Министерство образования и науки Российской Федерации
АМУРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Т.А. Юрьева

Численные методы в высшей математике

Методические указания для организации самостоятельной работы студентов

Благовещенск
Издательство АмГУ
2020

ББК 22.193

Ю 85

Рекомендовано

учебно-методическим советом университета

Рецензент:

Акилова И.М., доцент кафедры информационных и управляющих систем

ФГБОУ ВО АмГУ

Юрьева Т.А.

Численные методы в высшей математике: методические указания для организации самостоятельной работы студентов / Т.А. Юрьева – Благовещенск: Изд-во АмГУ, 2020. – 47 с.

Методические указания предназначены для студентов направлений подготовки 13.03.02, 15.03.04

Приводятся материалы по теме «Численные методы» для организации работы студентов по дисциплине «Высшая математика».

ВВЕДЕНИЕ

Внеаудиторная самостоятельная работа студентов является одной из важнейших форм организации учебной деятельности обучающихся. При выполнении самостоятельной работы по теме «Численные методы» рекомендуем опираться на следующий план:

1. Ответить на контрольные вопросы для самопроверки. Можно использовать лекции, учебные издания в рабочей программе дисциплины, список литературы в конце настоящих указаний, любые источники учебной информации в открытом доступе;

2. Рассмотреть примеры выполнения заданий. Выполнить задания примеров самостоятельно с сопровождением самоконтроля;

3. Выполнить индивидуальные задания в соответствии с вариантом;

4. Оформить результаты работы на листах формата А4 с одной стороны листа в письменном или печатном варианте. Обязательно оформить титульный лист.

В содержании курса высшей математики для студентов энергетического факультета основополагающим является исследование различных математических моделей, абстрагируясь от реального содержания профессиональной задачи, которая и привела к построению этой модели. Наиболее распространенными являются математические модели представленные уравнениями, системами уравнений, дифференциальными и интегральными уравнениями. При исследовании математических моделей в курсе высшей математики преимущественно используются классические математические методы, позволяющие установить существование и единственность решения задачи, свойства модели и решения. Без владения такими методами невозможно решение многих научно-технических задач. В то же время классическая математика чаще всего имеет дело с бесконечными процессами, когда решение является пределом некоторой последовательности. Кроме того, некоторые задачи вовсе невозможно решить в рамках классической математики, а возможно только приближенное ее решение. Для того чтобы отыскать приближенное решение максимально близкое к точному, при этом используя конечную последовательность шагов, применяют численные методы. Именно поэтому возникла необходимость ввести в курс высшей математики элементы вычислительной математики, занимающейся построением и анализом численных методов. Численные методы позволяют свести решение сложной задачи к выполнению последовательности арифметических операций, поэтому их реализация чаще всего осуществляется на компьютере. Тем не менее, компьютерная реализация выходит за рамки содержания высшей математики. Внимание уделяется типичным численным методам, реализуемым «вручную», оценке их сходимости, погрешности получаемого решения, связи между вычислительной и классической математикой.

§1 Погрешность вычисления

Вопросы для самоконтроля

1. Дайте определения абсолютной и относительной погрешности.

2. Сформулируйте правила округления.

3. Сформулируйте прямую и обратную задачи теории погрешностей.

4. Дайте определение значащей и верной цифр.

5. С помощью общей формулы теории погрешностей выведите формулы абсолютной и относительной погрешностей арифметических операций (сложение, вычитание, умножение, деление) для двух аргументов.

Примеры выполнения заданий

Вычислить значение выражения $y = \ln\sqrt{2} + \sin e$ и оценить погрешность результата. Значение аргументов взять с 4 верными знаками.

Решение. Рассмотрим функцию $y = \ln x_1 + \sin x_2$. Значения аргументов $x_1 = \sqrt{2} = 1{,}414$, $x_2 = e = 2{,}718$.

Следовательно $y = \ln\sqrt{2} + \sin e = \ln 1{,}414 + \sin 2{,}718 = 0{,}346 + 0{,}411 = 0{,}757$.

Абсолютная погрешность аргументов составит $\Delta x_1 = \Delta x_2 = 0{,}0005$.

Абсолютную погрешность выражения рассчитаем по формуле $\Delta y = (\ln x_1)' \Delta x_1 + (\sin x_2)' \Delta x_2 = \frac{1}{x_1}\Delta x_1 + \cos x_2 \Delta x_2$.

Получим $\Delta y = \left|\frac{1}{1{,}414}\right| \cdot 0{,}0005 + \left|\cos 2{,}718\right| \cdot 0{,}0005$ или

$$\Delta y = |0{,}707| \cdot 0{,}0005 + |-0{,}912| \cdot 0{,}0005 = 0{,}0008095 < 0{,}0081.$$

Окончательно $y = 0{,}757 \pm 0{,}0081$. Относительная погрешность составит $\delta y = \frac{0{,}0081}{0{,}757} = 0{,}01$, то есть 1 % от результата.

Задание для самостоятельной работы

Вычислить значения выражений и оценить погрешности вычислений, округлив аргументы до 4 верных знаков.

Таблица 1

1	$y=\dfrac{\sin\pi^2+\cos e}{\ln\sqrt{\pi}}$, $y=(e-2)^{1,4}\cdot ctg\ln e^{\sqrt{2}}-\sin\sqrt{5}$
2	$y=\dfrac{\ln(\pi+1)+\cos\sqrt{e}}{tg2\sqrt{3}}$, $y=\pi^{-2}\cdot\cos\ln e^{\sqrt{3}}-ctg\sqrt{2}$
3	$y=\dfrac{(\pi-2)^{1,5}+tge}{\lg\sqrt{3}}$, $y=\pi^3\cdot\cos e^2-ctg\sqrt{3}$
4	$y=\dfrac{\cos 2e-\sqrt[5]{\pi}}{\log_2\sqrt{3}}$, $y=\ln\pi^{-0,5}\cdot\sin\sqrt[3]{3}+tg3e$
5	$y=\dfrac{tg2e+\cos\sqrt{5}}{\ln ctg\dfrac{\pi}{3}}$, $y=(\pi-2)^{1,5}-tge\cdot\lg\sqrt{3}$
6	$y=\dfrac{(e-2)^{1,4}+ctg\ln e^{\sqrt{2}}}{\sin\sqrt{5}}$, $y=\lg\pi^3-\cos\ln 2\cdot e^{0.5}$
7	$y=\dfrac{\pi^{1,4}+\cos\lg 10^{2e}}{ctg2\sqrt{2}}$, $y=\sin\pi^3\cdot\lg\sqrt{3}-ctge^2$
8	$y=\dfrac{\pi^{-2}+\cos\ln e^{\sqrt{3}}}{ctg\sqrt{2}}$, $y=\ln ctg\dfrac{\pi}{3}-tg2e\cdot\cos\sqrt{5}$
9	$y=\dfrac{\sin\pi^3+\sqrt{e^3}}{\ln\sqrt{3}}$, $y=\log_2(\pi+1)\cdot\sin\sqrt{e}-ctg2\sqrt{3}$
10	$y=\dfrac{(e+1,5)^{0,5}+\sin\ln e^{\sqrt{3}}}{\cos\sqrt{3}}$, $y=\log_2\sqrt{3}\cdot\cos 2e-\sqrt[5]{\pi}$
11	$y=\dfrac{\lg\pi^3+\cos\ln 2}{e^{0.5}}$, $y=tg2e-\sin\sqrt{5}\cdot\ln tg\dfrac{\pi}{3}$
12	$y=\dfrac{\lg\pi^{-0,3}-\sin\sqrt[5]{5}}{tge}$, $y=\ln\sqrt{3}\cdot(\pi-2)^{1,5}+ctge$
13	$y=\dfrac{\cos\pi^2+\sin e}{\log_2\sqrt{\pi}}$, $y=\sqrt{\pi}\cdot\lg\sin\dfrac{\pi}{3}-tg2e$

Продолжение таблицы 1

14	$y=\dfrac{\log_2(\pi+1)+\sin\sqrt{e}}{ctg2\sqrt{3}}$, $y=tg\sqrt{2}\cdot\pi^{-2}+\cos\ln e^{\sqrt{3}}$
15	$y=\dfrac{(\pi-2,5)^{2,5}+ctge}{\lg\sqrt{2}}$, $y=tge-\lg\pi^{-0,3}\cdot\sin\sqrt[5]{5}$
16	$y=\dfrac{\sin 2e-\sqrt[5]{e}}{\log_2\sqrt{5}}$, $y=\cos\sqrt{3}\cdot(e+1,5)^{0,5}+\sin\ln e^{\sqrt{3}}$
17	$y=\dfrac{tg2e+\sin\sqrt{5}}{\ln tg\dfrac{\pi}{3}}$, $y=tg2\sqrt{3}-\sqrt{3}^{3}\cdot\ln\cos\dfrac{\pi}{4}$
18	$y=\dfrac{\log_2\pi-ctg\sqrt[3]{3}}{\cos 2e}$, $y=e^{0.5}\cdot\lg\pi^{3}+\sin\ln 2$
19	$y=\dfrac{\lg\sin\dfrac{\pi}{3}+tg2e}{\sqrt{\pi}}$, $y=ctg2\sqrt{2}\cdot\pi^{1,4}-\cos\lg 10^{2e}$
20	$y=\dfrac{\sqrt{3}^{3}+\ln\cos\dfrac{\pi}{4}}{tg2\sqrt{3}}$, $y=\lg\sqrt{2}\cdot(\pi-2,5)^{2,5}-ctge$
21	$y=\dfrac{\sin\pi^{3}+ctge^{2}}{\lg\sqrt{3}}$, $y=\log_2\sqrt{5}\cdot\sin 2e-\sqrt[5]{e}$
22	$y=\dfrac{(e-1,5)^{1,5}+ctg\ln e^{\sqrt{3}}}{\cos\sqrt{5}}$, $y=\lg\sqrt{3}\cdot\sin\pi^{3}-ctge^{2}$
23	$y=\dfrac{\sqrt{2}^{3}+\ln\sqrt[3]{4}}{ctg\sqrt{5}}$, $y=\ln ctg\dfrac{\pi}{3}-tg2e\cdot\cos\sqrt{5}$
24	$y=\dfrac{\pi^{3}+\cos e^{2}}{ctg\sqrt{3}}$, $y=\ln\pi^{-0,5}-\sin\sqrt[3]{3}\cdot tg3e$
25	$y=\dfrac{\ln\pi^{-0,3}-\cos\sqrt[5]{5}}{tg2e}$, $y=\sin\pi^{3}\cdot ctge^{2}+\lg\sqrt{3}$
26	$y=\dfrac{\ln\pi^{-0,5}-\sin\sqrt[3]{3}}{tg3e}$, $y=\sqrt{2}^{3}\cdot\ln\sqrt[3]{4}+ctg\sqrt{5}$

§2 Методы решения системы линейных уравнений

Вопросы для самоконтроля

1. Какие методы решения систем линейных уравнений называют прямыми, а какие – итерационными?

2. В чем состоит суть метода Гаусса решения систем линейных уравнений?

3. Что называют LU – разложением матрицы?

4. В чем состоит отличие метода Зейделя от метода простой итерации в решении систем линейных уравнений?

5. Назовите условие сходимости методов простой итерации и метода Зейделя.

