Федеральное агентство по образованию
АМУРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ГОУВПО «АмГУ»

УТВЕРЖДАЮ
Зав. кафедрой КиТО
___________ И.В. Абакумова
«____» _____________ 2007 г.

МОДЕЛИРОВАНИЕ И ОПТИМИЗАЦИЯ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКИЙ КОМПЛЕКС ПО ДИСЦИПЛИНЕ

для специальности 260901 – «Технология швейных изделий»
для специальности 260902 – «Конструирование швейных изделий»

Составитель: И.В.Абакумова

Благовещенск

2007 г.

Печатается по решению
редакционно-издательского совета
факультета прикладных искусств
Амурского государственного
университета

И.В.Абакумова
Моделирование и оптимизация технологических процессов: Учебно-методический комплекс по дисциплине для специальностей 260901 – «Технология швейных изделий», 260902 – «Конструирование швейных изделий»
– Благовещенск: Амурский гос. ун-т, 2007. – с.163

Учебно-методическое пособие предназначено для студентов очной и заочной формы обучения специальностей 260901 – «Технология швейных изделий» и 260902 – «Конструирование швейных изделий». Составлено в соответствии с требованиями Государственного образовательного стандарта высшего профессионального образования по направлению 656100 "Технология и конструирование изделий легкой промышленности" и включает наименование тем, цели и содержание лекций, лабораторных работ и практических занятий; вопросы для подготовки к работе, методические рекомендации по проведению лабораторной работы; вопросы для итоговой оценки знаний; список рекомендуемой литературы; учебно-методическую карту дисциплины.

1. ЦЕЛИ И ЗАДАЧИ ДИСЦИПЛИНЫ, ЕЕ МЕСТО В УЧЕБНОМ ПРОЦЕССЕ

Программа курса "Моделирование и оптимизация технологических процессов" составлена в соответствии с требованиями государственного образовательного стандарта высшего профессионального образования. Тематика лекций, лабораторных работ и практических занятий по дисциплине "Моделирование и оптимизация технологических процессов" разработана для студентов 4, 5 курсов (8, 9 семестры) по специальностям 260901 – «Технология швейных изделий», 260902 – «Конструирование швейных изделий».

Целью данной дисциплины является приобретение навыков решения задач моделирования и оптимизации технологических процессов швейного производства с помощью ЭВМ.

Основной задачей данной дисциплины является обобщение знаний теории технологических процессов на базе современных математических методов с использованием ЭВМ. Изучение данного курса позволит студентам освоить методы моделирования и оптимизации математических зависимостей, адекватно отражающих реальные технологические закономерности, с учетом современных экономических условий производства.

Перечень дисциплин, необходимых для изучения данной дисциплины:

- общеинженерные и общетехнологические дисциплины;
- высшая математика;
- методы и средства исследования технологических процессов;
- информатика.

Перечень основных умений и навыков, приобретаемых студентами при изучении дисциплины

- виды моделей технологических процессов;
- математическое моделирование технологических процессов;
- способы задания исходной информации для моделирования технологических процессов;

- методы оптимизации для одно- и многофакторных целевых функций, описывающих процессы швейного производства;
- критерии оптимизации и их выбор при решении различных задач моделирования технологических процессов;
- методы линейного программирования для процессов швейного производства.

По завершению обучения студент должен знать и уметь использовать:

методы моделирования структуры и оптимизации технологических процессов швейного производства;

иметь опыт:

моделирования технологических процессов изготовления швейных изделий;

системно-структурного анализа технологических процессов, их моделирования и оптимизации.

Цель УМКД – систематизация содержания дисциплины с учётом достижения науки, техники и производства, улучшения её методического обеспечения, повышение эффективности и качества занятий, оказание студентам методической помощи в усвоении учебного материала, правильное планирование и организация самостоятельной работы и контроля знаний студентов.

Данное учебно-методическое пособие составлено с учетом рекомендаций учебно-методического отдела АмГУ и включает следующие разделы:

цели и задачи дисциплины, ее место в учебном процессе;

содержание дисциплины;

учебно-методические материалы по дисциплине;

учебно-методическая карта дисциплины.

2. СОДЕРЖАНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ

2.1 Требование стандарта

ОПД.Ф.08

Стандарт высшего профессионального образования по направлению 656100 – “Технология и конструирование изделий легкой промышленности” предусматривает, что по завершению обучения студент должен иметь понятие о моделировании процессов и объектов в производстве изделий легкой промышленности, необходимости их системного исследования и совершенствования способов моделирования; характеристике объектов моделирования; способах задания исходной информации для моделирования технологических процессов; моделировании внешней структуры процесса изготовления изделий легкой промышленности, конструктивных и технологических решений и технологических операций; методах оптимизации технологических процессов производства, критериях оптимизации и их выборе при решении различных задач моделирования технологических процессов.

2.2 Наименование тем, объем (в часах) лекционных, лабораторных занятий и самостоятельной работы

2.2.1. Наименование тем, объем (в часах) лекционных, лабораторных занятий и самостоятельной работы для специальности 260901 – «Технология швейных изделий»

Номер темы	Раздел курса	Лекции	Лабораторные работы	Практические занятия	Самостоятельная работа
1	2	3	4	5	6
1	Основные понятия теории моделирования технологических процессов и объектов в производстве изделий легкой промышленности	2	2	2	8
1	2	3	4	5	6

2	Способы задания исходной информации для моделирования технологических процессов изготовления швейных изделий	2	2	2	8
3	Стохастическое моделирование технологических процессов. Метод Монте – Карло	2	2	2	8
4	Моделирование технологических процессов на основе теории графов. Сетевое планирование и управление комплексом работ.	2	2	2	8
5	Применение теории массового обслуживания при проектировании и организации технологических процессов	2	2	2	8
6	Методы оптимизации технологических процессов. Критерии оптимизации и их выбор при решении различных задач моделирования технологических процессов	4	4	4	8
7	Решение задач линейного программирования	4	4	4	8
	ИТОГО	18	18	18	56

2.2.2. Наименование тем, объем (в часах) лекционных, лабораторных занятий и самостоятельной работы

для специальности 260902 – «Конструирование швейных изделий»

Номер темы	Раздел курса	Лекции	Лабора-торные работы	Самостоя-тельная работа
1	Основные понятия теории моделирования технологических процессов и объектов в производстве изделий легкой промышленности	4	4	2
2	Способы задания исходной информации для моделирования технологических процессов изготовления швейных изделий	4	4	2
3	Стохастическое моделирование технологических процессов. Метод Монте - Карло	5	4	2
4	Моделирование технологических процессов на основе теории графов. Сетевое планирование и управление комплексом работ.	6	6	8
5	Применение теории массового обслуживания при проектировании и организации технологических процессов	6	6	8
6	Методы оптимизации технологических процессов. Критерии оптимизации и их выбор при решении различных задач моделирования технологических процессов	4	6	9
7	Решение задач линейного программирования	4	6	10
	ИТОГО	33	36	41

2.3 План-конспект лекций

1. Основные понятия теории моделирования технологических процессов и объектов в производстве изделий легкой промышленности

В основе моделирования и оптимизации технологических процессов лежит математическое обеспечение этих процессов. ***Математическое обеспечение*** (управленческих и технологических процессов) – это совокупность математических методов, моделей и алгоритмов для решения задач рациональной организации технологических процессов и управления ими с применением вычислительной техники.

1.1. Математические методы

Математические методы – различные способы использования математического аппарата тех или иных математических теорий.

Математическая теория – "высшая, самая развитая форма организации научного знания, дающая целостное представление о закономерностях и существенных связях определенной области действительности – объекта данной теории" (БСЭ).

Примерами математических теорий могут служить:

- Математический анализ,
- Алгебра,
- Высшая алгебра,
- Геометрия,
- Тригонометрия,
- Теория дифференциальных уравнений,
- Теория вероятностей,
- Математическая статистика,
- Теория графов,
- Теория массового обслуживания (теория очередей),
- Линейной программирование,
- Нелинейное программирование,
- и т.п.

Математический аппарат математической теории включает:

- Совокупность специфических понятий, вводимых в (применяемых) математических науках "по определению" (например, прямая, плоскость)
- Совокупность аксиом, т.е. основополагающих утверждений, принимаемых без доказательств
- Система теорем и следствий, построенных на аксиомах и указывающих на закономерности, которым подчиняются основные понятия.

1.2. Математическая модель

Модель (изделия, процесса, явления) – объект, который отображает или воспроизводит свойства исходного объекта и используется, как правило, для исследования оригинала (прототипа).

Математическая модель – описание оригинала на языке математики ["Математика – это наука, изучающая математические структуры"]

Математическая модель операции – это система математических и логических правил, позволяющих с достаточной полнотой и точностью описывать наиболее существенные процессы, присущие операции, прогнозировать возможный ход и исход её по определенным исходным данным и оценивать эффективность вариантов решений и планов.

1.3. Алгоритм

Алгоритм – совокупность точных предписаний (математических выражений, логических зависимостей и словесных описаний), задающих конечную последовательность действий, которые надо выполнить при этих исходных данных для получения требуемого результата.

Действие – операция, осуществляемая по заранее разработанным правилам, исключающим неоднозначность их толкования.

1.4. Методология построения математических моделей, необходимость системного исследования и совершенствования способов моделирования.

Моделирование - это метод исследования объектов и процессов реального мира с помощью построения их аналога - модели (физической или математической), проведения эксперимента на этой модели и перенесением результатов на оригинал (исходный объект или процесс). Это перенесение не означает простое равенство параметров модели и оригинала, а требует определенной интерпретации последних. Таким образом, процесс моделирования включает несколько стадий: 1) построение модели; 2) калибровка модели; 3) верификация модели; 4) исследование на модели; 5) перенесение результатов с модели на объект.

1.5. Классификация методов моделирования

Предметным моделированием называется такое моделирование, в котором модель и прототип имеют сходное геометрическое построение или одинаковую природу протекающих в них физических процессов, или то и другое вместе взятое. Можно выделить следующие виды предметного моделирования: ***пространственное моделирование*** или моделирование, имеющее целью достижение геометрического подобия модели и прототипа (примером такого моделирования является построение различного рода макетов); ***физическое моделирование***, в котором основное внимание направляется на обеспечение подобия физических процессов одинаковой природы, протекающих в модели и прототипе (примером могут служить различные действующие модели, воспроизводящие в соответствующем масштабе функционирование прототипов); ***натурное моделирование***, в котором основой модели служит сам прототип, и основное содержание моделирования связано с исследованием результатов воздействий на него тех или других специально создаваемых факторов среды. Натурное моделирование находит наиболее широкое использование при научных, производственных, опытно-эксплуатационных испытаниях. [ ]

Аналоговое моделирование или моделирование, основанное на процессуальном подобии, характеризуется тем, что прототип и объект имеют различную природу, но процессы в них описываются одинаковыми математическими соотношениями, обычно одними и теми же дифференциальными уравнениями. Характерным примером аналогового моделирования является исследование различных механических систем на их электрических (электронных) аналогах.

Классы и подклассы формализованного абстрактного моделирования достаточно ясно видны из рисунка. Рассмотрим подробнее некоторые составляющие подклассов неформализованного абстрактного моделирования.

Под ***концептуальной моделью*** обычно понимается модель, отражающая с необходимой полнотой прототип и записанная на естественном языке с использованием положений наивной логики.

Рассмотрим подробнее вопрос о проведении формального моделирования с использованием ЭВМ. Отражение того или иного аспекта исследуемой системы (прототипа) посредством моделирования с использованием ЭВМ требует построения не одной модели, а нескольких моделей. Применительно к задачам математического моделирования технологических и управленческих процессов следует различать аналитическое математическое моделирование и имитационное математическое моделирование.

Аналитическое математическое моделирование - это моделирование, в котором центральную роль играет аналитическая математическая модель, обладающая следующими особенностями:

- аналитическая модель строится на основе некоторой теории или научной гипотезы;
- модель описывает в целом определенный аспект моделируемой системы (процесс в системе) посредством тех или иных математических конструкций (функций или функционалов, алгебраических или дифференциальных уравнений и т.д.);
- модель позволяет получать конечные результаты исследования в виде некоторых формальных соотношений для количественного или качественного анализа или позволяет производить численные исследования с привлечением ЭВМ.

Надо отметить, что при проведении численных исследований на аналитических моделях следует ориентироваться на максимально возможное использование существующих пакетов прикладных программ, стандартизирующих исследования на ЭВМ типовых аналитических моделей.

Имитационное математическое моделирование - это моделирование, выполняемое на ЭВМ, в котором центральную роль играет алгоритмическая имитационная модель, обладающая следующими основными особенностями:

- алгоритмическая имитационная модель строится на основе концептуальной модели изучаемой системы;
- указанная модель описывает последовательности элементарных или агрегированных операций с использованием простейших соотношений в соответствии с логикой структурных взаимосвязей в системе и временной логикой ее функционирования;
- исследование на ЭВМ с использованием алгоритмической имитационной модели ориентировано на получение информации о моделируемой системе путем проведения экспериментов, получивших название имитационных экспериментов.

Математическое моделирование технологических процессов ставит своей целью получение данных о "качестве" процесса без трудоемких экспериментальных исследований методом проб и ошибок, на большом массиве условии эксперимента. При общем подходе к моделированию выделяют понятия объекта моделирования, физической модели и математической модели. Их соотношение показано в табл. 1.1 на примере моделирования взаимодействия нити и нитепроводника: расчета натяжения нити после нитепроводника Р1; по заданному натяжению до нитепроводника P_0 и углу обхвата ф.

Таблица 1.1.

Структура математической модели

Общая схема	***Взаимодействие нити и нитепроводника (теоретическая и эмпирическая модели)***
Реальный обект/явление физические процессы, константы и свойства	трение: коэффициент трения μ изгиб нити; изгибная жесткость В деформации нити деформации нитепроводника выделение тепла истирание нити истирание нитепроводника

Физическая модель (теоретическая и эмпирическая)	Закон Амонтона $F = \mu Q$ Гибкость нити Невесомость нити Уравнения равновесия	Результаты натурного эксперимента с различными $P_0 и \delta$
Математическая модель (теоретическая и эмпирическая)	Уравнение Эйлера $P_1 = Đ_0 e^{\mu\delta}$	Регрессионная модель $P_1 = b_0 + b_1 P_0 + b_2 \delta + b_{12} P_0 \delta$

Любая модель может усложняться ради достижения большей точности - адекватности. В нашем примере можно, скажем, учитывать или нет изгибную жесткость нити, при этом получаются соответственно модели:

$$P_1 = Đ_0 \mathring{a}^{\mu \hat{o}}$$

$$P_1 = P_0 e^{\mu \Phi} - \frac{B}{2(R + r)^2}(e^{\mu \Phi} - 1)$$

где R и г - радиусы нитепроводника и нити.

При усложнении теоретической модели придется ввести новые параметры (изгибная жесткость, размеры нитепроводника и нити), определение которых достаточно неточно. При усложнении эмпирической модели увеличивается размерность пространства факторов эксперимента и вместе с ней его объем и дороговизна.

1.6. Виды переменных, используемых в модели

Данные (переменные величины, используемые в модели) можно разделить на:

- ***Входные (независимые, экзогенные) величины (параметры управления)*** - параметры, влияющие на протекание технологического процесса и представляющие технологический регламент, свойства среды, свойства перерабатываемого продукта и т.д. (они считаются заданными a priori;
- ***Выходные (зависимые, эндогенные) величины*** - параметры (показатели), по которым либо судят о "качестве" технологического процесса, либо

планируют его проведение - их определение и является целью моделирования;

- ***Внутренние переменные (параметры обстановки)*** - величины, используемые в модели для получения выходных данных по входным.

Пример: Модель взаимодействия нити и нитепроводника:

- Входные:
    - - натяжение нити до нитепроводника.
    - - угол охвата.
- Внутренние: - коэффициент трения.
- Выходные: - натяжение нити после нитепроводника.

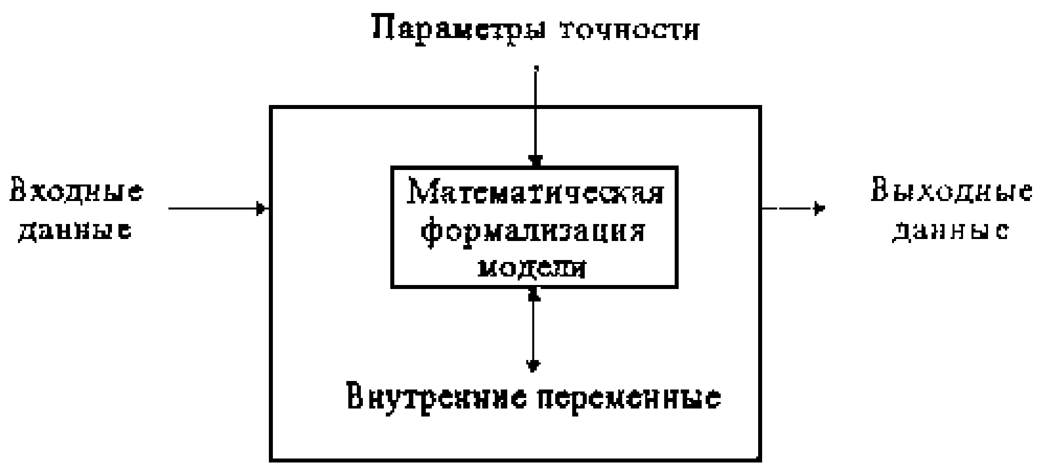


Рис. 1.1. Виды данных модели

1.7. Классификация и содержание задач оптимизации и моделирования технологических процессов

Попытаемся выделить классы задач, которые приходится решать менеджерам и другим специалистам сферы швейного производства и сервиса:

По назначению:

- Задачи управления
- Задачи учёта
- Задачи планирования.

По принципам решения:

- Информационные
- Расчётные

По методам решения:

- Оценочные
- Оптимизационные

В результате решения того или иного класса задач специалист получает оценки возможностей или эффективности работы участка, цеха или предприятия в целом.

Возможности (технические, производственные) – способность оборудования, трудовых коллективов и т.п. решать поставленные задачи, выполнять планы в данных условиях.

Возможности работников, оборудования измеряются в единицах измерения производимой продукции …

Эффективность работы (действий, операций) (от лат. effictivus – действенный, созидательный) – степень выполнения поставленной задачи (плана).

Эффективность операции измеряется в долях единицы, иногда в процентах

Показатели возможностей или эффективности – это количественная мера объёма или степени выполнения поставленной задачи (плана).

Требования к показателям:

- *Адекватность (представительность)* – соответствие показателя содержанию и целям решения задачи.
- *Вариативность (изменчивость, чувствительность)* – зависимость показателя от всех параметров, описывающих исследуемый процесс.
- *Физический смысл и вычислимость*

Норматив – заранее установленные конкретные значения показателя, определяющие достаточные условия для решения задачи.

Поскольку норматив – это конкретное значение показателя, то, естественно, норматив измеряется в тех же единицах измерения, что и сам показатель.

Критерий эффективности – условия, необходимые и достаточные для принятия решения.

Поскольку критерий эффективности – это конкретное значение показателя эффективности, то, естественно, критерий эффективности измеряется в тех же единицах измерения, что и сама эффективность.

В отдельных источниках, где рассматривается вопрос об эффективности технологических процессов можно встретить следующие примеры показателей:

Степень механизации обработки изделия (узла) или ***коэффициент механизации потока***

$$Pм = \frac{Tм}{Tизд}$$

где Тм - затраты времени на механизированные ТНО при обработке изделия (узла), мин.;

Тизд. - общая затрата времени на обработку изделия (узла), мин.

Коэффициент использования оборудования Коб. учитывает занятость оборудования в течение смены

$$K_{об} = \frac{\sum t_{м} + \sum t_{см} + \sum t_{пр}}{\sum t_{м}^{2} + \sum t_{см}^{2} + \sum t_{пр}^{2}}$$

где $\sum t^2 м + \sum t^2 см + \sum t^2 пр$ - сумма времени механизированных работ по организационным операциям;

$\sum t\ м + \sum t\ см + \sum t\ пр$ сумма времени по неделимым операциям механизированных работ.

При проектировании ТПШИ на этапе выбора методов обработки и сборки изделий оценивается экономическая эффективность выбранных методов обработки, когда косвенно учитываются технико-экономические параметры работы оборудования. Показателями при этом служат ***процент сокращения затрат времени на обработку узла***

$$P_{сз} = \frac{T_{с} - T_{н}}{T_{с}} * 100\%$$

и ***процент повышения производительности труда***:

$$P_{пт} = \frac{T_{с} - T_{н}}{T_{н}} * 100\%$$

где Тс - затраты времени по узлу при менее производительном способе обработки ("старом" способе), мин,

Тн - затраты времени по узлу при более производительном способе обработки("новом" способе), мин.

Фактически этот показатель оценивает то, что выбирается оборудование с более высокими скоростными характеристиками. При этом иные стороны технологического процесса в этом показателе не учитываются.

В работе Кулу-Заде Р.А. был предложен ***общий коэффициент использования оборудования*** Кв, который также может служить критерием оценки эффективности работы швейного оборудования:

$$К_в = К_{кал} + К_{цел.см} + К_{вн.см} + К_м$$

$$К_{кал} = \frac{\sum_{i=1}^{n} t_{кал_i}}{365 * n}$$

$$К_{цел.см} = \frac{\sum_{i=1}^{n} t_{цел.см_i}}{\sum_{i=1}^{n} t_{сут_i}}$$

$$К_{вн.см} = \frac{\sum_{i=1}^{n} t_{вн.см_i}}{\sum_{i=1}^{n} t_{цел.см_i}}$$

$$К_м = \frac{\sum_{i=1}^{n} t_{м_i}}{\sum_{i=1}^{n} t_{вн.см_i}}$$

где tвн.см - время производительной работы оборудования в течение смены, час (машинное + вспомогательное + подготовительно-заключительное);

tкал - календарный фонд времени работы оборудования, исчисленный количеством рабочих дней в году;

tсут - суточный фонд времени работы оборудования, в сменах;

tм - общее машинное и машинно-ручное время использования оборудования, час;

tцелсм - время использования оборудования в течение рабочих суток, в сменах;

п - количество единиц оборудования, находящегося на балансе предприятия.

Дополнительно к общему коэффициенту использования оборудования автор предлагает применить ***показатель уровня механизации технологических процессов***:

$$У_п = \frac{\sum T_{мех} * П * К * М}{\sum T_{мех} * П * К * М + \sum T_{мех} * (1 - К) + \sum T_p} * 100\%$$

П=Tmax/Tобщ,

М = Чн/Чф,

К =Тавт/Тобщ,

где Тмех- затраты времени на механизированных операциях, мин;

П - коэффициент производительности оборудования;

К - коэффициент автоматизации оборудования;

М - коэффициент обслуживания оборудования;

Tmax - трудоемкость при выполнении операции на морально устаревшем оборудовании;

Tmin - трудоемкость при выполнении операции на новом оборудовании;

Чн - число рабочих, необходимых для обслуживания оборудования;

Чф - фактическое число рабочих;

Тавт- затраты времени на автоматизированные операции, мин;

Тобщ - общее время выполнения операции, мин.

Коэффициент соответствия Кс ***структуры парка оборудования структуре трудоемкости изготовления изделий***, определяемый из сопоставления удельного веса трудоемкости по видам работ $Рт_i$ и соответствующего удельного веса оборудования $Ро_i$:

$$K_c = \frac{P_{m_i}}{P_{o_i}}$$

$$P_{m_i} = \frac{t_{м_i}}{t_{изд}}$$

$$P_{o_i} = \frac{n_{м_i}}{n_{общ}}$$

где $tм_i$ время работы оборудования i-го вида, мин;

$t_{изд}$- трудоемкость изготовления изделия, мин;

$n_{мi}$- количество оборудования i-го вида;

$n_{общ}$- общее количество оборудования при изготовлении изделия.

Баскаковой О. А. был предложен ***показатель удельных приведенных затрат*** Зат без учета стоимости материалов, который определяется соотношением удельной себестоимости С и удельных капитальных затрат Кап:

$$Зат = \frac{C}{Кап}$$

Иногда используется ***коэффициент загрузки оборудования*** $К_з$, определяемый временем работ i-го вида оборудования $tм_i$ к общей затрате времени на j-ю организационную операцию:

$$К_з = \frac{tм_i}{to_j} * 100\%$$

2. Способы задания исходной информации для моделирования технологических процессов. Виды связей между параметрами

В практике работы различных должностных лиц и специалистов сферы сервиса при проведении статистического анализа данных, наряду с ответом на вопрос о достоверности различий сравниваемых числовых характеристик тех или иных параметров или явлений достаточно часто возникает потребность в ответе на другой важный вопрос. А именно: "Оказывает ли влияние величина одного параметра на значения какого-либо другого или нескольких других параметров?". Другими словами - "Существует ли связь, взаимное влияние между какими-либо параметрами?".

Следует всегда помнить, что все явления в природе и обществе и весь мир в целом представляют собой сложную систему отношений, существенной стороной которой является диалектическая связь и взаимодействие причин и следствий. Благодаря этой связи, одни явления и процессы порождают другие, осуществляется вечное движение и развитие. Общая закономерность связи и взаимодействия относится и к случайным явлениям, изучаемым и военной медициной. Так, имеется определенная связь между признаками физического развития клиентов (длина, объём, масса тела и др.), между признаками, характеризующими функционирование систем предприятий крупного или мелкого и среднего бизнеса. Для того, чтобы правильно понять любое явление, нужно рассматривать его в связи с другими явлениями.

Исследованиям связей между параметрами, количественным оценкам направления и силы такой связи посвящены специальные разделы прикладной статистики, которые носят название "Корреляционный анализ" и "Регрессионный анализ".

2.1. Шкалы измерения параметров

Исходные данные в практических приложениях статистики, как правило, являются результатами измерения некоторых признаков объектов наблюдения либо исчисления некоторых производных величин.

Осуществляя определенным образом измерение параметров наблюдения, исследователь получает данные. Данные могут быть ***качественными*** или ***количественными***. Получение количественных данных предполагает реализацию классической процедуры измерения – плотность, прочность, давления и т.д. Классифицируя клиентов по полу, национальности, месту жительства, мы собираем качественные данные. В последнем случае установление факта наличия интересующего свойства также может быть определено как измерение.

Измерение – это процедура, с помощью которой наблюдаемый параметр сравнивается с некоторым эталоном и получает характеристику в определенной шкале. Ниже описываются основные типы шкал и математические операции, допустимые в разных шкалах.

Номинальная шкала используется для отнесения объекта наблюдения к определенному классу. Пункты шкалы – эталоны качественной классификации свойств. Примерами номинальной шкалы могут служить типы высшей нервной деятельности сотрудников предприятия – холерик, флегматик, сангвиник, меланхолик. Частным случаем номинальной шкалы является дихотомическая, или альтернативная шкала: болен - здоров, курит - не курит, т.п.

Арифметические действия над величинами, измеренными в номинальной шкале, лишены смысла. Здесь допускается подсчет числа единиц наблюдения, отнесенных к каждой группе, вычисление частостей в ряду распределения, поиск средней тенденции по группе с наибольшей численностью (мода).

Порядковая шкала устанавливает отношение равенства между объектами, отнесенными к одному классу, и отношение последовательности в понятиях "меньше – больше" между классами. Известные примеры порядковых шкал – социальные группы населения, степени ожирения.

Весьма частой разновидностью шкал этого типа являются ***ранговые шкалы***. Они предполагают полное упорядочивание всех объектов от наименее к наиболее выраженному свойству.

При манипулировании с порядковыми шкалами следует помнить, что интервалы между отдельными градациями шкалы не равны, и даже если они оцифрованы (1, 2, 3 группы степени ожирения), то числа отображают лишь порядок следования градаций. Поэтому на порядковых шкалах правомерны преобразования, сохраняющие прежним порядок между градациями шкалы. В частности, 1, 2, 3-я группы степени ожирения вполне могут называться 2, 4, 7-ой или -1, 0, +1-й. Выбор зависит от наглядности и удобства интерпретации.

Для работы с данными, собранными в порядковой шкале, помимо модальных показателей можно использовать поиск средней тенденции с помощью медианы, которая делит упорядоченный ряд наблюдений пополам.

Количественная шкала считается определенной, если заданы единица измерения и начальная точка. Если начальная точка выбирается условно, то процесс измерения ставит в соответствие каждому объекту число, показывающее, на сколько единиц измерения этот объект отличается от объекта, принятого за начальную точку. Такая шкала называется ***интервальной шкалой***. Примером интервальной шкалы является температура в градусах Цельсия, где 0° – начальная точка, 1° – единица измерения.

На интервальной шкале допустимы линейные преобразования типа y = ax + b, a>0. Примером такого преобразования может служить перевод градусов Цельсия в градусы Фаренгейта:

$$F^0 = 9/5C^0 + 32 .$$

Для целого ряда свойств и явлений (время, расстояние, масса и др.) экспериментально установленным фактом является наличие абсолютной нулевой точки. Соответствующая им количественная шкала называется шкалой отношений; она позволяет отразить не только на сколько, но и во сколько раз одно измерение отличается от другого. Такие шкалы допускают все возможные операции с числами.

При выборе типа шкалы измерения признака необходимо, с одной стороны, соизмерять тип шкалы и природу объекта, с другой стороны – соотносить цели исследования с возможностями последующего количественного анализа: излишняя квантификация – напрасная трата усилий на сбор несущественных для последующего анализа данных, недостаточная – упущенные возможности более глубокого изучения объекта. Всегда лучше опираться на достоверные и менее детальные сведения, чем на детальные и малодостоверные. Эта посылка предопределяет принцип выбора приемлемого типа шкалы и дробности ее метрики.

2.2. Виды связи между параметрами

В соответствии с основными положениями теории вероятностей связь между случайными величинами может быть функциональной и статистической. Среди статистических зависимостей между случайными величинами иногда выделяют корреляционную, то есть такую, когда изменение одной случайной величины влечет за собой изменение математического ожидания другой случайной величины.

В данном пособии будем в основном рассматривать более простой случай, когда связь изучается между двумя признаками, выраженными количественно в виде двух случайных величин. Эти признаки в общем виде принято обозначать буквами латинского алфавита - X и Y, причем Y является некоторой функцией от X, т.е. Y = f(X). Поскольку значения признака зависят от значений признака X, признак Y принято называть признак-причина, а Y - признак-следствие.

Функциональной называется такая связь между признаками X и Y , когда каждому допустимому значению признака X по определенному закону соответствует единственное и строго определенное значение признака Y. Известны, например, зависимости между уровнем атмосферного давления и температуры кипения воды; между толщиной свинцового экрана и доли поглощаемого им гамма-излучения. Эти зависимости вы изучали в курсе физики, и знаете, что они описываются соответствующими физическими уравнениями. Большинство функциональных связей описываются и изучаются в курсе так называемых точных наук, таких как различные разделы математики, физика, химия.

В тех науках, где предметом изучения являются объекты живой природы и, прежде всего - человек, наблюдаются более сложные взаимоотношения между различными признаками и их влияние друг на друга. Это, прежде всего, связано с тем, что живые организмы, особенно человеческий, представляют собой гиперсложные саморегулирующиеся иерархические системы. Здесь мы чаще всего сталкиваемся с другим видом связи между теми или иными признаками - с корреляционной, или вероятностной связью.

Статистической (вероятностной, корреляционной) называется такая связь между параметрами X и Y , когда строго определенному значению переменной X соответствует некоторое множество возможных значений переменной Y. Так, например, известна корреляционная зависимость между весом тела и объёмом талии у клиентов. Однако эта зависимость проявляется только в среднем, так как индивидуальные изменения объема талии у разных клиентов неодинаковы.

Для выявления и оценки связи между признаками в статистике существует несколько методов, основными из которых являются:

- Анализ с помощью диаграмм;
- Корреляционный анализ;
- Регрессионный анализ.

2.3. Графические методы выявления и оценки связи между параметрами

2.3.1. Диаграмма "причина-следствие".

Диаграмму "причина-следствие" иногда называют по фамилии автора диаграммой Исикавы или, по внешнему виду, "рыбий скелет".

Диаграмма "причина-следствие" строится следующим образом:

- сформулировать проблему ("голова рыбы"), которую записать во главе горизонтальной прямой ("хребет"),
- записать наиболее существенные факторы и условия, влияющие на суть проблемы, в начале больших наклонных линий ("большие кости"),
- нанести совокупность причин, влияющих на наиболее существенные факторы и условия, на мелкие линии ("средние и мелкие кости"),
- факторы и условия ранжировать по значимости,
- сформулировать статистические гипотезы о связях случайных величин.

2.3.2. Диаграмма рассеивания.

Алгоритм построения ***диаграммы рассеивания***:

- выбрать и назвать случайные величины – составляющие системы,
- найти минимум и максимум каждой из них,
- построить оси координат, нанести на них масштабную сетку,
- нанести на график результаты экспериментов (точки),
- проанализировать наличие, вид и силу статистической связи между случайными величинами.

