Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
АМУРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

ПРАКТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ
ЧАСТЬ ВТОРАЯ
ПАРАБОЛИЧЕСКИЕ И ЭЛЛИПТИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ

Учебно-методическое пособие

Благовещенск
Издательство АмГУ
2020

УДК
ББК

Рекомендовано
учебно-методическим советом университета

Рецензент:
В.В. Сельвинский, доцент кафедры математического анализа и моделирования АмГУ, кандидат физ.-мат. наук.

Практическое решение уравнений математической физики. Часть вторая. Параболические и эллиптические уравнения. Учебное пособие / сост. Т.В. Труфанова – Благовещенск: Амурский гос. ун-т, 2020. – 31 с.

В учебном пособии рассматриваются примеры решения уравнений математической физики параболического и эллиптического типов. Подробно рассмотрены смешанные задачи для уравнений теплопроводности и краевые задачи для стационарных процессов методом разделения переменных Фурье.

Пособие предназначено для студентов, обучающихся по направлению подготовки 01.04.02 – «Прикладная математика и информатика», 24.03.01-«Ракетные комплексы и космонавтика», 03.03.02 – «Физика», 01.03.02- «Прикладная математика и информатика», а также может быть использовано студентами других направлений, занимающихся решением прикладных задач в постановке уравнений с частными производными и для преподавателей, начинающих вести эти предметы.

В авторской редакции

Введение

Данное методическое пособии является продолжением первой части практического курса по уравнениям математической физики, содержащую только гиперболический тип.

В этой второй части подробно рассмотрены решения задач для параболического и эллиптического типов методом разделения переменных (метод Фурье).

При помощи этого метода построены решения смешанных задач для уравнений теплопроводности и найдены стационарные решения для уравнений эллиптического типа.

Как и в первой части, решения задач сопровождаются подробным разъяснением применимых методов и понятий. Теоретические вопросы излагаются на конкретных примерах и иллюстрируются алгоритмы решения. Такой способ изложения оправдан тем, что теоретические вопросы студенты получают в курсе лекций, параллельно которому ведутся практические задачи.

Данное пособие состоит из двух разделов. В первой главе рассмотрены решения уравнений теплопроводности с заданными начальными условиями и граничными условиями различных типов. Во второй главе рассмотрены уравнения эллиптического типа описывающие стационарные процессы колебаний и теплопроводности.

§1. УРАВНЕНИЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

Контрольные вопросы:

1) Какие процессы описывают уравнения параболического типа?

2) Записать уравнение теплопроводности.

3) Записать уравнение диффузии.

4) Сформулировать три основных типа граничных условий в зависимости от температурных режимов на границе.

5) Что называется решением первой краевой задачи?

6) Сформулировать основные краевые задачи для процесса теплопроводности.

7) Сформулировать принцип максимального значения для уравнения теплопроводности.

8) Сформулировать теорему единственности для первой краевой задачи.

9) Сформулировать следствия из принципа максимального значения.

10) Метод разделения переменных для уравнений параболического типа.

Применим метод Фурье на практике. Для этого рассмотрим несколько частных случаев:

1. Решить линейное однородное уравнение с заданными начальными и однородными граничными условиями.

2. Решить линейное неоднородное уравнение теплопроводности методом разделения переменных с заданными начальными и однородными граничными условиями.

3. Решить линейное неоднородное уравнение теплопроводности с неоднородными граничными условиями методом разделения переменных.

4 Метод разделения переменных в случае трех независимых переменных.

Задание 1. Требуется найти решение линейного параболического уравнения

$$U_{\mathrm{t}} = U_{\mathrm{xx}} + 2U_{\mathrm{x}} + U, \quad x \in [0,1], t > 0, \tag{1}$$

удовлетворяющее при $t = 0$ начальному условию

$$U_{\mathrm{t=0}} = \mathrm{e}^{-x}\sin\pi x \tag{2}$$

и однородным граничным условиям первого рода

$$U_{x=0} = U_{x=1} = 0 \tag{3}$$

Решение: Используя метод Фурье разделения переменных, нетривиальное решение будем искать в виде

$$U(x,t) = X(x)T(t) \tag{4}$$

Подставляя предполагаемую форму решения (4) в уравнение (1):

$$X(x)\dot{T}(t) = \ddot{X}(x)T(t) + 2\dot{X}(x)T(t) + X(x)T(t)$$

и, разделяя переменные, получим

$$\frac{\dot{T}(t)}{T(t)} = \frac{\ddot{X}(x)}{X(x)} + \frac{2\dot{X}(x)}{X(x)} + 1$$

отсюда следует, что

$$\frac{\dot{T}(t)}{T(t)} = \frac{\ddot{X}(x) + 2\dot{X}(x) + X(x)}{X(x)} = -\lambda^2$$

Поэтому функции $T(t)$ и $X(x)$ должны быть определены как решения дифференциальных уравнений

$$\frac{\dot{T}(t)}{T(t)} = -\lambda^2$$

$$\ddot{X}(x) + 2\dot{X}(x) + X(x) = -\lambda^2 X(x)$$

или

$$\ddot{X}(x) + 2\dot{X}(x) + X(x)(1 + \lambda^2) = 0; \tag{5}$$

$$\dot{T}(t) + \lambda^2 T(t) = 0 \tag{6}$$

Запишем общее решение (6) $T(t) = A_n e^{-\lambda^2 t}$

Для отыскания координатной функции $X(x)$ приходим к следующей задаче. Найти такие решения уравнение (5), которые в граничных точках удовлетворяют условиям

$$X(0) = 0,\ X(1) = 0. \tag{7}$$

Задачу отыскания собственных значений и собственных функций называют задачей Штурма- Лиувилля.

Составляем характеристическое уравнение для (5):

$$k^2 + 2k + (1 + \lambda^2) = 0,$$

находим корни характеристического уравнения

$$k_{1,2} = -1 \pm \lambda i.$$

Записываем общее решение уравнения (5):

$$X(x) = e^{-x}(c_1 \cos\lambda x + c_2 \sin\lambda x),$$

используя граничные условия (7), находим собственные значения и собственные функции:

$$X(0) = c_1 = 0$$

$$X(1) = c_2 e^{-1} \sin\lambda = 0$$

$$c_2 \sin\lambda = 0;\ c_2 \neq 0,\ \sin\lambda = 0; \lambda_n = \pi n,$$

следовательно,

$$X_n(x) = e^{-x} \sin \pi n x \qquad (8)$$

Суперпозиция всех решений вида (8)

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-\lambda t} e^{-x} \sin\pi n x = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{(-\lambda^2 t - x)} \sin\pi n x$$

будет также решением уравнения (1), удовлетворяющего граничным условиям (3).

