Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
АМУРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

ПРАКТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ
ЧАСТЬ ПЕРВАЯ
ГИПЕРБОЛИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ

Учебно-методическое пособие

Благовещенск
Издательство АмГУ
2019

УДК
ББК

Рекомендовано
учебно-методическим советом университета

Рецензент:
Е.М. Веселова, доцент кафедры математического анализа и моделирования АмГУ, кандидат физ.-мат. наук.

Практическое решение уравнений математической физики. Часть первая. Гиперболические уравнения. Учебное пособие / сост. Т.В. Труфанова – Благовещенск: Амурский гос. ун-т, 2019. – 32 с.

В учебном пособии рассматриваются примеры решения уравнений математической физики гиперболического типа. Подробно рассмотрены задачи двумя методами: методом характеристик Даламбера и методом разделения переменных Фурье.

Пособие предназначено для студентов, обучающихся по направлению подготовки 01.04.02 – «Прикладная математика и информатика», 24.03.01-«Ракетные комплексы и космонавтика», 03.03.02 – «Физика», 01.03.02- «Прикладная математика и информатика», а также может быть использовано студентами других направлений, занимающихся решением прикладных задач в постановке уравнений с частными производными и для преподавателей, начинающих вести эти предметы.

В авторской редакции

Введение

В пособии подробно решены задачи для гиперболического типа двумя методами: методом характеристик Даламбера и методом разделения переменных Фурье.

Решения задач сопровождаются подробным разъяснением применимых методов и понятий. Однако автором не ставилось цели изложения теории. Методы решения излагаются для усвоения алгоритма и иллюстрируются решением конкретных задач. Данное пособие содержит не очень большое число задач и представляет собой первую часть практического курса, содержащую только гиперболический тип.

Уравнения в частных производных имеют бесчисленное множество решений. Чтобы выделить одно, описывающее конкретный процесс, требуется, чтобы решение удовлетворяло некоторым дополнительным условиям, которые вытекают из постановки физической задачи. Если дополнительные условия задаются в начальный момент времени, то их называют начальными. Если искомая функция или ее производные задаются на границе рассматриваемой области, то дополнительные условия называются граничными.

§1. Задача Коши

Одной из важных задач в теории распространения волн является задача Коши. Постановка задачи: требуется найти решение волнового уравнения, удовлетворяющего начальным условиям. Это соответствует физической задаче о струне относительно больших размеров. Для однозначности задания движения струны достаточно задать начальные положения и скорости всех точек струны.

На приведенном ниже примере продемонстрируем следующие этапы:

1) привести линейное уравнение в частных производных второго порядка с переменными коэффициентами к каноническому виду;

2) проделать дальнейшее упрощения;

3) найти общее решение исходного уравнения;

4) используя начальные условия, найти единственное решение поставленной задачи.

Задача 1 Требуется найти решение уравнения

$$U_{xx} + 2\sin x \cdot U_{xy} - \cos^2 x \cdot U_{yy} + U_x + (\sin x + \cos x + 1)U_y = 0. \qquad (1.1)$$

удовлетворяющее начальным условиям

$$U(x,y)|_{y=-\cos x} = 1 + 2\sin x,$$

$$U_y(x,y)\big|_{y=-\cos x} = \sin x. \qquad (1.2)$$

▼Решение.

1. Приведем уравнение к каноническому виду.

а) Для этого запишем дифференциальное уравнение характеристик

$$dy^2 - 2\sin x\,dy\,dx - \cos^2 x\,dx^2 = 0,$$

или

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 2\sin x\frac{dy}{dx} - \cos^2 x = 0.$$

Это уравнение гиперболического типа, так как для любой точки имеем:

$D = b^2 - 4ac = 4\sin^2 x + 4\cos^2 x = 4 > 0$, следовательно

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{2\sin x \pm 2}{2} = \sin x \pm 1$$

или

$$\frac{dy}{dx} = \sin x + 1 \quad ; \qquad \frac{dy}{dx} = \sin x - 1$$

Отсюда находим первые интегралы (характеристики):

$$y = \int(\sin x + 1)\,dx = -\cos x + x + c$$

$$y = -\cos x - x + c$$

б) Сделаем замену переменных, чтобы привести уравнение к каноническому виду. Новые переменные вводим равенствами:

$$\begin{cases} \zeta = -x + y + \cos x\,, \\ \eta = x + y + \cos x. \end{cases} \qquad (1.3)$$

Пересчитаем производные входящие в уравнение (1.1) по новым переменным:

$$U_x = U_\varsigma(-1 - \sin x) + U_\eta(1 - \sin x)$$

$$U_y = U_\varsigma + U_\eta$$

$$U_{yy} = U_{\varsigma\varsigma} + 2U_{\varsigma\eta} + U_{\eta\eta}$$

$$U_{xx} = U_{\varsigma\varsigma}(1 + \sin x)^2 - U_\varsigma \cos x + U_{\varsigma\eta}(-1 - \sin x)(1 - \sin x) +$$

$$+U_{\eta\eta}(1 - \sin x)^2 - U_\eta \cos x + U_{\eta\varsigma}(1 - \sin x)(-1 - \sin x) =$$

$$= U_{\varsigma\varsigma}(1 + 2\sin x + \sin^2 x) - U_\varsigma \cos x - 2U_{\varsigma\eta}(1 - \sin^2 x) +$$

$$+U_{\eta\eta}(1 - 2\sin x + \sin^2 x) - U_\eta \cos x$$

$U_{xy} = U_{\varsigma\varsigma}(-1-\sin x) + U_{\eta\varsigma}(-1-\sin x) + U_{\eta\eta}(1-\sin x) + U_{\eta\varsigma}(1-\sin x) =$

$= -U_{\varsigma\varsigma}(1+\sin x) - 2\sin x\, U_{\varsigma\eta} + U_{\eta\eta}(1-\sin x)$

Подставим производные в исходное уравнение (1.1) и проделов простейшие преобразования получаем:

$U_{\varsigma\varsigma}(1+2\sin x+\sin^2 x) - U_\varsigma \cos x - 2U_{\varsigma\eta}(1-\sin^2 x) +$

$+U_{\eta\eta}(1-2\sin x+\sin^2 x) - U_\eta \cos x -$

$-2\sin x\,(1+\sin x)U_{\varsigma\varsigma} - 4\sin^2 x\, U_{\varsigma\eta} + 2\sin x\,(1-\sin x)U_{\eta\eta} - \cos^2 x\, U_{\varsigma\varsigma} -$

$-\, 2\cos^2 x\, U_{\varsigma\eta} - \cos^2 x\, U_{\eta\eta} - (1+\sin x)U_\varsigma + (1-\sin x)U_\eta + \sin x U_\varsigma +$

$+\cos x U_\varsigma + 1U_\varsigma + \sin x U_\eta + \cos x U_\eta + U_\eta = 0$

$U_{\varsigma\varsigma}(1+2\sin x+\sin^2 x - 2\sin x - 2\sin^2 x - \cos^2 x) + U_{\eta\eta}(1-2\sin x +$

$+\sin^2 x + 2\sin x - 2\sin^2 x - \cos^2 x) + U_{\varsigma\eta}(2\sin^2 x - 2 - 4\sin^2 x - 2\cos^2 x) -$

$-U_\varsigma(1+\sin x - 1 - \sin x) + U_\eta(1-\sin x+\sin x+1) = 0.$

Нетрудно проверить, что получаем уравнение

$$-4U_{\varsigma\eta} + 2U_\eta = 0$$

или в каноническом виде:

$$U_{\varsigma\eta} - \tfrac{1}{2}U_\eta = 0, \qquad (1.4)$$

ясно, что тип гиперболический.

2. Проведем дальнейшие упрощение, вводя новую неизвестную функцию по формуле:

$$U(\varsigma,\eta) = e^{\lambda\varsigma+\mu\eta}v(\varsigma,\eta), \qquad (1.5)$$

подбираем постоянные λ и μ, так, чтобы коэффициент при первой производной отсутствовал. Для этого пересчитаем две производные входящие в уравнение (1.4)

$$U_\varsigma = \mu e^{\lambda\varsigma+\mu\eta}v + e^{\lambda\varsigma+\mu\eta}v_\eta$$

$$U_{\varsigma\eta} = \mu e^{\lambda\varsigma+\mu\eta}v + \mu e^{\lambda\varsigma+\mu\eta}v_\eta + e^{\lambda\varsigma+\mu\eta}v_\eta + e^{\lambda\varsigma+\mu\eta}v_{\eta\varsigma}$$

подставляя производные в (1.4) и группируя соответствующим образом находим λ и μ:

$$v_{\varsigma\eta} + \lambda v_\eta + \mu v_\varsigma + \mu\lambda v - \frac{1}{2}\mu v - \frac{1}{2}v_\eta = 0$$

$$v_{\varsigma\eta} + v_\eta(\lambda - \frac{1}{2}) + v_\varsigma\mu + v(\mu\lambda - \frac{1}{2}\mu) = 0$$

$$\lambda = \frac{1}{2} \qquad\qquad \mu = 0$$

Следовательно, уравнение (1.4) принимает канонический вид гиперболического типа в виде: $v_{\varsigma\eta} = 0$.

