

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации

*АМУРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ*

А.М. Попова, Т.Е. Гришкина

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ В  
ПРОСТРАНСТВЕ

*Методические указания для организации  
самостоятельной работы студентов*

Благовещенск

Издательство АмГУ

2020

*Рекомендовано  
учебно-методическим советом университета*

*Рецензент:*

*Павельчук А.В., канд. физ.-мат. наук, заместитель директора по учебной  
работе общеобразовательного лица ФГБОУ ВО АмГУ*

**Попова А.М., Гришкина Т.Е.**

Аналитическая геометрия в пространстве: методические указания для организации самостоятельной работы студентов / А.М. Попова, Т.Е. Гришкина – Благовещенск: Изд-во АмГУ, 2020. – 35 с.

Методические указания предназначены для студентов первого курса всех направлений подготовки и специальностей.

В них приводятся образец решения типовых заданий, варианты для организации самостоятельной работы и теоретические вопросы.

©Амурский государственный университет, 2020

© А.М. Попова, Т.Е. Гришкина

## *ВВЕДЕНИЕ*

Аналитическая геометрия в пространстве изучает уравнение прямой в пространстве, уравнение плоскости в пространстве, исследует пространственные фигуры.

Методические указания «Аналитическая геометрия в пространстве» рекомендованы для самостоятельной работы студентов различных направлений подготовки и специальностей при изучении соответствующего раздела математики, а также для использования в качестве дополнительного материала при организации преподавателем практических занятий.

Методические указания содержат теоретические вопросы для самоконтроля, ряд детально разобранных заданий, 26 вариантов типовых задач, которые позволяют формировать индивидуальную домашнюю работу студентов по данному разделу.

Для эффективной работы с методическими указаниями необходима предварительная проработка теоретического материала лекций, а также учебников и пособий, представленных в списке литературы.

### Образец выполнения индивидуального задания

Задание 1: Даны координаты вершин пирамиды:  $A_1(-1; 3; -4)$ ,  $A_2(-2; 1; -3)$ ,  $A_3(5; -1; -7)$ ,  $A_4(1; -6; -4)$ .

Найти:

1. Уравнение плоскости  $A_1A_2A_3$ .
2. Канонические и параметрические уравнения прямых  $A_1A_2$ ,  $A_1A_3$ ,  $A_1A_4$ .
3. Угол между ребрами  $A_1A_2$  и  $A_1A_3$ .
4. Угол между ребром  $A_1A_4$  и плоскостью  $A_1A_2A_3$ .
5. Уравнение высоты, опущенной из вершины  $A_4$  на грань  $A_1A_2A_3$ .
6. Уравнение плоскости, проходящей через т.  $A_4$  параллельно плоскости  $A_1A_2A_3$ .

Решение:

1. Уравнение плоскости, проходящей через 3 точки, имеет вид:

$$\pi = \begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0$$

Подставляем координаты точек  $A_1(-1; 3; -4)$ ,  $A_2(-2; 1; -3)$ ,  $A_3(5; -1; -7)$ :

$$\pi_{A_1A_2A_3} = \begin{vmatrix} x - (-1) & y - 3 & z - (-4) \\ -2 - (-1) & 1 - 3 & -3 - (-4) \\ 5 - (-1) & -1 - 3 & -7 - (-4) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x + 1 & y - 3 & z + 4 \\ -1 & -2 & 1 \\ 6 & -4 & -3 \end{vmatrix} =$$

$$= 6(x + 1) + 6(y - 3) + 4(z + 4) + 12(z + 4) + 4(x + 1) - 3(y - 3) = 10(x + 1) + 3(y - 3) + 16(z + 4) = 10x + 3y + 16z + 65 = 0$$

Получаем:  $10x + 3y + 16z + 65 = 0$  – уравнение плоскости  $A_1A_2A_3$ , где  $\vec{N}(10; 3; 16)$  – нормальный вектор плоскости.

2. Каноническое уравнение прямой, проходящей через 2 точки, имеет

вид: 
$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}$$

Параметрическое уравнение прямой имеет вид: 
$$\begin{cases} x = t(x_2 - x_1) + x_1 \\ y = t(y_2 - y_1) + y_1 \\ z = t(z_2 - z_1) + z_1 \end{cases}$$

Составляем канонические уравнения:

прямая  $A_1A_2$  проходит через точки  $A_1(-1; 3; -4)$ ,  $A_2(-2; 1; -3)$ :-

$$\frac{x+1}{-2+1} = \frac{y-3}{1-3} = \frac{z+4}{-3+4} \quad \text{или} \quad \frac{x+1}{-1} = \frac{y-3}{-2} = \frac{z+4}{1} \quad - \text{ каноническое уравнение}$$

прямой  $A_1A_2$ , направляющий вектор прямой имеет координаты  $\vec{s}_{A_1A_2}(-1; -2; 1)$ .

Прямая  $A_1A_3$  проходит через точки  $A_1(-1; 3; -4)$ ,  $A_3(5; -1; -7)$ :-

$$\frac{x+1}{5+1} = \frac{y-3}{-1-3} = \frac{z+4}{-7+4} \quad \text{или} \quad \frac{x+1}{6} = \frac{y-3}{-4} = \frac{z+4}{-3} \quad - \text{ каноническое уравнение}$$

прямой  $A_1A_3$ , направляющий вектор прямой имеет координаты  $\vec{s}_{A_1A_3}(6; -4; -3)$ .

Прямая  $A_1A_4$  проходит через точки  $A_1(-1; 3; -4)$ ,  $A_4(1; -6; -4)$ :-

$$\frac{x+1}{1+1} = \frac{y-3}{-6-3} = \frac{z+4}{-4+4} \quad \text{или} \quad \frac{x+1}{2} = \frac{y-3}{-9} = \frac{z+4}{0} \quad - \text{ каноническое уравнение}$$

прямой  $A_1A_4$ , направляющий вектор прямой имеет координаты  $\vec{s}_{A_1A_4}(2; -9; 0)$ .

Составляем параметрические уравнения:

прямая  $A_1A_2$ :  $\frac{x+1}{-1} = \frac{y-3}{-2} = \frac{z+4}{1} = t$  или 
$$\begin{cases} x+1 = -t \\ y-3 = -2t \\ z+4 = t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -t-1 \\ y = -2t+3 \\ z = t-4 \end{cases} \quad -$$

параметрическое уравнение прямой  $A_1A_2$ .

Прямая  $A_1A_3$ :  $\frac{x+1}{6} = \frac{y-3}{-4} = \frac{z+4}{-3}$  или 
$$\begin{cases} x+1 = 6t \\ y-3 = -4t \\ z+4 = -3t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 6t-1 \\ y = -4t+3 \\ z = -3t-4 \end{cases} \quad -$$

параметрическое уравнение прямой  $A_1A_3$ .

Прямая  $A_1A_4$ :  $\frac{x+1}{2} = \frac{y-3}{-9} = \frac{z+4}{0}$  или 
$$\begin{cases} x+1 = 2t \\ y-3 = -9t \\ z+4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2t-1 \\ y = -9t+3 \\ z = -4 \end{cases} \quad -$$

параметрическое уравнение прямой  $A_1A_4$ .