Для избежания ошибок координатные оси должны быть равновелики, следует учитывать возможность наличия в замерах выбросов, промахов…

2.4. Элементы корреляционного анализа.

2.4.1. Системы двух случайных величин. Корреляционный момент и корреляционная матрица системы двух случайных величин.

Система случайных величин – две или более случайных величины (СВ), рассматриваемые совместно; обозначение – (X, Y, Z, …).

Закон распределения системы двух случайных величин – соотношение, устанавливающее взаимосвязь между множеством возможных значений случайных величин и вероятностями принятия этих значений.

Закон распределения системы двух случайных величин может быть представлен в форме таблицы распределения, функции распределения или плотности распределения системы двух случайных величин …

Основные ***числовые характеристики системы двух случайных величин***:

математические ожидания СВ – составляющих системы mx и my,

дисперсии и средние квадратические отклонения СВ Dx и σx, Dy и σy.

Статистическую взаимосвязь составляющих системы СВ характеризует ***корреляционный момент (момент связи)***

$K_{xy} = M [(X - m_x) (Y - m_y)]$.

Взаимосвязь с дисперсиями СВ Х и У:

$K_{xx} = M [(X - m_x) (X - m_x)] = D_x$

Т.о. корреляционный момент (момент связи) является характеристикой рассеивания СВ, однако помимо этого он выражает еще и взаимное влияние этих величин.

Но размерность корреляционного момента = произведению размерностей случайных величин-составляющих системы, это не очень удобно для практических приложений…

2.4.2. Коэффициент корреляции, нормированная корреляционная матрица системы двух случайных величин

Поэтому ввели ***коэффициент корреляции*** r_{xy}:

Коэффициент корреляции – безразмерная величина,

$$r_{xy} = \frac{K_{xy}}{\sigma_x \cdot \sigma_y}$$

$0 \leq |r_{xy}| \leq 1$.

Корреляционная связь между случайными величинами устанавливается по результатам наблюдений и характеризуется коэффициентом корреляции, который вычисляется по формуле:

$$r_{xy} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 \bullet \sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2}}$$

где r_{xy} - коэффициент корреляции случайных величин X и У;

$\bar{x}$, $\bar{y}$ - средние арифметические значения случайных величин;

n - количество наблюдаемых объектов.

Средние арифметические значения определяются по известным формулам:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} \qquad \bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i}{n}$$

где x_i и y_i - наблюдаемые значения величин X и Y в i-ом опыте.

При использовании вычислительных машин коэффициент корреляции удобнее рассчитывать по следующей формуле, дающей аналогичный результат, но позволяющей избежать вычисления отклонений случайных величин от своих средних:

$$r_{xy} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - n\bar{x}\bar{y}}{\sqrt{(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n\bar{x}^2)(\sum_{i=1}^{n} y_i^2 - n\bar{y}^2)}}$$

Свойства коэффициента корреляции:

1. Коэффициент корреляции - величина безразмерная; значения ее заключаются в интервале [-1, +1].

2. Если $r_{xy} = 1$, то имеет место функциональная связь между величинами X и Y, если $r_{xy} = 0$ - то линейная связь между величинами отсутствует;

3. Если $r_{xy} > 0$, то имеет место положительная или прямая связь между величинами X и Y, если $r_{xy} < 0$, то связь отрицательная или обратная.

4. Сила корреляционной связи:

если $|rxy| < 0.3$, то корреляция считается слабой,

если $0.3 < |rxy| < 0.7$, то корреляция считается умеренной, если │ rxy │> 0.7, то корреляция считается сильной.

Случайные величины Х и У, для которых коэффициент корреляции равен нулю, т.е. $r_{xy} = 0$, называются ***некоррелированными***; если же $r_{xy} \neq 0$, то Х и У – ***коррелированные случайные величины***.

Можно утверждать, что если случайные величины Х и У независимы, то они и некоррелированы; но обратное не всегда верно, т.е. Х и У могут быть некоррелированными, но зависимыми. Коэффициент корреляции характеризует так называемую линейную зависимость между СВ.

Приведенный ранее пример корреляционной зависимости между температурой тела и частотой пульса у клиентов при многих, особенно сопровождающихся лихорадкой заболеваниях отражает прямую, или ***положительную корреляционную связь***, при которой с увеличением величины X (°С) величина Y (число уд/мин) также имеет тенденцию к увеличению. Соответственно, уменьшение величины X приводит к уменьшению значений Y.

Существует также обратная, или ***отрицательная корреляционная связь***, когда при увеличении величины X, значение величины Y имеет тенденцию к уменьшению. Например, такая связь имеет место между температурой наружного воздуха (X, °С) и уровнем заболеваемости работников так называемыми "простудными болезнями " (Y, %о).

Если │ r_{xy} │ = 1, то между величинами Х и У существует функциональная связь.

Достоверность корреляционной связи оценивают с помощью t-критерия Стьюдента. Для оценки выдвигается нулевая гипотеза об отсутствии, несущественности корреляционной связи. Нулевая гипотеза (Но) принимается, если ее вероятность (уровень значимости Р) будет больше 0,05 (5%) и отвергается, если Р будет равно или меньше 0,05. В последнем случае принимается альтернативная гипотеза (Н1) о существенности, достоверности корреляционной связи, поскольку ее вероятность (доверительная вероятность α = 1- р) будет равна или больше 0,95 (95%).

С еще большей достоверностью можно судить о наличии корреляционной связи и величине коэффициента корреляции, если вероятность альтернативной гипотезы (α) становится равной или превосходит 0,99 или 0,999.

Практически задача оценки достоверности рассчитанного коэффициента корреляции решается в следующем порядке:

- рассчитывают критерий Стьюдента

$t = \frac{|r_{xy}|}{\sigma_r}$ где σ_r - средняя квадратическая ошибка коэффициента корреляции,

которую вычисляют по формуле:

$$m_r = \sqrt{\frac{1 - r_{xy}^2}{n - 2}}$$

подставляя значение σ_r в формулу для расчета t-критерия, получают:

$$t = |r_{xy}|\sqrt{\frac{n - 2}{1 - r_{xy}^2}}$$

- полученное значение критерия сравнивают с критическими значениями t для уровней значимости P=0,05; 0,01 и 0,001 при числе степеней свободы n' = n-2 , где n - число парных наблюдений.

Если $t < t_{05}$, принимается нулевая гипотеза H_o (вероятность $P > 0,05$).

Если $t = t_{05}$, нулевая гипотеза отвергается ($P < 0,05$), принимается альтернативная гипотеза H_1 о значимости коэффициента корреляции (а = 0,95).

При $t = t_{01}$ или $t = t_{001}$ значимость r_{xy} приобретает большую надежность (H_1 принимается при доверительной вероятности $\alpha = 0,99$ или $\alpha = 0,999$).

2.5. Понятие о регрессионном анализе

Термин ***регрессия*** означает отражение влияния количественных изменений одной СВ на количественные изменения другой случайной величины.

Регрессионный анализ – совокупность методов математической статистики, применяемых для исследования характера функциональной зависимости между случайными величинами.

Решение задач регрессионного анализа осуществляется в следующей последовательности:

1. выбор вида функциональной зависимости (построение математической модели),
2. оценка параметров этой функции,
3. оценка статистической адекватности выбранной математической модели,
4. анализ остатков.

2.5.1. Выбор вида функциональной зависимости.

Уравнение регрессии имеет вид: $\hat{y} = f(x; a_0, a_1, \ldots, a_n)$,

где $\hat{y}$ – прогнозируемое значение функции,

a_i – параметры (коэффициенты) уравнения регрессии, $i = \overline{1,n}$.

Графическое представление вида функциональной зависимости называется ***линией регрессии***.

На практике наиболее часто используется линейная зависимость:

$\hat{y} = a_0 + a_1 * x$

из-за простоты оценки и интерпретации коэффициентов линейного уравнения регрессии, а также из-за того, что почти любую достаточно сложную зависимость на малом интервале можно аппроксимировать линейной функцией.

2.5.2. Метод наименьших квадратов оценки параметров функциональной зависимости (параметров уравнения регрессии).

Метод наименьших квадратов заключается в минимизации суммы квадратов отклонений теоретических, предсказываемых по модели, значений функции от эмпирических, полученных в эксперименте:

$\sum[\hat{y} - f(x; a_0, a_1)]^2 \to \min$

где a_0, a_1 – параметры линейной функции.

Решение этой задачи даёт следующие формулы:

Опуская математические преобразования, приведем более простые формулы вычисления коэффициента b (или коэффициента регрессии R y/x) и свободного члена a:

$$a_1 = R_{y/x} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2} = \frac{n\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{i=1}^{n} y_i}{n\sum_{i=1}^{n} x^2{}_i - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2}$$

$$a_0 = \overline{y} - a_1\overline{x}$$

где a_0 – свободный член уравнения; он численно равен прогнозируемому значению функции в точке х = 0; a_0 имеет размерность случайной величины У;

a_1 – коэффициент регрессии; он численно равен изменению СВ У при изменении СВ Х на единицу; a_1 имеет размерность СВ У, деленную на размерность СВ Х;

Свойства коэффициента регрессии:

1.Коэффициент регрессии величина размерная, например, при изучении регрессии длины тела на его массу размерность кг/м, температуры воздуха на заболеваемость - %о/ °С;

2.Величина коэффициента регрессии может быть целым, дробным положительным или отрицательным числом;

3.Если R у/х =0, то при изменении значений х среднее значение a_1 не изменяется;

если R у/х>0, то при увеличении х величина a_1 имеет тенденцию к увеличению;

если R у/х<0, то при увеличении х величина a_1 имеет тенденцию к уменьшению.

Выявлена зависимость между коэффициентами корреляции и регрессии:

$$a_1 = \frac{\sigma_y}{\sigma_x}$$

где σ_x и σ_y – средние квадратические отклонения величин X и Y, определяемые по известным формулам:

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2}{n-1}} \quad \text{и} \quad \sigma_y = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(y_i - \overline{y})^2}{n-1}}$$

Поскольку коэффициенты уравнения регрессии получают по результатам ограниченного по объему выборочного исследования, они содержат ошибки репрезентативности, которые сказываются и на точности прогноза среднего ожидаемого значения . Величину ошибок прогноза оценивают средней квадратической ошибкой:

$$\sigma_{y_k} = S_o \sqrt{\left(\frac{1}{n} + \frac{(x_k - \bar{x})^2}{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2}\right)}$$

где So - среднее квадратическое отклонение наблюдавшихся значений величины yi от рассчитанных по уравнению регрессии y_R .

Эту величину вычисляют по формуле:

$$S_o = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} (y_i - \hat{y}_i)^2}{n - 2}}$$

Из формулы видно, что значения So и m_{yk} будут тем меньше, чем меньше окажутся отклонения результатов наблюдения yi от линии регрессии (y_R) и чем больше будет число наблюдений n.

2.5.3. Оценка статистической значимости регрессионной модели.

Основная гипотеза H_0 – коэффициент регрессии $a_1 = 0$.

Для проверки этой гипотезы применяем t-критерий Стьюдента

$$t = \frac{|a_1|}{\sigma_a}$$

где $\sigma_{ã}$ – СКО оценки коэффициента регрессии,

Критической областью для отклонения основной гипотезы является верхняя α / 2 %-я область t-распределения Стьюдента с числом степеней свободы n-2.

2.5.4. Анализ остатков как метод проверки адекватности регрессионной модели.

Построить график остатков, т.е. функции Δf = Y - Ў.

Если модель адекватна, то остатки должны быть равномерно распределены в горизонтальной полосе вдоль оси абсцисс.

Остатки (Y - Ў) можно рассматривать как случайную величину, зависящую от других факторов, что приводит к необходимости применения многомерного регрессионного анализа...

2.5.5. Дисперсионный анализ уравнения регрессии

Рассеивание случайной величины У "разлагают" на рассеивание, объясняемое моделью, и рассеивание, обусловленное факторами, которые не учтены моделью. В качестве критерия статистической значимости регрессионной модели используется F-критерий Фишера:

$$F = \frac{\sigma_r^2}{\sigma_0^2}$$

где σ^2_r – дисперсия, обусловленная регрессией,

σ^2_0 – дисперсия, обусловленная неучтенными факторами.

$$\sigma_r^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(y_i - \overline{y}\right)^2}{n}$$

$$\sigma_0^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(y_i - \overline{y}\right)^2}{n - k - 1}$$

где $\hat{y}i$ – значение функции, рассчитанное по модели,

k – число степеней свободы = число коэффициентов модели – 1.

Желательно, чтобы F-критерий Фишера был много больше 1.

Информационная способность модели оценивается коэффициентом детерминации RM:

$$RM = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(y_{Ri} - \overline{y}\right)^2}{\sum_{i=1}^{n}\left(y_{Ri} - y_i\right)^2}$$

Коэффициент детерминации характеризует долю изменчивости случайной величины У, обусловленную влиянием факторов, включенных в модель.

Модель считается информационно способной, когда коэффициент детерминации RM > 0.5.

Между коэффициентом детерминации RM и F-критерием Фишера существует взаимосвязь:

$$F = \frac{RM^2}{1 - RM^2} \cdot \frac{n - m - 1}{m}$$

В пределах от наименьшего (x_1) до наибольшего (x_n) наблюдавшихся значений величины X прогноз Yk более точен; за пределами интервала (x_1, x_n) точность прогноза снижается. Поэтому на практике прогноз при экстраполяции допускается не более, чем на 1/4 интервала (x_1, x_n).

Методы исследования связей между случайными величинами могут найти широкое применение в научно-практической работе специалиста лёгкой промышленности.

Использование корреляционного и регрессионного анализа позволяет количественно выразить зависимость между факторами-причинами и их следствиями, представить ее в виде математической (и графической) модели, осуществить необходимый прогноз. Освоение специалистами сферы обслуживания корреляционно-регрессионного анализа будет способствовать объективизации оценки своей деятельности и тем самым повышению качества обслуживания населения.

Существенно облегчит применение такого анализа использование специалистами современных образцов вычислительной техники и пакетов прикладных программ.

3. Стохастическое моделирование технологических процессов. Метод Монте - Карло

Как уже было определено ранее, ***случайной величиной*** называется величина, которая в результате эксперимента принимает какое-либо одно и только одно значение из числа возможных, причем заранее неизвестно, какое именно. Примерами случайных величин могут быть число клиентов ателье за рабочую смену, количество выпущенной ткани за месяц, количество жалоб на работу персонала за квартал и т.д.

Из этих примеров видно, что между данными случайными величинами существует принципиальная разница: возможные значения одной СВ можно заранее перечислить (перенумеровать) – такие СВ называются ***дискретными (ДСВ***) – а возможные значения СВ другого класса непрерывно заполняют некоторый интервал на числовой оси или всю ось целиком - такие СВ называются ***непрерывными (НСВ).***

Будучи обусловлен большим количествам случайных факторов сам производственный процесс можно рассматривать как некоторое сложное случайное явление, а результат производства как случайные величины. Для анализа последних необходимо знать их вероятностные характеристики, определение которых, собственно, и является целью математического моделирования.

При моделировании таких сложных процессов как управленческие и производственные процессы с неизбежностью приходится констатировать, что многие факторы, определяющие ход и исход технологических операций, имеют случайный характер. В современном производстве число случайных факторов возрастает, создавая порой непреодолимые трудности в разработке аналитических моделей технологических процессов. Трудности эти обусловлены, главным образом, двумя причинами.

Во-первых, в аналитических моделях в качестве исходных данных широко используются вероятностные характеристики моделируемого процесса, для получения которых не всегда представляется возможным собрать необходимый статистический материал.

Во-вторых, для сложных процессов, каковыми являются управленческие и технологические процессы, редко удается записать показатели, характеризующие результативность процесса в виде явной или неявной аналитической зависимости от случайных входных переменных и других параметров, без принятия допущений и ограничений, существенно искажающих исследуемые закономерности.

Если аналитическую математическую модель построить не удается, применяют другой метод моделирования — ***метод статистического моделирования*** (метод статистических испытаний, метод Монте - Карло).

3.1. Сущность и основные понятия метода статистического моделирования

Будучи обусловлен большим количествам случайных факторов результат производства случаен, а сам производственный процесс можно рассматривать как некоторое сложное случайное явление. Для анализа последнего необходимо знать его вероятностные характеристики, определение которых, собственно, и является целью математического моделирования.

Сущность метода статистического моделирования состоит в следующем. Вместо того, чтобы описывать аналитические зависимости показателей производства и его эффективности от исходных данных: параметров обстановки и управления, производится ***розыгрыш*** — моделирование случайного явления (управленческих и технологических процессов) с помощью специально организованной процедуры, включающей случайность, дающей случайный результат и подчиняющейся тем же вероятностным законам, что и моделируемые процессы.

Как и в действительности, когда мы имеем дело со случайным явлением, в результате розыгрыша получаем каждый раз новую, отличную от других ***реализацию исследуемого процесса***. Множество таких реализаций дает искусственно полученный статистический материал, обработка которого известными методами математической статистики позволяет получить статистические оценки интересующих нас вероятностных характеристик процесса.

Поскольку случайность исследуемого процесса обусловлена весьма сложными взаимосвязями случайных факторов, определяющих его развитие, при статистическом моделировании предполагается возможность выделения этапов процесса, каждый из которых включает тот пли иной случайный фактор. Более того, статистическое моделирование возможно лишь в случае, когда известны все вероятностные характеристики каждого этапа. Безусловно, для определения этих характеристик необходим соответствующий статистический материал, однако вполне очевидно, что получение статистического материала об отдельных этапах процесса — задача более простая, чем получение статистического материала о сложном процессе в целом.

Кроме того, нередко требуемые характеристики отдельных этапов могут быть определены с помощью аналитических моделей.

Как уже отмечалось, моделирование сложного случайного явления осуществляется с помощью специально разработанной процедуры, называемой статистической моделью.

Под ***статистической моделью*** понимается такая математическая модель, в которой сложное случайное явление с неизвестными вероятностными характеристиками представляется в виде определенной взаимосвязи простых случайных явлений с известными вероятностными характеристиками, и которая позволяет моделированном простых случайных явлений получать реализации сложного случайного явления.

Таким образом, возвращаясь к ***сути метода статистического моделирования***, можно ее сформулировать так — многократное воспроизведение сложного случайного явления при помощи статистической модели и вычисление его вероятностных характеристик методами математической статистики.

Основу метода статистического моделирования составляет модельный опыт, называемый ***розыгрышем*** (жребий, статистическое испытание), представляющий собой искусственное воспроизведение реализации случайного явления по заданным его вероятностным характеристикам.

Каждая ***реализация исследуемого сложного явления*** в общем случае состоит из последовательности расчетных шагов и розыгрышей простых случайных явлений, присущих процессу. Здесь результат каждого розыгрыша определяет дальнейшее развитие моделируемого процесса, в частности — условия, в которых будет осуществляться следующий розыгрыш.

Существуют достаточно простые способы моделирования (воспроизведения, имитации) по известным вероятностным характеристикам многих случайных явлений: событие, полная группа событий, случайная величина, система случайных величин и т. п. Эти способы будут рассмотрены ниже. Знание их дает реальную возможность разрабатывать статистические модели сложных случайных явлений.

3.2. Моделирование случайных явлений

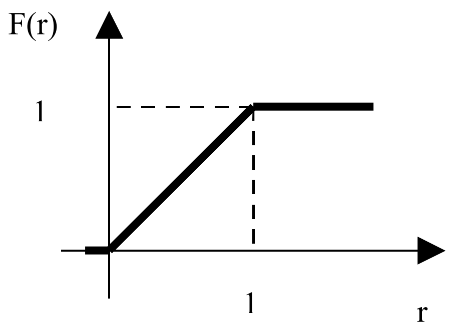
Два случайных явления принято называть ***эквивалентными (равносильными)***, если вероятностные характеристики их одинаковы. Этот принцип эквивалентности и лежит в основе; розыгрыша случайных явлений с известными вероятностными характеристиками.

Принцип эквивалентности позволяет случайное явление любой физической природы искусственно заменять некоторым эквивалентом — статистической моделью, имеющей вероятностные характеристики исследуемого явления. Проводя испытания модели (розыгрыш случайного явления), будем получать реализации моделируемого явления. Ниже убедимся, что механизм розыгрыша любого случайного явления с известными вероятностными характеристиками можно организовать, используя случайную величину (универсальную в рамках статистического моделирования), равномерно распределенную в интервале [0, 1]. Будем называть эту случайную величину «***случайное число от 0 до 1***» и обозначать R.

Аналитически функция и плотность распределения случайной величины R записываются следующим образом:

$$F(r) = \begin{cases} 0 \text{ при } r \le 0, \\ r \text{ при } 0 < r \le 1, \\ 1 \text{ при } r > 1. \end{cases} \qquad f(r) = \begin{cases} 0 \text{ при } r \le 0, \\ 1 \text{ при } 0 < r \le 1, \\ 0 \text{ при } r > 1. \end{cases}$$

Графики этих функций представлены на рис. 3.1.



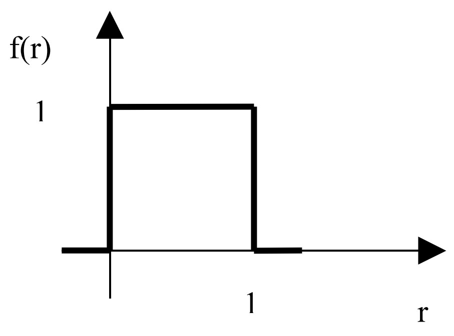


Рис. 3.1. Графики функции и плотности распределения случайной величины R

Любой розыгрыш может быть осуществлен с помощью стандартного механизма (датчика случайных чисел), позволяющего решить задачу: получить реализацию случайной величины R, т. е. получить случайное число r в интервале от 0 до 1.

В качестве ***датчиков случайных чисел*** могут выступать физические датчики: рулетки с равномерно нанесенными секторами, барабаны с фишками и др.; таблицы случайных чисел, заранее заполненные с помощью физических датчиков и т.п.

При моделировании на ЭВМ широко используются алгоритмы формирования так называемых псевдослучайных чисел. Они разрабатываются таким образом, чтобы обеспечивалась приемлемая независимость и равномерность чисел при сравнительной простоте их вычисления.

Наиболее распространенный ***способ формирования псевдослучайных чисел*** - метод вычетов. Суть метода: выбираются числа g и M, не имеющие общих делителей (причем число g большое), при которых последовательность чисел $r_{n+1} = gr_n \pmod M$, остаток от деления gr_n на M, обладает достаточно большим периодом. Метод может быть реализован и так:

$r_{n+1} = r_n (2^n + 1) + b \pmod{2^n}$, где a ≥ 2, b – нечетные числа.

Качество получаемых последовательностей оценивается обычными статистическими критериями. В практическом смысле достоинством таких последовательностей следует считать то, что они допускают возможность вторичного контрольного просчета той же самой реализации.

3.3. Моделирование случайных событий

Пусть имеется событие А. Известна вероятность данного события P (A) = p.

Осуществить ***розыгрыш случайного события***, значит провести опыт, по результатам которого можно ответить на вопрос, произошло или не произошло событие А?

Возьмем отрезок единичной длины и отложим на нем значение вероятности p (рис. 3.2).

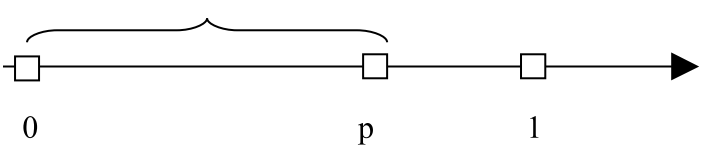


Рис. 3.2. Моделирование случайного события

Очевидно, что P(0 < R <p) = $\int_0^p f(r)dr = \int_0^p dr = p = P(A)$

Таким образом, тот факт, что случайная величина R в результате опыта примет значение из интервала от 0 до p (случайное число r попадает в интервал от 0 до p), и появление события А есть события эквивалентные. Это дает основание для построения простой ***процедуры розыгрыша случайного события***.

Получить с помощью датчика случайных чисел число r и сделать вывод:

- Если 0 < r <p – событие А произошло,
- Если p < r <1 – событие А не произошло.

Пусть имеется полная группа несовместных случайных событий A1, A2, …, An с вероятностями $P(A_i) = p_i$, i = 1,n.

В результате розыгрыша полной группы несовместных событий необходимо ответить на вопрос: какое из возможных событий A_i, (i = 1,n) в результате опыта произошло?

'Гак как события несовместны и составляют полную группу несовместных событий, необходимо ответить на вопрос: какое из возможных событий в результате опыта произошло? Рассмотрим отрезок единичной длины, отложив на нем отрезки

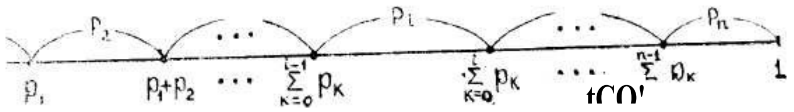


Рис. 3.3. Моделирование полной группы несовместных событий

длиной $P(A_i) = p_i$.

Попадание случайного числа r в интервал $\left(\sum_{k=0}^{i-1} p_k, \sum_{k=0}^{i} p_k\right)$ и появление события A_i есть события эквивалентные. Тогда, ***процедура розыгрыша полной группы несовместных событий*** очевидна:

Получив случайное число r , формулируем вывод, исходя из системы условий: если $\sum_{k=0}^{i-1} p_k < r < \sum_{k=0}^{i} p_k$, то произошло событие A_i, i = 1,n.

3.4. Моделирование случайных величин

Для розыгрыша случайной величины X необходимо знать закон ее распределения. В результате розыгрыша необходимо ответить на вопрос: какое значение приняла случайная величина X?

Пусть мы имеем дело с ***моделированием дискретной случайной величины***, ряд распределения которой известен:

x_i	x_1	x_2	…	x_{n-1}	x_n
p_i	p_1	P_2	…	p_{n-1}	p_n

Появление в результате опыта значения x_i можно рассматривать как появление события A_i из полной группы несовместных событий. Таким образом, задача сводится к уже ранее решенной, а вывод о результате розыгрыша формулируется из системы условий: если $\sum_{k=0}^{i-1} p_k < r < \sum_{k=0}^{i} p_k$, то случайная величина X приняла значение x_i, , i = 1,n.

Рассмотрим более детально ***моделирование непрерывной случайной величины***. Пусть имеется непрерывная случайная величина X с известной функцией распределения F(x).

Рассмотрим случайную величину Y = F(X). Возможные значения случайной величины Y лежат в интервале (0, 1). Найдем ее закон распределения.

Нетрудно видеть, что события X < x и У < y = F (x) равносильные , поскольку F{x) неубывающая (рис.). Из условия равносильности событий следует F(x) = F_1 (y) =y.

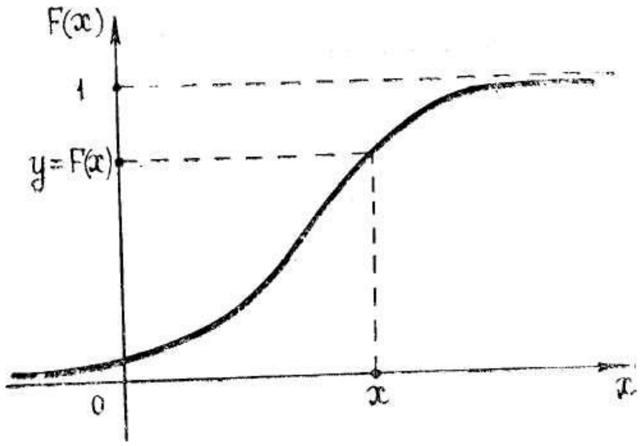


Рис. 3.4. Моделирование непрерывной случайной величины

Плотность распределения случайной величины Y запишется так:

$$f_1(y) = \frac{dF_1(y)}{dy} = \frac{dy}{dx} = 1 \text{ при y € (0, 1).}$$

Вне интервала (0, 1) возможных значений случайной величины У нет, следовательно, $f_1(y) = 0$ при $y < 0$ и $y > 1$.

Таким образом, случайная величина Y = F(x) равномерно распределена в интервале (0, 1). В ранее принятом обозначении – это величина R. И, что очень важно, полученный результат не зависит от закона распределения случайной величины X. Это позволяет сформулировать ***процедуру розыгрыша непрерывной случайной величины с заданной функцией распределения F(x) –*** метод обратных функций:

• Выбрать случайное число r и приравнять его функции распределения r = F(x). Полученное равенство решить относительно величины x:

$x = F^{-1}(r)$,

где $F^{-1}(r)$ – функция, обратная к F(x).

Полученная величина x представляет собой реализацию случайной величины X, имеющей функцию распределения F(x).

Конкретизируем вид уравнения $x = F^{-1}(r)$ для некоторых, наиболее распространенных, законов распределения непрерывных случайных величин.

• ***Для равномерного закона распределения***: x = a + r* (b – a);

• ***Для экспоненциального закона распределения***: x = - 1/λ *ln (1 – r);

• ***Для закона Рэлея***: $x = \sigma \sqrt{- 2 * \ln (1 - r)}$;

• ***Для нормального закона распределения***: x = m + σ * Ф-1 (2r – 1).

3.5. Обработка и оценка точности результатов моделирования

В методе статистического моделирования расчет вероятностных характеристик, выступающих в качестве основных и дополнительных показателей эффективности: вероятности событий, математические ожидания случайных величин, меры рассеивания и других - основан на предельных теоремах теории вероятностей.

В основе определения вероятности наступления некоторого случайного события лежит известная теорема Бернулли:

если в каждом из п независимых опытов вероятность р появления события А постоянна, то для любого сколь угодно малого ε > 0 имеет место равенство

$$\lim_{n \to \infty} P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| < \varepsilon\right) = 1$$

где m – число опытов, завершившихся появлением события А.

Величина р* = m/n - частота наступления события А, принимается за оценку вероятности р, поскольку согласно теореме при достаточно большом числе опытов р* с вероятностью, сколь угодно близкой к единице, как угодно мало отличается от вероятности р.

Расчет математического ожидания случайной величины основан на теореме Чебышева:

$$\lim_{n \to \infty} P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} xi - mx\right| < \varepsilon\right) = 1$$

Следовательно, среднее арифметическое экспериментальных значений случайной величины X сходится по вероятности к математическому ожиданию m_x при неограниченном увеличении числа опытов. Кроме того, в математической статистике доказывается, что m_x* представляет собой состоятельную несмещенную оценку математического ожидания случайной величины.

Что касается частости события р*, то она, являясь состоятельной и несмещенной, к тому же и эффективная оценка. Поэтому никакие другие оценки вероятности обычно не применяются.

Следует подчеркнуть, что вычисляются не сами показатели, а их статистические оценки. Поэтому при использовании результатов моделирования следует учитывать, что ошибки в определении показателя эффективности обусловливаются не только ошибками в учете параметров обстановки, не только принятыми допущениями и ограничениями, но и ограниченным числом испытаний (реализаций).

Точность приведенных статистических оценок е с заданной надежностью β в зависимости от числа испытаний n определяется в математической статистике следующим образом:

для статистической оценки вероятности события

$$\varepsilon \approx t_\beta \left[\frac{p^*(1 - p^*)}{n} \right]^{1/2}$$

для статистической оценки математического ожидания

$$\varepsilon \approx t_\beta \frac{\sigma_x^*}{\sqrt{n}}$$

При малом числе испытаний ($n < 100$) использование в формуле статистической оценки σ_x^* вместо истинного значения σ_x приводит к значительной погрешности. В этом случае расчет t_β, осуществляется с использованием распределения Стьюдента с $n — 1$ степенями свободы, как правило, по таблицам [6, 7]. При увеличении числа опытов величина t_β, фактически совпадает с обратной функцией Лапласа $\Phi^{-1}(\beta)$.

В статистическом моделировании необходимо и решение другой задачи — определение числа реализаций, обеспечивающего необходимую точность определения оценок вероятностных характеристик при заданной их надежности. Из предыдущих формул имеем:

для статистической оценки вероятности события

$$n \geq t_\beta^2 \frac{p^*(1 - p^*)}{\varepsilon^2}$$

для статистической оценки математического ожидания СВ

$$n \geq t_\beta^2 \frac{\sigma_x^2}{\varepsilon^2}$$

Практические рекомендации по применению предыдущих формул следующие. Провести ограниченное число реализаций ($n_0 = 20—50$), определить t_β, p^*, σ_x^* и рассчитать при заданных ε и β требуемое число реализаций n. Если полученное $п > n_0$, провести дополнительное число реализаций. Как правило, требуемое число реализаций уточняется рядом последовательных приближений, что нередко сводится к текущему контролю точности получаемой оценки показателя эффективности при заданной ее надежности.

3.6. Достоинства и недостатки метода Монте-Карло. Особенности разработки статистических моделей

Важным преимуществом метода статистического моделирования является его ***универсальность***. Метод может применяться не только для исследования процессов, включающих случайность, но и для решения многих математических задач, не связанных с какими-либо случайностями, по требующих трудоемких вычислений: решение дифференциальных уравнений, вычисление интегралов и др.

