

Министерство образования и науки Российской Федерации
АМУРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Т.А. Юрьева

ПРИБЛИЖЕННЫЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ В КУРСЕ
ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ
Учебно-методическое пособие

Благовещенск
Издательство АмГУ
2020

ББК 22.193

Ю 85

*Рекомендовано
учебно-методическим советом университета*

Рецензент:

Галаган Т.Е., канд. техн. наук, доц. кафедры Информационных и управляющих систем АмГУ

Юрьева Т.А.

Приближенные вычисления в курсе высшей математики: учебно-методическое пособие / Т.А. Юрьева – Благовещенск: Изд-во АмГУ, 2020. – 53 с.

Учебно-методическое пособие предназначено для студентов направлений подготовки 13.03.02, 15.03.04

Приводятся материалы по теме «Численные методы» для организации работы студентов по дисциплине «Высшая математика».

© Амурский государственный университет, 2020

© Т.А. Юрьева

ВВЕДЕНИЕ

В содержании курса высшей математики для студентов энергетического факультета основополагающим является исследование различных математических моделей, абстрагируясь от реального содержания профессиональной задачи, которая и привела к построению этой модели. Наиболее распространенными являются математические модели представленные уравнениями, системами уравнений, дифференциальными и интегральными уравнениями. При исследовании математических моделей в курсе высшей математики преимущественно используются классические математические методы, позволяющие установить существование и единственность решения задачи, свойства модели и решения. Без владения такими методами невозможно решение многих научно-технических задач. В то же время классическая математика чаще всего имеет дело с бесконечными процессами, когда решение является пределом некоторой последовательности. Кроме того, некоторые задачи вовсе невозможно решить в рамках классической математики, а возможно только приближенное ее решение. Для того чтобы отыскать приближенное решение максимально близкое к точному, при этом используя конечную последовательность шагов, применяют численные методы. Именно поэтому возникла необходимость ввести в курс высшей математики элементы вычислительной математики, занимающейся построением и анализом численных методов. Численные методы позволяют свести решение сложной задачи к выполнению последовательности арифметических операций, поэтому их реализация чаще всего осуществляется на компьютере. Тем не менее, компьютерная реализация выходит за рамки содержания высшей математики. Внимание уделяется типичным численным методам, реализуемым «вручную», оценке их сходимости, погрешности получаемого решения, связи между вычислительной и классической математикой.

§1 Погрешность вычисления

Приближенным значением называют число a , которое незначительно отличается от точного числа a^* . $a^* \approx a$. Приближенное число a чаще всего получают, когда округляют точное число a^* .

При округлении отбрасывают все цифры точного числа справа от определенной цифры или заменяют их нулями. При этом соблюдают правила:

1. Если первая отбрасываемая цифра меньше 5, то цифры, получаемого приближенного числа не меняют;

2. Если первая отбрасываемая цифра больше 5, то приближенное число получают увеличением на 1 последней оставшейся цифры точного числа;

3. Если первая отбрасываемая цифра равна 5 и хотя бы одна из отбрасываемых цифр не равна нулю, то приближенное число получают увеличением на 1 последней оставшейся цифры точного числа;

4. Если первая отбрасываемая цифра равна 5, а остальные нули, то приближенное число получают увеличением на 1 последней оставшейся цифры точного числа, если она нечетная. Если последняя оставшаяся цифра четная, то поступают как п. 1.

Погрешностью числа a называют разность между точным и приближенным числами.

Абсолютной погрешностью называют число, не превосходящее модуль этой разности: $|a^* - a| \leq \Delta a$. Т.е. точное число a^* отличается от приближенного a не более чем на Δa : $a - \Delta a \leq a^* \leq a + \Delta a$, или $a^* = a \pm \Delta a$.

Абсолютную погрешность округляют только в большую сторону, так, чтобы число равное погрешности содержало не более двух значащих, неравных нулю цифр.

Относительной погрешностью δa числа a называют безразмерную величину равную $\delta a = \frac{\Delta a}{|a|}$.

Округляют относительную погрешность по тем же правилам, что и абсолютную.

Любое положительное число можно разложить по степеням десятки (все рассуждения приведены для десятичной системы счисления): $a = \sum_{i=1}^n \alpha_i \cdot 10^{m-i+1}$ (α_i – цифры). В такой записи все с первой неравной нулю цифры называют значащими. Нули в конце числа могут не являться значащими, если они записаны вместо неизвестных цифр. Первые n значащих цифр числа a называют верными в смысле ω , если $\Delta a \leq \omega \cdot 10^{m-n+1}$. При $\omega = 0,5$ цифры являются верными в узком смысле, при $\omega = 1$ – в широком смысле. Другими словами, значащая цифра является верной, если Δa не превосходит единицы разряда, соответствующего этой цифре.

Основной задачей теории погрешностей является определение погрешности функции, зависящей от некоторых величин по известным погрешностям этих величин. Общая формула теории погрешностей для функции $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ с известными абсолютными погрешностями переменных Δx_i ($i = \overline{1, n}$) имеет вид: $\Delta y \leq \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial f(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_i} \right| \Delta x_i$. Формула основана на связи полного дифференциала и полного приращения функции нескольких переменных. Относительная погрешность функции $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ определяется по формуле:

$$\delta y \leq \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial \ln f(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_i} \right| \Delta x_i.$$

Обратная задача теории погрешностей, состоящая в отыскании абсолютных погрешностей аргументов по известному значению абсолютной погрешности функции, однозначно разрешима лишь для функции одной переменной, а также для случаев равных погрешностей аргументов или равных частных производных функции $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Пример. Вычислить значение выражения $y = \pi^{\frac{3}{2}}$ и оценить погрешность результата. Значение аргумента взять с 4 верными знаками.

Решение.

$$\pi = 3,142 \pm 0,0005 .$$

Следовательно

$$y = 3,142^{\frac{3}{2}} = 5,569411036... \approx 5,569 \pm 0,0005 .$$

Рассмотрим функцию $y = x^{\frac{3}{2}}$.

Абсолютная погрешность будет вычисляться следующим образом:

$$\Delta y = y' \cdot \Delta x = \frac{3}{2} x^{\frac{1}{2}} \cdot \Delta x = \frac{3}{2} 3,142^{\frac{1}{2}} \cdot 0,0005 = 0,00132942656811... < 0,0014 .$$

$$\text{Тогда } y = 5,569 \pm (0,0014 + 0,0005) = 5,569 \pm 0,0019 .$$

Относительная погрешность составит $\delta y = \frac{\Delta y}{y} = \frac{0,0019}{5,569} = 0,0034$ или 0,34 %

результата.

§2 Точные методы решения системы линейных уравнений

Методы решения систем линейных алгебраических уравнений делят на прямые и итерационные. Прямые методы позволяют определить решение системы уравнений за конечное число операций. Если при решении системы прямым методом отсутствуют ошибки округления, то получаемой решение называют точным. В противном случае – приближенным. К прямым относят: метод Гаусса, метод Крамера, метод прогонки. Итерационные методы являются приближенными, так как решение системы линейных уравнений получают как предел последовательных приближений путем совокупности итераций.

С основными прямыми методами знакомство осуществлялось при изучении линейной алгебры. Рассмотрим здесь некоторые модификации метода Гаусса, как самого экономичного с позиции требуемых операций. Напомним, что прямой ход метода Гаусса заключается в приведении исходной системы линейных уравнений к треугольному виду, то есть к последовательному исключению неизвестных.

Пример 1. Решить методом Гаусса систему
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 4, \\ 3x_1 - 5x_2 + 3x_3 = 1, \\ 2x_1 + 7x_2 - x_3 = 8. \end{cases}$$

Решение.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 4^{(-3)}, \\ 3x_1 - 5x_2 + 3x_3 = 1, \swarrow \\ 2x_1 + 7x_2 - x_3 = 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 4^{(-2)}, \\ -11x_2 = -11, \\ 2x_1 + 7x_2 - x_3 = 8 \swarrow \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 4, \\ -11x_2 = -11 \begin{pmatrix} 3 \\ 11 \end{pmatrix}, \\ 3x_2 - 3x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 4, \\ -11x_2 = -11, \\ -3x_3 = -3 \swarrow \end{cases}$$

Далее, выражаем последовательно неизвестные:
$$\begin{cases} x_1 + 2 \cdot 1 + 1 = 4, \\ x_2 = 1, \\ x_3 = 1. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1, \\ x_2 = 1, \\ x_3 = 1. \end{cases}$$

Следовательно (1; 1; 1) – решение системы.

Погрешности округления могут значительно исказить решение, получаемое методом Гаусса. Чтобы уменьшить погрешность нужно в качестве ведущего элемента выбирать максимальный по модулю элемент в столбце.

LU – разложение

Пусть U – матрица, полученная из A методом Гаусса, а L – матрица, элементами которой, расположенными по главной диагонали являются единицы, а ниже главной диагонали – множители строк в ходе приведения матрицы A к виду U , взятые с противоположным знаком. Если исходную матрицу A системы линейных уравнений представить в виде произведения нижней треугольной матрицы L и верхней треугольной матрицы U , то запись $A=LU$ называют LU – разложением матрицы A .

Пример 2. Для примера 1 LU – разложение имеет вид:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & -5 & 3 \\ 2 & 7 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & -\frac{3}{11} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -11 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

Система линейных уравнений с LU – разложением матрицы A в матричной форме примет вид: $LUX=B$, где X – матрица неизвестных, B – матрица свободных членов системы. Обозначив $UX=Y$, получим $LY=B$. Найдя матрицу Y из последнего уравнения и подставив ее в $UX=Y$, определяется искомое решение X .

Пример 3. Решить с помощью LU – разложения систему
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 4, \\ 3x_1 - 5x_2 + 3x_3 = 1, \\ 2x_1 + 7x_2 - x_3 = 8. \end{cases}$$

Решение. Используя LU – разложение из примера 2, составим систему

$$LY=B: \begin{cases} y_1 = 4, \\ 3y_1 + y_2 = 1, \\ 2y_1 - \frac{3}{11}y_2 + y_3 = 8. \end{cases} \quad \text{Выражая неизвестные получим:}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} y_1 = 4, \\ 12 + y_2 = 1, \\ 8 - \frac{3}{11}y_2 + y_3 = 8 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} y_1 = 4, \\ y_2 = -11, \\ y_3 = -3. \end{array} \right. \text{ Составим систему } UX=Y: \left\{ \begin{array}{l} x_1 + 2x_2 + x_3 = 4, \\ -11x_2 = -11, \\ -3x_3 = -3. \end{array} \right. \text{ Ее реше-}$$

ние (1; 1; 1).

§3 Итерационные методы решения системы линейных уравнений

Итерационные методы позволяют найти лишь приближенное решение системы уравнений. Одну итерацию составляет процедура перехода от некоторого приближенного решения к другому, уточненному решению.