Используя начальные условия (2) найдем коэффициенты A_n

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-x} \sin\pi n x = e^{-x} \sin\pi x$$

$$A_1 = 1;\ A_0 = A_2 = \cdots = 0.$$

Решение исходной задачи (1) – (3) имеет вид $U(x,t) = e^{-(\pi^2 t + x)} \sin \pi x$.

Задание 2. Решить линейное неоднородное уравнение

$$u_t = u_{xx} - 2u + \sin\frac{x}{2}, x \in [0,\pi], t > 0\,,$$

удовлетворяющее однородному начальному условию и однородным граничным условиям:

$$u(x,0) = \sin\frac{3}{2}x + \sin\frac{x}{2}.$$

$$u(0,t) = 0,$$

$$u_x(\pi,t) = 0,$$

Решение:

1). Эта задача со стационарными неоднородностями, когда граничные условия и неоднородная часть уравнения не зависят от времени. Рекомендуется сначала найти стационарное решение, т.е. такую функцию $\omega(x)$, которая удовлетворяет уравнению:

$$\omega_{xx}(x) - 2\omega(x) + \sin\tfrac{x}{2} = 0 \tag{9}$$

и граничным условиям:

$$\omega(0) = 0\,,\ \omega_x(\pi) = 0 \tag{10}$$

Находим стационарное решение уравнения

$$\omega_{xx} - 2\omega = -sin\frac{x}{2}$$

Сначала найдем решение однородного уравнения, составляем характеристическое

$$k^2 - 2 = 0$$

$k_{1,2} = \pm\sqrt{2}$, следовательно, решение однородного уравнения имеет вид

$$\omega_0 = c_1 e^{\sqrt{2}x} + c_2 e^{-\sqrt{2}x}.$$

Решение неоднородного уравнения будем искать в виде:

$$\omega_1 = Asin\frac{x}{2} + Bcos\frac{x}{2}$$

подставляя в стационарное уравнение и приравнивая коэффициенты при одинаковых функциях, находим коэффициенты A и B:

$$-\frac{1}{4}Asin\frac{x}{2} - \frac{1}{4}B\cos\frac{x}{2} - 2A\sin\frac{x}{2} - 2B\cos\frac{x}{2} = -\sin\frac{x}{2},$$

$$-\frac{1}{4}A - 2A = -1,$$

$$-\frac{1}{4}B - 2B = 0\,,$$

$$A = \frac{4}{9}\,,$$

$$B = 0\,.$$

Таким образом, решение неоднородного уравнения (9) имеет вид

$$\omega_1 = \frac{4}{9}\sin\frac{x}{2} + c_1 e^{\sqrt{2}x} + c_2 e^{-\sqrt{2}x}\,,$$

используя граничные условия (10), находим

$$\omega(0) = c_1 + c_2 = 0;\ c_1 = -c_2\,,$$

$$\omega_x(\pi) = \sqrt{2}c_1 e^{\sqrt{2}\pi} - \sqrt{2}c_1 e^{\sqrt{2}\pi} = 0\,,$$

$$\sqrt{2}e^{\sqrt{2}\pi} - \sqrt{2}e^{\sqrt{2}\pi} \neq 0\,,$$

следовательно, $c_1 = -c_2 = 0$; таким образом, решение уравнения (9) принимает вид:

$$\omega(x) = \frac{4}{9}\sin\frac{x}{2}\,.$$

2). Находим нестационарное решение краевой задачи, которое удовлетворяет однородному уравнению вида

$$\upsilon_t = \upsilon_{xx} - 2\upsilon \tag{11}$$

однородным граничным условиям: $\upsilon(0,t) = 0$, $\upsilon_x(\pi,t) = 0$ и начальному условию вида: $\upsilon(x,0) = \sin\frac{3}{2}x + \sin\frac{x}{2} - \omega(x)$

или

$$\upsilon(x,0) = \sin\frac{3}{2}x + \sin\frac{x}{2} - \frac{4}{9}\sin\frac{x}{2} = \sin\frac{3}{2}x + \frac{5}{9}\sin\frac{x}{2}$$

Решение уравнения (11) ищем методом разделения переменных

$$\upsilon = X(x)T(t);$$

Подставляя в (11) и разделяя переменные получаем два обыкновенных дифференциальных уравнения, которые легко решаются

$$X(x)\dot{T}(t) = \ddot{X}(x)T(t) - 2X(x)T(t)$$

$$\ddot{X}(x) + \lambda X(x) = 0 \tag{12}$$

$$\dot{T}(t) + 2T(t) + \lambda^2 T(t) = 0 \tag{13}$$

Решение уравнения (12)

$$X(x) = c_1 \cos \lambda x + c_2 \sin \lambda x,$$

из граничных условий находим постоянные интегрирования и собственные значения:

$$X(0) = c_1 = 0$$

$$\dot{X}(\pi) = -\lambda c_2 cos\lambda\pi, \text{отсюда } \lambda_n = \frac{1+2n}{2}.$$

Таким образом

$$X_n(x) = sin\frac{(1+2n)}{2}x.$$

Решение уравнения (13) имеет вид

$$\dot{T} + T(2+\lambda^2) = 0,$$

$$T_n = c_n e^{-(2+\lambda^2)t}.$$

Следовательно,

$$v(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n e^{-(2+\lambda^2)t} \sin\frac{1+2n}{2}x$$

используя начальные условия, находим коэффициенты разложения

$$v(x,0) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \sin\frac{1+2n}{2}x = \sin\frac{3}{2}x + \frac{5}{9}\sin\frac{x}{2},$$

$$c_0 = \frac{5}{9}, \qquad c_1 = 1.$$

Таким образом, решение уравнения (11) принимает вид:

$$v(x,t) = e^{-\left(2+\frac{9}{4}\right)t}\sin\frac{3}{2}x + \frac{5}{9}e^{-\left(2+\frac{1}{4}\right)t}\sin\frac{1}{2}x;$$

или

$$v(x,t) = e^{-\frac{17}{4}t}\sin\frac{3}{2}x + \frac{5}{9}e^{-\frac{9}{4}t}\sin\frac{1}{2}x.$$

Ответ: сумма решения первой и второй задачи дает результат

$$u(x,t)=\left(\frac{4}{9}+\frac{5}{9}e^{-\frac{9}{4}t}\right)\sin\frac{x}{2}+e^{-\frac{17}{4}t}\sin\frac{3}{2}x\ .$$

Задание 3. Решить линейное неоднородное уравнение теплопроводности с неоднородными граничными условиями методом разделения переменных.

