Министерство науки и высшего образования Российской Федерации

Федеральное государственной бюджетной образовательное учреждение
высшего образования

«Амурский государственный университет»

С.Г. Самохвалова

ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ

Методические указания к практическим занятиям

для студентов очной формы обучения

Благовещенск

2019

Исследование операций. Методические указания к практическим занятиям для студентов очной формы обучения. / Составитель С.Г. Самохвалова – Благовещенск.: ФГБОУ ВО «АмГУ», 2019 г. – 46 с.

В методических указаниях представлены краткие теоретические сведения из теории исследования операций, примеры, задания для самостоятельной работы.

Методические указания рекомендуются студентам, изучающим дисциплину «Исследования операций», «Теория принятия решений», а также всем желающим ознакомится с элементами задач исследования операций.

Рецензент:

Юрьева Т.А. доцент, к.п.н. доцент кафедры общей математики и информатики ФГБОУ ВО АмГУ

Содержание

Введение

Настоящие методические указания разработаны в помощь к решению практических заданий по дисциплине «Исследование операций». Изучение этой дисциплины является важной составной частью современного математического образования при подготовке специалистов по разным направлениям подготовки.

В методических указаниях рассмотрены задачи линейного программирования, задача коммивояжера, транспортная задача, задача о назначениях.

Для закрепления полученных знаний студентов в методических указаниях приведены задания для самостоятельной работы, охватывающие основные темы. Список литературы приведен в конце указаний.

Алгебраический метод решения задач линейного программирования

Для решения задач линейного программирования предложено немало различных алгоритмов. Наиболее эффективным среди них является алгоритм, известный под названием *симплексный метод,* или метод последовательного улучшения плана.

Впервые симплексный метод был предложен американским ученым Дж. Данцингом в 1949 г., однако еще в 1939 г идеи метода были разработаны российским математиком Л.В. Канторовичем.

Симплекс-алгоритм состоит из следующих шагов.

Шаг 1. Используя линейную модель стандартной формы, определяют **начальное допустимое базисное решение** путем приравнивания к нулю небазисных переменных.

Шаг 2. Из числа текущих небазисных переменных выбирается **включаемая в новый базис переменная.** Если такой переменной нет, вычисления прекращаются, так как текущее базисное решение оптимально. В противном случае осуществляется переход к шагу 3.

Шаг 3. Из числа переменных текущего базиса выбирается **исключаемая переменная**.

Шаг 4. Находится новое базисное решение, соответствующее новым составам небазисных и базисных переменных. Осуществляется переход к шагу 2.

Чтобы записать задачу ЛП в стандартной форме необходимо выполнить следующие преобразования:

все ограничения преобразовать в равенства с неотрицательной правой частью;

целевую функцию приравнять к нулю.

Неравенства любого типа (со знаками $\leq$, $\geq$) можно преобразовать в равенства добавлением в левую часть **дополнительных переменных**. Те, переменные которые добавляются в неравенства $(\le)$ называются **остаточны-ми**, а в неравенства $(\ge)$ - **избыточными.**

Пример:

Неравенство $2x_1 + 3x_2 \le 7$ в стандартной форме $2x_1 + 3x_2 + S = 7$, где S – дополнительная переменная, которая называется **остаточной**.

Неравенство $x_1 + 3x_2 \ge 6$ в стандартной форме $x_1 + 3x_2 - C = 6$, где С – дополнительная переменная, которая называется **избыточной.**

Рассмотрим алгоритм симплекс-метода на следующем примере.

Пример: Кондитерская фабрика "Победа" для производства двух видов мармелада А и В использует два вида основного сырья: сахарный песок и патоку. Нормы расхода сырья на производство 1 т мармелада каждого вида, а также запасы сырья и прибыль от реализации 1 т мармелада каждого вида приведены в таблице 1.

Таблица 1

Вид сырья	Нормы расхода сырья на 1 т мармелада, т		Запасы сырья, т
	А	В	
Сахарный песок	1	1	4
Патока	5	2	10
Прибыль от реализации 1 т продукции, тыс. руб.	5	3	

Требуется составить план производства мармелада, обеспечивающий максимум прибыли от ее реализации.

Решение. Составим математическую модель задачи.

Обозначим через $x_i, i = 1, 2$, – объем производства каждого вида мармелада (в т). Цель задачи – максимизации прибыли от реализации при ограничениях на запасы сырья.

$$f(x) = 5x_1 + 3x_2 \to \max$$

при ограничениях

$$x_1 + x_2 \le 4,$$
$$5x_1 + 2x_2 \le 10,$$
$$x_i \ge 0, \quad i = 1,2.$$

Приведем задачу ЛП к стандартной форме.

$z - 5x_1 - 3x_2 = 0$.

$$x_1 + x_2 + S_1 = 4,$$
$$5x_1 + 2x_2 + S_2 = 10,$$
$$x_{1,2} \geq 0.$$

Начальное базисное решение находится путем приравнивая к нулю небазисных переменных ($x_1 = 0,\ x_2 = 0$). Переменные S_1, S_2 играют роль базисных переменных.

Начальное базисное решение запишем в виде симплекс-таблицы:

Таблица 2

Базисные переменные	x_1	x_2	S_1	S_2	Решение
z	-5	-3	0	0	0
S_1	1	1	1	0	4
S_2	5	2	0	1	10

Начальное базисное решение будет иметь следующий вид: $S_1 = 4,\ S_2 = 10$.

Чтобы определить, является ли полученное начальное решение оптимальным, необходимо знать условие оптимальности.

Условие оптимальности. *Если все коэффициенты при небазисных переменных в **z** – уравнении положительны (для задачи максимизации) или отрицательны (для задачи минимизации), или равны нулю, полученное решение является оптимальным.*

Если решение не оптимально вводимой переменной в задаче максимизации является ***небазисная переменная,*** *имеющая в **z** – уравнении наибольший по абсолютной величине отрицательный коэффициент, для задачи минимизации наибольший положительный коэффициент.*

Анализируя z-уравнение, можно заметить, что небазисные переменные имеют отрицательные коэффициенты, согласно *условию оптимальности* задача буде иметь решение, если небазисные переменные будут положительными или равны нулю, т.е. данное решение не оптимально.

Применяя условие оптимальности к исходной таблице, выберем в качестве переменной, включаемой в базис, переменную имеющую в z-уравнении наибольший по абсолютной величине отрицательный коэффициент, в данном случае это переменная $x_1 = -5$, данную переменную вводим в базис.

Процедура выбора исключаемой переменной предполагает проверку *условия допустимости*.

Условие допустимости. *В задачах максимизации и минимизации в качестве исключаемой переменной выбирается та базисная переменная, для которой отношение постоянной в правой части соответствующего ограничения к* ***положительному*** *коэффициенту ведущего столбца минимально, если все элементы ведущего столбца будут отрицательны, то* оптимального решения задачи не существует.

Для того чтобы определить исключаемую переменную, в столбце соответствующем вводимой переменной x_1, вычисляются отношения постоянных, фигурирующих в правых частях этих ограничений, к положительным элементам данного столбца. Исключаемой переменной будет та переменная, для которой отношение будет минимальным, в нашем случае переменная S_2.

Начальная симплекс-таблица полученная при проверки условия оптимальности и допустимости приведена в таблице 3.

Таблица 3

Базисные переменные	x_1	x_2	S_1	S_2	Решение	Отношение
z	-5	-3	0	0	0	
S_1	1	1	1	0	4	4/1=4
S_2	5	2	0	1	10	10/5=**2**

Процесс вычисления нового базисного решения состоит из двух этапов:

1) Вычисление элементов новой ведущей строки.

2) Вычисление элементов остальных строк, включая z-уравнение.

Симплекс-таблицу необходимо преобразовать таким образом, чтобы на пересечении выбранной строки и выбранного столбца в новом базисном решении стояла единица, а остальные элементы выбранного столбца были нулевыми.

Получим новое базисное решение – таблица 4.

Таблица 4

Базисные переменные	x_1	x_2	S_1	S_2	Решение	Отношение
z	0	-1	0	1	10	
S_1	0	3/5	1	-1/5	2	2:3/5=**10/3**
x_1	1	2/5	0	1/5	2	2:2/5=**10/2**

Полученное новое базисное решение не будет оптимальным, т.к в z-уравнении коэффициент при переменной x_2 отрицательный.

В соответствии с условием оптимальности в качестве вводимой переменной следует выбирать x_2, так как коэффициент при этой переменной в z-уравнении равен - 1. Исходя из условия допустимости, определяем, что исключаемой переменной будет S_1. Преобразуем данную симплекс-таблицу и получим новое базисное решение – таблица 5

Таблица 5

Базисные переменные	x_1	x_2	S_1	S_2	Решение
z	0	0	5/3	2/3	40/3
x_2	0	1	5/3	-1/3	10/3
x_1	1	0	-2/3	1/3	2/3

Последняя симплекс-таблица соответствует оптимальному решению задачи, так как в z-уравнении ни одна из небазисных переменных не фигурирует с отрицательным коэффициентом.