3. Находим общее решение исходного уравнения $v_{\varsigma\eta} = 0$. . Для этого интегрируем полученное уравнение два раза и получаем общее решение:

$$v(\varsigma, \eta) = f_1(\varsigma) + f_2(\eta).$$

Возвращаясь к первоначальной функции по формуле (1.5), получаем

$$U(\varsigma, \eta) = e^{\frac{1}{2}\varsigma} v(\varsigma, \eta) = e^{\frac{1}{2}\varsigma}\big(f_1(\varsigma) + f_2(\eta)\big) = \widehat{f_1}(\varsigma) + e^{\frac{1}{2}\varsigma} f_2(\eta).$$

Возвращаясь к переменным (x, y) смотрим (1.3), получаем общее решение уравнения (1.1) в виде:

$$U(x,y) = f_1(-x + y + \cos x) + e^{\frac{1}{2}(-x+y+\cos x)} f_2(x + y + \cos x) \qquad (1.6)$$

4. Используя начальные условия, находим единственное решение поставленной задачи.

Теперь определим произвольные функции f_1 и f_2, так, чтобы удовлетворялись условия Коши (1.2). Дифференцируя (1.6) по y получаем

$$U_y(x,y) = f_1{}'(-x + y + \cos x) + \frac{1}{2} e^{\frac{1}{2}(-x+y+\cos x)} f_2(x + y + \cos x) +$$

$$+ e^{\frac{1}{2}(-x+y+\cos x)} f_2{}'(x + y + \cos x) \qquad (1.7)$$

Подставляя начальные условия в (1.6) и (1.7) приходим к системе:

$$\begin{cases} 1 + 2\sin x = f_1(-x) + e^{-\frac{1}{2}x} f_2(x) \\ \sin x = f_1{}'(-x) + \frac{1}{2} e^{-\frac{1}{2}x} f_2(x) + e^{-\frac{1}{2}x} f_2{}'(x) \end{cases}. \qquad (1.8)$$

Решая полученную систему найдём функции f_1 и f_2,

$$\begin{cases} 2\cos x = -f_1{}'(-x) - e^{-\frac{1}{2}x} f_2(x) + e^{-\frac{1}{2}x} f_2{}'(x) \\ \sin x = f_1{}'(-x) + \frac{1}{2} e^{-\frac{1}{2}x} f_2(x) + e^{-\frac{1}{2}x} f_2{}'(x) \end{cases} +$$

$\sin x + 2\cos x = 2e^{-\frac{1}{2}x} f_2{}'(x)$

$f_2{}'(x) = e^{\frac{1}{2}x}(\frac{1}{2}\sin x + \cos x)$

Проинтегрируем последнее выражение по x

$f_2(x) = \int \frac{1}{2} e^{\frac{1}{2}x} \sin x\, dx + \int e^{\frac{1}{2}x} \cos x\, dx + C,$

взяв интеграл по частям дважды от каждого слагаемого находим значение функции $f_2(x)$

$$\int \frac{1}{2} e^{\frac{1}{2}x} \sin x\, dx = \begin{vmatrix} u = e^{\frac{1}{2}x} & dv = \sin x\, dx \\ du = \frac{1}{2} e^{\frac{1}{2}x} dx & v = -\cos x \end{vmatrix}$$

$$= -e^{\frac{1}{2}x} \cos x + \int \frac{1}{2} e^{\frac{1}{2}x} \cos x\, dx =$$

$$= \begin{vmatrix} u = e^{\frac{1}{2}x} & dv = \cos x\, dx \\ du = \frac{1}{2} e^{\frac{1}{2}x} dx & v = -\sin x \end{vmatrix} = -e^{\frac{1}{2}x} \cos x + \frac{1}{2} e^{\frac{1}{2}x} \sin x - \int \frac{1}{4} e^{\frac{1}{2}x} \sin x\, dx$$

$\frac{5}{4} \int e^{\frac{1}{2}x} \sin x\, dx = e^{\frac{1}{2}x}(\frac{1}{2}\sin x - \cos x)$, следовательно

$\int e^{\frac{1}{2}x} \sin x\, dx = \frac{4}{5} e^{\frac{1}{2}x}(\frac{1}{2}\sin x - \cos x).$

Аналогично второе слагаемое:

$$\int e^{\frac{1}{2}x} \cos x\, dx = \begin{vmatrix} u = e^{\frac{1}{2}x} & dv = \cos x\, dx \\ du = \frac{1}{2} e^{\frac{1}{2}x} dx & v = \sin x \end{vmatrix} = e^{\frac{1}{2}x} \sin x - \int \frac{1}{2} e^{\frac{1}{2}x} \sin x\, dx =$$

$$= \begin{vmatrix} u = e^{\frac{1}{2}x} & dv = \sin x\, dx \\ du = \frac{1}{2} e^{\frac{1}{2}x} dx & v = -\cos x \end{vmatrix} = e^{\frac{1}{2}x} \sin x + \frac{1}{2} e^{\frac{1}{2}x} \cos x$$

$\int e^{\frac{1}{2}x} \cos x\, dx = \frac{4}{5} e^{\frac{1}{2}x}(\sin x + \frac{1}{2}\cos x).$

Таким образом получили:

$$f_2(x) = \frac{2}{5} e^{\frac{1}{2}x} \left(\frac{1}{2}\sin x - \cos x\right) + \frac{4}{5} e^{\frac{1}{2}x} \left(\sin x + \frac{1}{2}\cos x\right) =$$

$$= e^{\frac{1}{2}x} \left(\frac{1}{5}\sin x - \frac{2}{5}\cos x + \frac{4}{5}\sin x + + \frac{2}{5}\cos x\right) = e^{\frac{1}{2}x} \sin x + C.$$

Подставляя в (1.8) находим значение $f_1(-x)$:

$$f_1(-x) = 1 + 2\sin x - e^{-\frac{1}{2}x} f_2(x)$$

$$f_1(-x) = 1 + 2\sin x - e^{-\frac{1}{2}x} e^{\frac{1}{2}x} \sin x - C = 1 + \sin x - C.$$

Подставляя $(-x + y + \cos x)$ и $(x + y + \cos x)$ вместо x в выражениях $f_1(-x)$ и $f_2(x)$, потом в (1.6) получаем решение поставленной задачи Коши (1.1), (1.2):

$U(x, y) = 1 - \sin(-x + y + \cos x) + e^{\frac{1}{2}(2y+2\cos x)} \sin(x + y + \cos x)$▲

§2. Метод разделения переменных или метод Фурье для волнового уравнения

Начнем описание алгоритмов решения смешанных задач для гиперболического типа с простейших моделей. Постепенно усложняя постановку задачи будем модифицировать метод Фурье в зависимости от вида уравнения, граничных условий, числа независимых переменных и формы колеблющихся тел.

2.1 Метод Фурье для случая двух независимых переменных. Однородная краевая задача.

Требуется найти решение смешанной задачи для одномерного волнового уравнения:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\ \{0 \le x \le l,\ 0 \le t \le T\}, \tag{2.1}$$

удовлетворяющее начальным и граничным условиям соответственно:

$$\begin{cases} u(x,0) = x \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \sin\dfrac{\pi}{2l}x + \sin\dfrac{3\pi}{2l}x \\ u(0,t) = 0 \\ \dfrac{\partial u}{\partial x}(l,t) = 0 \end{cases}, \tag{2.2}$$

где t – время;

a – скорость распространения волны;

$u(x,t)$ –отклонение от положения равновесия точки струны с абсциссой x в момент времени t;

$u(x,0) = x$ – начальное отклонение струны от положения равновесия;

$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0)=\sin\frac{\pi}{2l}x+\sin\frac{3\pi}{2l}x$ –скорость струны в начальный момент времени;

$u(0,t)=0$ – граничное условие первого рода, закрепленный конец;

$\frac{\partial u}{\partial x}(l,t)=0$ – граничное условие второго рода, свободный конец.

▼ Решение. Будем использовать метод разделения переменных для отыскания нетривиальных решений уравнения [1]. Представим решение в виде:

$$u(x,t)=X(x)\cdot T(t). \tag{2.3}$$

Подставляя предполагаемую форму решения (2.3) в уравнение (2.1), а затем разделяя переменные, приходим к двум обыкновенным дифференциальным уравнения с постоянными коэффициентами:

$$X''(x)+\lambda X(x)=0, \tag{2.4}$$

$$T''(t)+\lambda a^2 T(\mathrm{t})=0. \tag{2.5}$$

Сначала решаем задачу Штурма- Лиувилля для отыскания собственных значений и собственных функций *X(x)*. Требуется найти решения однородного дифференциального уравнения второго порядка (2.4), которое в граничных точках удовлетворяет условиям

$$X(0)=0, X'(l)=0. \tag{2.6}$$

Которые получаем с учетом заданных граничных условий:

$$u(0,t)=X(0)\cdot T(t)=0;\ u'(l,t)=X'(l)\cdot T(t)=0. \tag{2.7}$$

Общее решение уравнения (2.4) имеет вид: $X(x)=C_1\cos\sqrt{\lambda}x+C_2\sin\sqrt{\lambda}x,\ l>0$.