Кроме того, метод статистического моделирования можно рассматривать как экспериментальный метод ***определения показателей эффективности*** и ***по оценкам параметров самого исследуемого реального процесса***. Лишь только в силу того, что эксперимент в условиях реального функционирования системы (процесса), во многих случаях оказывается нецелесообразным или просто невозможным, приходится создавать модели процесса, отражающие его статистические свойства.

Важным достоинством метода, особенно при моделировании таких важных процессов, каковыми технологические процессы реального производства, является ***возможность обойтись без многих допущений и ограничений***, необходимых при разработке аналитических моделей. И даже более того, в условиях возрастающей сложности: прикладных задач метод статистического моделирования в ряде случаев оказывается единственно возможным.

Несомненным достоинством метода является его ***относительная простота***. Знание весьма несложных правил моделирования случайных явлений, процедур постановки экспериментов (получения реализации) с моделью и обработки их результатов гарантирует разработку модели.

Последовательный характер постановки экспериментов при получении точечных оценок показателей эффективности исследуемого процесса позволяет достаточно просто организовать текущий контроль точности параллельно с вычислением самих оценок. При этом, если нет существенных ограничений на количество реализаций при адекватности модели, можно получить оценки с любой необходимой точностью.

Существенным преимуществом метода следует считать и тот факт, что ***объем вычислений и точность оценок определяются главным образом количеством реализаций, а не числом необходимых показателей эффективности***. Поэтому рекомендуется полнее использовать результаты реализаций, рассчитывая как можно больше основных и дополнительных показателей.

Следует отметить и ряд недостатков метода. Наиболее существенным следует считать следующий. Естественное стремление к детальной формализации исследуемого процесса, в чем метод практически не имеет ограничений, приводит к существенному ***увеличению объема исходных данных***, а стремление получить оценки высокой точности приводит к ***необходимости проведения большого количества реализаций***. Все это обусловливает большую длительность процесса моделирования даже при использовании современных ЭВМ, обладающих высоким быстродействием. Процесс моделирования фактически лишается оперативности, что нередко делает невозможным использование статистических моделей непосредственно в процессе управления производством. Главным образом этот недостаток обусловлен невысокой скоростью сходимости оценок показателей к их истинным значениям (скорость убывания дисперсии оценок пропорциональна $1/n$).

Существует ряд методов повышения точности оценок не путем увеличения объема реализаций, а за счет использования информации о структуре модели и организации специальных целенаправленных экспериментов. Среди них можно выделить: метод существенной выборки, метод выделения главной части, метод зависимых испытаний и др.

Серьезным недостатком метода является то, что ***результаты статистического моделирования редко обладают необходимой степенью общности***, что затрудняет поиск оптимальных вариантов решении.

Обобщая сказанное выше, можно утверждать, что, несмотря на возможность разработки методом статистического моделирования моделей систем и процессов любой сложности, применение метода следует признать целесообразным в случаях, когда:

- не удастся построить аналитическую модель без допущений и ограничений, существенно искажающих закономерности исследуемого процесса;
- требуется проверить правомочность тех или иных допущений и ограничений, используемых в аналитических моделях.

Общий порядок разработки статистических моделей боевых действий в целом не отличается от общепринятого. Однако необходимо акцентировать внимание разработчиков статистических моделей на ряд моментов, свойственных данному типу моделей.

Несмотря на практически неограниченные возможности метода по разработке моделей процессов любой сложности, на этапе декомпозиции моделируемого процесса рекомендуется придерживаться принципа соответствия модели уровню руководства, в интересах которого разрабатывается модель. Кроме того, степень декомпозиции исследуемого процесса должна реально опираться на уровень знаний разработчика модели о законах функционирования подпроцессов, подлежащих розыгрышу при моделировании.

Как правило, алгоритмы статистических моделей носят блочный характер. Это придаёт модели гибкость, дает возможность достаточно просто совершенствовать структуру модели в процессе ее эксплуатации. Однако необходимо учитывать, что этих достоинств можно лишиться, если не предусмотреть и соответствующий модульный характер машинного алгоритма модели.

Важно понимать, что статистическое моделирование есть, по сути, процесс постановки эксперимента с моделью исследуемого процесса. Следовательно, необходимо особое внимание при разработке модели, особенно на этапе формирования машинного алгоритма, уделять проблеме планирования эксперимента. При планировании эксперимента рекомендуется предусматривать решение следующих задач:

- введение в алгоритм достаточного количества модулей счетчиков для накопления статистической информации в интересах расчета как основных, так и дополнительных показателей эффективности;
- организация текущего контроля точности вычисления статистических оценок показателей;

- выбор приемов ускорения сходимости статистических оценок показателей к истинным значениям;
- оценка требуемого и реально допустимого объема реализаций моделируемого процесса.

Подводя итоги, можно утверждать, что, несмотря на ряд существенных недостатков, присущих статистическому моделированию, при корректном его применении метод представляет собой одно из мощных и эффективных средств исследования сложных процессов в условиях неопределенности, каковыми являются технологические и управленческие процессы швейного производства и сферы сервиса.

4. Моделирование технологических процессов на основе теории графов. Сетевое планирование и управление комплексом работ.

Метод сетевого планирования и управления (СПУ) получил всеобщее признание и широкое распространение в тех областях деятельности, которые непосредственно связаны с планированием, организацией и контролем сложных комплексов работ, выполняемых в сжатые сроки. Данный метод является эффективным средством в планировании и управлении, отличаясь вместе с тем простотой и доступностью. Именно поэтому метод СПУ рекомендован к применению, как в народном хозяйстве, так и в военном деле.

В сфере сервиса и лёгкой промышленности в целом метод сетевого планирования и управления может быть достаточно полно использован в планировании работы органов управления, организации развертывания и подготовке к работе учреждений и заведений (цехов, складов, ателье, мастерских и др.).

4.1 Основные понятия и этапы сетевого планирования

Сетевое планирование (сетевые методы планирования и управления) — совокупность методов, использующих сетевую модель, как основную форму представления информации об исследуемом (управляемом) комплексе работ.

Построение сетевой модели комплекса работ сводится к отображению в виде специального ориентированного графа множества событий и естественного порядка самих работ комплекса, а также некоторой необходимой числовой информации (например, время выполнения каждой работы, ресурсы времени и средств).

Применение метода сетевого планирования и управления (СПУ) для планирования конкретного комплекса работ предполагает:

- постановку задачи;
- составление перечня работ;
- построение сетевого графика;
- расчет временных параметров;
- анализ резервов;
- оптимизацию сетевого графика;
- оценку вероятности выполнения комплекса работ в заданное директивное время.

При этом ***постановка задачи*** заключается в формулировании цели, замысла реализации и содержания планируемого комплекса работ, определении средств и исполнителей, обеспечивающих выполнение комплекса работ. Кроме того, сюда входит описание требуемой последовательности выполнения работ, их взаимосвязи и взаимодействия исполнителей.

Перечень работ представляется обычно в виде таблицы, в которой с детализацией, соответствующей уровню органа управления, указываются наименование работ, исполнители, коды, время выполнения работ и дисперсия времени выполнения работ. При этом время выполнения работ оценивается по опытным или нормативным данным. Что касается времени выполнения работ, планируемых впервые, то оно определяется экспертным путем. Обычно применяют две оценки:

- t_{min} - ***минимальное время выполнения работы*** (оптимистическая оценка);
- t_{max} - ***максимальное время выполнения работы*** (пессимистическая оценка),

Среднее время $t_{ср}$ и ***дисперсию времени выполнения работы*** $\sigma^2(t)$ рассчитывают по формулам (4.1) и (4.2):

$$\bar{t} = \frac{3 \cdot t_{min} + 2 \cdot t_{max}}{5} \qquad (4.1)$$

$$\sigma^2(t) = \left(\frac{t_{max} - t_{min}}{5} \right)^2 \qquad (4.2)$$

Например, если известно, что 5 исполнителей на развертывание палатки в летних условиях на заранее подготовленной площадке в лучшем случае затрачивают t_{min} =I5 мин, а в худшем t_{max} - =20 мин, то среднее время будет равно:

$$\bar{t} = \frac{3 \cdot 15 + 2 \cdot 20}{5} = 17 \text{ мин}$$

а дисперсия времени, характеризующая возможную колеблемость времени развертывания палатки в данных условиях:

Среднее время выполнения работ используется для построения сетевого графика и расчета его временных параметров. Что касается дисперсии времени, то она

$$\sigma^2(t) = \left(\frac{20 - 15}{5}\right)^2 = 1\text{мин}^2$$

необходима для определения вероятности выполнения комплекса работ в заданное директивное время.

В некоторых случаях вместе с оценками минимального и максимального времени на основе опыта бывает известно ***время выполнения работ в наиболее типичных, наиболее вероятных условиях*** $t_{нв}$. Для таких условий среднее время и дисперсию времени рассчитывают по формулам (4.3) и (4.4):

$$\bar{t} = \frac{t_{\min} + 4 \cdot t_{HB} + t_{\max}}{6} \tag{4.3}$$

$$\sigma^2(t) = \left(\frac{t_{\max} - t_{\min}}{6}\right)^2 \tag{4.4}$$

В общем виде сетевой график как адекватная сетевая модель комплекса работ представляет собой ориентированный граф, отображающий отношения предшествования между отдельными работами комплекса и характеризующий последовательность их выполнения.

Основными элементами сетевого графика являются:

- работы, изображаемые стрелками;
- события, обозначаемые кружками.

Работы, протекающие во времени и представляющие собой трудовой процесс или ожидание, требующие реальных затрат времени или ресурсов, называют ***действительными работами*** и изображают сплошными прямолинейными, ломаными или дуговыми стрелками. Наряду с действительными работами в СПУ имеют место так называемые ***фиктивные работы***, не требующие затрат труда и времени, но указывающие связь между отдельными работами или переход исполнителей с одной работы на другую, например, что одна работа может начаться лишь после завершения другой. Фиктивные работы принято изображать на сетевом графике пунктирными стрелками.

Под ***событием*** понимается результат произведенной работы. События не имеют продолжительности. Они характеризуют лишь состояние процесса выполнения работ и объясняют смысл момента начала или окончания работ. Например, применительно к работе "Раскрой материала" событиями, определяющими состояние этого трудового процесса, будут: начальное событие – " Раскрой начат"; конечное – " Раскрой закончен". Все события на сетевом графике нумеруются числами натурального ряда: 1, 2, ..., i, …, j, … Работа кодируется двумя числами - номерами начального и конечного событий для данной работы, например, работы (1, 3), (7. 12), или в общем виде работа (i,j). Нумерацию событий и кодирование работ выполняют после построения сетевого графика.

Событие, за которым непосредственно начинается работа, называется ***начальным*** для данной работы и обозначается символом i. Событие, которому непосредственно предшествует данная работа, называется ***конечным*** для данной работы и обозначается символом j.

Событие, располагающееся в сети непосредственно перед данным событием так, что между ними нет никаких промежуточных событий, называется ***предшествующим.*** Событие, располагающееся в сети непосредственно после данного события так, что между ними нет никаких промежуточных событий, называется ***последующим.***

Самое первое событие в сети, не имеющее предшествующих ему событий и означающее начало выполнения всего комплекса работ, называется ***исходным***. Событие в сети, не имеющее последующих событий и означающее окончание выполнения всего комплекса работ, достижение конечной цели, называется ***завершающим***.

4.2. Преимущества сетевого планирования и управления комплексом работ

Применение метода СПУ в сравнении с традиционно сложившимися методами планирования различных мероприятий имеет ряд преимуществ:

- повышение качества планирования и управления при реализации комплекса работ;

- наглядность представления комплекса последовательно выполняемых и взаимосвязанных работ;
- возможность выявления наиболее важных задач и работ, определять сроки их реализации;
- возможность выявления резервов времени, ресурсов и их оптимальное использование в целях выполнения комплекса работ в более сжатые сроки, чем это определено директивными показателями;
- возможность четко координировать деятельность всех сторон, участвующих в реализации планируемого комплекса работ;
- четкое распределение ответственности и организация взаимодействия между исполнителями работ.

4.3. Правила построения сетевого графика

Построить сетевой график, на котором правильно отображаются взаимосвязи отдельных работ, последовательность их выполнения, можно только на основе четкого представления об организации выполнения всего планируемого комплекса работ. Опыт показывает, что специалисты, имеющие достаточные навыки в выполнении тех или иных мероприятий практического порядка, могут правильно формулировать цель, замысел и содержание планируемого комплекса работ, определять необходимые средства и исполнителей, Кроме того, они в состоянии составить перечень работ, дать оценку времени выполнения работ и воплотить в сетевом графике замысел, взаимосвязи и последовательность выполнения мероприятий, В любом случае построению сетевого графика предшествует подготовительная работа с участием специалистов, обладающих достаточным опытом.

Поскольку сетевой график представляет собой строго ориентированный граф, что имеет определяющее значение для расчета временных параметров на ЭВМ, то следует соблюдать ***правила построения сетевого графика:***

- график строят слева направо от исходного до завершающего события;
- график должен иметь по возможности простую форму без лишних пересечений;

- все работы изображают стрелками произвольных длины и направления так, чтобы обеспечить максимальную наглядность изображения комплекса работ;
- каждая работа заключается между двумя событиями: начальным и конечным;
- на графике не должно быть событий, в которые не входит ни одна работа (кроме исходного события);
- на графике не должно быть двух и более работ с одинаковым кодом; между любой парой событий может проходить только одна работа;
- на графике не должно быть тупиков, то есть событий, из которых не выходит ни одной работы (кроме завершающего события); наличие тупиков указывает на то, что выполнение работ, предшествующих этому (тупиковому) событию, для достижения цели необязательно;
- на графике не должно быть замкнутых контуров, все работы (стрелки) должны иметь направление от исходного события к завершающему.

После построения сетевого графика производится ***ранжирование работ*** и ***нумерация событий***. При этом работы, выходящие из исходного события, относят к первому рангу и помечают I; работы, выходящие из событий, в которые вошли работы первого ранга, относят ко второму рангу и помечают II и т.д. События нумеруются числами натурального ряда, начиная с исходного и далее в порядке рангов, а в одном и том же ранге - сверху вниз; номер последующему событию присваивается после нумерации предшествующего события. Если в событие входят несколько работ с различными рангами, то выходящие из него работы должны иметь ранг, следующий за наибольшим рангом работ, входящих в это событие.

В ряде случаев для наглядности строят ***масштабные сетевые графики***. С этой целью внизу под самым графиком наносится ось времени, а события располагаются в соответствии со временем их наступления. Над каждой стрелкой - работой на графике указывают среднее время выполнения работы $t_{раб}$, под стрелкой - исполнителей работы. Чтобы сетевой график был более нагляден, над стрелками надписывают краткие наименования работ.

На рис. 4.1 показано применение правил построения сетевого графика и нумерации событий на примере абстрактного количества работ, перечень и временные оценки которых представлены в табл. 4.1.

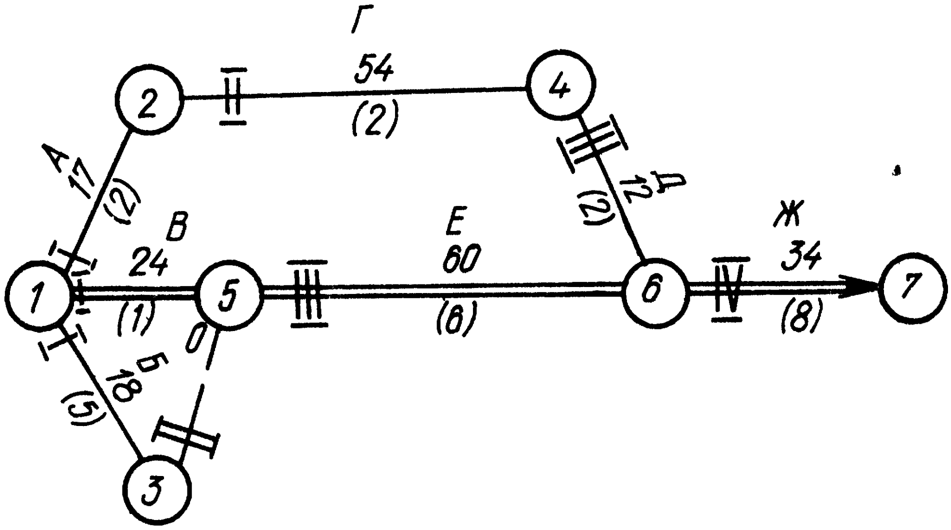


Рис. 4.1. Пример сетевого графика

Таблица 4.1.

Исходные данные

Наименование работы	Исполнители, человек	Код	Время, минут			D(t), мин^2
			t_{min}	t_{max}	t_{cp}	
Действ. работа А	2	1,2	15	19	17	0,64
Действ. работа Б	5	1,3	15	20	18	1,00
Действ. работа В	1	1,5	20	30	24	4,00
Действ. работа Г	2	2,4	50	60	54	4,00
Действ. работа Д	2	4,6	10	15	12	1,00
Действ. работа Е	6	5,6	50	75	60	25,0
Действ. работа Ж	8	6,7	30	40	34	4,00
Фиктивная работа	0	3,5				

Примечание. Среднее время выполнения работ t рассчитано с точностью до I мин, а дисперсия времени $б^2(t)$ - до 0.01 мин^2.

4.4. Параметры сетевого графика

Подобно тому, как для отдельной работы характеристиками ее служили среднее время и дисперсия времени выполнения работы, для сетевого графика основными характеристиками являются время и дисперсия времени выполнения комплекса работ в целом. Кроме этого важно учесть резервы времени для использования их в целях сокращения времени производства комплекса работ.

Более того, для определения времени выполнения такого комплекса работ необходимо знать продолжительность ***полных путей***, т.е. любых возможных путей от исходного до завершающего события. Например, на сетевом графике, изображенном на рис. 4.1, имеется три полных пути, проходящих через события, указанные в скобках каждого пути $L_г$:

- $L_1(1, 2, 4, 6, 7)$
- $L_2(1, 5, 6, 7)$
- $L_3(1, 3, 5, 6, 7)$

Продолжительностью полного пути является сумма среднего времени выполнения работ на данном пути, т.е

$$T(L_k) = \sum_{(i,j) \in L_k} t_{cp}(i, j)$$

Так, продолжительности трех полных путей на данном сетевом графике равны: $T(L_1)$=II7 мин, $T(L_2)$=118 мин, $T(L_3)$=112 мин.

При построении сетевого графика необходимо иметь в виду, что среди полных путей находится один (или несколько), имеющий наибольшую продолжительность. Такой полный путь с максимальной продолжительностью называется ***критическим путем*** и обозначается $L_{кр}$. Продолжительность критического пути, в свою очередь, называется ***критическим временем*** $T_{кр}$, равным

$$T_{кр} = \max T(L_k) = \max \sum_{(i,j) \in L_k} t_{cp}(i, j)$$

Для сетевого графика на рис. 4.1 критический путь - это второй полный путь $L_{кр}=L_2$, а критическое время $T_{кр} = T(L_2)$=118 мин.

Понятия критического пути и критического времени в СПУ имеют большое значение. Действительно, критическое время представляет собой среднее время выполнения комплекса работ. Чтобы сократить время выполнения всего комплекса работ, необходимо, прежде всего, изыскать пути уменьшения времени на критическом пути. Кроме того, при управлении комплексом работ в ходе реализации наибольшее внимание следует уделять контролю за выполнением работ на критическом пути.

Полагая распределение времени выполнения комплекса работ нормальным со средним значением $t_{ср}$ и дисперсией критического времени

$$\sigma^2(T кр) = \sum_{(i,j)\in L_k} \sigma^2[t(i,j)]$$

где $б^2(t(i,j))$ - дисперсия времени выполнения работы (i,j), находящейся на критическом пути $L_{кр}$,

$Σб^2(t(i,j))$ - сумма дисперсий времени $T_{кр}$ выполнения работ, принадлежащих критическому пути,

можно дать оценку вероятности выполнения комплекса работ в заданное директивное время $T_д$ следующим образом. Принято ***вероятность выполнения комплекса работ в директивное время*** рассчитывать с помощью функции Лапласа для нормального распределения, приведенной в приложении I [ ] по формуле:

$$P(T_{кр} < T_д) = \Phi\left(\frac{T_д - T_{кр}}{\sigma\ (T_{кр})}\right)$$

Для сетевого графика, представленного на рис. 6,1, дисперсия критического времени определяется в виде суммы дисперсий времени выполнения работ (1,5) (5,6) (6,7):

$\sigma^2(T_{кр}) = 4{,}00 + 25{,}00 + 4{,}00 = 33{,}00$ мин^2,

среднее квадратическое отклонение критического времени:

$\sigma(T_{кр}) = \sqrt{\ } \sigma^2(T_{кр}) = \sqrt{\ } 33{,}00 = 5{,}74$ мин.

Таким образом, назначив время выполнения комплекса работ Тд= 130 мин . можно ожидать выполнения задачи в 98 случаях из 100; в то время как при Тд = 120мин эта задача может быть выполнена только в 64 случаях из 100. Обычно считают, что директивные сроки должны соответствовать вероятности выполнения работ не менее 0,70 - 0,80.

Решение обратной задачи, т.е. ***определение директивного времени для заданного уровня вероятности выполнения комплекса работ***, например Р(Ткр<Тд) = Ф(Х) =0,75, производится с помощью таблицы обратной функции Лапласа (приложение I [1]):

- по заданному значению Ф(Х) =0,75 определяют табличное значение Х =0.67;
- директивное время рассчитывают по формуле: Тд = Ткр + х σ(Ткр).

Так, для сетевого графика, изображенного на рис. 6.1 , для которого Ткр =118мин и б(Ткр)=5,74 мин , Ткр = 118 + 0,67*5.7 = 122 мин.

С тем, чтобы повысить вероятность выполнения комплекса работ в заданные директивные сроки, необходимо стремиться к сокращению критического времени и времени выполнения работ на критическом пути. Для решения данной проблемы, прежде всего, важно установить ***резервы времени***, имеющиеся на работах и полных путях сетевого графика. Причем расчет резервов времени требует знания ранних и поздних сроков наступления событий.

В частности, ***ранний срок наступления события*** j определяется максимальной продолжительностью пути до события i, предшествующего событию j, плюс продолжительность работы (i,j):

$$t_p(i) = \max_{i<j}\langle t_p(i) + t(i,j)\rangle$$

Так как путей, предшествующих событию i может быть несколько, то ранним сроком наступления события i будет тот, который имеет наибольшую продолжительность.

Для данного сетевого графика ранние сроки наступления событий 4 и 6, соответственно, равны:

$t_р(4) = t[L_п(4)] = 17 + 54) = 71$ мин,

$t_р(6) = \max \{t[L_п(6)]\} = \max \{24 + 60; 18 + 0 + 60\} = \max \{84; 78\} = 84$ мин.

Поздний срок наступления события i определяется разностью между критическим временем и максимальной продолжительностью пути, следующего за событием i, т.е.

$$t_n(i) = T_{кр} - \max\langle t[L_c(i)]\rangle$$

где T[Lc(i)] - продолжительность пути от события i до завершающего события;

Так как путей, следующих за событием, может быть несколько, то из значения критического времени следует вычитать продолжительность того пути, для которого она будет наибольшей.

Или же поздний срок наступления события можно рассчитать по формуле:

$$t_n(i) = \min_{i>j}\left\langle t_n(j) - t(i,j)\right\rangle$$

Применительно к рассматриваемому графику поздние сроки наступления событий 4 и 6, соответственно, будут равны:

$t_п(4) = T_{кр} – t[L_c(4)] = 118 – (12 + 34) = 72$ мин,

$t_п(6) = T_{кр} – t[L_c(6)] = 118 – 34 = 84$ мин.

Заметим, что для события 6 на критическом пути ранний и поздний сроки его наступления совпадают.

Резерва времени события на критическом пути не имеют. В отличие от этого события на некритических путях имеются резервы времени, которые могут быть найдены для каждого события как разности между поздним и ранним сроками их наступления:

$R(i) = t_п(i) – t_р(I)$

Резерв времени события R(i) показывает, на какой срок можно задержать наступление события, не вызывая увеличения времени выполнения всего комплекса работ.

Так для события 4 резерв времени:

$R(4) = t_п(4) = 72 – 71$,

для события 6:

$R(6) = t_п(6) – t_р(6) = 84 – 84 = 0$.

Для наглядности и удобства работы с сетевым графиком некоторые его важные параметры можно отобразить на рисунке. Для этого каждый кружок, изображающий событие, делится на 4 сектора:

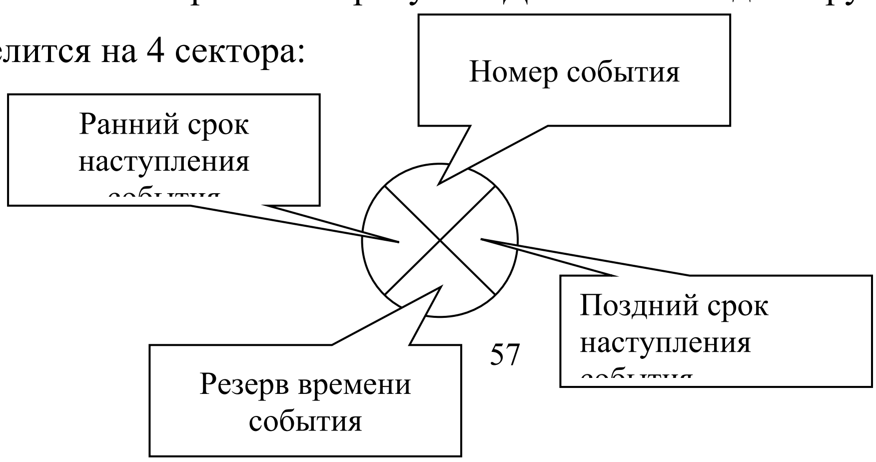


Рис. 4.2. Параметры события на сетевом графике

Для обстоятельного анализа сетевого графика необходимо знать не только резервы времени наступления всех событий, но и резервы времени всех работ и полных путей. При этом различают полный и свободный резервы времени работ.

Полный резерв времени работы (i,j) определяется в виде разности между поздним сроком наступления события i и ранним сроком наступления события j за вычетом среднего времени выполнения работы (i,j):

$R_п(i,j) = t_п(j) – t_р(i) – t(i,j)$

Например, для работы (4,6) полный резерв времени

$$R_n(4,6) = t_n(6) - t_p(4) - \bar{t}(4,6) = 84 - 71 - 12 = 1 мин$$

Полный резерв времени работы показывает, насколько может быть увеличена продолжительность работы (i,j) или отсрочено ее начало. В то же время необходимо учитывать, что использование полного резерва на работе (i,j) ликвидирует резервы времени на всех других работах данного полного пути.

Свободный резерв времени работы (ij) определяют как разность между ранними сроками наступления события и за исключением среднего времени выполнения работы (ij):

$R_с(i,j) = t_р(j) – t_п(i) – t(i,j)$

Например, для работы (4,6) свободный резерв времени:

$R_с(4,6) = t_р(6) – t_п(4) – t(4,6) = 84 – 71 – 12 = 1$ мин.

Свободный резерв времени показывает, насколько, может быть увеличена продолжительность работы (i,j) или отсрочено ее начало без изменения ранних сроков начала последующих работ на данном полном пути.

Обычно ***резервы времени полных путей*** определяют в виде разности между критическим временем и продолжительностью полных путей, т.е.

$R(L_k) = T_{кр} - T(L_k)$

Например, для указанного выше сетевого графика резервы трех полных путей равны:

$R(L_1) = T_{кр} - T(L_1) = 118 – 117 = 1$ мин

$R(L_2) = T_{кр} - T(L_2) = 118 – 118 = 0$ мин

$R(L_3) = T_{кр} - T(L_3) = 118 – 112 = 6$ мин

Резерв времени полного пути свидетельствует о том, насколько можно увеличить продолжительность работ на этом пути без увеличения критического времени выполнения комплекса работ.

Результаты расчета временных параметров рассматриваемого сетевого графика приведены в табл. 4.2; новый вид с учётом принятых обозначений – на рис. 4.3.

Таблица 4.2

Временные параметры сетевого графика

Номер начального события i	Номер последующего события j	Среднее время выполнения работы $t(i,j)$	Ранний срок наступления события $t_р(j)$	Поздний срок наступления события $t_п(j)$	Резерв времени события $R(j)$	Полный резерв времени работы $R_п(i,j)$	Свободный резерв времени работы $R_с(i,j)$
1	2	17	17	18	1	1	0
1	3	18	18	24	6	6	0
1	5	24	24	24	0	0	0
2	4	54	71	72	1	1	0
3	5	0	24	24	0	6	0
4	6	12	84	84	0	1	1
5	6	60	84	84	0	0	0
6	7	34	118	118	0	0	0

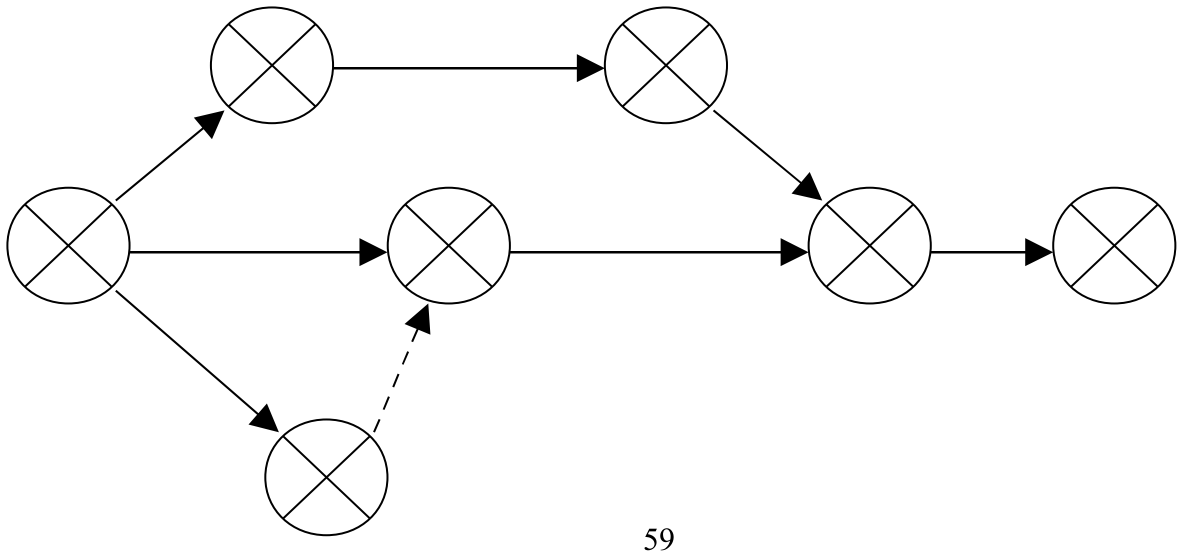


Рис. 4.3. Доработанный вид сетевого графика

Анализ табл. 6.2 и рис. 6.3 показывает, что резервы имеются на работе (1,3) – 6 мин и на работах (1,2), (2,4) - I мин. На работах на критическом пути резервы времени отсутствуют. Следует заметить, что при таких ограниченных возможностях оптимизация рассмотренного сетевого графика с целью сокращения времени выполнения комплекса работ за счет резервов времени на работах на некритических путях практически невозможна.

4.5. Анализ и оптимизация сетевого графика

Прежде всего, нужно проверить правильность исходных данных, то есть оценок ожидаемой длительности выполнения работ. Анализ сетевого графика планируемого комплекса работ производят после перерасчета временных параметров, к которым относят критическое время, резервы времени работ, полных путей. На основании результатов анализа принимается решение на оптимизацию сетевого графика с целью сокращения времени выполнения комплекса работ. В заключение дается оценка вероятности выполнения комплекса работ в заданные директивные сроки и устанавливаются временные нормативы.

Анализ используемых в практике сетевых графиков и их временных параметров показывает, что при необходимости время выполнения комплекса работ может быть уменьшено за счет сокращения времени выполнения работ на критическом пути. При этом время выполнения работ на некритических путях может остаться прежним или даже увеличиться без ущерба для общего времени выполнения комплекса работ. Очевидно, сокращение или увеличение продолжительности работ связано с возрастанием или уменьшением затрат сил и средств на эти работы. Возможность различных вариантов сетевого графика с неодинаковым уровнем затрат позволяет судить о возможности поиска оптимальных вариантов. При этом различают ***две постановки задачи оптимизации сетевого графика***:

1. при заданной общей продолжительности построить сетевой график комплекса работ, реализуемого с наименьшими затратами сил и средств;

2. при заданных затратах сил и средств или минимальном их увеличении построить сетевой график комплекса работ, реализуемого в наиболее сжатые сроки.

При первой постановке задачи оптимизации необходимо таким образом составить сетевой график, чтобы при минимальных затратах средств и привлекаемых для работы исполнителей обеспечить выполнение комплекса работ в заданные сроки.

