Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
АМУРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Н.Н.Двоерядкина,Т.А.Юрьева

ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Учебно-методическое пособие

Благовещенск
Издательство АмГУ
2019

ББК 22.161я73
Д 24

Рекомендовано
учебно-методическим советом университета

Рецензент:
Еремина В.В., канд.физ.-мат. наук, доц. кафедры Информационных и управляющих систем АмГУ

Двоерядкина Н.Н., Юрьева Т.А.,

Функции нескольких переменных: учебно-методическое пособие / Н.Н. Двоерядкина, Т.А. Юрьева – Благовещенск: Изд-во АмГУ, 2019. – 51 с.

Учебно-методическое пособие предназначено для студентов первого курса всех направлений подготовки и специальностей.

В нем приводятся теоретические вопросы, рекомендации по выполнению и задания для организации самостоятельной работы.

ВВЕДЕНИЕ

Многие реально существующие объекты и явления не позволяют описать их с помощью функций одной независимой переменной, чем обоснованно введение в курс математики понятия функции нескольких независимых переменных.

Понятие функции нескольких переменных является одним из основных понятий математического анализа. Все основные определения, такие как область определения, область значения, промежутки монотонности, понятия предела и непрерывности функции нескольких переменных аналогичны соответствующим понятиям для функции одной независимой переменной. Однако при работе с функциями нескольких переменных следует учитывать некоторые особенности таких функций.

Данное учебно-методическое пособие предназначено для организации самостоятельной работы студентов. Оно содержит достаточное количество разобранных практических заданий, решение которых поможет разобраться в материале. А также необходимое количество заданий для отработки навыков работы с функциями нескольких переменных. Учебно-методическое пособие не перегружено теоретическими сведениями, но содержит перечень теоретических вопросов, которые позволят студентам осознанно работать на лекции и своевременно подготовиться к зачету или коллоквиуму по теме «Функции нескольких переменных».

Теоретические вопросы

1. Сформулируете определение функции нескольких переменных. Приведете примеры.
2. Перечислите способы задания функции нескольких переменных.
3. Дайте понятие линий и поверхностей уровня функции нескольких переменных.
4. Сформулируйте определение предела функции нескольких переменных.
5. Дайте понятие непрерывности функции нескольких переменных.
6. Дайте определение частного и полного приращения функции нескольких переменных.
7. Дайте определение частных производных функций нескольких переменных. Укажите их обозначения и правила нахождения. Приведите примеры.
8. Изложите геометрический смысл частных производных для функции двух переменных.
9. Дайте понятие частных производных высших порядков. Покажите их обозначения.
10. Дайте определение полного дифференциала функции нескольких переменных. Запишите формулу для вычисления полного дифференциала.
11. Изложите метод применения полного дифференциала к приближенным вычислениям.
12. Дайте определения касательной плоскости и нормали к поверхности. Запишите их уравнения.
13. Сформулируйте теорему существования неявных функций.
14. Запишите формулы нахождения частных производных функций, заданной неявно.
15. Выведите формулу производной по направлению
16. Дайте понятие скалярного поля. Приведите примеры.

17. Дайте определение градиента скалярного поля. В чем состоит связь производной по направлению и градиента.

18. Дайте понятие экстремума функции нескольких переменных.

19. Сформулируйте необходимое условие существование экстремума функции нескольких переменных.

20. Запишите достаточное условие экстремума функции двух переменных.

21. Изложите метод (способ) отыскания наибольшего и наименьшего значений функции нескольких переменных заданной в ограниченной области.

22. Дайте понятие условного экстремума.

23. Изложите метод множителей Лагранжа.

Образец выполнения расчетно-графической работы

Пример 1. Найти область определения функции $Z=\sqrt{36-9x^2-4y^2}$, изобразить ее на чертеже.

Решение. В условии задачи задана функция двух независимых переменных x и y. Найти ее область определения, значит определить все возможные значения переменных x и y, при которых выражение $Z=\sqrt{36-9x^2-4y^2}$ имеет смысл.

Выражение $\sqrt{36-9x^2-4y^2}$ содержит квадратный корень который имеет смысл в случае когда подкоренное выражение неотрицательно, то есть выполняется неравенство: $36-9x^2-4y^2\geq 0$. Найдем решение данного неравенства.

Так как неравенство $36-9x^2-4y^2\geq 0$ содержит две переменные x и y, то решение его найдем графически. Для этого построим границу решения данного неравенства, определяемую уравнением $36-9x^2-4y^2=0$. Преобразуем уравнение к виду, удобному для построения линии:

$$36-9x^2-4y^2=0$$

$$-9x^2-4y^2=-36\,|:(-36)$$

$$-\frac{9x^2}{-36}-\frac{4y^2}{-36}=1$$

$$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$$

В результате преобразования получаем уравнение эллипса с центром в точке (0,0) и полуосями a=2 и b=3. Изобразим полученный эллипс на чертеже (рис.1).

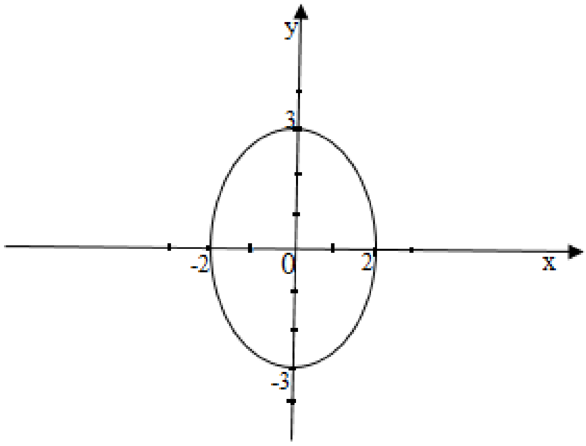

Рис.1. График уравнения $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$

Эллипс разделил координатную плоскость xOy на две части: внутреннюю, заключенную внутри эллипса и внешнюю по отношению к эллипсу часть. Решением неравенства $36-9x^2-4y^2\geq 0$ является только одна из этих частей. Для того чтобы определить какая часть плоскости удовлетворяет решению неравенства достаточно выбрать произвольную точку в одной из частей и подставить ее координаты в неравенство. Если координаты точки удовлетворяют неравенству, то следует выбирать именно ту часть плоскости, которой принадлежит выбранная точка.

Возьмем точку внутри эллипса с координатами (1; 1) и подставим в неравенство $36-9x^2-4y^2\geq 0$. Получим $36-9\cdot(1)^2-4\cdot(1)^2\geq 0$, $36-9-4\geq 0$, $23\geq 0$ - неравенство верно, а, следовательно, решением неравенства является внутренняя часть эллипса (рис.2).

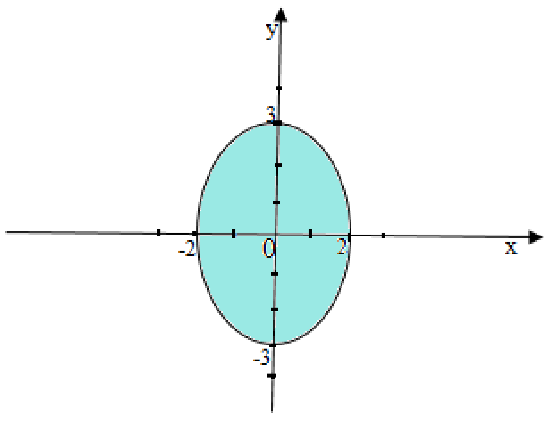

Рис.2. Решение неравенства $36-9x^2-4y^2\geq 0$

Область определения функции совпадает с решением неравенства, значит искомой областью определения функции $Z=\sqrt{36-9x^2-4y^2}$ является внутренняя часть эллипса, изображенного на рисунке 2.

Пример 2. Найти уравнения и построить линии уровня следующей функции $Z=|x|-2y$

Решение. Линии уровня строятся только для функций двух независимых переменных и представляют собой семейство линий для каждой из которых значение Z принимает строго определенное постоянное значение. Линии уровня позволяют предварительно изучить сложный характер поверхности, являющейся графиком функции $Z=|x|-2y$. Там где линии уровня располагаются часто поверхность обычно более крутая и, наоборот, чем поверхность более пологая, тем реже линии уровня.