Используя граничные условия, находим собственные значения $\lambda_n=\left[\frac{\pi(1+2n)}{2l}\right]^2$, задача (2.4), (2.6) и нетривиальные решения в виде системы собственных функций:

$$X_n(x)=\sin\frac{\pi(1+2n)}{2l}x, n=1,2,\dots. \tag{2.8}$$

Теперь решаем уравнение (2.5), каждому собственному значению λ_n будет соответствовать функция $T_n(t)$, которую находим из решения уравнения:

$$\mathrm{T}_n''(t)+\left(\frac{\pi(1+2n)}{2l}\right)^2 a^2\,\mathrm{T}_n(\mathrm{t})=0.$$

Общее решение этого уравнения имеет вид:

$$\mathrm{T}_n(t)=A_n\cos\frac{\pi(1+2n)}{2l}at+B_n\sin\frac{\pi(1+2n)}{2l}at, \qquad (2.9)$$

где A_n и B_n – произвольные постоянные.

Подставляя найденные решения (2.8) и (2.9) в выражение (2.3), находим частные решения исходного уравнения, удовлетворяющие граничным условиям. Беря суперпозицию частных решений находим общее решение поставленной задачи:

$$u(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(A_n\cos\frac{a\pi(1+2n)}{2l}t+B_n\sin\frac{a\pi(1+2n)}{2l}t\right)\cdot\sin\frac{\pi(1+2n)}{2l}x \qquad (2.10)$$

Можно подобрать постоянные интегрирования A_{nm} и B_{nm}. используя начальные условия. Для этого продифференцируем почленно ряд (2.10) по t:

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a\pi(1+2n)}{2l}\left(-A_n\sin\frac{a\pi(1+2n)}{2l}t+B_n\cos\frac{a\pi(1+2n)}{2l}t\right)\cdot\sin\frac{\pi(1+2n)}{2l}x$$ и

при $t = 0$ удовлетворим начальным условиям:

$$x=\sum_{n=0}^{\infty}A_n\sin\frac{\pi(1+2n)}{2l}x. \qquad (2.11)$$

$$\sin\frac{\pi}{2l}x+\sin\frac{3\pi}{2l}x=\sum_{n=0}^{\infty}B_n\frac{a\pi(1+2n)}{2l}\cdot\sin\frac{\pi(1+2n)}{2l}x. \qquad (2.12)$$

Сравнивая два ряда Фурье в (2.12) находим:

$$n=0\Rightarrow B_0=\frac{2l}{a\pi};\, n=1\Rightarrow B_0=\frac{2l}{3a\pi}.$$

Чтобы из (2.11) найти A_{nm}, разложим левую часть в ряд Фурье

$$x=\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n\sin\frac{\pi(1+2n)}{2l}x. \qquad (2.13)$$

Коэффициенты этого разложения находим по формулам Эйлера –Фурье, получаем

$$\alpha_n=\frac{2}{l}\int_0^l x\cdot\sin\frac{\pi(1+2n)}{2l}x\,dx=\left|\begin{matrix} u=x & dv=\sin\dfrac{\pi(1+2n)}{2l}x\,dx \\ du=dx & v=-\dfrac{2l}{\pi(1+2n)}\cos\dfrac{\pi(1+2n)}{2l}x\end{matrix}\right|=$$

$$=x\cos\frac{\pi(1+2n)}{2l}x\Big|_0^l+\frac{4l^2}{\pi^2(1+2n)^2}\sin\frac{\pi(1+2n)}{2l}x\Big|_0^l=\frac{2}{l}\left(\frac{4l^2}{\pi^2(1+2n)^2}(-1)^n\right). \qquad (2.14)$$

Сравнивая два ряда Фурье (2.11) и (2.13) находим A_n.

Подставляя найденные A_n и B_n в(2.10)получаем решение поставленной задачи в виде:

$$u(x,t)=\frac{8l}{\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}\right)\cdot\cos\frac{a\pi(1+2n)}{2l}t\cdot\sin\frac{\pi(1+2n)}{2l}x+\frac{2l}{a\pi}\sin\frac{a\pi}{2l}t\cdot$$

$$\cdot\sin\frac{\pi}{2l}x+\frac{2l}{3a\pi}\sin\frac{3a\pi}{2l}t\cdot\sin\frac{3\pi}{2l}x. \blacktriangle$$

2.2 Метод Фурье для случая двух независимых переменных. Неоднородная краевая задача.

Задача 2. Найти решение смешанной задачи для однородного уравнения
$u_{xx}=u_{tt}$,
с неоднородными краевыми условиями $u(0,t)=t^2, u(\pi,t)=t^3$,
с начальными условиями $u(x,0)=\sin x, u_t(x,0)=0, 0<x<\pi, t>0$.

▼ Решение поставленной задачи ищем в виде $u(x,t)=v(x,t)+w(x,t)$, где $v(x,t)$ новая искомая функция, а $w(x,t)$ выберем так, чтобы она удовлетворяла граничным условиям

$$w(x,t)=t^2+\frac{x}{\pi}(t^3-t^2)$$

Следовательно, $u(x,t)=v(x,t)+t^2+\dfrac{x}{\pi}(t^3-t^2)$.

Пересчитаем все производные входящие в уравнение:

$$u_{xx}=v_{xx}$$

$$u_{xx}=v_{tt}+2+\frac{x}{\pi}(6t-2).$$

Пересчитаем граничные и начальные условия для новой неизвестной функции:

$$v(x,t) = u(x,t) - w(x,t);$$
$$v(0,t) = u(0,t) - w(0,t) = t^2 - t^2 = 0;$$
$$v(\pi,t) = u(\pi,t) - w(\pi,t) = t^3 - t^2 - t^3 - t^2 = 0;$$
$$v(x,0) = u(x,0) - w(x,0) = \sin x;$$
$$v(x,0) = \sin x$$
$$v_t(x,t) = u_t(x,t) - w_t(x,t)$$
$$v_t(x,0) = u_t(x,0) - w_t(x,0) = 0.$$

Тогда для функции $v(x,t)$ получим:

$$u_{xx} = v_{tt} + \frac{x}{\pi}(6t-2) + 2$$
$$v(0,t) = v(\pi,t) = 0$$
$$v(x,0) = \sin x$$
$$v_t(x,0) = 0$$

Записывая решение в виде

$v(x,t) = w(x,t) + \tilde{w}(x,t)$, для определения w и $\tilde{w}$ будем иметь задачи:

а) $w_{xx} = w_{tt}$;

$$w(0,t) = w(\pi,t) = 0;$$
$$w(x,0) = \sin x,$$
$$w_t(x,0) = 0.$$

б) $\tilde{w}_{xx} = w_{tt} + \dfrac{x}{\pi}(6t-2) + 2$;

$$\tilde{w}(0,t) = \tilde{w}(\pi,t) = 0;$$
$$\mathrm{w}(x,0) = 0, \mathrm{w}_t(x,0) = 0.$$

Задачу а) решаем методом разделения переменных. Полагая $w(x,t) = \mathrm{X}(x)\,\mathrm{T}(t)$, получим $\mathrm{X}''(x)\,\mathrm{T}(t) = \mathrm{X}(x)\,\mathrm{T}''(t) : \mathrm{X}(x)\,\mathrm{T}(t)$, отсюда

$$\frac{\mathrm{X}''(x)}{\mathrm{X}(x)} = \frac{\mathrm{T}''(t)}{\mathrm{T}(t)} = -\lambda.$$

Таким образом получаем два обыкновенных дифференциальных уравнения второго порядка:

$$\mathrm{X}''(x) + \lambda\,\mathrm{X}(x) = 0$$
$$\mathrm{T}''(x) + \lambda\,\mathrm{T}(x) = 0$$

Решаем задачу Штурма-Лиувилля

$\mathrm{X}''(x)+\lambda\,\mathrm{X}(x)=0$,

$\mathrm{X}(0)=\mathrm{X}(\pi)=0$

$k^2+\lambda=0$

$k_{1,2}=\pm i\sqrt{\lambda}$.

Общее решение запишем в виде

$\mathrm{X}(x)=C_1\cos\sqrt{\lambda}x+C_2\sin\sqrt{\lambda}x$.