3. Для нахождения угла между ребрами, воспользуемся формулой

нахождения угла между направляющими векторами  $\vec{s}_1(m_1; n_1; p_1)$  и  $\vec{s}_2(m_2; n_2; p_2)$ :

$$\cos \varphi = \frac{m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2 + p_1^2} \cdot \sqrt{m_2^2 + n_2^2 + p_2^2}}.$$

Направляющими векторами ребер пирамиды являются  $\vec{s}_{A_1A_2}(-1; -2; 1)$  и  $\vec{s}_{A_1A_3}(6; -4; -3)$ . Найдем косинус угла между ними:

$$\cos \varphi = \frac{(-1) \cdot 6 + (-2) \cdot (-4) + 1 \cdot (-3)}{\sqrt{(-1)^2 + (-2)^2 + 1^2} \cdot \sqrt{6^2 + (-4)^2 + (-3)^2}} = \frac{-6 + 8 - 3}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{61}} = \frac{-1}{\sqrt{366}} \approx -0,057 \quad \text{или}$$

$$\varphi = 92^\circ.$$

4. Угол между ребром и плоскостью вычисляется по формуле:

$$\sin \varphi = \frac{Am + Bn + Cp}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \sqrt{m^2 + n^2 + p^2}}, \quad \text{где } \vec{N}(A; B; C) - \text{ нормальный вектор}$$

плоскости,  $\vec{s}(m; n; p)$  – направляющий вектор прямой.

Уравнение плоскости  $A_1A_2A_3$  имеет вид  $10x + 3y + 16z + 65 = 0$ , каноническое

уравнение прямой  $A_1A_4$  имеет вид  $\frac{x+1}{2} = \frac{y-3}{-9} = \frac{z+4}{0}$ , где  $\vec{N}(10; 3; 16)$  –

нормальный вектор плоскости,  $\vec{s}_{A_1A_4}(2; -9; 0)$  – направляющий вектор прямой.

Получаем:

$$\sin \varphi = \frac{10 \cdot 2 + 3 \cdot (-9) + 16 \cdot 0}{\sqrt{10^2 + 3^2 + 16^2} \cdot \sqrt{2^2 + (-9)^2 + 0^2}} = \frac{20 - 27}{\sqrt{365} \cdot \sqrt{85}} = \frac{-7}{\sqrt{31025}} \approx -0,04.$$

5. Найдем уравнение высоты, опущенной из вершины  $A_4$  на грань  $A_1A_2A_3$ .

Уравнение высоты, опущенной из вершины  $A(x_0; y_0; z_0)$  на заданную плоскость

$\pi: Ax + By + Cz + D = 0$ , имеет вид:  $\frac{x-x_0}{A} = \frac{y-y_0}{B} = \frac{z-z_0}{C}$ . Обозначим высоту из

вершины  $A_4(1; -6; -4)$  через  $A_4H$ . Она перпендикулярна плоскости  $A_1A_2A_3$ ,

следовательно, ее направляющий вектор коллинеарен нормальному вектору

$\vec{N}(10; 3; 16)$  плоскости  $A_1A_2A_3$ . Тогда получим следующее уравнение высоты:

$$\frac{x-1}{10} = \frac{y+6}{3} = \frac{z+4}{16}.$$

7. Найдем уравнение плоскости, проходящей через заданную точку

$A(x_0; y_0; z_0)$  параллельно плоскости  $\pi: Ax + By + Cz + D = 0$ :

$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$ . Имеем  $A_4(1; -6; -4)$  и уравнение плоскости  $A_1A_2A_3$   $10x + 3y + 16z + 65 = 0$ , где нормальный вектор  $\vec{N}(10; 3; 16)$  плоскости  $A_1A_2A_3$ . Получим уравнение искомой плоскости:  $10(x - 1) + 3(y + 6) + 16(z + 4) = 10x + 3y + 16z + 72 = 0$ .

Задание 2: Построить плоскости:

1.  $2x + y + 3z - 6 = 0$
2.  $2x + 3y = 12$
3.  $z - 3x = 0$
4.  $y - 4 = 0$

Решение:

1. Найдем точки пересечения плоскости с осями. Для этого уравнение плоскости преобразуем к уравнению в отрезках:  $2x + y + 3z = 6$ . Разделим обе части уравнения на 6:  $\frac{2x}{6} + \frac{y}{6} + \frac{3z}{6} = 1$  или  $\frac{x}{3} + \frac{y}{6} + \frac{z}{2} = 1$ . Получим т.А(3;0;0), т.В(0;6;0) и т.С(0;0;2) точки пересечения с осями OX, OY, OZ соответственно.

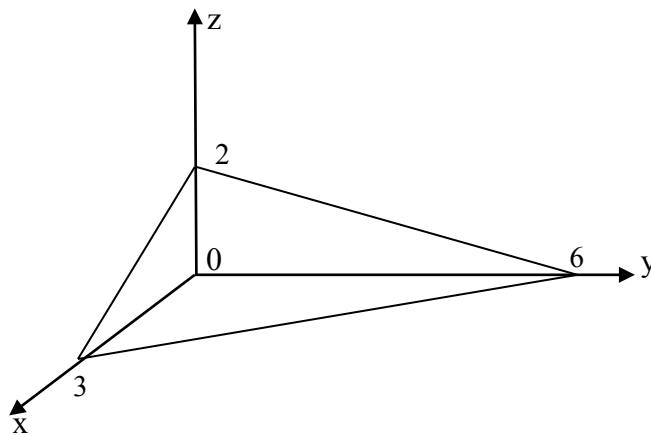


Рис.1

2. Учитывая, что плоскость параллельна оси OZ, строим линию ее пересечения с плоскостью  $z = 0$ , т.е. прямую АВ:  $\begin{cases} 2x + 3y = 2 \\ z = 0 \end{cases}$  – “след” плоскости А(6;0;0), В(0;4;0).

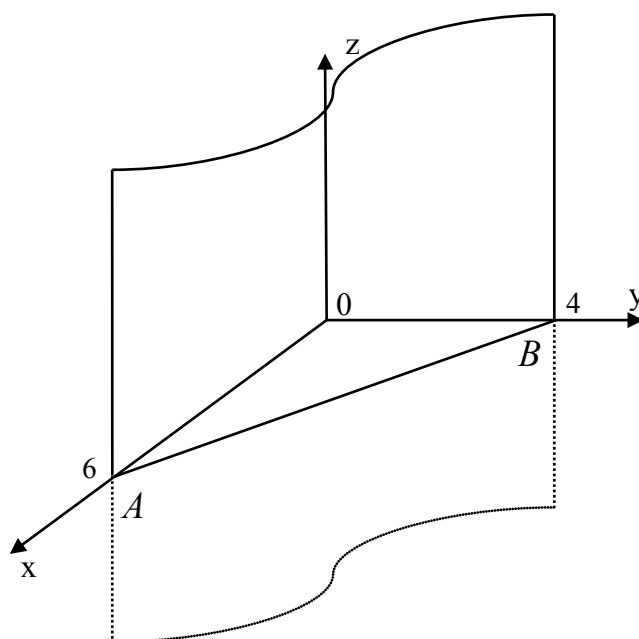


Рис.2

3. При  $x=0, z=0$  плоскость проходит через начало координат и параллельна оси  $OY$ , т.е. плоскость проходит через ось  $OY$ .