Для нахождения линий уровня необходимо задать зависимой переменной Z фиксированное постоянное значение C=const и в полученном уравнении выразить одну независимую переменную x или y через другую.

Зададим Z=C, получим $C=|x|-2y$. Выразим переменную y через x, имеем $-2y=-C-|x|$, $y=\frac{C}{2}+\frac{1}{2}|x|$ - уравнения линий уровня.

Для построения графиков данных уравнений будем придавать различные значения постоянной C и изображать графики функций в системе координат xOy.

Пусть C=0, тогда $y=\frac{1}{2}|x|$ - графиком являются два луча с центром в точке (0, 0) и расположенные выше оси ox. Подберем точки для построения графика, которые расположим в таблице:

x	-2	0	2
y	1	0	1

График функции $y=\frac{1}{2}|x|$ представлен на рис.3.

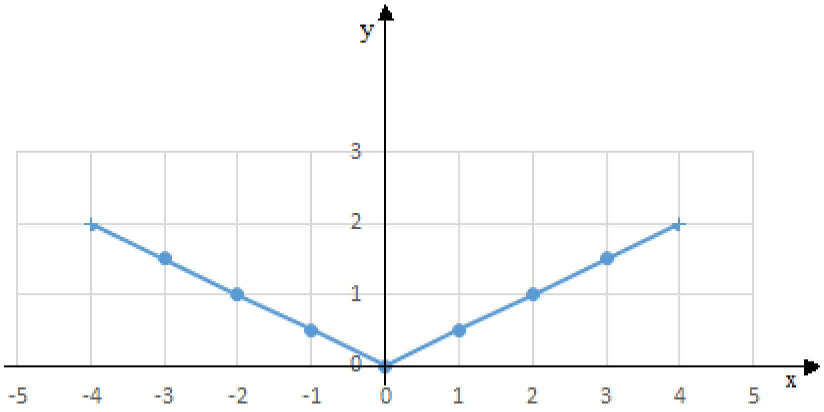

Рис. 3. Линии уровня функции $Z=|x|-2y$ при С=0

При С=2 $y=\frac{1}{2}|x|+1$ - график функции поднимется вдоль оси оу на 1 единицу относительно графика функции $y=\frac{1}{2}|x|$ (рис. 4).

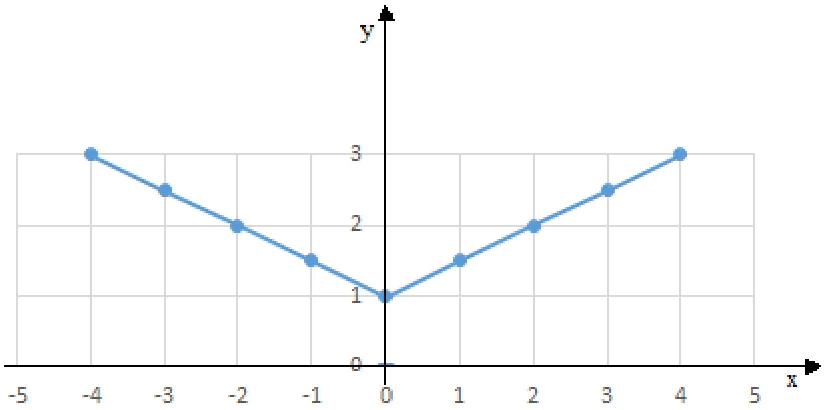

Рис. 4. Линии уровня функции $Z=|x|-2y$ при С=2

При С= -2 $y=\frac{1}{2}|x|-1$ - график функции сдвигается вниз вдоль оси оу на 1 единицу относительно графика функции $y=\frac{1}{2}|x|$ (рис. 5).

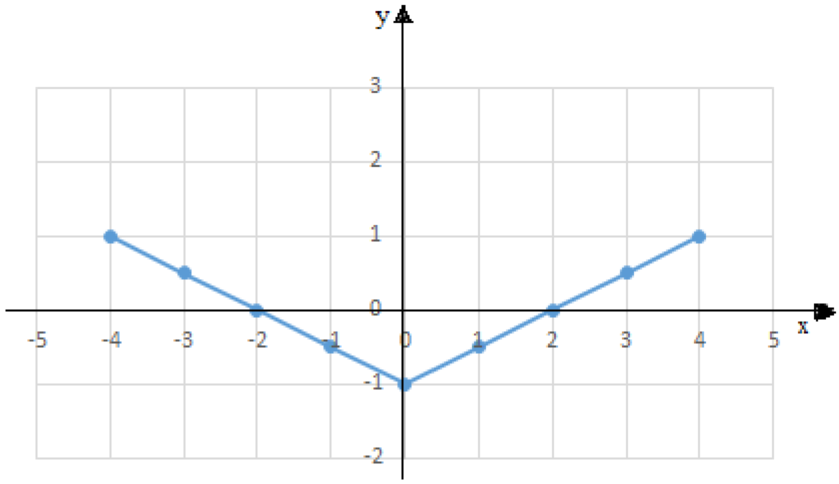

Рис. 5. Линии уровня функции $Z = |x| - 2y$ при C= –2

Итак, можно заметить, что придавая различные значения постоянной C внешний вид графика функции не меняется, он лишь перемещается вдоль оси оу на $\frac{C}{2}$ единиц вверх при $C > 0$ и вниз при $C < 0$. Значит линии уровня можно представить как семейство лучей представленных на рис.6.

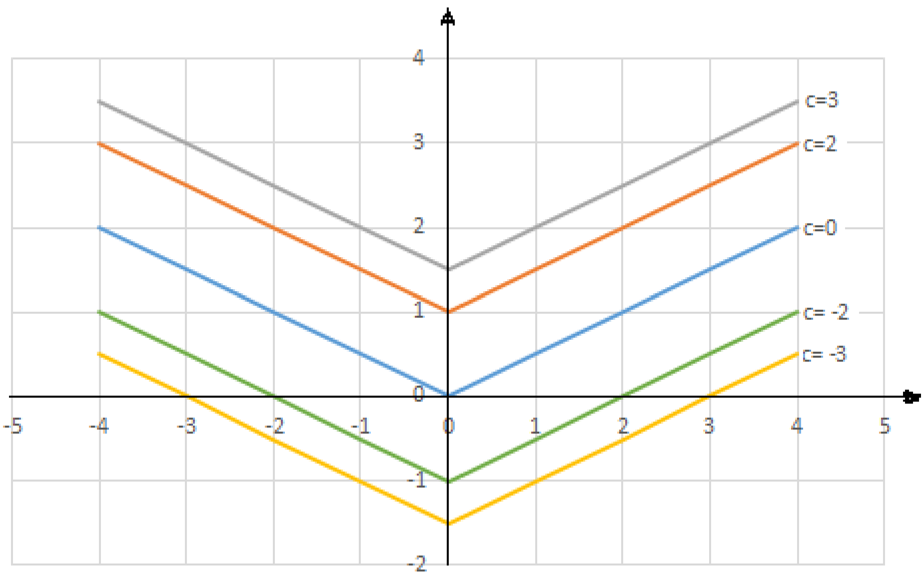

Рис. 6. Линии уровня функции $Z = |x| - 2y$

Пример 3. Найти частные производные первого порядка функции $z = \frac{x + y}{\sqrt{x^2 - y^2}}$

Решение: представленная функция $z = \frac{x + y}{\sqrt{x^2 - y^2}}$ является функцией двух независимых переменных. Вследствие чего имеем право находить две производные первого порядка от этой функции, по каждой из независимых переменных x или y.

Правила дифференцирования для функций двух независимых переменных аналогичны соответствующим правилам дифференцирования для функции одной независимой переменной. Но при нахождении производной следует помнить, что одна из независимых переменных (по которой проводится дифференцирование) является изменяемой, тогда как другую необходимо при этом считать постоянной фиксированной величиной.

Итак, определим производную по переменной x от функции $z = \frac{x + y}{\sqrt{x^2 - y^2}}$, переменную y при этом фиксируем.