Потребуем, чтобы функция удовлетворяла граничным условиям $\mathrm{X}(0)=\mathrm{X}(\pi)=0$, получаем C_1=0, а $C_2\neq 0$ иначе получим тривиальное решение $0=C_2\sin\sqrt{\lambda}\pi$, где $C_2\neq 0$, следовательно

$\sin\sqrt{\lambda}\pi=0$, а значит $\sqrt{\lambda}\pi=\pi k$, $\lambda_k=k^2$ (k=1,2,3,…)

Получили собственные значения и им отвечают собственные функции $\mathrm{X}_k(x)=\sin kx$.

Для определения T(t) решаем уравнение $\mathrm{T}''(x)+\lambda\,\mathrm{T}(x)=0$, его общее решение имеет вид $\mathrm{T}_k=A_k\cos kt+B_k\sin kt$.

Таким образом общее решение задачи а) имеет вид

$$w(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}(A_k\cos kt+B_k\sin kt)\sin kx .$$

Произвольные постоянные $A_k, B_к$ найдем из начальных условий:

$$\sin x=\sum_{k=1}^{\infty}A_k\sin kx ,$$

отсюда $A_1=1, A_k=0, k=2,3,\ldots$

$$w_t(x,0)=\sum_{k=1}^{\infty}B_k k\sin kx=0, B_k=0, k=1,2,\ldots\Rightarrow w_t\left(x,0\right)=0.$$

Решение задачи а) имеет вид:

$w(x,\mathrm{t})=\cos t\sin x$.

Решение задачи б) ищем в виде

$$w(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}T_k(t)\sin kx .$$

Предварительно неоднородную часть уравнения разложим в ряд Фурье по собственным функциям однородной краевой задачи:

$$\frac{x}{\pi}(6t-2)+2=\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k\sin kx ,\text{ где}$$

$$\alpha_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}[\frac{x}{\pi}(6t-2)+2]\sin kx dx = \left| \begin{matrix} u = \frac{x}{\pi}(6t-2)+2 & dv = \sin kx\,dx \\ du = \frac{6t-2}{\pi}dx & v = -\frac{1}{k}\cos kx \end{matrix} \right| =$$

$$= \frac{2}{\pi}[-\frac{x}{\pi}(6t-2)+2]\frac{1}{k}\cos kx\,|_0^{\pi} - 0] = -\frac{2}{\pi}\left(6t-2+2)(-1)^k + \frac{2}{k}\right) =$$

$$= \frac{2}{\pi k}\left(-6t(-1)^k + 2\right) = \frac{4}{\pi k}(3t(-1)^{k+1}+1).$$

Подставляя в уравнение задачи б) $w(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} T_k(t)\sin kx$ и правую часть разложенную в ряд Фурье:

$-\sum_{k=1}^{\infty} T_k(t)k^2 \sin kx = \sum_{k=1}^{\infty} T_k''(t)\sin kx + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{4}{\pi k}(3t(-1)^{k+1}+1)\sin kx$. Собирая слагаемые под одним знаком суммы можем задачу для $T_k(t)$ записать в виде:

$$T_k''(t) + k^2 T_k(t) = -\frac{4}{\pi k}(3t(-1)^{k+1}+1).$$

Сначала решим однородное уравнение, решение которого имеет вид:

$$T_k(t) = D_k \cos kt + C_k \sin kt + \frac{12(-1)^k}{\pi k^3}t - \frac{4}{\pi k^3}.$$

а решение неоднородного ищем в виде $T_k(t) = At + B$. Подставляя в неоднородное уравнение, находим коэффициенты *A* и *B:*

$$k^2(At+B) = -\frac{4}{\pi k}(3t(-1)^{k+1}+1).$$

Отсюда:

$$A = -\frac{12(-1)^k}{\pi k^3};\ B = -\frac{4}{\pi k^3}.$$

Таким образом, получаем общее решение задачи б):

$$w(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty}(D_k \cos kt + C_k \sin kt + \frac{12(-1)^k}{\pi k^3}t - \frac{4}{\pi k^3}).$$

Используя начальные условия $w(x,0)=0, w_t(x,0)=0,$ находим

$$0 = \sum_{k=1}^{\infty}(D_k - \frac{4}{\pi k^3})\sin kx \Rightarrow D_k = \frac{4}{\pi k^3},$$

$$0 = \sum_{k=1}^{\infty}(C_k k + \frac{12(-1)^k}{\pi k^3})\sin kx \Rightarrow C_k = -\frac{12(-1)^k}{\pi k^4}.$$

Решение исходной смешанной запишем в виде

$$u(x,t)=t^2+\frac{x}{\pi}(t^3-t^2)+\sin x\cos t+\frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^3}[\cos kt-\frac{3(-1)^k}{\pi}\sin kt+3(-1)^k t-1]\sin kx\ . \ \blacktriangle$$

2.3 Метод разделения переменных в случае трех независимых переменных.

Задача 3. Пренебрегая реакцией окружающей среды, определить поперечные колебания однородной прямоугольной мембраны $0\le x\le s,\ 0\le y\le p$ часть границы $x=s,\ \ 0\le y<p$ и $y=p,\ \ 0\le y<s$ свободна, а остальная часть закреплена жестко. Найти поперечные колебания мембраны, вызванные начальным отклонением Axy.

Решаем задачу: найти решение уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right),\left\{0\le x\le s,0\le y\le p\right\} \qquad (3.1)$$

удовлетворяющее начальным и граничным условиям:

$$\begin{cases} u\left(x,y,0\right)=Axy \\ u_t\left(x,y,0\right)=0 \\ u\left(0,y,t\right)=u_x\left(s,y,t\right)=0 \\ u\left(x,0,t\right)=u_y\left(x,p,t\right)=0 \end{cases} \qquad (3.2)$$

▼Решение ищем в виде:

$$u(x,y,t)=v(x,y)\cdot T(t) \qquad (3.3)$$

Подставляя (3.3) в уравнение (3.1), и разделяя переменные, получаем: $\frac{1}{a^2}\frac{T''}{T}=\frac{\Delta_2 v}{v}=-\lambda=const$.

Раскрывая пропорцию получаем для функции $T(t)$:

$$T''(t)+\lambda\, a^2\, T(t)=0 \qquad (3.4)$$

и задачу на собственные значения:

$$\begin{cases} \Delta_2 v+\lambda v=0,\ \ (x,y)\in\Omega \\ v\big|_{\Gamma}=0. \end{cases} \qquad (3.5)$$

Полагая $v(x,y)=X(x)\cdot Y(y)=0$ и проведя еще раз разделение переменных в задаче (3.5), получаем две задачи Штурма-Лиувилля:

$$\begin{cases} X''(x)+vX(x)=0; \\ X(0)=X'(s)=0, \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} Y''(y)+\mu Y(y)=0; \\ Y(0)=Y'(p)=0. \end{cases} \tag{3.6}$$

где v и μ – собственные значения; $v+\mu=\lambda$.

Решая краевые задачи (3.6), находим собственные значения и собственные функции: $\begin{cases} X_n(x)=\sin\dfrac{\pi(1+2n)}{2s}x; \\ Y_m(y)=\sin\dfrac{\pi(1+2m)}{2p}y. \end{cases}$

Собственные значения

$$\lambda_{n,m}=\left[\frac{\pi(1+2n)}{2s}\right]^2+\left[\frac{\pi(1+2m)}{2p}\right]^2, n,m=1,2... \tag{3.7}$$

каждому из которых соответствует собственная функция:

$$V_{n,m}=\sin\frac{\pi(1+2n)}{2s}x\cdot\sin\frac{\pi(1+2m)}{2p}y \tag{3.8}$$

Находим частные решения уравнения (3.4)

$$\mathrm{T}_{nm}=A_{nm}\cos\sqrt{\lambda}\,at+B_{nm}\sin\sqrt{\lambda}\,at, \tag{3.9}$$

обозначим

$$\omega_{nm}=a\sqrt{\lambda_{n,m}}=\frac{a\pi}{2}\sqrt{\left(\frac{(1+2n)}{s}\right)^2+\left(\frac{(1+2m)}{p}\right)^2}.$$

Применяя метод суперпозиции, запишем решение краевой задачи (3.1) – (3.2) с учетом (3.7) – (3.9) в виде двойного ряда Фурье:

$$u(x,y,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\left(A_{nm}cos\omega_{nm}t+B_{nm}\sin\omega_{nm}t\right)\cdot\sin\frac{\pi(1+2n)}{2s}x\cdot\sin\frac{\pi(1+2m)}{2p}y.$$

Потребуем, чтобы решение удовлетворяло начальным условиям:

$$Axy=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}A_{nm}\cdot\sin\frac{\pi(1+2n)}{2s}x\cdot\sin\frac{\pi(1+2m)}{2p}y.$$

$$0=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}B_{nm}\omega_{nm}\cdot\sin\frac{\pi(1+2n)}{2s}x\cdot\sin\frac{\pi(1+2m)}{2p}y.$$

Откуда, $B_{nm}=0$.