Пусть дана квадратная система линейных уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases}$$

Обозначим $\bar{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ – искомое решение.

Последовательность приближенных решений получаемых с помощью k итераций обозначим $\bar{x}^{(k)} = (x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)})$. Алгоритм всех итерационных методов следующий:

1) выбрать начальное приближение, то есть какой-либо известный вектор $\bar{x}^{(0)} = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})$. Обычно в качестве исходного приближенного решения берутся нулевой вектор или вектор свободных членов системы уравнений;

2) преобразовать систему к подходящему для применения итерационного метода виду. Стандартный прием – выразить переменные, соответствующие номерам уравнений, через остальные переменные. То есть

$$x_i = \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j - \sum_{j=i+1}^n a_{ij}x_j \right) \quad (i=1, 2, \dots, n);$$

3) записать содержание итерации $\bar{x}^{(k+1)} = f(\bar{x}^{(k)})$;

4) проверить сходимость итерационного метода то есть выполнимость математических соотношений, при которых последовательность приближенных решений сходится к точному решению;

5) обозначить условие окончания итерационного процесса.

Рассмотрим подробнее некоторые методы.

Метод простой итерации

Содержание метода простой итерации выражается соотношением:

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k)} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij} x_j^{(k)} \right).$$

Условием сходимости метода простой итерации является диагональное преобладание матрицы системы уравнений. Это условие состоит в следующем: диагональные элементы матрицы по абсолютной величине превосходят сумму модулей остальных элементов соответствующей строки. При этом некоторые диагональные элементы по модулю могут быть равны указанной сумме.

Условие окончания итерационного процесса: $|x_i^{(k)} - x_i^{(k-1)}| < \varepsilon$, где ε – заданная величина, характеризующая точность.

Метод Зейделя

Содержание метода простой итерации выражается соотношением:

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij} x_j^{(k)} \right).$$

Условие сходимости метода Зейделя аналогично условию сходимости метода простой итерации. Скорость сходимости зависит от того насколько диагональные элементы матрицы системы больше суммы остальных элементов по абсолютной величине.

Условие окончания итерационного процесса: $|x_i^{(k)} - x_i^{(k-1)}| < \varepsilon$, где ε – заданная величина.

§4 Решение нелинейных уравнений

Всякое уравнение с одним неизвестным можно записать в виде $f(x) = 0$.

Число x^* называют корнем уравнения $f(x) = 0$, если при подстановке x^* последнее дает тождество. График функции $f(x)$ пересекает ось абсцисс в точке x^* .

В курсе школьной математики изучаются методы отыскания корней линейных, квадратных, некоторых степенных, показательных, логарифмических и тригонометрических уравнений. Но решение даже этих видов уравнений часто приводит к приближенному значению корней. Мы же будем рассматривать уравнения произвольного вида, где $f(x)$ – непрерывная функция. Для таких уравнений чаще всего используют графические и численные методы решения, относящиеся к приближенным.

Вопрос о существовании и количестве корней уравнения исследуется с помощью методов математического анализа: оцениваются знаки значений функции на концах некоторого промежутка, свойство монотонности функции. При этом опираются на следующие утверждения:

1. Если непрерывная на отрезке $[a, b]$ функция $y = f(x)$ принимает на его концах значения разных знаков ($f(a) \cdot f(b) < 0$), то в соответствующем интервале уравнение $f(x) = 0$ имеет хотя бы один корень. То есть, если график функции на концах отрезка находится по разные стороны от оси абсцисс, то он обязательно ее пересечет. Если корней больше одного, то их нечетное количество.

2. Если непрерывная на отрезке $[a, b]$ функция $y = f(x)$ принимает на его концах значения одного знака ($f(a) \cdot f(b) > 0$), то в интервале (a, b) уравнение $f(x) = 0$ либо не имеет корней (график функции расположен только выше или только ниже оси абсцисс), либо имеет четное число корней (чтобы оказаться графику функции по ту же сторону от оси абсцисс, что и в точке a , пересечений с осью должно быть четное число).

3. Если непрерывная на отрезке $[a, b]$ функция $y = f(x)$ принимает на его концах значения разных знаков ($f(a) \cdot f(b) < 0$) и монотонна (производная $f'(x)$ не меняет знак для $x \in [a, b]$), то на отрезке $[a, b]$ уравнение $f(x) = 0$ имеет единственный корень.

Нахождение примерного расположения корней уравнения на оси абсцисс, с указанием для каждого из них отрезка, содержащего только один корень, называют отделением корней. На практике для этого процесса используют графический метод решения уравнения. Благодаря графическому методу можно указать количество корней, а также их расположение с некоторой точностью.

Иногда для упрощения решения уравнения графическим методом решаемое уравнение удобно представить в виде $\varphi_1(x) = \varphi_2(x)$. Функции $y = \varphi_1(x)$ и $y = \varphi_2(x)$ подбираются так, чтобы построение их графиков не вызывало сложностей. Абсциссы точек пересечения графиков являются корнями уравнения.

Пример 1. Отделить корни уравнения $x^3 + x^2 + x - 6 = 0$.

Решение. Имеем $f(x) = x^3 + x^2 + x - 6$. Исследуем функцию с помощью производной. $f'(x) = 3x^2 + 2x + 1 = 2x^2 + (x + 1)^2 > 0$ для $x \in (-\infty; \infty)$. Следовательно, $f(x)$ возрастает при $x \in (-\infty; \infty)$. Так как $f(1) = -3; f(2) = 8$, то есть $f(1) \cdot f(2) < 0$, то интервале $(1; 2)$ находится один корень уравнения.

Пример 2. Отделить корни уравнения $e^x \sin x - 1 = 0$.

Решение. Построить график $f(x) = e^x \sin x - 1$ трудно. Перепишем уравнение в виде $\sin x = e^{-x}$. Построим графики функции $y = \sin x$; $y = e^{-x}$ (Рисунок 1).

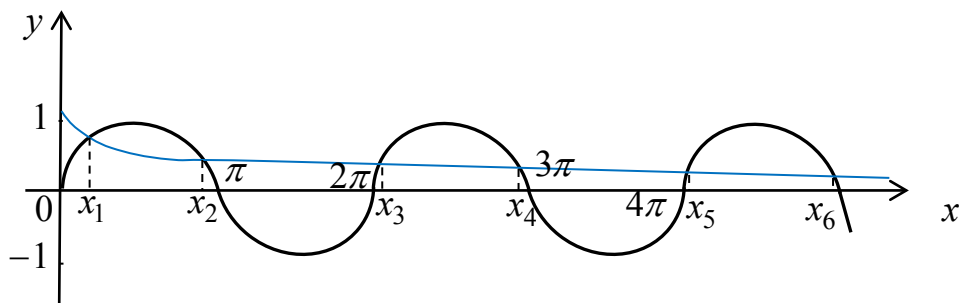


Рисунок 1

Следовательно, уравнение имеет бесчисленное множество корней, причем все корни положительные и находятся в интервалах $\left(2\pi k; \frac{\pi}{2} + 2\pi k\right)$; $\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \pi + 2\pi k\right)$; $k=0,1,2,\dots$. Наименьший корень $x_0 \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

После того как отделены корни уравнения начинают процесс уточнения каждого из них, то есть поиск приближенного значения единственного корня в соответствующем отрезке. Для этого используют итерационные методы. Любой итерационный процесс заключается в следующем: на отрезке, в котором расположен искомый корень, выбирают его приближенное начальное значение x_0 ; далее вычисляется последовательность более точных значений корня ($x_1, x_2, \dots, x_k, \dots$, где k – номер итерации), которая сходится к корню x^* . Сходимость будет проходить тем быстрее, чем меньше длина отрезка $[a, b]$, отделяющего корень. Погрешность нахождения корня ε определяется длиной отрезка $(|b - a| < \varepsilon)$.

Итерационные методы отличаются надежностью и скоростью сходимости. К надежным, но медленным методам относят метод половинного деления, метод хорд. Быстрые, но зависящие от начального значения x_0 и вида функции $f(x)$ – метод Ньютона, простой итерации. Иногда удобнее использовать комбинацию методов.

Метод половинного деления

Пусть отделенный корень уравнения $f(x) = 0$, лежит на отрезке $[a, b]$. Разделим отрезок $[a, b]$, пополам и вычислим $f\left(\frac{a+b}{2}\right)$. В результате возможны случаи:

а) $f\left(\frac{a+b}{2}\right) = 0 \Rightarrow \frac{a+b}{2}$ – корень уравнения,

б) $f\left(\frac{a+b}{2}\right) \neq 0$,

то 1) $f(a) \cdot f\left(\frac{a+b}{2}\right) < 0$, значит, корень находится между a и $\frac{a+b}{2}$,

2) $f(b) \cdot f\left(\frac{a+b}{2}\right) < 0$, тогда корень лежит между $\frac{a+b}{2}$ и b .

Обозначим a_1 левую границу нового отрезка, которому принадлежит корень, b_1 – правую границу. В первом случае $a_1 = a$, $b_1 = \frac{a+b}{2}$. Во втором –

$$a_1 = \frac{a+b}{2}, b_1 = b.$$

Если $[b_1, a_1] < \varepsilon \Rightarrow \forall x \in (a_1, b_1)$ – корень уравнения.

Если $[b_1, a_1] \geq \varepsilon$, то процесс деления продолжаем.

Метод хорд

Пусть $x_0 \in (a; b)$ корень уравнения $f(x) = 0$ и $f(a) \cdot f(b) < 0$ (Рис. 2).

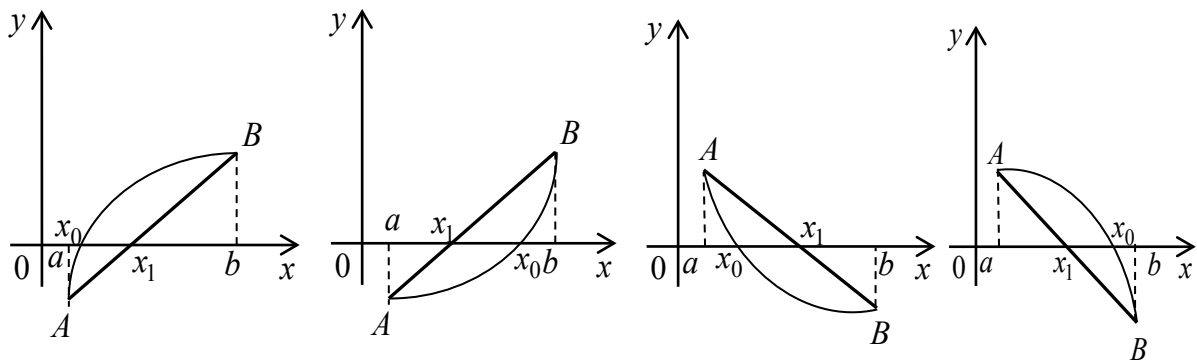


Рисунок 2

$A(a; f(a))$, $B(b; f(b))$.