При второй постановке задачи оптимизации следует, используя штатные средства и силы, составить сетевой график, в соответствии с которым комплекс работ будет выполнен в минимальное время. Данная постановка задачи встречается наиболее часто.

Построение оптимизированного сетевого графика следует начинать с выработки замысла реализации комплекса работ штатными средствами. При этом необходимо тщательно продумать, какие средства должны быть назначены на каждую работу комплекса, каким образом распределить работы между исполнителями, в какой последовательности и взаимосвязи их выполнять. После составления перечня работ, построения первого варианта сетевого графика целесообразно проанализировать его временные параметры и выявить резервы времени при выполнении работ на некритических путях.

Оптимизация сетевого графика с целью сокращения времени выполнения комплекса работ достигается рядом способов:

- заменой последовательного выполнения работ на критическом пути параллельным;
- передачей ресурсов (средств, исполнителей) с работ на некритических путях на работы на критическом пути;
- привлечением для выполнения работ на критическом пути более квалифицированных исполнителей и производительных средств;
- изысканием дополнительных ресурсов и их использованием, прежде всего, для усиления средств и сил на критическом пути.

Естественно, что в процессе построения оптимизированного сетевого графика испытываются несколько вариантов. В оптимизированном сетевом графике обычно изменяются временные параметры, число событий и их нумерация. Последующий анализ, как правило, снова выявляет наличие резервов. Этот процесс продолжается до получения варианта, характеризующегося минимальным значением критического времени и максимальной вероятностью выполнения комплекса работ в приемлемое время.

В литературе, зачастую, выделяют два основных метода сетевого анализа проектов [4]:

- ***метод критического пути – Critical Path Method (CPM),***
- ***метод оценки и обзора программы – Program Evaluation and Review Technique (PERT).***

Важной предпосылкой применения ***метода CPM*** является предположение о том, что время выполнения каждой работы точно известно. В результате применения этого метода удается получить ответы на следующие вопросы:

- За какое минимальное время можно выполнить проект?
- В какое время должны начаться и закончиться отдельные работы?
- Какие работы являются "критическими" и должны быть выполнены точно в установленное время, чтобы не был сорван срок выполнения проекта?
- На какое время можно отложить срок выполнения "некритической" работы, чтобы она не повлияла на срок выполнения проекта в целом?

Метод PERT ориентирован на анализ таких проектов, для которых продолжительность выполнения всех или некоторых работ не удается определить точно; многие работы в которых не имеют аналогов, в результате чего возникает неопределенность в сроках выполнения проекта. Применение метода PERT позволяет получить ответы на следующие вопросы:

- Чему равно ожидаемое время выполнения работы?
- Чему равно ожидаемое время выполнения проекта в целом?
- С какой вероятностью проект может быть выполнен за указанное время?

4.Применение теории массового обслуживания при проектировании и организации технологических процессов

Важную часть теории управления производством составляет теория массового обслуживания, иногда называемая теорией очередей. Очереди, к сожалению, обычное явление в сфере обслуживания; это могут быть очереди на ожидание обслуживания автомобиля в центре автосервиса или очереди покупателей в кассу магазина.

В терминах систем массового обслуживания (СМО) описываются многие реальные системы: вычислительные системы, узлы сетей связи, системы посадки самолетов, магазины, производственные участки - любые системы, где возможны очереди и (или) отказы в обслуживании.

В вычислительной системе роль обслуживающего прибора играет ЭВМ, роль заявок - решаемые задачи. Источником заявок служат терминалы пользователей. Моментом выдачи заявки является момент нажатия клавиши для подачи директивы о запуске задачи на решение. Операционная системы ЭВМ исполняет роль диспетчера: определяет очередность решения задач. В роли ячеек буфера выступают ячейки памяти ЭВМ, хранящие сведения о задачах, требующих решения.

В системе разгрузки судна, другой пример реальной системы, источниками заявок являются направления, откуда прибывают суда. Момент выдачи заявки - это момент прибытия судна в зону морского порта для разгрузки/погрузки. Обслуживающим прибором является причал вместе с персоналом и техническими средствами, организующими разгрузку/погрузку. Роль буфера играет акватория порта.

Профессиональный менеджер, принимая решение о совершенствовании системы обслуживания клиентов, оценивает изменения в затратах на обеспечение функционирования системы, а также издержки, вызванные ожиданием клиентов в очередях. И, конечно же, он, в первую очередь, пробует использовать теорию массового обслуживания для выработки более рационального варианта работы подразделения.

Можно нанять большое количество сотрудников, которые могут быстро обслуживать, и тогда очереди будут ликвидированы – но, возможно, придется оплачивать простой не занятого персонала.

Можно сэкономить на количестве рабочих мест и, соответственно, на трудозатратах, но тогда клиент может покинуть предприятие, где приходится дожидаться в очередях, и уйти к конкурентам – снова потери выручки (прибыли).

5.1. Предмет и основные понятия теории массового обслуживания

Теория массового обслуживания связана с разработкой и анализом математических, т.е. абстрактных, моделей, которые описывают процесс обслуживания некоторых объектов, поступающих на вход обслуживающего прибора в виде некоторого потока, и образующего в общем случае очередь на входе обслуживающего прибора.

Поскольку рассматриваются абстрактные модели, совершенно не важна природа обслуживаемых объектов и их физические свойства (будь то вызовы, управляющие или информационные кадры в сети связи или посетители магазина, или детали на автоматической линии и т.п.). Существенным являются моменты появления этих объектов и правила, и законы (математические) их обслуживания, так как от этих моментов и законов зависит адекватное отображение эволюции моделируемого объекта во времени. Поэтому, когда говорят о методах анализа очередей, имеют в виду математические (абстрактные) модели, а из контекста всегда должно быть ясно, для исследования какой реальной системы применяются эти модели.

Целью использования СМО как модели является анализ качества функционирования указанных систем-оригиналов и выработка рекомендаций по совершенствованию их работы в тех или иных условиях.

5.2. Состав систем массового обслуживания и характеристика её элементов

Система массового обслуживания (СМО), как правило, состоит из следующих элементов:

- Входящий поток заявок
- Каналы обслуживания
- Очередь заявок, ожидающих обслуживания
- Выходящий поток обслуженных заявок

- Выходящий поток необслуженных заявок

Входящий поток заявок – это требования, нуждающиеся в обслуживании. ***Заявками*** могут быть заказчики ателье, больные в госпитале (лазарете), покупатели в магазине, звонки (вызовы) в телефонной сети, заявки на поставки имущества и оборудования и т.п.

Заявки (требования) на обслуживание поступают через постоянные или случайные интервалы времени. Как правило, поток заявок полагается пуассоновским (простейшим); тогда интервалы времени между заявками считаются распределенными по показательному закону с плотностью λ.

Приборы (каналы) служат для обслуживания этих заявок. Под обслуживанием в приведенных ситуациях можно понимать выполнение необходимых клиенту (покупателю) услуг, действий и процедур; предоставление товара покупателю или линии связи абоненту сети; отпуск имущества, изготовление костюма или пальто, ремонт приборов и аппаратов. Все эти операции (действия) выполняют так называемые ***каналы обслуживания***. Обслуживание длится некоторое время, постоянное или случайное. Обычно считается, что время обслуживания заявки случайно и подчиняется показательному закону распределения с параметром μ.

Ввиду того, что заявки в систему поступают не регулярно, а стохастически, образуя простейший поток, каналы обслуживания иногда могут не справляться с их "обработкой", из-за чего могут образовываться ***очереди заявок***, ожидающих обслуживания. Если в момент поступления заявки все приборы заняты, заявка помещается в ячейку буфера и ждет там начала обслуживания. Заявки, находящиеся в буфере, составляют ***очередь на обслуживание***. Заявка, ставшая в очередь ожидает обслуживания в течение случайного времени, распределенного по показательному закону с параметром ν.

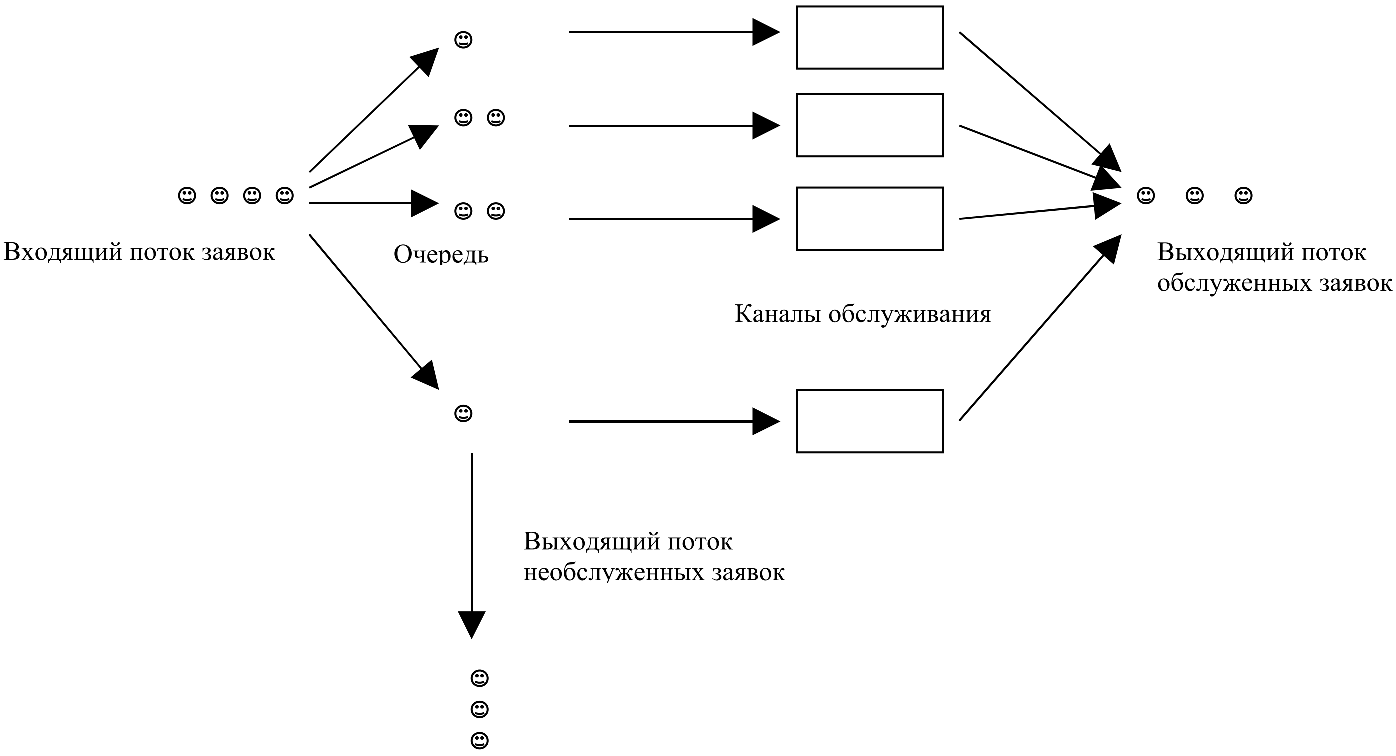


Рис. 5.1. Состав системы массового обслуживания

5.3. Типы задач, решаемых на базе теории массового обслуживания

Основной задачей теории массового обслуживания (ТМО) является установление зависимости между характеристиками СМО, организацией обслуживания и эффективностью функционирования системы, оцениваемой некоторыми количественными показателями; чаще всего, вероятностью обслуживания заявки. ТМО позволяет исследовать закономерности протекающих в СМО процессов и вырабатывать рекомендации для обоснования решений на их применение.

С помощью теории массового обслуживания можно

- оценивать возможности и эффективность составляющих подразделений фирмы,
- выявлять сильные и слабые стороны подсистем,
- намечать мероприятия по их совершенствованию,
- обосновывать рациональный состав систем для достижения требуемой эффективности,
- выдвигать требования к подсистемам обслуживания и обеспечения фирмы,
- проектировать системы массового обслуживания,

- разрабатывать ТТЗ на новые образцы,
- и др.

5.4. Классификация систем массового обслуживания

Как и при любой другой классификации, в выделении видов, типов, групп объектов первостепенное значение имеют признаки классификации. Типы систем массового обслуживания по различным признакам приведены в таблице 5.1 и на рис.5.2:

Таблица 5.1.

Типы систем массового обслуживания

№ п/п	***Признак классификации***	***Тип СМО***
1	Поведение заявки, заставшей в момент прихода в систему все каналы занятыми	С отказами
		С ограниченным временем ожидания
		С ожиданием
2	Дисциплина очереди	С приоритетом
		Без приоритета
3	Режим обслуживания	С концентрацией сил
		Без концентрации сил
4	Источник заявок	Замкнутая
		Разомкнутая
5	Число каналов обслуживания	Одноканальная
		Многоканальная
6	Состав каналов обслуживания	Однородная
		Неоднородная
7	Число фаз обслуживания	Однофазная
		Многофазная
8	Возможность восстановления каналов	С восстановлением каналов
		Без восстановления каналов

1. **По поведению заявки, заставшей в момент прихода в систему все каналы занятыми:**

В зависимости от объема буфера различают СМО с отказами, где нет буфера, СМО с ожиданием, где буфер не ограничен (например, очередь в магазин на улице) и СМО смешанного типа, где буфер имеет конечное число заявок. В СМО с отказами нет очереди, в СМО с ожиданием нет потерь заявок, в СМО смешанного типа то и другое возможно.

1.1. ***СМО с отказами***: если в момент прихода в систему все каналы заняты, заявка получает "отказ" и покидает систему;

1.2. ***СМО с ограниченным временем ожидания***: если в момент прихода в систему все каналы заняты, заявка становится в очередь и ждёт некоторое время, после чего или поступает на обслуживание или покидает систему необслуженной;

1.3. ***СМО с ожиданием***: если в момент прихода в систему все каналы заняты, заявка становится в очередь и ждёт до тех пор, пока не освободится один из каналов, который примет её на обслуживание.

2. По дисциплине очереди:

Иногда различают заявки по их приоритету, т.е. по важности. Заявки высокого приоритета обслуживаются в первую очередь. ***Абсолютный приоритет*** дает право прервать обслуживание менее важной заявки и занять ее место в приборе (или в буфере, если все приборы заняты столь же важными заявками). Вытесненная заявка либо теряется, либо поступает в буфер, где ждет дообслуживания. Иногда приходится возобновлять обслуживание вытесненной заявки с начала, а не продолжать с точки прерывания. Если заявка вытеснена из буфера, она, естественно, теряется. Примером заявки с абсолютным приоритетом является судно, получившее пробоину и нуждающееся в срочной разгрузке. В вычислительных системах абсолютным приоритетом обладают команды оператора. ***Относительный приоритет*** дает право первоочередного занятия освободившегося прибора. Он не дает право на вытеснение заявки из прибора или буфера. Лица, имеющие льготы при обслуживании в кассе, у врача и т.п., как правило, имеют относительный приоритет. Абсолютный и относительный приоритеты различаются и моментом действия: абсолютный реализуется в момент поступления, а относительный - в момент освобождения прибора.

2.1. В ***СМО с приоритетом*** некоторые заявки принимаются на обслуживание вне очереди. Иногда выделяют ***абсолютный*** (обслуживание какой-либо заявки прерывается и заявка с абсолютным приоритетом мгновенно поступает на обслуживание) и ***относительный*** (заявка с относительным приоритетом дожидается окончания обслуживания какой-либо заявки и лишь после этого поступает на обслуживание) приоритеты.

2.2. В ***СМО без приоритета*** все заявки находятся в равных условиях.

Различают фиксированные и динамические приоритеты. Фиксированные приоритеты чаще называют ***дисциплиной обслуживания***.

Дисциплина обслуживания задает порядок выбора из очереди в освободившийся прибор заявок одинакового приоритета. Выделим следующие дисциплины: ***FIFO (First Input - First Output)***: первым пришел - первым обслужен***, LIFO (Last Input - First Output)***: последним пришел - первым обслужен, ***RAND (Random):*** случайный выбор из очереди. В быту обычно действует дисциплина FIFO. Дисциплина LIFO реализуется в буфере, организованном по принципу стека. Такая дисциплина может оказаться целесообразной, например, при передаче информации, если ее ценность быстро падает со временем.

3. По режиму обслуживания:

3.1. В ***СМО с концентрацией сил*** на обслуживание одной заявки может назначаться несколько каналов;

3.2. В ***СМО без концентрации сил*** на обслуживание одной заявки назначается только один канал.

4. По источнику заявок:

4.1. В ***замкнутых СМО*** источник включается в систему, а общее число заявок конечно;

4.2. В ***разомкнутых СМО*** источник не входит в систему, а общее число заявок не ограничено.

Разомкнутая сеть – это такая отрытая сеть, в которую заявки поступают из внешней среды и уходят после обслуживания из сети во внешнюю среду. Другими словами, особенностью разомкнутой СМО является наличие одного или нескольких независимых внешних источников, которые генерируют заявки, поступающие в сеть, независимо от того, сколько заявок уже находится в сети. В любой момент времени в РСМО может находиться произвольное число заявок (от 0 до Ґ).

В замкнутой СМО циркулирует фиксированное число заявок, а внешний независимый источник отсутствует. Исходя из физических соображений, в ЗСМО выбирается внешняя дуга, на которой отмечается псевдонулевая точка, относительно которой могут измеряться временные характеристики.

5. По числу каналов обслуживания: …

6. По составу каналов обслуживания:

6.1. В ***однородных СМО*** все каналы обслуживания одинаковы;

6.2. В ***неоднородных СМО*** все каналы обслуживания обладают различными характеристиками.

В однородной сети циркулируют заявки одного класса. И, наоборот, в неоднородной сети могут присутствовать заявки нескольких классов. Заявки относятся к разным классам, если они различаются хотя бы одним из следующих атрибутов:

- - законом распределения длительности обслуживания в узлах;
- - приоритетами;
- - маршрутами (путями движения заявок в сети).

7. По числу фаз обслуживания:

7.1. В ***однофазных СМО*** обслуживание заключается в выполнении какой-либо одной операции одним каналом;

7.2. В ***многофазных СМО*** обслуживание заключается в выполнении нескольких последовательных операций, возможно, несколькими каналами.

8. По возможности восстановления каналов:

8.1. В ***СМО с восстановлением каналов*** отдельные каналы могут временно выходить из строя, но через некоторое время вновь вступают в работу;

8.2. В ***СМО без восстановления каналов*** отдельные каналы могут быть выведены из строя и в дальнейшей работе не участвуют.

9. По характеру интенсивности потоков заявок:

9.1. Если интенсивности потоков заявок в узлах сети связаны нелинейной зависимостью, то сеть называется ***нелинейной;***

9.2. Сеть всегда ***линейна***, если в ней заявки не теряются и не размножаются.

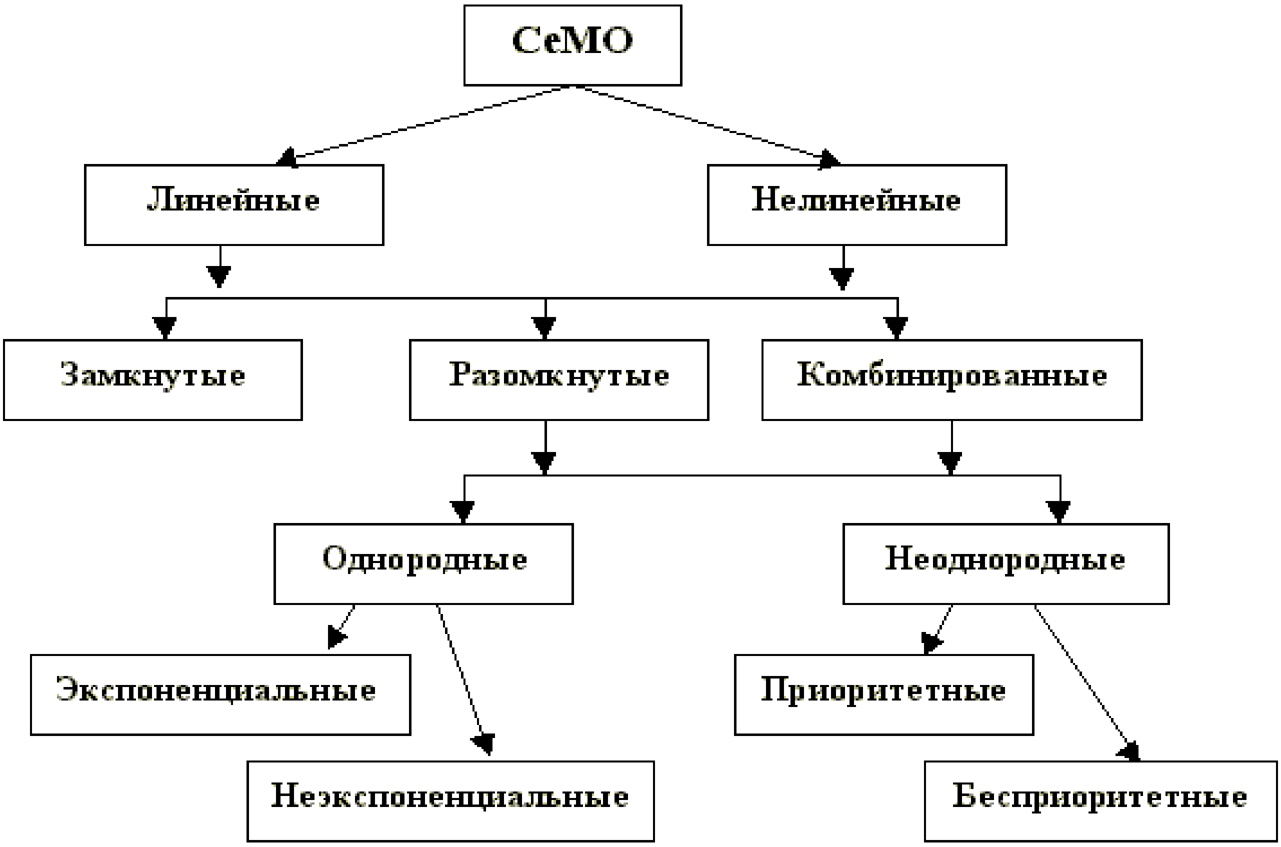


Рис. 5.2. Типы систем массового обслуживания

Для обозначения типа СМО Кендаллом и Башариным предложена система обозначений, имеющих вид D|Q|X|W. Ндесь D – обозначение закона распределения вероятностей для интервалов поступления заявок, Q – обозначение закона распределения вероятностей для времени, X – число каналов обслуживания, W – число мест в очереди.

Обозначение законов распределения в позициях D и Q выполняется обычно буквами из следующего списка:

- **M** – экспоненциальное,
- **Ek** – эрланговское порядка k,
- **R** – равномерное,
- **D** – детерминированное (постоянная величина),
- **G** – произвольное (любого вида) и т.д.

Если число мест в очереди не ограничено, то позиция Ξ не указывается.

Например, M | M | 1 означает простейшую СМО (оба распределения экспоненциальные, канал обслуживания один, очередь не ограничена), а обозначение R | D | 2 | 100 соответствует СМО с равномерным распределением интервалов поступления требований, фиксированным временем их обслуживания, двумя каналами и 100 местами в очереди. В этой СМО заявки, приходящие в моменты, когда все места в очереди заняты, покидают систему (т.е. теряются).

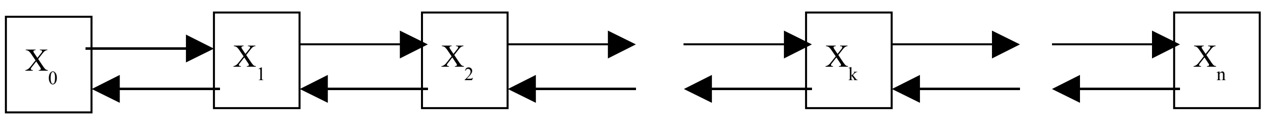
Если в СМО поступает n потоков заявок (у каждого потока свой приоритет), то D и Q приписывают число n в виде индекса. Например, M2 | M2 | 1 обозначает СМО с двумя потоками заявок, на входе имеющими экспоненциальное распределение, с экспоненциальным временем обслуживания, своим для каждого потока. В системе M2 | M | 1 время обслуживания всех заявок имеет одно и то же распределение. В случае нескольких входных потоков, имеющих разные приоритеты, необходимо дополнительно указывать типы приоритетов - абсолютные, относительные.

5.5. Условия работы и характеристики систем массового обслуживания

5.5.1. СМО с отказами

На вход системы, состоящей из n каналов обслуживания, поступает простейший поток заявок с плотностью λ. На обслуживание каждой заявки назначается один канал из числа свободных. Время обслуживания заявки случайно и подчиняется показательному закону распределения с параметром μ Заявка, заставшая в момент поступления все каналы занятыми, получает отказ в обслуживании и покидает систему.

Размеченный граф состояний такой системы имеет вид:



Вероятность того, что система находится в состоянии $X_к$, то есть, что в системе находится k заявок и, соответственно, k каналов заняты, вычисляется по формуле Эрланга:

$$P_k = \frac{\frac{\alpha^k}{k!}}{\sum_{m=0}^{n} \frac{\alpha^m}{m!}}, k = 0 - n$$

Значения вероятностей P_k для различных условий сведены в таблицы.

Параметр α называется ***приведенной плотностью входящего потока заявок*** и представляет собой среднее число заявок, поступивших в систему за среднее время обслуживания одной заявки.

Если все каналы обслуживания заняты, т.е. k = n, то очередная заявка получит отказ, вероятность этого вычисляется по формуле:

$$P_{отк} = \frac{\frac{\alpha^n}{n!}}{\sum_{m=0}^{n} \frac{\alpha^m}{m!}} = \varphi(n, \alpha)$$

Вероятность обслуживания как вероятность противоположного события рассчитывается по формуле: $P_{обс} = 1 - P_{отк} = 1 - \varphi(n, \alpha) = q$.

Вероятность обслуживания заявки, она же – ***относительная пропускная способность системы***, является одной из основных характеристик данной СМО; остальные характеристики СМО этого типа приведены в таблице:

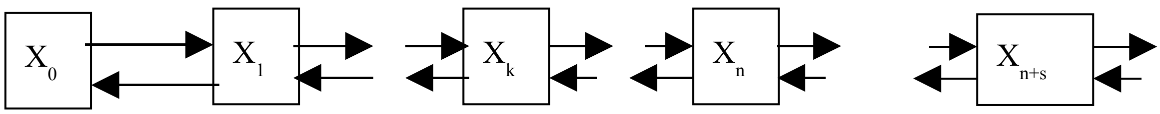
- ***Относительная пропускная способность системы***, как явствует из названия, показывает долю заявок, которые могут быть обслужены системой в данных условиях.
- ***Абсолютная пропускная способность системы*** показывает среднее число заявок, обслуживаемых системой в единицу времени $Q = \lambda * P_{обс} = \lambda * q$.
- ***МОЖ числа занятых каналов*** – среднее количество занятых каналов $M_з = \alpha * P_{обс}$.
- ***Коэффициент загрузки системы*** – доля занятых каналов от их общего количества $K_з = \alpha * P_{обс} / n$.

- ***Коэффициент простоя системы*** - доля свободных каналов от их общего количества $K_п = 1 - K_з = 1 - \alpha * P_{обс} / n$.

5.5.2. СМО с ограниченным временем ожидания

На вход системы, состоящей из n каналов обслуживания, поступает простейший поток заявок с плотностью λ. На обслуживание каждой заявки назначается один канал из числа свободных. Время обслуживания заявки случайно и подчиняется показательному закону распределения с параметром μ Заявка, заставшая в момент поступления все каналы занятыми, становится в очередь и ожидает обслуживания в течение случайного времени, распределенного по показательному закону с параметром ν. Если за время ожидания обслуживание не началось (ни один канал не освободился), то заявка покидает систему необслуженной; но если обслуживание началось, то оно доводится до конца независимо от времени пребывания заявки в очереди.

Размеченный граф состояний такой системы имеет вид:



Вероятность того, что система находится в состоянии $X_к$, то есть, что в системе находится k заявок и, соответственно, k каналов заняты, вычисляется по формуле Эрланга:

$$P_k = \frac{\frac{\alpha^k}{k!}}{\sum\limits_{m=0}^{n} \frac{\alpha^m}{m!} + \frac{\alpha^n}{n!} \sum\limits_{s=1}^{\infty} \frac{\alpha^s}{\prod\limits_{m=1}^{s} (n + m\beta)}}, k = 0 - n$$

Вероятность того, что система находится в состоянии X_{n+s}, то есть, что в системе находится n+s заявок и, соответственно, n каналов заняты и, кроме того, s заявок стоят в очереди, тоже вычисляется по формуле Эрланга:

$$P_{n+s}=\frac{\dfrac{\alpha^{n+s}}{n!\prod\limits_{m=1}^{s}(n+m\beta)}}{\sum\limits_{m=0}^{n}\dfrac{\alpha^{m}}{m!}+\dfrac{\alpha^{n}}{n!}\sum\limits_{s=1}^{\infty}\dfrac{\alpha^{s}}{\prod\limits_{m=1}^{s}(n+m\beta)}},k=0-n,s\geq 1$$

Параметр β называется ***приведенной плотностью уходов заявок из очереди необслуженными*** и представляет собой среднее число заявок, уходящих из очереди необслуженными за среднее время обслуживания одной заявки, при условии, что в очереди в среднем одна заявка.

Вероятность обслуживания заявки, которая называется также относительной пропускной способностью q вычисляется через вероятность необслуживания заявки $P_н$:

$P_{обс} = 1 – P_н = 1 – \psi(n, \alpha, \beta) = q$

Значения вероятности необслуживания заявки $P_н = \psi(n, \alpha, \beta)$ сведены в таблицу.

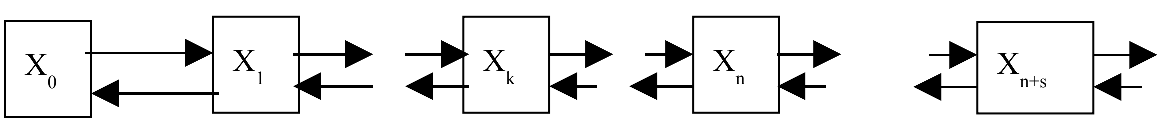
Остальные характеристики СМО этого типа приведены в таблице:

- ***МОЖ длины очереди*** = средняя длина очереди $m_s = P_н\ \alpha / \beta$
- ***МОЖ времени пребывания заявки в очереди*** $t_{оч} = m_s / \lambda = P_н / \nu$

5.5.3. СМО с ожиданием

Особенностью функционирования систем данного типа по сравнению со СМО с ограниченным временем ожидания является то, что заявка, заставшая в момент поступления все каналы занятыми, становится в очередь и ожидает обслуживания до тех пор, пока не освободится какой-либо канал. То есть, в СМО с ожиданием обслуживаются все заявки, и поток заявок, уходящих из очереди необслуженными отсутствует ($\nu = 0$)

Размеченный граф состояний такой системы имеет вид:



Условием существования в системе установившегося режима является $\alpha < n$, то есть, среднее число заявок, поступающих в систему за среднее время обслуживания одной заявки не должно превышать количества каналов в системе.

Вероятность того, что система находится в состоянии $X_к$, то есть, что в системе находится k заявок и, соответственно, k каналов заняты, вычисляется по формуле Эрланга:

$$P_k = \frac{\frac{\alpha^k}{k!}}{\sum_{m=0}^{n} \frac{\alpha^m}{m!} + \frac{\alpha^n}{n!}\frac{\alpha}{n-\alpha}}, k = 0 - n$$

Вероятность того, что система находится в состоянии X_{n+s}, то есть, что в системе находится n+s заявок и, соответственно, n каналов заняты и, кроме того, s заявок стоят в очереди, тоже вычисляется по формуле Эрланга:

$$P_{n+s} = \frac{\frac{\alpha^n}{n!}\left(\frac{\alpha}{n}\right)^s}{\sum_{m=0}^{n} \frac{\alpha^m}{m!} + \frac{\alpha^n}{n!}\frac{\alpha}{n-\alpha}}, k = 0 - n, s \geq 1$$

В соответствии с особенностями функционирования систем данного типа на первый план выдвигаются следующие показатели эффективности:

- ***Вероятность немедленного обслуживания***

$$P_{но} = 1 - \frac{\varphi(n,\alpha)}{1 - \frac{\alpha}{n}\left[1 - \varphi(n,\alpha)\right]}$$

- ***Среднее число заявок в системе***

$$R = m_s + M_з = \alpha\frac{1 - P_{но}}{n-\alpha} + \alpha = \alpha\left(1 + \frac{1 - P_{но}}{n-\alpha}\right)$$

- ***Среднее время пребывания заявки в системе***

$$t_{преб} = t_{оч} + t_{обс} = \frac{R}{\lambda} = t_{обс}\left(1 + \frac{1 - P_{но}}{n-\alpha}\right)$$

Остальные характеристики СМО этого типа приведены в таблице 5.2.

Таблица 5.2.