Таким образом, для получения максимальной прибыли кондитерской фабрике "Победа" необходимо производить **2/3** т мармелада вида А и **10/3** т мармелада вида В. При этом максимальная прибыль от реализации продукции составит **40/3** тыс. руб.

Задание для самостоятельной работы

Решить задачу линейного программирования симплекс-методом.

Вариант	Задача	Вариант	Задача
1	$z=4x_1-2x_2\to\max,$ $\begin{cases}2x_1+3x_2\le 18,\\ -x_1+3x_2\le 9,\\ 2x_1-x_2\le 10,\end{cases}$ $x_i\ge 0; i=1,2.$	2	$z=x_1-x_2\to\max,$ $\begin{cases}-2x_1+3x_2\le 9,\\ x_1-2x_2\le 2,\\ x_1+x_2\le 8,\end{cases}$ $x_i\ge 0; i=1,2.$
3	$z=3x_1-4x_2\to\max,$ $\begin{cases}x_1+2x_2\le 4,\\ x_1+x_2\le 3,\\ 2x_1+x_2\le 8,\end{cases}$ $x_i\ge 0; i=1,2.$	4	$z=x_1-3x_2\to\max,$ $\begin{cases}-2x_1+3x_2\le 6,\\ x_1+3x_2\le 15,\\ 3x_1-x_2\le 15,\end{cases}$ $x_i\ge 0; i=1,2.$
5	$z=5x_1+4x_2\to\max,$ $\begin{cases}-x_1+2x_2\le 12,\\ 5x_1-4x_2\le 20,\\ x_1\le 8,\end{cases}$ $x_i\ge 0; i=1,2.$	6	$z=3x_1+2x_2\to\max,$ $\begin{cases}2x_1-x_2\le 8,\\ -x_1+2x_2\le 8,\\ x_1\le 6,\end{cases}$ $x_i\ge 0; i=1,2.$
7	$z=3x_1+5x_2\to\max,$ $\begin{cases}x_1\le 8,\\ -x_1+2x_2\le 12,\\ -3x_1+2x_2\le 8,\end{cases}$ $x_i\ge 0; i=1,2.$	8	$z=3x_1+5x_2\to\max,$ $\begin{cases}-2x_1+x_2\le 2,\\ 2x_1-x_2\le 10,\\ -x_1+2x_2\le 10,\end{cases}$ $x_i\ge 0; i=1,2.$
9	$z=x_1+2x_2\to\max,$ $\begin{cases}-x_1+2x_2\le 7,\\ x_1+x_2\le 11,\\ x_1\le 8,\end{cases}$ $x_i\ge 0; i=1,2.$	10	$z=2x_1+4x_2\to\max,$ $\begin{cases}x_1-x_2\le 5,\\ -3x_1+2x_2\le 8,\\ x_2\le 7,\end{cases}$ $x_i\ge 0; i=1,2.$
11	$z=4x_1+3x_2\to\max,$ $\begin{cases}-3x_1+4x_2\le 32,\\ 2x_1+x_2\le 19,\\ 3x_1-x_2\le 21,\end{cases}$ $x_i\ge 0; i=1,2.$	12	$z=3x_1+5x_2\to\max,$ $\begin{cases}x_1+x_2\le 9,\\ 3x_1-2x_2\le 12,\\ x_1+4x_2\le 16,\end{cases}$ $x_i\ge 0; i=1,2.$

Вариант	Задача	Вариант	Задача
13	$z = 6x_1 + 3x_2 \to \max,$ $\begin{cases} -x_1 + 2x_2 \le 18, \\ 5x_1 + x_2 \le 53, \\ x_1 - 2x_2 \le 4, \end{cases}$ $x_i \ge 0; i = 1, 2.$	14	$z = 3x_1 + 4x_2 \to \max,$ $\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 20, \\ -x_1 + 2x_2 \le 8, \\ 3x_1 - x_2 \le 18, \end{cases}$ $x_i \ge 0; i = 1, 2.$
15	$z = 5x_1 + 4x_2 \to \max,$ $\begin{cases} -x_1 + x_2 \le 1, \\ x_1 - 2x_2 \le 1, \\ 2x_1 + x_2 \le 22, \end{cases}$ $x_i \ge 0; i = 1, 2.$	16	$z = 2x_1 - 4x_2 \to \max,$ $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \le 18, \\ -x_1 + 2x_2 \le 10, \\ 3x_1 - x_2 \le 9, \end{cases}$ $x_i \ge 0; i = 1, 2.$
17	$z = -4x_1 + 3x_2 \to \max,$ $\begin{cases} 2x_1 + x_2 \le 4, \\ x_1 + 2x_2 \le 8, \\ x_1 + x_2 \le 3, \end{cases}$ $x_i \ge 0; i = 1, 2.$	18	$z = 3x_1 + 4x_2 \to \max,$ $\begin{cases} 4x_1 - 3x_2 \le 32, \\ x_1 - 3x_2 \le 21, \\ x_1 + 2x_2 \le 19, \end{cases}$ $x_i \ge 0; i = 1, 2.$

Линейное программирование: двойственный симплекс-метод

Двойственный симплекс-метод позволяет решать задачи линейного программирования, системы ограничений которых при положительном базисе содержат свободные члены любого знака. Этот метод позволяет уменьшить количество преобразований системы ограничений, а также размера симплексной таблицы.

Рассмотрим применение двойственного симплекс-метода на примере.

Пример.

$$z = x_1 + 3x_2 + x_3 \quad \to \min$$

$$2x_1 + x_2 + x_3 \ge 1$$

$$-x_1 + 3x_2 - 2x_3 \ge 2$$

$$x_i \ge 0, \ i = 1,2,3$$

Чтобы получить начальное базисное решение необходимо преобразовать все ограничения в неравенства со знаком $\le$ и ввести остаточные переменные.

Выполнив эти процедуры, приходим к следующей формулировке задачи:

$$z - x_1 - 3x_2 - x_3 = 0 \quad \rightarrow \min$$
$$-2x_1 - x_2 - x_3 + S_1 = -1$$
$$x_1 - 3x_2 + 2x_3 + S_2 = -2$$
$$x_i \geq 0, \; i = 1,2,3$$

Попытка составить для данной задачи начальную симплекс-таблицу приводит к выводу, что значения остаточных переменных (S_1, S_2) не обеспечивают получения допустимой стартовой точки. Так как целевая функция подлежит минимизации, а все коэффициенты z- уравнения отрицательные, начальное базисное решение ($S_1 = -1, \; S_2 = -2$) оптимальное, но недопустимое. Такая ситуация типична для некоторого типа задач линейного программирования, решение которых обычно получают с помощью двойственного симплекс-метода.

Начальная симплекс-таблица, соответствующая оптимальному, но недопустимому решению, имеет вид

Таблица 6

Базисные переменные	x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	Решение
z	-1	-3	-1	0	0	0
S_1	-2	-1	-1	1	0	-1
S_2	1	-3	2	0	1	-2

Как и обычный симплексный метод, рассматриваемый метод решения основан на использовании условий допустимости и оптимальности.

Условие допустимости. *В качестве исключаемой переменной выбирается наибольшая по абсолютной величине отрицательная базисная переменная (при наличии альтернатив выбор делается произвольно). Если все базисные переменные неотрицательные, процесс вычислений заканчивается, так как полученное решение допустимое и оптимальное.*

<u>Условие оптимальности</u>. *Включаемая в базис переменная выбирается из числа небазисных переменных следующим образом. Вычисляются отношения коэффициентов левой части z-уравнения к соответствующим коэффициентам уравнения, ассоциированного с исключаемой переменной. Отношения с положительным или нулевым значением знаменателя не учитываются. В задаче минимизации вводимой переменной должно соответствовать наименьшее из указанных отношений, а в задаче максимизации – отношение, наименьшее по абсолютной величине (при наличии альтернатив выбор делается произвольно). Если знаменатели всех отношений равны нулю или положительные, задача не имеет допустимых решений.*

В нашем примере в качестве исключаемой переменной выбирается $S_2 (= -2)$, так как она имеет наибольшее по абсолютной величине отрицательное значение. В качестве включаемой переменной выбирается x_2, так как этой переменной соответствует наименьшее отношение, равное 1.

Определение исключаемой и включаемой переменной запишем в следующую таблицу

Таблица 7

Базисные переменные	x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	Решение
z	-1	-3	-1	0	0	0
S_1	-2	-1	-1	1	0	-1
S_2	1	-3	2	0	1	-2
Отношение		1				

После выбора включаемой в базис и исключаемой переменных для получения следующего решения осуществляется обычная операция преобразования строк симплекс-таблицы.

Таблица 8

Базисные переменные	x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	Решение
z	-2	0	-3	0	-1	2
S_1	-7/3	0	-4/3	1	-1/3	-1/3
x_2	-1/3	1	-2/3	0	-1/3	2/3
Отношение	6/7		9/4		3	

Новое решение все еще недопустимое ($S_1 = -1/3$). В качестве новой исключаемой переменной берем $S_1 (= -1/3)$, водимой в базис будет переменная x_1, и в результате будем иметь следующую симплекс таблицу:

Таблица 9

Базисные переменные	x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	Решение
z	0	0	-13/7	-6/7	-5/7	16/7
x_1	1	0	4/7	-3/7	1/7	1/7
x_2	0	1	10/21	-1/7	-2/7	5/7

Полученное решение является оптимальным и допустимым $x_1 = 1/7,\ x_2 = 5/7,\quad z = 16/7$.