Разложим функцию Axy в ряд Фурье и найдем коэффициенты разложения по формуле:

$$A_{nm}=\alpha_{nm}=\frac{4}{sp}\int_0^s\int_0^p Axy\cdot\sin\frac{\pi(1+2n)}{2s}x\cdot\sin\frac{\pi(1+2m)}{2p}y\,dxdy=\frac{4A}{sp}\int_0^s x\cdot\sin\frac{\pi(1+2n)}{2s}x\,dx\cdot$$

$$\cdot\int_0^p y\cdot\sin\frac{\pi(1+2m)}{2p}y\,dy=\begin{vmatrix} x=u & dv=\sin\frac{\pi(1+2n)}{2s}x \\ du=dx & v=-\frac{2s}{\pi(1+2n)}\cos\frac{\pi(1+2n)}{2s}x \end{vmatrix}=$$

$$=\frac{4A}{sp}\left[\frac{-2xs}{\pi(1+2n)}\cos\frac{\pi(1+2n)}{2s}x\Big|_0^s+\frac{4s^2}{\pi^2(1+2n)^2}\sin\frac{\pi(1+2n)}{2s}x\Big|_0^s\right]=\frac{64spA(-1)^{n+m}}{\pi^4(1+2n)^2(1+2m)^2}.$$

Таким образом, колебание мембраны будет описываться функцией:

$$u(x,y,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{64spA(-1)^{n+m}}{\pi^4(1+2n)^2(1+2m)^2}\cdot\cos\left(a\pi\sqrt{\frac{(1+2n)^2}{4s^2}+\frac{(1+2m)^2}{4p^2}}\cdot t\right)\cdot$$

$$\cdot\sin\frac{\pi(1+2n)}{2s}x\cdot\sin\frac{\pi(1+2m)}{2p}y.\blacktriangle$$

Задача 4. Пренебрегая реакцией окружающей среды, определить поперечные колебания однородной прямоугольной мембраны $0\le x\le s, 0\le y\le p$ с жестко закрепленным краем для случая, когда в начальный момент мембрана получает поперечный сосредоточенный импульс I в точке (x_0,y_0), $0<x_0<s, 0<y_0<p$, а начальное положение – покой.

Решение. Найдем функцию, удовлетворяющую двумерному волновому уравнению и начально-граничным условиям:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right),\{0<x<s,0<y<p\},t>0 \tag{4.1}$$

$$\begin{cases} u(0,y,t)=u(s,y,t)=0, \\ u(x,0,t)=u(x,p,t)=0, \\ u(x,y,0)=0, \\ u_t(x,y,0)=\frac{I}{\rho}\delta(x-x_0)\delta(y-y_0). \end{cases} \tag{4.2}$$

▼Решение задачи (4.1) – (4.2) ищем методом разделения переменных, представим решение в виде:

$$u(x, y, t) = v(x, y) \cdot T(t). \tag{4.3}$$

Подставляя решение (4.3) в уравнение (4.1), получаем:

$$\frac{1}{a^2}\frac{T''}{T} = \frac{\Delta_2 v}{v} = -\lambda = const.$$

Отсюда следует уравнение для функции $T(t)$:

$$T''(t) + \lambda a^2 T(\mathrm{t}) = 0 \tag{4.5}$$

и задача на собственные значения:

$$\begin{cases} \Delta_2 v + \lambda v = 0, (x, y) \in \Omega \\ v\big|_{\Gamma} = 0. \end{cases} \tag{4.6}$$

Полагая $v(x, y) = X(x) \cdot Y(y)$ и проведя еще раз разделение переменных, получаем две анологичные задачи Штурма-Лиувилля:

$$\begin{cases} X''(x) + \delta X(x) = 0 \\ X(0) = X(s) = 0 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} Y''(y) + \mu Y(y) = 0 \\ Y(0) = Y(p) = 0 \end{cases} \tag{4.7}$$

где δ и μ – собственные значения, $v + \mu = \lambda$.

Для задач (4.7) собственные функции имеют вид:

$$\begin{cases} X_n(x) = \sin\dfrac{\pi n}{s} x; \\ Y_m(y) = \sin\dfrac{\pi m}{p} y. \end{cases}$$

Задача на собственные значения (4.6) имеет в качестве собственных чисел:

$$\lambda_{n,m} = \left[\frac{n\pi}{s}\right]^2 + \left[\frac{m\pi}{p}\right]^2, n, m = 1, 2....$$

каждому из которых соответствует собственная функция:

$$v_{n,m}(x, y) = \sin\frac{n\pi}{s} x \cdot \sin\frac{m\pi}{p} y$$

Решая уравнение (4.5), находим частные решения этого уравнения в виде:

$$\mathrm{T}_{nm}(t) = A_{nm}\cos\omega_{nm} t + B_{nm}\sin\omega_{nm} t,$$

где $\omega_{nm} = a\sqrt{\lambda_{n,m}} = a\pi\sqrt{\left(\frac{n}{s}\right)^2 + \left(\frac{m}{p}\right)^2}$.

Окончательно общее решение краевой задачи (4.1)- (4.2)представим в виде суперпозиции частных решений, т.е. в виде двойного ряда Фурье:

$$u(x,y,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \left(A_{nm} \cos\omega_{nm} t + B_{nm} \sin\omega_{nm} t \right) \cdot \sin\frac{n\pi}{s} x \cdot \sin\frac{m\pi}{p} y .$$

Коэффициенты A_{nm} и B_{nm} найдем, выполняя начальные условия:

$$0 = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} A_{nm} \cdot \sin\frac{n\pi}{s} x \cdot \sin\frac{m\pi}{p} y .$$

Откуда, $A_{nm} = 0$.

$$\frac{I}{\rho}\delta(x - x_0)\delta(y - y_0) = \sum_{n,m=1}^{\infty} B_{nm} \cdot \omega_{nm} \cdot \sin\frac{n\pi}{s} x \cdot \sin\frac{m\pi}{p} y .$$

Это равенство следует рассматривать как разложение в двойной тригонометрический ряд Фурье.

$$\frac{I}{\rho}\delta(x - x_0)\delta(y - y_0) = \alpha_{nm} \cdot \sin\frac{n\pi}{s} x \cdot \sin\frac{m\pi}{p} y .$$

Поэтому для коэффициента B_{nm} получаем

$$\alpha_{nm} = \frac{4}{sp}\int_0^s\int_0^p \frac{I}{\rho}\delta(x - x_0)\delta(y - y_0) \cdot \sin\frac{n\pi}{s} x \cdot \sin\frac{m\pi}{p} y\, dxdy = \frac{4I}{\rho s p}\sin\frac{n\pi}{s} x \cdot \sin\frac{m\pi}{p} y .$$

$$B_{nm} = \frac{\alpha_{nm}}{\omega_{nm}} = \frac{4I}{\rho s p a\pi\sqrt{\left(\frac{n}{s}\right)^2 + \left(\frac{m}{p}\right)^2}} \cdot \sin\frac{n\pi}{s} x \cdot \sin\frac{m\pi}{p} y .$$

Итак, окончательное решение краевой задачи:

$$u(x,y,t) = \frac{4I}{\rho a\pi}\sum_{n,m=1}^{\infty} \frac{\sin\frac{n\pi}{s} x_0 \cdot \sin\frac{m\pi}{p} y_0}{\sqrt{n^2 p^2 + m^2 s^2}} \cdot \sin\left(\sqrt{\left(\frac{n}{s}\right)^2 + \left(\frac{m}{p}\right)^2}\, a\pi t \right) \cdot \sin\frac{n\pi}{s} x \cdot$$

$\cdot \sin\frac{m\pi}{p} y$, где ρ – поверхностная плотность массы мембраны. ▲

Задача 5. Пренебрегая реакцией окружающей среды, определить поперечные колебания однородной прямоугольной мембраны $0 \le x \le s, 0 \le y \le p$ с жестко закрепленным краем для случая, когда колебания вызваны непрерывно распределенной по мембране поперечной силой с плотностью

$$f\left(x,y,t\right) = e^{-t} x \sin \frac{2\pi}{p} y .$$

Составим математическую модель вынужденных колебаний прямоугольной мембраны:

требуется найти решение волнового уравнения, удовлетворяющее граничным и начальным условиям:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + e^{-t} x \sin \frac{2\pi}{p} y, \left\{ 0 < x < s,\, 0 < y < p \right\}, t > 0 \qquad (5.1)$$

$$\begin{cases} u\left(0,y,t\right) = u\left(s,y,t\right) = 0 \\ u\left(x,0,t\right) = u\left(x,p,t\right) = 0 \\ u\left(x,y,0\right) = 0 \\ u_t\left(x,y,0\right) = 0 \end{cases} \qquad (5.2)$$

▼ Решение задачи (5.1) – (5.2) ищем методом разделения переменных в виде:

$$u(x,y,t) = v(x,y) \cdot T(t) . \qquad (5.2)$$

Подставляя решение (5.2) в исходное уравнение (5.1), получаем:

$$\frac{1}{a^2} \frac{T''}{T} = \frac{\Delta_2 v}{v} = -\lambda = const .$$

Отсюда получаем уравнение для функции $T(t)$

$$T''(t) + \lambda a^2 T(\mathrm{t}) = 0 \qquad (5.3)$$

и задачу на собственные значения:

$$\begin{cases} \Delta_2 v + \lambda v = 0, (x,y) \in \Omega \\ v\big|_{\Gamma} = 0. \end{cases} \qquad (5.4)$$

Полагая $v(x,y) = X(x) \cdot Y(y)$ и проведя еще раз разделение переменных, получаем две идентичные задачи Штурма-Лиувилля:

$$\begin{cases} X''(x) + \delta X(x) = 0 \\ X(0) = X(s) = 0 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} Y''(y) + \mu Y(y) = 0 \\ Y(0) = Y(p) = 0 \end{cases} \qquad (5.5)$$

где δ и μ – собственные значения, связанные с λ соотношением $\delta+\mu=\lambda$.