Примеры выполнения заданий

Найти решение системы линейных уравнений $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 4, \\ 3x_1 - 5x_2 + 3x_3 = 1, \\ 2x_1 + 7x_2 - x_3 = 8 \end{cases}$ методом Гаусса, с помощью LU – разложения. Записать систему с учетом условий сходимости. Найти решение системы методами простой итерации и Зейделя, ограничиваясь тремя итерациями.

Решение. Первое задание решено в пособии Приближенные вычисления в курсе высшей математики. Найденное точное решение (1; 1; 1).

Проверим матрицу системы на выполнение условия сходимости:

$|1| < |2| + |1|$, $|-5| < |3| + |3|$, $|-1| < |2| + |7|$. Диагональное преобладание не выполняется. Преобразуем систему: прибавим ко второму уравнению третье; прибавим к третьему уравнению первое, умноженное на (-3); поменяем местами первое и второе уравнения. Получим $\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 9, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 4, \\ -x_1 + x_2 - 4x_3 = -4. \end{cases}$ Условие сходимости выполнено

$|5| > |2| + |2|$, $|2| \ge |1| + |1|$, $|-4| > |-1| + |1|$.

Приведем систему к удобному для итераций виду, выразив диагональные переменные:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{5}(9 - 2x_2 - 2x_3), \\ x_2 = \frac{1}{2}(4 - x_1 - x_3), \\ x_3 = \frac{1}{4}(4 - x_1 + x_2). \end{cases}$$

За начальные значения неизвестных примем $x_1^{(0)} = x_2^{(0)} = x_3^{(0)} = 0$.

Проведем три приближения методом простой итерации:

$$1)\ \begin{cases} x_1^{(1)} = \frac{1}{5}\left(9 - 2x_2^{(0)} - 2x_3^{(0)}\right) = 1{,}8, \\ x_2^{(1)} = \frac{1}{2}\left(4 - x_1^{(0)} - x_3^{(0)}\right) = 2, \\ x_3^{(1)} = \frac{1}{4}\left(4 - x_1^{(0)} + x_2^{(0)}\right) = 1. \end{cases}$$

$$2)\ \begin{cases} x_1^{(2)} = \frac{1}{5}\left(9 - 2x_2^{(1)} - 2x_3^{(1)}\right) = \frac{1}{5}(9 - 2 \cdot 2 - 2 \cdot 1) = 0{,}6, \\ x_2^{(2)} = \frac{1}{2}\left(4 - x_1^{(1)} - x_3^{(1)}\right) = \frac{1}{2}(4 - 1{,}8 - 1) = 0{,}6, \\ x_3^{(2)} = \frac{1}{4}\left(-4 - x_1^{(1)} + x_2^{(1)}\right) = \frac{1}{4}(4 - 1{,}8 + 2) = 1{,}05. \end{cases}$$

$$3)\ \begin{cases} x_1^{(3)} = \frac{1}{5}\left(9 - 2x_2^{(2)} - 2x_3^{(2)}\right) = \frac{1}{5}(9 - 2 \cdot 0{,}6 - 2 \cdot 1{,}05) = 1{,}14, \\ x_2^{(3)} = \frac{1}{2}\left(4 - x_1^{(2)} - x_3^{(2)}\right) = \frac{1}{2}(4 - 1{,}4 - 1{,}05) = 0{,}775, \\ x_3^{(3)} = \frac{1}{4}\left(-4 - x_1^{(2)} + x_2^{(2)}\right) = \frac{1}{4}(4 - 1{,}4 + 0{,}6) = 0{,}8. \end{cases}$$

Получили приближенное решение системы (1,14; 0,775; 0,8).

Проведем три приближения методом Зейделя:

$$1)\ \begin{cases} x_1^{(1)} = \frac{1}{5}\left(9 - 2x_2^{(0)} - 2x_3^{(0)}\right) = 1{,}8, \\ x_2^{(1)} = \frac{1}{2}\left(4 - x_1^{(0)} - x_3^{(0)}\right) = 2, \\ x_3^{(1)} = \frac{1}{4}\left(4 - x_1^{(0)} + x_2^{(0)}\right) = 1. \end{cases}$$

$$2)\ \begin{cases} x_1^{(2)} = \frac{1}{5}\left(9 - 2x_2^{(1)} - 2x_3^{(1)}\right) = \frac{1}{5}(9 - 2 \cdot 2 - 2 \cdot 1) = 0{,}6, \\ x_2^{(2)} = \frac{1}{2}\left(4 - x_1^{(2)} - x_3^{(1)}\right) = \frac{1}{2}(4 - 0{,}6 - 1) = 1{,}2, \\ x_3^{(2)} = \frac{1}{4}\left(-4 - x_1^{(2)} + x_2^{(2)}\right) = \frac{1}{4}(4 - 0{,}6 + 1{,}2) = 1{,}15. \end{cases}$$

3) $\begin{cases} x_1^{(3)} = \dfrac{1}{5}\left(9 - 2x_2^{(2)} - 2x_3^{(2)}\right) = \dfrac{1}{5}\left(9 - 2\cdot 0{,}6 - 2\cdot 1{,}15\right) = 1{,}1, \\ x_2^{(3)} = \dfrac{1}{2}\left(4 - x_1^{(3)} - x_3^{(2)}\right) = \dfrac{1}{2}\left(4 - 1{,}1 - 1{,}15\right) = 0{,}875, \\ x_3^{(3)} = \dfrac{1}{4}\left(-4 - x_1^{(3)} + x_2^{(3)}\right) = \dfrac{1}{4}\left(4 - 1{,}1 + 0{,}875\right) = 0{,}94375. \end{cases}$

Получили приближенное решение системы (1,1; 0,875; 0,94375).

Как видим, метод Зейделя обеспечивает более быструю сходимость в сравнении с методом простой итерации.

Задание для самостоятельной работы

Найти решение системы линейных уравнений методом Гаусса, с помощью LU – разложения. Записать систему с учетом условий сходимости. Найти решение системы методами простой итерации и Зейделя, ограниваясь тремя итерациями.

Таблица 2

1	$\begin{cases} x+3y-4=0 \\ -2y+5z=3 \\ 2x-y-2z=-1 \end{cases}$	6	$\begin{cases} 2x_1+x_2-x_3=11 \\ -3x_1+2x_2+4=0 \\ 4x_1+5x_3+16=0 \end{cases}$
2	$\begin{cases} 2x_1+3x_2-x_3=2 \\ -3x_1+4x_2+20x_3=21 \\ x_1+2x_2+7x_3=-4 \end{cases}$	7	$\begin{cases} 2x_1-x_2+x_3+3=0 \\ x_1+4x_2-x_3=6 \\ x_1+3x_2+2x_3+11=0 \end{cases}$
3	$\begin{cases} 2x_1-x_2+2x_3=-4 \\ 4x_1+x_2+4x_3=-2 \\ x_1+x_2+2x_3=-1 \end{cases}$	8	$\begin{cases} x+y+4z-1=0 \\ -x+3y+1=0 \\ x+3y+z=2 \end{cases}$
4	$\begin{cases} 3x+3y-z=-3 \\ 2x+y+4z=7 \\ -x+4y-2z=3 \end{cases}$	9	$\begin{cases} 2x_1-x_2-x_3=0 \\ 8x_1+2x_2+3x_3=-3 \\ 9x_1+x_2-2x_3=9 \end{cases}$
5	$\begin{cases} -x_1+3x_2+8x_3=0 \\ 2x_1-3x_2-7x_3=3 \\ 4x_1-x_2+5x_3=1 \end{cases}$	10	$\begin{cases} 2x_1-x_2+x_3=-3 \\ x_1+4x_2-x_3=6 \\ x_1+3x_2+2x_3=-11 \end{cases}$

11	$\begin{cases} 3x-4y+5z+10=0 \\ -x+2y-4z-4=0 \\ 2x+3y+3z+1=0 \end{cases}$	19	$\begin{cases} x_1+2x_2+2x_3=3 \\ 3x_1+7x_2+4x_3=3 \\ 2x_1+3x_2+5x_3=10 \end{cases}$
12	$\begin{cases} 3x_1-x_2-x_3=-6 \\ 4x_1-3x_2-4x_3=3 \\ -2x_1+2x_2+3x_3=-2 \end{cases}$	20	$\begin{cases} x_1+2x_2-x_3-4=0 \\ 2x_1-x_2+3x_3+7=0 \\ 3x_1-3x_2-2x_3=1 \end{cases}$
13	$\begin{cases} 2x_1+3x_2-6x_3=3 \\ -x_1-2x_2+5x_3=-1 \\ 3x_1+4x_2+7x_3=5 \end{cases}$	21	$\begin{cases} 2x_1-4x_2+x_3=3, \\ x_1-5x_2+3x_3=0, \\ x_1-x_2+x_3=2 \end{cases}$
14	$\begin{cases} 3x_1-x_2+5x_3=4 \\ -2x_1+2x_2-4x_3=3 \\ 4x_1+6x_3=13 \end{cases}$	22	$\begin{cases} x+2y+z=4, \\ 2x-y+2z=3, \\ x-2y+z=0. \end{cases}$
15	$\begin{cases} -2y_1+y_2-8y_3=-7 \\ 4y_1+3y_2+7y_3=-1 \\ 5y_1+2y_2+11y_3=4 \end{cases}$	23	$\begin{cases} 4x_1+11x_2+2x_3+10=0 \\ 3x_1+10x_2+x_3+7=0 \\ -2x_1+7x_2+3x_3=1 \end{cases}$
16	$\begin{cases} 6x+y-3z+9=0 \\ 8x-2y+5z=16 \\ 7x-3y+4z-17=0 \end{cases}$	24	$\begin{cases} 2x-y-z=7 \\ x+2y+3z+11=0 \\ 3x+y-2z=4 \end{cases}$
17	$\begin{cases} 4x_1-x_2+8x_3=14 \\ -2x_1+7x_2-11x_3=20; \\ 5x_1+2x_2+6x_3=11 \end{cases}$	25	$\begin{cases} 5x_1-3x_2+x_3-10=0 \\ 3x_1+2x_2-x_3=-1 \\ 2x_1+7x_2+2x_3=-1 \end{cases}$
18	$\begin{cases} 4x+y+4z+2=0 \\ x+y+2z+1=0 \\ 2x-y+2z+4=0 \end{cases}$	26	$\begin{cases} 3x_1-x_2+x_3=10 \\ x_1+2x_2+4x_3=31 \\ 5x_1+x_2+2x_3=29 \end{cases}$

§3 Решение нелинейных уравнений

Вопросы для самоконтроля

1. В чем состоит суть операции отделения корней уравнения.

2. Как определить интервал, содержащий корень уравнения.

3. Рассказать о методах:

а) половинного деления;

б) метода хорд;

в) метода касательных;

г) комбинированного метода;

д) метод итерации.

Примеры выполнения заданий

Вычислить корень уравнения $x^3 - x - 1 = 0$ с точностью до $0{,}01$, применив для его уточнения метод хорд и касательной.

Решение.

1. Отделение корня.

Разбиваем уравнение на две части: $x^3 = x + 1$.

Строим графики функций $y = x^3$ и $y = x + 1$

График $y = x^3$ – кубическая парабола, $y = x + 1$ – прямая.