Запишем для данной задачи двойственную задачу

$$f = y_1 + 2y_2 \quad \to \max$$

$$2y_1 - y_2 \le 1$$
$$y_1 + 3y_2 \le 3$$
$$y_1 - 2y_2 \le 1$$
$$y_i \ge 0,\ i = 1,2$$

Решение двойственной задачи берем из последней симплекс-таблицы, $y_1 = 6/7,\ y_2 = 5/7,\ f = 16/7$.

Задание для самостоятельной работы

Записать задачу, двойственную исходной задаче; решить её и записать решение исходной и двойственной задачи. По результатам решения взаимно двойственных задач убедиться в справедливости теорем двойственности.

1.

$$z = -x_1 + x_2 \to \max,$$
$$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 2 \\ x_1 - 2x_2 \le 1 \\ -x_1 + 3x_2 \le 3 \\ x_i \ge 0,\ i = 1, 2. \end{cases}$$

2.

$$9x_1 + 12x_2 \to \max,$$
$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 \le 3 \\ x_1 + 3x_2 \le 4 \\ x_1 - 2x_2 \le 2 \\ x_i \ge 0,\ i = 1, 2. \end{cases}$$

3.

$$3x_1 + 5x_2 \to \max,$$
$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 \le 1 \\ x_1 + 3x_2 \le 3 \\ x_1 - 2x_2 \le 1 \\ x_i \ge 0,\ i = 1, 2. \end{cases}$$

4.

$$4x_1 - x_2 \to \min,$$
$$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 3 \\ -2x_1 + 3x_2 \le 8 \\ -x_1 + x_2 \ge 2 \\ x_i \ge 0,\ i = 1, 2. \end{cases}$$

5.

$$9x_1 + 7x_2 \to \max,$$
$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 \le 1 \\ x_1 + 3x_2 \le 3 \\ x_1 - 2x_2 \le 1 \\ x_i \ge 0,\ i = 1, 2. \end{cases}$$

6.

$$-x_1 + x_2 \to \max,$$
$$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 2 \\ x_1 - 2x_2 \le 1 \\ -x_1 + 3x_2 \le 3 \\ x_i \ge 0,\ i = 1, 2. \end{cases}$$

7.

$$x_1 + 2x_2 \to \max,$$
$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 \le 1 \\ x_1 + 3x_2 \le 3 \\ x_1 - 2x_2 \le 1 \\ x_i \ge 0, \ i = 1, 2. \end{cases}$$

8.

$$x_1 - x_2 \to \min,$$
$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 \le 1 \\ x_1 + 3x_2 \le 3 \\ x_1 - 2x_2 \le 1 \\ x_i \ge 0, \ i = 1, 2. \end{cases}$$

9.

$$x_1 + 3x_2 \to \max,$$
$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 \le 3 \\ x_1 + 3x_2 \le 3 \\ x_1 - 2x_2 \le 1 \\ x_i \ge 0, \ i = 1, 2. \end{cases}$$

10.

$$x_1 + 2x_2 \to \max,$$
$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 \le 1 \\ x_1 + 3x_2 \le 3 \\ x_1 - 2x_2 \le 2 \\ x_i \ge 0, \ i = 1, 2. \end{cases}$$

11

$$x_1 - x_2 \to \max,$$
$$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 2 \\ -2x_1 + x_2 \le 1 \\ 3x_1 - x_2 \le 3 \\ x_i \ge 0, \ i = 1, 2. \end{cases}$$

12.

$$z = 2x_1 + x_2 \to \max,$$
$$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 11, \\ x_2 \le 8, \\ 2x_1 - x_2 \le 7, \end{cases}$$
$$x_i \ge 0; i = 1, 2.$$

13.

$$z = 5x_1 + 3x_2 \to \max,$$
$$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 9, \\ 4x_1 - x_2 \le 16, \\ -2x_1 + 3x_2 \le 12, \end{cases}$$
$$x_i \ge 0; i = 1, 2.$$

14.

$$z = 4x_1 + 2x_2 \to \max,$$
$$\begin{cases} -x_1 + x_2 \le 5, \\ x_1 \le 7, \\ 2x_1 - 3x_2 \le 8, \end{cases}$$
$$x_i \ge 0; i = 1, 2.$$

15.

$$z = 4x_1 + 3x_2 \to \max,$$
$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \le 20, \\ -x_1 + 3x_2 \le 18, \\ 2x_1 - x_2 \le 8, \end{cases}$$
$$x_i \ge 0; i = 1, 2.$$

16.

$$z = 4x_1 + 5x_2 \to \max,$$
$$\begin{cases} -4x_1 + 5x_2 \le 20, \\ 2x_1 - x_2 \le 12, \\ x_2 \le 8, \end{cases}$$
$$x_i \ge 0; i = 1, 2.$$

Линейное программирование: транспортная задача

Транспортные модели (задачи) — специальный класс задач линейного программирования. Эти модели часто описывают перемещение (перевозку) какого-либо товара из **пункта отправления** (исходный пункт, например место производства) в **пункт назначения** (склад, магазин).

Назначение транспортной задачи — определение объемов перевозок из пунктов отправления в пункты назначения с минимальной суммарной стоимостью перевозок. При этом должны учитываться ограничения, накладываемые на объемы грузов, имеющихся в пунктах отправления (предложения), и ограничения, учитывающие потребность грузов в пунктах назначения (спрос). В транспортной модели предполагается, что стоимость перевозки по какому-либо маршруту прямо пропорциональна объему груза, перевозимого по этому маршруту.

Исходные параметры модели

n – количество пунктов отправления, m – количество пунктов назначения.

a_i – запас продукции в пункте отправления A_i $(i=\overline{1,n})$.

b_j – спрос на продукцию в пункте назначения B_j $(j=\overline{1,m})$.

c_{ij} – стоимость перевозки единицы продукции из пункта отправления A_i в пункт назначения B_j.

Искомые параметры модели

x_{ij} – количество продукции, перевозимой из пункта отправления A_i в пункт назначения B_j.

$L(X)$ – транспортные расходы на перевозку всей продукции.

Сформулируем транспортную задачу в общем виде:

На m станциях отправления $A_1, A_2, \ldots, A_m$ сосредоточено соответственно $a_1, a_2, \ldots a_m$ единиц однородного груза. Груз следует перевезти в n пунктов назначения $B_1, B_2, \ldots, B_n$, причём в каждый из пунктов нужно завести соответственно $b_1, b_2, \ldots, b_n$ единиц груза. Стоимость перевозки единицы груза из пункта A_i в пункт B_j задана и равна c_{ij}.

Математическую модель транспортной задачи запишем в виде:

$$L(X)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}c_{ij}x_{ij}\rightarrow \min \qquad 1$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{m} x_{ij} = a_i, i = \overline{1,n}, \\ \sum_{i=1}^{n} x_{ij} = b_j, j = \overline{1,m}, \\ \forall x_{ij} \geq 0 \left(i = \overline{1,n}; j = \overline{1,m}\right). \end{cases} \quad 2$$

Целевая функция представляет собой общие транспортные расходы на осуществление всех перевозок в целом. Первая группа ограничений указывает, что запас продукции в любом пункте отправления должен быть равен суммарному объему перевозок продукции из этого пункта. Вторая группа ограничений указывает, что суммарные перевозки продукции в некоторый пункт потребления должны полностью удовлетворить спрос на продукцию в этом пункте. Наглядной формой представления модели ТЗ является транспортная матрица

Таблица 10

Пункты назнач. / Пункты отправ.	B_1	B_2	…	B_j	…	B_n	Запасы
A_1	c_{11} x_{11}	c_{12} x_{12}	…	c_{1j} x_{1j}	…	c_{1n} x_{1n}	a_1
$А_2$	c_{21} x_{21}	c_{22} x_{22}	…	c_{2j} x_{2j}	…	c_{2n} x_{2n}	a_2
…	…	…	…	…	…	…	…
A_i	c_{i1} x_{i1}	c_{i2} x_{i2}	…	c_{ij} x_{ij}	…	c_{in} x_{in}	a_i
…	…	…	…	…	…	…	…
A_m	c_{m1} x_{m1}	c_{m2} x_{m2}	…	c_{mj} x_{mj}	…	c_{mn} x_{mn}	a_m
Потребности	b_1	b_2	…	b_j	…	b_n	$\sum b_j = \sum a_i$

Из модели (1-2) следует, что сумма запасов продукции во всех пунктах отправления должна равняться суммарной потребности во всех пунктах потребления, т.е.