Заданная функция представляет из себя частное, поэтому воспользуемся правилом для нахождения производной частного: $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$, и формулой дифференцирования степенной функции: $\left(u^n\right)' = n \cdot u^{n-1} \cdot u'$, получаем

$$z'_x = \frac{(x + y)' \cdot \sqrt{x^2 - y^2} - (x + y)\left(\sqrt{x^2 - y^2}\right)'}{\left(\sqrt{x^2 - y^2}\right)^2},$$

$$z'_x = \frac{(x' + y') \cdot \sqrt{x^2 - y^2} - (x + y)\left(\frac{1}{2}\left(x^2 - y^2\right)^{-\frac{1}{2}}\right) \cdot \left(x^2 - y^2\right)'}{x^2 - y^2},$$

$$z'_x = \frac{(1 + 0) \cdot \sqrt{x^2 - y^2} - (x + y)\left(\frac{1}{2}\left(x^2 - y^2\right)^{-\frac{1}{2}}\right) \cdot (2x - 0)}{x^2 - y^2},$$

$$z'_x = \frac{\sqrt{x^2 - y^2} - (x + y)\left(\frac{2x}{2\sqrt{x^2 - y^2}}\right) \cdot}{x^2 - y^2},$$

$$z'_x = \frac{x^2 - y^2 - x^2 - xy}{\left(x^2 - y^2\right)^{\frac{3}{2}}},$$

$$z'_x = \frac{-y(x+y)}{\left(x^2 - y^2\right)\cdot\sqrt{x^2 - y^2}},$$

$$z'_x = \frac{-y(x+y)}{(x-y)\cdot(x+y)\cdot\sqrt{x^2 - y^2}},$$

$$z'_x = \frac{-y}{(x-y)\cdot\sqrt{x^2 - y^2}}.$$

Аналогично определяем производную первого порядка от функции $z = \frac{x+y}{\sqrt{x^2 - y^2}}$ по переменной y (зафиксировав при этом переменную x):

$$z'_y = \frac{(x+y)'\cdot\sqrt{x^2 - y^2} - (x+y)\left(\sqrt{x^2 - y^2}\right)'}{\left(\sqrt{x^2 - y^2}\right)^2},$$

$$z'_y = \frac{\left(x'_y + y'_y\right)\cdot\sqrt{x^2 - y^2} - (x+y)\left(\frac{1}{2}\left(x^2 - y^2\right)^{-\frac{1}{2}}\right)\cdot\left(x^2 - y^2\right)'_y}{x^2 - y^2},$$

$$z'_y = \frac{(0+1)\cdot\sqrt{x^2 - y^2} - (x+y)\left(\frac{1}{2}\left(x^2 - y^2\right)^{-\frac{1}{2}}\right)\cdot(0 - 2y)}{x^2 - y^2},$$

$$z'_y = \frac{\sqrt{x^2 - y^2} - (x+y)\left(\frac{-2y}{2\sqrt{x^2 - y^2}}\right)\cdot}{x^2 - y^2},$$

$$z'_y = \frac{x^2 - y^2 + x^2 + xy}{\left(x^2 - y^2\right)^{\frac{3}{2}}},\ z'_y = \frac{2x^2 - y^2 + xy}{\left(x^2 - y^2\right)\cdot\sqrt{x^2 - y^2}}.$$

Ответ: производные первого порядка от функции $z = \frac{x+y}{\sqrt{x^2 - y^2}}$ по переменной x равна $z'_x = \frac{-y}{(x-y)\cdot\sqrt{x^2 - y^2}}$, по переменной y равна $z'_y = \frac{2x^2 - y^2 + xy}{\left(x^2 - y^2\right)\cdot\sqrt{x^2 - y^2}}$.

Пример 4. Найти все частные производные второго порядка функции $z = 3(x^2 + y^2)^3$

Решение: функция $z = 3(x^2 + y^2)^3$ является функцией двух независимых переменных. Для нее можно отыскать две производные первого порядка (по каждой из независимых переменных). Каждая производная первого порядка также является функцией двух независимых переменных, а значит, от каждой из двух производных первого порядка можно найти еще по две производных, которые и будут являться производными второго порядка от исходной функции.

Найдем производную первого порядка от функции $z = 3(x^2 + y^2)^3$ по переменной x:

$$z'_x = \left(3(x^2 + y^2)^3\right)' = 3 \cdot 3 \cdot \left(x^2 + y^2\right)^2 \cdot 2x = 18x \cdot \left(x^2 + y^2\right)^2.$$

Аналогично определяем производную первого порядка от функции $z = 3(x^2 + y^2)^3$ по переменной y:

$$z'_y = \left(3(x^2 + y^2)^3\right)' = 3 \cdot 3 \cdot \left(x^2 + y^2\right)^2 \cdot 2y = 18y \cdot \left(x^2 + y^2\right)^2.$$

Теперь от производной $z'_x = 18x \cdot \left(x^2 + y^2\right)^2$ найдем две производные:

по переменной x:

$$z''_{xx} = \left(18x \cdot \left(x^2 + y^2\right)^2\right)' = (18x)' \cdot \left(x^2 + y^2\right)^2 + 18x \cdot \left(\left(x^2 + y^2\right)^2\right)',$$

$$z''_{xx} = 18 \cdot \left(x^2 + y^2\right)^2 + 18x \cdot 2\left(x^2 + y^2\right) \cdot 2x$$

$$z''_{xx} = 18 \cdot \left(x^2 + y^2\right)\left(5x^2 + y^2\right),$$

по переменной y:

$$z''_{xy} = \left(18x \cdot \left(x^2 + y^2\right)^2\right)' = (18x)' \cdot \left(x^2 + y^2\right)^2 + 18x \cdot \left(\left(x^2 + y^2\right)^2\right)',$$

$$z''_{xy} = 0 \cdot \left(x^2 + y^2\right)^2 + 18x \cdot 2\left(x^2 + y^2\right) \cdot 2y,$$

$$z''_{xy} = 72xy \cdot \left(x^2 + y^2\right).$$

Таким же образом найдем две производные от производной функции первого порядка по переменной y, $z'_y = 18y \cdot \left(x^2 + y^2\right)^2$, получаем:

по переменной x:

$$z''_{yx} = \left(18y \cdot \left(x^2 + y^2\right)^2\right)' = (18y)' \cdot \left(x^2 + y^2\right)^2 + 18y \cdot \left(\left(x^2 + y^2\right)^2\right)',$$

$$z''_{yx} = 0 \cdot \left(x^2 + y^2\right)^2 + 18y \cdot 2\left(x^2 + y^2\right) \cdot 2x,$$

$$z''_{yx} = 72xy \cdot \left(x^2 + y^2\right),$$

по переменной y:

$$z''_{yy} = \left(18y \cdot \left(x^2 + y^2\right)^2\right)' = (18y)' \cdot \left(x^2 + y^2\right)^2 + 18y \cdot \left(\left(x^2 + y^2\right)^2\right)',$$

$$z''_{yy} = 18 \cdot \left(x^2 + y^2\right)^2 + 18y \cdot 2\left(x^2 + y^2\right) \cdot 2y,$$

$$z''_{yy} = 18 \cdot \left(x^2 + y^2\right)\left(x^2 + 5y^2\right).$$

Ответ: частные производные второго порядка от функции $z = 3(x^2 + y^2)^3$ имеют вид: $z''_{xx} = 18 \cdot \left(x^2 + y^2\right)\left(5x^2 + y^2\right)$, $z''_{yy} = 18 \cdot \left(x^2 + y^2\right)\left(x^2 + 5y^2\right)$, $z''_{yx} = z''_{xy} = 72xy \cdot \left(x^2 + y^2\right)$.

<u>Пример 5</u>. Найти $\dfrac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial z}$. $u = xy^2 z + x^3 y^2 + 4z^3 y$

<u>Решение</u>: функция $u = xy^2 z + x^3 y^2 + 4z^3 y$ является функцией трех независимых переменных x, y и z.

Найти $\dfrac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial z}$ это значит найти производную третьего порядка от функции u. Причем, сначала ее необходимо продифференцировать по переменной x, затем по переменной y и после этого по переменной z.