Характеристики систем массового обслуживания

Показатель	СМО с отказами	СМО с огр вр ож	СМО с ожид
Вероятность обслуживания заявки = Относительная пропускная способность	$P_{обсл} = 1 - \varphi(n, \alpha)$	$P_{обсл} = 1 - \psi(n, \alpha, \beta)$	
Вероятность немедленного обслуживания			$P_{но} = \sum_{k=0}^{n-1} P_k$
Абсолютная пропускная способность	$Q = \lambda\, P_{обсл}$	$Q = \lambda\, P_{обсл}$	$Q = \lambda$
Среднее число занятых каналов	$M_з = \alpha\, P_{обсл}$	$M_з = \alpha\, P_{обсл}$	$M_з = \alpha$
Коэффициент загрузки системы	$K_з = \alpha\, P_{обсл} / n$	$K_з = \alpha\, P_{обсл} / n$	$K_з = \alpha / n$
Коэффициент простоя системы	$K_п = 1 - \alpha\, P_{обсл} / n$	$K_п = 1 - \alpha\, P_{обсл} / n$	$K_п = 1 - \alpha / n$
Средняя длина очереди		$m_s = \alpha(1 - P_{обсл}) / \beta$	$m_s = (1 - P_{но})/(n/\alpha - 1)$
Среднее число заявок в системе			$R = m_s + M_з$
Среднее время пребывания заявки в очереди		$t_{оч} = t_{ож}\,(1 - P_{обсл})$	$t_{оч} = t_{обс}(1 - P_{но})/(n - \alpha)$
Среднее время пребывания заявки в системе			$t_{преб} = t_{оч} + t_{обс}$

6. Методы оптимизации технологических процессов. Критерии оптимизации и их выбор при решении различных задач моделирования технологических процессов

В планировании повседневной деятельности менеджера предприятий швейной промышленности зачастую встают задачи поиска рациональных вариантов распределения ограниченного количества персонала, средств, материалов, усилий. Сложность постановки подобных задач заключается, прежде всего, в определении математической интерпретации цели, которой нужно достичь в ходе решения задачи. Например, в процессе обеспечения предприятий оборудованием, сырьём и другим имуществом можно поставить одну из целей: добиться наименьших транспортных расходов при доставке грузов потребителям; максимально удовлетворить их потребности; произвести подвоз в минимальные сроки.

В этой связи при первичной постановке той или иной задачи необходимо определить критерий эффективности. Для задач снабжения имуществом, относящихся к классу экстремальных, в качестве критерия эффективности следует использовать максимум или минимум целевой функции.

Важная составная часть математической модели - наличие ограничений (условий), которые должны соблюдаться в ходе решения задачи. Они могут иметь самый различный характер. Так в задаче по распределению ресурсов ограничениями являются выполнение требований о неснижаемых запасах, первоочередного обеспечения потребителей, выполняющих главную задачу, и др.

6.1 Основная задача и основные понятия математического программирования

Математическое программирование — математическая дисциплина, изучающая экстремумы функций и разрабатывающая методы нахождения их при наличии или отсутствии ограничений на переменные.

Содержание математического программирования составляют теория и методы решения задач о нахождении экстремумов (наибольших и наименьших значений) функций без ограничений или при ограничениях на аргументы, заданных в виде линейных или нелинейных равенств или неравенств.

Наименование "математическое программирование" (от английского "***mathematical programming***") объясняется тем, что в итоге решения задач выбирается или вырабатывается наиболее рациональная программа действий, обеспечивающая достижение наилучших результатов.

В формализованном виде ***основная задача математического программирования*** может быть сформулирована следующим образом:

Найти значения переменных $x_1, x_2, \dots, x_n$, сообщающих функции

$F = f(x_1, x_2, \dots, x_n) \to \min (\max)$

наименьшее (наибольшее) значение при ограничениях вида

$\varphi_i(x_1, x_2, \dots, x_j, \dots, x_n) \le b_i,$

$x_j \ge 0,\ i = 1 - m;\ j = 1 - n.$

В математическом программировании под основной задачей математического программирования понимают задачу поиска именно минимума целевой функции.

Любую задачу математического программирования можно свести к основной задаче, изменив при необходимости знак целевой функции на противоположный.

Иногда некоторые из неравенств могут вырождаться в равенства, такие ***ограничения*** называются ***активными***.

Функция F(X) обычно является главным (основным) показателем эффективности рассматриваемой операции и называется ***целевой функцией.***

Ограничения, как правило, выражают условия проведения операции; в записи функций $\varphi_i(X)$ обязательно присутствуют параметры обстановки.

Вектор $X = (x_1, x_2, \dots , x_j, \dots , x_n)$, отвечающий ограничениям, называется ***допустимым решением задачи математического программирования.*** Допустимое решение, удовлетворяющее требованиям минимизации (максимизации) целевой функции, называется ***оптимальным решением*** и обозначается X^0 или X^*. В зависимости от смысла задачи решение могут называть ***планом (допустимым, оптимальным)***.

6.2.Классификация задач математического программирования

В качестве основного признака классификации задач математического программирования, в первую очередь, принимают характер целевой функции и ограничений на аргументы. В зависимости от вида целевой функции и ограничений на аргументы в математическом программировании выделяют следующие основные разделы:

- ***Линейное программирование*** (ЛП) - целевая функция линейна, ограничения задаются системой линейных равенств и/или неравенств. В свою очередь, в линейном программировании существуют классы задач, структура которых позволяет создать специальные методы их решения, выгодно отличающиеся методов решения задач общего характера. Так в линейном программировании появился раздел так называемых "транспортных" задач.
- ***Нелинейное программирование*** - нелинейны целевая функция и/или ограничения. Нелинейное программирование принято подразделять следующим образом.

- ***Выпуклое программирование*** - когда выпукла целевая (если рассматривается задача ее минимизации) и выпукло множество, на котором решается экстремальная задача.
- Наряду с этим весьма часто встречаются задачи ***квадратичного программирования,*** когда целевая функция представляет собой квадратичную форму параметров управления, а функции ограничений линейны.
- Важным разделом математического программирования является ***целочисленное программирование -*** когда на переменные накладывается условие целочисленности.

Следует отметить некоторые специфические особенности указанных задач линейного и выпуклого программирования.

Во-первых, к задачам математического программирования неприменимы, как правило., методы классического анализа для отыскания условных экстремумов, так как даже в наиболее простых задачах - линейных - экстремум .достигается в угловых точках границы области ограничений, т.е. в точках, где нарушается дифференцируемость. Наиболее сильный метод решения экстремальных задач в классическом анализе - метод множителей Лагранжа - разработан для случая, когда множество условий задается системой уравнений, а не системой неравенств.

Другой специфической особенностью является то, что в практических задачах число переменных и ограничений столь велико, что если просто перебирать все точки, "подозреваемые в экстремальности", например, все угловые точки множества условий, то даже современная вычислительная машина не в состоянии справиться с этой задачей в разумные сроки.

Специфика задач математического программирования привела к созданию специальных, где это возможно, аналитических: методов решения, а при их отсутствии - эффективных численных способов приближенного решения. Рассмотрению некоторых из них посвящены последующие разделы данной лекции.

6.3. Оптимизация решений по обеспечению предприятий швейной промышленности и организации их работы методами логистики (на основе линейного программирования. Критерии оптимизации и их выбор при решении различных задач моделирования технологических процессов

Впервые постановка задачи линейного программирования была сформулирована советским математиком Л.В. Канторовичем в 1939 году в его работе "Математические методы в организации и планировании производства", там же приведен один из методов решения – метод разрешающих множителей. В 1949 году американским ученым Дж. Б. Данцигом был разработан один из наиболее общих методов решения задач линейного программирования — симплекс-метод, называемый ещё иногда "методом последовательного улучшения плана". В 1931 году венгерским математиком Э.Эгервари был разработан достаточно простой и удобный метод для решения транспортных задач, получивший впоследствии название "венгерский". Кроме того, для решения задач линейного программирования существуют такие методы, как метод северо-западного угла, метод потенциалов, метод наименьшего элемента, метод запрещенных клеток ...

Основной задачей линейного программирования (ОЗЛП) называется задача, в которой необходимо минимизировать линейную целевую функцию

$$F(x_j) = \sum_{i=1}^{n} C_j x_j + C_0$$

при условии активных, то есть представленных в виде равенств, ограничений

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + b_j = 0,$$
$$x_{ij} \geq 0, i = 1 - m, j = 1 - n.$$

Задачу линейного программирования, в которой требуется найти максимум целевой функции и/или ограничения заданы неравенствами, можно привести к форме ОЗЛП следующим образом:

- Ввести вспомогательную целевую функцию Z = -F и её минимизировать;
- От ограничений – неравенств перейти к равенствам путем введения дополнительных неотрицательных переменных $\omega \geq 0$.

6.3.1. Задача о назначениях, т.е. задача распределения ресурсов без сосредоточения усилий

Перед руководством ателье поставлена задача выполнить n задач одинаковой важности силами m сотрудников (инструментов, приборов, аппаратов). Вероятности выполнения задач, определяемые их типом и спецификой условий, а также техническими характеристиками приборов (сотрудников, инструментов, аппаратов), заданы матрицей Pij:

$$\left(P_{ij}\right) = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \dots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \dots & p_{2n} \\ \dots & \dots & p_{ij} & \dots \\ p_{m1} & p_{m2} & \dots & p_{mn} \end{pmatrix}$$

где i – номер (тип) аппарата (сотрудника, инструмента), i = 1 – m,

j – номер (тип) задачи, j = 1 – n,

p_{ij} – вероятность выполнения i-м сотрудником j-й задачи.

Условия таковы, что на выполнения одной задачи может быть назначено не более одного аппарата (сотрудника, инструмента).

Требуется найти наилучший вариант распределения аппаратов (сотрудников, инструментов), т.е. определить, какому сотруднику (аппарату, инструменту) какую задачу поручить, чтобы эффективность их решения была наибольшей.

Так как число выполненных задач является случайной величиной и все задачи имеют одинаковую важность, то в качестве показателя возможностей ателье целесообразно выбрать математическое ожидание числа выполненных задач. Для формализации задачи введем параметры управления - переменные xij:

1, если i-й сотрудник (аппарат) назначен на выполнение j-й задачи;

x_{ij} =

0, в противном случае.

Тогда целевая функция - математическое ожидание числа выполненных задач - запишется в следующем виде:

$$M(X) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} xij * pij$$

На переменные xij условиями задачи накладываются ограничения:

$$\sum_{i=1}^{m} xij \le 1,$$

$$\sum_{j=1}^{n} xij \le 1,$$

$$xij \in [0,1], i = 1 - m, j = 1 - n.$$

Первая группа неравенств выражает условие, что на решение каждой задачи назначается не более одного аппарата (сотрудника, инструмента). Это означает, что в матрице X в каждом столбце, соответствующем номеру задачи j, j = 1 – n, будет стоять не более одной единицы.

Вторая группа неравенств выражает условие, что каждому сотруднику (аппарату, инструменту) назначается не более одной задачи. Это означает, что в матрице X в каждой строке будет стоять не более чем по одной единице.

Сформулированная выше задача называется ***задачей о назначениях в стандартной форме***.

Если число задач равно числу аппаратов (сотрудников, инструментов), т.е. n = m, то система приведенных выше неравенств ограничений обращается в систему равенств:

$$\sum_{i=1}^{m} xij = 1,$$

$$\sum_{j=1}^{n} xij = 1,$$

$$xij \in [0,1], i = 1 - m, j = 1 - n.$$

Такая задача называется ***задачей о назначениях в открытой форме***. Отметим, что как целевая функция ( ), так и ограничения ( ) или ( ) являются линейными функциями переменных x_{ij}.

Таким образом, задачу распределения ресурсов без сосредоточения усилий можно изложить в форме задачи линейного программирования:

максимизировать

$$M(X) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} xij * pij \xrightarrow[x]{} \max$$

при ограничениях на переменные xij:

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = 1,$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1,$$

$$x_{ij} \in [0,1], i = 1 - m, j = 1 - n, m = n$$

Возможны формулировки задачи о назначениях, при которых требуется минимизировать суммарные затраты на выполнение всего комплекса работ. В этом случае целевая функция имеет вид:

$$M(X) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} xij * cij \xrightarrow[x]{} \min$$

при тех же ограничениях, что и в предыдущих задачах.

Пример 6.1: Фирма получила заказ на разработку пяти фасонов верхней женской одежды для будущего бьеннале. Для выполнения этого заказа решено привлечь пятерых наиболее опытных мастеров (конструкторов); каждый из них должен разработать один фасон; в таблице приведены оценки времени (в часах), потребного каждому для выполнения каждого из заказов:

Таблица 6.1

Оценка времени (в часах), потребного для выполнения заказов

	1	*2*	*3*	*4*	*5*
ФИО-1	46	59	24	62	67
ФИО-2	47	56	32	55	70
ФИО-3	44	52	19	61	60
ФИО-4	47	59	17	64	73
ФИО-5	43	65	20	60	75

Требуется так распределить заказы между мастерами, чтобы общее (суммарное) время на выполнение всех заказов было минимальным.

Решение: решая задачу одним из методов линейного программирования, получим следующий план распределения работ между исполнителями (матрицу X*):

Таблица 6.2

План распределения работ между исполнителями

	1	*2*	*3*	*4*	*5*
ФИО-1	0	0	0	0	**1**
ФИО-2	0	0	0	**1**	0
ФИО-3	0	**1**	0	0	0
ФИО-4	0	0	**1**	0	0
ФИО-5	**1**	0	0	0	0

Из предыдущей таблицы следует, что разработку модели (фасона) №5 следует поручить конструктору ФИО-1, а, например, модели (фасона) №2 следует поручить конструктору ФИО-3.

Значение целевой функции, общее (суммарное) время на выполнение всех заказов, составит M(X*) = 67 + 55 + 52 + 17 + 43 = 234 (часа).

6.3.2. Задача на оптимальное смешение

Задачи на оптимальное смешение актуальны при выборе наилучшего способа смешения ингредиентов для получения смеси с заданными свойствами. Считается, что стоимости составляющих известны, и требуется получить желаемую смесь с наименьшими затратами. Если нужно получить несколько смесей с одинаковыми ингредиентами, но с разными свойствами, то важным становится критерий максимальной прибыли.

Задача на выработку рецепта приготовления смеси формулируется следующим образом:

$$\text{минимизировать} \sum_{j=1}^{n} c_j * x_j \rightarrow \min,$$

при

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} * x_j \geq b_i, \ i = \overline{1-m},$$

$$x_j \geq 0, j = 1 - n.$$

где x_j – количество j – го ингредиента в смеси,

a_{ij} – количество i – го компонента в j - м ингредиенте,

c_j – стоимость единицы j - го ингредиента,

b_i – количество i – го компонента в смеси.

6.3.3. Задачи оптимального раскроя

Задача оптимального раскроя состоит в том, чтобы выбрать один или несколько способов раскроя материала и определить, какое количество материала следует раскраивать, применяя каждый из выбранных способов.

Выделяют два этапа решения задачи оптимального раскроя. На первом этапе определяют рациональные способы раскроя материала, на втором – решают задачу определения интенсивности использования выбранных способов раскроя.

Определение рациональных способов раскроя материала

Пусть из единицы материала можно изготовить заготовки нескольких видов k=1,…, q; i = 1, …, p – способ раскроя материала; a_{ik} – количество заготовок вида k, полученных при раскрое материала i – м способом.

Способ раскроя называется рациональным (оптимальным по Парето), если для любого другого способа раскроя i из соотношений $a_{ik} \geq a_{\upsilon k}$, k=1,…, q, следуют соотношения $a_{ik} = a_{\upsilon k}$, k=1,…, q.

Определение интенсивности использования рациональных способов раскроя

Возможны несколько вариантов моделей:

- Модель А – раскрой с минимальным расходом материала;
- Модель В – раскрой с минимальными отходами;
- Модель С – раскрой с учётом комплектации.

При этом вводятся обозначения:

i – способ раскроя единицы материала,

j – вид (тип) материала,

k – вид (тип) заготовки,

a_{jik} - количество заготовок вида k, полученных при раскрое единицы j - го материала i – м способом,

b_k - количество заготовок вида k в комплекте, поставляемом заказчику,

d_j – количество материала j – го вида,

x_{ji} – количество единиц j – го материала, раскраиваемых по i – му способу, т.е. интенсивность использования способа раскроя,

c_{ji} – величина отхода, полученного при раскрое единицы j - го материала i – м способом,

y – количество комплектов заготовок различного вида, поставляемых заказчику.

Модель А – раскрой с минимальным расходом материала

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{p} x_{ji} \to \min,$$

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{p} a_{jik}x_{ji} \geq b_k, k = 1,\dots,q,$$

$$x_{ji} \geq 0, j = 1,\dots,n; i = \dots, p.$$

Здесь целевая функция – минимум количества используемых материалов, ограничения – количество заготовок, необходимых для выполнения заказа.

Модель В – раскрой с минимальными отходами

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{p} c_{ji}x_{ji} \to \min,$$

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{p} a_{jik}x_{ji} = b_k, k = 1,\dots,q,$$

$$x_{ji} \geq 0, j = 1,\dots,n; i = \dots, p.$$

Здесь целевая функция – минимум отходов при раскрое материалов, ограничения – количество заготовок, необходимых для выполнения заказа.

Модель С – раскрой с учётом комплектации

$$y \to \max,$$

$$\sum_{i=1}^{p} x_{ji} \le d_j, j = 1,...,n,$$

$$\sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{p} a_{jik} x_{ji} \ge b_k y, k = 1,...,q,$$

$$y \ge 0, x_{ji} \ge 0, j = 1,...,n; i = ..., p.$$

Здесь целевая функция – максимум комплектов, включающих заготовки различных видов, ограничения – количество используемых материалов и количество заготовок, необходимых для формирования комплектов.

6.3.4. Задача минимизации целевого фонда

Фирма в определенные моменты времени должна выплачивать суммы по взятому ранее кредиту. Чтобы накопить эти суммы, можно создать целевой фонд, а средства из этого фонда использовать для срочных вкладов. Каждый срочный вклад характеризуется моментом времени вложения, сроком погашения и доходностью. Задача состоит в том, чтобы определить минимальный размер целевого фонда и выбрать те виды срочных вкладов, которые позволят сделать выплаты по займу.

Модель имеет следующий вид:

$$y \to \min,$$

$$y - \sum_{j \in G_t} x_j = 0, t = 0,$$

$$\sum_{j \in Q_t} (1 + r_j) x_j - \sum_{j \in G_t} x_j = d_t, t = 1,..., T - 1,$$

$$\sum_{j \in Q_t} (1 + r_j) x_j = d_t, t = T,$$

$$y \ge 0, x_j \ge 0, j = 1,..., n.$$

где y – размер целевого фонда, созданного в момент t = 0,

d_t – размер выплаты по займу, которую надо произвести созданного в момент t = 0,

j – индекс срочного вклада, j = 1, …, n,

r_j – доходность срочного вклада (процент по вкладу),

x_j – объем вложений по срочному вкладу j.

Здесь первое условие характеризует распределение целевого фонда по вкладам в нулевой момент времени; второе – соотношения, устанавливающие баланс между выплатами и вложениями; третье – условие выплаты по займу.

6.3.5. Транспортная задача по критерию стоимости

В ходе повседневной деятельности системы специально-технического обеспечения регионального объединения отрасли должны осуществлять организацию и проведение ремонта и восстановления техники и оборудования, а также восполнение потерь и расхода материальных средств. Необходимо разработать наиболее рациональный вариант распределения сил и средств для выполнения требуемого объема работ, а также поставок сырья и оборудования в сжатые сроки и с минимальными затратами. Для решения этой задачи разработаны так называемые транспортные задачи осуществления перевозок материальных средств.

Рассмотрим подробнее транспортную задачу, в которой главным показателем возможностей предприятия (эффективности операции) принимается суммарная стоимость всех перевозок.

В период подготовки к развёртыванию сети швейных ателье необходимо поставить имущество (сырьё или оборудование) одной и той же номенклатуры согласно их заявкам b_j, j = 1 - n. Имущество находится на m складах, запасы имущества на каждом складе a_i, i = 1 - m известны. Кроме того, известны стоимости доставки одной тонны имущества с i-го склада в j—е ателье, объединенные в матрицу $\| C_{ij} \|$.

$$\|Cij\| = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & c_{ij} & \dots \\ c_{m1} & \dots & \dots & c_{mn} \end{pmatrix}$$

Требуется разработать такой план снабжения ателье имуществом, чтобы общая стоимость всех перевозок была минимальной.

Для формализации задачи введем параметры управления x_{ij} – количество тонн имущества, перевозимого с i-го склада в j-е ателье. Тогда целевая функция – суммарная стоимость всех перевозок – запишется в виде:

$$F(X) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$$

В теории транспортных задач исходные точки маршрутов перевозок называются ***базами***, а пункты назначения – ***потребителями.***

Запишем математически ограничения на переменные x_{ij}.

Во-первых, общее количество имущества, доставленного всем потребителям с каждой базы, не может превышать запасов его на этой базе, то есть

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} \leq a_{ij}$$

Во-вторых, заявки потребителей должны быть удовлетворены полностью, то есть

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} \geq b_j$$

И, наконец, по своему физическому смыслу переменные x_{ij} не могут быть отрицательными

$x_{ij} \geq 0$, I = 1 – m, j = 1 – n.

Из этих выражений видно, что как целевая функция, так и ограничения являются линейными функциями переменных $x_{ij.}$ Следовательно, транспортная задача по критерию стоимости представляет собой задачу линейного программирования:

$$F(X) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \to \min$$

при ограничениях на переменные:

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} \le a_i, j = 1 - n$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \ge b_j, i = 1 - m$$

$$x_{ij} \ge 0, i = 1 - m, j = 1 - n.$$

Транспортная задача с фиксированными перевозками: Иногда объём перевозок между некоторыми пунктами бывает строго фиксирован; тогда в систему ограничений представленной выше задачи вводится дополнительное ограничение: $x_{ij} = v_{ij}$, где v_{ij} – заданный объём перевозок.

Транспортная задача с ограничениями на пропускную способность: Если объём перевозок между некоторыми пунктами i и j ограничен величиной w_{ij}, то вводится дополнительное ограничение: $x_{ij} \le w_{ij.}$

6.3.6. Транспортная задача по критерию времени

После сезонной вспышки активности по пошиву верхней одежды необходимо пополнить запасы сырья и принадлежностей в n однотипных ателье в количестве b_j, j = 1 – n, где n – номер ателье. Требуемое количество имущества можно получить со складов или реформируемых ателье, количество имущества в них a_i, i = 1 – n известно. Из оценки обстановки (состояние дорог, возможности транспортных средств) известны времена следования из i-го пункта отправления имущества в j-е ателье, сведенные в матрицу T_{ij}.

$$\|T_{ij}\| = \begin{Vmatrix} t_{11} & t_{12} & \dots & t_{1n} \\ t_{21} & t_{22} & \dots & t_{2n} \\ \dots & \dots & t_{ij} & \dots \\ t_{m1} & t_{m2} & \dots & t_{mn} \end{Vmatrix}$$

Требуется так спланировать маневр имуществом, чтобы возможности сети ателье по пошиву верхней одежды были восстановлены в минимально короткий срок.

Проведем формализацию задачи в предположении, что транспортных средств достаточно для осуществления любого плана и все перевозки начнутся одновременно. Пусть x_{ij} – количество имущества, планируемое к перевозке с i-й базы j-му потребителю. Введем функцию $E(x_{ij})$ такую, что

$$E(x_{ij}) = \begin{cases} 1...при...x_{ij} > 0, \\ 0...при...x_{ij} = 0. \end{cases}$$

В качестве показателя эффективности можно взять время осуществления самой длительной перевозки по данному варианту

$T(X) = \max\ \{t_{ij}\ E(x_{ij})\}$

Выбором варианта перевозок это время нужно минимизировать.

Ограничения на переменные x_{ij} аналогичны предыдущей задаче.

Итак, транспортная задача по критерию времени как задача линейного программирования формулируется следующим образом:

$T(X) = \max\ \{t_{ij}\ E(x_{ij})\} \rightarrow \min$

при ограничениях на переменные

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} \le a_i, j = 1 - n$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \ge b_j, i = 1 - m$$

$$x_{ij} \ge 0, i = 1 - m, j = 1 - n.$$

6.4. Методы безусловной одномерной оптимизации целевой функции

Основные классы задач и методы их решения

Использование математической модели оптимизации позволяет рассматривать задачу оптимизации как математическую.

Математическую модель задачи оптимизации можно представить в виде:

$$F(X, A, \varepsilon, \delta) \rightarrow extr \qquad (1)$$

$$\begin{cases} g_1(X, A, \varepsilon, \delta) \le 0 \\ g_m(X, A, \varepsilon, \delta) \ge 0 \end{cases} \qquad (2)$$

Случайные ε и неопределенные факторы δ могут отсутствовать в задаче оптимизации.

$X(x_1, x_2, ..., x_n)$ - вектор управляемых (независимых) переменных.

С математической точки зрения задача оптимизации заключается в поиске такого вектора $X^*(x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*)$, который удовлетворял бы всем ограничениям (2) и обращал в экстремум целевую функцию (1).

Универсальность и эффективность метода решения задачи оптимизации не существует. Способ ее решения зависит от числа независимых переменных, от числа ограничений, от аналитического вида целевой функции и от аналитического вида ограничений.

По этим признакам задачи математического моделирования и оптимизации делятся на классы, для каждого из которых разработаны более или менее эффективные методы решения.

Основные классы задач:

1)*одномерные задачи* оптимизации бывают:

- *условные* - имеют ограничение (2);
- *безусловные* - без ограничений, $X \in (-\infty; +\infty)$.

$$Y = F(x_1) \to extr \tag{1}$$

$$\begin{cases} g_1(x_1) \geq 0 \\ .... \\ g_m(x_1) = 0 \end{cases} \tag{2}$$

Методы решения данного класса задач зависят от аналитического вида функции (1). Целевая функция может быть одноэкстремальной или многоэкстремальной. Она может быть непрерывной или разрывной. Может быть не дифференцируемой или гладкой (т.е. дифференцируемой необходимое число раз).

В зависимости от особенностей задачи одномерной оптимизации существует *два метода их решения*:

- аналитический – для задач безусловной одномерной оптимизации;
- численный – для задач условной одномерной оптимизации.

2) *многомерные задачи*

$$Y = F(x_1, x_2, \dots x_n) \to extr \qquad (1)$$

$$\begin{cases} g_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \geq 0 \\ \dots\dots \\ g_m(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \end{cases} \qquad (2)$$

В зависимости от наличия ограничений (2) многомерные задачи бывают также:

- *условные*;
- *безусловные.*

В зависимости от вида ограничений в задачах условной оптимизации различают задачи с:

- ограничениями в виде равенств,
- ограничениями в виде неравенств,
- ограничениями в виде условий целочисленности,
- ограничениями в виде линейной функции,
- ограничениями в виде нелинейной функции.

Существуют различные *методы решения многомерных задач*:

1. аналитический;
2. численный;
3. специальные:
   a) метод линейного программирования;
   b) диссоциативно-шаговый метод;
   c) метод динамического программирования;
   d) метод нелинейного программирования и др.

Аналитический метод безусловной одномерной оптимизации

Этот метод состоит из необходимого и достаточного условия.

Необходимое условие первого порядка существования экстремума всюду дважды дифференцируемой функции F(x) является:

$$\frac{dF(x^*)}{dx} = 0 \qquad (1),$$

где x^* - точка экстремума.

Любая точка, в которой выполняется равенство (1) называется *стационарной*. Среди них могут быть точки минимума, максимума, перегиба (если линия вблизи точки лежит по обе стороны от касательной, то точка называется точкой перегиба).

Для выявления различия указанных точек применяют *достаточное условие* второго порядка.

1) если в точке x^* первые (n-1) целевой функции F(x)=0, а производная порядка n отлична от нуля, то:
   a) при нечетном n - в точке x^* будет точка перегиба;
   b) при четном n - в точке x^* будет точка локального минимума или максимума;
   c) если четная производная положительная, то x^* - минимум, если отрицательная, то x^* - максимум.

Необходимые условия используются для того, чтобы доказать неоптимальность точки. Если требуется доказать оптимальность точки, то обращаются к достаточному условию, которое является гарантией оптимума.

6.5. Методы безусловной оптимизации многомерной целевой функции

Аналитический метод безусловной многомерной оптимизации

$F = F(x_1, x_2, ..., x_n)$

Из математического анализа известны необходимые условия существования экстремума многомерной функции: если многомерная целевая функция $F(x) = F(x_1, x_2, ..., x_n)$ дифференцируема в точке X^*, то выполняется следующее соотношение

$$\frac{\partial F(X^*)}{\partial x_j} = 0 \qquad (1)$$

где j=1,2,…,n

Или в векторной форме:

$\nabla F(X^*) = 0$,

где ∇F - градиент.

$$\nabla F(x_1, x_2, ..., x_n) = (\frac{\partial F}{\partial x_1}; \frac{\partial F}{\partial x_2}; ...; \frac{\partial F}{\partial x_n})$$

X^*- стационарная точка.

Для выявления типа стационарной точки используется необходимое условие второго порядка, которое формулируется: если X^* соответствует локальному минимуму дважды дифференцируемой целевой функции F(X), то выполняется условие

$$\sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 F'(X^*)}{\partial x_i \partial x_j} * \left(x_i - x_i^*\right) * \left(x_j - x_j^*\right) > 0 \qquad (2)$$

где i=1,2,…,n, j=1,2,…,n или в векторной форме:

$$\left|\left(X - X^*\right)^T * \mathbf{H}(X^*) * (X - X^*)\right| > 0$$

$\mathbf{H}(X^*)$ – матрица Гёссе, вычисляется в точке X^*, она состоит из вторых частных производных. Условие (2) означает неотрицательную определенность матрицы Гёссе. Для исследования матрицы Гёссе на положительную или отрицательную определенность используют критерий Сильвестра. Согласно этому критерию условие положительной определенности матрицы Гёссе:

$$\mathbf{H}(x) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1i} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2i} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{j1} & a_{j2} & ... & a_{ji} \end{vmatrix}$$

i=j=1,2,…,n

$$\det_1 = a_{11} > 0$$

$$\det_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0 \qquad (3)$$

$$\det_3 > 0 \ldots$$

X^* - минимум.

Условие отрицательной определенности является выполнение неравенств: $\det_1 = a_{11} < 0$

$$\det_2 > 0 \qquad (4)$$

$$\det_3 < 0$$

X^* - максимум.

Если матрица Гёссе не определена, т.е. не выполняется условие (3) и (4), то X^* не является экстремумом.

Для решения задач аналитическим методом возникает ряд трудностей:

a. Аналитическое представление функции может быть весьма сложным, что затрудняет отыскание частных производных.

b. С увеличением размерности задачи вычислительная процедура резко усложняется, т.к. в этом случае необходимо решить систему уравнений полученных после приравнивания к нулю частных производных.

c. При решении задач часто встречаются многоэкстремальные целевые функции; в этом случае система уравнений имеет большое количество решений. Отыскание всех решений является сложным, т.к. для каждой точки необходимо находить матрицу Гёссе, т.е. вторые частные производные.

d. На практике часто встречаются условия условной оптимизации, т.е. с ограничениями, при этом экстремумы целевой функции могут не входить в область допустимых значений.

e. В практических задачах область целевой функции является дискретной (это в том случае, когда в качестве *У* выступают объекты (машины, люди)), поэтому целевая функция задана на дискретном множестве точек, а все методы отыскания экстремума, связанные с необходимостью определения производных, используют непрерывность функции.

Алгоритмы численных методов

Алгоритмы численных методов отличаются друг от друга способом направления и шага поиска.

1. если продолжение поиска оказывается не эффективным или приращение функции $\Delta F = \left|F(x^{k+1}) - F(x^k)\right|$ оказывается малым. Точка X, в которой происходит остановка поиска рассматривается как точка экстремума, если для точки X с необходимой точностью выполняется условие точки экстремума (равенство градиентов

нуля) и положительность или отрицательность определителей матрицы Гёссе, то точка X^* принимается за решение задачи.

2.если данное условие не выполняется, то необходимо проанализировать причины остановки и выбрать другой алгоритм.

Алгоритм симплекс-метода

Симплексом в n-мерном пространстве называют выпуклый многогранник с минимальным возможным числом вершин n+1.

Симплекс называется *правильным*, если его все ребра равны.

Алгоритм:

1. выбирается правильный симплекс, привязанный к начальной точке поиска.
2. определяются вершины симплекса с наихудшим значением целевой функции, исключают эту вершину и вводят новую вершину, получают новый симплекс F(c) – наихудшее значение.
3. симплекс начинает вращаться вокруг одной из своих вершин. В этом случае сжимается длина ребра симплекса и поиск продолжается из наилучшей найденной точки. Сжатие длины симплекса происходит до заданной величины точности поиска ε, точка, которая находится в наилучшей из вершин симплекса, является точкой экстремума.