Найти нестационарное распределение температуры в стержне удовлетворяющее неоднородному уравнению

$$u_t = u_{xx} + u + xt(2-t) + 2\cos t,$$

неоднородным граничным условиям второго рода

$$u_x|_{x=0} = t^2\ , \qquad u_x|_{x=\pi} = t^2$$

и заданному начальному условию

$$u_x|_{t=0} = cos2x$$

Решение:

Решение ищем в виде: $u(x,t) = v(x,t) + U(x,t)$.

Функцию $U(x,\ t)$ подбираем так, чтобы она удовлетворяла заданным граничным условиям по формуле [1]:

$$U(x,t) = \mu_1 x + \frac{\mu_2 - \mu_1}{2l} x^2\ ,$$

$U(x,t) = t^2 x$, отсюда $u(x,t) = v(x,t) + t^2 x$.

Для функции $v(x,t)$ получаем следующую задачу:

$$v_t = v_{xx} + v + 2\cos t\ ,$$

$$v_x(0,t) = 0\ ,$$

$$v_x(\pi,t) = 0\ ,$$

$$v(x,0) = \cos 2x\ .$$

Решение этой задачи ищем в виде:

$v(x,t) = w(x,t) + \widetilde{w}(x,t)$, где

$$\widetilde{w}_t = \widetilde{w}_{xx} + \widetilde{w}\ ,$$

$$\widetilde{w}_x(0,t) = 0\ ,$$

$$\widetilde{w}_x(\pi,t) = 0\ ,$$

$$\widetilde{w}(x,0) = \cos 2x.$$

Для решения применим метод Фурье: $\widetilde{w}(x,t) = T(t)X(t)$.

Подставляя в уравнение и граничные условия, получаем:

$$\frac{\ddot{X}(x)}{X(x)} = \frac{\dot{T}(t) - T(t)}{T(t)} = -\lambda^2 ,$$

$$\ddot{X}(x) + \lambda^2 X(x) = 0 ,$$

$$\dot{T}(t) + T(t)(\lambda^2 - 1) = 0 ,$$

$$\dot{X}(0) = \dot{X}(\pi) = 0 .$$

Сначала решаем задачу Штурма-Лиувилля находим собственные значения и собственные функции:

$$\ddot{X}(x) + \lambda^2 X(x) = 0 ,$$

$$\dot{X}(0) = \dot{X}(\pi) = 0 ,$$

$$k^2 + \lambda^2 = 0, k = \pm\lambda i .$$

$$X(x) = c_1 \cos\lambda x + c_2 \sin\lambda x,$$

$$\dot{X}(x) = -\lambda c_1 \sin\lambda x + \lambda c_2 \cos\lambda x,$$

$$\dot{X}(0) = \lambda c_2 = 0;\ \lambda \neq 0, \text{то } c_2 = 0.$$

$$\dot{X}(\pi) = -\lambda c_1 \sin\lambda\pi = 0, \text{следует } c_1 \neq 0; \text{следовательно } \sin\lambda\pi = 0.$$

Отсюда $X_n(x) = \cos nx$.

Учитывая найденные собственные значения, решаем второе уравнение:

$$\dot{T}(t) + T(t)(\lambda^2 - 1) = 0,$$

$$\frac{dT}{T} = -(\lambda^2 - 1)dt, T = e^{-(\lambda^2-1)t}.$$

Применяя принцип суперпозиции, запишем найденное решение в виде

$$\widetilde{w}(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n e^{-(n^2-1)t} cosnx$$

Удовлетворим начальному условию и найдем коэффициенты разложения при n=2 будет $A_2 = 1$.

Таким образом, $\widetilde{w}(x,t) = e^{-3t}\cos 2x$.

Решаем вторую задачу для функции *w(x,t)*

Решение уравнения $w_t = w_{xx} + w + 2\cos t$ ищем в виде ряда по собственным функциям однородной краевой задачи:

$$w(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} T_n\,(t)\cos nx\,.$$

Подставляя этот ряд в уравнение, получаем:

$$\sum_{n=0}^{\infty}(\dot{T}_n(t) + T_n n^2 - T_n)\cos nx = 2\cos t.$$

Отсюда $\dot{T}_0 - T_0 = 2\cos t.$

Решая, находим

$$\frac{dT}{dt} = T_0, \ln T_0 = t + \ln c, T_0 = ce^t,$$

решаем методом вариации постоянной:

$T_0 = c(t)e^t$, подставляя в неоднородное уравнение, получаем:

$\dot{c}(t)e^t + c(t)e^t - c(t)e^t = 2\cos t,$

$\dot{c}(t)e^t = 2\cos t => \dot{c}(t) = e^{-t}\cos t,$

$c(t) = e^{-t}(\sin t - \cos t) + c_1,$

следовательно,

$T_0 = \sin t - \cos t + c_1 e^t,$

$w(x,t) = \sin t - \cos t + c_1 e^t,$

используя начальные условия, находим постоянные интегрирования:

$w(x,0) = -1 + c_1 = 0, c_1 = 1.$

Подставляя в выражение

$$u(x,t) = v(x,t) + t^2 x$$

значение $v(x,t) = \widetilde{w}(x,t) + w(x,t),$

получим решение исходной неоднородной задачи:

Ответ

$$u(x,t) = e^{-3t}\cos 2x + \left(e^t + \sin t - \cos t\right)\cdot 1 + t^2 x$$

1.1 Частный случай 4. Метод разделения переменных в случае трех независимых переменных.

Задание 4. Найти распределение температуры при $t>0$ в бесконечном однородном круглом цилиндре радиуса R, если начальная температура цилиндра равна Ur^2, для случая, когда поверхность цилиндра теплоизолирована[2].