Определим производную функции $u = xy^2 z + x^3 y^2 + 4z^3 y$ по переменной x, при этом переменные y и z считаем фиксированными.

$$u'_x = \frac{\partial u}{\partial x} = y^2 z + 3x^2 y^2.$$

Полученный результат дифференцируем по переменной y:

$$u''_{xy} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 2yz + 6x^2 y.$$

Для полученной второй производной находим производную по переменной z:

$$u'''_{xyz} = \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial z} = 2y$$

Ответ: $\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial z} = 2y$.

Пример 6. Показать, что функция $z = \sin^3(3x + 2y)$ удовлетворяет уравнению $2z'_x - 3z'_y = 0$.

Решение: для того чтобы показать справедливость уравнения $2z'_x - 3z'_y = 0$ необходимо подставить в него заданную функцию $z = \sin^3(3x + 2y)$ и провести алгебраические преобразования. Вычислим частные производные первого порядка от функции $z = \sin^3(3x + 2y)$ по переменным x и y используя правило вычисления производной сложной функции.

По переменной x:

$$z'_x = \left(\sin^3(3x + 2y)\right)' = 3\sin^2(3x + 2y) \cdot \cos(3x + 2y) \cdot 3$$

$$z'_x = 9\sin^2(3x + 2y) \cdot \cos(3x + 2y).$$

По переменной y:

$$z'_y = \left(\sin^3(3x + 2y)\right)' = 3\sin^2(3x + 2y) \cdot \cos(3x + 2y) \cdot 2$$

$$z'_x = 6\sin^2(3x + 2y) \cdot \cos(3x + 2y).$$

Подставим найденные частные производные первого порядка в уравнение $2z'_x - 3z'_y = 0$:

$$2z'_x - 3z'_y = 2 \cdot 9\sin^2(3x + 2y) \cdot \cos(3x + 2y) - 3 \cdot 6\sin^2(3x + 2y) \cdot \cos(3x + 2y),$$

$$2z'_x - 3z'_y = 18\sin^2(3x + 2y) \cdot \cos(3x + 2y) - 18\sin^2(3x + 2y) \cdot \cos(3x + 2y),$$

$2z'_x - 3z'_y = 0$, что и требовалось показать.

Пример 7. Найти частные производные первого порядка функции $x^2 - y^3 + 3z^2 - 6xy = 0$, заданных неявно.

Решение: для нахождения частных производных первого порядка от функции z, заданной неявно, следует продифференцировать левую и правую части уравнения по каждой из переменных x и y. После этого нужно с помощью алгебраических преобразований выразить z'_x и z'_y.

По переменной x:

$$\left(x^2 - y^3 + 3z^2 - 6xy\right)'_x = 0,$$

$$\left(x^2\right)'_x - \left(y^3\right)'_x + \left(3z^2\right)'_x - \left(6xy\right)'_x = 0,$$

$$2x - 0 + 3 \cdot 2z \cdot z'_x - 6y = 0$$

Выразим из последнего выражения z'_x, получим:

$$z'_x = \frac{6y - 2x}{6z} = \frac{3y - x}{3z}.$$

Аналогично определяем производную первого порядка по переменной y:

$$\left(x^2 - y^3 + 3z^2 - 6xy\right)'_y = 0,$$

$$\left(x^2\right)'_y - \left(y^3\right)'_y + \left(3z^2\right)'_y - \left(6xy\right)'_y = 0,$$

$$0 - 3y^2 + 3 \cdot 2z \cdot z'_y - 6x = 0$$

Выразим из последнего выражения z'_y, получим:

$$z'_y = \frac{3y^2 + 6x}{6z} = \frac{y^2 + 2x}{2z}.$$

Пример 8. Найти полный дифференциал функции

а) $z = e^{2x+3y} \cdot \arccos\frac{x}{y^3}$; б) $u = \dfrac{2x - y}{3z^2 x + 2y}$.

Решение.

а) Так как функция $z = e^{2x+3y} \cdot \arccos\frac{x}{y^3}$ зависит от двух переменных, то полный дифференциал будем искать по формуле: $dz = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot dy$.

Найдем сначала частные производные данной функции.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2e^{2x+3y} \cdot \arccos\frac{x}{y^3} + e^{2x+3y} \cdot \frac{-1}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{y^6}}} \cdot \frac{1}{y^3} = e^{2x+3y}\left(2\arccos\frac{x}{y^3} - \frac{1}{\sqrt{y^6 - x^2}}\right);$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3e^{2x+3y} \cdot \arccos\frac{x}{y^3} + e^{2x+3y} \cdot \frac{-1}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{y^6}}} \cdot \frac{-3x}{y^4} = e^{2x+3y}\left(3\arccos\frac{x}{y^3} + \frac{3x}{y\sqrt{y^6 - x^2}}\right).$$

Подставив полученные значения частных производных в формулу, получим искомый полный дифференциал:

$$dz = e^{2x+3y}\left(2\arccos\frac{x}{y^3} - \frac{1}{\sqrt{y^6 - x^2}}\right)\cdot dx + e^{2x+3y}\left(3\arccos\frac{x}{y^3} + \frac{3x}{y\sqrt{y^6 - x^2}}\right)\cdot dy.$$

б) Функция $u = \frac{2x - y}{3z^2 x + 2y}$ зависит от трех переменных. Формулы для дифференциала примет вид: $du = \frac{\partial u}{\partial x}\cdot dx + \frac{\partial u}{\partial y}\cdot dy + \frac{\partial u}{\partial z}\cdot dz$. Аналогично случаю (а) найдем частные производные.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{2(3z^2x + 2y) - (2x - y)3z^2}{(3z^2x + 2y)^2} = \frac{4y + 3yz^2}{(3z^2x + 2y)^2};$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{-(3z^2x + 2y) - (2x - y)\cdot 2}{(3z^2x + 2y)^2} = -\frac{3xz^2 + 4x}{(3z^2x + 2y)^2};$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{-(2x - y)6xz}{(3z^2x + 2y)^2} = \frac{6xyz - 12xz^2}{(3z^2x + 2y)^2}.$$

Искомый полный дифференциал функции $u = \frac{2x - y}{3z^2x + 2y}$:

$$du = \frac{4y + 3yz^2}{(3z^2x + 2y)^2}\cdot dx - \frac{3xz^2 + 4x}{(3z^2x + 2y)^2}\cdot dy + \frac{6xyz - 12xz^2}{(3z^2x + 2y)^2}\cdot dz.$$

<u>Пример 9.</u> Найти приближенное значение выражения $\frac{arctg 0{,}02}{-1{,}97}$.

<u>Решение.</u> Приближенное значение функции $z = f(x, y)$ в точке $M(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$ можно найти по формуле: $f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) \approx f(x_0, y_0) + f'_x(x_0, y_0)\Delta x + f'_y(x_0, y_0)\Delta y$.

Введем функцию $z = \frac{arctgx}{y}$. Требуется найти приближенное значение этой функции в точке $(0{,}02; -1{,}97)$. В качестве точки (x_0, y_0) подберем точку близкую к данной точке, в которой вычислить значение функции удобно. Возьмем $(0; -2)$: $f(x_0, y_0) = \frac{arctg 0}{-2} = 0$. Найдем частные производные введенной функции и вычислим из значения в «удобной» точке $(0; -2)$.

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{y}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+x^2}};\ \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{arctgx}{y^2};$$

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{\substack{x=0\\y=-2}}=\frac{1}{-2}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+0^2}}=-0{,}5;\ \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{\substack{x=0\\y=-2}}=-\frac{arctg0}{(-2)^2}=0.$$

Приращения аргументов: $\Delta x=0{,}02-0=0{,}02$, $\Delta y=-1{,}97-(-2)=0{,}03$.

Подставив все вычисленные значения формулу, получим:

$$\frac{arctg0{,}02}{-1{,}97}\approx 0-0{,}5\cdot 0{,}02+0\cdot 0{,}03=-0{,}01.$$

Пример 10. Найти локальные экстремумы функции $z=x^3+2y^3-6xy$.

Решение.