7. Решения задач линейного программирования

7.1. Решение задач линейного программирования графоаналитическим методом

Рассмотрим физико-геометрическую интерпретацию задачи линейного программирования. Приравняем целевую функцию некоторой переменной с параметром t:

$$F = \sum_{j=1}^{n} C_j * x_j + C_0 = kt$$

где t – константа, k > 0.

Это выражение представляет собой уравнение плоской волны, которая перемещается с изменением параметра t. При фиксированном t = t получим поверхность уровня: для п = 2 – прямая; для п =3 – плоскость; для n > 3 - гиперплоскость. В частном случае для простоты параметр t можно рассматривать как время.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n \geq b_1 \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n \geq b_2 \\ ... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n \geq b_m \\ x_j \geq 0, j = 1,2,...,n \end{cases} \quad (1)$$

$$F = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n \to \min \quad (2)$$

(1) – ограничения, которые являются линейными уравнениями;

(2) – целевая функция.

Итак, выражения (1) характеризуют область ограничений на переменные, целевая функция (2) - поверхность уровня, перемещая которую в области ограничений найдём точку, соответствующую её экстремуму. Отсюда вытекает идея графоаналитического метода решения задач линейного программирования.

Графический метод достаточно прост и нагляден, но этим методом могут быть решены сравнительно простые задачи, когда число переменных равно 2. В этом случае каждое пространство ограничений представляет собой полуплоскость, пересечение которых образует область ограничений. Все точки этой области являются допустимыми решениями задачи. В теории линейного программирования показано, что *оптимальное решение лежит на границе области, чаще всего в одной из ее вершин.*

Таким образом, ***графический метод решения задач линейного программирования*** заключается в следующем:

- в декартовой системе координат с осями X1 и X2 построить область ограничений и график целевой функции;
- поступательно перемещая линию графика целевой Функции в направлении ее градиента (или антиградиента) до тех пор, пока она еще находится в области ограничений, найти оптимальное решение, соответствующее max (min) целевой функции;
- вычислить экстремальное значение целевой функции.

При этом в зависимости от формы и взаимного расположения области ограничений и целевой функции возможны следующие варианты (рис 7.1):

- а) область ограничений не замкнута, в этом случае задача может не иметь оптимального решения;
- б) график целевой функции и одна из границ области ограничений параллельны, задача имеет бесконечное множество решений, т.к. оптимальным решением является любая точка отрезка ВС;
- в) задача имеет единственное решение в точке В.

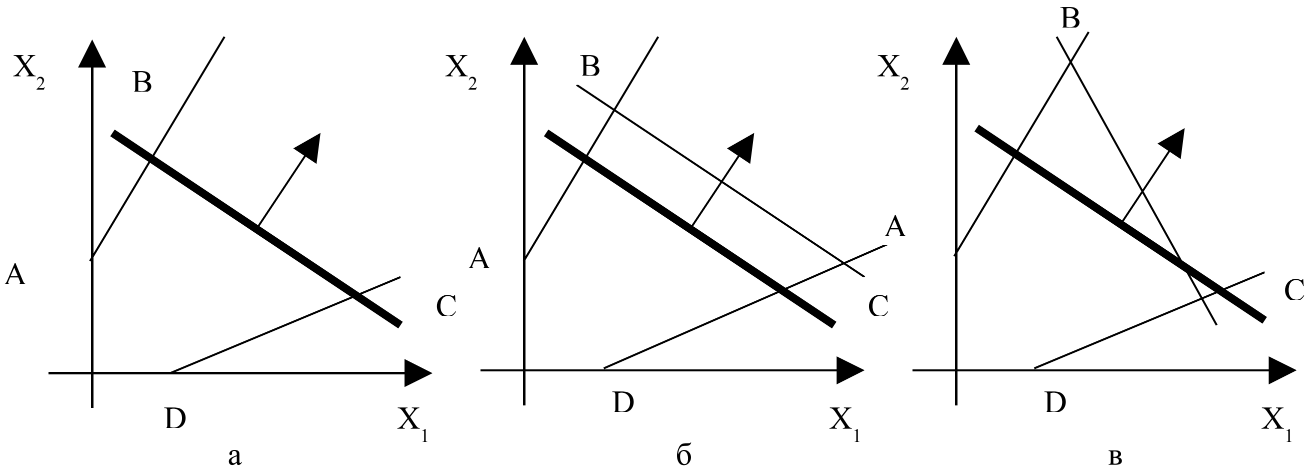


Рис.7.1 Графический метод решения задач линейного программирования

Пример 7.1

Минимизировать целевую функцию, представляющую собой линейную форму

$F(X) = 2x_1 + x_2$

при ограничениях на её аргументы

$$\begin{cases} x_1 \le 10, \\ x_2 \le 6, \\ 8x_1 + 12x_2 \ge 100. \end{cases}$$

Решение задачи:

1. Построение области ограничений на переменные.

Первые два выражения графически представляют собой полуплоскости, параллельные "другой" оси. Ребро же полуплоскости $8x_1 + 12x_2 \ge 100$ построить просто: найти точки пересечения его с осями координат, для чего поочередно приравнять нулю одну из них. Например, если $x_1 = 0$, то $x_2 = 100 / 12 = 8{,}3$; $x_2 = 0$, то $x_1 = 100 / 8 =$

12,5. Штриховкой обозначим значения переменных, принимать которые им запрещено.

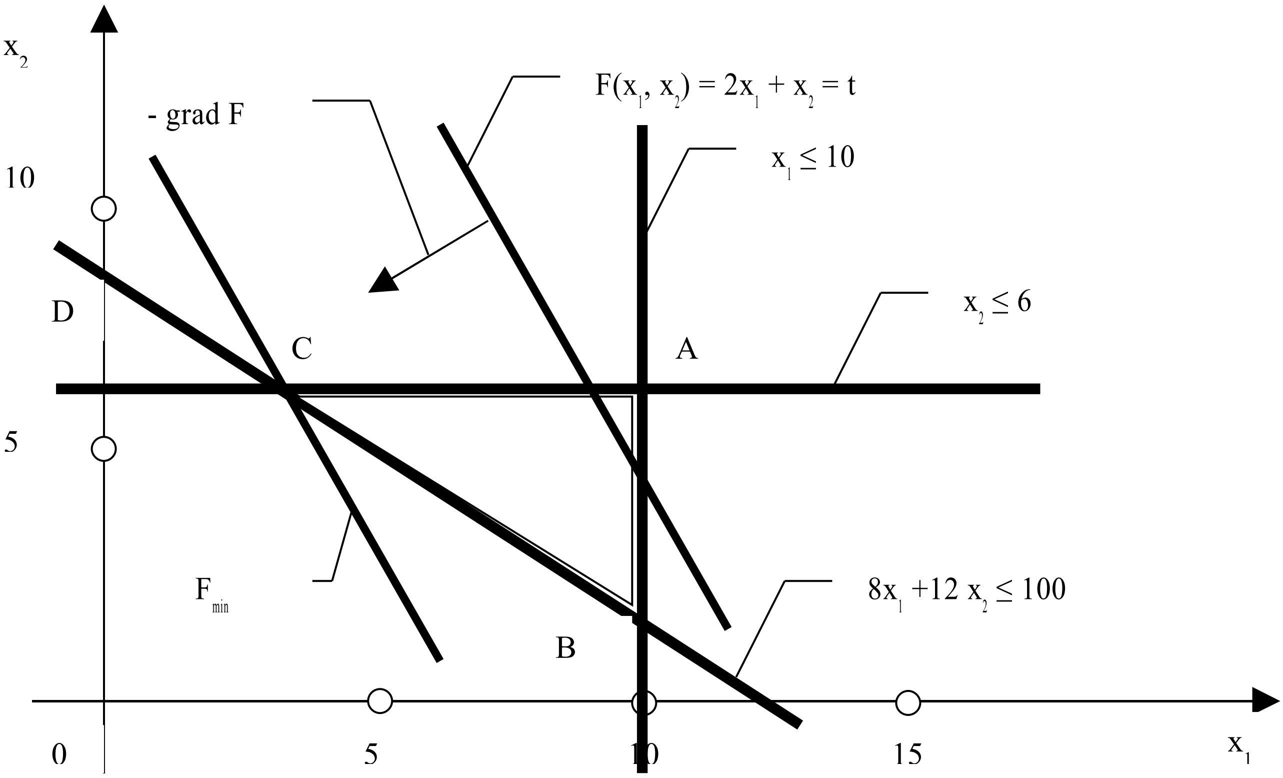


Рис. 7.2. Решение задачи линейного программирования графическим методом

2. Поиск оптимального решения.

Треугольник АВС в данной задаче является областью допустимых решений. Подберем какое-либо значение параметра t, при котором график целевой функции лежит в области АВС. Для минимизации функции F(X) следует найти направление её наискорейшего убывания, это будет вектор антиградиента целевой функции.

Пожалуй, стоит напомнить, что градиентом функции (от латинского gradientis - шагающий) называется вектор, указывающий направление наибольшего роста скалярной функции. Градиент представляет собой производную функции по направлению: $gradF = \frac{\partial F}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial F}{\partial y}\vec{j}$

Здесь $-gradF = \frac{\partial F}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial F}{\partial y}\vec{j} = -2\vec{i} - \vec{j}$, что означает: двигаться надо влево - вниз.

Ранее уже указывалось, что оптимальное решение лежит на границе области, точнее, в одной из ее вершин. Перемещая график целевой функции от точки А к точке В и, наконец, к точке С, отметим, что именно точка С и будет решением задачи.

3. Запись оптимального решения.

Координаты точки С [$X^0 = (x^0_1, x^0_2)$ =(3,5, 6)] придают целевой функции минимальное значение $F_{min} = F(X^0) = 2x^0_1 + x^0_2 = 2*3.5 + 6 = 13$. Как говорится,"ради интереса", можно вычислить значения целевой функции в точках А и В и убедиться, что они будут больше 13. Итак, ответ: X^0 = (3,5, 6), $F_{min} = F(X^0) = 13$.

7.2. Симплекс-метод решения задач линейного программирования

Постановка задачи линейного программирования впервые была дана советским математиком Л.З.Канторовичем в 1939 году в его работе "Математические методы в организации и планировании производства". Там же приведен один из методов решения – метод разрешающих множителей. В 1949 году американским ученым Дж.В. Данцигом был разработан один из наиболее общих методов решения задач линейного программирования – симплекс-метод.

Прежде чем приступить к изучению этого получившего широкое распространение благодаря своей универсальности метода, введем понятие основной (канонической) задачи линейного программирования. ***Основной задачей линейного программирования (ОЗЛП)*** называется задача, в которой необходимо минимизировать линейную целевую функцию

$$F(X) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j + c_0 \tag{7.1}$$

при условии активных, т.е. представленных в виде равенств, ограничений

$$\begin{gathered} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + b_i = 0, \\ x_j \ge 0, i = 1 - m, j = 1 - n. \end{gathered} \tag{7.2}$$

Задачу линейного программирования, в которой требуется найти максимум целевой функции и/или ограничения заданы неравенствами, можно привести к форме ОЗЛП следующим образом:

- ввести вспомогательную целевую функцию Z = - F и ее минимизировать;
- от ограничений-неравенств перейти к равенствам путем введения дополнительных неотрицательных переменных ωi ≥ 0.

Пример

Максимизировать функцию

$$F(X) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j + c_0$$

при ограничениях

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{1j} x_j + b_1 \le 0, \\ \sum_{j=1}^{n} a_{2j} x_j + b_2 = 0, \\ \sum_{j=1}^{n} a_{3j} x_j + b_3 = 0, \\ \sum_{j=1}^{n} a_{4j} x_j + b_4 \ge 0, \\ x_j \ge 0, i = 1 - 4, j = 1 - n. \end{cases}$$

В форме ОЗЛП эта задача будет иметь вид:

минимизировать функцию

$$Z(X) = -F(X) = -\sum_{j=1}^{n} c_j x_j - c_0$$

при ограничениях

$$
\begin{cases}
\sum\limits_{j=1}^{4} a_{1j}x_j + b_1 + \omega_1 = 0, \\
\sum\limits_{j=1}^{4} a_{2j}x_j + b_2 = 0, \\
\sum\limits_{j=1}^{4} a_{3j}x_j + b_3 = 0, \\
\sum\limits_{j=1}^{4} a_{4j}x_j + b_4 - \omega_4 = 0, \\
x_j \geq 0, i = 1-4, j = 1-4.
\end{cases}
$$

Симплекс-метод иногда называют ***"методом последовательного улучшения плана"***, так как суть его заключается в последовательном переборе вершин области ограничений (области допустимых решений) таким образом, что значение целевой функции убывает от вершины к вершине до минимума. В n – мерном пространстве область ограничений является многогранником; а простейший многогранник – симплекс, имеющий в качестве граней простейшие многоугольники – треугольники, отсюда и название метода.

Введем необходимые для изложения симплекс-метода определения.

Неизвестные x_j, через которые выражаются все остальные неизвестные x_i системы ограничений (7.2), называются ***свободными переменными***.

Решение системы (7.2), соответствующее нулевым значениям свободных переменных, называется ***базисным решением***, а переменные x_i – ***базисными переменными***.

Всякое неотрицательное решение системы (7.2) $x_i \geq 0$ называется ***допустимым решением***.

Допустимое базисное решение называется ***опорным решением***.

Опорное решение, минимизирующее значение целевой функции, называется ***оптимальным решением (планом) задачи линейного программирования***.

<u>Подготовительный этап</u>. Представление задачи в форме ОЗЛП.

Минимизировать

$$Z(X) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j + c_0 \to \min$$

при ограничениях

$$y_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + b_i = 0,$$

$$x_j \geq 0, i = 1 - m, j = 1 - n.$$

Исходная симплекс-таблица имеет вид:

	x_1	…	x_j	…	x_n	1
y_1	a_{11}	…	a_{1j}	…	a_{1n}	b_1
…	…	…	…	…	…	…
y_i	a_{i1}	…	a_{ij}	…	a_{in}	b_i
…	…	…	…	…	…	…
y_m	a_{m1}	…	a_{mj}	…	a_{mn}	b_m
Z	c_1	…	c_j	…	c_n	c_0

Оптимальное решение: $X^0 = (x^0_1, x^0_2 \ldots, x^0_n)$ и $Z_{min} = Z(X^0) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j^0 + c_0$

Решение задачи линейного программирования симплекс-методом содержит подготовительный и три основных этапа решения задачи.

<u>Подготовительный этап</u> (рис. 7.3).

Задача преобразуется в ОЗЛП и представляется в виде исходной симплекс-таблицы.

<u>1 этап</u>: поиск базисного решения (рис. 8.4.).

Блоки I, 6: проверка системы ограничений на совместность. Для $y_i = 0$ не могут быть все a_{ij}, а $b_j \neq 0$, так как в ОЗЛП

$$y_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + b_i = 0. \tag{8.3}$$

Блоки 2, 7: из системы ограничений убираются тривиальные тождества.

Блоки 3, 4: преобразование симплекс-таблицы с помощью ***метода обыкновенных жордановых исключений (ОЖИ).***

Метод ОЖИ представляет собою формализацию известного метода подстановки, применяемого для решения систем линейных уравнений. Действительно, рассмотрим систему линейных равенств:

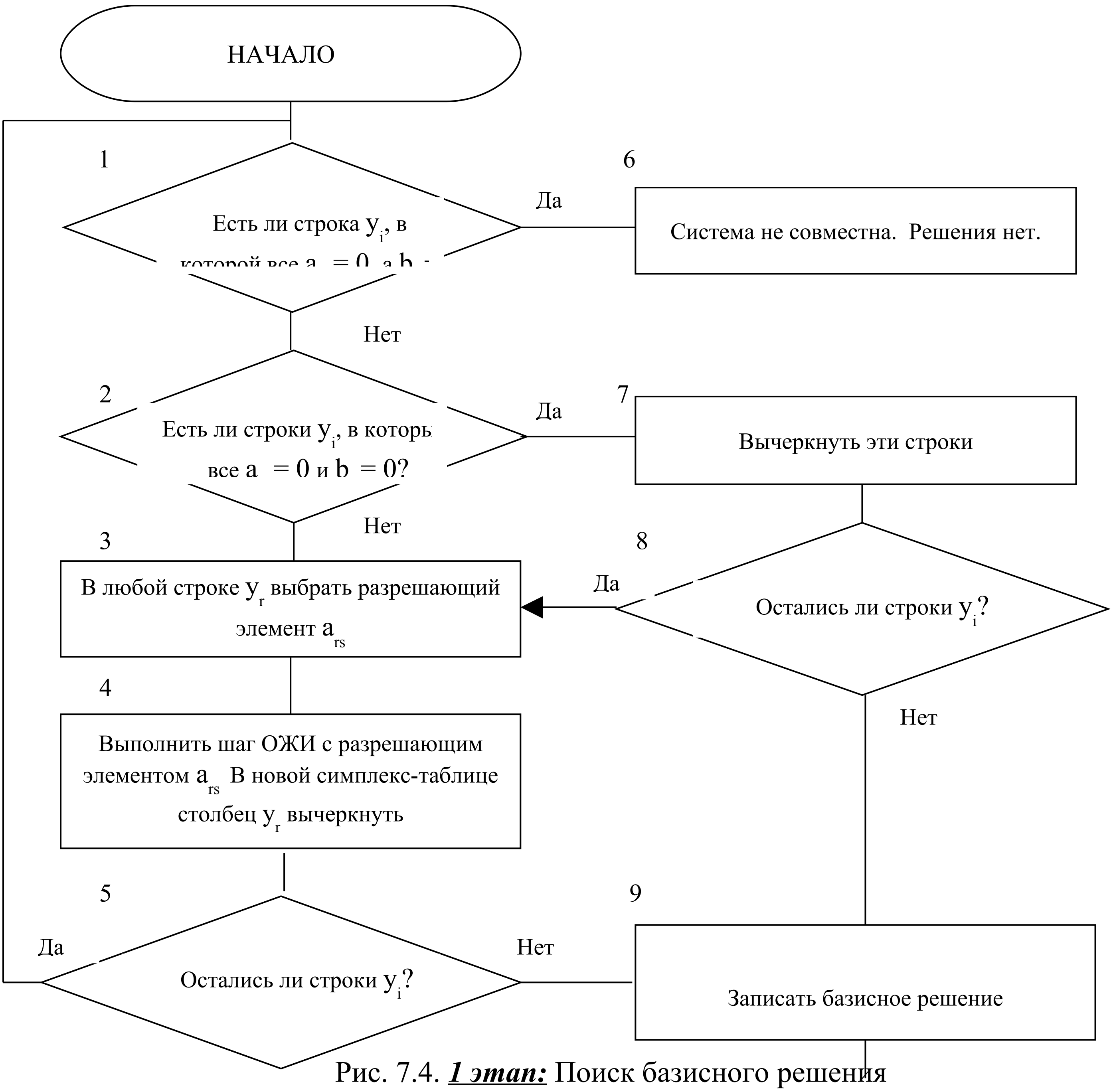


Рис. 7.4. ***<u>1 этап:</u>*** Поиск базисного решения

$$
\begin{cases}
y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1s}x_s + \ldots + a_{1n}x_n + b_1, \\
y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2s}x_s + \ldots + a_{2n}x_n + b_2, \\
\ldots \\
y_r = a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \ldots + a_{rs}x_s + \ldots + a_{rn}x_n + b_r, \\
\ldots \\
y_m = a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{ms}x_s + \ldots + a_{mn}x_n + b_m.
\end{cases}
\tag{7.4}
$$

Из r-го равенства выразим x_s и подставим в остальные равенства; получим:

$$
\begin{cases}
x_s = -\dfrac{a_{r1}}{a_{rs}}x_1 - \dfrac{a_{r2}}{a_{rs}}x_2 - \ldots + \dfrac{1}{a_{rs}}y_r - \ldots - \dfrac{a_{rn}}{a_{rs}}x_n - \dfrac{b_r}{a_{rs}} \\
y_1 = (a_{11} - \dfrac{a_{r1}a_{1s}}{a_{rs}})x_1 + (a_{12} - \dfrac{a_{r2}a_{1s}}{a_{rs}})x_2 + \ldots + -\dfrac{a_{1s}}{a_{rs}}y_r + \ldots + (a_{1n} - \dfrac{a_{rn}a_{1s}}{a_{rs}})x_n \\
+ (b_1 - \dfrac{b_r a_{1s}}{a_{rs}}), \\
\ldots \\
y_m = (a_{m1} - \dfrac{a_{r1}a_{ms}}{a_{rs}})x_1 + (a_{m2} - \dfrac{a_{r2}a_{ms}}{a_{rs}})x_2 + \ldots + -\dfrac{a_{ms}}{a_{rs}}y_r + \ldots + (a_{mn} - \dfrac{a_{rn}a_{ms}}{a_{rs}})x_n \\
+ (b_m - \dfrac{b_r a_{ms}}{a_{rs}}).
\end{cases}
\tag{7.5}
$$

Процесс преобразования системы (7.4) в систему (7.5) можно формализовать следующим образом. Запишем систему (7.4) в виде исходной симплекс-таблицы:

	$\mathbf{x_1}$	**…**	$\mathbf{x_s}$	**…**	$\mathbf{x_n}$	**1**
$\mathbf{y_1}$	a_{11}	…	a_{1j}	…	a_{1n}	$\mathbf{b_1}$
…	…	…	…	…	…	**…**
$\mathbf{y_r}$	a_{r1}	…	a_{rs}	…	a_{rn}	$\mathbf{b_r}$
…	…	…	…	…	…	**…**
$\mathbf{y_m}$	a_{m1}	…	a_{ms}	…	a_{mn}	$\mathbf{b_m}$

В соответствии с введенными определениями переменные, записанные в симплекс-таблице сверху, будут свободными переменными, а записанные слева - базисными.

Анализируя первое равенство системы (7.5) видим, что для выражения x_s из равенства y_r необходимо:

- переменную x_s из свободных переменных перевести в базисные, а y_r – наоборот, из базисных перевести в свободные;
- коэффициент при y_r принять равным единице, деленной на коэффициент при x_s, т.е. на a_{rs}, при этом коэффициент a_{rs} называется ***разрешающим элементом***;
- коэффициенты при переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ в r – ой строке принять равными соответствующим коэффициентам при этих переменных в системе (8.4) с обратным знаком, деленным на разрешающий элемент a_{rs}.
- Из анализа остальных равенств системы (7.5) следует:
- коэффициенты при переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ и свободные члены в строках $i \neq r$ равны соответствующим коэффициентам при этих переменных и свободным членам системы (7.4) минус произведение диагонально расположенных коэффициентов, деленных на разрешающий элемент.

Запишем теперь систему (7.5) в следующем виде:

$$\begin{cases} y_1 = a'_{11}x_1 + a'_{12}x_2 + \ldots + a'_{1s}x_s + \ldots + a'_{1n}x_n + b'_1, \\ y_2 = a'_{21}x_1 + a'_{22}x_2 + \ldots + a'_{2s}x_s + \ldots + a'_{2n}x_n + b'_2, \\ \ldots \\ x_s = a'_{r1}x_1 + a'_{r2}x_2 + \ldots + a'_{rs}y_r + \ldots + a'_{rn}x_n + b'_r, \\ \ldots \\ y_m = a'_{m1}x_1 + a'_{m2}x_2 + \ldots + a'_{ms}x_s + \ldots + a'_{mn}x_n + b'_m. \end{cases} \tag{7.6}$$

В этой системе коэффициенты a'_{ij} (i=1-m, j = 1-n) и свободные члены b'_i вычисляются по описанным выше правилам. Последнюю систему (7.6) удобно теперь представить в виде новой симплекс-таблицы:

	x_1	**…**	**y_r**	**…**	**x_n**	**1**
y_1	a'_{11}	…	a'_{1j}	…	a'_{1n}	**b'_1**
…	…	…	…	…	…	**…**
x_s	a'_{r1}	…	a'_{rs}	…	a'_{rn}	**b'_r**

…	…	…	…	…	…	**…**
$\mathbf{y_m}$	a'_{m1}	…	a'_{ms}	…	a'_{mn}	$\mathbf{b'_m}$

Изложенный выше материал позволяет составить ***правила шага ОЖИ*** - перехода от одной системы (симплекс-таблицы) к другой:

1. Выбрать в исходной симплекс-таблице разрешающий элемент $a_{rs} \neq 0$; s – й столбец и r - я строка называются .разрешающими.
2. В новой симплекс-таблице на месте разрешающего элемента записать единицу.
3. Остальные элементы разрешающего столбца a_{is} $(i \neq r)$ оставить без изменений.
4. У остальных элементов разрешающей строки a_{rj} $(j \neq s)$ изменить знаки на противоположные.
5. Остальные элементы новой симплекс-таблицы вычислить с помощью определителя второго порядка

$$a'_{ij} = \begin{vmatrix} a_{rs} & a_{ri} \\ a_{is} & a_{ij} \end{vmatrix} = a_{ij}\, a_{rs} - a_{is}\, a_{rj}$$

6. Все элементы новой симплекс-таблицы разделить на разрешающий элемент a_{rs}.

В результате I этапа получаем базисное решение, которое записывается следующим образом: все свободные переменные x_j приравниваются нулям, базисные переменные x_i равны свободным членам.

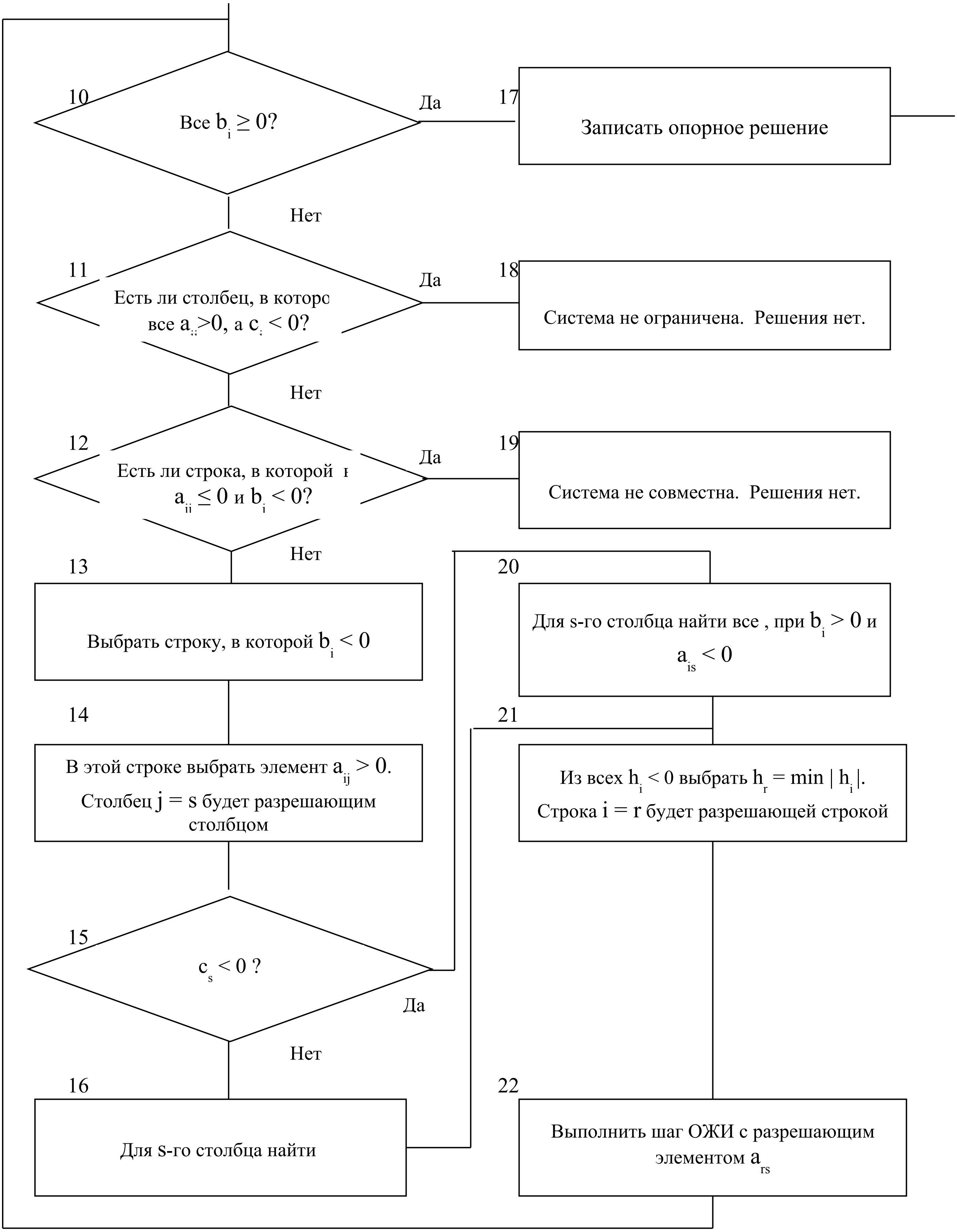


Рис. 7.5. ***II этап:*** Поиск опорного решения

II этап: поиск опорного решения (рис. 7.5).

Неотрицательное базисное решение будет опорным, если в симплекс-таблице все $b_i \geq 0$.

Блоки II, 18: проверка системы на ограниченность. Условие $c_j \leq 0$ позволяет неограниченно уменьшать значение целевой функции, увеличивая x_j; при этом, так как $a_{ij} > 0$, базисные переменные x_i будут также неограниченно возрастать. Поскольку в реальных задачах переменные x_i выражают запасы каких-то материальных средств, данный случай соответствует задаче, не имеющей решений.

Блоки 12, 19: проверка системы ограничений на совместность. При допустимых x_j не могут быть $a_{ij} \leq 0$ и $b_i < 0$ для выполнения условия $y_i = 0$.

Блок 13: предварительный выбор разрешающей строки. Выбрать строку x_i, в которой $b_i < 0$. Этот выбор определяется тем, что при выполнении шага ОЖИ знаки в разрешающей строке меняются на противоположные, а нужно получить $b_i \geq 0$.

Блок 14: выбор разрешающего столбца. Выбрать столбец x_j, в котором $a_{ij} > 0$. Условие $a_{ij} > 0$ приводит к тому, что при увеличении x_j переменная $x_i = b_i < 0$ в базисном решении будет возрастать от значения b_i до нуля, если i-я строка будет разрешающей.

Блок 21: обеспечение допустимости решения. Выбирается $\min\left|\frac{b_i}{a_{is}}\right|$, поскольку это задаётся требованием, что в какой-либо другой строке базисная переменная не должна стать отрицательной.

В результате II этапа получаем опорное решение, которое записывается по аналогии с 1 этапом: свободные переменные $x_j = 0$, а базисные x_i равны свободным членам.

III этап: поиск оптимального решения (рис. 7.6).

Блок 24: проверка опорного решения на оптимальность. Неотрицательность всех коэффициентов при переменных в выражении целевой функции означает, что дальнейшее улучшение плана невозможно; следовательно, данное опорное решение является оптимальным.

Блок 25: выбор разрешающего столбца. Наличие $c_j \le 0$ означает, что, увеличивая значение x_j , можно еще уменьшить значение целевой функции.

Блоки 26, 27: выбор разрешающей строки. Содержание этих блоков аналогично содержанию блоков 20 и 21 предыдущего этапа.