Решение:

Из формулировки задачи видно, что требуется найти решение уравнения

$$u_t = \frac{a^2}{r}\left(\frac{\partial u}{\partial r} + r\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}\right),\ 0 \le r \le R,\ t>0,\ \left|u(0,t)\right| < \infty, \tag{14}$$

при граничном условии

$$u_r(R,t) = 0,$$

и начальном условии

$$u(r,0) = Ur^2. \tag{15}$$

Решение данного уравнения будем искать в виде $u(r,t) = T(t)W(r)$, тогда граничное условие примет вид:

$$W'(R) = 0. \tag{16}$$

Подставляя в уравнение (14)

$$u(r,t) = T(t)W(r)$$

получаем:

$$T'(t)W(r) = \frac{a^2}{r}\big(T(t)W'(r) + rT(t)W''(r)\big).$$

Поделим это равенство на $a^2\,T(t)W(r)$ приходим к равенствам:

$$\frac{T'(t)}{a^2\,T(t)} = \frac{1}{r}\left(\frac{W'(r) + rW''(r)}{W(r)}\right) = -\lambda^2.$$

Отсюда получим систему уравнений, решение которой нам и надо найти:

$$\begin{cases} T'(t) + \lambda^2\,a^2\,T(t) = 0, \\ rW''(r) + W'(r) + \lambda^2\,rW(r) = 0. \end{cases}$$

Решим первое уравнение полученной системы:

$T'(t)+\lambda^2 a^2 T(t)=0$, отсюда $T(t)=e^{-a^2\lambda^2 t}$.

Теперь решаем второе уравнение:

$rW''(r)+W'(r)+\lambda^2 rW(r)=0$.

Разделим его на r и в результате получим уравнение Бесселя нулевого порядка

$$W''(r)+\frac{1}{r}W'(r)+\lambda^2 W(r)=0,$$

решение которого имеет вид:

$W_n(r)=J_0(\lambda_n r)$.

Согласно (16) найдем λ_n:

$W'(R)=\left(J_0(\lambda_n R)\right)'=RJ_1(\lambda_n R)=0$.

Отсюда $\lambda_n R=\mu_n$ – положительные корни уравнения Бесселя $J_1(\lambda_n R)=0$. Тогда $\lambda_n=\frac{\mu_n}{R}$. Таким образом, $W_n(r)=J_0\left(\frac{\mu_n r}{R}\right)$.

Теперь мы имеем $W_n(r)=J_0\left(\frac{\mu_n r}{R}\right)$ и $T_n(t)=A_n e^{-\left(\frac{a\mu_n}{R}\right)^2 t}$.

Решение уравнения (14) запишем в виде суперпозиции двух решений $W_n(r)$ и $T_n(t)$:

$$u(r,t)=\sum_{n=0}^{\infty}A_n\cdot e^{-\left(\frac{a\mu_n}{R}\right)^2 t}\cdot J_0\left(\frac{\mu_n r}{R}\right).$$

Сейчас наша задача состоит в том, чтобы найти коэффициенты A_n. Для этого используем начальное условие (15):

$$u(r,0)=\sum_{n=0}^{\infty}A_n\cdot e^{-\left(\frac{a\mu_n}{R}\right)^2\cdot 0}\cdot J_0\left(\frac{\mu_n r}{R}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}A_n J_0\left(\frac{\mu_n r}{R}\right)=Ur^2.$$

Для нахождения коэффициента A_n разложим Ur^2 в ряд по функциям Бесселя согласно разложению Фурье – Бесселя:

$$Ur^2=\sum_{n=1}^{\infty}a_n\,J_0\left(\frac{\mu_n\,r}{R}\right),$$

где коэффициенты разложения находятся по формуле

$$a_n=\frac{2}{R^2\,J_0^2(\mu_n)}\int_0^R r\,Ur^2 J_0\left(\frac{\mu_n\,r}{R}\right)dr=\frac{2U}{R^2\,J_0^2(\mu_n)}\int_0^R r^3\,J_0\left(\frac{\mu_n\,r}{R}\right)dr=$$

$$=/\,\frac{\mu_n\,r}{R}=t\,,\;\; r=\frac{R}{\mu_n}t\,,\;\; dr=\frac{R}{\mu_n}dt\,/=\frac{2U}{R^2\,J_0^2(\mu_n)}\cdot\frac{R^3}{\mu_n^3}\cdot\frac{R}{\mu_n}\cdot\int_0^{\mu_n}t^3\,J_0(t)\,dt=$$

$=$ {применим формулу $\int_0^x r^3\,J_0(r)\,dr=2x^2 J_0(x)+(x^3-4x)\,J_1(x)$ }=

$$=\frac{2U\,R^2}{\mu_n^4\,J_0^2(\mu_n)}\cdot\left[\,2t^2\,J_0+(t^3-4t)\,J_1(t)\,\right]\Big|_0^{\mu_n}=\ \{\text{учтем, что } J_1(\mu_n)=0\}\ =$$

$$=\frac{2U\,R^2}{\mu_n^4\,J_0^2(\mu_n)}\cdot\left[\,2t^2\,J_0(t)\,\right]\Big|_0^{\mu_n}=\frac{4U\,R^2}{\mu_n^4\,J_0^2(\mu_n)}\cdot\frac{\mu_n^2}{R^2}\cdot r^2\,J_0\left(\frac{\mu_n\,r}{R}\right)\Bigg|_0^R=\frac{4U\,R^2}{\mu_n^2\,J_0^2(\mu_n)}\cdot J_0(\mu_n)=$$

$$=\frac{4U\,R^2}{\mu_n^2\,J_0(\mu_n)}.$$

Итак, получили, что $\sum_{n=0}^{\infty}A_n\,J_0\left(\frac{\mu_n\,r}{R}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n\,J_0\left(\frac{\mu_n\,r}{R}\right)$, где $a_n=\frac{4U\,R^2}{\mu_n^2\,J_0(\mu_n)}$, а отсюда находим, что $A_n=\frac{4U\,R^2}{\mu_n^2\,J_0(\mu_n)}$. Тогда решение исходной задачи запишется в следующем виде:

$$u(r,t)=4U\,R^2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\mu_n^2\,J_0(\mu_n)}\cdot e^{-\left(\frac{a\,\mu_n}{R}\right)^2 t}\cdot J_0\left(\frac{\mu_n\,r}{R}\right),$$

где μ_n – положительные корни уравнения Бесселя $J_1(\mu_n)=0$.

Самостоятельная работа.

1. $u_t=u_{xx},\ x\in[0,1],\ t>0,$

   $u|_{x=0}=u|_{x=1}=0,\ u|_{t=0}=\sin 2\pi x.$

2. $u_t=u_{xx}+1,\ x\in[0,1],\ t>0,$

   $u|_{x=0}=u|_{x=1}=0,\ u|_{t=0}=\cos 2\pi x.$

3. $u_t = u_{xx} - u + \cos 2x,\ x \in [0,\pi],\ t > 0,$

$u|_{x=0} = 0,\ u|_{x=\pi} = 0,\ u|_{t=0} = \cos 2x + \cos 3x.$

§2. УРАВНЕНИЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ТИПА

В этом разделе рассмотрим решение уравнения Лапласа для простейших областей.