Воспользуемся необходимым условием экстремума функции двух переменных. Искать точки экстремума будем среди точек, в которых частные производные равны нулю или не существуют.

Найдем частные производные: $\frac{\partial z}{\partial x}=3x^2-6y$, $\frac{\partial z}{\partial y}=6y^2-6x$. Составим систему уравнений: $\begin{cases}3x^2-6y=0,\\6y^2-6x=0.\end{cases}$ Выразим из второго уравнения $x=y^2$ и подставим в первое уравнение: $3y^4-6y=0$; $3y(y^3-2)=0$, $y_1=0$, $y_2=\sqrt[3]{2}$. Тогда $x_1=0$, $x_2=\sqrt[3]{4}$.

Итак, мы получили две стационарные точки $M_1(0{,}0)$ и $M_2(\sqrt[3]{4},\sqrt[3]{2})$. Проверим, имеет ли данная функция экстремум в какой-нибудь из них. Для этого воспользуемся достаточным условием экстремума функции двух переменных. А именно проверим выполнимость следующих условий:

1) если $\begin{vmatrix}\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right|_M & \left.\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_M\\ \left.\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_M & \left.\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right|_M\end{vmatrix}>0$ и $\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right|_M>0$, то в критической точке M функция двух переменных имеет минимум;

2) если $\begin{vmatrix} \left.\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right|_M & \left.\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right|_M \\ \left.\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right|_M & \left.\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right|_M \end{vmatrix} > 0$ и $\left.\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right|_M < 0$, то в критической точке M функция двух переменных имеет максимум;

3) если $\begin{vmatrix} \left.\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right|_M & \left.\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right|_M \\ \left.\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right|_M & \left.\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right|_M \end{vmatrix} < 0$, то в критической точке M функция двух переменных не имеет экстремума;

4) если $\begin{vmatrix} \left.\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right|_M & \left.\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right|_M \\ \left.\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right|_M & \left.\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right|_M \end{vmatrix} = 0$, то в окрестности критической точки M необходимо оценить знак приращения функции двух переменных. В частности, если приращение отрицательно точка M является точкой максимума, если положительно – точкой минимума, если меняет знак, то экстремума в точке M функция не имеет.

Найдем частные производные второго порядка:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 6x; \ \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -6; \ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 12y;$$

$$\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right|_{M_1} = 0; \ \left.\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right|_{M_1} = -6; \ \left.\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right|_{M_1} = 0;$$

$$\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right|_{M_2} = 6\sqrt[3]{4}; \ \left.\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right|_{M_2} = -6, \ \left.\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right|_{M_2} = 12\sqrt[3]{2}.$$

Вычислим определитель для каждой из точек.

$M_1(0{,}0)$: $\begin{vmatrix} 0 & -6 \\ -6 & 0 \end{vmatrix} = -36 < 0$, следовательно, в точке $M_1(0{,}0)$ экстремума нет

$M_2(\sqrt[3]{4},\sqrt[3]{2})$: $\begin{vmatrix} 6\sqrt[3]{4} & -6 \\ -6 & 12\sqrt[3]{2} \end{vmatrix} = 108 > 0$, $\left.\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right|_{M_2} = 6\sqrt[3]{4} > 0$, следовательно, в точке $M_2(\sqrt[3]{4},\sqrt[3]{2})$ функция $z = x^3 + 2y^3 - 6xy$ имеет локальный минимум. При этом $z_{\min} = \left(\sqrt[3]{4}\right)^3 + 2\left(\sqrt[3]{2}\right)^3 - 6 \cdot \sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[3]{2} = 4 + 4 - 12 = -4$.

Пример 11. Найти наименьшее и наибольшее значение функции $z = 3x^2 - 6xy - y^2 + 4y + 5$ в области, ограниченной линиями: $x = -1$, $y = 1$, $y = x - 2$.

Решение.

Область ограничена прямыми: $x = -1$ – прямая параллельная оси ординат, $y = 1$ – прямая параллельная оси абсцисс, $y = x - 2$ – прямая параллельная биссектрисе углов первой и третьей четверти и смещенная относительно биссектрисы на две единицы вниз.

Изобразим область в декартовой системе координат (рис. 7). Точки пересечения прямых обозначим $A(-1,-3)$, $B(-1,1)$, $C(3,1)$.

Найдем критические точки функции $z = 3x^2 - 6xy - y^2 + 4y + 5$, принадлежащие области.

Частные производные функции: $\frac{\partial z}{\partial x} = 6x - 6y$, $\frac{\partial z}{\partial y} = -6x - 2y + 4$. Составим систему уравнений: $\begin{cases} 6x - 6y = 0, \\ -6x - 2y + 4 = 0, \end{cases}$ $\begin{cases} x = y, \\ -6x - 2x = -4, \end{cases}$ $\begin{cases} x = 0{,}5, \\ y = 0{,}5. \end{cases}$ Решением системы является точка $M(0{,}5;0{,}5)$ – критическая точка функции, принадлежащая рассматриваемой области.

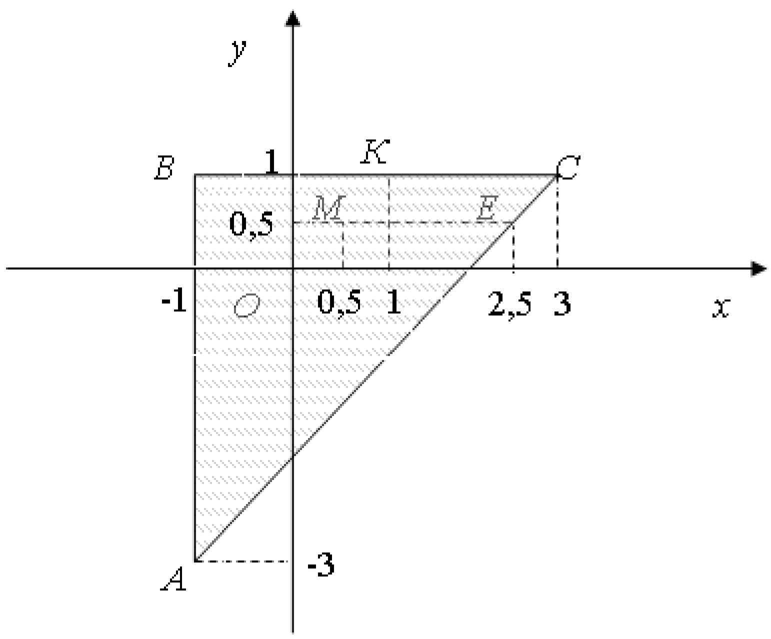

Рис. 7. - Область в декартовой системе координат

Далее найдем критические точки функции, принадлежащие границам области.

Рассмотрим границу AB. Уравнение этой границы $x=-1$, при этом $y\in[-3{,}1]$. Подставим значение $x=-1$ в функцию $z=3x^2-6xy-y^2+4y+5$, получим функцию $z=3(-1)^2-6(-1)y-y^2+4y+5$ или $z=10y-y^2+8$ одной переменной. Найдем критические точки последней функции, принадлежащие отрезку $y\in[-3{,}1]$. $z'=10-2y$, $10-2y=0$, $y=5\notin[-3{,}1]$. То есть критических точек, принадлежащих границе AB, кроме самих точек A и B, у функции нет.

Рассмотри границу AC. Ее уравнение $y=x-2$, при этом $x\in[-1{,}3]$. Подставим значение $y=x-2$ в функцию $z=3x^2-6xy-y^2+4y+5$, получим функцию $z=3x^2-6x(x-2)-(x-2)^2+4(x-2)+5$, $z=3x^2-6x^2+12x-x^2+4x-4+4x-8+5$ или $z=-4x^2+20x-7$. $z'=-8x+20$, $-8x+20=0$, $x=2{,}5\in[-1{,}3]$, $y=2{,}5-2=0{,}5$ Таким образом, на границе AC области есть критическая точка $E(2{,}5;0{,}5)$.