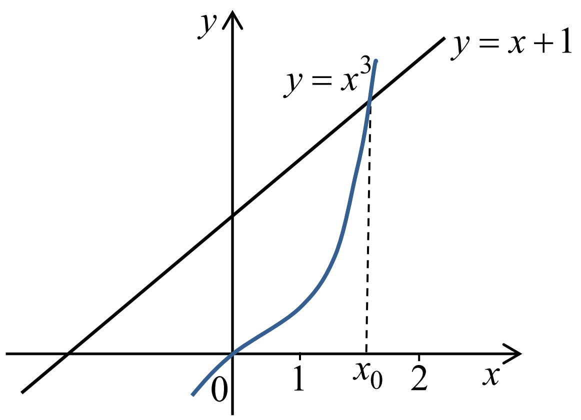


Рисунок 1.

Абсцисса точки пересечения x_0 заключена между 1 и 2, значит, интервал изоляции корня – (1,2). Проверим, что функции $f(x) = x^3 - x - 1$ меняет знак $x \in (1;2)$, т.е. при $x = 1$ $f(1) = -1 < 0$, при $x = 2$ $f(2) = 5 > 0$.

На концах интервала функция имеет разные знаки, значит, корень уравнения находится в интервале (1; 2).

2. Уточнение корня.

Поверим, к какой границе применим метод хорд, а к какой – метод касательных.

$f'(x) = 3x^2 - 1$, $f''(x) = 6 > 0$, $f(1) < 0$;

$f''(x) = 6x$, $f''(2) = 12 > 0$, $f(2) > 0$.

Знак второй производной противоположен знаку функции на границе $a = 1$, значит, к этой границе применим метод хорд, а к границе $b = 1$ – метод касательных.

Находим первые приближения по расчетным формулам:

$$a_{n+1} = a_n - \frac{f(a_n)(b - a_n)}{f(b) - f(a_n)},$$

$$b_{n+1} = b_n - \frac{f(b_n)}{f'(b_n)},$$

$$a_1 = a - \frac{f(a)(b-a)}{f(b) - f(a)} = 1 - \frac{(-1)\cdot 1}{5 - (-1)} = 1{,}17,$$

$$b_1 = b - \frac{f(b)}{f'(b)} = 2 - \frac{5}{11} = 1{,}55.$$

Интервал изоляции сузился: (1,17; 1,55).

Корень находится $1{,}17 < x < 1{,}55$

$$a_2 = a_1 - \frac{f(a_1)(b - a_1)}{f(b) - f(a_1)} = 1{,}17 + \frac{0{,}52 \cdot 0{,}83}{5{,}52} = 1{,}25;$$

$$b_2 = b_1 - \frac{f(b_1)}{f'(b_1)} = 1{,}55 - \frac{1{,}17}{6{,}74} = 1{,}55 - 0{,}17 = 1{,}38.$$

$f(a_1) = (1{,}17)^3 - 1{,}17 - 1 = -0{,}52$,

$f'(b_1) = 3 \cdot (1{,}55)^2 - 1 = 6{,}74$,

$1{,}25 < x < 1{,}38$.

Все вычисления вносим в таблицу 1, которая заполняется постепенно в процессе вычисления.

Таблица 3

	$f(a_n)$	$b - a_n$	$f(b) - f(a_n)$	$\frac{f(a_n)(b-a_n)}{f(b)-f(a_n)}$	$f(b_n)$	$f'(b_n)$	$\frac{f(b_n)}{f'(b_n)}$	a_{n+1}	b_{n+1}
0	-1		5	-0,17	5		0,45	1,17	1,55
1	-0,51	0,83	5,52	-0,08	1,17	6,74	0,17	1,25	1,38
2	-0,30	0,75	5,36	-0,04	0,26	4,73	0,05	1,29	1,33
3	-0,14	0,71	5,14	-0,02	0,02	4,37	0,00	1,31	
4	-0,07	0,69	5,07	-0,01	-	-	-	1,31	

Так как по условию $\varepsilon = 0{,}01$ и $|1{,}33 - 1{,}32| \le 0{,}01$, то корень уравнения равен: 1,32 – с недостатком, 1,33 – с избытком.

Задание для самостоятельной работы

Определить количество действительных корней уравнения, отделить эти корни и, применяя метод хорд и касательных, найти их приближения с точностью до 0,001.

1. $x^3 + 2x - 1 = 0.$
2. $x^3 + 3x + 1 = 0.$
3. $x^3 + 7x - 1 = 0.$
4. $x^3 + 3x + 2 = 0.$

4. $x^3 + x + 1 = 0.$

15. $x^3 + x + 3 = 0.$

16. $x^3 + 2x + 2 = 0.$

17. $x^3 + x + 4 = 0.$

5. $x^3+7x-6=0.$

6. $x^3+2x-4=0.$

7. $x^3+7x+9=0.$

8. $x^3+2x-5=0.$

9. $x^3+3x+8=0.$

10. $x^3+7x+5=0.$

11. $x^3+3x-1=0.$

12. $x^3+2x-11=0.$

13. $x^3+x-3=0.$

18. $x^3+x-1=0.$

19. $x^3+6x+8=0.$

20. $x^3+4x+6=0.$

21. $x^3+6x+1=0.$

22. $x^3+5x+1=0.$

23. $x^3+4x-1=0.$

24. $x^3+6x-1=0.$

25. $x^3+5x-7=0.$

26. $x^3+4x-2=0.$

§4 Интерполирование функции

Вопросы для самоконтроля

1. Постановка задачи «интерполирование функции».

2. В чем состоит задача экстраполирования функции?

3. Для чего и когда применяется интерполяционные многочлены Лагранжа и Ньютона?

4. Запишите интерполяционную формулу Лагранжа.

5. Запишите интерполяционную формулу Ньютона.

6. Оценка погрешности, возникающей при замене функции интерполяционным многочленом.

7. В чем состоит геометрический смысл интерполирования функции?

8. Запишите формулу линейной и квадратичной интерполяции.

9. Нахождение производной функции заданной таблицей.

Примеры выполнения заданий

Пусть построен интерполяционный многочлен Лагранжа или Ньютона для функции $y = \ln x$ с узлами интерполяции $x = 2{,}3{,}4{,}5$: $P_3(x) = 0{,}0089x^3 - 0{,}1387x^2 + 0{,}9306x - 0{,}6841$.

Найти $f'(3{,}5)$ и $f''(3{,}5)$.

$f'(x) \approx P_3'(x) = 0{,}0267x^2 - 0{,}2774x + 0{,}9306$.

$f'(3{,}5) \approx P_3'(3{,}5) = 3{,}3982 - 0{,}9709 + 0{,}9306 = 3{,}3579$.

$f''(x) \approx P_3''(x) = 0{,}0534x - 0{,}2774$.

$f''(3{,}5) \approx P_3''(3{,}5) = 0{,}1855 - 0{,}2774 = 0{,}0919$.

Задание для самостоятельной работы

Функция $y = f(x)$ задана таблицей 4. Найти значение этой функции и её производной при указанном значении x_0 аргумента x.

Таблица 4

1	x	1,0	1,1	1,2	1,3	$x_0 = 1{,}14$
	y	1,01	1,11	1,22	1,33	
2	x	1,4	1,5	1,6	1,7	$x_0 = 1{,}52$
	y	1,45	1,50	1,70	1,82	
3	x	12,8	2,9	3,0	3,2	$x_0 = 3{,}1$
	y	3,93	4,41	4,94	5,52	
4	x	2,2	2,3	2,4	2,5	$x_0 = 2{,}43$
	y	2,63	2,84	3,07	3,32	
5	x	2,2	2,3	2,4	2,5	$x_0 = 2{,}22$
	y	1,9	2,20	2,40	2,67	
6	x	1,8	1,9	2,0	2,1	$x_0 = 2{,}3$
	y	1,44	1,55	1,67	1,82	
7	x	2	2,2	2,4	2,6	$x_0 = 2{,}5$
	y	3,63	4,46	5,47	6,99	
8	x	1,1	1,2	1,3	1,4	$x_0 = 1{,}25$
	y	2,43	2,93	4,50	4,2	
9	x	1,5	1,6	1,7	1,8	$x_0 = 1{,}75$
	y	0,041	0,03	0,02	0,01	
10	x	1,1	1,2	1,3	1,4	$x_0 = 1{,}25$
	y	0,12	0,09	0,06	0,05	
11	x	0,33	0,38	0,43	0,48	$x_0 = 0{,}4$
	y	0,32	0,37	0,41	0,46	
12	x	0,13	0,18	0,23	0,28	$x_0 = 0{,}2$
	y	0,13	0,18	0,23	0,28	

Продолжение таблицы 4

13	x	3,1	3,6	4,1	4,6	$x_0 = 4$
	y	1,85	1,82	1,74	1,6	
14	x	1,1	1,6	2,1	2,6	$x_0 = 1,3$
	y	1,03	1,39	1,65	1,80	
15	x	30	35	40	45	$x_0 = 41$
	y	0,87	0,82	0,76	0,70	
16	x	10	15	20	25	$x_0 = 23$
	y	0,98	0,96	0,94	0,90	
17	x	2,90	2,95	3,00	3,05	$x_0 = 2,93$
	y	1,08	0,90	0,71	0,49	
18	x	2,7	2,75	2,80	2,85	$x_0 = 2,72$
	y	1,6	1,49	1,37	1,24	
19	x	1,90	1,95	2,00	2,05	$x_0 = 1,74$
	y	1,09	1,03	0,96	0,87	
20	x	1,70	1,75	1,80	1,85	$x_0 = 1,74$
	y	1,23	1,21	1,18	1,14	
21	x	0,95	1,00	1,05	1,10	$x_0 = 0,97$
	y	0,92	0,97	1,01	1,05	
22	x	0,75	0,80	0,85	0,90	$x_0 = 0,83$
	y	0,74	0,79	0,84	0,88	
23	x	2,2	2,3	2,4	2,5	$x_0 = 2,43$
	y	2,63	2,84	3,07	3,32	
24	x	1,8	1,9	2,0	2,1	$x_0 = 2,2$
	y	1,96	2,11	2,27	2,44	

Продолжение таблицы 4

25	x	1,4	1,5	1,6	1,7	$x_0 = 1,58$
	y	1,16	1,21	0,27	0,35	
26	x	1,0	1,1	1,2	1,3	$x_0 = 1,26$
	y	1,04	1,06	0,09	0,12	

§5 Формула Тейлора и её применение

Вопросы для самоконтроля

1. Напишите формулу Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа.

2. В каком случае формулу Тейлора называют формулой Маклорена, и какой вид она принимает в этом случае?

3. Напишите формулу Маклорена для функций e^x, $\sin x$, $\cos x$, $\ln(1+x)$.

4. Как используется формула Тейлора для вычисления приближенных значений функции с заданной точностью?

5. В чем состоит метод линейной интерполяции? Каково его геометрическое истолкование? Напишите формулу линейной интерполяции.

Задание для самостоятельной работы

Применив формулу Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа к функции $f(x)=e^x$, вычислить с точностью до 10^{-3} значения e^a и e^b. Методом линейной интерполяции вычислить приближенные значения e^{x_1} и e^{x_2}.