2.1 Решение задачи Дирихле в круге

Задача 1. В круге $0 \le r < R$ найти гармоническую функцию, удовлетворяющую граничным значениям $u(R,\varphi) = \varphi(2\pi - \varphi)$.

Решение. Требуется найти решение уравнения Лапласа для круга.

Запишем уравнение Лапласа в полярных координатах:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0,\quad 0 \le r < R,\quad 0 \le \varphi \le 2\pi, \qquad (17)$$

и добавим граничное условие: $u(R,\varphi) = \varphi(2\pi - \varphi)$ (18)

Решение этой задачи будем искать методом разделения переменных в виде

$$u(r,\varphi) = R(r)\Phi(\varphi) \ne 0 \qquad (19)$$

Подставляя предполагаемую форму решения (19) в уравнение (17) и разделяя переменные, получаем

$$\frac{\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{du}{dr}\right)}{R(r)} = -\frac{\Phi''(\varphi)}{\Phi(\varphi)} = \lambda\,.$$

Отсюда следует, что функция $R(r)$ должна быть найдена путем решения уравнения

$$r\frac{d}{dr}\left(r\frac{dR}{dr}\right) - \lambda R(r) = 0 \qquad (20)$$

а для функции $\Phi(\varphi)$ получаем задачу на собственные значения

$$\begin{cases} \Phi'' + \lambda\Phi = 0, \\ \Phi(\varphi) = \Phi(\varphi + 2\pi). \end{cases} \tag{21}$$

Здесь условие периодичности функции $\Phi(\varphi)$ является следствием периодичности искомого решения $u(r,\varphi)$ по угловой переменной с периодом 2π.

Задача (21) имеет нетривиальные решения только при

$$\lambda = \lambda_n = n^2, \quad n = 0,1,2,\dots.$$

Эти решения имеют вид

$$\Phi_n(\varphi) = A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi,$$

где A_n и B_n – произвольные постоянные.

Из (20) для функции $R(r)$ при $\lambda = n^2$ получаем уравнение

$$r^2 \frac{d^2R}{dr^2} + r\frac{dR}{dr} - n^2R = 0. \tag{22}$$

Будем искать частное решение этого уравнения в виде степенной функции $R(r) = r^k$, $k = \text{const}$. Подставив эту функцию в уравнение (22):

$$r^2k(k-1)r^{k-2} + rkr^{k-1} - n^2r^k = 0,$$

устанавливаем, что показатель степени k определяется из уравнения

$k^2 - n^2 = 0$, т.е. $k_{1,2} = \pm n$.

Следовательно, уравнение (22) имеет следующие два линейно независимые решения: r^nи r^{-n}.

Решение внутренней задачи Дирихле должно быть ограничено в центре круга при $r = 0$. Поэтому из двух найденных решений следует взять лишь $R_n(r) = r^n$, $n = 0,1,2,\dots$ Таким образом, согласно (19) частные решения уравнения (17) можно записать так:

$$u_n(r,\varphi) = r^n (A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi), \quad n = 0,1,2,\dots$$

В силу линейности и однородности уравнения (17) суперпозиция частных решений

$$u(r,\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(r,\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} r^n (A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi) \tag{23}$$

также будет удовлетворять этому решению.

Подставляя граничные условия (18) в

$$u(r,\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} r^n (A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi)$$

получаем:

$$\varphi(2\pi - \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} R^n (A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi).$$

Разлагая левую часть в ряд Фурье:

$$\varphi(2\pi - \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha_n \cos n\varphi + \beta_n \sin n\varphi).$$

Коэффициенты разложения определяем по формулам:

$$\alpha_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \varphi(2\pi - \varphi) d\varphi = \frac{1}{\pi}[\int_0^{2\pi} \varphi 2\pi d\varphi - \int_0^{2\pi} \varphi^2 d\varphi] =$$

$$= \frac{1}{\pi}[2\pi \frac{\varphi^2}{2}\Big|_0^{2\pi} - \frac{\varphi^3}{3}\Big|_0^{2\pi}] = \frac{1}{\pi}[2\pi \frac{4\pi^2}{2} - \frac{8\pi^3}{3}] = 4\pi^2 - \frac{8\pi^2}{3} = \frac{4\pi^2}{3}.$$

$\beta_n = 0,$ при $n = 0,1,\dots$.

$$\alpha_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \varphi(2\pi - \varphi)\cos n\varphi d\varphi = \frac{1}{\pi}[\int_0^{2\pi} \varphi 2\pi \cos n\varphi d\varphi - \int_0^{2\pi} \varphi^2 \cos n\varphi d\varphi].$$

Вычислим каждое слагаемое по отдельности.

1). $\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\varphi 2\pi\cos n\varphi d\varphi = \begin{bmatrix} u=\varphi & du=d\varphi \\ dv=\cos n\varphi d\varphi & v=\frac{1}{n}\sin n\varphi \end{bmatrix} =$

$$=\frac{\varphi}{n}\sin n\varphi\Big|_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi}\frac{1}{n}\sin n\varphi d\varphi = \frac{2\pi}{n}\sin 2\pi n - 0 + \frac{1}{n^2}\cos n\varphi\Big|_0^{2\pi} =$$

$$=\frac{1}{n^2}\cos n2\pi - \frac{1}{n^2} = \frac{1}{n^2} - \frac{1}{n^2} = 0.$$

2). $\int_0^{2\pi}\varphi^2\cos n\varphi d\varphi = \begin{bmatrix} u=\varphi^2 & du=2\varphi d\varphi \\ dv=\cos n\varphi d\varphi & v=\frac{1}{n}\sin n\varphi \end{bmatrix} =$

$$=\frac{\varphi^2}{n}\sin n\varphi\Big|_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi}\frac{1}{n}\sin n\varphi\ 2\varphi d\varphi = \frac{4\pi^2}{n}\sin 2\pi n - \frac{2}{n}\begin{bmatrix} u=\varphi & du=d\varphi \\ dv=\sin n\varphi d\varphi & v=-\frac{1}{n}\cos n\varphi \end{bmatrix} =$$

$$=\frac{2}{n^2}\varphi\cos n\varphi\Big|_0^{2\pi} + \int_0^{2\pi}\frac{1}{n}\cos n\varphi d\varphi = \frac{2}{n^2}2\pi\cos n2\pi + 0 = \frac{2}{n^2}2\pi = \frac{4\pi}{n^2}.$$

Отсюда:

$\alpha_n = -\frac{1}{\pi}\ \frac{4\pi}{n^2} = -\frac{4}{n^2}$ и $\beta_n = 0$.

$$u(r,\varphi) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} r^n (A_n\cos n\varphi + B_n\sin n\varphi)$$

$$\varphi(2\pi-\varphi) = \frac{4\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty}(-\frac{4}{n^2})\cos n\varphi$$

Сравнивая с

$$\varphi(2\pi-\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} R^n (A_n\cos n\varphi + B_n\sin n\varphi),$$

получаем

$$A_0 = \frac{4\pi^2}{3},\ A_n = -\frac{4}{n^2},\ B_n = 0.$$

Подставляя найденные коэффициенты в (23), находим решение поставленной задачи.