Уравнение границы BC: $y=1$, $x\in[-1{,}3]$. Рассуждая аналогично первым двум случаям, имеем: $z=3x^2-6x\cdot1-1^2+4\cdot1+5$, $z=3x^2-6x+8$, $z'=6x-6$, $6x-6=0$, $x=1\in[-1{,}3]$. $K(1;1)$ – критическая точка функции $z=3x^2-6xy-y^2+4y+5$, принадлежащая границе BC области.

Найдем значения функции $z=3x^2-6xy-y^2+4y+5$ во всех найденных критических точках (M, E, K) и в точках A, B и C:

$z(A)=3(-1)^2-6(-1)(-3)-(-3)^2+4(-3)+5=-31$;

$z(B)=3(-1)^2-6(-1)\cdot1-1^2+4\cdot1+5=17$;

$z(C)=3\cdot3^2-6\cdot3\cdot1-1^2+4\cdot1+5=17$;

$z(M)=3(0{,}5)^2-6\cdot0{,}5\cdot0{,}5-(0{,}5)^2+4\cdot0{,}5+5=6$;

$z(E)=3(2{,}5)^2-6\cdot2{,}5\cdot0{,}5-(0{,}5)^2+4\cdot0{,}5+5=18$;

$z(K)=3\cdot1^2-6\cdot1\cdot1-1^2+4\cdot1+5=5$.

Итак, наибольшее значение функция $z=3x^2-6xy-y^2+4y+5$ в рассматриваемой области достигает в точке E, а наименьшее – в точке A. А именно $z_{\max}=18$, $z_{\min}=-31$.

Пример 12. Найти градиент скалярного поля, заданного функцией $z=5x^2+3xy^2+y^3-4$ в точке $P_0(-1;2)$.

Решение.

Градиент функции двух переменных определяется как вектор $grad z=\left\{\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{P_0};\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{P_0}\right\}$.

$\frac{\partial z}{\partial x}=10x+3y^2$, $\frac{\partial z}{\partial y}=6xy+3y^2$, тогда $\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{P_0}=10\cdot(-1)+3\cdot 2^2=2$, $\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{P_0}=6\cdot(-1)\cdot 2+3\cdot 2^2=0$. Искомый градиент: $grad z=\{2;0\}$.

Пример 13. Найти производную функции $z=\ln\left(4x^2+3y^2\right)$ по направлению вектора $\vec{a}=12\vec{i}-5\vec{j}$ в точке $A(-1;1)$.

Решение.

Производную по направлению можно вычислить по формуле:

$\frac{\partial z}{\partial \vec{a}}=\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_A\cdot\cos\alpha+\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_A\cdot\cos\beta$, где $\cos\alpha=\frac{a_x}{\left|\vec{a}\right|}=\frac{a_x}{\sqrt{a_x^2+a_y^2}}$ и $\cos\beta=\frac{a_y}{\left|\vec{a}\right|}=\frac{a_y}{\sqrt{a_x^2+a_y^2}}$ – направляющие косинусы вектора, задающего направление дифференцирования.

$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{8x}{4x^2+3y^2}$, $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{6y}{4x^2+3y^2}$, $\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_A=\frac{8\cdot(-1)}{4\cdot(-1)^2+3\cdot 1^2}=-\frac{8}{7}$, $\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_A=\frac{6\cdot 1}{4\cdot(-1)^2+3\cdot 1^2}=\frac{6}{7}$; $\cos\alpha=\frac{12}{\sqrt{12^2+(-5)^2}}=\frac{12}{13}$, $\cos\beta=\frac{-5}{\sqrt{12^2+(-5)^2}}=-\frac{5}{13}$.

Подставив в приведенную формулу получим: $\frac{\partial z}{\partial \vec{a}}=-\frac{8}{7}\cdot\frac{12}{13}+\frac{6}{7}\cdot\left(-\frac{5}{13}\right)=-\frac{126}{91}$. Так как значение производной отрицательно, то функция $z=\ln\left(4x^2+3y^2\right)$ в точке $A(-1;1)$ в направлении вектора $\vec{a}=12\vec{i}-5\vec{j}$ убывает.

Пример 14. Написать уравнение касательной плоскости и уравнения нормали к поверхности $3x^2+y^2-3z=0$, проходящих через точку $M_0(1;3;4)$.

Решение.

Если точка M_0 принадлежит поверхности $F(x,y,z)=0$, то уравнение касательной плоскости имеет вид $F'_x(M_0)(x-x_0)+F'_y(M_0)(y-y_0)+F'_z(M_0)(z-z_0)=0$, а уравнение нормали – $\dfrac{x-x_0}{F'_x(M_0)}=\dfrac{y-y_0}{F'_y(M_0)}=\dfrac{z-z_0}{F'_z(M_0)}$.

$F'_x(M_0)=6x\big|_{M_0}=6\cdot 1=6$, $F'_y(M_0)=2y\big|_{M_0}=2\cdot 3=6$, $F'_z(M_0)=-3\big|_{M_0}=-3$.

Тогда уравнение касательной плоскости: $6(x-1)+6(y-3)-3(z-4)=0$ или $2x+2y-z-6=0$, а уравнения нормали: $\dfrac{x-1}{6}=\dfrac{y-3}{6}=\dfrac{z-4}{-3}$ или $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-3}{2}=\dfrac{z-4}{-1}$.

Варианты расчетно-графической работы

Вариант 1

1. Найти область определения функции $z=\sqrt{1-\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}}$, изобразить ее на чертеже.

2. Найти уравнения и построить линии уровня функции $z=|x|+y$.

3. Найти частные производные первого порядка функции $z=\frac{x\,y}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

4. Найти все частные производные второго порядка функции $z=\frac{1}{3}\sqrt{(x^2+y^2)^3}$.

5. Найти $\frac{\partial^3 u}{\partial x\partial y\partial z}$. $u=xy^2z+x^3y^2+4z^3y$.

6. Показать, что функция $z=\sin^2(3x-4y)$ удовлетворяет уравнению $4z'_x+3z'_y=0$.

7. Найти частные производные первого порядка функции $x^2+y^2+z^2-6x=0$, заданной неявно.

8. Найти полный дифференциал функции $z=\frac{x\,y}{x-y^2}$.

9. Найти приближенное значение выражения $tg47°\sin 29°$.

10. Найти локальные экстремумы функции $z=4x+2y+4y^2+y^2+6$.

11. Найти наименьшее и наибольшее значение функции $z=6xy-9x^2-9y^2+4x+4y$ в замкнутой области, при $x=0,\ x=1,\ y=0,\ y=2$.

12. Найти градиент скалярного поля, заданного функцией $z=x^3+y^3+xy^2-6$ в точке $P_0(1;2)$.

13. Найти производную функции $z=5x^2+6xy$ в точке $A=(2;\,1)$ по направлению вектора $\vec{a}=\vec{i}+2\vec{j}$.

14. Написать уравнение касательной плоскости и уравнения нормали к поверхности $2x^2y-z^3-7=0$, проходящей через точку $M_0(2;\,1;\,1)$.

Вариант 2

1. Найти область определения функции $z = \arcsin\dfrac{x-1}{x}$, изобразить ее на чертеже.

2. Найти уравнения и построить линии уровня функции $z = x^2 + y^2$

3. Найти частные производные первого порядка функции $z = x \cdot e^{-xy}$.

4. Найти все частные производные второго порядка функции $z = \ln(x + \sqrt{x^2 + y^2})$.

5. Найти $\dfrac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial z}$. $u = 2x^2 y + z^4 x^2 + y^3 x$

6. Показать, что функция $z = e^{xy}$ удовлетворяет уравнению $xz'_x + yz'_y - 2z''_{xy} = -2z$.

7. Найти частные производные первого порядка функции $xyz = A^3$, заданной неявно.

8. Найти полный дифференциал функции $z = \ln\left(\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}} - \dfrac{1}{\sqrt[3]{y}}\right)$.

9. Найти приближенное значение выражения $(1{,}97)^2 e^{0{,}3}$.

10. Найти локальные экстремумы функции $z = x^2 + xy + y^2 - 2x - 3y$.

11. Найти наименьшее и наибольшее значение функции $z = x^2 + xy - 2$ в замкнутой области при $y + x = 3,\ \ y = 0,\ x = 0$.