1.	$a=0{,}51$	$b=0{,}54$	$x_1=0{,}52$	$x_2=0{,}53$
2.	$a=0{,}59$	$b=0{,}62$	$x_1=0{,}60$	$x_2=0{,}61$
3.	$a=0{,}63$	$b=0{,}66$	$x_1=0{,}64$	$x_2=0{,}65$
4.	$a=0{,}43$	$b=0{,}46$	$x_1=0{,}44$	$x_2=0{,}45$
5.	$a=0{,}47$	$b=0{,}50$	$x_1=0{,}48$	$x_2=0{,}49$
6.	$a=0{,}15$	$b=0{,}18$	$x_1=0{,}16$	$x_2=0{,}17$
7.	$a=0{,}19$	$b=0{,}22$	$x_1=0{,}20$	$x_2=0{,}21$
8.	$a=0{,}67$	$b=0{,}70$	$x_1=0{,}68$	$x_2=0{,}69$
9.	$a=0{,}71$	$b=0{,}74$	$x_1=0{,}72$	$x_2=0{,}73$
10.	$a=0{,}75$	$b=0{,}78$	$x_1=0{,}76$	$x_2=0{,}77$
11.	$a=0{,}79$	$b=0{,}82$	$x_1=0{,}80$	$x_2=0{,}81$
12.	$a=0{,}83$	$b=0{,}86$	$x_1=0{,}84$	$x_2=0{,}85$

13.	$a = 0{,}87$	$b = 0{,}90$	$x_1 = 0{,}88$	$x_2 = 0{,}89$
14.	$a = 0{,}91$	$b = 0{,}94$	$x_1 = 0{,}92$	$x_2 = 0{,}93$
15.	$a = 0{,}95$	$b = 0{,}98$	$x_1 = 0{,}96$	$x_2 = 0{,}97$
16.	$a = 0{,}31$	$b = 0{,}34$	$x_1 = 0{,}32$	$x_2 = 0{,}33$
17.	$a = 0{,}35$	$b = 0{,}38$	$x_1 = 0{,}36$	$x_2 = 0{,}37$
18.	$a = 0{,}39$	$b = 0{,}42$	$x_1 = 0{,}40$	$x_2 = 0{,}41$
19.	$a = 0{,}43$	$b = 0{,}46$	$x_1 = 0{,}44$	$x_2 = 0{,}45$
20.	$a = 0{,}47$	$b = 0{,}50$	$x_1 = 0{,}48$	$x_2 = 0{,}49$
21.	$a = 0{,}15$	$b = 0{,}18$	$x_1 = 0{,}16$	$x_2 = 0{,}17$
22.	$a = 0{,}19$	$b = 0{,}22$	$x_1 = 0{,}20$	$x_2 = 0{,}21$
23.	$a = 0{,}23$	$b = 0{,}26$	$x_1 = 0{,}24$	$x_2 = 0{,}25$
24.	$a = 0{,}27$	$b = 0{,}30$	$x_1 = 0{,}28$	$x_2 = 0{,}29$
25.	$a = 0{,}97$	$b = 1{,}00$	$x_1 = 0{,}98$	$x_2 = 0{,}99$
26.	$a = 0{,}63$	$b = 0{,}66$	$x_1 = 0{,}64$	$x_2 = 0{,}65$

§6 Графическое дифференцирование и интегрирования

Вопросы для самоконтроля

1. Когда и для чего используется графическое дифференцирование и интегрирование?
2. Сформировать алгоритм построения графика производной по заданному графику функции.
3. Дайте определение криволинейной трапеции.
4. Дайте понятие определенного интеграла.
5. Сформулируйте геометрический смысл определенного интеграла.
6. Сформулируйте свойства определенного интеграла.
7. Сформулируйте теорему о «среднем».
8. Сформулируйте алгоритм построения графика функции по заданному графику ее производной.

Примеры выполнения заданий

Графическим дифференцированием называется построение графика производной $y' = f'(x)$ по данному графику функции $y = f(x)$. К графическому отысканию производной прибегают главным образом тогда, когда аналитическое выражение для функции неизвестно, но функция задана графически.

Пусть дан график функции $y = f(x)$ на сегменте $[a;b]$ (рисунок 2).

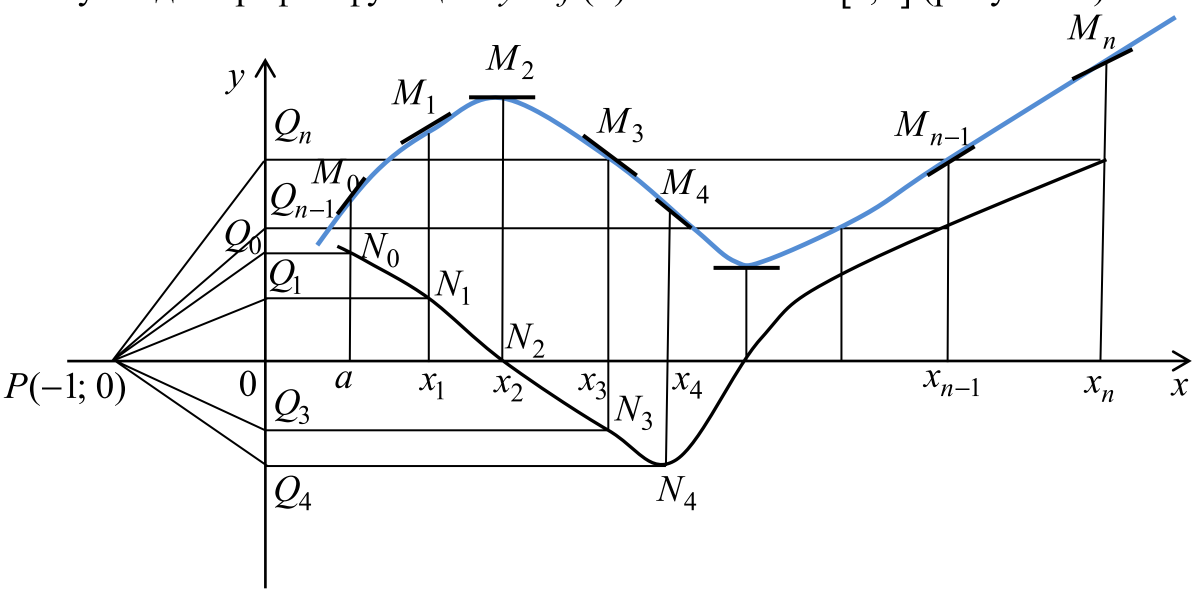


Рисунок 2

Разобьем этот сегмент на n частей с помощью точек $x_0 = a$, $x_1 = x_2, ... x_{n-1}, x_n - b$ и отметим на данном графике соответствующие точки $M_0, M_1, ..., M_n$, включающие в себя по возможности характерные для графика точки. Через каждую из этих точек с возможной тщательностью строим касательные к графику функции. На оси OX выбираем точку P(-1;0) – полюс и проводим параллельные этим касательным прямые до их пересечения с осью OY в точках $Q_0, Q_1, Q_2 ..., Q_n$. Отрезки оси $OY : OQ, OQ_2 ..., OQ_n$ представляют собой соответственно значение производной $y' = f'(x)$ в точках $x_0, x_1, ... x_n$. В самом деле, например, для точки M_1 из ΔPOQ_1 имеем: $OQ_1 = POtg\alpha_1$, где α_1 – угол, который образует с осью OX отрезок PQ_1 и параллельная ему касательная к графику данной функции в точке M_1. Согласно геометрическому смыслу производной $tg\alpha = f'(x)$. Учитывая, что $PO = 1$, имеем $OQ_1 = f'(x_1)$. Аналогичные результаты получаем для остальных точек. Проведем через точки $Q_0, Q_1, ..., Q_n$ прямые, параллельные оси, OX , и через точки $M_0, M_1, ..., M_n$ – прямые, параллельные оси OY . Точки пересечения этих прямых $N_0, N_1, ..., N_n$ принадлежат графику производной $y' = f'(x)$. Соединив их линией, мы приближенно получим график производной $y' = f'(x)$, по которому можно найти приближенное значение производной в любой точке сегмента $[a;b]$.

Графическим интегрированием называется построение по данному графику непрерывной функции $y = f(x)$ графика её первообразной $F(x) = \int_a^x f(x)dx$. К графическому интегрированию прибегают тогда, когда требуется иметь общее представление об интеграле функции или когда подынтегральная функция задана графически и её аналитическое выражение неизвестно.

Пусть дан график функции $y = f(x)$ на сегменте $[a;b]$ (рисунок 3).

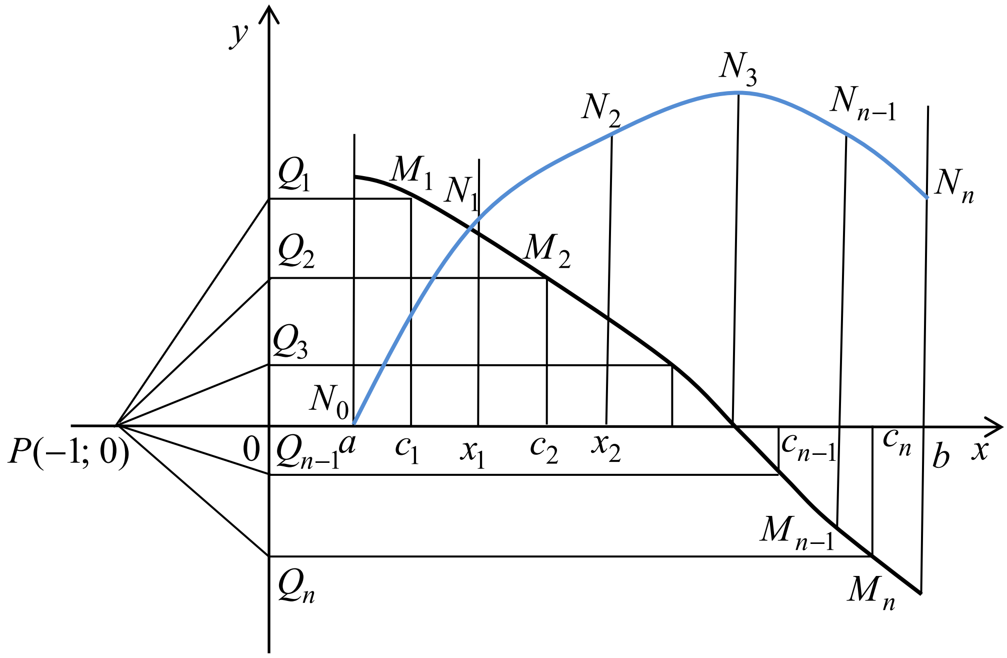


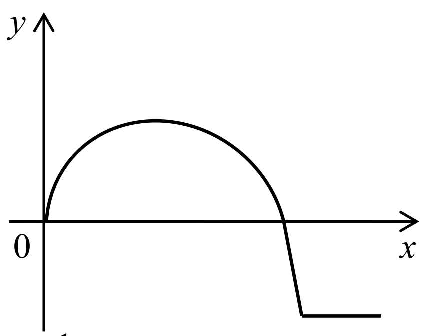
Рисунок 3

Разобьём этот сегмент на n частей точками $x_0 = a, x_1, x_2, \ldots x_{n-1}, x_n - b$. Точки деления выбираем таким образом, чтобы каждый частичный интервал был интервалом монотонности подынтегральной функции и чтобы в числе точек деления находились все точки пересечения линии $y = f(x)$ с осью OX. Через точки деления отрезка $[a;b]$ проведем прямые, параллельные оси OY. Таким образом, разбираем площадь криволинейной трапеции, ограниченной кривой $y = f(x)$, на узкие вертикальные полоски. Каждую из этих полосок заменяем, используя теорему о среднем, равновеликим (по возможности) прямоугольником с тем же основанием и высотой, равной $f(Ci)$, где $Ci(i = 1,2,\ldots,n)$ некоторая промежуточная точка i-го отрезка $[x_{i-1}, x_i]$, т.е. полагаем: $\int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx = f(Ci)(x_i - x_{i-1})$, где $x_{i-1} \le Ci \le x_i$ $(i = 1,2,\ldots,n)$. Через точки $Ci(i = 1,2,\ldots,n)$ проведем прямые, параллельные оси OY. Точки пересечения этих прямых с кривой $y = f(x)$ обозначим $M_1, M_2, \ldots, M_n$. Через точки $M_1, M_2, \ldots, M_n$ проведем прямые, параллельные оси OX. Точки их пересечения с осью ОУ; $Q_1, Q_2, ..., Q_n$. Выберем полюс $P(-1;0)$ и проведем лучи $PQ_1, PQ_2, ..., PQ_n$. Искомую линию $y = F(x)$ приближенно заменяем ломаной $N_0, N_1, ..., N_n$ (или кривой, проходящей через точки $N_0, N_1, ..., N_n$ (рисунок 3). Звенья этой ломаной параллельны соответствующим лучам, а именно: $N_0N_1 \parallel PQ_1; N_1N_2 \parallel PQ_2; .... N_{n-1}, N_n \parallel PQ_n$. Покажем, что ординаты точек $N_i (i = 1,2,.....n)$ равны $F(x_i)$ соответственно.