Напишем уравнения хорды АВ:

$$\frac{y - f(a)}{f(b) - f(a)} = \frac{x - a}{b - a} \Rightarrow y = 0; x = a - \frac{f(a)}{f(b) - f(a)} \cdot (b - a) \text{ — формула для вычисления}$$

корня.

За приближенное значение корня уравнения $f(x) = 0$ примем x_1 – абсциссу точки пересечения хорды с осью ОХ.

Второе приближенное значение корня x_2 вычисляем по формуле относительно того из отрезков $[a, x_1]$, $[x_1, b]$, на концах которого функция $f(x)$ прини-

мают значения разных знаков. Аналогично вычисляются последующие приближения.

Пусть $f''(x)$ сохраняет знак на отрезке $[a, b]$, тогда приближенное значение корня лежит между точным значением корня и тем концом отрезка $[a, b]$, на котором знаки $f(x)$ и $f''(x)$ противоположны.

Критерии окончания итераций

Описанные итерации продолжают до выполнения одного из неравенств:

$|x_n - x_{n-1}| < \varepsilon$ или $\frac{(x_n - x_{n-1})^2}{|2x_{n-1} - x_n - x_{n-2}|} < \varepsilon$, где x_{n-2}, x_{n-1}, x_n – последовательные приближения корня уравнения x^* . Вообще справедливость неравенства $|x_n - x_{n-1}| < \varepsilon$ не означает справедливость неравенства $|x^* - x_n| < \varepsilon$.

Метод касательных (Ньютона)

В отличие от ранее рассмотренных методов метод касательных является быстро сходящимся. В тоже время, сходимость этого метода зависит от выбора начального приближенного значения корня. Достаточное условие сходимости метода касательных: пусть $x_0 \in [a, b]$ начальное приближение корня уравнения $f(x) = 0$, где $f(x)$ непрерывная на $[a, b]$ функция, удовлетворяющая условиям

$$\begin{cases} f(a) \cdot f(b) < 0 \\ f'(x) \cdot f''(b) \neq 0 \\ f(x_0) \cdot f''(x_0) > 0 \end{cases}, \text{ то последовательность приближений, получаемая методом}$$

Ньютона сходится к единственному на $[a, b]$ x^* . Последние два условия в системе называют условиями Фурье.

Пусть на отрезке $[a, b]$ $f(a) \cdot f(b) < 0$ и интервале (a, b) график функции не меняет выпуклость ($f''(x)$ только положительна либо только отрицательна) (рисунок 3).

Составим уравнение касательной к графику функции $y = f(x)$ в том конце отрезка $[a, b]$, в котором выполняется неравенство (условие Фурье) $f(x) \cdot f''(x) > 0$.

Если условие Фурье выполняется в точке a ($f(a) \cdot f''(a) > 0$), то уравнение касательной $y - f(a) = f'(a)(x - a)$, если в точке b ($f(b) \cdot f''(b) > 0$), то уравнение касательной $y - f(b) = f'(b)(x - b)$.

Найдем точку x_1 пересечения касательной с осью абсцисс:

$$y = 0 \Rightarrow x_1 = b - \frac{f(b)}{f'(b)}, \quad x_1 = a - \frac{f(a)}{f'(a)}.$$

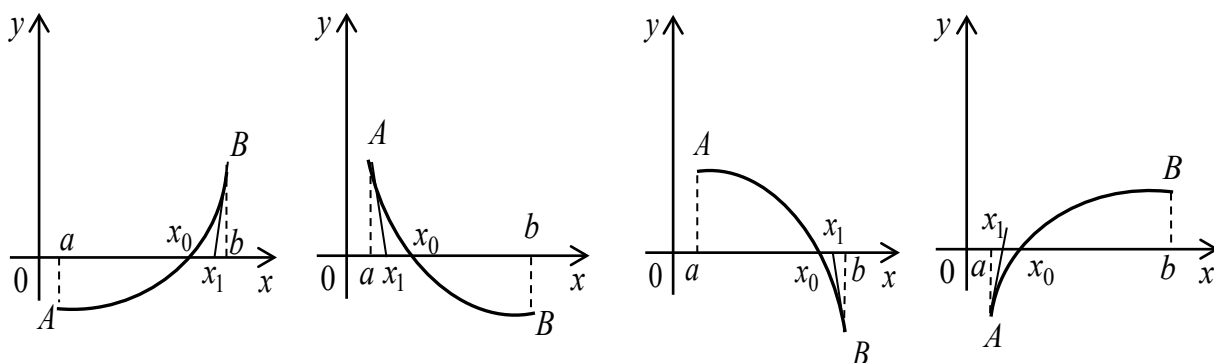


Рисунок 3

Полученное значение x_1 примем за первое уточненное значение корня.

Итерационный процесс продолжаем с использованием формулы

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

Критерии окончания итерационного процесса аналогичны рассмотренным выше.

Комбинированный метод

Так как метод Ньютона накладывает определенные условия на начальное приближение, то целесообразно первоначальное уточнение осуществлять методом хорд или половинного деления, а затем, получив выполнение достаточного условия сходимости применять метод Ньютона (рис. 4).

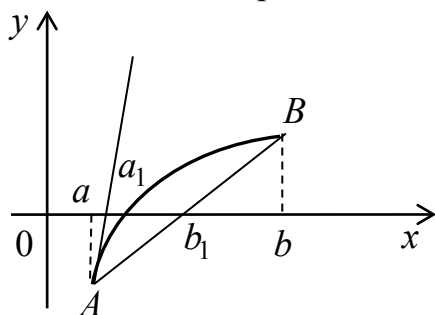


Рисунок 4.

Если $|b_1 - a_1| < \varepsilon \Rightarrow$ корень найден, если $|b_1 - a_1| \geq \varepsilon \Rightarrow$ продолжаем вычисления.

Метод простой итерации (метод последовательных приближений)

Пусть требуется решить уравнение $f(x) = 0$.

Приведем уравнение к равносильному уравнению, удобному для проведения итераций $x = \varphi(x)$. Например, $x = x + cf(x)$, где $c \neq 0$.

Пусть x_0 начальное приближение корня. Построим последовательность приближений по формуле $x_{n+1} = \varphi(x_n)$, $n = 0, 1, 2, \dots$

Если на $[a, b]$, содержащем x_0 и все последующие приближения x_n , $n \in N$, функция $\varphi(x)$ имеет непрерывную и ограниченную меньшим единицы числом $\varphi'(x)$ ($|\varphi'(x)| \leq g < 1$), то последовательность приближений сходится к единственному на $[a, b]$ x^* .

Если ограничивающее $\varphi'(x)$ число больше единицы ($g > 1$), то последовательность приближений расходящаяся, и уравнение $x = \varphi(x)$ следует преобразовать таким образом, чтобы выполнялось требование сходимости ($g < 1$).

Предельная абсолютная погрешность вычислений находится по формуле

$$\Delta = \frac{\varepsilon}{1-g}, \text{ где } \varepsilon - \text{ заданная точность.}$$

Пример 3. Найти корень уравнения $2^x + x - 4 = 0$ с точностью $\varepsilon = 0,001$.

Решение. Преобразуем $2^x = 4 - x$. Построим $y = 2^x$ и $y = 4 - x$ (рисунок 5).

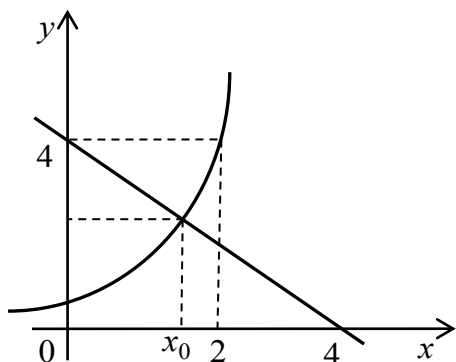


Рисунок 5.

Следовательно, искомый корень $x^* \in (1, 2)$. Можно убедиться $f(1) = -1$;
 $f(2) = 2$.

Найдем корень.

Преобразуем уравнение $x = 4 - 2^x$.

Тогда $\varphi(x) = 4 - 2^x$, $\varphi'(x) = -2^x \ln 2$, $x \in (1; 2)$.

$$2 \ln 2 < |\varphi'(x)| < 4 \ln 2$$

$$1,38 < |\varphi'(x)| < 2,76; g = 2,76 > 1.$$

Итерационный процесс расходится. Потому преобразуем уравнение иначе:

$$2^x = 4 - x \Rightarrow x = \log_2(4 - x) = \frac{\lg(4 - x)}{\lg 2}.$$

$$\text{Имеем } \varphi(x) = \frac{\lg(4 - x)}{\lg 2} = \frac{\ln(4 - x)}{\ln 2}, \varphi'(x) = -\frac{1}{\ln 2(4 - x)}.$$

$$\max |\varphi'(x)| = \frac{1}{2 \ln 2} = 0,725 < 1, g = 0,725, x \in (1; 2).$$

Процесс сходится.

$$\text{Пусть } x_0 = 1, \text{ тогда } x_1 = \varphi(x_0) = \frac{1}{\lg 2} \lg(4 - 1) = 1,585,$$

$$x_2 = 1,272,$$

$$x_3 = 1,352,$$

.....

$$x_{11} = 1,386,$$

$$x_{12} = 1,386 \Rightarrow x \approx 1,386$$

$$\text{Предельная погрешность } \Delta = \frac{0,001}{1 - 0,725} = 0,0036.$$

§5 Интерполирование функции

Пусть при изучении некоторого явления установлено, что существует функциональная зависимость между величинами y и x , при этом функция $y = \phi(x)$ слишком громоздка для проведения вычислений даже на компьютере либо аналитическое выражение функции неизвестно, но на основании эксперимента установлены значения этой функции y_0, y_1, \dots, y_n при некоторых значениях аргумента x_0, x_1, \dots, x_n , принадлежащих отрезку $[a; b]$.

Задача заключается в том, чтобы найти функцию по возможности более простую (например, многочлен), которая представляла бы неизвестную функцию $y = \phi(x)$ на отрезке $[a; b]$ точно или приближенно. В качестве такой функции найдем многочлен, значения которого в точках x_0, x_1, \dots, x_n совпадают с соответствующими значениями y_0, y_1, \dots, y_n функции $\phi(x)$. Такая задача называется «интерполирование функции».

При этом различают интерполирование в узком смысле, если $x \in [x_0; x_n]$, т.е. значение x являются промежуточным между x_0 и x_n , и экстраполирование, когда $x \in [x_0; x_n]$. В дальнейшем, под термином интерполирование мы будем понимать как первую, так и вторую задачи.