12. Найти градиент скалярного поля, заданного функцией $z = \ln\left(x + \dfrac{1}{y}\right)$ в точке $P_0(1;4)$.

13. Найти производную функции $z = \ln(5x + 3y)$ в точке $A = (2;\ 2)$ по направлению вектора $\vec{a} = 2\vec{i} - 3\vec{j}$.

14. Написать уравнение касательной плоскости и уравнения нормали к поверхности $2x^2 + 3xy + y^2 - z = 0$, проходящей через точку $M_0(1;\ 2;\ 12)$.

Вариант 3

1. Найти область определения функции $z=\ln(x-y)$, изобразить ее на чертеже.

2. Найти уравнения и построить линии уровня функции. $z=(x+y)^2$.

3. Найти частные производные первого порядка функции $z=y^x$.

4. Найти все частные производные второго порядка функции $z=arctg\,\dfrac{x+y}{1-xy}$.

5. Найти $\dfrac{\partial^3 u}{\partial x\partial y\partial z}$. $u=e^x y^2+z^4 e^y+xy^2$

6. Показать, что функция $z=\cos^2(2x-3y)$ удовлетворяет уравнению $3z'_x+2z'_y=0$.

7. Найти частные производные первого порядка функции $x+y=e$, заданной неявно.

8. Найти полный дифференциал функции $u=\dfrac{y}{x}+\dfrac{z}{y}-\dfrac{z}{x}$.

9. Найти приближенное значение выражения $\sqrt{(3{,}02)^2-(1{,}97)^2+11}$.

10. Найти локальные экстремумы функции $z=x^2+2xy-y^2-4x$.

11. Найти наименьшее и наибольшее значение функции $z=2x^2+2xy-0{,}5y^2-4y$ в замкнутой области при $y=2x,\ y=2,\ x=0$.

12. Найти градиент скалярного поля, заданного функцией $z=x^2+y^2+2x+4y$ в точке $P_0(3;2)$.

13. Найти производную функции $z=arctg(xy^2)$ в точке $A=(2;\,1)$ по направлению вектора $\vec{a}=3\vec{i}+4\vec{j}$.

14. Написать уравнение касательной плоскости и уравнения нормали к поверхности $x^2-y^2-2z=0$, проходящей через точку $M_0(2;\,2;\,0)$.

Вариант 4

1. Найти область определения функции $z=\sqrt{x-\sqrt{y}}$, изобразить ее на чертеже.

2. Найти уравнения и построить линии уровня функции $z=\frac{y}{x}$.

3. Найти частные производные первого порядка функции $z=\ln(x^2+y^2)$.

4. Найти все частные производные второго порядка функции $z=\sin(ax+by)$.

5. Найти $\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial z}$. $u=x^2y^2e^{4z^3}$.

6. Показать, что функция $z=\sqrt{x^2-3y^2}$ удовлетворяет уравнению $3yz'_x+xz'_y=0$.

7. Найти частные производные первого порядка функции $2\cos(x-2y)=2y-x$, заданной неявно.

8. Найти полный дифференциал функции $z=x\cdot e^{-xy}$.

9. Найти приближенное значение выражения $\frac{5}{\sqrt[4]{(1{,}98)^2+(3{,}01)^2+3}}$.

10. Найти локальные экстремумы функции $z=x^2+3y^2-x+18y-4$.

11. Найти наименьшее и наибольшее значение функции $z=x^2+2xy+4x-y^2$ в замкнутой области при $x=0$, $y=0$, $x+y+2=0$.

12. Найти градиент скалярного поля, заданного функцией $z=\sqrt{x^2+y^2}$ в точке $P_0(3;4)$

13. Найти производную функции $z=2x^2y+3x^2y^2$ в точке $A=(1;-2)$ по направлению вектора $\vec{a}=6\vec{i}-8\vec{j}$.

14. Написать уравнение касательной плоскости и уравнения нормали к поверхности $x^2z+y^2z=4$, проходящей через точку $M_0(-2;\ 0;\ 1)$.

Вариант 5

1. Найти область определения функции $z=\frac{1}{\sqrt{x+y}}+\frac{1}{\sqrt{x-y}}$, изобразить ее на чертеже.

2. Найти уравнения и построить линии уровня функции. $z=\frac{1}{x^2+2y^2}$.

3. Найти частные производные первого порядка функции $z=x\sqrt{y}$.

4. Найти все частные производные второго порядка функции $z=e^{x\cdot e^y}$.

5. Найти $\frac{\partial^3 u}{\partial x\partial y\partial z}$. $u=e^{x^2yz}$.

6. Показать, что функция $z=\ln(x^2-y^2)$ удовлетворяет уравнению $z'_x+z'_y-\frac{2}{x+y}=0$.

7. Найти частные производные первого порядка функции $x^2+y^2+z^2-2xz=0$, заданной неявно.

8. Найти полный дифференциал функции $u=\frac{2x-t}{x+2t}$.

9. Найти приближенное значение выражения $\ln\left(\sqrt[3]{1{,}02}+\sqrt[4]{0{,}99}-1\right)$.

10. Найти локальные экстремумы функции $z=e^{\frac{x}{e}}\left(x+y^2\right)$.

11. Найти наименьшее и наибольшее значение функции $z=5x^2-3xy+y^2$ в замкнутой области при $x=-1,\ x=1,\ y=-1,\ y=1$.

12. Найти градиент скалярного поля, заданного функцией $z=x^3+3xy^3+3xy^2+1$ в точке $P_0(1;2)$.

13. Найти производную функции $z=\arcsin\frac{x^2}{y}$ в точке $A=(1;\ 2)$ по направлению вектора $\vec{a}=-12\vec{i}+5\vec{j}$.

14. Написать уравнение касательной плоскости и уравнения нормали к поверхности $\frac{x^2}{1}+\frac{y^2}{4}-\frac{z^2}{9}=1$, проходящей через точку $M_0(1;\ 2;\ 3)$.

Вариант 6

1. Найти область определения функции $z=\arcsin\frac{x^2+y^2}{4}$, изобразить ее на чертеже.

2. Найти уравнения и построить линии уровня функции $z=\sqrt{xy}$.

3. Найти частные производные первого порядка функции $z=(5x^2y-y^3+7)^3$.

4. Найти все частные производные второго порядка функции $z=\frac{x-y}{x+y}$.

5. Найти $\frac{\partial^3 u}{\partial x\partial y\partial z}$. $u=\ln xy^2z^3$.

6. Показать, что функция $z=\sqrt[3]{2y^2+x^2}$ удовлетворяет уравнению $2yz'_x+xz'_y=0$.

7. Найти частные производные первого порядка функции $2\sin(x+2y-3z)=x+2y-3z$, заданной неявно.

8. Найти полный дифференциал функции $u=\arcsin(t-\sqrt{x})$.

9. Найти приближенное значение выражения $\sqrt{(3{,}01)^2-(1{,}98)^2+11}$.

10. Найти локальные экстремумы функции $z=2xy-3x^2-2y^2+10$.

11. Найти наименьшее и наибольшее значение функции $z=0{,}5x^2\cdot xy$ в замкнутой области при $y=2x^2$, $y=8$.

12. Найти градиент скалярного поля, заданного функцией $z=\ln(x+2y)$ в точке $P_0(1;2)$.

13. Найти производную функции $z=\ln\left(3x^2+5y^2\right)$ в точке $A=(2;\,3)$ по направлению вектора $\vec{a}=-4\vec{i}+3\vec{j}$.

14. Написать уравнение касательной плоскости и уравнения нормали к поверхности $x^2+2y^2+z^2=3$, проходящей через точку $M_0(1;\,1;\,0)$.

Вариант 7

1. Найти область определения функции $z = \ln(2x+3y)$, изобразить ее на чертеже.

2. Найти уравнения и построить линии уровня функции $z = x^2 - y^2$.

3. Найти частные производные первого порядка функции $z = \ln tg\,\frac{y}{x}$.

4. Найти все частные производные второго порядка функции $z = e^{xy^2}$.

5. Найти $\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial z}$. $u = x^3 e^{4x^2 y}$.