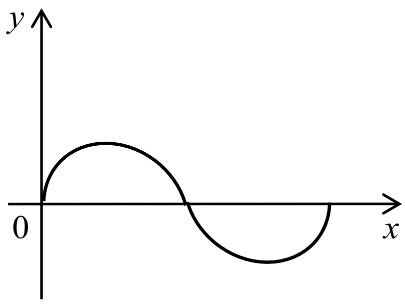
Имеем: $\int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx = f(Ci)(x_i - x_{i-1})$, где $x_{i-1} < Ci < x_i \quad (i = 1,2,...,n)$ (в силу теоремы о среднем). $F(x) = \int\limits_a^x f(x)dx$; $F(x_i) = \int\limits_{x_0}^{x_i} f(x)dx = \int\limits_{x_0}^{x_{i-1}} f(x)dx + \int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx = F(x_{i-1}) + f(C_i)(x_i - x_{i-1})$, а угловой коэффициент звена $N_{i-1}N_i$ равен угловому коэффициенту луча PQ_i $K_i = \dfrac{OQ_i}{PO} = \dfrac{f(C_i)}{1} = f(C_i)$.

Задание для самостоятельной работы

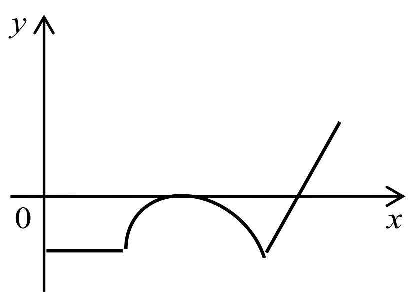
1. По графику функции $y = f(x)$ построить графики функции $f'(x)$ и $f''(x)$.