Наиболее распространенными, являются многочлены Лагранжа и Ньютона. Кроме того, используется формула Тейлора.

Интерполяционный многочлен Лагранжа

Интерполяционный многочлен Лагранжа имеет вид:

$$p_n(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_n)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)\dots(x_0-x_n)}y_0 + \frac{(x-x_0)(x-x_2)\dots(x-x_n)}{(x_1-x_0)(x_0-x_2)\dots(x_1-x_n)}y_1 + \dots + \frac{(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{n-1})}{(x_n-x_0)(x_n-x_1)\dots(x_n-x_{n-1})}y_n.$$

Ошибка при замене функции $\phi(x)$ многочленом $p_n(x)$, то есть величина

$$R(x) = \phi(x) - p_n(x) \quad \text{удовлетворяет} \quad \text{неравенству}$$

$R(x) < |(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n)| \frac{\max|\phi^{(n+1)}(x)|}{(n+1)!}$, где $\phi^{(n+1)}(x)$ – $n+1$ -ая производная функции $\phi(x)$.

Пример 1. Из эксперимента получены такие значения функции $y = \phi(x)$: $y_0 = 2$ при $x_0 = 1$; $y_1 = -4$ при $x_1 = 2$; $y_2 = 4$ при $x_2 = -4$.

Требуется представить приближенно функцию $y = \phi(x)$ многочленом 2-ой степени.

Решение.

По формуле Лагранжа имеем при $n = 2$:

$$P_2(x) = \frac{(x-2)(x+4)}{(1-2)(1+4)} \cdot 2 + \frac{(x-1)(x+4)}{(2-1)(2+4)} \cdot (-4) + \frac{(x-1)(x-2)}{(-4-1)(-4-2)} \cdot 4,$$
 откуда получим

$$P_2(x) = -\frac{28}{30}x^2 - \frac{96}{36}x + \frac{184}{30}.$$

Интерполяционный многочлен Ньютона

Если известны значения функции y_0, y_1, \dots, y_n при равностоящих значениях аргумента $x_0, x_0 + h, x_0 + 2h, \dots, x_0 + nh$, (где h – шаг), то целесообразно пользоваться интерполяционным многочленом Ньютона:

$$P_n(x) = y_0 + \frac{\Delta y_0}{h}(x-x_0) + \frac{\Delta^2 y_0}{2!h^2}(x-x_0)(x-x_1) + \frac{\Delta^3 y_0}{3!h^3}(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2) + \dots + \frac{\Delta^n y_0}{n!h_n}(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{n-1}),$$

где $\Delta y_0 = y_1 - y_0$, $\Delta^2 y_0 = \Delta y_1 - \Delta y_0, \dots$ – последовательные конечные разности функции y . Для удобства пользования этой формулой рекомендуется предварительно составить таблицу 1 конечных разностей.

Возникающая при замене функции $y = \phi(x)$ многочленом Ньютона, ошибка оценивается так же, как при замене ее многочленом Лагранжа.

Если в формуле многочлена Ньютона положить $n = 1$, то получим формулу линейного интерполирования: $P_1(x) = y_0 + \frac{\Delta y_0}{h}(x-x_0)$.

Таблица 1

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$
x_0	y_0	$\Delta y_0 = y_1 - y_0$	$\Delta^2 y_0 = \Delta y_1 - \Delta y_0$	$\Delta^3 y_0 = \Delta^2 y_1 - \Delta^2 y_0$
$x_1 = x_0 + h$	y_1	$\Delta y_1 = y_2 - y_1$	$\Delta^2 y_1 = \Delta y_2 - \Delta y_1$	
$x_2 = x_0 + 2h$	y_2	$\Delta y_2 = y_3 - y_2$		
$x_3 = x_0 + 3h$	y_3			

При $n=2$ будем иметь формулу параболического или квадратичного интерполирования: $P_2(x)y_0 + \frac{\Delta y_0}{h}(x-x_0) + \frac{\Delta^2 y_0}{2h^2}(x-x_0)(x-x_1)$.

Если дана неограниченная таблица значений функции y , то число n в интерполяционной формуле может быть любым. Практически, в этом случае число n выбирают так, чтобы разность $\Delta^n y_0$ была постоянной с заданной степенью точности.

За начальное значение x_0 , можно принимать любое табличное значение аргумента.

Пример 2. Построить интерполяционный многочлен Лагранжа и интерполяционный многочлен Ньютона для функции $y = \ln x$ с узлами интерполяции $x = 2, 3, 4, 5$.

После этого с помощью интерполяционного многочлена найти значение $\ln 3,5$ и оценить погрешность.

Решение. Выписываем в виде таблицы 2 значение функции в узлах интерполяции. Можно воспользоваться специальными таблицами или калькулятором.

Таблица 2

$x_0 = 2$	$x_1 = 3$	$x_2 = 4$	$x_3 = 5$
$y_0 = 0,6931$	$y_1 = 1,0986$	$y_2 = 1,3863$	$y_3 = 1,6094$

Здесь $n=3$ и по формуле получаем интерполяционный многочлен Лагранжа:

$$P_3(x) = -\frac{(x-3)(x-4)(x-5)}{(2-3)(2-4)(2-5)} \cdot 0,693 + -\frac{(x-2)(x-4)(x-5)}{(3-2)(3-4)(3-5)} \cdot 1,0986 + \dots +$$

$$\frac{(x-2)(x-3)(x-5)}{(4-2)(4-3)(4-5)} \cdot 1,3863 + \frac{(x-2)(x-3)(x-4)}{(5-2)(5-3)(5-4)} \cdot 1,6094 = \dots$$

$$= 0,0089x^3 - 0,1387x^2 + 0,9306x - 0,6841.$$

Для построения интерполяционного многочлена Ньютона составим таблицу 3 конечных разностей.

Таблица 3

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$
2	0,6931			
3	1,0986	0,4055	-0,1178	
4	1,3863	0,2877	-0,0646	0,0532
5	1,6094	0,2231		

Здесь $n=2; h=1$. Получаем:

$$P_3(x) = 0,6931 + 0,4055(x-2) - \frac{01178}{2}(x-2)(x-3) + \dots$$

$$+ \frac{0,0535}{6}(x-2)(x-3)(x-4) = -0,6841 + 0,9305 - 0,1387x^2 + 0,0089x^3.$$

Как и следовало ожидать, многочлены тождественно совпадают друг с другом. Далее находим $\ln 3,5 \approx P_3(3,5) = 1,2552$.

Для оценки погрешности найдем $f^{IV}(x)$:

$$f(x) \ln x; f'(x) = \frac{1}{x}; f''(x) = -\frac{1}{x^2}; f'''(x) = \frac{2}{x^3}; f^{iv}(x) = -\frac{6}{x^4}.$$

Наименьшее на $x: \alpha = 2$

Наибольшее из $x: \beta = 5$.

Тогда имеем $M_4(2,5) = \max |f^{iv}(x)| = \frac{6}{2^{48}} = 3$ и, следовательно,

$$|R_3(3,5)| \leq \frac{3}{8} \cdot \frac{(3,5-2)(3,5-3)(3,5-4)(3,5-5)}{4!} = 0,0088.$$

Следовательно, погрешность при замене по интерполяционной формуле не превосходит 0,0088.

Если известны значения функции в двух близких точках и необходимо вычислить приближенные значения в промежуточных точках, то применяется метод линейной интерполяции. Геометрически этот метод основан на замене дуги графика функции на некотором участке хордой (рисунок 7.)

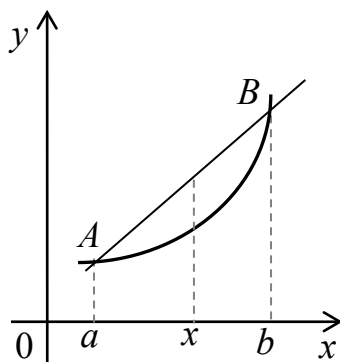


Рисунок 7

Проведем через точки $A(a, f(a))$ и $B(b, f(b))$ прямую

$$\frac{y - f(a)}{f(b) - f(a)} = \frac{x - a}{b - a} \quad \text{или} \quad y = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a).$$

Полагая $f(x) \approx y$, где $f(x)$ – ордината точки графика, а y – ордината соответствующей хорды, получим формулу:

$$f(x) \approx f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

Численное дифференцирование

Пусть значение некоторой неизвестной функции $y = \phi(x)$ заданы таблицей. Требуется определить приближенно производную этой функции.

Для решения этой задачи строится интерполяционный многочлен Лагранжа или Ньютона и от этого многочлена находится производная, которая характеризует скорость изменения функции.

§6 Формула Тейлора и её применение

Формула Тейлора дает возможность приближенно представить произвольную функцию, $(n+1)$ раз дифференцируемую в окрестности некоторой точки $x=a$, в виде многочлена $P_n(x)$ n -й степени относительно разности $x-a$, называемого многочленом Тейлора, и дать оценку погрешности этого приближения.

В силу этого формула Тейлора, помимо большого числа её теоретических применений, является основой приближённых вычислений, поскольку многочлен, приближенно представляющий функцию $f(x)$ общего вида, является выражением, числовые значения которого всегда и легко вычислимы.

Если функция $f(x)$ непрерывна и имеет непрерывные производные до n -го порядка включительно на отрезке $a \leq x \leq b$, причем в каждой внутренней точке этого отрезка существует конечная производная $f^{(n+1)}(x)$, то на этом отрезке справедлива формула Тейлора:

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \dots \\ + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1},$$

где $c = a + \Theta(x-a)$ и $0 < \Theta < 1$.

В частности, при $a=0$ имеем формулу Маклорена:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}x^{n+1}, \text{ где } c = \Theta x; \quad 0 < \Theta < 1.$$

Для некоторых элементарных функций формула Тейлора (Маклорена) имеет вид:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + R_n(x), \text{ где } R_n(x) = \frac{e^c x^{n+1}}{(n+1)!}, (a=0);$$

$$\sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (1)^{m+1} \cdot \frac{x^{2m+1}}{(2m+1)!} + R_{2m+1}(x),$$

где $R_{2m+1}(x) = \frac{x^{2m+1}}{(2m+1)} \cdot \sin\left[c + (2m+1)\frac{\pi}{2}\right], (a=0);$

$$\cos x = \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} = \frac{x^6}{6!} - \dots + (-1)^m \frac{x^{2m}}{(2m)} + R_{2m+2}(x),$$

где $R_{2m+2}(x) = \frac{x^{2m+2}}{(2m+2)!}, \cos\left[c + (2m+2) \cdot \frac{\pi}{2}\right], (a=0);$

$$\left(\text{Заметим, что } |R_{2m+1}| < \frac{|x|^{2m+1}}{(2m+1)!}; |R_{2m+2}| \leq \frac{x^{2m+2}}{(2m+2)!} \right).$$

$$\ln x = \frac{x-1}{1} - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} - \dots + (-1)^{n-1} \cdot \frac{(x-1)^n}{n} + R_n(x),$$

где $R_n(x) = (-1)^n \frac{(x-1)^{n+1}}{(n+1) \cdot c^{n+1}}, (a=1);$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^{n-1} \cdot \frac{x^n}{n} + R_n(x), \text{ где } R_n(x) = (-1)^n \frac{(x-1)^{n+1}}{(n+1)(c+1)^{n+1}}, (a=0).$$

С помощью формулы Тейлора вычисляют приближенные значения функции $f(x)$, если известны значения этой функции и её производных до n -го порядка в «начальной» точке $x=a$ и если, кроме того, удастся оценить остаточный член $R_n(x)$.