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{j=1}^{m} b_j$$

Если это условие выполняется, то транспортная задача называется **сбалансированной** (закрытой), в противном случае – **несбалансированной** (открытой). В случае, когда *суммарные запасы превышают суммарные потребности*, необходим дополнительный **фиктивный** (реально не существующий) пункт потребления, который будет формально потреблять существующий излишек запасов, т.е.

$$b_ф = \sum_{i=1}^{n} a_i - \sum_{j=1}^{m} b_j .$$

Если *суммарные потребности превышают суммарные запасы*, то необходим дополнительный **фиктивный** пункт отправления, формально восполняющий существующий недостаток продукции в пунктах отправления:

$$a_ф = \sum_{j=1}^{m} b_j - \sum_{i=1}^{n} a_i .$$

Для фиктивных перевозок вводятся **фиктивные** тарифы $c^ф$, величина которых обычно приравнивается к нулю $c^ф = 0$.

Поставленная задача, как и всякая задача линейного программирования, решается симплекс-методом. Однако, ввиду простого строения системы уравнений (2), симплекс-метод в данном случае значительно упрощается и сводится к так называемому распределительному методу.

Алгоритм решения транспортной задачи

Шаг 1. Определяем начальное базисное допустимое решение.

Специальная структура транспортной модели для построения начального решения позволяет применить следующие методы: метод северо-западного угла; метод наименьшей стоимости; метод Фогеля.

Шаг 2. На основании условия оптимальности симплекс-метода среди всех небазисных переменных определяем вводимую в базис. Если все небазисные переменные удовлетворяют условию оптимальности, вычисления заканчиваются; в противном случае переходим к третьему шагу.

Шаг 3. С помощью условия допустимости симплекс-метода среди текущих базисных переменных определяем исключаемую. Затем находим новое базисное решение. Возвращаемся ко второму шагу.

Алгоритм решения транспортной задачи рассмотрим на следующем примере.

Пример.

Транспортная компания занимается перевозкой зерна специальными зерновозами от трех элеваторов к четырем мельницам. В табл. 10 показаны возможности отгрузки зерна (предложения) элеваторами (в зерновозах) и потребности (спрос) мельниц (также в зерновозах), а также стоимость перевозки зерна одним зерновозом от элеваторов к мельницам. Стоимость перевозок c_{ij} приведена в сотнях долларов.

В данной задаче требуется определить структуру перевозок между элеваторами и мельницами с минимальной стоимостью. Для этого необходимо найти объемы перевозок x_{ij} между i-м элеватором и j-й мельницей.

Таблица 11

мельницы элеваторы	B_1	B_2	B_3	B_4	Запасы
A_1	*10* x_{11}	*0* x_{12}	*20* x_{13}	*11* x_{14}	***15***
A_2	*12* x_{21}	*7* x_{22}	*9* x_{23}	*20* x_{24}	***25***
A_3	*0* x_{31}	*14* x_{32}	*16* x_{33}	*18* x_{34}	***5***
Потребности	***5***	***15***	***15***	***10***	45=45

Начальное базисное решение найдем методом северо-западного угла.

Выполнение начинается с верхней левой ячейки (северо-западного угла) транспортной таблицы, т.е. с переменной x_{11}.

Шаг 1. Переменной x_{11} присваивается минимальное значение, допускаемое ограничениями на спрос и предложение.

Шаг 2. Вычеркивается строка (или столбец) с полностью реализованным предложением (с удовлетворенным спросом). Это означает, что в вычеркнутой строке (столбце) мы не будем присваивать значения остальным переменным (кроме переменной, определенной на первом шаге). Если одновременно удовлетворяются спрос и предложение, вычеркивается только строка или только столбец.

Шаг 3. Если не вычеркнута *только одна* строка или *только один* столбец, процесс останавливается. В противном случае переходим к ячейке справа, если вычеркнут столбец, или к нижележащей ячейке, если вычеркнута строка. Затем возвращаемся к первому шагу

Полученное начальное базисное решение приведено в таблице

мельницы элеваторы	B_1	B_2	B_3	B_4	Запасы
A_1	**5**	**10**			***15***
A_2		**5**	**15**	**5**	***25***
A_3				**5**	***5***
Потребности	***5***	***15***	***15***	***10***	

Нахождение вводимой в базис переменной (метод потенциалов)

В методе потенциалов строке i и столбцу j транспортной таблицы ставятся в соответствие числа Ui и Vj . Для каждой базисной переменной x_{ij} текущего решения потенциалы Ui и Vj должны удовлетворять уравнению

$$Ui + Vj = Cij \qquad 3$$

Совокупность всех уравнений приводят к системе, состоящей из $m + n-1$ уравнений, в которых фигурирует $m + n$ неизвестных. Значения потенциалов можно определить из этой системы, придавая одному из них произвольной значение (обычно U_1 полагается равным нулю) и затем решают систему.

Как только решение получено, оценка для небазисных переменных определяется в соответствии с соотношением

$$\mathbf{\Delta ij = Ui + Vj - Cij}$$

После этого для включения в базис выбирается небазисная переменная, имеющая самую большую положительную оценку **Δij.** Задача будет иметь оптимальное решение, когда все оценки для небазисных переменных будут меньше или равны нулю.

Найдем потенциалы для нашей задачи

$$\begin{cases} u_1 + v_1 = 10, \\ u_1 + v_2 = 0, \\ u_2 + v_2 = 7, \\ u_2 + v_{32} = 9, \\ u_2 + v_4 = 20, \\ u_3 + v_4 = 18. \end{cases}$$

Полагая U_1=0, получим значения потенциалов U_2=7; U_3=5; V_1=10; V_2 =0; V_3=2; V_4=13. Оценки для небазисных переменных определяются следующим образом

$$\Delta_{13} = U_1 + V_3 - C_{13}=0+2-20= -18$$
$$\Delta_{14} = U_1 + V_4 - C_{14}=0+13-11=2$$
$$\Delta_{21} = U_2 + V_1 - C_{21}=7+10-12=5$$
$$\Delta_{31} = U_3 + V_1 - C_{31}=5+10-0=15$$
$$\Delta_{32} = U_3 + V_2 - C_{32}=5+0-14= -9$$
$$\Delta_{33} = U_3 + V_3 - C_{33}=5+2-16= -9$$

Поскольку переменная x_{31} имеет максимальную положительную оценку Δ_{31}, она и выбирается в качестве вводимой в базис.

Нахождение переменной, выводимой из базиса

Определив вводимую в базис переменную x_{31} далее следует определить исключаемую из базиса переменную.

Исключаемая из базиса переменная определяется следующим образом. Выбрав в качестве вводимой переменную x_{31} мы хотим, чтобы перевозки по маршруту, соответствующему этой переменной, уменьшили общую стоимость перевозок.

Сначала построим замкнутый цикл, который начинается и заканчивается в ячейке, соответствующей вводимой переменной (в данном примере — это ячейка (3,1)). Цикл состоит из последовательности горизонтальных и вертикальных отрезков (но не диагональных), соединяющих ячейки, соответствующие текущим базисным переменным, и ячейку, соответствующую вводимой переменной. В таблице 12 показан цикл для вводимой переменной x_{31}. Для любой вводимой переменной можно построить только один замкнутый цикл.

Таблица 12

– **5**	+ **10**		
	– **5**	**15**	+ **5**
+ x_{31}			**5** –

Выводимой из базиса переменной, выбирается та, которая имеет наименьшее значение из находящихся на изломах цикла переменных, помеченных знаком " – " . В нашем случае три переменных имеют одно и то же значение (=5); в этом случае любую из них можно исключить из базиса.

Пусть выбрана переменная x_{34}; тогда значение x_{31} становится равным 5, а переменные, находящиеся на изломах цикла, соответствующим образом корректируются (т.е. каждая из них увеличивается или уменьшается на 5 единиц в зависимости от знака "+" или " – ".

Получаем новое базисное решение

0	**15**		
	0	**15**	**10**
5			

Оптимальность нового базисного решения проверяется вычислением новых потенциалов и оценок для небазисных переменных.

Данная процедура проводится до, тех пора пока оценки для небазисных переменных не будут удовлетворять условию оптимальности.

Решение задачи представлено в таблице

	5		**10**
0	**10**	**15**	
5			

Суммарные транспортные расходы составят 315 руб.