Ответ: $u(r,\varphi)=\dfrac{2\pi^2}{3}-4\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}(\dfrac{r}{R})^n\cos n\varphi.$

2.2 Решение задачи Дирихле в кольце

Задача 2. Найти гармонические функции $u=u(r,\varphi)$ внутри кольца $a<r<b$, удовлетворяющие граничным значениям:

$$u(a,\varphi)=A,\ \ u(b,\varphi)=B\sin 2\varphi.$$

Решение.

Постановка задачи: требуется решить уравнение Лапласа

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}=0,\ \ a\le r<b,\ \ 0\le\varphi\le 2\pi, \tag{24}$$

удовлетворяющие граничным условиям:

$$u(a,\varphi)=A,\ \ u(b,\varphi)=B\sin 2\varphi.$$

Решение уравнения (24) ищем как в первой задаче, но со следующим отличием; в решение уравнения (22) сохраняем оба слагаемых, так как точка r = 0 находится вне кольца. Нетрудно проверить, что это решение принимает вид:

$$u(r,\varphi)=\frac{1}{2}(a_0+b_0\ln r)+\sum_{n=1}^{\infty}[(a_nr^n+\frac{b_n}{r^n})\cos n\varphi+(c_nr^n+\frac{d_n}{r^n})\sin n\varphi]. \tag{25}$$

Подставляя в решение (25) заданные граничные условия. получаем:

$$A=\frac{1}{2}(a_0+b_0\ln R_1)+\sum_{n=1}^{\infty}[(a_nR_1^n+\frac{b_n}{r^n})\cos n\varphi+(c_nR_1^n+\frac{d_n}{R_1^n})\sin n\varphi],$$

$$B\sin 2\varphi=\frac{1}{2}(a_0+b_0\ln R_2)+\sum_{n=1}^{\infty}[(a_nR_2^n+\frac{b_n}{R_2^n})\cos n\varphi+(c_nR_2^n+\frac{d_n}{R_2^n})\sin n\varphi].$$

Найдем коэффициенты $a_0, b_0, a_n, b_n, c_n, d_n$, при условии $R_1=a, R_2=b$.

Приравнивая коэффициенты при одинаковых функциях, получаем системы уравнений из которых находим необходимые коэффициенты:

$$\begin{cases} A = \dfrac{1}{2}(a_0 + b_0 \ln a), \\ 0 = \dfrac{1}{2}(a_0 + b_0 \ln b). \end{cases}$$

Отсюда следует:

$$b_0 = \frac{2A}{\ln \frac{a}{b}}, \; a_0 = -\frac{2A}{\ln \frac{a}{b}} \ln b.$$

Из следующей системы

$$\begin{cases} a_n a^n + \dfrac{b_n}{a^n} = 0, \\ a_n b^n + \dfrac{b_n}{b^n} = 0. \end{cases}$$

Находим:

$$a_n = -\frac{b_n}{a^{2n}}, \quad b_n\left(-\frac{b^n}{a^{2n}} + \frac{1}{b^n}\right) = 0,$$

отсюда $b_n = 0$ и $a_n = 0$.

$$\begin{cases} c_n a^n + \dfrac{d_n}{a^n} = 0, \\ c_2 b^2 + \dfrac{d_2}{b^2} = B. \end{cases}$$

Решаем только при $n = 2$.

$$c_2 = -\frac{d_2}{a^4}, \quad d_2 = \frac{Ba^4 b}{a^4 - b^4}, \quad c_2 = -\frac{Bb^2}{a^4 - b^4}.$$

Подставляя найденные коэффициенты в (25) получаем искомое решение

$$u(r, \varphi) = A \frac{\ln \frac{r}{b}}{\ln \frac{a}{b}} + \frac{Bb^2}{b^4 - a^4}\left(r^2 - \frac{a^4}{r^2}\right) \sin 2\varphi.$$

2.3 Решение уравнения Лапласа в прямоугольнике

Задача 3. Найти решение $u = u(x, y)$ уравнения Лапласа в прямоугольнике $0 < x < p, 0 < y < s,$ удовлетворяющее краевым условиям:

$$u(0, y) = u_x(p, y) = 0, \quad u(x, 0) = 0, \quad u(x, \mathrm{s}) = f(x).$$

Решение. Решение уравнения Лапласа:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,$$

удовлетворяющее краевым условиям

$$u(0, y) = u_x(p, y) = 0, \quad u(x, 0) = 0, \quad u(x, \mathrm{s}) = f(x),$$

ищем в виде $u(x, y) = X(x)Y(y)$.

Подставляя предполагаемую форму решения в уравнение и разделяя переменные обычным способом, получаем:

$$-\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{Y''(\mathrm{y})}{Y(\mathrm{y})} = \lambda^2$$

Отсюда получаем два обыкновенных дифференциальных уравнения:

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda^2 X(x) = 0, \\ Y''(x) - \lambda^2 Y(y) = 0. \end{cases}$$

Для первого уравнения с учетом однородных граничных условий по переменной x, решаем задачу Штурма- Лиувилля на отыскание собственных значений и собственных функций:

$$X(x) = C_1 \cos \lambda x + C_2 \sin \lambda x$$

Учитывая граничные условия:

$$X(0) = X'(p) = 0$$

Отсюда находим:

$$C_1 = 0$$

$$\lambda C_2 \cos \lambda p = 0, \quad \lambda_n = \frac{\pi}{2p}(1 + 2n)$$

$$X_n(x) = \sin\frac{\pi}{2p}(1+2n)x.$$

Решение второго уравнения можно записать в виде:

$$Y_n(y) = A_n e^{\lambda_n y} + B_n e^{-\lambda_n y}$$

Используя принцип суперпозиции, запишем общее решение в виде:

$$u(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty}(A_n e^{\lambda y} + B_n e^{-\lambda y})\sin\frac{\pi}{2p}(1+2n)x.$$