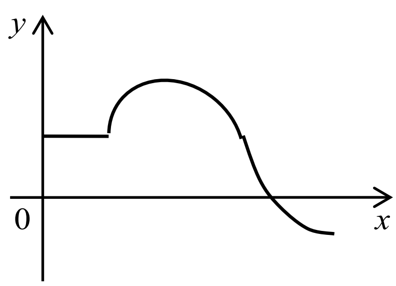
1



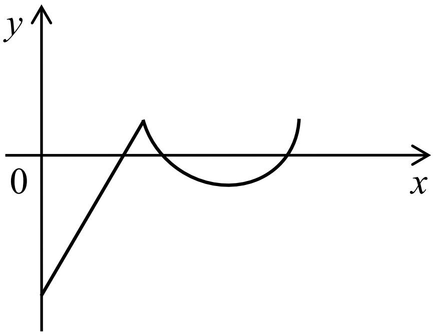
2



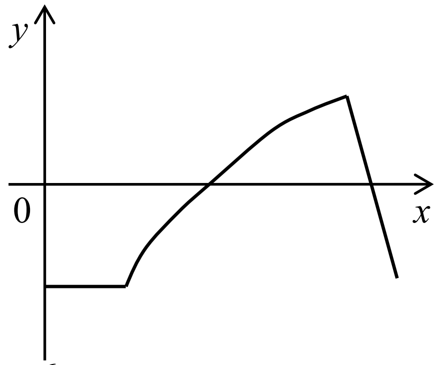
3



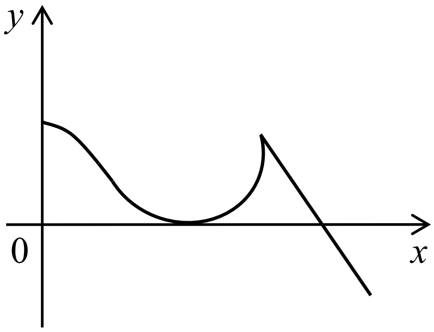
4



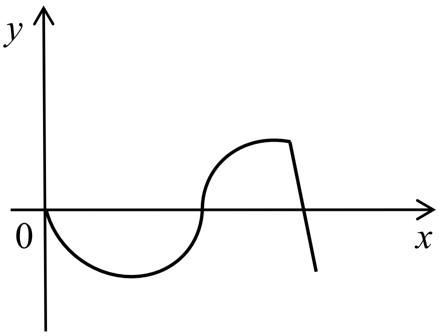
5



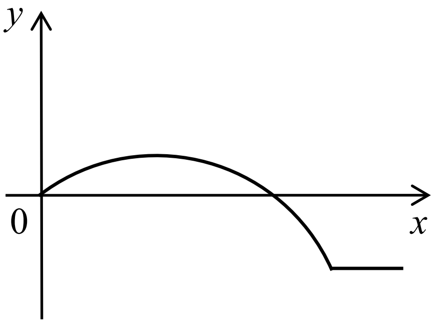
6



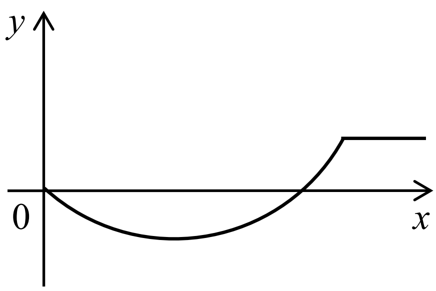
7



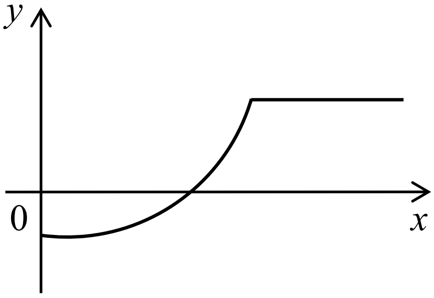
8



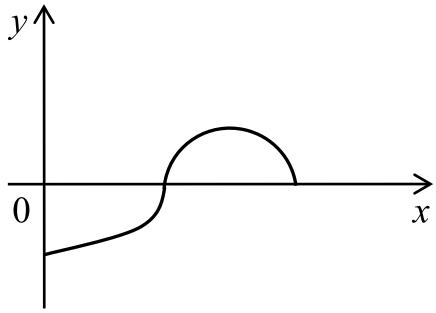
9



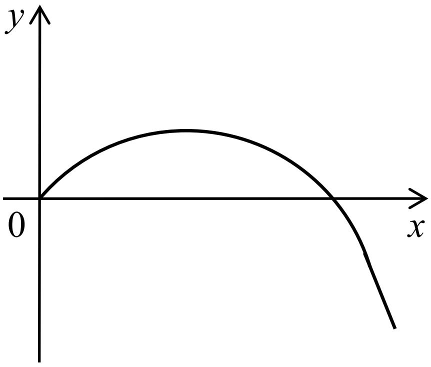
10



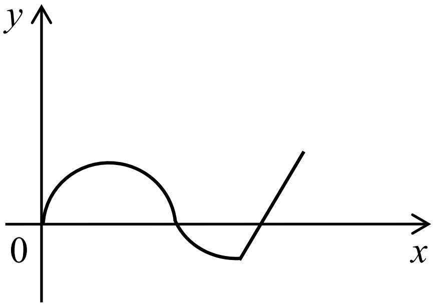
11



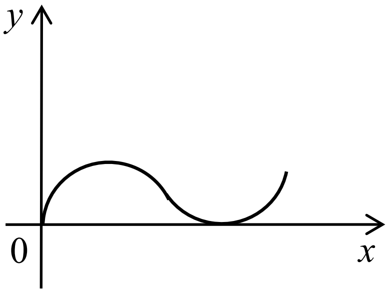
12



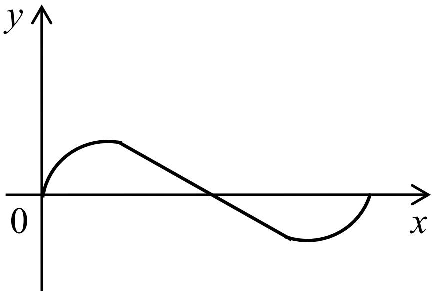
13



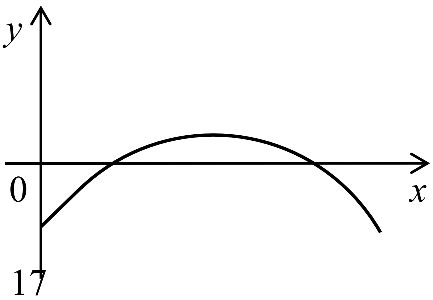
14



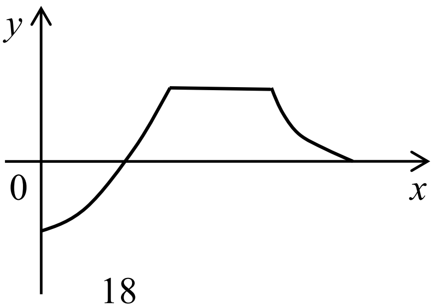
15



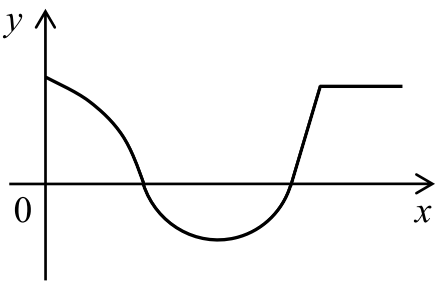
16



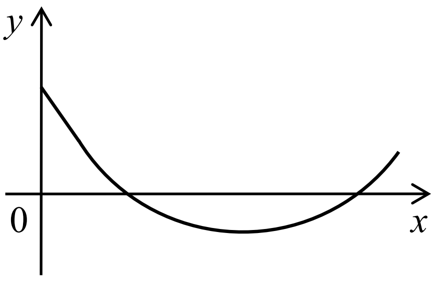
17



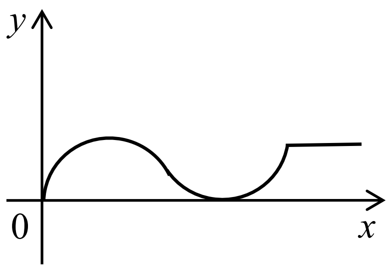
18



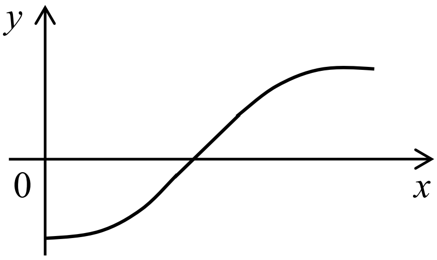
19



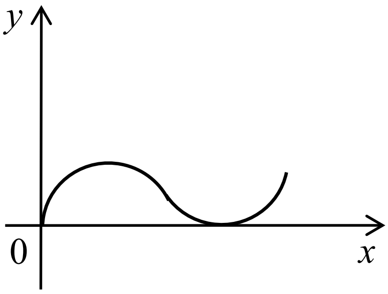
20



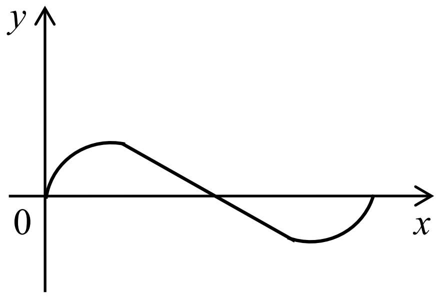
21



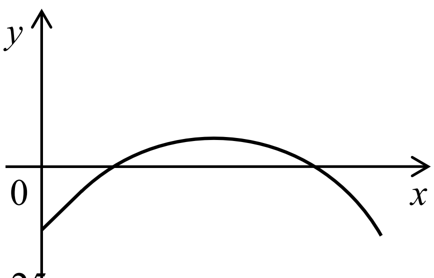
22



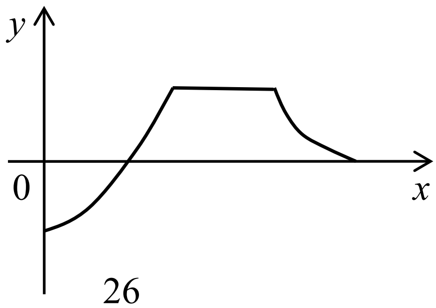
23



24

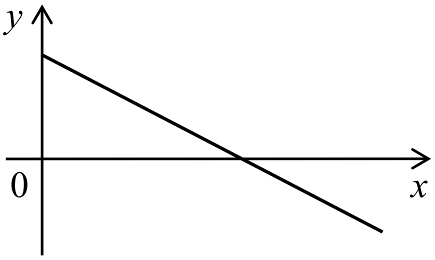


25

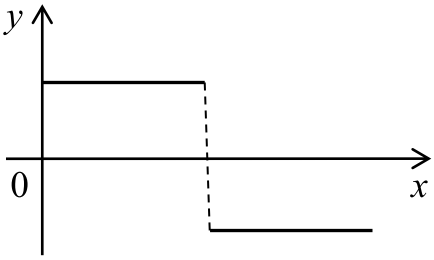


26

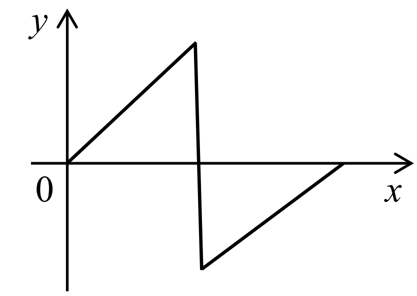
2. По графику функции $f''(x)$ построить функций $f'(x)$ и $f(x)$.