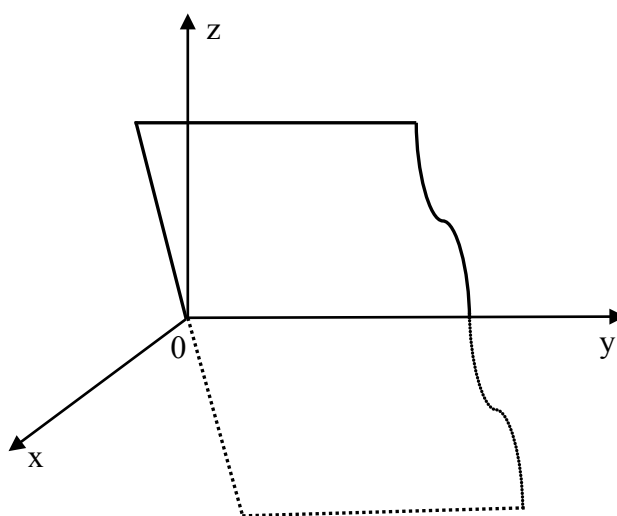


Рис.3

4. Плоскость параллельна осям  $OX$  и  $OZ$ , т.е. параллельна координатной плоскости  $XOZ$ . В точке  $A(0;4;0)$  плоскость пересекает ось  $OY$ .



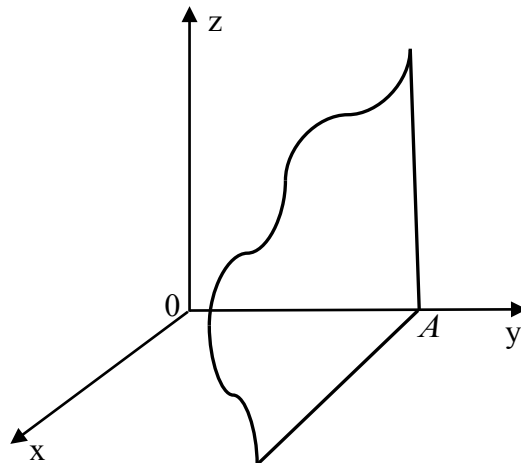


Рис.4

Задание 3: Построить поверхности:

1.  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$
2.  $z = x^2 + 1$
3.  $z = x^2 + y^2 + 1$
4.  $x^2 + y^2 = 4x$

Решение:

1.  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  – эллиптический цилиндр. Образующая параллельна оси OZ,

направляющая  $\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \\ z = 0 \end{cases}$ .

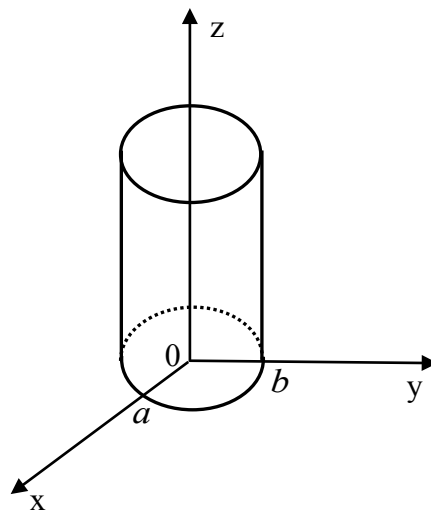


Рис.5

2.  $z = x^2 + 1$  – параболический цилиндр. Образующая параллельна оси  $OY$ ,

направляющая  $\begin{cases} z = x^2 + 1 \\ y = 0 \end{cases}$ .

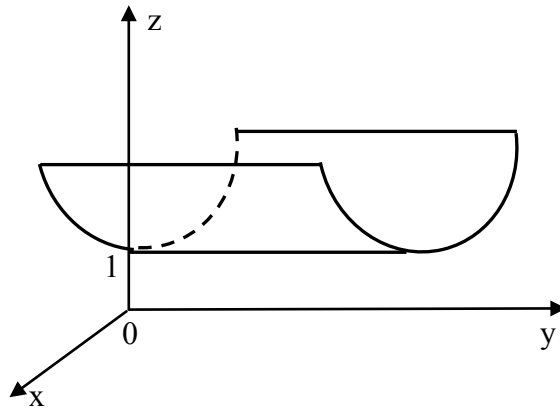


Рис.6

3.  $z = x^2 + y^2 + 1$  – параболоид, смещенный по оси  $OZ$  на единицу вверх.

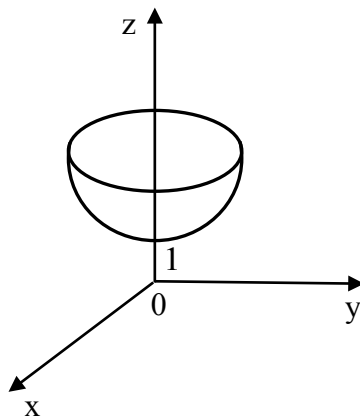


Рис. 7

4.  $x^2 + y^2 = 4x$  – круговой цилиндр, образующая параллельна оси  $OZ$ ,

направляющая  $\begin{cases} x^2 - 4x + 4 - 4 + y^2 = 0 \\ z = 0 \end{cases}$  или  $\begin{cases} (x - 2)^2 + y^2 = 4 \\ z = 0 \end{cases}$ .

$S(2;0;0)$  – центр окружности,  $R=2$  – радиус.

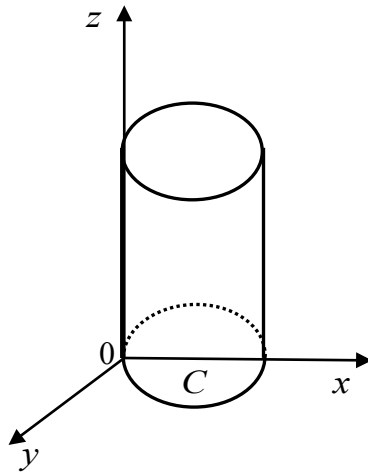


Рис.8

Задание 4: Построить тело, ограниченное заданными поверхностями:

1.  $z = 4 - x^2; x + y = 4; z = 0$
2.  $x^2 + y^2 = 9; z = 9 - y^2; z = 0$
3.  $x^2 + y^2 - z^2 = 0; x + y = 2; x = y = z = 0$
4.  $y = x^2; y + z = 4; z = 0$

Решение:

1.  $z = 4 - x^2; x + y = 4; z = 0$ : строим параболический цилиндр, образующая которого параллельна оси  $OY$ , а направляющая парабола  $AKA_1$

$$\begin{cases} z = 4 - x^2 \\ y = 0 \end{cases}$$

. Вершина этой параболы находится в т.К(0;0;4), ветви направлены вниз. Образующие рассматриваемого цилиндра, лежащие в плоскости  $z=0$  есть пара прямых  $AB$  и  $A_1B_1$ , уравнения которых  $\begin{cases} x - 2 = 0 \\ z = 0 \end{cases}$  и  $\begin{cases} x + 2 = 0 \\ z = 0 \end{cases}$ . Плоскость  $x + y = 4$  параллельна оси  $OZ$  и пересекает плоскость  $z = 0$  по прямой  $\begin{cases} x + y = 4 \\ z = 0 \end{cases}$  – “след” плоскости. Найдём точки пересечения образующих цилиндра  $AB$  и  $A_1B_1$  со “следом” плоскости  $x + y = 4$ . Получим точки  $B(2;2;0)$  и  $B_1(-2;6;0)$ . Линия  $BMB_1$  – есть линия пересечения цилиндра с плоскостью  $x + y = 4$ . Проекция тела на плоскость – трапеция  $AA_1B_1B$ .