Задание для самостоятельной работы

№ 1

Пункты назнач. / Пункты отправ.	B_1	B_2	B_3	B_4	Запасы
A_1	12	15	21	11	240
A_2	14	8	15	20	190
A_3	19	16	26	19	190
Потребности	140	190	170	120	

№ 2

Пункты назнач. / Пункты отправ.	B_1	B_2	B_3	B_4	Запасы
A_1	15	21	14	7	350
A_2	8	15	11	9	330
A_3	16	26	12	13	270
Потребности	160	390	250	150	

№ 3

Пункты назнач. / Пункты отправ.	B_1	B_2	B_3	B_4	Запасы
A_1	21	14	17	11	290
A_2	15	11	21	12	240
A_3	26	12	20	13	190
Потребности	200	260	140	120	

№ 4

Пункты назнач. / Пункты отправ.	B_1	B_2	B_3	B_4	Запасы
A_1	12	21	9	8	450
A_2	13	15	11	15	300
A_3	19	26	12	13	400
Потребности	340	290	370	150	

№ 5

Пункты назнач. / Пункты отправ.	B_1	B_2	B_3	B_4	Запасы
A_1	21	9	10	14	180
A_2	15	11	13	13	230
A_3	26	12	17	21	180
Потребности	220	160	120	90	

№ 6

Пункты назнач. / Пункты отправ.	B_1	B_2	B_3	B_4	Запасы
A_1	9	10	16	14	340
A_2	11	13	21	11	360
A_3	12	17	20	21	280
Потребности	260	380	160	180	

№ 7

Пункты назнач. / Пункты отправ.	B_1	B_2	B_3	B_4	Запасы
A_1	8	12	5	6	230
A_2	4	13	12	8	330
A_3	16	19	13	10	280
Потребности	190	290	120	240	

№ 8

Пункты назнач. / Пункты отправ.	B_1	B_2	B_3	B_4	Запасы
A_1	21	10	15	14	300
A_2	15	13	21	11	450
A_3	26	17	20	25	400
Потребности	360	420	220	150	

№ 9

Пункты назнач. / Пункты отправ.	B_1	B_2	B_3	B_4	Запасы
A_1	13	8	10	9	190
A_2	14	4	13	11	190
A_3	20	16	17	13	240
Потребности	100	290	110	120	

№ 10

Пункты назнач. / Пункты отправ.	B_1	B_2	B_3	B_4	Запасы
A_1	7	11	16	11	340
A_2	12	15	17	21	280
A_3	11	12	19	13	360
Потребности	390	280	130	180	

№ 11

Пункты назнач. / Пункты отправ.	B_1	B_2	B_3	B_4	Запасы
A_1	20	8	7	9	250
A_2	14	4	12	5	300
A_3	22	15	11	14	200
Потребности	290	170	140	150	

№ 12

Пункты назнач. / Пункты отправ.	B_1	B_2	B_3	B_4	Запасы
A_1	7	11	16	12	440
A_2	12	15	17	8	490
A_3	11	12	19	9	340
Потребности	300	410	290	270	

№ 13

Пункты назнач. / Пункты отправ.	B_1	B_2	B_3	B_4	Запасы
A_1	7	22	8	9	310
A_2	12	14	4	11	310
A_3	11	20	15	21	260
Потребности	230	310	160	180	

№ 14

Пункты назнач. / Пункты отправ.	B_1	B_2	B_3	B_4	Запасы
A_1	7	12	28	13	320
A_2	12	14	35	28	250
A_3	11	16	30	17	340
Потребности	260	190	250	210	

№ 15

Пункты назнач. / Пункты отправ.	B_1	B_2	B_3	B_4	Запасы
A_1	18	7	12	10	450
A_2	15	12	14	17	400
A_3	25	11	16	21	450
Потребности	270	400	330	300	

№ 16

Пункты назнач. / Пункты отправ.	B_1	B_2	B_3	B_4	Запасы
A_1	7	18	7	6	330
A_2	12	15	3	8	430
A_3	11	25	15	11	380
Потребности	330	320	250	240	

Задача о назначениях

Задача о назначениях – частный случай транспортной задачи. В задаче о назначениях количество пунктов отправления равно количеству пунктов назначения. Объемы потребности и предложения в каждом из пунктов назначения и отправления равны 1. Примером типичной задачи о назначениях является распределение работников по различным видам работ, минимизирующее суммарное время выполнения работ.

Переменные задачи о назначениях определяются следующим образом

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ если } i - \text{й рабочий работает на } j - \text{м станке}, \\ 0, \text{ в противном случае.} \end{cases}$$

Цель задачи — найти оптимальное (минимальной стоимости) распределение работников по всем заявленным работам.

Задачу о назначениях можно эффективно решить точно так же, как и транспортную задачу. Вместе с тем тот факт, что все величины спроса и предложения равны 1, привел к разработке упрощенного алгоритма решения, названного **венгерским методом.**

Венгерский метод. Алгоритм решения.

Этап 1. Накапливаем нули в каждой строке, для этого находим в каждой строке минимальный элемент и вычитаем из всех элементов строки. После этого находим минимальные элементы в каждом столбце и вычитаем его от всех элементов столбца.

Этап 2. Рассматриваем любую из строк матрицы имеющую меньше всего нулей. Пометим один из нулей этой строки и зачеркнем все остальные нули этой строки и того столбца, где находится этот нуль. Эта операция повторяется для всех остальных строк. Если в результате число помеченных нулей равно N, то есть назначение получилось полным, то решение найдено, в противном случае переходим к следующему этапу.

Этап 3.

3.1 Пометим номера строк, в которых не имеется ни одного помеченного нуля.

3.2 Пометим номера столбцов, в которых есть перечеркнутый нуль хотя бы в одной из строк с помеченным номером.

3.3 Пометим номера строк, содержащие помеченные нули хотя бы в одном из столбцов с помеченным номером.

Действия 3.2 и 3.3 повторяются поочередно до тех пор, пока есть что помечать. После этого необходимо зачеркнуть каждую непомеченную строку и каждый помеченный столбец.

Этап 4. Найти наименьший невычеркнутый элемент и вычесть его из всех невычеркнутых элементов и прибавить к элементам, стоящим на пересечении проведенных прямых. После этого расчет начинается с этапа 2 и продолжается до получения решения.

Пример решения задачи о назначении венгерским методом. Данные для задачи представлены в таблице:

	Работы					
Работники		1	2	3	4	
	1	**1**	**4**	**6**	**3**	
	2	**9**	**7**	**10**	**9**	
	3	**4**	**5**	**11**	**7**	
	4	**8**	**7**	**8**	**5**	
		Исходная задача о назначении работников на работы				
	Работы					
Работники		1	2	3	4	
	1	**1**	**4**	**6**	**3**	
	2	**9**	**7**	**10**	**9**	
	3	**4**	**5**	**11**	**7**	
	4	**8**	**7**	**8**	**5**	
		Находим в каждой строке минимальный элемент				
	Работы					
Работники		1	2	3	4	
	1	**0**	**3**	**5**	**2**	
	2	**2**	**0**	**3**	**2**	
	3	**0**	**1**	**7**	**3**	
	4	**3**	**2**	**3**	**0**	
		Отняли его от всех элементов строки				
	Работы					
Работники		1	2	3	4	
	1	**0**	**3**	**5**	**2**	

	2	**2**	**0**	**3**	**2**	
	3	**0**	**1**	**7**	**3**	
	4	**3**	**2**	**3**	**0**	
		Находим в каждом столбце минимальный элемент				
	Работы					
Работники		1	2	3	4	
	1	**0**	**3**	**2**	**2**	
	2	**2**	**0**	**0**	**2**	
	3	**0**	**1**	**4**	**3**	
	4	**3**	**2**	**0**	**0**	
		Вычитаем из всех элементов соответствующих столбцов.				

	Работы					
Работники		1	2	3	4	
	1	0^*	**3**	**2**	**2**	
	2	**2**	0^*	$\cancel{0}$	**2**	
	3	$\cancel{0}$	**1**	**4**	**3**	
	4	**3**	**2**	0^*	$\cancel{0}$	
		Помечаем нули и вычеркиваем все остальные нулевые элементы				

	Работы					
Работники		1	2	3	4	
	1	0^*	**3**	**2**	**2**	*
	2	**2**	0^*	$\cancel{0}$	**2**	
	3	$\cancel{0}$	**1**	**4**	**3**	*
	4	**3**	**2**	0^*	$\cancel{0}$	
		*				

Находим строчку где нет помеченного нуля, помечаем ее, затем помечаем столбец с перечеркнутым нулем

	Работы				
Работники	1	2	3	4	
1	**0***	**3**	**2**	**2**	*
2	**2**	**0***	$\cancel{0}$	**2**	
3	$\cancel{0}$	**1**	**4**	**3**	*
4	**3**	**2**	**0***	$\cancel{0}$	
	*				

Вычеркиваем помеченный столбец и непомеченные строки.

	Работы				
Работники	1	2	3	4	
1	**0***	**3**	**2**	**2**	*
2	**2**	**0***	$\cancel{0}$	**2**	
3	$\cancel{0}$	**1**	**4**	**3**	*
4	**3**	**2**	**0***	$\cancel{0}$	
	*				

Среди невычеркнутых элементов находим минимальный.

	Работы				
Работники	1	2	3	4	
1	**0***	**3**	**2**	**2**	*
2	**2**	**0***	$\cancel{0}$	**2**	
3	$\cancel{0}$	**1**	**4**	**3**	*
4	**3**	**2**	**0***	$\cancel{0}$	
	*				

Вычитаем его (1) из всех невычеркнутых и прибавляем его (1) к элементам на пересечении

	Работы				
Работники	1	2	3	4	
1	**0**	**2**	**1**	**1**	
2	**3**	**0**	**0**	**2**	
3	**0**	**0**	**3**	**2**	
4	**4**	**2**	**0**	**0**	

Получаем матрицу и переходим к шагу 2.

	Работы					
Работники		1	2	3	4	
	1	**0** *	**2**	**1**	**1**	
	2	**3**	$\cancel{0}$	**0** *	**2**	
	3	$\cancel{0}$	**0** *	**3**	**2**	
	4	**4**	**2**	$\cancel{0}$	**0** *	
	Получаем допустимое решение. Число помеченных нулей равно 4.					