Если $|R_n(x)| < \alpha_0$, то $f(x) \approx f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^n(a)}{n!}(x-a)$ с погрешностью α_0 .

Оценка остаточного члена зависит от оценки $(n+1)$ -й производной. Например, если известно, что на отрезке, которому принадлежит рассматриваемое значение x , $\frac{|f^{(n+1)}(t)|}{(n+1)!} < M$, то $|R_n(x)| = \frac{|f^{(n+1)}(c)|}{(n+1)!} |x-a|^{n+1} < \frac{M}{(n+1)!} |x-a|^{n+1}$ и следовательно,

в качестве α_0 можно взять любую величину, удовлетворяющую условию $\frac{M}{(n+1)!} |x-a|^{n+1} \leq \alpha_0$.

Условие $|R_n(x)| < \alpha_0$ можно использовать и для определения числа n , если погрешность α_0 задана заранее. При этом следует иметь в виду, что это условие определяет погрешность формулы. Если же мы будем вычислять по формуле Тейлора приближенное значение $f(x)$ при конкретном числовом значении x , то может оказаться, что слагаемые в этой формуле (по крайней мере, некоторые из них) сами вычисляются приближенно. И тогда погрешность результата вычислений представляет собой сумму погрешностей слагаемых и погрешности формулы. Если вести вычисления слагаемых с одинаковой погрешностью α_0 , то общая погрешность значения, найденного по формуле Тейлора, будет равна $\beta = (n+2)\alpha_0$.

Поэтому, если заранее задана погрешность результата α , то необходимо подобрать α_0 так, чтобы обеспечить выполнение неравенства $\beta \leq \alpha$ или $(n+2)\alpha_0 \leq \alpha$, откуда $\alpha_0 \leq \frac{\alpha}{n+2}$.

При $n \leq 8$ это условие выполняется, если положить $\alpha_0 = 10^{-1} \cdot \alpha$. Это значит, что вычисления следует производить с одним запасным знаком. Тогда условие $|R_n(x)| < \alpha_0$, которое используется для определения числа n , примет вид $|R_n(x)| \leq 10^{-1} \cdot \alpha$.

Пример 1. Вычислить $\sin 20^\circ$ с точностью 10^{-5} .

Решение. Для решения воспользуемся формулой Маклорена для $\sin x$. Переведем градусную меру в радианную $20^\circ = \frac{\pi}{180^\circ} \cdot 20^\circ = \frac{\pi}{9} = 0,349066$.

Так как остаточный член формулы имеет тот же вид, что и основные члены формулы, оценку остатка можно выполнить попутно с вычислением основных членов.

Имеем

$$\frac{\pi}{9} = 0,349066;$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{3!}\left(\frac{\pi}{9}\right)^3 = -0,007089; \\
& +\frac{1}{5!}\left(\frac{\pi}{9}\right)^5 = +0,000043 \\
\hline
& 0,342010.
\end{aligned}$$

Ограничились тремя членами, т.к. соответствующий остаток $R_2\left(\frac{\pi}{9}\right)$ по абсолютной величине не превосходит $\frac{1}{7!}\left(\frac{\pi}{9}\right)^7 = \frac{1}{5!}\left(\frac{\pi}{9}\right)^5 \cdot \frac{1}{6 \cdot 7}\left(\frac{\pi}{9}\right)^2$, а это число меньше последнего учтенного члена в 400 раз.

В итоге получаем $\sin 20^\circ = 0,34201$, с точностью до $3,5 \cdot 10^{-6}$ (так как ошибка от округления слагаемых меньше $3 \cdot 0,5 \cdot 10^{-6} = 1,5 \cdot 10^{-6}$, округление суммы ошибки не создает, а ошибка вызванная округлением остатка, меньше чем $2 \cdot 10^{-6}$).

Пример 2. Вычислить $e^{-0,25}$ с точностью до 10^{-5} .

Решение.

При $x = -0,25$ число C в остаточном члене соответствующей формулы Маклорена заключено между $-0,25$ и 0 , т.е. $C < 0$, значит $e^C < e^0 = 1$.

Следовательно, $|R_n(-0,25)| < \frac{0,25^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{1}{(n+1)4^{4+n}}$, т.е. неравенство

$\frac{1}{(n+1)4^{n+1}} < 10^{-5}$ впервые удовлетворяется при $n = 4$, т.к. $\frac{1}{5!4^5} \approx 0,8 \cdot 10^{-5}$.

Но, так как при округлении может возникнуть ошибка, то лучше положить $n = 5$. Тогда остаточный член удовлетворяет неравенству $|R_5(0,25)| < \frac{1}{6!4^6} \approx 0,00000033$, т.е. $|R_5(0,25)| < 0,4 \cdot 10^{-6}$.

Если в формуле шесть членов, получаем

$$\begin{aligned}
e^{-0,25} &= 1 - \frac{1}{1!4} + \frac{1}{2!4^2} - \frac{1}{3!4^3} + \frac{1}{4!4^4} - \frac{1}{5!4^5} = 1,000000 - 0,250000 + 0,031250 - 0,00264 + \\
&+ 0,000163 - 0,000008 = 0,778801.
\end{aligned}$$

Округляя, находим $e^{-0,25} \approx 0,77880$.

Ошибка округляемых слагаемых меньше, чем $3 \cdot 0,5 \cdot 10^{-6} = 1,5 \cdot 10^{-6}$.

Ошибка суммы округления составляет 10^{-6} ; суммарная ошибка меньше, чем $1,5 \cdot 10^{-6} + 10^{-6} + 0,4 \cdot 10^{-6} = 2,9 \cdot 10^{-6} < 10^{-5}$.

§7 Приближенное вычисление интегралов

Пусть на сегменте $[a; b]$ задана функция $y = f(x)$.

Требуется вычислить интеграл $\int_a^b f(x) dx$.

Предполагается, что формула Ньютона-Лейбница не может быть использована. С таким положением мы встречаемся, если подынтегральная функция задана таблично или графически, и в случае аналитического задания, интеграл не берется в элементарных функциях или берется слишком сложно. В этих случаях прибегают к приближенному вычислению интеграла, заменяя на $[a; b]$ функцию $y = f(x)$ интерполяционным многочленом $y = P_n(x)$ и полагая

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b P_n(x) dx.$$

Если интерполяционный многочлен мало отличается от подынтегральной функции на $[a; b]$, то ошибка в этом приближенном неравенстве тоже невелика.

Формулы, получаемые таким способом, называются формулами квадратур.

Для получения значения интеграла $\int_a^b f(x) dx$ с заданной точностью вычисляют его по разным формулам квадратур и результаты сравнивают. Если расхождение между полученными результатами лежит в пределах допустимой погрешности – процесс вычисления заканчивается. В противном случае используют более точные формулы квадратур или первоначальные формулы, но при этом разбивают $[a; b]$ на большее число частей.

Ограничимся двумя простейшими формулами квадратур: трапеций и Симпсона (парабол).

Разобьем сегмент $[a; b]$ на n равных частей. Обозначим $\frac{b-a}{n} = h$. Составим таблицу 4 значений функции $y = f(x)$ в точках $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$.

Таблица 4

x	x_0	x_1	...	x_n
y	y_0	y_1	...	x_n

Формула Симпсона (парабол) имеет вид:

$$\int_a^b f(x) dx \approx J_{нар} = \frac{h}{3} [y_0 + y_n + 2(y_2 + y_4 + \dots + y_{n-2}) + 4(y_1 + y_3 + \dots + y_{n-1})].$$

Нужно помнить, что для применения этой формулы число n должно быть четным.

Формулу трапеций будем применять с поправочным членом, который существенно повышает ее точность

$$\int_a^b f(x) dx \approx J_{мп} = h \left(\frac{y_0}{2} + y_1 + y_2 + \dots + y_{n-1} + \frac{y_n}{2} \right) + \frac{h}{24} (-y_{-1} + y_1 + y_{n-1} - y_{n+1}),$$

где $y_{-1} = f(a - h),$
 $y_{n+1} = f(b + h).$

Можно доказать, что погрешность обеих формул имеет порядок h^4 . Это позволяет грубо оценить порядок величины h , обеспечивающий заданную степень точности.

Формулы можно переписать в виде:

$$J_{нар} = \frac{h}{3} (y_0 + y_n + 4S_1 + 2S_2),$$

$$J_{мп} = \frac{h}{2} (y_0 + y_n + 2(S_1 + S_2)) + \frac{h}{24} S_3,$$

где

$$S_1 = y_1 + y_3 + \dots + y_{n-1},$$

$$S_2 = y_2 + y_4 + \dots + y_{n-2},$$

$$S_3 = y_1 + y_{n-1} - y_1 - y_{n+1}.$$

Исходные данные и результаты вычислений удобно размещать на следующем бланке:

Таблица 5

x		y	
x_{-1}		y_{-1}	
x_0		y_0	
x_1		y_1	
...		...	
x_n		y_n	
x_{n+1}		y_{n+1}	

$$S_1 =$$

$$S_2 =$$

$$S_3 =$$

$$J_{нар} =$$

$$J_{мр} =$$

§8 Приближенное интегрирование дифференциальных уравнений

Наиболее распространенной математической моделью, используемой для описания непрерывных реальных физических, технических и других процессов является дифференциальное уравнение. Как помним из курса математики, дифференциальным называют уравнение вида: $F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$. Порядок дифференциального уравнения определяется наибольшим порядком производной в этом уравнении. Решением дифференциального уравнения является некоторая функция $y = f(x)$, которая преобразует уравнение в тождество. Таких функций для дифференциального уравнения существует бесконечное количество. Совокупность всех функций – решений уравнения называют общим решением и записывают в виде: $y = f(x, C_1, C_2, \dots, C_n)$. При конкретных значениях, входящих в последнее выражение констант, получают частные решения дифференциального уравнения, то есть конкретные функции, удовлетворяющие заданным начальным условиям $y_0 = y(x_0) = f(x_0)$, где x_0 – заданное значение аргумента. Как известно, дифференциальные уравнения проинтегрировать в конечном виде можно лишь в отдельных случаях. В практике решения прикладных задач используют приближенное интегрирование дифференциальных уравнений. Численными методами находят только частные решения уравнений.