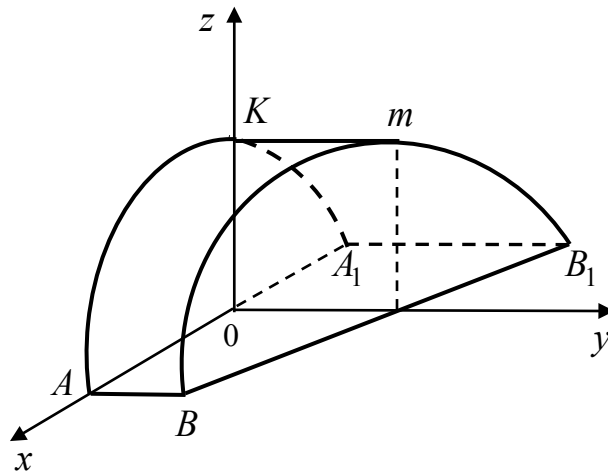


Рис. 9

2.  $x^2 + y^2 = 9$ ;  $z = 9 - y^2$ ;  $z = 0$ : строим круговой цилиндр  $x^2 + y^2 = 9$ , образующая которого параллельна оси OZ. Затем строим параболический цилиндр  $z = 9 - y^2$ , образующие которого параллельны оси OX, а направляющей является парабола  $\begin{cases} z = 9 - y^2 \\ x = 0 \end{cases}$ , с вершиной в точке  $K(0;0;9)$  и ветвями направленными вниз. В плоскости XOY оба цилиндра имеют только две общие точки  $C(0;3;0)$  и  $D(0;-3;0)$ . Остальные общие точки образуют кривую CADBC.

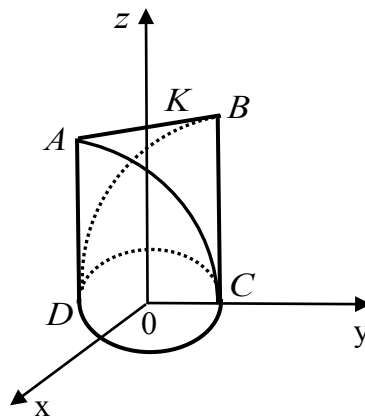


Рис.10

3.  $x^2 + y^2 - z^2 = 0$ ;  $x + y = 2$ ;  $x = y = z = 0$ :

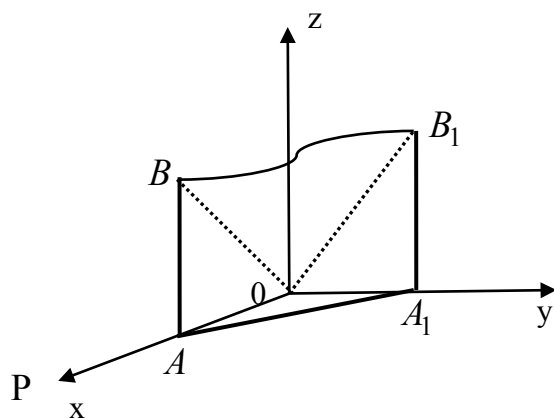


Рис.11

Первая поверхность является круговым конусом с вершиной в т.  $O(0;0;0)$ . По условию  $z=0$ . Плоскость  $x+y=2$  параллельна оси  $OZ$  и пересекает плоскость  $z=0$  по прямой  $AA_1$ , уравнение которой  $\begin{cases} x+y=2 \\ z=0 \end{cases}$ , в т.  $A(2;0;0)$  и  $A_1(0;2;0)$ . Эта же плоскость пересекает плоскость  $y=0$  по прямой  $AB$ , уравнение которой  $\begin{cases} x=2 \\ y=0 \end{cases}$ , и плоскость  $x=0$  по прямой  $A_1B_1$ , уравнение которой  $\begin{cases} y=2 \\ x=0 \end{cases}$ . Образующая конуса  $OB$  и  $OB_1$ , лежащие в плоскостях  $y=0$  и  $x=0$  (в I октанте) имеют уравнения  $\begin{cases} x-z=0 \\ y=0 \end{cases}$ ,  $\begin{cases} y-z=0 \\ x=0 \end{cases}$ . Конус и плоскость пересекаются по линии  $BB_1$ , где  $B(2;0;2)$  и  $B_1(0;2;2)$ .

4.  $y=x^2$ ;  $y+z=4$ ;  $z=0$ : строим параболический цилиндр, образующая которого параллельна оси  $OZ$ , а направляющая парабола  $\begin{cases} y=x^2 \\ z=0 \end{cases}$ . Плоскость  $y+z=4$  параллельна оси  $OX$ , пересекается с плоскостью  $x=0$  по прямой  $CD$ , уравнение которой  $y+z=4$ . Прямая  $AB$  параллельна оси  $OX$   $\begin{cases} y=4 \\ z=0 \end{cases}$ . Цилиндр пересекается с плоскостью  $y+z=4$  по параболе  $ACB$ .

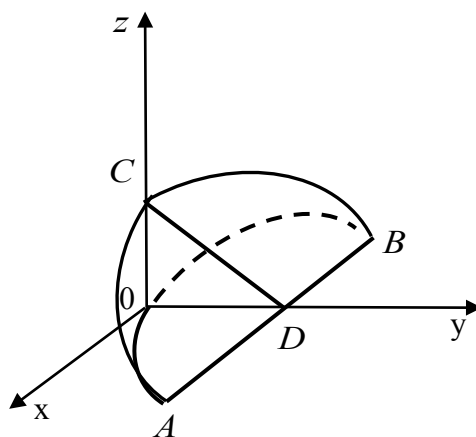


Рис.12

### Варианты заданий для самостоятельной работы

Задания:

1. Даны координаты вершин пирамиды  $A_1A_2A_3A_4$ :  $A_1(x_1; y_1; z_1)$ ;  $A_2(x_2; y_2; z_2)$ ;  $A_3(x_3; y_3; z_3)$ ;  $A_4(x_4; y_4; z_4)$ .

Найти:

- 1) уравнение плоскости  $A_1A_2A_3$ ;
  - 2) уравнение прямых  $A_1A_2$ ,  $A_1A_3$ ,  $A_1A_4$  в каноническом и параметрическом виде;
  - 3) угол между ребрами  $A_1A_2$  и  $A_1A_3$ ;
  - 4) угол между ребром  $A_1A_2$  и плоскостью  $A_1A_2A_3$ ;
  - 5) уравнение высоты, опущенной из вершины  $A_4$  на грань  $A_1A_2A_3$ ;
  - 6) уравнение плоскости, проходящей через точку  $A_4$  параллельно плоскости  $A_1A_2A_3$ .
2. Построить плоскости.
  3. Построить поверхности.
  4. Построить тело ограниченное заданными поверхностями.

### Вариант №1

Задание 1:  $A_1(1;3;2)$ ;  $A_2(3;2;3)$ ;  $A_3(4;0;1)$ ;  $A_4(1;1;1)$ .

Задание 2:

a)  $-3x + 5y + 2z = 5$ ;

b)  $2x - 3y = 0$ ;

c)  $2x = 3$ ;

d)  $2z - 3y - 4 = 0$ ;

e)  $3x - 5y - 6z = 0$

Задание 3:

a)  $4x^2 - y^2 + 6z^2 = 0$ ;

b)  $z^2 - 2x + 2 = 0$ ;

c)  $z = x^2 - 3$ ;

d)  $3x^2 - 4y^2 + z^2 = 12$ .

Задание 4:

a)  $z = 3x^2 + y^2$ ;  $x = \sqrt{y}$ ;  $z = 0$ ;  $y = 4$ ;  $x = 0$ .

b)  $x^2 + y^2 = 20x$ ;  $x^2 + y^2 = z^2$ ;  $z = 0$ .

c)  $x + y + z = 30$ ;  $x^2 + y^2 = a^2$ ;  $z = 0$

### Вариант №2

Задание 1:  $A_1(3;1;1)$ ;  $A_2(1;4;1)$ ;  $A_3(1;1;7)$ ;  $A_4(3;4;-1)$ .