Задание для самостоятельной работы

Решить задачу о назначениях

5	7	3	4	3	6
4	7	4	5	4	1
4	3	5	8	6	4
6	3	8	6	5	2
4	2	5	7	7	5
5	5	6	8	5	4

5	4	3	2	2	4
3	4	4	1	4	3
4	5	3	2	4	3
2	4	5	1	4	1
5	4	5	3	6	4
2	2	2	5	6	2

7	3	3	4	4	4
4	2	3	6	5	4
2	1	5	5	4	2
3	4	3	3	6	3
6	3	3	5	5	4
5	6	7	2	3	1

4	3	5	8	6	4
5	5	6	8	5	4
4	2	5	7	7	5
5	7	3	4	3	6
4	7	4	5	4	1
6	3	8	6	5	2

2	4	5	1	4	1
5	4	3	2	2	4
2	2	2	5	6	2
3	4	4	1	4	3
4	5	3	2	4	3
5	4	5	3	6	4

2	1	5	5	4	2
5	6	7	2	3	1
7	3	3	4	4	4
6	3	3	5	5	4
4	2	3	6	5	4
3	4	3	3	6	3

4	3	6	10	1	5
5	5	7	10	1	1
4	2	6	9	1	6
5	7	4	6	1	7
3	3	4	5	8	5
6	3	9	8	1	3

3	6	4	6	4	2
1	3	2	1	3	5
5	5	5	5	1	4
4	5	6	7	1	9
2	6	6	6	1	7
5	6	4	5	1	5

3	2	7	8	5	5
3	5	7	6	6	10
5	2	3	2	1	3
4	2	6	9	2	7
2	8	9	8	2	3
1	9	8	8	3	9

4	2	6	9	1	6
3	3	4	5	8	5
4	3	6	10	1	5
5	7	4	6	1	7
6	3	9	8	1	3
5	5	7	10	1	1

6	6	2	4	3	4
1	3	5	3	1	2
5	5	4	1	5	5
7	5	9	1	4	6
6	6	7	1	2	6
5	6	5	1	5	4

2	8	9	8	2	3
1	9	8	8	3	9
3	5	7	6	6	10
4	2	6	9	2	7
5	2	3	2	1	3
3	2	7	8	5	5

4	3	5	8	6	4
5	5	6	8	5	4
4	2	5	7	7	5
5	7	3	4	3	6
4	7	4	5	4	1
6	3	8	6	5	2

2	4	5	1	4	1
5	4	3	2	2	4
2	2	2	5	6	2
3	4	4	1	4	3
4	5	3	2	4	3
5	4	5	3	6	4

2	1	5	5	4	2
5	6	7	2	3	1
7	3	3	4	4	4
6	3	3	5	5	4
4	2	3	6	5	4
3	4	3	3	6	3

4	3	6	10	1	5
5	5	7	10	1	1
4	2	6	9	1	6
5	7	4	6	1	7
3	3	4	5	8	5
6	3	9	8	1	3

3	6	4	6	4	2
1	3	2	1	3	5
5	5	5	5	1	4
4	5	6	7	1	9
2	6	6	6	1	7
5	6	4	5	1	5

3	2	7	8	5	5
3	5	7	6	6	10
5	2	3	2	1	3
4	2	6	9	2	7
2	8	9	8	2	3
1	9	8	8	3	9

Задача коммивояжера

В 1859 г. У. Гамильтон придумал игру «Кругосветное путешествие», состоящую в отыскании такого пути, проходящего через все вершины (города, пункты назначения) графа, изображенного на рисунке 1, чтобы посетить каждую вершину однократно и возвратиться в исходную. Пути, обладающие таким свойством, называются ***гамильтоновыми циклами***.

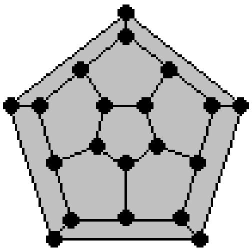

рис. 1

Задача о гамильтоновых циклах в графе получила различные обобщения. Одно из этих обобщений – ***задача коммивояжера***, имеющая ряд применений в исследовании операций, в частности при решении некоторых транспортных проблем.

Коммивояжер (бродячий торговец) должен выйти из первого города, посетить по разу в неизвестном порядке города 2,1,3..n и вернуться в первый город. Расстояния между городами известны. В каком порядке следует обходить города, чтобы замкнутый путь (тур) коммивояжера был кратчайшим?

Задача коммивояжера имеет ряд практических применений.

Примером реализации задачи на практике является составление оптимального маршрута человека для доставки продуктов в магазины с оптового склада; доставки бутилированной воды; обновления программных продуктов автоматизированного учета на предприятии; пополнения банкоматов наличными деньгами; сбора сотрудников для доставки вахтовым методом; расклейки афиш; сбора наличных денежных средств их терминалов и др. В этом случае вершинами являются места установки терминалов (банкоматов и т.д.) и «базовый пункт». Стоимостью каждого ребра (отрезка маршрута) является время в пути между двумя точками (вершинами) на маршруте.

Коммивояжер должен посетить один, и только один, раз каждый из n городов и вернуться в исходный пункт. Его маршрут должен минимизировать суммарную длину пройденного пути.

Математическая модель задачи:

$$\min F = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1$$

Условия неотрицательности и целочисленности

$x_{ij} \geq 0$, $x_{ij} \in \{0;1\}$ $\left(i, j = \overline{1,n}\right)$.

Добавляется условие прохождение маршрута через все города, т.е. так называемое условие цикличности. Иначе, маршрут должен представлять собой замкнутую ломаную, без пересечений в городах-точках.

Метод решения задачи коммивояжера

Алгоритм Литтла для решения задачи коммивояжера можно сформулировать в виде следующих правил:

1. Находим в каждой строке матрицы $C = \|c_{ij}\|$ минимальный элемент $U_i = \min\limits_j c_{ij}$ и вычитаем его из всех элементов соответствующей строки. Получим матрицу, приведенную по строкам, с элементами

$$c'_{ij} = c_{ij} - \min_j c_{ij}.$$

2. Если в матрице C', приведенной по строкам, окажутся столбцы, не содержащие нуля, то приводим ее по столбцам. Для этого в каждом столбце матрицы C' выбираем минимальный элемент V_j, $j=\overline{1,n}$ и вычитаем его из всех элементов соответствующего столбца. Получим матрицу

$$C''=\left\| c_{ij}-\min_j c_{ij}-\min_i c'_{ij} \right\|,$$

каждая строка и столбец, которой содержит хотя бы один нуль. Такая матрица называется приведенной по строкам и столбцам.

3. Суммируем элементы U_i и V_j, получим константу приведения

$$\gamma=\sum_{i=1}^{n} U_i+\sum_{j=1}^{n} V_j ,$$

которая будет нижней границей множества всех допустимых гамильтоновых контуров, то есть

$$\gamma=\varphi\left(\mathrm{M}^0\right)\leq z(X).$$

4. Находим степени нулей для приведенной по строкам и столбцам матрицы. Для этого мысленно нули в матице заменяем на знак «∞» и находим сумму минимальных элементов строки и столбца, соответствующих этому нулю. Записываем ее в правом верхнем углу клетки:

$$\alpha_{ij}=\min_{j'\neq j} c_{ij'}+\min_{i'\neq i} c_{i'j}.$$

5. Выбираем дугу (i_0, j_0), для которой степень нулевого элемента достигает максимального значения $\alpha_{i_0 j_0}=\max\limits_{c''_{ij}=0}\alpha_{ij}$.

6. Разбиваем множество всех гамильтоновых контуров M^0 на два подмножества $M^1_{i_0 j_0}$ и $M^1_{\overline{i_0 j_0}}$. Подмножество $M^1_{i_0 j_0}$ гамильтоновых контуров содержит дугу (i_0, j_0), $M^1_{\overline{i_0 j_0}}$ - ее не содержит. Для получения матрицы контуров $M^1_{i_0 j_0}$, включающих дугу (i_0, j_0), вычеркиваем в матрице C'' строку i_0 и столбец j_0. Чтобы не допустить образования негамильтонова контура, заменим симметричный элемент (j_0, i_0) на знак «∞».

7. Приводим матрицу гамильтоновых контуров $M^1_{i_0j_0}$. Пусть $h^1_{i_0j_0}$ - константа ее приведения. Тогда нижняя граница множества $M^1_{i_0j_0}$ определится так: $\varphi\left(M^1_{i_0j_0}\right)=\gamma+h^1_{i_0j_0}$.

8. Находим множество гамильтоновых контуров $M^1_{\overline{i_0j_0}}$, не включающих дугу (i_0, j_0). Исключение дуги (i_0, j_0) достигается заменой элемента $C''_{i_0j_0}$ в матрице C'' на ∞.

9. Делаем приведение матрицы гамильтоновых контуров $M^1_{\overline{i_0j_0}}$. Пусть $h^1_{\overline{i_0j_0}}$ - константа ее приведения. Нижняя граница множества $M^1_{\overline{i_0j_0}}$ определится так: $\varphi\left(M^1_{\overline{i_0j_0}}\right)=\gamma+h^1_{\overline{i_0j_0}}$.