Для задач (5.5) собственные функции имеют вид:

$$\begin{cases} X_n(x)=\sin\dfrac{n\pi}{s}x; \\ Y_m(y)=\sin\dfrac{m\pi}{p}y. \end{cases}.$$

Задача на собственные значения имеет в качестве собственных чисел:

$$\lambda_{n,m}=\left[\frac{n\pi}{s}\right]^2+\left[\frac{m\pi}{p}\right]^2, n,m=1,2...$$

$$u(x,y,t)=\sum_{n,m=1}^{\infty}T_{n,m}(t)\sin\frac{n\pi}{s}x\cdot\sin\frac{m\pi}{p}y.$$

Подставив в уравнение (5.1), получаем:

$$\sum_{n,m=1}^{\infty}T''_{n,m}(t)\sin\frac{n\pi}{s}x\cdot\sin\frac{m\pi}{p}y=-a^2\sum_{n,m=1}^{\infty}T_{n,m}(t)\left[\left(\frac{n\pi}{s}\right)^2\sin\frac{n\pi}{s}x\cdot\sin\frac{m\pi}{p}y+\right.$$

$$\left.+\left(\frac{m\pi}{p}\right)^2\sin\frac{n\pi}{s}x\cdot\sin\frac{m\pi}{p}y\right]+\frac{1}{\rho}e^{-t}x\sin\frac{2\pi}{p}y.$$

Разлагаем x в ряд Фурье по собственной функции $\sin\dfrac{n\pi}{s}x$:

$$x=\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n\sin\frac{n\pi}{s}x\,dx,$$

где $\alpha_n=\dfrac{2}{\rho}\displaystyle\int_0^s x\sin\frac{n\pi}{s}x\,dx=\begin{vmatrix} u=x & dv=\sin\dfrac{n\pi}{s}x\,dx \\ du=dx & v=-\dfrac{s}{n\pi}\cos\dfrac{n\pi}{s}x \end{vmatrix}=$

$$\frac{2}{s}\left[-\frac{s}{n\pi}\cos\frac{n\pi}{s}x\Big|_0^s\right]=-\frac{2}{n\pi}s(-1)^n=\frac{2}{n\pi}s(-1)^{n+1}.$$

$$T''_{n,m}(t)+a^2T_{n,m}(t)\left[\left(\frac{n\pi}{s}\right)^2+\left(\frac{m\pi}{p}\right)^2\right]=\frac{1}{\rho}e^{-t}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n\pi}s(-1)^{n+1}\sin\frac{2\pi}{p}y$$

$$T''_{n,2}(t)+a^2\omega_n^2\pi^2 T_{n,2}(t)=0,\ k_{1,2}=\pm a\omega\pi i\text{, где }\omega_n=\sqrt{\frac{n^2}{s^2}+\frac{4}{p^2}}.$$

$$\mathrm{T}_{n,2}(t)=A_{n,2}\cos a\,\omega_n\pi t+B_{n,2}\sin a\,\omega_n\pi t\Rightarrow \mathrm{T}_{n,2}=Ce^{-t}.$$

$$Ce^{-t}+Ca^2\omega_n^2\pi^2e^{-t}=\frac{s}{\rho}e^{-t}\frac{2}{n\pi}(-1)^{n+1}.$$

$$C\left[1+a^2\omega_n^2\pi^2\right]=\frac{s}{\rho}\frac{2}{n\pi}(-1)^{n+1}\Rightarrow C=\frac{2s(-1)^{n+1}}{n\pi\rho\left[1+a^2\omega_n^2\pi^2\right]}.$$

Итак, окончательное решение краевой задачи:

$$u(x,y,t)=\sin\frac{2\pi}{p}y\sum_{n,m=1}^{\infty}C\left(e^{-t}-\cos a\,\omega_n\pi\,t+\frac{1}{a\,\omega_n\pi}\sin a\,\omega_n\pi\,t\right)\sin\frac{n\pi}{s}x.\ \blacktriangle$$

2.4 Примеры решения начально-краевых задач для колебания круглой мембраны.

Задача 6. Задачи с использованием специальных функций.

Методом разделения переменных с использованием цилиндрических функций решить задачу для волнового уравнения.

В круге $0\le r\le R$ решить задачу относительно функции $u=u(r,t)$:

$$u_{tt}=a^2\frac{1}{r}\ \frac{\partial u}{\partial r}\left(r\ \frac{\partial u}{\partial r}\right),\quad 0\le r<R,\quad t>0,$$

при граничном условии: $|\ u(0,\ t)\ |<\infty$, $u(R,\ t)=0,\ \ t>0$

и начальных условиях: $u(r,0)=\varphi(r),\quad u_t(r,0)=\psi(r)$, $0\le r\le R$.

▼Распишем уравнение

$$u_{tt}=a^2\frac{1}{r}\ \frac{\partial u}{\partial r}\left(r\ \frac{\partial u}{\partial r}\right)=\frac{a^2}{r}\ \left(\frac{\partial u}{\partial r}+r\ \frac{\partial^2 u}{\partial r^2}\right).$$

Решение ищем в виде $u(r,\ t)=T(t)\cdot W(r)$, тогда начальные и граничные условия примут вид: $\mathrm{W}(R)=0$ и $T(0)=\varphi(r),\ T'(0)=\psi(r)$.

Подставляем $u(r,\ t)=T(t)\cdot W(r)$ в исходное уравнение и получим:

$$T''(t)\cdot W(r)=\frac{a^2}{r}T(t)\left(\ W'(r)+rW''(r)\right)$$

Разделим это равенство на $a^2\ T(t)W(r)$:

$$\frac{T''(t)}{a^2\ T(t)} = \frac{\frac{1}{r}W'(r) + W''(r)}{W(r)} = -\lambda^2.$$

Отсюда имеем два уравнения:

$T''(t) + \lambda^2 a^2 T(t) = 0$,

$W''(r) + \frac{1}{r}W' + \lambda^2 W = 0$. Это уравнение Бесселя нулевого порядка, которое имеет решение $W(r) = J_0(\lambda r)$. Учитывая граничные условия $W(R) = 0$, получим $J_0(\lambda R) = 0$. Отсюда $\lambda_n R = \mu_n \Rightarrow \lambda_n = \frac{\mu_n}{R} \Rightarrow W_n(r) = J_0\left(\frac{r\,\mu_n}{R}\right)$, где μ_n – корни уравнения Бесселя.

Теперь решаем дифференциальное однородное уравнение 2-го порядка с постоянными коэффициентами $T''(t) + \lambda^2 a^2 T(t) = 0$. Его решение

$$T_n(t) = A_n \cos\frac{\mu_n a}{R}t + B_n \sin\frac{\mu_n a}{R}t$$

В результате получаем решение заданного уравнения

$$u(r,t) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(A_n \cos\frac{\mu_n\, a}{R}t + B_n \sin\frac{\mu_n\, a}{R}t\right)J_0\left(\frac{\mu_n\, r}{R}\right),$$

в котором осталось определить неизвестные коэффициенты A_n и B_n, удовлетворяющие начальным условиям $T(0) = \varphi(r),\ T'(0) = \psi(r)$.

Для этого разложим функции $\varphi(r)$ и $\psi(r)$ по функциям Бесселя:

$$\varphi(r) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n J_0\left(\frac{\mu_n r}{R}\right), \text{где } a_n = \frac{2}{R^2 J_1^2(\mu_n)} \int_0^R r\ \varphi(r) J_0\left(\frac{\mu_n r}{R}\right)dr;$$

$$\psi(r) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n J_0\left(\frac{\mu_n r}{R}\right), \text{ где } b_n = \frac{2}{R^2 J_1^2(\mu_n)} \int_0^R r\ \varphi(r) J_0\left(\frac{\mu_n r}{R}\right)dr.$$

Отсюда следует, что $A_n = a_n$ и $\frac{a\mu_n}{R}B_n = b_n \Rightarrow B_n = \frac{R}{a\mu_n}b_n$.