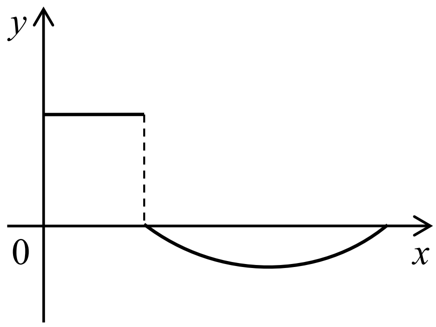
1



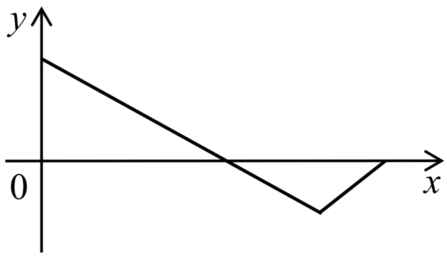
2



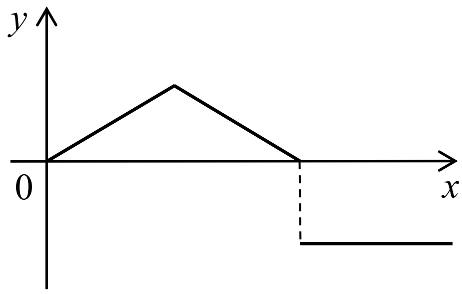
3



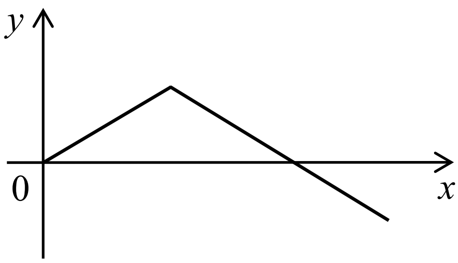
4



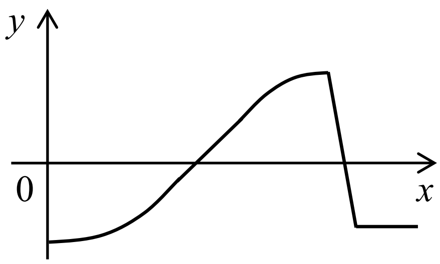
5



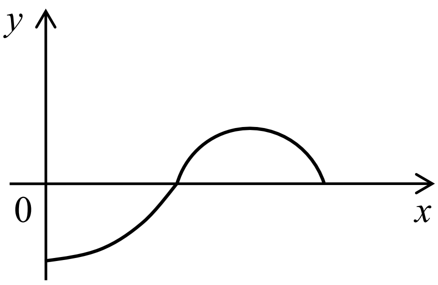
6



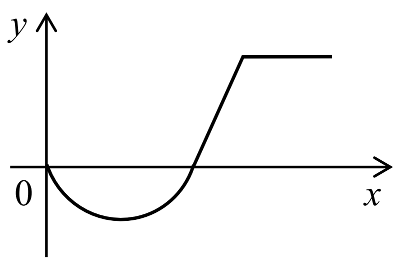
7



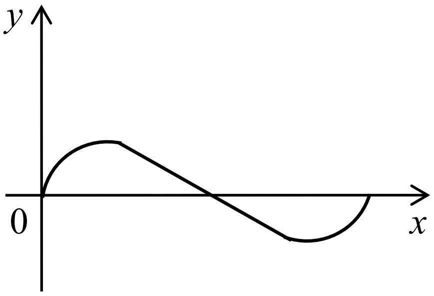
8

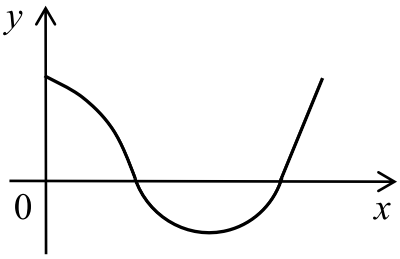


9



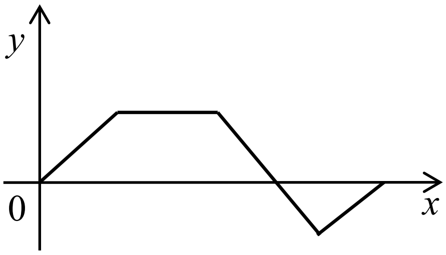
10

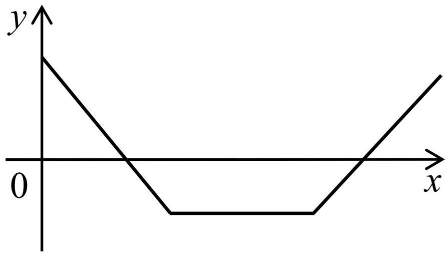




11

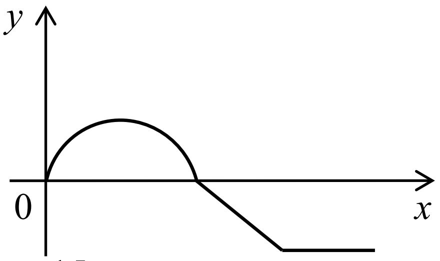
12

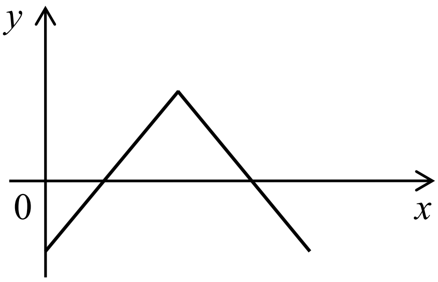




13

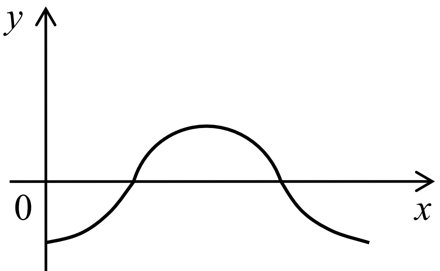
14

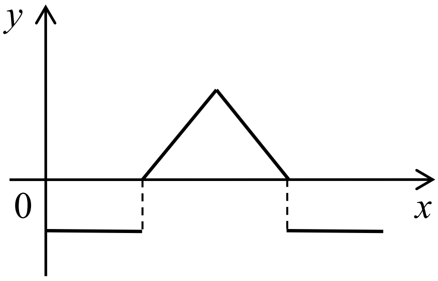




15

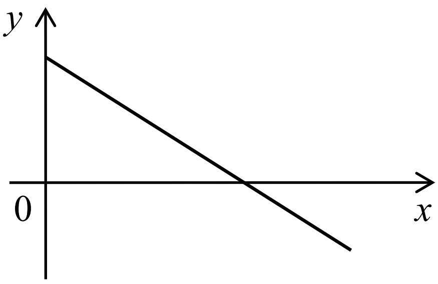
16

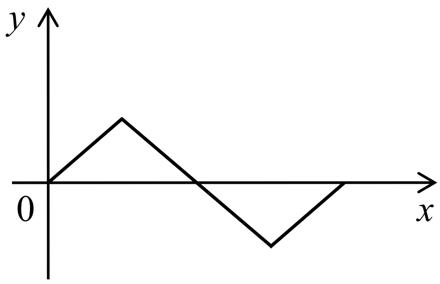




17

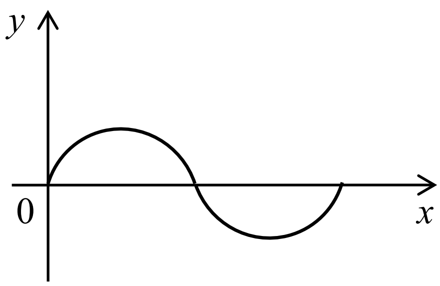
18



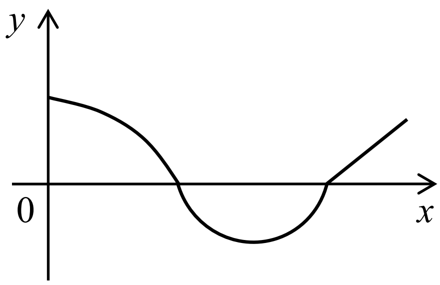


19

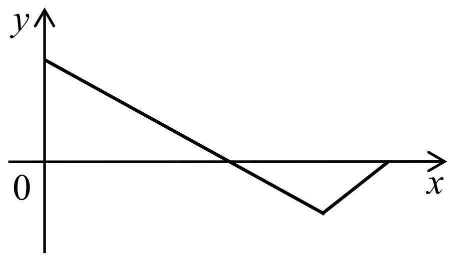
20



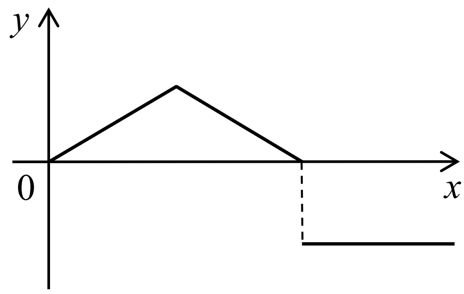
21



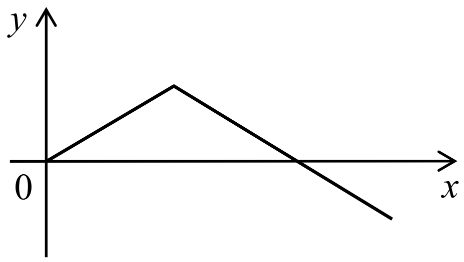
22



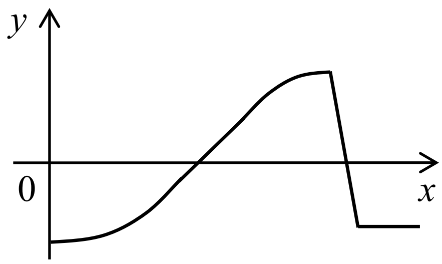
23



24



25



26

§7 Приближенное вычисление интегралов

Вопросы для самопроверки

1. Постановка задачи интерполяции. Интерполяционный многочлен Лагранжа.

2. Постановка задачи, приводящей к формуле квадратур. Общая схема ее решения с помощью интерполяционного многочлена Лагранжа.

3. Вывод формулы трапеций.

4. Вывод формулы парабол (Симпсона).

Примеры выполнения заданий

Вычислить интеграл $\int_0^{0,8} \cos x\, dx$ с точностью до 10^{-6}.

Решение.

Полагая $h^4 = 10^{-6}$, $h \approx 0,03$. Для того, чтобы избежать лишних вычислений, увеличим шаг и возьмем $h = 0,1$. Если полученная точность окажется недостаточной, можно будет уменьшить шаг вдвое и дополнительно подсчитать недостающие значения функции $f(x)$.

Итак, разбиваем сегмент $[0; 0,8]$ на восемь частей и составляем таблицу значений подынтегральной функции $y = \cos x$. При этом, для поправочного члена в формуле трапеций нужны также значения функций в точках $x = -0,1$ и $x = 0,9$.

В соответствии с приведенным выше бланком размещаем вычисления в таблице 5.

Таблица 5

x		y	
x_{-1}	$-0,1$	y_{-1}	0,995004
x_0	0	y_0	1,00000
x_1	0,1	y_1	0,995004
x_2	0,2	y_2	0,980067

Продолжение таблицы 5

x_3	0,3	y_3	0,955336
x_4	0,4	y_4	0,921061
x_5	0,5	y_5	0,877583
x_6	0,6	y_6	0,825836
x_7	0,7	y_7	0,764842
x_8	0,8	y_8	0,696707
x_9	0,9	y_9	0,621610

$$S_1 = 0{,}995004 + 0{,}955336 + 0{,}877583 + 0{,}764842 = 3{,}592767;$$

$$S_2 = 0{,}980067 + 0{,}921061 + 0{,}825836 = 2{,}726964;$$

$$S_3 = 0{,}995004 + 0{,}764842 - 0{,}995004 - 0{,}621610 = 0{,}143232.$$

Формула парабол $J_{пар} = \frac{h}{3}(y_0 + y_8 + 4S_1 + 2S_2) = 0{,}7173565$.

Формула трапеций $J_{тр} = \frac{h}{2}\left(y_0 + y_8 + 2\left(S_1 + S_2\right)\right) + \frac{h}{24}S_3 = 0{,}7173550$.

Расхождения между $J_{тр}$ и $J_{пар}$ имеют порядок 10^{-6}, т.е. порядок допустимой погрешности.

Таким образом, можно положить $\int\limits_0^{0,8} \cos x\, dx = 0{,}717355$ (или 0,717356).

Истинное значение интеграла равно $\sin 0{,}8 = 0{,}7173560$.

Задание для самостоятельной работы

Вычислить интеграл с точность $\varepsilon = 0{,}001$, пользуясь формулами парабол и трапеций.

1. $\int\limits_1^2 \frac{\sin(\sqrt{x}+1)}{2x-1}dx$;
2. $\int\limits_0^1 \frac{\cos(x+2)}{\sqrt{x^2+1}}dx$;
3. $\int\limits_0^1 \frac{2x^2-1}{e^{\sqrt{x}}}dx$;
4. $\int\limits_{-0,5}^{0,5} \frac{3x+5}{\sin^2(x+1)}dx$;

5. $\int\limits_{1,2}^{1,6} \frac{x^2-4}{\sin\sqrt{x^2-1}}dx$;

6. $\int\limits_{2}^{6} \frac{e^{2x-1}}{x^2-3}dx$;

7. $\int\limits_{4}^{9} \frac{e^{\sqrt{x}-1}}{x-2}dx$;

8. $\int\limits_{3}^{8} \frac{2x+3}{\sqrt{x+1}}dx$;

9. $\int\limits_{1}^{5} \frac{\sqrt{4x+5}}{e^{2x-1}}dx$;

10. $\int\limits_{0}^{4} \frac{\sin(2x+1)}{\sqrt{x+1}}dx$;

11. $\int\limits_{0}^{1} \frac{\cos(2x+1)}{\sqrt{x+4}}dx$;

12. $\int\limits_{1}^{2} \frac{e^{3x-2}}{\sqrt{2x+3}}dx$;

13. $\int\limits_{2}^{4} \frac{e^{3x-5}}{\sqrt{x}+3}dx$;

14. $\int\limits_{0,4}^{1} \frac{tg^{\frac{3x-1}{2}}}{\sqrt{x}+3}dx$;

15. $\int\limits_{2}^{4} \frac{\sqrt{x+5}}{\sin\frac{3x-1}{2}}dx$;

16. $\int\limits_{1}^{4} \frac{3x+5}{e^{2x-1}}dx$;

17. $\int\limits_{2}^{10} \frac{2x-1}{\sin\frac{2x-3}{8}}dx$;

18. $\int\limits_{0}^{4} \frac{3x+5}{\sin\frac{2x+1}{3x+1}}dx$;

19. $\int\limits_{1}^{5} \frac{3x+1}{e^{2x-1}}dx$;

20. $\int\limits_{0,5}^{1} \frac{2x+5}{\sin\frac{3x-1}{2}}dx$;

21. $\int\limits_{0}^{1} \frac{\cos(3x+2)}{\sqrt{3x^2+1}}dx$;

22. $\int\limits_{0}^{9} \frac{2x-1}{e^{\frac{2x+3}{4}}}dx$;

23. $\int\limits_{2}^{5} \frac{3x+1}{\sqrt{e^{3x+1}+x^2}}dx$;

24. $\int\limits_{1}^{5} \frac{2x+5}{\sqrt{e^{3x-1}}}dx$;

25. $\int\limits_{0}^{4} \frac{\sin\frac{3x+1}{2}}{e^{x+3}}dx$;

26. $\int\limits_{0,1}^{0,6} \frac{tg(x+1)}{\sqrt{x^2+3}}dx$.

§8 Приближенное интегрирование дифференциальных уравнений

Вопросы для самоконтроля

1. Почему на практике приходится пользоваться приближенными методами решения дифференциальных уравнений.

2. В чем суть приближенных методов нахождения решений дифференциальных уравнений.

3. Перечислите известные вам методы нахождения приближенных решений дифференциальных уравнений.

4. Расскажите о методе Эйлера.

5. В чем состоит усовершенствование метода Эйлера.

6. Как находятся решения дифференциальных уравнений при помощи рядов.

7. В чем суть метода Адамса.

8. Расскажите о методе Рунге – Кутта.

Задание для самостоятельной работы

Составить таблицу приближенных значений интеграла, дифференциального уравнения, удовлетворяющего заданному начальному условию, на отрезке $[0,\ \ 1]$ с шагом $h = 0{,}1$. Все вычисления производить с округлениями до 0,001.

Таблица 6

№	$y' = f(x, y)$	x_0	y_0
1	$x + y^2$	0	0
2	$x^2 + y$	0	0,1
3	$2x + 0{,}1y^2$	0	0,2
4	$x^2 + y^2$	0	0,1
5	$x^2 + xy$	0	0,2

Продолжение таблицы 6

6	$2x+y^2$	0	0
7	x^2+2y	0	0,1
8	$0{,}2x+y^2$	0	0,1
9	$x^2+0{,}2y^2$	0	0,2
10	$xy+y^2$	0	0,1
11	$2x-0{,}1y^2$	0	1
12	x^2-xy	0	0,1
13	$2x+y^2$	0	0
14	x^2+2y	0	1
15	$xy-y^2$	0	1
16	x^2-y^2	0	1
17	$2x^2+xy$	0	1
18	$x+xy$	0	1
19	x^2-xy+y^2	0	0,1
20	$2xy+x^2$	0	0
21	x^2+2xy	0	1
22	$2x+3y^2$	0	0,1
23	x^2+2y	0	0,1
24	$0{,}2x+y^2$	0	0,1

Продолжение таблицы 6

25	$x^2 - xy$	0	0,1
26	$2x + y^2$	0	0

.

§9 Приближенное нахождение сумм числовых рядов

Вопросы для самоконтроля

1. Дайте понятия ряда, частичной суммы ряда.
2. Дайте определения сходящихся и расходящихся рядов.
3. Дайте понятия остатка ряда и остаточной погрешности.
4. Сформулируйте методы оценки остаточной погрешности ряда.
5. Дайте понятия быстро и медленно сходящихся рядов.
6. Дайте понятие ускорения сходимости ряда.

Примеры выполнения заданий

Пример 1. Найти сумму ряда $\sum_{Nn=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ с точностью до $\varepsilon_3 = 10^{-3}$.

Решение

Выясним, сколько членов ряда следует взять для достижения требуемой точности. Оценивая остаток ряда, получим $R_n \le \int_n^{\infty}\frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x}\Big|_n^{\infty} = \frac{1}{n}$.

Решая неравенства $\frac{1}{n} < 0{,}001$, получим $n \ge 1000$, т.е. для достижения указанной точности требуется взять 1001 член исходного ряда.