Рассмотрим дифференциальное уравнение первого порядка, приведенное к виду: $y' = f(x, y)$.

Численное решение дифференциального уравнения, удовлетворяющее заданным начальным условиям, будем представлять в виде таблицы приближенных значений искомой функции.

Существование и единственность частного решения дифференциального уравнения $y' = f(x, y)$ следует из свойств функции $f(x, y)$. $f(x, y)$ должна быть непрерывной в области решения и $\left| \frac{\partial}{\partial y} f(x, y) \right| \leq M$, где M – некоторое положительное число.

Метод Эйлера

Простейший метод приближенного интегрирования дифференциальных уравнений, называемый метод Эйлера, состоит в том, что на малом промежутке изменения независимой переменной $x_0 \leq x \leq x_0 + h = x_1$.

Интегральная кривая дифференциального уравнения $y' = f(x, y)$ заменяется отрезком касательной $y - y_0 = f(x_0, y_0)(x - x_0)$, проведенной к интегральной кривой, через точку (x_0, y_0) . Отсюда $y_1 = y_0 + f(x_0, y_0) \cdot h$ и процесс: можно повторить для промежутка $x_1 \leq x \leq x_1 + h = x_2$ и т.д. Число h – шаг таблицы. Геометрически интегральная кривая заменяется при этом ломаной, называемой ломаной Эйлера (рисунок 10).

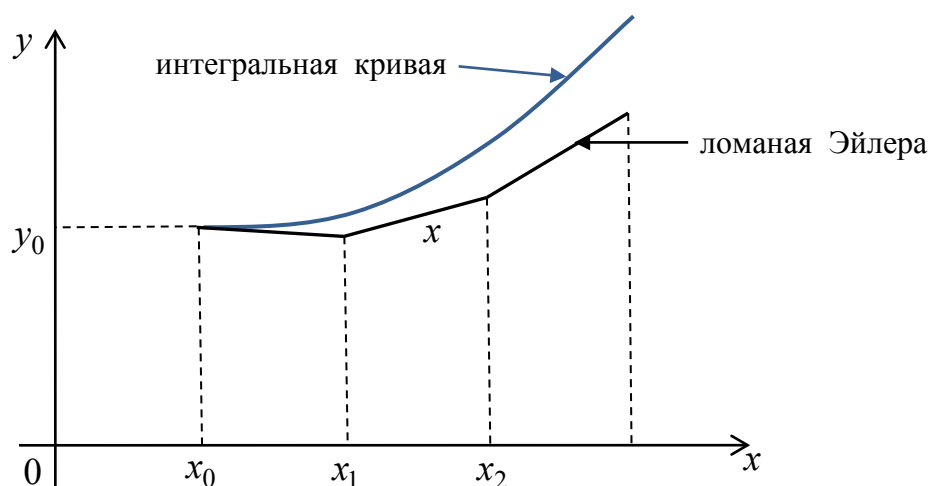


Рисунок 10

Рабочая формула для определения значений искомой функции $y = y(x)$ на отрезке $[x_0, x_n]$ имеет вид $y_{k+1} = y_k + h \cdot f(x_k, y_k)$, где $y_k = y(x_k)$, $x_{k+1} = x_k + h, k = 0, 1, \dots, n-1$, и $h = \frac{x_n - x_0}{n}$ (шаг).

По заданной предельной абсолютной погрешности ε начальный шаг вычислений h устанавливают с помощью неравенства $h^2 < \varepsilon$.

Пример 1. Пользуясь методом Эйлера, составить таблицу 6 приближенных значений интеграла дифференциального уравнения $y' = \frac{xy}{2}$, удовлетворяющего начальным условиям: при $x_0 = 0; y_0 = 1$, на отрезке $[0;1]$ с шагом $h = 0,1$. Результаты вычислений записываются в таблицу, заполняя её постепенно в процессе вычислений.

Таблица 6

k	x_k	y_k	$f(x_k, y_k)$	$h \cdot f(x_k, y_k)$
0	0	1,0000	0	0
1	0,1	1,0000	0,05	0,005
2	0,2	1,0050	0,1005	0,0100
3	0,3	1,0150	0,1522	0,0152
4	0,4	1,0303	0,2061	0,0206
5	0,5	1,0509	0,2627	0,0263
6	0,6	1,0777	0,3232	0,0323
7	0,7	1,1095	0,3883	0,0388
8	0,8	1,1483	0,4593	0,0459
9	0,9	1,1442	0,5374	0,0537
10	1,0	1,2479		

Как можно заметить вычислительные процедуры по методу Эйлера не вызывают сложностей, но простота расчетов сопровождается значительным недостатком в плане точности решения. Чем дальше мы удаляемся от начального значения аргумента x_0 (больше шагов), тем больше погрешность, тем больше отличается приближенное решение от искомого. Происходит аккумуляция погрешности округления.

Для нейтрализации указанного недостатка используют улучшенный метод Эйлера.

Производную обозначим $y'(x_k) = y'_k$. Отсюда $\Delta y_k = y'_k \cdot h$. Тогда рабочая формула преобразуется к виду $y_{k+1} = y_k + y'_k \cdot h$.

Предлагаемое усовершенствование метода Эйлера, которое в дальнейшем будем называть уравниванием, заключается в том, что вычисленное значение y_{k+1} последовательно уточняется по следующему алгоритму.

1. Обозначим найденное значение y_{k+1} через $y_{k+1}^{(1)}$ и вычислим $y_{k+1}^{(1)} = f(x_{k+1}, y_{k+1}^{(1)})$.

2. Заменяем y'_k полусуммой значений производных $\frac{y'_k + y_{k+1}^{(1)}}{2}$ и найдем $y_{k+1}^{(2)} = y_k + \frac{y'_k + y_{k+1}^{(1)}}{2} \cdot h$.

3. Вычислим $y_{k+1}^{(2)} = f(x_{k+1}, y_{k+1}^{(2)})$ и найдем $y_{k+1}^{(3)} = y_k + \frac{y'_k + y_{k+1}^{(2)}}{2} \cdot h$ и т.д.

Вычислительный процесс продолжается до тех пор, пока разность двух последовательных результатов y_{k+1} не будет меньше заданной точности.

Далее аналогично вычисляется y_{k+2} и т.д.

Пример 2. Пользуясь усовершенствованным методом Эйлера, составить таблицу приближенных значений интеграла дифференциального уравнения $y' = \frac{xy}{2}$, удовлетворяющего начальным условиям: при $x_0 = 0; y_0 = 1$, на отрезке $[0;1]$ с шагом $h = 0,1$. Вычисления вести с точностью до 0,0001.

Решение. В соответствии с таблицей, полученной в примере 1, имеем $y_0 = 1, y'_0 = 0, y_1^{(1)} = 1, y_1^{(1)} = \frac{0,1 \cdot 1}{2} = 0,05$.

Тогда

$$y_1^{(2)} = 1 + \frac{0,05 + 0}{2} \cdot 0,1 = 1,0025.$$

$$y_1^{(2)} = \frac{0,1 \cdot 1,0025}{2} = 0,0501.$$

Следовательно,

$$y_1^{(3)} = 1 + \frac{0,0501 + 0}{2} = 1,0025.$$

Таким образом, с точность до 0,0001

$$y_1^{(2)} = y_1^{(3)} = 1,0025 = y_1.$$

Аналогично получим для остальных значений y :

$$y_2^{(1)} = y_2^{(2)} = 1,0100 = y_2;$$

$$y_3^{(1)} = y_3^{(2)} = 1,0277 = y_3 \text{ и т.д.}$$

Результаты вычислений сведены в таблицу 7.

Таблица 7

k	x_k	y_k	$f(x_k, y_k)$	$\Delta y_k = f(x_k, y_k) \cdot h$
0	0	1,0000	0	0
1	0,1	1,0025	0,0501	0,0050
2	0,2	1,0100	0,1010	1,0101
3	0,3	1,0227	0,1534	0,0153
4	0,4	1,0408	0,2082	0,0208
5	0,5	1,0646	0,2661	0,0266
6	0,6	1,0943	0,3283	0,0328
7	0,7	1,1305	0,3957	0,0396
8	0,8	1,1738	0,4695	0,0470
9	0,9	1,2248	0,5512	0,0551
10	1,0	1,2845		

Метод Эйлера с уравнением дает на каждом шаге погрешность, порядок которой не превышает h^3 , и нередко применяется в вычислительной практике.

Интегрирование с помощью степенных рядов

Пусть требуется проинтегрировать дифференциальное уравнение $y' = f(x, y)$, при начальных условиях: $y = y_0$ при $x = x_0$.

Способ №1.

Будем искать решение $y(x)$ в виде суммы степенного ряда:

$$y(x) = a_0 + a_1 \cdot (x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \dots$$

Подставляя в дифференциальное уравнение ряды, изображающие $y(x)$ и его производную $y'(x)$, получим тождество, из которого последовательно находим коэффициенты a_0, a_1, a_2, \dots ряда. Этот способ применяется при интегрировании линейных уравнений.

Пример 3. Найти частное решение $y(x)$ дифференциального уравнения $y' = 3y + x^2$, соответствующие начальным условиям: $y = 5$ при $x = 0$.

Решение. Полагая $y(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots$, откуда $y'(x) = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \dots$

Подставляя в первый ряд начальные условия, находим $a_0 = 5$.

Подставляя оба ряда в дифференциальное уравнение, приходим к тождеству $a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \dots \equiv 15 + 3a_1x + (3a_2 + 1)x^2 + \dots$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x , последовательно находим $a_1 = 15, a_2 = \frac{45}{2}, a_3 = \frac{137}{6}, \dots$

Следовательно, искомое решение $y(x) = 5 + 15x + \frac{45}{2}x^2 + \frac{137}{6}x^3 + \dots$

Способ №2.

Разлагаем искомое решение в ряд Тейлора:

$$y(x) = y(x_0) + \frac{y'(x_0)}{1}(x - x_0) + \frac{y''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \frac{y'''(x_0)}{3!}(x - x_0)^3 + \dots$$

Свободный член $y(x_0)$ нам известен из начальных условий: $y(x_0) = y_0$. Значение $y'(x_0)$ получим, подставив начальные условия в дифференциальное уравнение.

Значение $y'(x_0)$ найдем, подставив $x_0, y(x_0), y'(x_0)$ в результат дифференцирования исходного дифференциального уравнения и т.д.

Пример 4. Найти частное решение $y(x)$ дифференциального уравнения $y' = x^2 + y^2$, соответствующего начальным условиям: $x_0 = 0, y = 1$.