В итоге имеем решение

$$u(r,t) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(A_n \cos\frac{\mu_n\, a}{R}t + B_n \sin\frac{\mu_n\, a}{R}t\right)J_0\left(\frac{\mu_n\, r}{R}\right),$$

где

$$A_n = \frac{2}{R^2 J_1^2(\mu_n)} \int_0^R r\ \varphi(r) J_0\left(\frac{\mu_n r}{R}\right)dr,$$

$$B_n = \frac{2}{aR\mu_n J_1^2(\mu_n)} \int\limits_0^R r\ \varphi(r) J_0\left(\frac{\mu_n r}{R}\right) dr,$$

μ_n – положительные корни уравнения Бесселя $J_0(\mu_n) = 0$. ▲

Задача 7. Определить поперечные колебания однородной круглой мембраны радиуса R, вызванные начальной скоростью $f(r) = \begin{cases} U,\ 0 \le r \le \dfrac{R}{2} \\ 0,\ \dfrac{R}{2} < r < R \end{cases}$, если край мембраны закреплен жестко.

▼Решение. Поскольку заданное тело(мембрана) имеет форму круга, то выберем полярную систему координат с началом координат в центре круга. Постановка задачи. требуется найти решение уравнения:

$$u_{tt} = \frac{a^2}{r}\left(\frac{\partial u}{\partial r} + r\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}\right),\ 0 \le r < R,\ t > 0,\ \left|u(0,t)\right| < \infty \tag{7.1}$$

при граничном условии:

$$u(R,t) = 0, \tag{7.2}$$

начальные условия имеют вид:

$$u(r,0) = 0,\ u_t(r,0) = f(r). \tag{7.3}$$

Краевые условия однородны и уравнение однородно, поэтому применяем метод разделения переменных:

$u(r,t) = T(t)W(r)$.

Тогда граничные и начальные условия примут вид:

$W(R) = 0$, $T(0) = 0,\ T'(0) = f(r)$.

Подставляя $u(r,t) = T(t)W(r)$ в исходное уравнение (7.1) и разделяя переменные получим:

$$\frac{T''(t)}{a^2\, T(t)} = \frac{1}{r}\left(\frac{W'(r) + rW''(r)}{W(r)}\right) = -\lambda^2.$$

Получили систему обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} T''(t) + \lambda^2\, a^2\, T(t) = 0, \\ rW''(r) + W'(r) + \lambda^2\, r\, W(r) = 0. \end{cases}$$

Решение первого уравнения не представляет сложностей и уже рассматривалось выше :

$$T_n(t) = A_n \cos\frac{\mu_n a}{R} t + B_n \sin\frac{\mu_n a}{R} t,$$

а второе уравнение, является уравнением Бесселя его решение с учетом граничных условий будет выглядеть следующим образом:

$$W_n(r) = J_0\left(\frac{\mu_n r}{R}\right).$$

Таким образом решение уравнения (7.1) запишем в виде суперпозиции частных решений $W_n(r)$ и $T_n(t)$: $u(r,\ t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n \cos\ \frac{a\mu_n}{R}\ t + B_n \sin\ \frac{a\mu_n}{R}\ t\right)\cdot J_0\left(\frac{r\mu_n}{R}\right).$

Из начальных условий находим произвольные постоянные A_n и B_n. Используем начальные условия и выражение для начальной скорости $f(r)$:

$$u(r,0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n J_0\left(\frac{\mu_n r}{R}\right) = 0, \text{ откуда находим } A_n = 0.$$

$$u_t(r,\ 0) = \frac{a\ \mu_n}{R}\sum_{n=1}^{\infty} B_n\ \ J_0\left(\frac{\mu_n\ \ r}{R}\right) = f(r).$$

Чтобы найти значение B_n, разложим $f(r)$ в ряд по цилиндрическим функциям Бесселя , то есть в ряд Фурье – Бесселя:

$$f(r) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n J_0\left(\frac{\mu_n r}{R}\right),$$

где $b_n = \frac{2}{R^2 J_1^2(\mu_n)}\int_0^R r f(r) J_0\left(\frac{\mu_n r}{R}\right) dr = \frac{2U}{R^2 J_1^2(\mu_n)}\int_0^{R/2} r J_0\left(\frac{\mu_n r}{R}\right) dr =$

$$= / \frac{\mu_n r}{R} = t,\ r = \frac{R}{\mu_n} t,\ dr = \frac{R}{\mu_n} dt / = \frac{2U}{R^2 J_1^2(\mu_n)}\cdot\frac{R^2}{\mu_n^2}\cdot\int_0^{\mu_n/2} t J_0(t)\, dt =$$

$$= \frac{2U}{\mu_n^2 J_1^2(\mu_n)}\cdot t J_1(t)\Big|_0^{\mu_n/2} = \frac{2\ U}{\mu_n^2\ \ J_1^2(\mu_n)}\cdot\frac{\mu_n r}{R}\cdot J_1\left(\frac{\mu_n r}{R}\right)\Bigg|_0^{R/2} =$$

$$= \frac{2\ U}{\mu_n\ \ J_1^2(\mu_n)\ \ R}\cdot\frac{R}{2}\cdot J_1\left(\frac{\mu_n}{2}\right) = \frac{U}{\mu_n\ \ J_1^2(\mu_n)}\cdot J_1\left(\frac{\mu_n}{2}\right).$$

Следовательно, $\frac{a\mu_n}{R}\sum_{n=1}^{\infty}B_n\ J_0\left(\frac{\mu_n r}{R}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\ J_0\left(\frac{\mu_n r}{R}\right)$,

где $b_n=\frac{U}{\mu_n J_1^2(\mu_n)}\cdot J_1\left(\frac{\mu_n}{2}\right)$. Откуда находим:

$$B_n=\frac{R}{a\mu_n}b_n=\frac{R}{a\mu_n}\cdot\frac{U}{\mu_n J_1^2(\mu_n)}\cdot J_1\left(\frac{\mu_n}{2}\right)=\frac{RU J_1\left(\frac{\mu_n}{2}\right)}{a\mu_n^2 J_1^2(\mu_n)}.$$

Отсюда следует, что решение исходной задачи (7.1)-(7.3) имеет вид:

$$u(r,t)=\frac{UR}{a}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{J_1\left(\frac{\mu_n}{2}\right)}{\mu_n^2 J_1^2(\mu_n)}\cdot\sin\left(\frac{\mu_n a}{R}t\right)\cdot J_0\left(\frac{\mu_n r}{R}\right),$$

где μ_n – положительные корни уравнения Бесселя $J_0(\mu_n)=0$. ▲

Задача 8. Однородная круглая мембрана с жестко закрепленным краем совершает поперечные колебания, вызванные начальным отклонением $f(r)=A\left(R^2-r^2\right)$. Найти поперечные колебания мембраны.

Постановка задачи:

найти решение уравнения:

$$u_{tt}=\frac{a^2}{r}\left(\frac{\partial u}{\partial r}+r\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}\right),\ 0\le r<R,\ t>0,\ \left|u(0,t)\right|<\infty \qquad (8.1)$$

при граничном условии:

$$u(R,t)=0 \qquad (8.2)$$

и начальных условиях:

$$u(r,0)=A\left(R^2-r^2\right),\ u_t(r,0)=0. \qquad (8.3)$$

▼Решение ищем методом Фурье в виде произведения двух функций $T(t)$ и $W(r)$:

$$u(r,\ t)=T(t)\cdot W(r)$$

Тогда граничные и начальные условия примут вид:

$$W(R)=0,T(0)=0,\ T'(0)=f(r)$$

Подставляем $u(r,t)=T(t)W(r)$ в исходное уравнение (7.1):

$$T''(t)\cdot W(r)=a^2T(t)\left(\frac{1}{r}W'(r)+W''(r)\right).$$

Разделим это равенство на $a^2\,T(t)W(r)$ и получим:

$$\frac{T''(t)}{a^2\;T(t)}=\frac{\frac{1}{r}W'(r)+W''(r)}{W(r)}=-\lambda^2.$$

Откуда получаем систему уравнений $\begin{cases} T''(t)+a^2T(t)=0\ , \\ W''(r)+\dfrac{1}{r}\mathrm{W}'+\lambda^2W=0\ . \end{cases}$

Решение этих уравнений имеют вид:

$W(r)=J_0(\lambda r),\ J_0(\lambda_n r)=0$ – решение уравнения Бесселя для заданных граничных условий.

$W(R)=0$. Обозначим $R\lambda_n=\mu_n$ – корни уравнения Бесселя.

$\lambda_n=\dfrac{\mu_n}{R}$. $W_n(r)=J_0\left(\dfrac{\mu_n r}{R}\right)$

Решим уравнение для функции $T_n(t)$: $T_n(t)=A_n\cos\dfrac{\mu_n a}{R}t+B_n\sin\dfrac{\mu_n a}{R}t$.