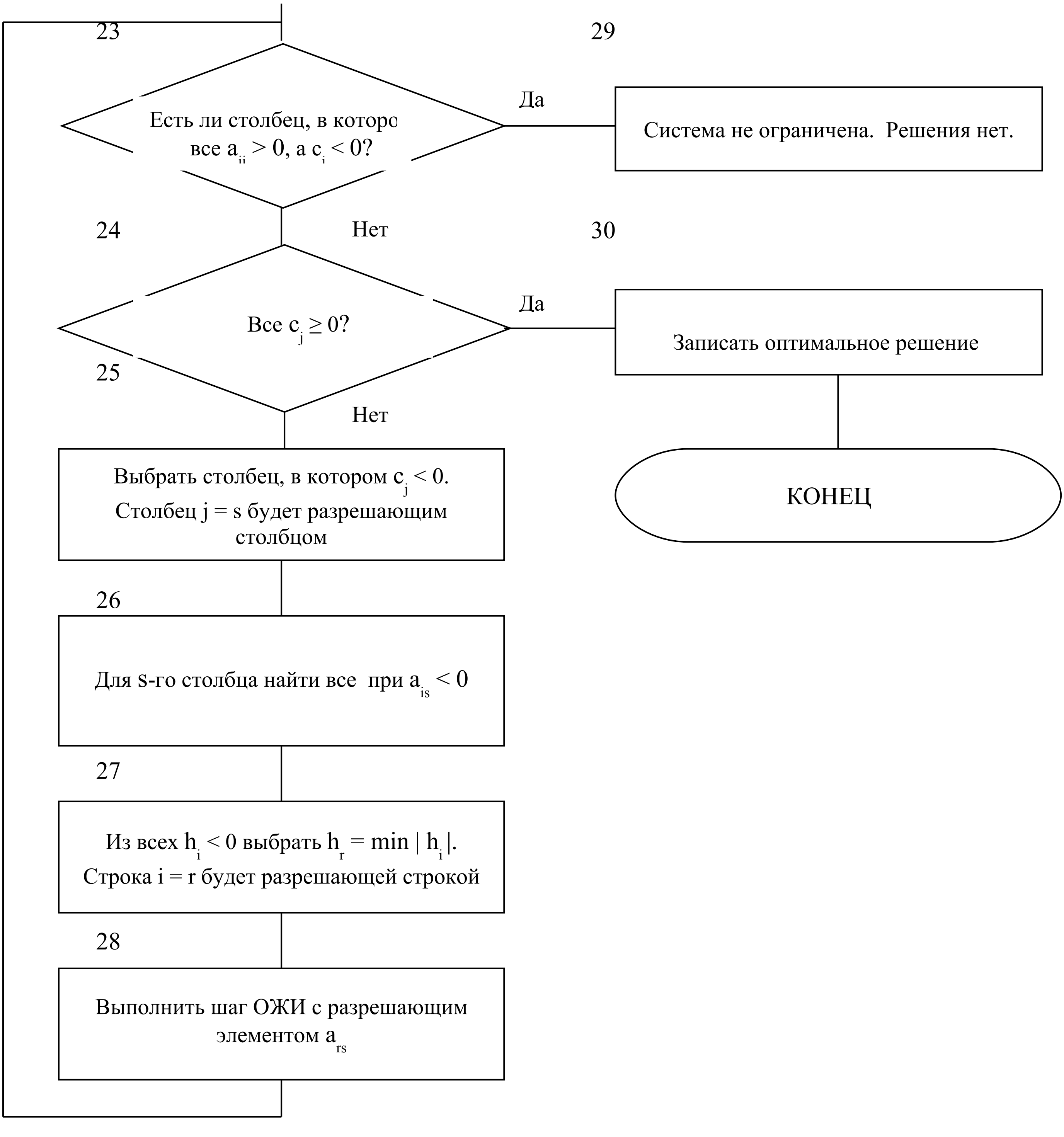


Рис. 7.6. ***III этап:*** Поиск оптимального решения

В результате III этапа получаем оптимальное решение задачи линейного программирования: все свободные переменные, располагающиеся в верхней части симплекс-таблицы, берутся равными нулю xj = 0, а базисные переменные xi, располагающиеся в симплекс-таблице слева, приравниваются свободным членам.

Пример 7.2.

Для демонстрации применения симплекс-метода на практике решим тот же пример 7.1, который ранее был решен графическим методом.

Минимизировать целевую функцию, представляющую собой линейную форму

$F(X) = 2x_1 + x_2$

при ограничениях на её аргументы

$$\begin{cases} x_1 \le 10, \\ x_2 \le 6, \\ 8x_1 + 12x_2 \ge 100. \end{cases}$$

Решение задачи:

<u>Подготовительный этап</u> (рис. 7.3).

Приведём задачу к форме основной задачи линейного программирования (ОЗЛП) и представим в виде исходной симплекс-таблицы.

$$\begin{aligned} y_1 &= x_1 + \quad + \omega_1 - \quad - 10, \\ y_2 &= \quad x_2 + \quad + \omega_2 - \quad -6, \qquad (7.9) \\ y_3 &= 8x_1 + 12x_2 - \quad - \omega_3 - 100. \end{aligned}$$

$F(x_1,x_2) = 2x_1 + x_2 \to \min.$

Тогда исходная симплекс-таблица будет иметь вид:

	x_1	x_2	ω_1	ω_2	ω_3	1
y_1	1	0	1	0	0	-10
y_2	0	1	0	1	0	-6
y_3	8	12	0	0	0	-100
F	2	1	0	0	0	0

Наличие на подготовительном этапе вспомогательных переменных ω_1, ω_2, ω_3 можно использовать для уменьшения количества шагов ОЖИ на последующих этапах. С этой целью выразим ω_i через x_j:

$\omega_1 = - x_1 + \qquad + 10,$

$\omega_2 = \qquad - x_2 + \quad +6,$ (7.10)

$\omega_3 = 8x_1 + 12\ x_2 \ - 100.$

$F(x_1,x_2) = 2x_1 + x_2 \rightarrow \min.$ (7.11)

Тогда симплекс-таблица запишется иначе:

	x_1	x_2	1
ω_1	-1	0	10
ω_2	0	-1	6
ω_3	8	**12**	-100
F	2	1	0

I этап.: поиск базисного решения (рис. 7.4.).

Базисное решение получим из симплекс-таблицы, если приравняем нулю свободные переменные (в данном случае x_j и x_2), тогда базисные переменные (сейчас это ω_1, ω_2, ω_3) будут равны свободным членам уравнений (7.II).

$x_j = 0$ и $x_2 = 0,$

$\omega_1 = 10,\ \omega_2 = 6,\ \omega_3 = -100,$ (7.12)

что соответствует т.О на рис. 7.2. Но в системе ограничений ни одна из переменных x_j и ω_i не должна быть отрицательной. У нас $\omega_3 < 0$, поэтому на рис 8.2 точка О лежит вне области допустимых решений АВС.

II этап: поиск опорного решения (рис. 7.5), все b_i должны быть неотрицательными.

Согласно алгоритму симплекс-метода выбираем разрешающим элементом a_{32} и выполняем шаг ОЖИ. Получим таблицу вида:

	x_1	ω_3	1
ω_1	-12/12	0	120/12
ω_2	**8/12**	-1/12	-28/12
x_2	-8/12	1/12	100/12
F	16/12	1/12	100/12

Сейчас базисное решение имеет вид:

$x_j = 0$ и $\omega_3 = 0$,

$\omega_1 = 10$, $\omega_2 = -2,(3)$, $x_2 = 8,(3)$, (7.13)

что соответствует точке D на рис. 7.2.

Данное решение ещё не является опорным, т.к. $\omega_2 = -2,(3)$, поэтому вновь выбираем разрешающий элемент a_{21} и вновь выполняем шаг ОЖИ:

	ω_2	ω_3	1
ω_1	-12/8	-(12*12)/(12*12*8)	(80-12*28)*12/(12*12*8)
x_1	12/8	1/8	28/8
x_2	-1	0	(12*(800-28*8))/(12*12*8)
F	2	(12*24)/(12*12*8)	(12*(800+28*16))/(12*12*8)

Получили опорное решение:

$x_j = 3,5$ и $x_2 = 6$,

$\omega_1 = 6,5$, $\omega_2 = 0$, $\omega_3 = 0$, (7.14)

что соответствует точке C на рис. 7.2.

<u>III этап</u>: поиск оптимального решения (рис. 7.6).

Полученное на предыдущем этапе опорное решение (7.14) является и оптимальным решением данной задачи, т.к. $C_1 = 2 > O$, $C_2 = 0,25 > O$.

Значит, $X^0 = (3.5; 6)$.

Это решение сообщает целевой функции следующее минимальное значение:

$F_{min} = F(X^0) = 2x^0{}_1 + x^0{}_2 = 2*3.5 + 6 = 13$.

2.4 Лабораторные занятия. Самостоятельная работа студентов

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА N 1

ОПРЕДЕЛЕНИЕ УРАВНЕНИЙ ЛИНЕЙНОЙ РЕГРЕССИИ С ПОМОЩЬЮ ФУНКЦИИ ЛИНЕЙН

EXCEL обладает встроенными возможностями регрессионного анализа, позволяющего аппроксимировать данные как прямой линией, так и сложными полиномами. Большая часть задач описания данных может быть решена средствами линейной регрессии.

Регрессия является линейной в том случае, если уравнение имеет вид:

$$y = b + \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot x_i = b + m_1 \cdot x_1 + m_2 \cdot x_2 + \ldots + m_n \cdot x_n ,$$

где n – число входных параметров (или факторов).

Для получения уравнения регрессии необходимо:

- определить значения коэффициентов регрессии *b, m* $_i$;
- оценить достоверность полученного уравнения.

1. Расчет коэффициентов регрессии

Для определения уравнения регрессии в EXCEL существует функция ЛИНЕЙН( ). В нее необходимо ввести исходные данные в следующем формате:

=ЛИНЕЙН(интервал значений y; блок значений x$_i$; константа; статистика)

Вместо слов "константа" и "статистика" в функцию вводят ИСТИНА или ЛОЖЬ в зависимости от представления результатов вычисления:

	ИСТИНА	**ЛОЖЬ**
Константа	b≠0	b=0
Статистика	Оценка достоверности	Оценки нет

Задание 1.

Определить уравнение регрессии, устанавливающее зависимость цены аппаратуры от ее технических параметров: производительности (количество операций в час) и надежности (время наработки на отказ в днях).

1. Ввести исходные данные, приведенные в таблице 1, в Excel.

Таблица 1

Зависимость цены аппаратуры от ее технических параметров

Производительность	Надежность	Цена
x$_1$	**x$_2$**	**y**
120	450	4500
200	960	8000

300	145	3000
400	212	5500
500	265	5400
860	312	6500

2. Определить минимальные и максимальные значения переменных x_1 и x_2, используя функцию МИН( ) и МАКС( ).

3. Выделить блок пустых ячеек, в котором :

строк - всегда 5,

столбцов - n+1 = 2+1=3,

где n - число входных параметров (число x).

4. В левую верхнюю ячейку выделенного блока ввести функцию ЛИНЕЙН( ) с соответствующими параметрами, нажать <Shift+Ctrl+Enter>. На экране результат вычислений.

Смысл полученных величин представлен в таблице:

m_n	m_{n-1}	…	m_2	m_1	b
$\sigma[m_n]$	$\sigma[m_{n-1}]$	…	$\sigma[m_2]$	$\sigma[m_1]$	$\sigma[b]$
R^2	$\sigma[g]$				
$F_{расч}$	df				
SS_{reg}	SS_{resid}				

где **b, m_1, m_2 ,…, m_{n-1}, m_n** - коэффициенты уравнения регрессии;

$\sigma[b]$, $\sigma[m_1]$, $\sigma[m_2]$, …, $\sigma[m_{n-1}]$, $\sigma[m_n]$ - средние квадратические отклонения полученных величин, они являются мерами точности каждого из коэффициентов регрессии и используются для проверки статической значимости коэффициентов;

R^2 - коэффициент детерминации, который показывает насколько хорошо уравнение, полученное с помощью регрессионного анализа описывает фактические данные, чем ближе коэффициент детерминации к 1, тем более совпадают прогнозируемые и фактические данные;

$\sigma[g]$ – стандартная ошибка для оценки y, которая является оценкой ошибки для единичного значения y, вычисленного на основании уравнения регрессии, эта оценка используется совместно с критерием Стьюдента для определения доверительного интервала для вычисленной кривой. Доверительный интервал – это область вокруг прогнозируемой кривой, в которой с определенной вероятностью (например, 95 процентов) содержится истинная кривая.

$F_{расч}$ – F-статистика, которая используется для определения вероятности того, что данные действительно описываются указанным выражением или совпадение вызвано случайными факторами. Для использования F-статистики необходимо использовать значение F, взятое из таблиц или вычисленное с помощью функции FРАСПРОБР(). Табличное или возвращенное функцией значение F сравнивается с вычисленным значением при одинаковом доверительном интервале и числе степеней свободы. Если вычисленное значение F больше чем табличное, совпадение обусловлено реальной корреляцией, а не случайными факторами.

df - число степеней свободы, определяемое по формуле

$$df = k - (n+1),$$

где k - число строк в таблице исходных данных (число значений);

n - число входных параметров (число x).

$$df = 6 - (2+1) = 3.$$

Число степеней свободы используется для многих статистических вычислений при определении доверительных интервалов.

SS_{reg} - регрессионная сумма квадратов, которая является мерой разброса данных относительно среднего значения y;

SS_{resid} - остаточная сумма квадратов, которая является мерой разброса данных относительно линии регрессии.

5. Записать полученное уравнение регрессии. Определить границы, в которых справедливо данное уравнение.

6. Оценить адекватность полученной регрессионной зависимости (**R^2**).

7. Определить расчетные значение *y* по полученному уравнению регрессии. Сравнить с фактическими значениями *y*, сделать выводы.

2. Оценка достоверности уравнения регрессии (оценка величины R^2)

Можно оценить достоверность самой величины R^2 . Это производится с помощью F-распределения , которое определяет:

α - вероятность того, что зависимость у от x_i отсутствует.

Следовательно, (1 - α) - это вероятность того, что такая зависимость существует, чем ближе это значение к 1, тем более достовернее величина R^2 .

Установить курсор в любую ячейку для определения величины α. Вызвать Мастер функций ▸ Статистические ▸ FРАСП. В диалоговое окно FРАСП ввести следующие величины:

$x = F_{расч}$;

степени свободы 1 = число аргументов (в примере n=2);

степени свободы 2 = df.

В соседней ячейке определить вероятность (1- α).

Задание 2.

Определить достоверность величины коэффициента детерминации R^2 . Сделать выводы.

3. Оценка достоверности значений b и m_i

Для оценки значимости коэффициентов регрессии используется критерий Стьюдента:

$$t_i = \frac{|m_i|}{\sigma[m_i]} \qquad t_i = \frac{|b|}{\sigma[b]}$$

Затем определяют β-вероятность того, что значения b и m_i недостоверны.

Для определения β-вероятности установить курсор в любую ячейку , вызвать Мастер функций ▸ Статистические ▸ СТЬЮДРАСП. В диалоговое окно СТЬЮДРАСП ввести следующие величины:

$x = t_i$;

степени свободы = df;

хвосты = 2 (это признак используемого нами 2-степенного распределения Стьюдента).

В соседней ячейке определяют (1-β) - вероятность того, что значения коэффициентов регрессии достоверны, чем ближе это значение к 1, тем более достоверны коэффициенты регрессии.

Задание 3.

1. Определите коэффициенты Стьюдента для всех коэффициентов регрессии: b и m_i.

2. Определите значение вероятности β для всех коэффициентов регрессии.

3. Определите вероятность того, что значения коэффициентов регрессии достоверны. Сделать выводы.

Самостоятельная работа

1. Определить уравнение регрессии. Определить границы, в которых справедливо данное уравнение.

2. Оценить адекватность полученной регрессионной зависимости ($\mathbf{R^2}$).

3. Определить расчетные значение y по полученному уравнению регрессии. Сравнить с фактическими значениями y, сделать выводы.

4. Определить достоверность величины коэффициента детерминации R^2. Сделать выводы.

5. Определить коэффициенты Стьюдента для всех коэффициентов регрессии: b и m_i.

6. Определить значение вероятности β для всех коэффициентов регрессии.

7. Определить вероятность того, что значения коэффициентов регрессии достоверны. Сделать выводы.

8. Построить график для данной зависимости.

Для следующих вариантов задания:

Вариант 1 **ЛР**

Зависимость относительного разрывного удлинения от величины крутки для полипропиленовых швейных ниток из пряжи 25 текс х2 в 2 сложения

Заправочная крутка, К, кр/м	100	200	300	400	500
Относительное разрывное удлинение, ε, %	18,02	19,46	21,08	21,01	23,74

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА N 2

ОПРЕДЕЛЕНИЕ НЕЛИНЕЙНОЙ РЕГРЕССИИ С ПОМОЩЬЮ ФУНКЦИИ ЛГРФПРИБЛ

Для нахождения уравнения регрессии в EXCEL применяется функция ЛГРФПРИБЛ( ), которая обеспечивает получение уравнения регрессии в виде:

$$y = b \cdot m_1^{x_1} \cdot m_2^{x_2} \cdot \ldots \cdot m_n^{x_n}$$

Функция ЛГРФПРИБЛ( ) имеет точно такой же формат ввода, как и функция ЛИНЕЙН( ), и вычисление уравнения нелинейной регрессии с помощью функции ЛГРФПРИБЛ( ) ведется аналогично.

Значения полученных величин приведены в таблице. В данном случае значения в основном те же, что и при определении линейной регрессии, но вместо значений **σ[b], σ[m i]** даны их логарифмы **ln σ[b]**, **ln σ[mi]** .

m_n	m_{n-1}	…	m_2	m_1	b
ln σ[m_n]	ln σ[m_{n-1}]	…	ln σ[m_2]	ln σ[m_1]	ln σ[b]
R^2	ln σ[g]				
$F_{расч}$	df				
SS_{reg}	SS_{resid}				

Задание.

1. Определить уравнение нелинейной регрессии по данным табл.2.
2. Определить границы, в которых справедливо данное уравнение.
3. Оценить достоверность полученной регрессионной зависимости.
4. Определить расчетные значение *y* по полученному уравнению регрессии. Сравнить с фактическими значениями *y*, сделать выводы
5. Оценить достоверность величины R^2 .
6. Оценить достоверность полученных коэффициентов регрессии. Для получения данной оценки необходимо перейти от значений *b* и m_i к их логарифмам *ln(b)* и *ln(m_i)*.

$$t_i = \frac{|\ln(m_i)|}{\ln(\sigma[m_i])} \qquad t_i = \frac{|\ln(b)|}{\ln(\sigma[b])}$$

7. Построить график функции по данным таблицы. Определить тип функции (возрастающая или убывающая) и значение m_i в уравнении регрессии. Сделать выводы.

Таблица 2

Влияние многократных стирок на прочность полульняных тканей

Число стирок	Средняя прочность, %
0	100
10	85
25	68
30	60
50	50
60	48
75	40
80	38
100	33

8. Выполнить аналогичное задание для данных табл. 3.
9. Выполнить аналогичное задание для данных табл. 4.

Таблица 3

Влияние длины нити в петле на воздухопроницаемость трикотажа

Длина нити в петле, мм	Воздухопроницаемость, дм^3/м^2·с
4,5	500
5	600
5,2	700
5,5	800
5,9	1000
6,2	1050
6,5	1100
6,9	1150

Таблица 4

Зависимость остаточной деформации трикотажа по ширине от длины нити в петле

Длина нити в петле, мм	Остаточная деформация трикотажа по ширине, %
5,2	17
6,0	18
6,5	19
7,0	20
7,5	21
8,0	20
8,5	19

9,0	17
9,5	15
10	12
10,5	10,5

На основании приведенных трех примеров можно сделать вывод, что уравнения нелинейной регрессии, определенные с помощью функции ЛГРФ-ПРИБЛ( ), дают приемлемые результаты только для возрастающих или убывающих функций. Если статистические зависимости имеют максимум или минимум, то применение функции ЛГРФПРИБЛ( ) дает неудовлетворительные результаты. Этот вывод, сделанный на основе анализа функции одной переменной, справедлив для произвольного значения *n*.

Самостоятельная работа

1. Определить уравнение регрессии с помощью функций ЛИНЕЙН( ) и ЛГРФПРИБЛ( ) . Определить границы, в которых справедливо данное уравнение.

2. Оценить адекватность полученной регрессионной зависимости ($\mathbf{R^2}$).

3. Определить расчетные значение *y* по полученному уравнению регрессии. Сравнить с фактическими значениями *y*, сделать выводы.

4. Определить достоверность величины коэффициента детерминации R^2. Сделать выводы.

5. Определить коэффициенты Стьюдента для всех коэффициентов регрессии: b и m_i.

6. Определить значение вероятности β для всех коэффициентов регрессии.

7. Определить вероятность того, что значения коэффициентов регрессии достоверны. Сделать выводы.

8. Построить график для данной зависимости.

Для следующих вариантов задания:

Вариант 1 **ЛР**

Зависимость устойчивости к истиранию поверхности сорочечной ткани от % содержания лавсана в утке

Содержание волокон лавсана в смеси, %	0	17	33	50	67	83	100
Устойчивость к истиранию поверхности ткани, число циклов	500	1100	1420	1700	1900	1950	1940

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА N 3

ВЫЧИСЛЕНИЕ РЕГРЕССИИ С ПОМОЩЬЮ ИНСТРУМЕНТА АНАЛИЗА

Инструмент Регрессия пакета Анализ данных выполняет те же самые вычисления, что и функция ЛИНЕЙН( ), но делает это только один раз. Если аппроксимируемые данные изменились, коэффициенты не пересчитываются, пока инструмент не будет применен повторно.

Поскольку инструмент Регрессия входит в пакет Анализ данных, для его применения необходимо вначале установить указанный пакет с помощью команды Сервис ▸ Надстройки ▸ Пакет анализа.

Задание 1.

Определить уравнение регрессии с помощью функций ЛИНЕЙН( ) и оценить его достоверность для данных табл.5. Построить график функции по данным таблицы.

Таблица 5

Зависимость прочности сорочечной ткани по утку от % содержания хлопка

Содержание волокон хлопка в смеси, %	Разрывная нагрузка, Н

100	400
83	450
67	510
50	620
33	610
17	830
0	950

Задание 2.

Определите уравнение регрессии для данных табл.5 и оцените достоверность полученного уравнения с помощью инструмента Регрессия:

1. Выберите инструмент Регрессия в меню Сервис ▸ Анализ данных.

2. В диалоговом окне Регрессия задайте входной и выходной диапазоны. При выборе входного и выходного диапазонов, включите в них не только данные, но и заголовки столбцов, и установите флажок Метки. При этом заголовки столбцов будут использоваться в качестве меток для таблиц и линий диаграммы.

3. В диалоговом окне Регрессия задайте выходной интервал – адрес ячейки с которого будут выводиться рассчитанные значения регрессии.

4. Установите флажки для всех параметров группы Остатки. После ввода всех параметров нажмите кнопку ОК.

5. Установите ширину столбцов таким образом, чтобы все надписи таблицы были полностью видны.

Инструмент Регрессия выполнит все вычисления, выведет результаты в таблицу на рабочем листе и создаст диаграмму, представляющую экспериментальные данные и их аппроксимацию. Результат, впрочем, не отличается от достигнутого с использованием встроенной функции ЛИНЕЙН( ).

6. Сравните полученные значения коэффициентов и их достоверность со значениями , вычисленными с помощью функции ЛИНЕЙН( ).

7. Ввести любые изменения в таблицу исходных данных (табл. 5). Оценить результат действия функции ЛИНЕЙН( ) и инструмента Регрессия.

8. Пересчитать уравнения регрессии с помощью инструмента Регрессия для новых исходных данных. Сравнить результат.

Самостоятельная работа

1. Определить уравнение регрессии с помощью функций ЛИНЕЙН( ), ЛГРФПРИБЛ( ) и инструмент Регрессия. Определить границы, в которых справедливо данное уравнение.

2. Оценить адекватность полученной регрессионной зависимости (**R^2**).

3. Определить расчетные значение y по полученному уравнению регрессии. Сравнить с фактическими значениями y, сделать выводы.

4. Определить достоверность величины коэффициента детерминации R^2. Сделать выводы.

5. Определить коэффициенты Стьюдента для всех коэффициентов регрессии: b и m_i.

6. Определить значение вероятности β для всех коэффициентов регрессии.

7. Определить вероятность того, что значения коэффициентов регрессии достоверны. Сделать выводы.

8. Построить график для данной зависимости.

Для следующих вариантов задания:

Вариант 1 **ЛР**

Зависимость разрывного удлинения сорочечной ткани по утку
от % содержания лавсана в утке

Содержание волокон лавсана в смеси, %	0	17	33	50	67	83	100
Разрывное удлинение ткани по утку , мм	23	26	32	37	43	45	44

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА N 4

ОПРЕДЕЛЕНИЕ УРАВНЕНИЯ НЕЛИНЕЙНОЙ РЕГРЕССИИ В ФОРМЕ ПОЛЬЗОВАТЕЛЯ

Задание 1:

Определить уравнения регрессии с помощью функций ЛИНЕЙН( ) и ЛГРФПРИБЛ( ) и оценить их достоверность для исходных данных, приведенных в табл.6.

Таблица 6

x_1	x_2	Y
1	2	100
4	5	800
6	10	1000
7	11	1100
8	12	1200
9	13	1100
10	14	900
12	15	750
13	17	500
15	18	300
17	20	100

Если достоверность уравнений, полученных с помощью функций ЛИНЕЙН( ) и ЛГРФПРИБЛ( ), довольно низкая, то в таких случаях уравнение регрессии можно находить в виде функции, вид которой назначает пользователь.

Будем искать уравнение регрессии в виде полинома 2-го порядка:

$$y = b + m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_1^2 + m_4 x_2^2 + m_5 x_1 x_2$$

Задание 2:

1. Для решения данной задачи необходимо заполнить следующую таблицу:

x_1	x_2	x_1^2	x_2^2	$x_1 \cdot x_2$	Y
…					

2. Определить коэффициенты уравнения регрессии в форме пользователя, используя функцию ЛИНЕЙН( ).

3. Оценить достоверность полученных результатов.

Задание 3:

Найти значения переменных x_1 и x_2 , при которых Y достигает максимального значения.

Для решения данной задачи выбрать три свободных ячейки. В первую ячейку будет записано найденное значение x_1 , во вторую ячейку – значение x_2, в третью ячейку ввести формулу для расчета значения Y, используя адреса ячеек для переменных x_1 и x_2 .

Для нахождения максимального значения установить курсор в ячейку, где введена формула для расчета Y, в меню Сервис выбрать опцию Поиск решения.

В диалоговом окне Поиск решения установить нужные параметры:

- в окне **Установить целевую ячейку** – появится адрес ячейки Y;
- в поле **Изменяя ячейки** - вести адреса ячеек, где будут рассчитаны значения переменных x_1, x_2;
- в окно **Ограничения** ввести следующие ограничения, выбрав параметр **Добавить...:**

адрес ячейки, где находится x_1 $\geq$ адрес ячейки, где находится минимальное значение x_1

адрес ячейки, где находится x_1 $\leq$ адрес ячейки, где находится максимальное значение x_1

Ввести аналогичные ограничения для переменной x_2 .

Если при вводе задачи возникает необходимость в изменении или удалении внесенных ограничений, то это делается с помощью команд **Изменить..., Удалить.**

После ввода последнего ограничения вместо **Добавить...** ввести **ОК**.

После нажатия кнопки **Выполнить** найденные значения переменных x_1, x_2 и Y будут находиться в искомых ячейках.

Задание 4:

Определить уравнения регрессии в форме пользователя (полинома 2-го порядка), оценить его достоверность и определить длину нити в петле, при которой остаточная деформация трикотажа минимальна для данных табл.4.

Самостоятельная работа

1. Определить уравнение регрессии с помощью функций ЛИНЕЙН( ), ЛГРФПРИБЛ( ) и в форме пользователя. Определить границы, в которых справедливо данное уравнение.

2. Оценить адекватность полученной регрессионной зависимости (**R^2**).

3. Определить расчетные значение *y* по полученному уравнению регрессии. Сравнить с фактическими значениями *y*, сделать выводы.

4. Определить достоверность величины коэффициента детерминации R^2. Сделать выводы.

5. Определить коэффициенты Стьюдента для всех коэффициентов регрессии: *b* и m_i.

6. Определить значение вероятности β для всех коэффициентов регрессии.

7. Определить вероятность того, что значения коэффициентов регрессии достоверны. Сделать выводы.

8. Построить график для данной зависимости.

9. Найти оптимальные значения величины *X*.

Для следующих вариантов задания однофакторной зависимости:

Вариант 1

Зависимость разрывной нагрузки от величины крутки для полипропиленовых швейных ниток из пряжи 25 текс х2 в 2 сложения

Заправочная крутка, К, кр/м	100	150	200	250	300	350	400	450	500
Разрывная нагрузка, P_p, сН	2315	2395	2475	2465	2485	2370	2310	2390	2440

Выполнить аналогичные задания для следующих вариантов задания многофакторной зависимости:

Вариант 1 **МФЗ**

Исследование разрывной нагрузки Р швейных ниток
из комплексных оксалоновых нитей для пошива изделий,
эксплуатируемых при высоких температурах,
в зависимости от первой K_1 и второй K_2 круток.

K_1, кр/м	K_2, кр/м	Р, кгс
1	1	10,47
-1	1	10,20
1	-1	10,31
-1	-1	10,97
1	0	10,35
-1	0	10,36
0	1	10,45
0	-1	10,47
0	0	10,52

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА N 5

ГРАФИЧЕСКОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ УРАВНЕНИЙ РЕГРЕССИИ

Чтобы определить характер зависимости, описываемой уравнением регрессии, это уравнение можно представить графически, что очевидно возможно для числа переменных $n \le 2$. При $n=1$ уравнение регрессии имеет вид графика на плоскости, а при $n=2$ уравнение регрессии представляет собой поверхность или семейство графиков.

Графическое представление уравнений регрессии состоит из двух этапов:

- расчет таблиц по уравнению регрессии;
- графическое представление табличных данных.

Задание.

Построить график уравнения регрессии, полученного в форме пользователя по данным табл.6 в лабораторной работе №4.

1. Расчет таблицы для функции двух переменных

1. Назначить две ячейки, которые будут использоваться как аргументы функции $y=f(x_1, x_2)$. Например, для x_1 - назначить ячейку b3, а для x_2 - ячейку b4.

2. В ячейку b5 ввести формулу для вычисления уравнения регрессии, вводя вместо x_1 и x_2 соответствующие ячейки. При этом в b5 появится значение этой функции при x_1=b3=0 и x_2=b4=0. Если это по каким-либо соображениям не устраивает, то ввести любые другие значения x_1 и x_2.

3. Ввести значения x_1, для которых будет рассчитано значение функции, в ячейки строки 5. Для этого в ячейку c5 ввести начальное значение x_1, в меню Правка выбрать **Заполнить, Прогрессия..., По строкам**. Ввести шаг изменения аргумента x_1 и максимальное значение x_1. Данные ячейки заполнятся значениями x_1.

4. Ввести задаваемые значения x_2 в ячейки столбца B. Для этого в ячейку b6 ввести начальное значение для $x_{2,}$ заполнить их аналогично, выбрав опцию **По столбцам**.

5. Выделить полученную таблицу, выбрать в меню **Данные** опцию **Таблица подстановки...** В диалоговое окно Таблицы подстановки ввести:

подставлять значения по столбцам в b3

подставлять значения по строкам в b4.

На экране - вычисленные значения функции $y=f(x_1, x_2)$.

2. Графическое представление функции двух переменных

1. Выделить полученную таблицу.

2. Выбрать **Мастер диаграмм**. На шаге 1 - выбрать Поверхность. На следующих шагах ввести соответствующие подписи данных для диаграммы.

Самостоятельная работа

Построить график уравнения регрессии, полученного в форме пользователя по данным индивидуального задания для многофакторной зависимости в лабораторной работе №4.

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА N 6

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПАРАБОЛИЧЕСКОЙ ОДНОФАКТОРНОЙ РЕГРЕССИОННОЙ МОДЕЛИ (МОДЕЛИ ВТОРОГО ПОРЯДКА)

Параболические однофакторные регрессионные модели имеют вид:

$$Y = a_0 + a_1 \cdot x + a_{11} \cdot x^2$$

Они описывают многие явления и процессы в текстильной и легкой промышленности.

Для рассматриваемой модели коэффициенты регрессии можно определить по методу наименьших квадратов, решив систему уравнений:

$$\begin{cases} a_0 N + a_1 \sum\limits_{i=1}^{N} x + a_{11} \sum\limits_{i=1}^{N} x^2 = \sum\limits_{i=1}^{N} y \\ a_0 \sum\limits_{i=1}^{N} x + a_1 \sum\limits_{i=1}^{N} x^2 + a_{11} \sum\limits_{i=1}^{N} x^3 = \sum\limits_{i=1}^{N} xy \\ a_0 \sum\limits_{i=1}^{N} x^2 + a_1 \sum\limits_{i=1}^{N} x^3 + a_{11} \sum\limits_{i=1}^{N} x^4 = \sum\limits_{i=1}^{N} x^2 y \end{cases}$$

где N - общее число опытов.

Величины $\sum\limits_{i=1}^{N} x, \sum\limits_{i=1}^{N} x^2, \sum\limits_{i=1}^{N} xy$ и т.д. , входящие в уравнения, определяются по данным эксперимента и для удобства расчета сводятся в таблицу:

N	***x***	***y***	x^2	x^3	x^4	***xy***	x^2y
1							

2							
3							
4							
…							
Сумма:							

Для решения системы уравнений:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = c_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = c_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = c_3 \end{cases}$$

В Excel необходимо ввести условия в следующей форме:

	x_1	x_2	x_3		
Значение переменных					
				Левая часть	**Правая часть**
Первое уравнение	a_{11}	a_{12}	a_{13}		c_1
Второе уравнение	a_{21}	a_{22}	a_{23}		c_2
Третье уравнение	a_{31}	a_{32}	a_{33}		c_3

В строке **Значение переменных** будут рассчитаны значения переменных x_1, x_2, x_3.

Для этого в столбце **Левая часть** ввести зависимости для левых частей данных уравнений. Поместить курсор в нужную ячейку, вызвать **Мастер функций**, в окне Категория выбрать **Математические,** в окне Функции выбрать СУММПРОИЗВ. В массив 1 ввести номера ячеек, где будут находиться значения переменных x_1, x_2, x_3, в массив 2 - номера ячеек, где находятся коэффициенты для этих переменных. Аналогично ввести зависимости для всех уравнений системы.