Чтобы найти постоянные интегрирования используем граничные условия по переменной *y*:

$$Y(0)=0\,,\ Y(s)=f(x),$$

используя первое условие, получаем

$$A_n + B_n = 0.$$

Чтобы воспользоваться вторым граничным условием, сначала разложим функцию *f(x)* в ряд Фурье по собственным функциям однородной краевой задачи:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n \sin\frac{\pi}{2p}(1+2n)x,$$

где коэффициенты разложения определяются по формуле

$$f_n = \frac{2}{p}\int_0^p f(x)\sin\frac{\pi}{2p}(1+2n)x dx.$$

Таким образом, сравнивая два ряда Фурье, находим постоянные интегрирования:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{p}\int_0^p f(x)\sin\frac{\pi}{2p}(1+2n)x dx\right)\sin\frac{\pi}{2p}(1+2n)x =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}(A_n e^{\lambda s} + B_n e^{-\lambda s})\sin\frac{\pi}{2p}(1+2n)x,$$

отсюда

$$A_n e^{\lambda s} + B_n e^{-\lambda s} = \frac{2}{p}\int_0^p f(x)\sin\frac{\pi}{2p}(1+2n)x dx$$

и учитывая, что

$A_n = -B_n$, следовательно

$$A_n(e^{\lambda s} + e^{-\lambda s}) = \frac{2}{p}\int_0^p f(x)\sin\frac{\pi}{2p}(1+2n)x dx,$$

$$A_n = \frac{\frac{2}{p}\int_0^p f(x)\sin\frac{\pi}{2p}(1+2n)x dx}{\operatorname{sh}\frac{\pi}{2p}(1+2n)s}.$$

Подставляя найденные коэффициенты в общее решение, приходим к ответу поставленной задачи.

Ответ

$$u(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\frac{2}{p}\int_0^p f(x)\sin\frac{\pi}{2p}(1+2n)x dx}{\operatorname{sh}\frac{\pi}{2p}(1+2n)s} \sin\frac{\pi}{2p}(1+2n)x \operatorname{sh}\frac{\pi}{2p}(1+2n)y.$$

Задача 4. Найти решение $u = u(x,y)$ уравнения Лапласа в прямоугольнике $0 < x < p, 0 < y < s$, удовлетворяющее краевым условиям:

$$u(0,y) = 0, \quad u_x(p,y) = q, \quad u(x,0) = 0, \quad u(x,\mathrm{s}) = U.$$

Решение.

Решение ищем в виде $u(x,y) = v(x,y) + w(x,y)$. Потребуем, чтобы функция v удовлетворяла условиям:

1) $\Delta v = 0,$

$$v(0,y) = 0, \quad v(x,0) = 0,$$
$$v_x(p,y) = 0 \quad v(x,\mathrm{s}) = U.$$

Тогда для w получаем задачу:

2) $\Delta w = 0,$

$$w(0, y) = 0, \quad w(x, 0) = 0,$$
$$w_x(p, y) = q, \quad w(x, \mathrm{s}) = 0.$$

Решаем задачу 1) методом Фурье. Полагаем

$$v(x, y) = X(x)Y(y)$$

подставляя в уравнение Лапласа для *v(x,y)*, получим

$$X''Y + XY'' = 0.$$

Разделяя переменные:

$$\frac{X''}{X} = \frac{Y''}{Y} = -\lambda^2$$

Таким образом, приходим к задаче Штурма-Лиувилля по независимой переменной *x*

$$\begin{cases} X'' + \lambda^2 X = 0, \\ X(0) = X'(p) = 0, \end{cases}$$

отсюда находим

$$X(x) = \sin\frac{\pi}{2p}(1+2n)x.$$

Для функции *Y(y)* получаем уравнение

$$Y'' - \lambda_n Y = 0,$$

отсюда

$$Y(y) = A_n e^{\lambda_n y} - B_n e^{-\lambda_n y}.$$

Таким образом, решение задачи 1) можно записать в виде:

$$v(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} (A_n e^{\lambda y} + B_n e^{-\lambda y}) \sin\frac{\pi}{2p}(1+2n)x.$$

Используя граничные условия задачи 1) по *y*, находим постоянные интегрирования:

$$A_n + B_n = 0,$$

$$U=\frac{2}{p}\int_0^p U\sin\frac{\pi}{2p}(1+2n)xdx=\frac{4U}{\pi(1+2n)},$$

$$\frac{4U}{\pi(1+2n)}=A_n e^{\lambda s}+B_n e^{-\lambda s},$$

$$A_n=-B_n,$$

$$A_n=\frac{4U}{\pi(1+2n)\mathrm{sh}\lambda s}.$$

Подставляя A_n и B_n в *v(x,y)* находим решение задачи 1):

$$v(x,y)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{4U}{\pi(1+2n)\mathrm{sh}\lambda s}\sin\frac{\pi}{2p}(1+2n)x\ \mathrm{sh}\lambda y$$

Теперь решаем задачу 2). Ее решение ищем в виде: $w(x,y)=X(x)Y(y)$.

Алгоритм решения такой же, но задача Штурма- Лиувилля уже по независимой переменной *y*.

Проделав аналогичные разделения и решив задачу на отыскание собственных значений и собственных функций, находим

$Y(\mathrm{y})=C_1\cos\lambda y+C_2\sin\lambda y$, с учетом граничных условий:

$$C_1=0,\quad \sin\lambda s=0,\quad \lambda_n=\frac{\pi n}{s}.$$

$$Y_n(\mathrm{y})=\sin\frac{\pi n}{s}y.$$

Таким образом, решение задачи 2) можно записать в виде:

$$w(x,y)=\sum_{n=0}^{\infty}(A_n e^{\lambda x}+B_n e^{-\lambda x})\sin\frac{\pi n}{s}y.$$

Учитывая граничные условия по переменной *x*, находим постоянные интегрирования:

$$A_n+B_n=0$$

$$q=\frac{2}{s}\int_0^s q\sin\frac{\pi n}{s}ydy=\frac{2q(1-(-1^n))}{\pi n},$$

если n четное, то $q = 0$, если $n = 2k + 1$, то

$$q = \frac{4q}{\pi n} \text{, таким образом:}$$

$$A_n = \frac{4q}{\frac{\pi(1+2n)}{s}\pi(1+2n)\operatorname{sh}\frac{\pi(1+2n)}{s}p}.$$

Беря суперпозицию частных решений, находим для задачи 2) решение:

$$w(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4qs}{\pi^2(1+2n)^2 \operatorname{sh}\frac{\pi p}{s}(1+2n)} \sin\frac{\pi(1+2n)}{s} y \operatorname{sh}\frac{\pi}{s}(1+2n)x.$$

Подставляя в равенство $u(x, y) = v(x, y) + w(x, y)$ решения задач 1) и 2), получаем решение исходной задачи.