Таким образом решение исходного уравнения (8.1) с учетом граничных условий запишем в виде суперпозиции двух решений $W_n(r)$ и $T_n(t)$:

$$u(r,\ t)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(A_n\ \cos\ \frac{\mu_n\ a}{R}\ t+B_n\ \sin\ \frac{\mu_n\ a}{R}\ t\right)\cdot J_0\left(\frac{\mu_n\ r}{R}\right).$$

Чтобы найти постоянные интегрирования коэффициенты A_n и B_n, используем начальные условия (8.3):

$$A\left(R^2-r^2\right)=\sum_{n=0}^{\infty}A_n\cos 0\,J_0\left(\frac{\mu_n r}{R}\right).$$

Разложим левую часть в ряд Фурье-Бесселя:

$$A\left(R^2-r^2\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n J_0\left(\frac{\mu_n r}{R}\right)=0,\text{ где}$$

$$\alpha_n=\frac{2}{R^2J_1^2(\mu_n)}\int_0^R rA\left(R^2-r^2\right)J_0\left(\frac{\mu_n\ r}{R}\right)\ dr=\frac{2A}{R^2\ \ J_1^2(\mu_n)}\int_0^R\left(rR^2-r^3\right)J_0\left(\frac{\mu_n r}{R}\right)\ dr.$$

$$R^2\int_0^R rJ_0\left(\frac{\mu_n r}{R}\right)dr=\begin{vmatrix}\frac{\mu_n r}{R}=\tau & r=\frac{\tau R}{\mu_n}\\ dr=\frac{Rd\tau}{\mu_n} & \end{vmatrix}=R^2\int_0^{\mu_n}\frac{\tau R}{\mu_n}\cdot J_0(\tau)\frac{Rd\tau}{\mu_n}=\frac{R^4}{\mu_n^2}\int_0^{\mu_n}\tau\cdot J_0(\tau)d\tau=$$

$$=\frac{R^4}{\mu_n^2}\mu_n J_1(\mu_n)=\frac{R^4}{\mu_n}J_1(\mu_n).$$

$$\int_0^R r^3J_0\left(\frac{\mu_n r}{R}\right)dr=\begin{vmatrix}\frac{\mu_n r}{R}=t & r=\frac{Rt}{\mu_n}\\ dr=\frac{Rdt}{\mu_n} & \end{vmatrix}=\frac{R^3}{\mu_n^3}\cdot\frac{R}{\mu_n}\int_0^{\mu_n}t^3J_0(t)dt.$$

Применим формулу:

$$\int_0^x r^3J_0(r)dr=2x^2J_0(x)+\left(x^3-4x\right)J_1(x),$$

согласно которой $\int_0^R r^3J_0\left(\frac{\mu_n r}{R}\right)dr=\frac{R^4}{\mu_n^4}\cdot\left[2t^2J_0(t)+\left(t^3-4t\right)J_1(t)\right]_0^{\mu_n}=$ {учитывая $J_0(\mu_n)=0$ }$=\frac{R^4}{\mu_n^4}\cdot\left[\mu_n^3-4\mu_n\right]J_1(\mu_n)=\frac{R^4}{\mu_n^3}\cdot\left[\mu_n^2-4\right]J_1(\mu_n)$.

Тогда $\alpha_n=\frac{2A}{R^2J_1^2(\mu_n)}\cdot\left[\frac{R^4}{\mu_n}J_1(\mu_n)-\frac{R^4}{\mu_n^3}\cdot\left[\mu_n^2-4\right]J_1(\mu_n)\right]=$

$$=\frac{2A}{R^2J_1^2(\mu_n)}\cdot\frac{4R^4}{\mu_n^3}J_1(\mu_n)=\frac{8AR^2}{\mu_n^3J_1(\mu_n)}.$$

Таким образом, найдены коэффициенты $A_n=\frac{8R^2A}{\mu_n^3J_1(\mu_n)}$, $B_n=0$.

Решение исходной задачи (8.1)-(8.3) имеет вид:

$$u(r,t) = 8AR^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\mu_n^3 J_1(\mu_n)} \cdot \cos\left(\frac{\mu_n a}{R} t\right) \cdot J_0\left(\frac{\mu_n r}{R}\right),$$

где μ_n – положительные корни уравнения Бесселя $J_0(\mu) = 0$. ▲

Задача 9. Однородная круглая мембрана совершает поперечные колебания, вызванные постоянной начальной скоростью U точек мембраны.

Необходимо найти решение уравнения

$$u_{tt} = \frac{a^2}{r}\left(\frac{\partial u}{\partial r} + r\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}\right),\ 0 \le r < R,\ t > 0,\ \left|u(0,t)\right| < \infty \qquad (9.1)$$

при граничном условии:

$$u(R,t) = 0 \qquad (9.2)$$

и начальных условиях:

$$u(r,0) = 0,\ u_t(r,0) = U\,. \qquad (9.3)$$

▼ Решение ищем в виде: $u(r,\ t) = T(t)\cdot W(r)$.

Подставляем $u(r,\ t) = T(t)\cdot W(r)$ в исходное уравнение (9.1):

$$T''(t)\cdot W(r) = a^2 T(t)\left(\frac{1}{r}W'(r) + W''(r)\right).$$

Разделим это равенство на $a^2\, T(t)W(r)$ и получим:

$$\frac{T''(t)}{a^2\ T(t)} = \frac{\frac{1}{r}W'(r) + W''(r)}{W(r)} = -\lambda^2.$$

Получили обыкновенные дифференциальные уравнения

$$T''(t) + a^2 T(t) = 0\ ,$$

$$W''(r) + \frac{1}{r}\mathrm{R}' + \lambda^2 R = 0\,.$$

$W(r) = J_0(\lambda r)$ – решение уравнения Бесселя.

$W(R)=J_0(\lambda R)=0$. Обозначим $R\lambda_n=\mu_n \Rightarrow \lambda_n=\frac{\mu_n}{R} \Rightarrow W_n(r)=J_0\left(\frac{r\,\mu_n}{R}\right)$.

Решение уравнения для функции $T_n(t)$: $T_n(t)=A_n\cos\frac{\mu_n a}{R}t+B_n\sin\frac{\mu_n a}{R}t$.

Решение исходного уравнения (9.1) запишем в виде суперпозиции двух решений $W_n(r)$ и $T_n(t)$: $u(r,t)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(A_n\cos\frac{\mu_n a}{R}t+B_n\sin\frac{\mu_n a}{R}t\right)J_0\left(\frac{\mu_n r}{R}\right)$.

Для того чтобы найти коэффициенты A_n и B_n, используем начальные условия (9.3):

$$0=\sum_{n=0}^{\infty}A_n\cos 0\,J_0\left(\frac{\mu_n r}{R}r_0\right)\Rightarrow A_n=0$$

Разложим U в ряд Фурье-Бесселя:

$$U=\sum_{n=1}^{\infty}B_n\lambda a J_0\left(\frac{\mu_n r}{R}\right)=0.$$

$$U=\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n J_0\left(\frac{\mu_n r}{R}\right)=0,$$

где $\alpha_n=\frac{2}{R^2J_1^2(\mu_n)}\int\limits_0^R rUJ_0\left(\frac{\mu_n r}{R}\right)dr=\left|\begin{array}{ll}\frac{\mu_n r}{R}=\tau & r=\frac{\tau R}{\mu_n}\\ dr=\frac{Rdr}{\mu_n} & \end{array}\right|=$

$$=\frac{2U}{R^2J_1^2(\mu_n)}\int_0^{\mu_n}\frac{\tau R}{\mu_n}J_0(\tau)\frac{Rdr}{\mu_n}=\frac{2U}{J_1^2(\mu_1)\mu_n^2}\cdot\mu_n\cdot J_1(\mu_1)=\frac{2U}{J_1(\mu_n)\mu_n}.$$

Следовательно, $B_n=\frac{2U}{J_1(\mu_n)\mu_n a\lambda}=\frac{2UR}{J_1(\mu_n)\mu_n a\mu_n}=\frac{2UR}{J_1(\mu_n)a\mu_n^2}$.

Таким образом, решение исходной задачи имеет вид:

$$u(r,t)=\frac{2UR}{a}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\mu_n^2J_1(\mu_n)}\cdot Sin\left(\frac{\mu_n a}{R}t\right)\cdot J_0\left(\frac{\mu_n r}{R}\right),$$

где μ_n – положительные корни уравнения Бесселя $J_0(\mu_n)=0$. ▲

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Труфанова, Т.В. Методы решения уравнений математической физики / Т.В. Труфанова, А.Г. Масловская, Е.М. Веселова. – Благовещенск : Изд-во Амур. гос. ун-та, 2015. – 196 с.
2. Бицадзе, А. В. Сборник задач по уравнениям математической физики / А. В. Бицадзе, Д. Ф. Калиниченко. – 3-е изд. – М. : Альянс, 2007. – 311 с.

СОДЕРЖАНИЕ