Задание 2:

a)  $2x - 5z = 2$ ;

b)  $3x - 5y + 4 = 0$ ;

c)  $3y = -5$ ;

d)  $3 + 4y - 2z = 3$ ;

e)  $2z = 0$ .

Задание 3:

a)  $4z^2 + y^2 - 2x = 0$ ;

b)  $y^2 - 4z^2 + 8x^2 + 8 = 0$ ;

c)  $y^2 - 4z - 6 = 0$ ;

d)  $x = -27^2 - 3$ .

Задание 4:

a)  $z = x^2 + y^2 + 1$ ;  $x + y = 2$ ;  $x = 0$ ;  $y = 0$ ;  $z = 0$ .

b)  $z = 6 - x^2 - y^2$ ;  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ .

c)  $az = x^2 + y^2$ ;  $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ .

### Вариант №3

Задание 1:  $A_1(-1; 3; 0)$ ;  $A_2(4; 5; -2)$ ;  $A_3(1; -1; 6)$ ;  $A_4(6; 1; 5)$ .

Задание 2:

a)  $4x + y = 4$ ;

b)  $3z - 5x - y = 0$ ;

c)  $x + 6y = 0$ ;

d)  $2x - 3 = 0$ ;

e)  $2x - 3y + 4z = 7$

Задание 3:

a)  $4x^2 + y^2 + 2z^2 = 6$ ;

b)  $2x^2 - y^2 = 2$ ;

c)  $x = 3y^2 + 2$ ;

d)  $3x^2 + 3y^2 + 3z^2 = 1$ .

Задание 4:

a)  $y = z$ ;  $x = 4$ ;  $y = \sqrt{25 - x^2}$ ;  $x = 0$ ;  $y = 0$ ;  $z = 0$ .

b)  $z = x^2 + y^2$ ;  $y = x$ ;  $y = 2x$ ;  $x = 1$ ;  $z = 0$ .

c)  $z = 1 - x^2$ ;  $y = 3 - x$ ;  $y = 0$ ;  $z = 0$ .

### Вариант №4

Задание 1:  $A_1(-1; 3; 0)$ ;  $A_2(4; 5; -2)$ ;  $A_3(1; -1; 6)$ ;  $A_4(6; 1; 5)$ .

Задание 2:



- a)  $2x - 5z = 3$ ;
- b)  $2x - y = 0$ ;
- c)  $5x = 3$ ;
- d)  $2x - 3y - z = 4$ ;
- e)  $-7x + 2z = 3$

Задание 3:

- a)  $y^2 - 4z^2 = 25$ ;
- b)  $y^2 + 4x^2 = z$ ;
- c)  $y^2 = -5z^2 + 3$ ;
- d)  $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ .

Задание 4:

- a)  $z = 4y$ ;  $y = \sqrt{9 - x^2}$ ;  $z = 0$ ;  $y = 0$ ;
- b)  $2az = x^2 + y^2$ ;  $x^2 + y^2 + 3z^2 = 3a^2$ ;
- c)  $z = 3 - x^2$ ;  $x = 0$ ;  $y = 0$ ;  $z = 0$ ;  $x + y = \sqrt{3}(x \geq 0)$ .

#### Вариант №5

Задание 1:  $A_1(-2; 3; -2)$ ;  $A_2(2; -4; 2)$ ;  $A_3(2; 2; -1)$ ;  $A_4(1; 5; 5)$ .

Задание 2:

- a)  $2x + z = 6$ ;
- b)  $4x - z + y = 0$ ;
- c)  $2x - 3 = 0$ ;
- d)  $x - 2y - 2z = 4$ ;
- e)  $4z + y = 0$

Задание 3:

- a)  $y^2 - 4z - 6 = 0$ ;
- b)  $y^2 + 4x^2 - 4 = 0$ ;
- c)  $x^2 + y^2 - z^2 = -1$ ;
- d)  $x = -4y^2 + 6$ .

Задание 4:

- a)  $z^2 = 4 - y; x^2 + y^2 = 4y;$
- b)  $x^2 + y^2 + z^2 = a^2; x^2 + y^2 = ax;$
- c)  $z = 0; z = 1 - y^2; y = x^2.$

Вариант №6

Задание 1:  $A_1(5;1;-2); A_2(7;1;0); A_3(2;1;1); A_4(5;-5;3).$

Задание 2:

- a)  $2y - z - 2 = 0;$
- b)  $x - 2y = 0;$
- c)  $2x + 5y + 1 = 0;$
- d)  $y + 4x - z - 11 = 0;$
- e)  $14x - 2 = 0$

Задание 3:

- a)  $y^2 - 4z - 5 = 0;$
- b)  $-y^2 + 4z^2 + x^2 = 0;$
- c)  $z = -\frac{1}{4}(x^2 + 7);$
- d)  $y^2 + 3z^2 - 3 = 0.$

Задание 4:

- a)  $z = x^2 + y^2; x + y = 3; x = 0; y = 0; z = 0;$
- b)  $z = x^2 + y^2; y = x^2; y = 1; z = 0;$
- c)  $x + y + z = 3a; x^2 + y^2 = a^2; z = 0.$

Вариант №7

Задание 1:  $A_1(1;-2;1); A_2(3;1;-2); A_3(2;2;5); A_4(-2;1;0).$

Задание 2:

- a)  $3x - 5y = 0;$
- b)  $6x + 2z = 3;$

c)  $6y = 12;$

d)  $4x - 7y + 5z = -4;$

e)  $4x + 5y = 0$

Задание 3:

a)  $x^2 + 4y^2 - 8z^2 = 32;$

b)  $2x^2 + z^2 = 0;$

c)  $5x^2 - 7y = 0;$

d)  $x^2 + y^2 + z = 6.$

Задание 4:

a)  $z = 3x^2 + 3y^2; x = 0; y = 0; z = 0; x + y = 2;$

b)  $y = \sqrt{x}; y = 2\sqrt{x}; x + z = 6; z = 0;$

c)  $z = 0; y = 0; 3x + y = 6; 3x + 2y = 12; z = 4.$

#### Вариант №8

Задание 1:  $A_1(4; 0; 1); A_2(2; 1; 5); A_3(0; 4; 1); A_4(-1; 2; 0).$

Задание 2:

a)  $x + 3z = 3;$

b)  $3y - 3 = 0;$

c)  $-z = 2y;$

d)  $2 = 3x + 2z - y;$

e)  $6x - 5y = 0$

Задание 3:

a)  $4x^2 - y^2 - 4x + 4y = 3;$

b)  $3x^2 + 3y^2 - 9z = 0;$

c)  $z = x^2 - \frac{1}{3};$

d)  $2x^2 - 2y^2 + 4z^2 = 4.$

Задание 4:

a)  $z = x^2 + y^2; y = x^2; 4 = 1; z = 0; x = 0;$

б)  $z = 3x^2 + y^2; x + y =; x = 0; y = 0; z = 0;$

в)  $y = \sqrt{x}; y = \frac{\sqrt{x}}{2}; x + z = 4; z = 0.$

### Вариант №9

Задание 1:  $A_1(5;5;1); A_2(2;1;4); A_3(7;0;1); A_4(1;1;1).$

Задание 2:

a)  $-2x + 3y + z = 0;$

b)  $z = 4y;$

c)  $x - 3z = 0;$

d)  $x - 4y - 3z = 2;$

e)  $y = -6$

Задание 3:

a)  $3x^2 + 3y^2 - 6x + 4y - 1 = 0;$

b)  $z = -3y^2 - 4;$

c)  $-3x^2 + z^2 + y^2 = 0;$

d)  $2x^2 + 2y^2 = 1.$

Задание 4:

a)  $z = x^2 + 3y^2; x + y = 3; x = 0; y = 0; z = 0;$

b)  $z = 3x; x = \sqrt{9 - y^2}; x = 0; y = 0; z = 0;$

c)  $az = x^2 + y^2; z = 0; x = a - y; x = 0; y = 0.$

### Вариант №10

Задание 1:  $A_1(-2;1;21); A_2(4;0;0); A_3(3;2;7); A_4(1;3;2).$

Задание 2:

a)  $x + 2y - z = 0;$

b)  $y = 3x;$

c)  $2z = 5;$

d)  $3x - 2z + y = 1$ ;

e)  $2y - 3z - 12 = 0$

Задание 3:

a)  $y = -x^2 + 2$ ;

b)  $y^2 - z^2 + x^2 - 6 = 0$ ;

c)  $y^2 + z^2 - 4x = 0$ ;

d)  $3x^2 + y^2 + z = 0$ .

