{3x^2}$

Решение:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 4x - \cos^3 4x}{3x^2} &= \left| \begin{array}{l} \text{при подстановке предельного значения получаем} \\ \text{неопределенность вида } \left[\frac{0}{0} \right] \end{array} \right| = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 4x \cdot (1 - \cos^2 4x)}{3x^2} = \frac{1}{3} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \left(\cos 4x \cdot \frac{\sin^2 4x}{x^2} \right) = \frac{1}{3} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin 4x}{x} \right)^2 = \\ &= \frac{1}{3} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{4 \cdot \sin 4x}{4x} \right)^2 = \frac{1}{3} \cdot 4^2 = \frac{16}{3}. \end{aligned}$$

Ответ: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 4x - \cos^3 4x}{3x^2} = \frac{16}{3}.$

в) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 9x - \sin 4x}{2x}$

Решение:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 9x - \sin 4x}{2x} &= \left| \begin{array}{l} \text{при подстановке предельного значения получаем} \\ \text{неопределенность вида } \left[\frac{0}{0} \right] \end{array} \right| = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \cdot \sin \frac{9x-4x}{2} \cdot \cos \frac{9x+4x}{2}}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{5x}{2} \cdot \cos \frac{13x}{2}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\cos \frac{13x}{2} \cdot \frac{\sin \frac{5x}{2}}{x} \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{5x}{2}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{5}{2} \cdot \sin \frac{5x}{2}}{\frac{5}{2}x} = \frac{5}{2} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{5x}{2}}{\frac{5}{2}x} = \frac{5}{2}. \end{aligned}$$

Ответ: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 9x - \sin 4x}{2x} = \frac{5}{2}.$

Задание 4: Вычислить предел функции, используя второй замечательный предел.

а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+3}{x-2} \right)^{2x+1}$

Решение:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+3}{x-2} \right)^{2x+1} = \left. \begin{array}{l} \text{при подстановке предельного значения получаем} \\ \text{неопределенность вида } [1^\infty]; \\ \text{используем второй замечательный предел:} \\ \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x = e \end{array} \right| =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-2+2+3}{x-2} \right)^{2x+1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{5}{x-2} \right)^{2x+1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{\frac{x-2}{5}} \right)^{\frac{x-2}{5} \cdot \frac{5}{x-2} \cdot (2x+1)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{\frac{x-2}{5}} \right)^{\frac{x-2}{5}} \right]^{\frac{5}{x-2} \cdot (2x+1)} = \left[\left(1 + \frac{1}{\frac{x-2}{5}} \right)^{\frac{x-2}{5}} \right] \rightarrow e \text{ при } x \rightarrow \infty =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} e^{\frac{5}{x-2} \cdot (2x+1)} = \left. \begin{array}{l} \text{на основании непрерывности} \\ \text{экспоненциальной функции,} \\ \text{можно перейти к пределу} \end{array} \right| = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5(2x+1)}{x-2}} = e^{10}.$$

Ответ: $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+3}{x-2} \right)^{2x+1} = e^{10}.$

б) $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \operatorname{tg} x)^{\frac{\operatorname{ctg} x}{5}}$

Решение:

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \operatorname{tg} x)^{\frac{\operatorname{ctg} x}{5}} = \left. \begin{array}{l} \text{при подстановке предельного значения получаем} \\ \text{неопределенность вида } [1^\infty]; \\ \text{используем второй замечательный предел:} \\ \lim_{x \rightarrow 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e \end{array} \right| =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} (1 + \operatorname{tg} x)^{\frac{1}{5 \operatorname{tg} x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \left[(1 + \operatorname{tg} x)^{\frac{1}{\operatorname{tg} x}} \right]^{\frac{1}{5}} = e^{\frac{1}{5}}.$$

Ответ: $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \operatorname{tg} x)^{\frac{\operatorname{ctg} x}{5}} = e^{\frac{1}{5}}.$

в) $\lim_{x \rightarrow \infty} (2x+3)(\ln(x-2) - \ln x)$

Решение:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (2x+3)(\ln(x-2) - \ln x) = \left. \begin{array}{l} \text{при подстановке предельного значения получаем} \\ \text{неопределенность вида } [\infty \cdot (\infty - \infty)]; \\ \text{преобразуем выражение к виду, дающему} \\ \text{неопределенность } [1^\infty] \end{array} \right| =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \ln \left(\frac{x-2}{x} \right)^{2x+3} = \left. \begin{array}{l} \text{на основании непрерывности} \\ \text{логарифмической функции,} \\ \text{можно перейти к пределу в} \\ \text{логарифмируемом выражении} \end{array} \right| = \ln \left[\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-2}{x} \right)^{2x+3} \right] =$$

$$= \ln \left[\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{-\frac{x}{2}} \right)^{-\frac{x}{2} \cdot \left(-\frac{2}{x} \right) \cdot (2x+3)} \right] = \ln \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{-\frac{x}{2}} \right)^{-\frac{x}{2}} \right]^{\left(-\frac{2}{x} \right) \cdot (2x+3)} = \ln \lim_{x \rightarrow \infty} e^{\left(-\frac{2}{x} \right) \cdot (2x+3)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \ln e^{\left(-\frac{2}{x} \right) \cdot (2x+3)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-2 \cdot (2x+3)}{x} = -2 \cdot \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x+3}{x} = -2 \cdot \lim_{x \rightarrow \infty} \left(2 + \frac{3}{x} \right) = -2 \cdot 2 = -4.$$