10. Сравниваем нижние границы подмножества гамильтоновых контуров $M^1_{i_0j_0}$ и $M^1_{\overline{i_0j_0}}$. Если $\varphi\left(M^1_{i_0j_0}\right)<\varphi\left(M^1_{\overline{i_0j_0}}\right)$, то дальнейшему ветвлению в первую очередь подлежит множество $M^1_{i_0j_0}$. Если же $\varphi\left(M^1_{i_0j_0}\right)>\varphi\left(M^1_{\overline{i_0j_0}}\right)$, то разбиению подлежит множество $M^1_{\overline{i_0j_0}}$.

Процесс разбиения множеств на подмножества сопровождается построением дерева ветвлений.

11. Если в результате ветвлений получаем матрицу 2×2, то определяем полученный ветвлением гамильтонов контур и его длину.

12. Сравниваем длину гамильтонова контура с нижними границами оборванных ветвей. Если длина контура не превышает их нижних границ, то задача решена. В противном случае развиваем ветви подмножеств с нижней границей, меньшей полученного контура, до тех пор, пока не получим маршрут с меньшей длиной или не убедимся, что такого не существует.

Пример. Требуется найти легчайший простой основный ориентированный цикл в полном взвешенном ориентированном графе на пяти вершинах со следующей весовой матрицей:

	1	2	3	4	5
1	∞	9	8	4	10
2	6	∞	4	5	7
3	5	3	∞	6	2
4	1	7	2	∞	8
5	2	4	5	2	∞

Верхняя строка и левый столбец, выделенные затемненным фоном, содержат номера вершин графа; символ ∞, стоящий на главной диагонали, означает, естественно, отсутствие ребер-петель (начинающихся и заканчивающихся в одной и той же вершине); кроме того, символ ∞ здесь и всюду в дальнейшем обозначает «компьютерную бесконечность», т.е. самое большое из возможных в рассмотрении чисел; считается, что ∞+ любое число =∞.

Подсчитаем φ(Г) в нашем примере. Для этого выполним приведение матрицы весов; сначала - по строкам:

	1	2	3	4	5		
1	∞	9	8	4	10	4	← min в строке 1
2	6	∞	4	5	7	4	← min в строке 2
3	5	3	∞	6	2	2	← min в строке 3
4	1	7	2	∞	8	1	← min в строке 4
5	2	4	5	2	∞	2	← min в строке 5

результат приведения по строкам:

	1	2	3	4	5
1	∞	5	4	0	6
2	2	∞	0	1	3
3	3	1	∞	4	0
4	0	6	1	∞	7
5	0	2	3	0	∞

Определим константы приведения по столбцам:

	1	2	3	4	5
1	∞	5	4	0	6
2	2	∞	0	1	3
3	3	1	∞	4	0
4	0	6	1	∞	7
5	0	2	3	0	∞
	0	1	0	0	0
	↑ min в столбце 1	↑ min в столбце 2	↑ min в столбце 3	↑ min в столбце 4	↑ min в столбце 5

результат приведения матрицы:

	1	2	3	4	5
1	∞	4	4	0	6
2	2	∞	0	1	3
3	3	0	∞	4	0
4	0	5	1	∞	7
5	0	1	3	0	∞

сумма констант приведения φ(Г)=4+4+2+1+2+1=14.

Обозначим эту матрицу через *M*1; найдем в ней самый тяжелый нуль. Для этого запишем эту матрицу еще раз, указывая рядом с каждым нулем в скобках его вес:

	1	2	3	4	5
1	∞	4	4	0(4)	6
2	2	∞	0(2)	1	3
3	3	0(1)	∞	4	0(3)
4	0(1)	5	1	∞	7
5	0(0)	1	3	0(0)	∞

Самым тяжелым оказывается нуль в клетке (1,4). Следовательно, множество Г разбивается на $\Gamma_{\{(1,4)\}}$ (все циклы, проходящие через ребро (1,4)) и $\Gamma_{\{\overline{(1,4)}\}}$ (все циклы, не проходящие через ребро (1,4)).

Построим для множества $\Gamma_{\{(1,4)\}}$ соответствующую ему матрицу и значение оценочной функции.

Условимся о следующем действии: перед тем, как в очередной матрице вычеркнуть строку и столбец, в ней надо заменить на ∞ числа во всех тех клетках, которые соответствуют ребрам, заведомо не принадлежащим тем гамильтоновым циклам, которые проходят через уже отобранные ранее ребра.

Учитывая это напоминание, элемент с номером (4,1) заменим на ∞ и вычеркнем строку номер 1 и столбец номер 4:

	1	2	3	5
2	2	∞	0	3
3	3	0	∞	0
4	∞	5	1	7
5	0	1	3	∞

Приведем теперь эту матрицу:

	1	2	3	5
2	2	∞	0	3
3	3	0	∞	0
4	∞	4	0	6
5	0	1	3	∞

Это - матрица $M1,1$; сумма констант приведения здесь равна 1, поэтому $\varphi_{\{1,4\}} =$ 14+1= 15.

Для $M1,2$ заменяем на ∞ элемент (1,4) в $M1$:

	1	2	3	4	5
1	∞	4	4	∞	6
2	2	∞	0	1	3
3	3	0	∞	4	0
4	0	5	1	∞	7
5	0	1	3	0	∞

после этого приводим полученную матрицу:

	1	2	3	4	5
1	∞	0	0	∞	2
2	2	∞	0	1	3
3	3	0	∞	4	0
4	0	5	1	∞	7
5	0	1	3	0	∞

Это - матрица $M1,2$; сумма констант последнего приведения равна 4, так что $\varphi_{\{\overline{1,4}\}} =$ 14+4=18. Следовательно, дальнейшей разработке подвергается множество $\Gamma_{\{1,4\}}$.

Вот веса нулей матрицы $M1,1$ (они указаны в скобках):

	1	2	3	5
2	2	∞	0(2)	3
3	3	0(1)	∞	0(3)
4	∞	4	0(4)	6
5	0(3)	1	3	∞

самым тяжелым является нуль с номером (4,3), так что теперь следует рассматривать множества $\Gamma_{\{1,4\}\{4,3\}}$ и $\Gamma_{\{1,4\}\{\overline{4,3}\}}$.

Обратимся к первому из них.

Условимся о следующем действии: перед тем, как в очередной матрице вычеркнуть строку и столбец, в ней надо заменить на ∞ числа во всех тех клетках, которые соответствуют ребрам, заведомо не принадлежащим тем гамильтоновым циклам, которые проходят через уже отобранные ранее ребра.

Следовательно, клетки с номерами (4,2), (4,5) и (3,1) надо заполнить символом ∞; после этого строку номер 4 и столбец номер 3 следует вычеркнуть; получим:

	1	2	5
2	2	∞	3
3	∞	0	0
5	0	1	∞

Приведение этой матрицы:

	1	2	5
2	0	∞	1
3	∞	0	0
5	0	1	∞

Для оценочной функции: $\varphi_{\{1,4\}\{4,3\}}$=15+2=17.

Матрица для множества $\Gamma_{\{1,4\}\{\overline{4,3}\}}$:

	1	2	3	5
2	2	∞	0	3
3	3	0	∞	0
4	∞	4	∞	6
5	0	1	3	∞

Результат ее приведения:

	1	2	3	5
2	2	∞	0	3
3	3	0	∞	0
4	∞	0	∞	2
5	0	1	3	∞

Оценочная функция: $\varphi_{\{1,4\}\{\overline{4,3}\}}$=15+4=19. Следовательно, дальнейшей разработке подлежит $\Gamma_{\{1,4\}\{4,3\}}$. «Взвешиваем» нули:

	1	2	5
2	0(1)	∞	1
3	∞	0(1)	0(1)
5	0(1)	1	∞

Выбираем любую из соответствующих клеток; для определенности - клетку (2,1).

Теперь речь пойдет о множествах $\Gamma_{\{1,4\}\{4,3\}\{2,1\}}$ и $\Gamma_{\{1,4\}\{4,3\}\{\overline{2,1}\}}$.

Д первого множества положим в последней матрице элемент с номером (3,2) равным ∞, вычеркнем строку номер 2 и столбец номер 1:

	2	5
3	∞	0
5	1	∞

Приведем эту матрицу:

	2	5
3	∞	0
5	0	∞

Получаем для оценочной функции: $\varphi_{\{1,4\}\{4,3\}\{2,1\}}$=17+1=18.

Для множества $\Gamma_{\{1,4\}\{4,3\}\{\overline{2,1}\}}$ матрица такова:

	1	2	5
2	∞	∞	1
3	∞	0	0
5	0	1	∞

Приведение этой матрицы дает:

	1	2	5
2	∞	∞	0
3	∞	0	0
5	0	1	∞

Для оценочной функции: $\varphi_{\{1,4\}\{4,3\}\{\overline{2,1}\}}$=17+1=18.