Задание 4:

a)  $x^2 + y^2 = 4$ ;  $x^2 + z^2 = 4$ ;

b)  $z = 0$ ;  $z = 2 - x$ ;  $x = 1$ ;  $x = y^2$ ;

c)  $x = 0$ ;  $y = 0$ ;  $z = 0$ ;  $x - 4 = -y^2$ ;  $z = 4 - 2x^2$ .

Вариант №11

Задание 1:  $A_1(1; 3; 2)$ ;  $A_2(3; 2; 3)$ ;  $A_3(4; 0; 1)$ ;  $A_4(1; 1; 1)$ .

Задание 2:

a)  $2x - z = 4$ ;

b)  $4x - 2z - 2y = 0$ ;

c)  $2x - 5 = 0$ ;

d)  $x - 3y - 2z = 2$ ;

e)  $3z = y$

Задание 3:

a)  $x^2 + 4y^2 - z^2 - 10x - 16y + 6z = -16$ ;

b)  $y^2 + 4x^2 = 4$ ;

c)  $z = -2y^2 + 6x^2$ ;

d)  $x^2 - y^2 - z^2 = 1$ .

Задание 4:

a)  $z = 2x^2 + y^2 = 1$ ;  $x + y = 1$ ;  $x = 0$ ;  $y = 0$ ;  $z = 0$

b)  $z = 4 - x^2 - y^2$ ;  $x = y$ ;  $x = 1$ ;  $z = 0$ ;

с)  $z = x + y + 2; y = x^2; y^2 = x; z = 0.$

Вариант №12

Задание 1:  $A_1(4;-3;2); A_2(2;2;3); A_3(2;-2;-3); A_4(-1;-2;3).$

Задание 2:

а)  $2y - z - x = 0;$

б)  $4y + z = 0;$

с)  $y = x;$

д)  $4x - z + y - 9 = 0;$

е)  $2x - 5y + 2 = 0$

Задание 3:

а)  $3x^2 + 3y^2 + 3z^2 - 6x + 4y - 1 = 0;$

б)  $x^2 - 6z = 0;$

с)  $-\frac{1}{2}(y+4) = x^2;$

д)  $x^2 + 3y^2 - z^2 = 1.$

Задание 4:

а)  $x^2 + y^2 = 4; y + z = 2; z = 0;$

б)  $x = y^2; z = 2 - x; x = 1; z = 0;$

с)  $x = y^2; x = 2y^2 + 1; z = 1 - y^2; z = 0.$

Вариант №13

Задание 1:  $A_1(2;2;3); A_2(-2;1;-1); A_3(3;1;-2); A_4(1;-2;1).$

Задание 2:

а)  $-6 = 7y;$

б)  $2x - y + z = 0;$

с)  $x - 5z = 0;$

д)  $3x - 4z + 2y = 5;$

е)  $y = z$

Задание 3:

a)  $z = 2x^2 - 4y^2 - 6x + 8y + 1$ ;

b)  $x^2 + y^2 + z^2 = 0$ ;

c)  $x = -2z^2 - 4$ ;

d)  $3z^2 - 2x = y^2$ .

Задание 4:

a)  $z = a + x$ ;  $y^2 = ax$ ;  $z = 0$ ;

b)  $z = 2x^2 + y^2 + 1$ ;  $x + y = 1$ ;  $x = 0$ ;  $y = 0$ ;  $z = 0$ ;

c)  $y = a - x - z$ ;  $x^2 + y^2 = a^2$ ;  $x = 0$ ;  $y = 0$ ;  $z = 0$ .

Вариант №14

Задание 1:  $A_1(1;5;5)$ ;  $A_2(2;2;0)$ ;  $A_3(2;3;2)$ ;  $A_4(3;1;1)$ .

Задание 2:

a)  $-x = 2z$ ;

b)  $2y = 3x + 4$ ;

c)  $5y + z + 3x = 0$ ;

d)  $2x - 3z + y = 0$ ;

e)  $\frac{1}{2}z = 1$

Задание 3:

a)  $\frac{1}{3}x^2 + 1 = y$ ;

b)  $-z^2 + 2x^2 = 2y^2$ ;

c)  $y^2 + z^2 = 4$ ;

d)  $-y^2 - 8 + 4z^2 = -4x^2$ .

Задание 4:

a)  $z = 3 - x^2$ ;  $x + y = \sqrt{3}$ ;  $x = 0$ ;  $y = 0$ ;  $z = 0$ .

b)  $x^2 + y^2 = 9$ ;  $x^2 + z^2 = 9$ ;  $x = 0$ ;  $y = 0$ ;  $z = 0$ .

с)  $z = 4 - x^2$ ;  $z = 0$ ;  $x^2 + y^2 = 4$ .

Вариант №15

Задание 1:  $A_1(4; -3; -2)$ ;  $A_2(2; -2; 3)$ ;  $A_3(2; -1; 3)$ ;  $A_4(-1; -2; 3)$ .

Задание 2:

а)  $-y = 3x$ ;

б)  $12x = 9$ ;

с)  $3x + 2y - z = 3$ ;

д)  $3x - 4z = 2$ ;

е)  $y = z$

Задание 3:

а)  $z^2 + y^2 - 5x = 0$ ;

б)  $-x^2 + 4x^2 + 4 = 0$ ;

с)  $y^2 - z^2 + 4x^2 = 1$ ;

д)  $x^2 - z^2 = 3$ .

Задание 4:

а)  $z = x^2 + y^2$ ;  $z = 0$ ;  $x = y$ ;  $y = x^2$ ;

б)  $z = 2 - x$ ;  $z = 0$ ;  $y = 2\sqrt{x}$ ;  $y = \frac{x^2}{4}$ ;

с)  $x^2 + x^2 = 4$ ;  $z = 0$ ;  $z = 4 - x - y$ .

Вариант №16

Задание 1:  $A_1(3; 4; -7)$ ;  $A_2(1; 1; 5)$ ;  $A_3(1; 4; 1)$ ;  $A_4(3; 1; 1)$ .

Задание 2:

а)  $3y - 2z = 0$ ;

б)  $3x + 6z - 4 = 2y$ ;

с)  $2y = 9$ ;

д)  $4 = y - 3$ ;

е)  $15y = 0$



Задание 3:

a)  $x^2 + y^2 - 3z^2 + 2x + 4y - 6z = 0$ ;

b)  $-z^2 = 3y + 2$ ;

c)  $x^2 = y$ ;

d)  $2y^2 + 4x^2 + 2z^2 = 12$ .