Улучшим сходимость ряда, положив

$a_n = \frac{1}{n^2}$, $b_n = \frac{1}{n(n+1)}$, $g = 1$, $a_n = gb_n = \frac{1}{n^2(n+1)}$, и учитывая, что $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2(n+1)} = 1$

находим $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2(n+1)} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2(n+1)}$.

Для преобразования ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2(n+1)}$, положим теперь

$a_n = \frac{1}{n^2(n+1)}, b_n = \frac{1}{n(n+1)(n+2)}, g = 1, a_n = gb_n = \frac{2}{n^2(n+1)(n+2)}$.

Тогда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)(n+2)}=\frac{1}{2\cdot 2}$, имеем

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)(n+2)}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n^2(n+1)(n+2)}=1+\frac{1}{2\cdot 2}+2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2(n+1)(n+2)}.$$

Вычисление суммы ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ свелось к вычислению суммы ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2(n+1)(n+2)}$.

Оценивается остаток $\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{1}{k^2(k+1)(k+2)}<\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{1}{(k-1)k(k+1)(k+2)}=$

$\sum_{k=n}^{\infty}\frac{1}{k(n+1)(k+2)(k+3)}=\frac{1}{3n(n+1)(n+2)}$, получаем $\frac{1}{3n^3}<0{,}001\cdot 2$, откуда $n^3>166{,}7$ или $n\geq 5,\ldots$

Положим $n=6$.

Следовательно,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=1+\frac{1}{4}+2\sum_{n=1}^{6}\frac{1}{n^2(n+1)(n+1)}=1+0{,}25+2\cdot 0{,}1975=1{,}645.$$

Пример 2.

Найти сумму ряда $S=\frac{1}{1^3}-\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{4^3}+\ldots$ с точностью до $\varepsilon=0{,}001$.

Решение.

Примем остаточную погрешность $\varepsilon_1=\frac{1}{4}\cdot 10^{-3}=\frac{1}{4000}$.

Рассматриваемый ряд знакочередующийся, поэтому, используя теорему 2, получим $R_n\leq\frac{1}{(n+1)^3}$. Решая неравенство $\frac{1}{(n+1)^3}\leq\frac{1}{4000}$, находим $n\geq\sqrt{4000}-1\approx 14{,}87$.

Примем $n=15$.

Предельную погрешность суммирования выберем равной $\varepsilon_2 = \frac{1}{4} \cdot 10^{-3}$.

Находим предельную абсолютную погрешность слагаемых частичной суммы S_n ряда: $\frac{\varepsilon_2}{n} \le \frac{1}{4000 \cdot 15} = \frac{1}{6} \cdot 10^{-4}$.

Члены ряда будем вычислять с четырьмя верными десятичными знаками после запятой.

Складывая соответствующие значения положительных и отрицательных слагаемых получим:

Таблица 7

1,0000	0,1250
0,0370	0,0156
0,0080	0,0046
0,0029	0,0020
0,0014	0,0010
0,0008	0,0006
0,0005	0,0004
0,0003	
1,0509	0,1492

Следовательно, $S_{15} = 1{,}0509 - 0{,}1492 = 0{,}9017$.

Округляя это значение до тысячных, получим $S \approx 0{,}902$.

Так как погрешность округления $\varepsilon_3 = 0{,}0003 < \frac{1}{3} \cdot 10^{-3}$, то суммарная погрешность найденного результата $\varepsilon < \frac{1}{4} \cdot 10^{-3} + \frac{1}{4} \cdot 10^{-3} + \frac{1}{3} \cdot 10^{-3} = \frac{5}{6} \cdot 10^{-3} < 0{,}001$.

Итак, $S = 0{,}902 \pm 0{,}001$.

Задание для самостоятельной работы

а) Найти сумму ряда с точностью до ε.

Таблица 8

1.	$S=\frac{1}{1^4}+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}+...+\frac{1}{n^4}+...,\ \varepsilon=0{,}001$
2.	$S=\frac{1}{1^5}+\frac{1}{2^5}+\frac{1}{3^5}+...+\frac{1}{n^5}+...,\ \varepsilon=0{,}0001$
3.	$S=\frac{1}{2^3}+\frac{1}{4^3}+\frac{1}{8^3}+...+\frac{1}{(2n)^3}...,\ \varepsilon=0{,}0001$
4.	$S=\frac{1}{1^6}+\frac{1}{2^6}+\frac{1}{3^6}+...+\frac{1}{n^6}...,\ \varepsilon=0{,}0001$
5.	$S=\frac{1}{1^3}+\frac{1}{3^3}+\frac{1}{5^3}+...+\frac{1}{(2n-1)^3}...,\ \varepsilon=0{,}0001$
6.	$S=\frac{1}{2^4}+\frac{1}{4^4}+\frac{1}{6^4}+...+\frac{1}{(2n)^4}...,\ \varepsilon=0{,}0001$
7.	$S=\frac{1}{1^4}+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{5^4}+...+\frac{1}{(2n-1)^4}...,\ \varepsilon=0{,}0001$
8.	$S=\frac{1}{2^5}+\frac{1}{4^{45}}+\frac{1}{6^6}+...+\frac{1}{(2n)^5}...,\ \varepsilon=0{,}0001$

Продолжение таблицы 8

9.	$S=\frac{1}{1^5}+\frac{1}{3^5}+\frac{1}{5^5}+...+\frac{1}{(2n-1)^5}...,\ \varepsilon=0{,}0001$
10.	$S=\frac{1}{2^6}+\frac{1}{4^6}+\frac{1}{6^6}+...+\frac{1}{(2n)^6}+...,\ \varepsilon=0{,}00001$
11.	$S=\frac{1}{1^6}+\frac{1}{3^6}+\frac{1}{5^6}+...+\frac{1}{(2n-1)^6}...,\ \varepsilon=0{,}00001$
12.	$S=\frac{1}{2^3}-\frac{1}{4^3}+\frac{1}{6^3}-...+\frac{(-1)^{n+1}}{(2n)^3}-...,\ \varepsilon=0{,}0001$
13.	$S=\frac{1}{1^3}-\frac{1}{3^3}+\frac{1}{5^3}-...+\frac{(1-)^{n+1}}{(2n-1)^3}...,\ \varepsilon=0{,}0001$
14.	$S=\frac{1}{1^4}-\frac{1}{3^4}+\frac{1}{5^4}-...+\frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)^4}...,\ \varepsilon=0{,}0001$
15.	$S=\frac{1}{2^4}-\frac{1}{4^4}+\frac{1}{6^4}-...+\frac{(-1)^{n+1}}{(2n)^4}...,\ \varepsilon=0{,}0001$
16.	$S=\frac{1}{2^5}-\frac{1}{4^5}+\frac{1}{6^5}-...+\frac{(-1)^{n+1}}{(2n)^5}...,\ \varepsilon=0{,}00001$
17.	$S=\frac{1}{1^5}-\frac{1}{3^5}+\frac{1}{5^5}-...+\frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)^5}...,\ \varepsilon=0{,}00001$

18.	$S=\frac{1}{2^6}-\frac{1}{4^6}+\frac{1}{6^6}-...+\frac{(-1)^{n+1}}{(2n)^6}...,\ \varepsilon=0{,}00001$
19.	$S=\frac{1}{1^6}-\frac{1}{3^6}+\frac{1}{5^6}-...+\frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)^6}...,\ \varepsilon=0{,}00001$
20.	$S=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!n!},\ \varepsilon=0{,}00001$
21.	$S=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot n}{7^n}.,\ \varepsilon=0{,}0001$
22.	$S=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!2n},\ \varepsilon=0{,}00001$
23.	$S=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}.,\ \varepsilon=0{,}0001$
24.	$S=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{4^n(2+1)}.,\ \varepsilon=0{,}001$
25.	$S=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n+1)^n}.,\ \varepsilon=0{,}001$
26.	$S=\frac{1}{1^3}-\frac{1}{3^3}+\frac{1}{5^3}-...+\frac{(1-)^{n+1}}{(2n-1)^3}...,\ \varepsilon=0{,}0001$

б) вычислить интеграл с точностью до 0,001

Таблица 9

1.	$\int_0^{0,1} e^{-6x^2}dx$	2.	$\int_0^{0,1} \sin(100x^2)dx$
3.	$\int_0^{1} \cos x^2 dx$	4.	$\int_0^{0,5} \frac{dx}{\sqrt[4]{1+x^4}}$
5.	$\int_0^{0,1} \frac{1-e^{-2x}}{x}dx$	6.	$\int_0^{1} \frac{\ln\left(1+\frac{x}{5}\right)}{x}dx$
7.	$\int_0^{1,5} \frac{dx}{\sqrt[3]{27+x^3}}$	8.	$\int_0^{0,2} e^{-3x^2}dx$
9.	$\int_0^{1} \sin x^2\, dx$	10.	$\int_0^{0,2} \sin(25x^2)dx$
11.	$\int_0^{0,5} \cos(4x^2)dx$	12.	$\int_0^{1} \frac{dx}{\sqrt[4]{16+x^4}}$
13.	$\int_0^{2} \frac{dx}{\sqrt[3]{64+x^3}}$	14.	$\int_0^{0,3} e^{-2x^2}dx$
15.	$\int_0^{0,4} \sin(\frac{5x}{2})^2 dx$	16.	$\int_0^{0,2} \cos(25x^2)dx$
17.	$\int_0^{0,4} e\frac{3x^2}{4}dx$	18.	$\int_0^{0,4} \cos(\frac{5x}{2})dx$

Продолжение таблицы 9

19.	$\int\limits_0^{0,5} \frac{dx}{\sqrt[3]{1+x^3}}$	20.	$\int\limits_0^{1} \frac{dx}{\sqrt[3]{1+x^3}}$
21.	$\int\limits_0^{0,5} e^{\frac{3x^2}{25}} dx$	22.	$\int\limits_0^{2,5} \frac{dx}{\sqrt[4]{625+x^4}}$
23.	$\int\limits_0^{2} \frac{dx}{\sqrt[4]{256+x^4}}$	24.	$\int\limits_0^{0,5} \sin(4x^2)dx$
25.	$\int\limits_0^{0,5} \cos(4x^2)dx$	26.	$\int\limits_0^{1} \frac{dx}{\sqrt[4]{16+x^4}}$

ЛИТЕРАТУРА

1. Крахоткина, Е. В. Численные методы в научных расчетах: учебное пособие. Курс лекций / Е. В. Крахоткина. – Ставрополь: Северо-Кавказский федеральный университет, 2015. – 162 с. – ISBN 2227-8397. – Текст: электронный // Электронно-библиотечная система IPR BOOKS: [сайт]. – URL: http://www.iprbookshop.ru/62884.html (дата обращения: 31.01.2020). – Режим доступа: для авторизир. пользователей

2. Мастяева И.Н. Численные методы [Электронный ресурс]: учебное пособие/ Мастяева И.Н., Семенихина О.Н. – Электрон. текстовые данные. – Москва: Евразийский открытый институт, Московский государственный университет экономики, статистики и информатики, 2003. – 241 с. – Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/11121.html. – ЭБС «IPRbooks»

3. Вохминцева Г.П. Лабораторный практикум по приближенным методам курса высшей математики / Г.П. Вохминцева, Г.Н. Торопчина, И.Н. Шевченко. – Благовещенск: Амурский гос. ун-т, – 1998. – 84 с.

СОДЕРЖАНИЕ