Ответ:

$$u(x, y) = \frac{4qs}{\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(1+2n)^2 \operatorname{sh}\frac{\pi p}{s}(1+2n)} \sin\frac{\pi(1+2n)}{s} y \operatorname{sh}\frac{\pi}{s}(1+2n)x +$$

$$+\frac{4U}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(1+2n)\operatorname{sh}\frac{(1+2n)\pi s}{2p}} \sin\frac{\pi}{2p}(1+2n)x \operatorname{sh}\frac{(1+2n)\pi}{2p} y.$$

2.4 Решение уравнения Лапласа в круговом секторе

Задача 5. В круговом секторе $0 < r < R,\ 0 < \varphi < \alpha$ найти гармоническую функцию, удовлетворяющую краевым условиям:

$$u(r, 0) = u(r, \alpha) = 0, \quad u(R, \varphi) = A\varphi.$$

Запишем уравнение Лапласа в полярной системе координат:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0,$$

решая это уравнение изложенным выше методом разделения переменных, получаем два обыкновенных дифференциальных уравнения:

$$\begin{cases} \Phi''(\varphi)+\lambda\Phi(\varphi)=0, \\ r\dfrac{d}{dr}(\dfrac{rdR}{dr})-\lambda R=0, \end{cases}$$

решая первое уравнение с четом граничных условий по переменной φ

$$\Phi(\varphi)=A\sin\sqrt{\lambda}\varphi+B\cos\sqrt{\lambda}\varphi$$

Подставим граничные условия

$\varphi(0)=0,\ \ B=0.$

$u(r,\alpha)=0,\ \ \Phi(\alpha)\text{=}0,\ \ \Phi(\alpha)=A\sin\sqrt{\lambda}\alpha=0,$

отсюда

$\sqrt{\lambda}\alpha=\pi n,\ \lambda_n\text{=}(\dfrac{\pi n}{\alpha})^2$, следовательно,

$\Phi_n(\varphi)\text{=}\sin\dfrac{\pi n}{\alpha}\varphi$. Решаем второе уравнение:

$r^2\dfrac{d^2R}{dr^2}+r\dfrac{d}{dr}-\lambda R=0$, решение ищем в виде:

$R(r)=r^{\mu}$ и подставляем в уравнение выражения $\dfrac{dR}{dr}=\mu r^{\mu-1},\ \ \dfrac{d^2R}{d^2r}=\mu(\mu-1)r^{\mu-2},$ получим

$$r^{\mu}\mu(\mu-1)+r^{\mu}\mu-\lambda r^{\mu}=0,\ \ \mu^2-\mu+\mu-\lambda=0.$$

Находим

$$\mu_{1,2}=\pm\frac{\pi n}{\alpha}\ .$$

Общее решение можно записать в виде:

$$R(r)\text{=}A_n r^{\frac{\pi n}{\alpha}}+B_n r^{-\frac{\pi n}{\alpha}},$$

$B_n=0,$ т.к. при $r=0\ \ R(r)=\infty$.

Получим общее решение исходной задачи:

$$u(r,\varphi)=\sum_{n=1}^{\infty}A_n r^{\frac{\pi n}{\alpha}}\sin\frac{\pi n}{\alpha}\varphi$$

Подставим граничное условие $r = R$

$A\varphi=\sum_{n=1}^{\infty}A_n R^{\frac{\pi n}{\alpha}}\sin\frac{\pi n}{\alpha}\varphi$, разложим левую часть равенства в ряд Фурье

$A\varphi=\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n\sin\frac{\pi n}{\alpha}\varphi$ и, определяя коэффициенты разложения,

$$\alpha_n=\frac{2}{\alpha}\int_0^{\alpha}A\varphi\sin\frac{\pi n}{\alpha}\varphi d\varphi=\begin{bmatrix} u=\varphi & du=d\varphi \\ dv=\sin\frac{\pi n}{\alpha}\varphi d\varphi & v=-\frac{\alpha}{\pi n}\cos\frac{\pi n}{\alpha}\varphi \end{bmatrix}=$$

$$=\frac{2}{\alpha}A(\varphi(-\frac{\alpha}{\pi n}\cos\frac{\pi n}{\alpha}\varphi)\Big|_0^{\alpha}+(\frac{\alpha}{\pi n})^2\sin\frac{\pi n}{\alpha}\varphi\Big|_0^{\alpha})=\frac{2}{\alpha}A(-\frac{\alpha^2}{\pi n}(-1)^n)=\frac{2\alpha A}{\pi n}(-1)^{n+1}$$

находим постоянные интегрирования

$$A_n=\alpha_n R^{-\frac{\pi n}{\alpha}}=\frac{(-1)^{n+1}2A\alpha}{\pi n}R^{-\frac{\pi n}{\alpha}}.$$

Таким образом решение поставленной задачи найдено.

Ответ

$$u(r,\varphi)=\frac{2A\alpha}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\left(\frac{r}{R}\right)^{\frac{\pi n}{\alpha}}\sin\frac{\pi n\varphi}{\alpha}.$$

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Труфанова, Т.В. Методы решения уравнений математической физики / Т.В. Труфанова, А.Г. Масловская, Е.М. Веселова. – Благовещенск : Изд-во Амур. гос. ун-та, 2015. – 196 с.

2. Бицадзе, А. В. Сборник задач по уравнениям математической физики / А. В. Бицадзе, Д. Ф. Калиниченко. – 3-е изд. – М. : Альянс, 2007. – 311 с.

СОДЕРЖАНИЕ

Введение 3
§1. Уравнения параболического типа 4
1.1 Частный случай 4. Метод разделения переменных в случае трех независимых переменных 13
§2. Уравнения эллиптического типа 16
2.1 Решение задачи Дирихле в круге 16
2.2 Решение задачи Дирихле в кольце 20
2.3 Решение уравнения Лапласа в прямоугольнике 22
2.4 Решение уравнения Лапласа в круговом секторе 27
Библиографический список 30