Ответ: $\lim_{x \rightarrow \infty} (2x+3)(\ln(x-2) - \ln x) = -4.$

ПРИЛОЖЕНИЕ

ТАБЛИЦА ЭКВИВАЛЕНТНЫХ БЕСКОНЕЧНО МАЛЫХ ФУНКЦИЙ

<i>Таблица эквивалентных бесконечно малых при $x \rightarrow 0$</i>	
$\sin x \sim x$	$\sin mx \sim mx$
$\operatorname{tg} x \sim x$	$\operatorname{tg} mx \sim mx$
$\arcsin x \sim x$	$\arcsin mx \sim mx$
$\operatorname{arctg} x \sim x$	$\operatorname{arctg} mx \sim mx$
$1 - \cos x \sim x^2/2$	$1 - \cos mx \sim (mx)^2/2$
$e^x - 1 \sim x$	$e^{mx} - 1 \sim mx$
$a^x - 1 \sim x \ln a$	$a^{mx} - 1 \sim mx \ln a$
$\ln(1+x) \sim x$	$\ln(1+mx) \sim mx$
$\log_a(1+x) \sim x \log_a e$	$\log_a(1+mx) \sim mx \log_a e$
$(1+x)^k - 1 \sim kx, k > 0$	$(1+x)^\mu - 1 \sim \mu x$

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

- 1 Берман, Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа [Электронный ресурс]: учеб. пособие – Электрон. дан. – Санкт-Петербург: Лань, 2017. – 492 с. – Режим доступа: <https://e.lanbook.com/book/89934>. – ЭБС Издательства «Лань»
- 2 Демидович, Б.П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу [Электронный ресурс]: учебное пособие / Б.П. Демидович. – Электрон. дан. – Санкт-Петербург: Лань, 2019. – 624 с. – Режим доступа: <https://e.lanbook.com/book/113942> – ЭБС Издательства «Лань»
- 3 Запорожец, Г.И. Руководство к решению задач по математическому анализу [Электронный ресурс]: учеб. пособие – Электрон. дан. – Санкт-Петербург: Лань, 2014. – 464 с. – Режим доступа: <https://e.lanbook.com/book/149> – ЭБС Издательства «Лань»
- 4 Максименко, В. Н. Курс математического анализа. Часть 2 [Электронный ресурс]: учебное пособие / В. Н. Максименко, А. Г. Меграбов, Л. В. Павшук. – Электрон. текстовые данные. – Новосибирск: Новосибирский государственный технический университет, 2011. – 411 с. – 978-5-7782-1746-1. – Режим доступа: <http://www.iprbookshop.ru/45379.html> – ЭБС «IPRBook»
- 5 Максименко, В. Н. Практикум по математическому анализу. Часть 1 [Электронный ресурс]: учебное пособие / В. Н. Максименко, А. В. Гобыш. – Электрон. текстовые данные. – Новосибирск: Новосибирский государственный технический университет, 2014. – 116 с. – 978-5-7782-2474-2. – Режим доступа: <http://www.iprbookshop.ru/45425.html> – ЭБС «IPRBook»
- 6 Миносцев, В.Б. Курс математики для технических высших учебных заведений. Часть 1. Аналитическая геометрия. Пределы и ряды. Функции и производные. Линейная и векторная алгебра [Электронный ресурс]: учебное пособие / В.Б. Миносцев, В.Г. Зубков, В.А. Ляховский; под ред. Миносцева В.Б., Пушкарь Е.А.. – Электрон. дан. – Санкт-Петербург: Лань, 2013. – 544 с. – Режим доступа: <https://e.lanbook.com/book/30424>. – ЭБС Издательства «Лань»

7 Польшкина Е.А. Сборник заданий по высшей математике с образцами решений (математический анализ) [Электронный ресурс]: учебно-методическое пособие / Е.А. Польшкина, Н.С. Стакун. – Электрон. текстовые данные. – М.: Прометей, 2013. – 200 с. – 978-5-7042-2490-7. – Режим доступа: <http://www.iprbookshop.ru/24022.html>– ЭБС «IPRBook»

8 Фихтенгольц, Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. В 3-х тт. Том 1 [Электронный ресурс]: учебник / Г.М. Фихтенгольц. – Электрон. дан. – Санкт-Петербург: Лань, 2019. – 608 с. – Режим доступа: <https://e.lanbook.com/book/113948> – ЭБС Издательства «Лань»

9 Фихтенгольц, Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. В 3-х тт. Том 2 [Электронный ресурс]: учебник / Г.М. Фихтенгольц. – Электрон. дан. – Санкт-Петербург: Лань, 2019. – 800 с. – Режим доступа: <https://e.lanbook.com/book/113949> – ЭБС Издательства «Лань»

СОДЕРЖАНИЕ

Введение	3
1 Общие методические указания	4
2 Варианты индивидуальных домашних заданий	5
3 Решение типового варианта	30
Приложение: таблица эквивалентных бесконечно малых функций	37
Библиографический список	38

Веселова Елена Михайловна,
доцент кафедры МАиМ АмГУ, канд. физ.-мат. наук, доцент

Индивидуальные задания по теме «Пределы и непрерывность функций». *Учебно-методическое пособие*

Изд-во АмГУ.