Задание 4:

a)  $x^2 + y^2 = 2ax$ ;  $z = \frac{x^2 + y^2}{a}$ ;  $z = 0$ ;

b)  $x + y = 2$ ;  $y = \sqrt{1 - z}$ ;  $z = 0$ ;  $y = 0$ ;  $x = 0$ ;

c)  $x^2 + x^2 + z^2 = 4a^2$ ;  $x^2 + y^2 = a^2$ .

Вариант №17

Задание 1:  $A_1(3; 1; 2)$ ;  $A_2(1; -2; 1)$ ;  $A_3(-2; 1; 0)$ ;  $A_4(2; 2; 5)$ .

Задание 2:

a)  $x - 2y = 0$ ;

b)  $7y + 5x = 4$ ;

c)  $-3y + x = 4 - 2z$ ;

d)  $-y + z - 2x = 0$ ;

e)  $z = 0$

Задание 3:

a)  $2 = 2z - y^2$ ;

b)  $3z^2 - y^2 + x^2 = 0$ ;

c)  $\frac{1}{4}y^2 + x^2 + z^2 = 4$ ;

d)  $x = 2y^2$ .

Задание 4:

a)  $y = \sqrt{9 - x^2}$ ;  $z = 3y$ ;  $z = 0$ ;  $y = 0$ .

b)  $2x + 3y + z = 0$ ;  $x = 0$ ;  $y = 0$ ;  $z = 0$ .

с)  $z = 3x^2 + x^2; \quad x = \sqrt{y}; \quad x = 0; \quad y = 3.$

Вариант №18

Задание 1:  $A_1(6;5;1); A_2(-1;3;0); A_3(4;5;-2); A_4(6;-1;1).$

Задание 2:

a)  $-2z - x - y = 3;$

b)  $y - 4 - 4z = 0;$

c)  $3x + 4y = 0;$

d)  $3y = 5;$

e)  $y = 0$

Задание 3:

a)  $-2x + z^2 = -y^2;$

b)  $1 = z^2 - 4^2;$

c)  $x^2 + y^2 - z = -1;$

d)  $x^2 + z^2 = 0.$

Задание 4: Построить тело ограниченное заданными поверхностями:

a)  $x^2 + y^2 + z^2 = 16; \quad x^2 + y^2 = 4x;$

b)  $x + y = 2; \quad z = x^2 + y^2; \quad x = 0; \quad y = 0; \quad z = 0;$

c)  $2az = x^2 + y^2; \quad x^2 + y^2 - 3z^2 = 3a^2; \quad z = 0.$

Вариант №19

Задание 1:  $A_1(1;1;6); A_2(4;5;-2); A_3(-1; 3;0); A_4(6;1; 5).$

Задание 2:

a)  $3x - 2y + 5z = 7;$

b)  $4x + y = 2;$

c)  $4 = 5z;$

d)  $2x - 5 = 0;$

e)  $z = 3$

Задание 3:

a)  $2x^2 + 3y^2 + z = 6$ ;

b)  $y = 3x^2 - 3$ ;

c)  $z^2 - 3y^2 = 1$ ;

d)  $z = x^2 - y^2$ .

Задание 4:

a)  $z - 3 = -x^2$ ;  $x - 3 = -y^2$ ;  $x = 0$ ;  $y = 0$ ;  $z = 0$ ;

b)  $z = 9 - y^2$ ;  $3x + 4y = 12$ ;  $x = 0$ ;  $y = 0$ ;  $z = 0$ ;

c)  $y = 1 - z$ ;  $x = y^2 + 1$ ;  $x = 0$ ;  $z = 0$ ;  $y = 0$ .

#### Вариант №20

Задание 1:  $A_1(4; 5; -1)$ ;  $A_2(3; 3; 5)$ ;  $A_3(-1; 3; 0)$ ;  $A_4(6; 1; 5)$ .

Задание 2:

a)  $3x - 2y + 5z = 7$ ;

b)  $4x + y = 2$ ;

c)  $4 = 5z$ ;

d)  $2x - 5 = 0$ ;

e)  $z = 3$

Задание 3:

a)  $2x^2 + 3y^2 + z = 6$ ;

b)  $y = 3x^2 - 3$ ;

c)  $z^2 - 3y^2 = 1$ ;

d)  $z = x^2 - y^2$ .

Задание 4:

a)  $z - 3 = -x^2$ ;  $x - 3 = -y^2$ ;  $x = 0$ ;  $y = 0$ ;  $z = 0$ ;

b)  $z = 9 - y^2$ ;  $3x + 4y = 12$ ;  $x = 0$ ;  $y = 0$ ;  $z = 0$ ;

c)  $y = 1 - z$ ;  $x = y^2 + 1$ ;  $x = 0$ ;  $z = 0$ ;  $y = 0$ .

#### Вариант №21

Задание 1:  $A_1(2; 2; 5)$ ;  $A_2(-2; 1; 0)$ ;  $A_3(3; 1; -2)$ ;  $A_4(1; -2; 1)$ .

Задание 2:

a)  $-2y - z - x = 6 = 0$ ;

b)  $-y + 3z + 6x = 2$ ;

c)  $x + 3 = 0$ ;

d)  $6x + 5y = 4$ ;

e)  $8z = 0$

Задание 3:

a)  $-2 + 4y^2 + 2z^2 = 0$ ;

b)  $y = -\frac{1}{3}(x^2 - 3)$ ;

c)  $2y^2 + z^2 - 3x^2 = 0$ ;

d)  $x^2 + y^2 - z^2 = -1$ .

Задание 4:

a)  $y = b - \frac{bx^2}{2}$ ;  $z = \frac{c}{a}x$ ; ( $a > 0$ ;  $c > 0$ ;  $b > 0$ );  $x = 0$ ;  $y = 0$ ;  $z = 0$ ;

b)  $2y^2 = x$ ;  $\frac{x}{6} + \frac{y}{3} + \frac{z}{3} = 1$ ;  $z = 0$ ;

c)  $z = x^2 + y^2$ ;  $y = 2x$ ;  $x = 5$ ;  $y = 0$ ;  $z = 0$ .

Вариант №22

Задание 1:  $A_1(2; 3; 7)$ ;  $A_2(4; 0; 1)$ ;  $A_3(1; 2; 3)$ ;  $A_4(-2; 1; 2)$ .

Задание 2:

a)  $-x + 5z = 2$ ;

b)  $2x + y + z = 1$ ;

c)  $x + y + 2z = 0$ ;

d)  $3x = -2$ ;

e)  $z = 3$

Задание 3:

a)  $3x^2 + 2y^2 + 6z^2 = 12$ ;

b)  $x^2 + y + 2 = 0$ ;

c)  $z = 6z^2 - 3$ ;

d)  $\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{3} - \frac{z^2}{1} = 1$ .

Задание 4:

a)  $y = x^2$ ;  $2 - x - y - z = 0$ ;  $y = x$ ;  $z = 0$ ;

b)  $2x + z = 4$ ;  $x + z = 2$ ;  $y^2 = 2ax$ ;  $y = 0$ ;

c)  $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ ;  $x^2 + y^2 = 3x$ .

Вариант №23

Задания 1:  $A_1(6; 1; 5)$ ;  $A_2(-1; 3; 0)$ ;  $A_3(4; 5; -2)$ ;  $A_4(1; -1; 6)$ .