Для нахождения значений переменных в меню Сервис выбрать опцию Поиск решения. В диалоговом окне **Поиск решения** установить нужные параметры:

- в окне **Установить целевую ячейку** - стереть адрес целевой ячейки, в данном случае он нам не понадобится;

• в поле **Изменяя ячейки** - вести адреса ячеек, где будут рассчитаны значения переменных x_1, x_2, x_3;

• в окно Ограничения ввести следующие ограничения, выбрав параметр **Добавить...:**

адрес ячейки, где находится левая часть уравнения	=	адрес ячейки, где находится правая часть уравнения

Ввести ограничения для всех уравнений системы. Если при вводе задачи возникает необходимость в изменении или удалении внесенных ограничений, то это делается с помощью команд **Изменить..., Удалить.**

После ввода последнего ограничения вместо **Добавить...** ввести **ОК**.

После нажатия кнопки **Выполнить** найденные значения переменных x_1, x_2, x_3 будут находиться в искомых ячейках.

Задание.

1.Найти зависимость между коэффициентом крутки α льняной пряжи и средней разрывной нагрузкой Р (в дан) по данным эксперимента:

2. Определить уравнение регрессии и оценить его достоверность для исходных данных, приведенных в таблице, используя функцию ЛИНЕЙН( ) и функцию ЛГРФПРИБЛ( ).

Таблица 7

Зависимость прочности от крутки пряжи

α	<u>*P*</u>
0,5	3,5
0,6	4,8
0,8	6,5
1,0	7,1
1,2	6,6
1,3	5,8
1,5	4,1

3. Определить коэффициенты уравнения регрессии в форме пользователя. Сделать выводы.

4. Построить график по данным эксперимента, построить на графике линию тренда и вывести уравнение регрессии и коэффициент детерминации.

5. Найти коэффициент крутки α, при котором льняная пряжа имеет наибольшую прочность.

Самостоятельная работа

1. Определить уравнение регрессии с помощью функций ЛИНЕЙН( ), ЛГРФПРИБЛ( ) и в форме пользователя. Определить границы, в которых справедливо данное уравнение.

2. Оценить адекватность полученной регрессионной зависимости (**R^2**).

3. Определить расчетные значение y по полученному уравнению регрессии. Сравнить с фактическими значениями y, сделать выводы.

4. Определить достоверность величины коэффициента детерминации R^2. Сделать выводы.

5. Определить коэффициенты Стьюдента для всех коэффициентов регрессии: b и m_i.

6. Определить значение вероятности β для всех коэффициентов регрессии.

7. Определить вероятность того, что значения коэффициентов регрессии достоверны. Сделать выводы.

8. Определить коэффициенты регрессии для данной математической модели по методу наименьших квадратов, решив систему уравнений.

9. Построить график для данной зависимости, построить на графике линию тренда и вывести уравнение регрессии и коэффициент детерминации.

10. Найти оптимальные значения величины X.

11. Сравнить полученные математический зависимости, сделать выводы.

Для следующих вариантов задания:

Вариант 1

Зависимость коэффициента вариации по относительному разрывному удлинению от величины крутки для полипропиленовых швейных ниток из пряжи 25 текс x2 в 2 сложения

Заправочная крутка, К, кр/м	100	150	200	250	300	350	400	450	500
Коэффициент вариации по относительному разрывному удлинению, CV_{ε}, %	8,429	7,258	6,336	6,118	6,019	6,587	6,93	7,011	7,032

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА N 7

ЛОГИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

В Excel имеются логические функции, список которых можно увидеть, нажав на кнопку **Мастера функций** и выбрав в диалоговом окне функцию **Логические**.

При решении ряда задач значение ячейки необходимо вычислять одним из нескольких способов в зависимости от того, выполняется или нет некоторое условие или несколько условий.

1. Логическая функция ЕСЛИ

ЕСЛИ (<логическое выражение>;<выражение1>;<выражение2>),

где <логическое выражение> - условное выражение, которое принимает одно из двух значений: “Истина” или “Ложь”;

<выражение1> - значение, которое принимает функция, если <логическое выражение> = “Истина”;

<выражение2> - значение, которое принимает функция, если <логическое выражение> =“ Ложь”.

Пример.

В ячейку А3 нужно записать максимальное из двух чисел, содержащихся в ячейках А1 и А2. Формула, введенная в ячейку А3, будет иметь вид:

=**ЕСЛИ**(А1>А2;А1;А2)

В качестве <выражения1> или <выражения2> можно записать вложенную функцию **ЕСЛИ**. Число вложенных **ЕСЛИ** не должно превышать семи. На месте логического выражения можно использовать одну из логических функций **И** или **ИЛИ.**

2. Логическая функция И

И (<логическое выражение 1>;<логическое выражение2>;...),

В скобках может быть указано до пятидесяти логических выражений. Функция **И** принимает значение “Истина”, если одновременно все логические выражения истинны.

Пример.

Определить, входит ли в заданный диапазон (5;10) число, содержащееся в ячейке А1. Ответ должен быть получен в ячейке Н1. Формула, введенная в ячейку Н1, будет иметь вид:

= **ЕСЛИ** (**И** (А1>5; А1<10); “число принадлежит заданному диапазону”; “число не принадлежит заданному диапазону”)

3. Логическая функция ИЛИ

ИЛИ (<логическое выражение 1>;<логическое выражение2>;...),

В скобках может быть указано также до пятидесяти логических выражений. Функция **ИЛИ** принимает значение “Истина”, если хотя бы одно из логических выражений истинно.

Пример.

Определить, входит ли в диапазон (∞; 5) и (10; ∞) число, содержащееся в ячейке A1. Ответ должен быть получен в ячейке H1. Формула, введенная в ячейку H1, будет иметь вид:

= **ЕСЛИ** (**ИЛИ** (A1<5; A1>10); “число принадлежит заданному диапазону”; “число не принадлежит заданному диапазону”).

Задание.

Найти крутку, при которой льняная пряжа имеет наибольшую прочность, используя уравнение, полученное в лабораторной работе № 1. Поиск вести с точностью ε=0,1 на интервале (0;2), используя метод золотого сечения, метод деления пополам, метод с использованием производной.

Самостоятельная работа

1.Для математической модели, найденной при выполнении самостоятельной работы в лабораторной работе №1, найти оптимальные значения переменной *X* (*min* или *max* в зависимости от условий задачи). Поиск вести с точностью ε=0,1 на интервале (*min*; *max*), используя метод золотого сечения, метод деления пополам, метод с использованием производной.

2.В тетрадь записать алгоритм для метода золотого сечения, метода деления пополам и метода с использованием производной с использованием логических функций.

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА N 8

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Задание.

Определить, в каком количестве надо выпускать продукцию четырех типов, для изготовления которой требуются ресурсы трех видов: трудовые, сырье, финансы, чтобы прибыль, полученная от реализации данной продукции, была максимальной. Количество ресурса каждого вида, необходимое для выпуска единицы продукции данного типа, а также прибыль, получаемая от реализации единицы каждого типа продукции, и наличие располагаемого ресурса приведены в табл. 1.

Таблица 1

Производственное задание

Ресурс	Продукция 1	Продукция 2	Продукция 3	Продукция 4	Наличие
Трудовые	1	1	1	1	16
Сырье	6	5	4	3	110
Финансы	4	6	10	13	100
Прибыль	60	70	120	130	max

1. Построение математической модели

Для решения поставленной задачи необходимо построить ее математическую модель.

1. Выберем целевую функцию задачи: F – прибыль, полученная от реализации всей продукции.

2. Выберем управляемые переменные:

X_1 - количество выпускаемой продукции 1-го типа;

X_2 - количество выпускаемой продукции 2-го типа;

X_3 - количество выпускаемой продукции 3-го типа;

X_4 - количество выпускаемой продукции 4-го типа.

3. Составим ограничения для всех видов ресурса:

$$X_1+ X_2+X_3+ X_4\le 16$$

$$6X_1+5 X_2+4X_3+ 3X_4\le 110$$

$$4X_1+6 X_2+10X_3+13 X_4\le 100$$

$X_1\ge 0,\ X_2\ge 0,\ X_3\ge 0,\ X_4\ge 0$– условие неотрицательности.

4. Составим целевую функцию задачи:

$$F=60X_1+ 70X_2+120X_3+ 130X_4\to \max$$

2. Ввод условий задачи

1. Для решения данной задачи в EXCEL необходимо ввести условия в следующей форме:

			Перемен-ные				
	X_1	**X_2**	**X_3**	**X_4**			
Значение							
Нижн.гр							
Верх.гр.							
Коэф.в ЦФ					ЦФ		
			Ограниче-ния				
					Левая часть	Знак	Правая часть
Трудовые							
Сырье							
Финансы							

Весь текст в таблице является комментарием и на решение задачи не влияет.

2. В созданную форму необходимо ввести исходные данные:

			Перемен-ные				
	X_1	**X_2**	**X_3**	**X_4**			
Значение							
Нижн.гр.							
Верх.гр.							
Коэф.в ЦФ	60	70	120	130	*ЦФ*		
			Ограниче-ния				
					Левая часть	Знак	Правая часть
Трудовые	1	1	1	1		≤	16
Сырье	6	5	4	3		≤	110
Финансы	4	6	10	13		≤	100

3. В созданную форму ввести зависимости из математической модели.

3.1. Ввести зависимость для целевой функции. Для этого поместить курсор в ячейку, обозначенную **ЦФ**, вызвать **Мастер функций**, в окне Категория выбрать **Математические,** в окне **Функции** выбрать СУММПРОИЗВ:

в массив 1 - ввести номера ячеек, где будут находиться **Значения** переменных X_1, X_2, X_3, X_4;

в массив 2 - номера ячеек, где находятся **Коэф.в ЦФ** этих переменных.

3.2. Ввести зависимости для левых частей ограничений. Для этого поместить курсор в ячейку для левой части соответствующего ограничения, выбрать функцию СУММПРОИЗВ:

в массив 1 - ввести номера ячеек, где будут находиться **Значения** переменных X_1, X_2, X_3, X_4;

в массив 2 - номера ячеек, где находятся коэффициенты при данных переменных в соответствующих ограничениях.

3. Поиск решения

1. Для поиска решения установить курсор в ячейку **ЦФ**, в главном меню выбрать пункт **Сервис, Поиск решения**. На экране появится диалоговое окно **Поиск решения**.

2. В окне **Установить целевую ячейку** – ввести адрес ячейки **ЦФ**. Выбрать максимальное или минимальное значение целевой функции.

3. В поле **Изменяя ячейки** – ввести адреса ячеек, где будут находиться вместо **Значения** переменных X_1, X_2, X_3, X_4.

4. В окне **Ограничения** с помощью кнопки **Добавить…** последовательно ввести все ограничения задачи линейного программирования. В дан-

ной задачи левая часть ограничений по ресурсам должна быть ≤ правой части. Последовательно устанавливая курсор в ячейки, где будут находиться **Значения** переменных X_1, X_2, X_3, X_4. ввести условие неотрицательности переменных. После ввода последнего ограничения **Добавить…** ввести **ОК**. Если при вводе задачи возникает необходимость в изменении или удалении внесенных ограничений, то это делается с помощью кнопок **Изменить…**, **Удалить.**

4. Решение задачи

После ввода данных выбрать кнопку **Параметры…**, на экране диалоговое окно **Параметры поиска решения.** С помощью команд, находящихся в этом диалоговом окне, можно вводить условия для решения задач оптимизации всех классов. Вместе с тем, команды, используемые по умолчанию, подходят для решения большей части практических задач.

Максимальное время служит для назначения времени в секундах, выделяемого на поиск решения задачи. В поле можно ввести время, не превышающее 32767 с (более 9 часов). Значение 100 с, используемое по умолчанию, подходит для решения большинства задач.

Предельное число итераций служит для назначения числа итераций. Используемое по умолчанию значение 100 подходит для решения большинства задач.

Установить флажок **Линейная модель**, что обеспечивает применение симплекс-метода.

После задания всех параметров поиска решения выбрать **ОК.**

В диалоговом окне **Поиск решения** выбрать кнопку **Выполнить.** На экране появится диалоговое окно **Результаты поиска решения:** Решение найдено. Все ограничения и условия оптимальности выполнены. После нажатия **ОК** результаты оптимального решения появятся в исходной таблице:

$$X_1=10,\ X_2=0,\ X_3=6,\ X_4=0.$$

При этом максимальная прибыль будет составлять F=1320, а количество использованных ресурсов равно:

трудовых – 16;

сырья – 84;

финансов – 100.

Таково оптимальное решение рассматриваемой задачи распределения ресурсов.

5. Анализ оптимального решения

Анализ оптимального решения начинается после успешного решения задачи, когда на экране появляется диалоговое окно **Результаты поиска решения.** С помощью этого диалогового окна можно вызвать отчеты трех типов:

- результаты;
- устойчивость;
- пределы.

Все отчеты вызываются на новом листе, на ярлычке которого указано название отчета.

Отчет по результатам состоит из трех таблиц:

- таблица 1 приводит сведения о целевой функции. В столбце Исходно приведены значения целевой функции до начала вычислений;
- таблица 2 приводит значения искомых переменных, полученные в результате решения задачи;
- таблица 3 показывает результаты оптимального решения для ограничений и для граничных условий.

Для ограничений в графе Формула приведены зависимости, которые были введены в диалоговое окно Поиск решения. В графе Значение приведены величины использованного ресурса; в графе Разница показано количество неиспользованного ресурса. Если ресурс используется полностью, то в графе Состояние указывается «связанное»; при неполном использовании ресурса в этой графе указывается «не связан».

Для *Граничных условий* приводятся аналогичные величины с той лишь разницей, что вместо величины неиспользованного ресурса показана разность между значением переменной в найденном оптимальном решении и заданным для нее граничным условием.

Отчет по устойчивости состоит из двух таблиц**.**

В таблице 1 приводятся следующие значения для переменных:

- результат решения задачи;
- редуцированная стоимость, т.е. дополнительные двойственны переменные, которые показывают, насколько изменяется целевая функция при принудительном включении единицы этой продукции в оптимальное решение;
- коэффициенты целевой функции;
- предельные значения приращения коэффициентов целевой функции, при которых сохраняется набор переменных, входящих в оптимальное решение.

В таблице 2 приводятся аналогичные значения для ограничений:

- величина использованных ресурсов;
- теневая цена, т.е. двойственная оценка, которая показывает, как изменится целевая функция при изменении ресурсов на единицу;
- значения приращения ресурсов, при которых сохраняется оптимальный набор переменных, входящих в оптимальное решение.

Отчет по пределам показывает, в каких пределах может изменяться выпуск продукции, вошедшей в оптимальное решение, при сохранении структуры оптимального решения:

- приводится значение X_i в оптимальном решении;
- приводятся нижние пределы изменения значений X_i.

Кроме этого, в отчете указаны значения целевой функции при выпуске данного типа продукции на нижнем пределе. Так, при значении 720 видно, что $F=c_1 X_1+ c_3 X_3=60*0+120*6=720$.

Далее приводятся верхние пределы изменения X_i и значения целевой функции при выпуске продукции, вошедшей в оптимальное решение на верхних пределах. Поэтому везде

$$F=c_1 X_1+ c_3 X_3=60*10+120*6=1320.$$

Самостоятельная работа

1.Составить математическую модель задачи линейного программирования.

2.Решить задачу линейного программирования с помощью электронной таблицы Excel.

3.Получить и проанализировать отчеты по результатам, по устойчивости и по пределам.

4.Решить задачу линейного программирования графическим методом.

5.Решить задачу линейного программирования симплекс-методом.

6.Составить двойственную задачу линейного программирования.

7.Решить двойственную задачу линейного программирования с помощью электронной таблицы Excel.

8.Решить двойственную задачу линейного программирования симплекс-методом.

Для следующих вариантов задания:

Вариант 1

В швейном цехе имеется 84 м ткани. На пошив одного халата требуется 4 м ткани, а на одну куртку – 3 м. Сколько следует изготовить халатов и курток для получения наибольшей прибыли от реализации продукции, если халат стоит 6$, а куртка - 3$. Известно, что халатов можно изготовить не более 15, а курток – не более 20 штук.

2.5. Практические занятия

1. Аналитический метод определения оптимума в задачах безусловной одномерной оптимизации – 2 часа.

2. Численные методы определения оптимума. Метод деления пополам или дихотомический поиск. Метод золотого сечения. Метод с использованием производной целевой функции – 4 часа.

3. Аналитический метод определения оптимума в задачах безусловной многомерной оптимизации – 2 часа.

4. Численные методы определения оптимума. Симплекс-метод – 2 часа.

5. Геометрический метод решения задач линейного программирования – 2 часа.

6. Симплекс-метод решения задач линейного программирования – 2 часа.

7. Двойственная задача линейного программирования – 2 часа.

8. Решение транспортной задачи методом линейного программирования – 2часа.

9. Диссоциативно-шаговый метод определение оптимума многомерной целевой функции – 2 часа.

2.6. Курсовая работа

Курсовая работа по данной дисциплине представляет собой разработку одной из реальных оптимизационных задач швейного производства с целью практического применения полученных знаний при решении конкретных задач. Цель курсовой работы заключается в построении математической модели процесса и выборе наиболее эффективных математических методов оптимизации.

Курсовая работа содержит необходимые в соответствии с требованиями нормоконтроля разделы.

Структура курсовой работы

ВВЕДЕНИЕ(указывается цель и задачи курсовой работы)

1. МОДЕЛИРОВАНИЕ И ОПТИМИЗАЦИЯ ОДНОМЕРНОЙ ЦЕЛЕВОЙ ФУНКЦИИ

   1.1 Моделирование одномерной целевой функции

      1.1.1 Определение уравнения линейной регрессии (расчет коэффициентов регрессии, оценка достоверности уравнения регрессии, оценка достоверности коэффициентов регрессии)

      1.1.2 Определение уравнения нелинейной регрессии

      1.1.3 Определение уравнения нелинейной регрессии в форме пользователя (графическое представление уравнения регрессии)

   1.2 Оптимизация одномерной целевой функции

      1.2.1 Аналитический метод определение оптимума одномерной целевой функции

      1.2.2 Численный метод деления пополам определение оптимума одномерной целевой функции

      1.2.3. Численный метод золотого сечения определение оптимума одномерной целевой функции

      1.2.4 Численный метод с использованием производной определение оптимума одномерной целевой функции

      1.2.5. Численный метод Фибоначчи определение оптимума одномерной целевой функции

      1.2.6 Определение оптимума одномерной целевой функции с помощью электронной таблицы Excel

2. МОДЕЛИРОВАНИЕ И ОПТИМИЗАЦИЯ МНОГОМЕРНОЙ ЦЕЛЕВОЙ ФУНКЦИИ

   2.1 Моделирование многомерной целевой функции

      2.1.1 Определение уравнения линейной регрессии (расчет коэффициентов регрессии, оценка достоверности уравнения регрессии, оценка достоверности коэффициентов регрессии)

      2.1.2 Определение уравнения нелинейной регрессии

2.1.3 Определение уравнения нелинейной регрессии в форме пользователя (графическое представление уравнения регрессии)

2.2 Оптимизация многомерной целевой функции

2.2.1 Аналитический метод определение оптимума многомерной целевой функции

2.2.2 Диссоциативно-шаговый метод определение оптимума многомерной целевой функции

2.2.3 Определение оптимума многомерной целевой функции с помощью электронной таблицы Excel

3. МОДЕЛИРОВАНИЕ И ОПТИМИЗАЦИЯ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ С ПОМОЩЬЮ МЕТОДА ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

3.1 Построение математической модели задачи линейного программирования

3.2 Графический метод решения задачи линейного программирования

3.3 Симплекс-метод решения задачи линейного программирования

3.4 Решение двойственной задачи линейного программирования

3.5 Решение задачи линейного программирования с помощью электронной таблицы Excel

ЗАКЛЮЧЕНИЕ (делаются выводы по работе)

ПРИЛОЖЕНИЯ

ГРАФИК ВЫПОЛНЕНИЯ КУРСОВОЙ РАБОТЫ

№ недели	Дата	Раздел курсовой работы
1,2	1.09-10.09	Выдача задания к курсовой работе
3,4	11.09-23.09	1.1 Моделирование одномерной целевой функции 1.2 Оптимизация одномерной целевой функции
4		Контрольная точка 1
5,6	25.09-7.10	2.1 Моделирование многомерной целевой функции
7,8	9.10-21.10	2.2 Оптимизация многомерной целевой функции

8		Контрольная точка 2
9,10	23.10-4.11	3.1 Построение математической модели задачи линейного программирования 3.2 Графический метод решения задачи линейного программирования
11,12	6.11-18.11	3.3 Симплекс-метод решения задачи линейного программирования
13,14	20.11-2.12	3.4 Решение двойственной задачи линейного программирования
15	4.12-9.12	3.5 Решение задачи линейного программирования с помощью электронной таблицы Excel
15		Контрольная точка 3
16	11.12-16.12	Оформление курсовой работы
17,18	18.12-30.12	Защита курсовой работы

2.7. Контроль знаний студентов

2.7.1. Перечень форм контроля

Промежуточный контроль знаний студентов осуществляется при подготовке к работе, выполнении и сдаче каждого задания лабораторной работы, а так же во время контрольных точек при выполнении курсовой работы.

В качестве заключительного контроля знаний студентов в 9 семестре служат курсовая работа и экзамен. К экзамену допускаются студенты при выполнении и защите всех лабораторных работ.

2.7.2. Оценка знаний студентов

Нормы оценки знаний предполагают учет индивидуальных особенностей студентов, дифференцированный подход к обучению, проверке знаний, умений.

В устных ответах студентов на экзамене и при защите курсовой работы учитываются: глубина знаний, полнота знаний и владение необходимыми умениями (в объеме полной программы); осознанность и самостоятельность применения знаний и способов учебной деятельности, логичность изложения материала, включая обобщения, выводы (в соответствии с заданным вопросом), соблюдение норм литературной речи.

2.7.3. Критерии оценки

Оценка знаний на экзамене и при защите курсовой работы производится по четырех балльной системе.

Оценка "пять" – материал усвоен в полном объеме; изложен логично; основные умения сформулированы и устойчивы; выводы и обобщения точны.

Оценка "четыре" – в усвоении материала незначительные пробелы, изложение недостаточно систематизированное; отдельные умения недостаточно устойчивы; в выводах и обобщениях допускаются некоторые неточности.

Оценка "три" – в усвоении материала имеются пробелы: материал излагается несистематизированно; отдельные умения недостаточно сформулированы; выводы и обобщения аргументированы слабо; в них допускаются ошибки.

Оценка "два" – основное содержание материала не усвоено, выводов и обобщений нет.

2.8. Перечень экзаменационных вопросов

1. Математическая модель технологического процесса. Методы получения математических моделей технологических процессов.
2. Моделирование технологических процессов на ЭВМ.
3. Математическая модель и виды моделирования.
4. Классификация методов моделирования.
5. Классификация и содержание задач оптимизации и моделирования технологических процессов.
6. Шкалы измерения параметров.
7. Виды связи между параметрами.
8. Графические методы выявления и оценки связи между параметрами.
9. Корреляционный анализ.
10. Коэффициент корреляции.

11.Регрессионном анализ.

12.Выбор вида функциональной зависимости.

13.Сущность и основные понятия метода статистического моделирования.

14.Моделирование случайных явлений, случайных событий и случайных величин.

15.Достоинства и недостатки метода Монте-Карло.

16.Основные понятия и этапы сетевого планирования.

17.Преимущества сетевого планирования и управления комплексом работ.

18.Правила построения сетевого графика.

19.Параметры сетевого графика.

20.Анализ и оптимизация сетевого графика.

21.Предмет и основные понятия теории массового обслуживания.

22.Состав систем массового обслуживания и характеристика её элементов.

23.Типы задач, решаемых на базе теории массового обслуживания.

24.Классификация систем массового обслуживания.

25.Условия работы и характеристики систем массового обслуживания.

26.Основная задача и основные понятия математического программирования.

27.Классификация задач математического программирования.

28.Основные понятия, используемые в задачах оптимизации технологических процессов.

29.Критерии оптимизации. Классификация критериев оптимизации.

30.Виды оптимизационных задач.

31.Основные классы задач оптимизации и методы их решения.

32. Аналитический метод определения оптимума в задачах безусловной одномерной оптимизации.

33. Численные методы определения оптимума. Метод деления пополам или дихотомический поиск.

34.Численные методы определения оптимума. Метод золотого сечения.

35.Численные методы определения оптимума. Метод с использованием производной целевой функции.

36.Аналитический метод определения оптимума в задачах безусловной многомерной оптимизации.

37.Симплекс-метод поиска оптимума многомерной целевой функции.

38.Геометрический метод решения задач линейного программирования.

39.Симплекс-метод решения задач линейного программирования.

40.Двойственная задача линейного программирования и ее применение.

41.Решение транспортной задачи методом линейного программирования.

42.Нелинейное программирование.

43.Диссоциативно-шаговый метод поиска оптимума.

44.Метод динамического программирования.

Пример задач к экзамену

Для выпуска двух видов изделий используется три вида ресурсов. Известны запасы ресурсов, количество ресурсов и прибыль на единицу продукции

Вид сырья	Запасы ресурсов	Количество ресурсов на единицу продукции	
		P1	P2
C1	20	2	5
C2	40	8	5
C3	30	5	6
Прибыль от единицы продукции		50	40

Необходимо так спланировать производство, чтобы прибыль, получаемая от реализации продукции, была наибольшей.

1. Решить задачу графическим методом.
2. Решить задачу симплекс-методом.
3. Решить задачу с использованием Excel.

3. УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКИЕ МАТЕРИАЛЫ ПО ДИСЦИПЛИНЕ. РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

3.1. Основная литература

1. Севостьянов П.А. Математические методы обработки данных. Учебное пособие для вузов, - М.: МГТУ им. А.Н.Косыгина, 2004.

2. Севостьянов А.Г., Севостьянов П.А. Моделирование технологических процессов,- М.: Легкая и пищевая промышленность, 1984.

3. Севостьянов А.Г., Севостьянов П.А. Оптимизация механико-технологических процессов текстильной промышленности,- М.: Легпромбытиздат, 1991.

4. Вентцель Е.С. Теория вероятностей и ее инженерное приложение: Учебное пособие. Рек. МО РФ. - М.: Высшая школа, 2000.

3.2. Дополнительная литература

1. Севостьянов А.Г. Методы и средства исследования механико-технологических процессов текстильной промышленности, - М.: Легкая и пищевая промышленность, 1980.

2. Тюрин Ю.Н., Макаров А.А. Статистический анализ данных на компьютере/ Под ред. Фигурнова В.Э. - М.: ИНФРА, 1998.

3. Орвис В.Дж. EXCEL для ученых, инженеров и студентов: Пер. с англ. - Киев: Юниор, 1999.

4. Рыжиков Ю.И. Решение научно-технических задач на персональном компьютере: Для студентов и инженеров. -Спб.: КОРОНА принт, 2000.

5. Васильев О.В., Аргучинцев А.В. Методы оптимизации в задачах и упражнениях: Учебное пособие. - М.: Физматлит, 1999.

6. Н.Джонсон, Ф.Лион Статистика и планирование эксперимента в технике и науке. Методы обработки данных.- М.: Издательство «Мир», 1990.

3.3 Методическое обеспечение дисциплины

1. Абакумова И.В., Рыбакова Л.В., Садовская М.Н Построение математических моделей средствами Excel. Учебно-методическое пособие. Амурский гос.ун-т, Благовещенск, 2000.
2. Абакумова И.В., Тибенко Т.А., Сухова Т.Н. Обработка данных средствами Excel. Учебно-методическое пособие. Амурский гос.ун-т, Благовещенск, 2006.

3.4 Технические средства обеспечения дисциплины

1. Компьютер.
2. Электронная таблица MS Excel.

4. УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКАЯ КАРТА ДИСЦИПЛИНЫ

4.1 Учебно-методическая карта дисциплины для специальности 260901

9 семестр

№ недели	№ темы лекции	Вопросы, рассматриваемые в лекции	№ практического занятия	№ лабораторной работы	Самостоятельная работа студентов		
					содержание	часы	форма контроля
1	2	3	4	5	6	7	8
1, 2	1	Основные понятия теории моделирования технологических процессов и объектов в производстве изделий легкой промышленности	1	1	1. Построение математической модели по индивидуальному заданию. 2. Оформление отчета в тетради 3. Выполнение индивидуального практического задания	6	Защита лабораторной работы с предоставлением отчета и индивидуального задания.
3, 4	2	Способы задания исходной информации для моделирования технологических процессов изготовления швейных изделий	2	2	1. Построение математической модели по индивидуальному заданию. 2. Оформление отчета в тетради 3. Выполнение индивидуального практического задания	5	Защита лабораторной работы с предоставлением отчета и индивидуального задания.
5, 6	3	Стохастическое моделирование технологических процессов. Метод Монте – Карло	3	3	1. Построение математической модели по индивидуальному заданию. 2. Оформление отчета в тетради 3. Выполнение индивидуального практического задания	6	Защита лабораторной работы с предоставлением отчета и индивидуального задания.

1	2	3	4	5	6	7	8
7, 8	4	Моделирование технологических процессов на основе теории графов. Сетевое планирование и управление комплексом работ.	4	4	1. Построение математической модели по результатам однофакторного и многофакторного экспериментов по индивидуальному заданию. 2. Оформление отчета в тетради.	6	Защита лабораторной работы с предоставлением отчета и индивидуального задания.
9, 10	5	Применение теории массового обслуживания при проектировании и организации технологических процессов	5	5	1. Построение графика математической модели по индивидуальному заданию. 2. Оформление отчета в тетради 3. Выполнение индивидуального практического задания	6	Защита лабораторной работы с предоставлением отчета и индивидуального задания.
11, 12, 13, 14	6	Методы оптимизации технологических процессов. Критерии оптимизации и их выбор при решении различных задач моделирования технологических процессов	6, 7	6, 7	1. Построение математической модели по индивидуальному заданию. 2.Расчет оптимальных значений математической модели. 3. Оформление отчета в тетради. 4. Выполнение индивидуального практического задания	6	Защита лабораторной работы с предоставлением отчета и индивидуального задания.
15, 16, 17, 18	7	Решение задач линейного программирования	8, 9	8	1. Построение математической модели по индивидуальному заданию. 2. Оформление отчета в тетради 3. Выполнение индивидуального практического задания	6	Защита лабораторной работы с предоставлением отчета и индивидуального задания.

4.2 Учебно-методическая карта дисциплины для специальности 260902

8, 9 семестр

№ недели	№ темы лекции	Вопросы, рассматриваемые в лекции	№ лабораторной работы	Самостоятельная работа студентов		
				содержание	часы	форма контроля
1	2	3	4	5	6	7
1, 2 3, 4	1	Основные понятия теории моделирования технологических процессов и объектов в производстве изделий легкой промышленности			2	
5, 6 7, 8	2	Способы задания исходной информации для моделирования технологических процессов изготовления швейных изделий			2	
9, 10 11, 12 13	3	Стохастическое моделирование технологических процессов. Метод Монте – Карло			2	
14, 15 1, 2 3, 4	4	Моделирование технологических процессов на основе теории графов. Сетевое планирование и управление комплексом работ.	1, 2	1. Построение математической модели по индивидуальному заданию. 2. Оформление отчета в тетради 3. Выполнение индивидуального практического задания.	8	Защита лабораторной работы с предоставлением отчета и индивидуального задания.

1	2	3	4	5	6	7
5, 6 7, 8 9, 10	5	Применение теории массового обслуживания при проектировании и организации технологических процессов	3, 4 ,5	1. Построение математической модели по индивидуальному заданию. 2. Построение графика математической модели по индивидуальному заданию. 3. Оформление отчета в тетради 4. Выполнение индивидуального практического задания	8	Защита лабораторной работы с предоставлением отчета и индивидуального задания.
11, 12 13, 14	6	Методы оптимизации технологических процессов. Критерии оптимизации и их выбор при решении различных задач моделирования технологических процессов	6, 7	1. Построение математической модели по индивидуальному заданию. 2.Расчет оптимальных значений математической модели. 3. Оформление отчета в тетради. 4. Выполнение индивидуального практического задания	9	Защита лабораторной работы с предоставлением отчета и индивидуального задания.
15, 16, 17, 18	7	Решение задач линейного программирования	8	1. Построение математической модели по индивидуальному заданию. 2. Оформление отчета в тетради 3. Выполнение индивидуального практического задания	10	Защита лабораторной работы с предоставлением отчета и индивидуального задания.

СОДЕРЖАНИЕ

Ирина Валентиновна Абакумова,

доцент кафедры конструирования и технологии одежды АмГУ

Моделирование и оптимизация технологических процессов
Учебно-методический комплекс по дисциплине для специальностей
260901 – «Технология швейных изделий»,
260902 – «Конструирование швейных изделий»,