Получилось, что для дальнейшей разработки можно брать любое из множеств $\Gamma_{\{1,4\}\{4,3\}\{2,1\}}$ и $\Gamma_{\{1,4\}\{4,3\}\{\overline{2,1}\}}$. В первом случае уже получена матрица размером 2×2; ее нулевые клетки дают те ребра, которые с найденными ранее составляют обход коммивояжера, причем вес этого обхода равен значению оценочной функции - 18. Вот этот обход:

$$(1,4)(4,3)(2,1)(5,2)(3,5) \text{ или } 1\to4\to3\to5\to2\to1.$$

Найденный рекорд на самом деле является искомым оптимумом, потому что значения оценочной функции на всех оборванных ветвях (на границах) больше или равны весу рекорда.

При ином варианте выборов по ходу разбиений можно было получить другой оптимум: 1→4→3→2→5→1.

Задание для самостоятельной работы

Решить задачу коммивояжера. *Матрица расстояний представлена в виде:*

Вариант 1

прибыл в / выехал из	1	2	3	4	5
1	∞	1	2	5	2
2	1	∞	5	6	4
3	6	3	∞	4	2
4	5	1	1	∞	5
5	4	3	4	2	∞

Вариант 2

прибыл в / выехал из	1	2	3	4	5
1	∞	2	4	10	4
2	1	∞	15	6	4
3	6	3	∞	14	2
4	5	21	10	∞	5
5	14	3	4	7	∞

Вариант 3

прибыл в / выехал из	1	2	3	4	5
1	∞	2	30	1	4
2	1	∞	5	6	2
3	6	12	∞	8	12
4	5	6	10	∞	7
5	14	13	14	7	∞

Вариант 4

прибыл в / выехал из	1	2	3	4	5
1	∞	2	5	2	1
2	4	∞	6	5	1
3	2	4	∞	3	6
4	1	1	5	∞	4
5	4	3	4	5	∞

Вариант 5

прибыл в / выехал из	1	2	3	4	5
1	∞	12	40	1	14
2	10	∞	15	16	7
3	6	12	∞	8	12
4	15	16	11	∞	9
5	14	13	14	7	∞

Вариант 6

прибыл в / выехал из	1	2	3	4	5
1	∞	12	23	4	14
2	9	∞	15	10	5
3	12	8	∞	6	12
4	11	9	12	∞	16
5	14	13	10	8	∞

Вариант 7

прибыл в / выехал из	1	2	3	4	5
1	∞	10	2	7	3
2	3	∞	4	2	1
3	2	12	∞	5	4
4	7	3	11	∞	6
5	14	2	8	2	∞

Вариант 8

прибыл в / выехал из	1	2	3	4	5
1	∞	1	14	9	6
2	2	∞	12	4	4
3	3	6	∞	11	1
4	5	9	21	∞	10
5	14	43	4	7	∞

Вариант 9

прибыл в / выехал из	1	2	3	4	5
1	∞	2	4	10	4
2	1	∞	15	6	4
3	6	3	∞	14	2
4	5	21	10	∞	5
5	14	3	7	3	∞

Вариант 10

прибыл в / выехал из	1	2	3	4	5
1	∞	12	5	6	11
2	5	∞	8	3	4
3	10	6	∞	2	3
4	1	2	4	∞	4
5	3	2	5	7	∞

Вариант 11

прибыл в / выехал из	1	2	3	4	5
1	∞	2	22	9	4
2	1	∞	6	2	5
3	8	11	∞	7	12
4	4	9	8	∞	6
5	9	10	14	12	∞

Вариант 12

прибыл в / выехал из	1	2	3	4	5
1	∞	20	15	2	9
2	5	∞	7	12	3
3	2	10	∞	3	6
4	11	3	5	∞	14
5	4	5	4	8	∞

Вариант 13

прибыл в / выехал из	1	2	3	4	5
1	∞	1	2	5	2
2	1	∞	5	6	4
3	6	3	∞	4	2
4	5	1	1	∞	5
5	4	3	4	2	∞

Вариант 14

прибыл в / выехал из	1	2	3	4	5
1	∞	12	5	6	11
2	5	∞	8	3	4
3	10	6	∞	2	3
4	1	2	4	∞	4
5	3	2	5	7	∞

Вариант 15

прибыл в / выехал из	1	2	3	4	5
1	∞	2	4	10	4
2	1	∞	15	6	4
3	6	3	∞	14	2
4	5	21	10	∞	5
5	14	3	7	3	∞

Вариант 16

прибыл в / выехал из	1	2	3	4	5
1	∞	11	25	3	14
2	9	∞	15	6	17
3	5	5	∞	12	10
4	11	9	16	∞	15
5	7	12	14	10	∞

Список литературы

1. Таха Хэмди А. Введение в исследование операций, 7-е изд. / пер. с англ. М.: Издательский дом «Вильямс», 2007. 912 с.

2. Вентцель Е.С. Исследование операций: задачи, принципы, методология. – М.: Наука, 1980. 208 с.

3. Соловьев В. И. Методы оптимальных решений: Учебное пособие. М.: Финансовый университет, 2012. 364 с.

4. Пантелеев А.В., Летова Т.А. Методы оптимизации в примерах и задачах. Учебное пособоие, 2-е издание - М.: Высш. шк. , 2005 - 544 с.

5. Грызина Н.Ю., Мастяева И.Н., Семенихина О.Н. Математические методы исследования операций в экономике: Учебно-методический комплекс. – М.: Изд. центр ЕАОИ, 2009. –196 с.

6. Палий И.А. Введение в линейное программирование: Учебное пособие. – Омск: Изд-во СибАДИ, 2007. 200 с.

7. Г.Я. Горбовцов, Н.Ю. Грызина, И.Н. Мастяева, О.Н. Семенихина. Исследование операций в экономике: Учебное пособие / Московский государственный университет экономики, статистики и информатики. М.: МЭСИ, 2006. – 118 с.

8. Мастяева И.Н., Горбовцов Г.Я., Семенихина О.Н., Турундаевский В.Б. Математические методы исследования операций./ Учебное пособие.

Московский международный институт эконометрики, информатики, финансов и права. - М.: , 2003. с. 137.

9. Аксѐнов, Е.П. Методы оптимальных решений: учебное пособие / М-во с.х. РФ; федеральное гос. бюджетное образов. учреждение высшего образов. «Пермская гос. с.-х. акад. им. акад. Д.Н. Прянишникова». – Пермь : ИПЦ «Прокрость», 2016. – 90 с.

10. Гераськин М.И. Линейное программирование: учеб. пособие / М.И. Гераськин, Л.С. Клентак; под общ. ред. Л.С. Клентак. – Самара: Изд-во СГАУ, 2014. – 104 с.

11. Сеславин А.И. Исследование операций и методы оптимизации [Электронный ресурс]: учебное пособие/ Сеславин А.И., Сеславина Е.А.— Электрон. текстовые данные.— М.: Учебно-методический центр по образованию на железнодорожном транспорте, 2015.— 200 с.— Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/45261.— ЭБС «IPRbooks», по паролю

12. Стронгин Р.Г. Исследование операций. Модели экономического поведения [Электронный ресурс]/ Стронгин Р.Г.— Электрон. текстовые данные.— М.: Интернет-Университет Информационных Технологий (ИНТУИТ), 2016.— 245 с.— Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/52203.— ЭБС «IPRbooks»

13. Лемешко Б.Ю. Теория игр и исследование операций [Электронный ресурс]: конспект лекций/ Лемешко Б.Ю.— Электрон. текстовые данные.— Новосибирск: Новосибирский государственный технический университет, 2013.— 167 с.— Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/45446.— ЭБС «IPRbooks», по паролю

14. Исследование операций в экономике [Электронный ресурс]: учебное пособие/ Г.Я. Горбовцов [и др.].— Электрон. текстовые данные.— М.: Евразийский открытый институт, Московский государственный университет экономики, статистики и информатики, 2006.— 118 с.— Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/10690.— ЭБС «IPRbooks»

15.Гарслян А.Е., Милевский А.С., Кочнева Л.Ф. Задачи по исследованию операций. Часть 1. Линейное программирование и транспортная задача. Сборник задач. – М.: МИИТ, 2011. – 138 с.

16. Палий И.А. Введение в линейное программирование6 учебное пособие. – Омск: изд-во СибАДИ, 2007. - 200с.

17. Болотникова О.В. Линейное программирование: симплекс-метод и двойственность : Учебное пособие / О.В. Болотникова, Д.В. Тарасов, Р.В. тарасов. – Пенза : Изд-во ПГУ, 2015. – 84 с.

18. Сигал И.Х., Иванова А.П. Транспортная задача: Методические указания к лабораторным и практическим занятиям по дисциплине «Методы оптимизации». - М.: МГУПС (МИИТ), 2015. - 80 с.

19. Методические указания к выполнению типового расчёта «Транспортная задача» / С.К. Гаврилов, В.Л. Заволженская, В.Л. Кузнецов, Т..В. Дегтярёва, С.А. Солоп, Р.И. Уханова; Ростовский государственный университет путей сообщения, Ростов-на-Дону, 2001, 28 с

20. Ревякин А.М., Бардушкина И.В. Математические методы моделирования в экономике: учеб. пособие. – М.: МИЭТ, 2013. – 328 с.: ил.