Решение. Полагаем $y(x) = y(x_0) + \frac{y'(x_0)}{1!}x + \frac{y''(x_0)}{2!}x^2 + \frac{y'''(x_0)}{3!}x^3 + \dots$

Из начальных условий $y(x_0) = y_0 = 1$. Далее, из дифференциального уравнения находим $y'(x_0) = 0^2 + 1^2 = 1$. Дифференцируем наше уравнение: $y'' = 2x + 2y \cdot y'$. Подставляя в это равенство $x_0, y(x_0), y'(x_0)$ получим $y''(x_0) = 2$.

Дифференцируя еще раз и, подставляя в уравнение $y''' = 2 + 2(y')^2 + 2yy''$ значения $x_0, y(x_0), y'(x_0)$ и $y''(x_0)$, найдем $y'''(x_0) = 8$ и т.д.

Внося полученные значения $y(x_0), y'(x_0), y''(x_0), \dots$ в ряд Тейлора, получаем выражение искомого частного решения:

$$y(x) = 1 + \frac{1}{1!}x + \frac{2}{2!}x^2 + \frac{8}{3!}x^3 + \frac{28}{4!}x^4 + \dots$$

Метод Адамса

Пусть имеем дифференциальное уравнение $y' = f(x, y)$ и промежуток изменения независимой переменной x разбит точками $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$ на равные отрезки $[x_0, x_1], [x_1, x_2], \dots, [x_{n-1}, x_n]$ длины h . Будем обозначать $y_k = y(x_k)$, $y'_k = f(x_k, y_k)$.

Идея метода Адамса заключается в том, что на участке $[x_0, x_2]$ производная заменяется линейным двучленом, а сам интеграл – полиномом второй степени.

Значение искомой функции $y = f(x)$ на отрезке $[x_0, x_n]$ находят по формуле $y_{k+1} = y_k + q_k + \frac{1}{2} \Delta q_{k-1}, k \geq 1$, где $q_k = h \cdot f(x_k, y_k)$, $\Delta q_{k-1} = q_k - q_{k-1}$.

Полученной формулой можно воспользоваться лишь в том случае, когда заранее известны значения y_0 и y_1 , т.к. символ Δq_{k-1} при $k < 1$ теряет смысл.

Значение y_0 задается начальными условиями, а y_1 можно определить, например, пользуясь усовершенствованным методом Эйлера, или исходя из расположения искомого решения в степенной ряд в окрестности начальной точки. Метод Адамса дает погрешность на каждом шаге порядка h^2 , однако при каждом шаге погрешность суммируется.

Пример 5. Пользуясь методом Адамса, составить на отрезке $[0, 1]$ с шагом $h = 0,1$ таблицу приближенных значений интеграла дифференциального уравнения $y' = \frac{xy}{2}$, удовлетворяющего начальному условию $y(0) = 1$.

Решение. Для вычисления значения y_1 воспользуемся полученным в примере 2 разложением искомого интеграла в степенной ряд.

$$\text{При } x = 0 \text{ имеем } y_0 = 1, q_0 = \frac{1 \cdot 0}{2} \cdot 0,1 = 0$$

Исходя из разложения, полученного в примере 2 при $x = 0,1$, получим $y_1 = 1,0025$. Тогда $q_1 = \frac{1,0025 \cdot 0,1}{2} \cdot 0,1 = 0,0050$, $\Delta q_0 = q_1 - q_0 = 0,0050$.

Затем по формуле Адамса имеем

$$x_2 = 0,2; y_2 = y_1 + q_1 + \frac{1}{2} \Delta q_0 = 1,0025 + 0,0050 + 0,0025 = 1,01100,$$

$$q_2 = \frac{1,0100 \cdot 0,2}{2} \cdot 0,1 = 0,0101, \Delta q_1 = q_2 - q_1 = 0,0101 - 0,0050 = 0,0051 \text{ и т.д.}$$

Результаты вычислений записываем в таблицу 8, заполняемую постепенно в процессе вычислений.

Таблица 8

k	x_k	y_k	$q_k = f(x_k, y_k)h$	$\Delta q_k = q_{k+1} - q_k$
0	0	1	0	0,0050
1	0,1	1,0025	0,0050	0,0051
2	0,2	1,0100	0,0101	0,0025
3	0,3	1,0227	0,0153	0,0055
4	0,4	1,0406	0,0208	0,0058
5	0,5	1,0642	0,0266	0,0062
6	0,6	1,0937	0,0328	0,0067
7	0,7	1,1296	0,0395	0,0074
8	0,8	1,1725	0,0469	0,0081
9	0,9	1,2231	0,0550	
10	1,0	1,2821		

Метод Рунге – Кутты

Рассмотрим задачу Коши для дифференциального уравнения $y' = f(x, y)$ с начальным условием $y(x_0) = y_0$.

Обозначим через y_i приближенное значение искомого решения в точке x_i . По методу Рунге – Кутты вычисление приближенного значения y_{i+1} в следующей точке $x_{i+1} = x_i + h$ производится по формулам

$$\left. \begin{aligned} y_{i+1} &= y_i + \Delta y_i \\ \Delta y_{i+1} &= \frac{1}{6}(k_1^{(i)} + 2k_2^{(i)} + 2k_3^{(i)} + k_4^{(i)}) \end{aligned} \right\},$$

где

$$\left. \begin{aligned} k_1^{(i)} &= h \cdot f(x_i, y_i), \\ k_2^{(i)} &= h \cdot f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_1^{(i)}}{2}\right), \\ k_3^{(i)} &= h \cdot f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_2^{(i)}}{2}\right), \\ k_4^{(i)} &= h \cdot f(x_i + h, y_i + k_3^{(i)}), \\ (i &= 0, 1, 2) \end{aligned} \right\}$$

Расчеты оформляем в таблице 9.

Таблица 9

i	x	y	$K = h \cdot f(x, y)$	Δy
1	2	3	4	5
0	x_0	y_0	$K_1^{(0)}$	$K_1^{(0)}$
	$x_0 + \frac{h}{2}$	$y_0 + \frac{K_1^{(0)}}{2}$	$K_2^{(0)}$	$2K_2^{(0)}$
	$x_0 + \frac{h}{2}$	$y_0 + \frac{K_2^{(0)}}{2}$	$K_3^{(0)}$	$2K_3^{(0)}$
	$x_0 + h$	$y_0 + K_3^{(0)}$	$K_4^{(0)}$	$K_4^{(0)}$
				Δy_0
1	x_1	y_1		

Алгоритм оформления таблицы 9:

1. В первой строке x_0, y_0 – исходные данные;
2. Определяем $f(x_0, y_0)$ и, умножая на h , записываем в четвертом и пятом столбцах как $K_1^{(0)}$;

3. Второй и третий столбец второй строки: $x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{K_1^{(0)}}{2}$;

4. Значение $f\left(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{K_1^{(0)}}{2}\right)$, умножив на h , записываем в четвертом

столбце второй строки, как $K_2^{(0)}$ и его удвоенное значение $2K_2^{(0)}$ в пятом столбце;

5. Второй и третий столбец третьей строки: $x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{K_2^{(0)}}{2}$;

6. Значение $f\left(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{K_2^{(0)}}{2}\right)$, умножив на h , записываем в четвертом

столбце третьей строки, как $K_3^{(0)}$ и его удвоенное значение $2K_3^{(0)}$ в пятом столбце;

7. Второй и третий столбец четвертой строки: $x_0 + h, y_0 + K_3^{(0)}$.

8. Произведение $f(x_0 + h, y_0 + K_3^{(0)})$ и h записываем в четвертом и пятом столбцах четвертой строки как $K_4^{(0)}$;

9. Δy заполнен числами $K_1^{(0)}, 2K_2^{(0)}, 2K_3^{(0)}, K_4^{(0)}$;

10. В пятой строке столбца Δy вносим число, равное одной шестой суммы чисел $K_1^{(0)}, 2K_2^{(0)}, 2K_3^{(0)}, K_4^{(0)}$, как Δy_0 ;

11. Определяем $y_1 = y_0 + \Delta y_0$.

Далее, приняв в качестве исходных значений (x_1, y_1) заполняем шестую строку таблицы и повторяем всю вычислительную процедуру.

В ходе вычислений можно изменять шаг h . Для этого оценивается темп

изменения решения $\Theta = \left| \frac{K_2^{(i)} - K_3^{(i)}}{K_1^{(1)} - K_2^{(i)}} \right|$.

Если темп Θ высокий (больше сотых) шаг уменьшают, если низкий шаг h следует увеличить.

Пример 6. Методом Рунге-Кутты найти решение уравнения $y' = 0,25y^2 + x^2$ с начальным условием $y(0) = -1, x \in [0; 0,5]$, приняв шаг $h = 0,1$.

Решение. Результаты вычислений помещены в таблицу. Ее заполнение ведется в следующем порядке. При $i = 0$:

1. $x_0 = 0, y_0 = -1$;

2. $f(x_0, y_0) = 0,25, K_1^{(0)} = 0,1 \cdot 0,25 = 0,025$;

3. $x_0 + \frac{h}{2} = 0,05, y_0 + \frac{K_1^{(0)}}{2} = -0,98750$;

4. $f(x_0 + \frac{h}{2}; y_0 + k_1^{(0)} / 2) = 0,24638, k_1^{(0)} / 2 = 0,24629$;

5. $x_0 + \frac{h}{2} = 0,05, y_0 + k_1^{(0)} / 2 = -0,98769$;

6. $f(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{k_2^{(0)}}{2}) = 0,25 \cdot (0,98769)^2 + (0,05)^2 = 0,24638, k_3^{(0)} = 0,024638$;

7. $x_0 + h = 0,1; y_0 + k_3^{(0)} = -0,97536$;

8. $f(x_0 + h, y_0 + k_3^{(0)}) = 0,25 \cdot (0,97536)^2 + (0,1)^2 = 0,24783, k_3^{(0)} = 0,24783$;

9. Проверяем Δy ;

10. $\Delta y_0 = \frac{1}{6} \cdot 0,148317 = 0,02427$;

11. $y_1 = y_0 + \Delta y_0 = -0,97528$.

Значения $x_1 = 0,1, y_1 = -0,97528$ заносим в строку, помеченную индексом $i = 1$, и снова проводим вычисления.

Результаты вычислений заносим в таблицу 10.