Задания 2:

a)  $x + 3z = 6$ ;

b)  $7x - 2 = 0$ ;

c)  $3y - x + 7 = 4$ ;

d)  $5x - y = 0$ ;

e)  $3z = 0$

Задания 3:

a)  $2x^2 + y^2 + 2 = 6$ ;

b)  $y^2 - 3z - 6 = 0$ ;

c)  $2x^2 + 3y^2 + z = 0$ ;

d)  $x = -2y^2 + 3$ .

Задание 4:

a)  $x^2 + y^2 = 4x$ ;  $z = x$ ;  $z = 2x$ ;

b)  $x = 1 - z^2$ ;  $y = x$ ;  $y = -x$ ;

c)  $z = 0$ ;  $z = -x + 4$ ;  $x = 1$ ;  $x = y^2$ .

Вариант №24

Задание 1:  $A_1(3; 4; -1); A_2(1; 1; 5); A_3(1; 4; 1); A_4(3; 1; 1)$ .

Задание 2:

a)  $5z = 3 - 2x;$

b)  $5x - 8y = -z;$

c)  $-9 = 3y;$

d)  $3x - y + 2z = -2;$

e)  $z = 0$

Задание 3:

a)  $x^2 + 4y^2 + 9z^2 - 6x + 8y - 18z - 14 = 0;$

b)  $y = -\frac{1}{4}x^2 - 3;$

c)  $x^2 + y^2 + z^2 + 3x + 6 = 0;$

d)  $x^2 + z^2 = 4.$

Задание 4:

a)  $az = a^2 - x^2 - y^2; \quad z = 0;$

b)  $x^2 + y^2 + z^2 = 4; \quad x^2 + y^2 = 1;$

c)  $2y^2 = x; \quad \frac{x}{4} + \frac{y}{2} + \frac{7}{4} = 1; \quad z = 0.$

#### Вариант №25

Задание 1:  $A_1(4; 5; -2); A_2(2; 2; 6); A_3(2; 5; 2); A_4(4; 2; 2)$ .

Задание 2:

a)  $x + 3y = 4;$

b)  $2x + 3y + 3z = 6;$

c)  $x + y - 7 = 0;$

d)  $3y - 6 = 0;$

e)  $z - 2 = 0$

Задание 3:

a)  $x^2 + 1 = y;$

b)  $z = x^2 + 2y^2$ ;

c)  $x^2 + y^2 = 9$ ;

d)  $y = \sqrt{x}$ .

Задание 4:

a)  $x^2 + y^2 + z^2 = 0$ ;  $x^2 + y^2 - z = 0$ ;  $z \geq 0$ ;

b)  $z = 4 - y^2$ ;  $z = y^2 + 2$ ;  $x = 0$ ;  $x = 2$ ;

c)  $z = x^2 + y^2 + 2$ ;  $x + 2y = 4 = 0$ .

Вариант №26

Задание 1:  $A_1(-5; -6; 3)$ ;  $A_2(-3; -3; -7)$ ;  $A_3(3; 6; 3)$ ;  $A_4(5; -7; 1)$ .

Задание 2:

a)  $x + 2z = 6$ ;

b)  $x - 2z + y = 0$ ;

c)  $2z - 4 = 0$ ;

d)  $x + 4y + 2z = 4$ ;

e)  $3x - 2 = 0$

Задание 3:

a)  $x^2 + y^2 - z^2 = 0$ ;

b)  $x^2 + y^2 = 4$ ;

c)  $y^2 - 1 = x$ ;

d)  $x^2 + y^2 = 2y$ .

Задание 4:

a)  $4z = y^2$ ;  $2x - y = 0$ ;  $x + y = 0$ ;  $z = 0$ ;

b)  $x^2 + y^2 = z$ ;  $x^2 + y^2 = 4y$ ;  $z = 0$ ;

c)  $z = 1 - y^2$ ;  $z = 0$ ;  $x + y = 2$ ;  $x = 0$ .

## Теоретические вопросы

1. Дайте определение уравнения поверхности.
2. Выведите уравнение плоскости, проходящей через данную точку.
3. Запишите общее уравнение плоскости. Проведите исследование этого уравнения.
4. Выведите уравнение плоскости, проходящей через три точки.
5. Выведите формулу нахождения угла между двумя плоскостями.
6. Запишите условия параллельности и перпендикулярности двух плоскостей.
7. Выведите каноническое и параметрическое уравнение прямой в пространстве.
8. Запишите общее уравнение прямой в пространстве. Как перейти от общего уравнения прямой к каноническим уравнениям.
9. Выведите формулу нахождения угла между двумя прямыми.
10. Запишите условия параллельности и перпендикулярности двух прямых в пространстве.
11. Запишите формулу нахождения угла между прямой и плоскостью.
12. Запишите условия параллельности и перпендикулярности прямой и плоскости.
13. Как находится точка пересечения прямой и плоскости.
14. Дайте определения цилиндрической поверхности. Приведите примеры цилиндрических поверхностей.
15. Выведите уравнение сферической поверхности.
16. Запишите уравнение эллипсоида. Проведите его исследование. Сделайте чертеж.
17. Запишите уравнение однополостного гиперболоида. Проведите его исследование. Сделайте чертеж.
18. Запишите уравнение двуполостного гиперболоида. Исследуйте это уравнение. Сделайте чертеж.



19. Запишите уравнение эллиптического параболоида. Исследуйте это уравнение. Сделайте чертеж.
20. Запишите уравнение конуса. Исследуйте это уравнение. Сделайте чертеж.
21. Запишите уравнение гиперболического параболоида. Исследуйте это уравнение. Сделайте чертеж.

## БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Бугров Я. С. Высшая математика: в 3 т. Том 2. Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии: учебник для академического бакалавриата / Я.С. Бугров, С.М. Никольский. – 7-е изд., стереотипное. - М. : Изд-во Юрайт, 2016. - 281 с
2. Гулиян Б.Ш. Математика. Базовый курс [Электронный ресурс]: учебник/Гулиян Б.Ш., Хамидуллин Р.Я.– Электрон. текстовые данные.– М.: Московский финансово-промышленный университет «Синергия», 2013. – 712 с.
3. Осипов А.В. Лекции по высшей математике: Учебное пособие. – 2-е изд., испр. – СПб.: Издательство «Лань», 2014. – 320 с.
4. Шипачев, В. С. Высшая математика : учебник и практикум / В. С. Шипачев. – 8-е изд., перераб. и доп. – М. : Издательство Юрайт, 2017. – 447 с.
5. Назаров А.И., Назаров И.А. Курс математики для нематематических специальностей и направлений бакалавриата: Учебное пособие. – 3-е изд., испр. - СПб.: Издательство «Лань», 2011. – 576 с.
6. Икрянников В.И. Практикум по высшей математике [Электронный ресурс]: учебное пособие / В.И. Икрянников, Э.Б. Шварц. – Электрон. текстовые данные. – Новосибирск: Новосибирский государственный технический университет, 2011. – 439 с. – 978-5-7782-1870-3.
7. Высшая математика в упражнениях и задачах [Текст]: учеб. пособие: В 2 ч / П. Е. Данко [и др.]. – 7-е изд., испр. – М.: ОНИКС: Мир и Образование, 2008. – Ч. 1. – 2008. – 368 с.

## СОДЕРЖАНИЕ

Введение	3
Образец выполнения индивидуального задания	4
Варианты для самостоятельной работы	14
Теоретические вопросы	32
Библиографический список	34

**Татьяна Евгеньевна Гришкина,**  
*старший преподаватель кафедры общей математики и  
информатики АмГУ*

**Ангелина Михайловна Попова,**  
*старший преподаватель кафедры общей математики и  
информатики АмГУ*