Таблица 10

i	x	y	$0,25 y$	$k = h \cdot f(x, y)$	Δy	$\theta = \frac{ k_2 - k_3 }{ k_1 - k_2 }$
0	0	-1	-0,25	0,025	0,025	
	0,05	-0,98750	-0,24688	0,024629	0,049258	
	0,05	-0,98769	-0,24692	0,024638	0,049276	0,024

Продолжение таблицы 10

	0,1	-0,97536	-0,24384	0,024783	0,024783	
					0,02472	
1	0,1	-0,97528	-0,24382	0,024382	0,024779	
	0,15	-0,96289	-0,24072	0,025429	0,050858	
	0,15	-0,96257	-0,24064	0,025413	0,050826	0,025
	0,2	-0,94987	-0,23747	0,046557	0,026557	
					0,02550	
2	0,2	-0,94978	-0,23745	0,026553	0,26553	
	0,25	-0,93650	-,23413	0,028176	0,056352	
	0,25	0,93569	-0,23392	0,028175	0,056276	0,023
	0,3	-0,92162	-0,23041	0,030236	0,030236	
					0,02824	
3	0,3	-0,92154	-0,23039	0,030231	0,030231	
	0,35	-0,90642	-0,22661	0,032790	0,065580	
	0,35	-0,90514	-0,22629	0,032732	0,06564	0,023
	0,4	-0,88881	-0,22220	0,035743	0,035749	
					0,03284	
4	0,4	-0,88870	-0,22218	0,035745	0,035745	
	0,45	-0,87083	-0,21771	0,039209	0,078418	
	0,45	-0,86910	-0,21728	0,039134	0,07268	0,022
	0,5	-0,84957	-0,21239	0,04304	0,043044	
					0,03925	
5	0,5	-0,84945				

Оценка погрешности метода затруднена. Грубую оценку погрешности можно получать с помощью двойного пересчета по формуле $|y_n^* - y(x_n)| \approx \frac{|y_n^* - y_n|}{15}$, где $y(x_n)$ – значение точного решения уравнения в точке x_n , а y_n^* , y_n – приближенные значения, полученные с шагом $\frac{h}{2}$ и h .

§9 Приближенное нахождение сумм числовых рядов

Числовой ряд $a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots$ называется сходящимся, если существует предел последовательности его частичных сумм $S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$.

S – сумма ряда.

$S = S_n + R_n$, где $R_n = a_{n+1} + a_{n+2} + \dots$ – остаток ряда. Если ряд сходится, то $R_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Чтобы найти S сходящегося ряда с заданной точностью ε , нужно определить n таким, чтобы $|R_n| < \varepsilon$. Тогда $S_n \approx S$.

Но члены ряда a_1, a_2, \dots определяются приближенно, S_n округляется. Для учета всех погрешностей и, чтобы обеспечить нужную точность, применяют разбиение: $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = \varepsilon$, где $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ – положительные числа.

Возьмем число n членов ряда таким большим, чтобы остаточная погрешность $|R_n|$ удовлетворяла неравенству $|R_n| < \varepsilon_1$.

Каждый член ряда $a_k (k = 1, 2, \dots, n)$ вычислим с предельной абсолютной погрешностью, не превышающей $\frac{\varepsilon_2}{n}$.

Пусть $\bar{a}_k (k = 1, 2, \dots, n)$ – соответствующие приближенные значения членов ряда, т.е. $|\bar{a}_k - a_k| \leq \frac{\varepsilon_2}{n}$.

Тогда для $S_n = \sum_{k=1}^n a_k$ погрешность суммирования удовлетворяет неравенству $|S_n - \bar{S}_n| \leq \varepsilon_2$.

Полученный приближенный результат \bar{S}_n округлим до числа $\bar{\bar{S}}_n$ так, чтобы $|\bar{S}_n - \bar{\bar{S}}_n| \leq \varepsilon_3$.

$\bar{\bar{S}}_n$ является приближенным значением суммы ряда с заданной точностью ε ($|S - \bar{\bar{S}}_n| \leq |S - S_n| + |S_n - \bar{S}_n| \leq \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = \varepsilon$).

Разбиение числа ε на положительные $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ следует производить, сообразуясь с объемом работы для получения искомого результата. Если $\varepsilon = 10^{-m}$ и результат должен содержать m верных десятичных знаков после запятой, то чаще всего принимают: $\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{4}$; $\varepsilon_2 = \frac{\varepsilon}{4}$; $\varepsilon_3 = \frac{\varepsilon}{2}$. Если заключительное округление отсутствует, то полагают: $\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{2}$; $\varepsilon_2 = \frac{\varepsilon}{2}$; $\varepsilon_3 = 0$.

Для оценки остатка R_n ряда применяют следующие теоремы.

Теорема 1. Если члены ряда представляют собой соответствующие значения положительной монотонно убывающей функции $f(x)$, т.е. $a_n = f(n)$

$$(n = 1, 2, \dots), \text{ то } \int_{n+1}^{\infty} f(x) dx < R_n < \int_n^{\infty} f(x) dx.$$

Теорема 2. Если ряд – знакочередующийся то модули его членов монотонно убывают, то $|R_n| \leq |a_{n+1}|$.

Замечание. Так как расчет суммарной погрешности представляет собой трудоемкую операцию, то на практике для обеспечения заданной точностью $\varepsilon = 10^{-m}$ все промежуточные вычисления производят с одним или двумя запасными знаками. При этом, не вполне строго предполагают, что полученные погрешности не повлияют на десятичные знаки m -го разряда искомого результата.

Говорят, что ряд сходится медленно, если нужно взять большое число членов ряда, чтобы получить его сумму с заданной точностью.

Например, требуется найти сумму ряда $S = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{n^2} + \dots$ с точностью до 10^{-6} . Для R_n ряда (в силу теоремы 1) имеем оценку $R_n < \int_n^{\infty} \frac{dx}{x^2} = \frac{1}{n}$.

Следовательно, точность $\varepsilon = 10^{-6}$ будет гарантирована, если взять сумму 1000000 членов ряда, что практически невозможно.

В подобных случаях естественно поставить задачу об ускорении сходимости, т.е. о таком преобразовании данного ряда в другой ряд, который имел бы такую же сумму, но сходился быстрее. Одним из методов убыстрения сходимости рядов является метод Куммера.

Пусть ряд сходится и сумма его равна S . Подберем вспомогательный сходящийся ряд $b_1 + b_2 + \dots + b_n + \dots$ ($b_n \neq 0$), сумма которого β известна, причем

такой, что существует $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = q + 0$.

Тогда имеем очевидное равенство $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = q \sum_{n=1}^{\infty} b_n + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n - qb_n)$ или

$$S = q\beta + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n - qb_n).$$

В частности, если $a_n \approx b_n$, то $q=1$ и имеем: $S = q\beta + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n - qb_n)$.

Следовательно, нахождение суммы S ряда заменяется нахождением суммы ряда $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - qb_n)$.

Можно показать, что последний ряд сходится быстрее исходного ряда.

Пример 1.

Найти сумму ряда $S = \frac{1}{1^3} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} \dots + \frac{1}{n^3} + \dots$ с точностью до $\varepsilon = 0,001$.

Решение. Примем остаточную погрешность $\varepsilon_1 = \frac{1}{4} \varepsilon = \frac{1}{4} \cdot 0,001 = \frac{1}{4000}$.

В силу теоремы 1 имеем оценку $R_n \leq \int_n^{\infty} \frac{dx}{x^3} = -\frac{1}{2x^2} \Big|_n^{\infty} = \frac{1}{2n^2}$.

Решая неравенство $\frac{1}{2n^2} \leq \frac{1}{4000}$, получим $n \geq \sqrt{2000} \approx 44,7$.

Примем $n = 45$.

Предельную погрешность суммирования выберем равной

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{4} \varepsilon = \frac{1}{4} \cdot 0,001 = \frac{1}{4000}, \text{ поэтому предельная абсолютная погрешность слагае-}$$

$$\text{мых частичной суммы } S_{45} \text{ ряда есть } \frac{\varepsilon_n}{n} \leq \frac{1}{4000 \cdot 45} = \frac{5}{9} \cdot 10^{-5}.$$

Положим $\frac{\varepsilon_n}{n} = \frac{1}{2} \cdot 10^{-5}$, т.е. члены ряда будем вычислять с пятью верными

знаками после запятой. Производя вычисление, оформим в виде таблицы 11.

Таблица 11

1,0000	0,00024	0,00003
0,12500	0,00020	0,00003
0,03704	0,00017	0,00003
0,01562	0,00014	0,00003
0,00800	0,00012	0,00002
0,00463	0,00011	0,00002
0,00292	0,00009	0,00002
0,00195	0,00008	0,00002
0,00137	0,00007	0,00002
0,00100	0,00006	0,00002
0,00075	0,00006	0,00001
0,00058	0,00005	0,00001
0,00046	0,00004	0,00001
0,00036	0,00004	0,00001
0,00030	0,00004	0,00001
1,19998	0,00151	0,00029

Следовательно,

$$S_{45} = 1,19998 + 0,00151 + 0,00029 = 1,20178.$$

Округляя это значение до тысячных, получим приближенное значение суммы $S \approx 1,202$.

Так как погрешность округления

$\varepsilon_3 = 0,00022 < \frac{1}{4} \cdot 10^{-3}$, то суммарная погрешность найденного результата

не превышает $\varepsilon < \frac{1}{4} \cdot 10^{-3} + \frac{1}{4} \cdot 10^{-3} + \frac{1}{4} \cdot 10^{-3} = \frac{3}{4} \cdot 10^{-3}$.

Таким образом, $S \approx 1,202 \pm 0,001$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Крахоткина, Е. В. Численные методы в научных расчетах: учебное пособие. Курс лекций / Е. В. Крахоткина. – Ставрополь: Северо-Кавказский федеральный университет, 2015. – 162 с. – ISBN 2227-8397. – Текст: электронный // Электронно-библиотечная система IPR BOOKS: [сайт]. – URL: <http://www.iprbookshop.ru/62884.html> (дата обращения: 31.01.2020). – Режим доступа: для авторизир. пользователей
2. Мастяева И.Н. Численные методы [Электронный ресурс]: учебное пособие/ Мастяева И.Н., Семенихина О.Н. – Электрон. текстовые данные. – Москва: Евразийский открытый институт, Московский государственный университет экономики, статистики и информатики, 2003. – 241 с. – Режим доступа: <http://www.iprbookshop.ru/11121.html>. – ЭБС «IPRbooks»
3. Вохминцева Г.П. Лабораторный практикум по приближенным методам курса высшей математики / Г.П. Вохминцева, Г.Н. Торопчина, И.Н. Шевченко. – Благовещенск: Амурский гос. ун-т, – 1998. – 84 с.

СОДЕРЖАНИЕ

<i>Введение</i>	3
§1 Погрешность вычисления.....	4
§2 Точные методы решения системы линейных уравнений.....	7
§3 Итерационные методы решения системы линейных уравнений	10
§4 Решение нелинейных уравнений	12
§5 Интерполирование функции	20
§6 Формула тейлора и её применение.....	25
§7 Приближенное вычисление интегралов.....	30
§8 Приближенное интегрирование дифференциальных уравнений.....	33
§9 Приближенное нахождение сумм числовых рядов	47
<i>Литература</i>	52