6. Показать, что функция $z = \sin^2(3x-2y)$ удовлетворяет уравнению $2z'_x + 3z'_y = 0$.

7. Найти частные производные первого порядка функции $x^4 + 3x^2y^2 - 2y^4 = A^4$, заданной неявно.

8. Найти полный дифференциал функции $z = \ln(\sqrt{x} + \sqrt{y})$.

9. Найти приближенное значение выражения $\sqrt{(2{,}93)^2 + (2{,}02)^3 + 8}$.

10. Найти локальные экстремумы функции $z = x^3 + 8y^3 - 6xy + 1$.

11. Найти наименьшее и наибольшее значение функции $z = 3x + y - xy$ в замкнутой области при $y = x,\ \ y = 4,\ x = 0$.

12. Найти градиент скалярного поля, заданного функцией $z = \ln(x^2 + 3y^3)$ в точке $P_0(1;1)$.

13. Найти производную функции $z = 2x^2 + 3xy + 4y^2$ в точке $A = (2;-2)$ по направлению вектора $\vec{a} = \vec{i} - 3\vec{j}$.

14. Написать уравнение касательной плоскости и уравнения нормали к поверхности $z = 2x^2 + 2^2$, проходящей через точку $M_0(1;\,1;\,3)$.

Вариант 8

1. Найти область определения функции $z=\sqrt{4x-y^2}$, изобразить ее на чертеже.

2. Найти уравнения и построить линии уровня функции $z=x-y$.

3. Найти частные производные первого порядка функции $z=e^{-\frac{x}{y}}$.

4. Найти все частные производные второго порядка функции $z=\sin\frac{x}{y}$.

5. Найти $\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial z}$. $u=y^2x\sqrt{z}$.

6. Показать, что функция $z=arctg\frac{x}{y}$ удовлетворяет уравнению $xz'_x+yz'_y=0$.

7. Найти частные производные первого порядка функции $4x^2+6y^2+3x-2y+5=0$, заданной неявно.

8. Найти полный дифференциал функции $z=\sqrt{x}\cdot\sin\frac{y}{x}$.

9. Найти приближенное значение выражения $\sqrt[3]{(2{,}02)^3+(1{,}94)^3+11}$.

10. Найти локальные экстремумы функции $z=x^2+2xy-4x+8y$.

11. Найти наименьшее и наибольшее значение функции $z=xy-3x-2y$ в замкнутой области при $x=0,\ x=4,\ y=0,\ y=4$.

12. Найти градиент скалярного поля, заданного функцией $z=arctg\left(x^2y^2\right)$ в точке $P_0(1;-1)$.

13. Найти производную функции $z=arctg\frac{x}{y^2}$ в точке $A=(3;\,1)$ по направлению вектора $\vec{a}=\vec{i}-\vec{j}$.

14. Написать уравнение касательной плоскости и уравнения нормали к поверхности $x^2+y^2-3z=0$, проходящей через точку $M_0(1;\,\sqrt{2};\,1)$.

Вариант 9

1. Найти область определения функции $z=\ln(9-x^2-y^2)$, изобразить ее на чертеже.

2. Найти уравнения и построить линии уровня функции $z=x+y$.

3. Найти частные производные первого порядка функции $z=xy\ln(x+y)$

4. Найти все частные производные второго порядка функции $z=\ln(x+e^{-y})$.

5. Найти $\dfrac{\partial^3 u}{\partial x\partial y\partial z}$. $u=xy^4+y\sin z+z^3x$.

6. Показать, что функция $z=tg^2(2x-3y)$ удовлетворяет уравнению $4z'_x+2z'_y=0$.

7. Найти частные производные первого порядка функции $3x^2-8y^2+4x+2y=7$, заданной неявно.

8. Найти полный дифференциал функции $U=e^{\frac{x}{t^2}}$.

9. Найти приближенное значение выражения $\sqrt[3]{(3{,}98)^2+(3{,}04)^2+2}$.

10. Найти локальные экстремумы функции $z=1-\sqrt{x^2+y^2}$.

11. Найти наименьшее и наибольшее значение функции $z=x^2+xy-3x-y$ в замкнутой области при $x=0,\ x=2,\ y=0,\ y=3$.

12. Найти градиент скалярного поля, заданного функцией $z=\ln(5x^2+4y^2)$ в точке $P_0(1;1)$.

13. Найти производную функции $z=\ln(2x^2+y^2)$ в точке $A=(3;-3)$ по направлению вектора $\vec{a}=\vec{i}-2\vec{j}$.

14. Написать уравнение касательной плоскости и уравнения нормали к поверхности $x^2+4y+z^2=36$, проходящей через точку $M_0(4;\ 1;\ 4)$.

Вариант 10

1. Найти область определения функции $z = \arcsin\frac{2x+y}{3}$, изобразить ее на чертеже.

2. Найти уравнения и построить линии уровня функции $z = y^2 - 2x$.

3. Найти частные производные первого порядка функции $z = arctg\,\frac{x}{y}$.

4. Найти все частные производные второго порядка функции $z = \sin(x + ay)$.

5. Найти $\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial z}$. $u = x^3 y \ln(z + y)$.

6. Показать, что функция $z = \frac{y}{(x^2 - y^2)^5}$ удовлетворяет уравнению $\frac{1}{x} \cdot z'_x + \frac{1}{y} \cdot z'_y = \frac{x}{y^2}$.

7. Найти частные производные первого порядка функции $2x^2 - 3y^2 + 6x - 2y + 8 = 0$, заданной неявно.

8. Найти полный дифференциал функции $U = x^{y^3}$.

9. Найти приближенное значение выражения $\sin 44° \cos 31°$.

10. Найти локальные экстремумы функции $z = e^{-x^2 - y^2}\left(2x^2 + 3y^2\right)$.

11. Найти наименьшее и наибольшее значение функции $z = xy - x - 2y$ в замкнутой области при $y = x,\ x = 8,\ y = 0$.

12. Найти градиент скалярного поля, заданного функцией $z = arctg\,xy$ в точке $P_0\left(2; \frac{1}{2}\right)$.

13. Найти производную функции $z = 2x^4 + 8x^2y^2$ в точке $A = (2; -1)$ по направлению вектора $\vec{a} = -3\vec{i} + 4\vec{j}$.

14. Написать уравнение касательной плоскости и уравнения нормали к поверхности $z = \frac{2x^2}{3} + \frac{y^2}{4}$, проходящей через точку $M_0(\sqrt{3}; 2; 3)$.

Вариант 11

1. Найти область определения функции $z = \ln xy + \sqrt{x-y}$, изобразить ее на чертеже.

2. Найти уравнения и построить линии уровня функции $z = xy$.

3. Найти частные производные первого порядка функции $z = \ln(x + \sqrt{x^2 + y^2})$.

4. Найти все частные производные второго порядка функции $z = \ln(x^2 + y^2)$.

5. Найти $\dfrac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial z}$. $u = x^2 \cos y + 2z^3 y - zy^2$.

6. Показать, что функция $z = x \cdot \ln \dfrac{y}{x}$ удовлетворяет уравнению $x \cdot z'_x + y \cdot z'_y = z$.

7. Найти частные производные первого порядка функции $\ln z = z + x + y - 1$, заданной неявно.

8. Найти полный дифференциал функции $z = x^3 + xy^2 - 2y^3$.

9. Найти приближенное значение выражения $\dfrac{2}{(3{,}98)^2 + (2{,}01)^3 + 4}$.

10. Найти локальные экстремумы функции $z = x^2 + 2xy - 3y^2 + 1$.

11. Найти наименьшее и наибольшее значение функции $z = x^2 + 2xy - y^2 - 4x$ в замкнутой области при $y = x + 1$, $y = 0$, $x = 3$.

12. Найти градиент скалярного поля, заданного функцией $z = \dfrac{3x}{y^2}$ в точке $P_0(3;4)$.

13. Найти производную функции $z = x^2 + xy + y^2$ в точке $A = (1;\ 1)$ по направлению вектора $\vec{a} = 2\vec{i} - \vec{j}$.

14. Написать уравнение касательной плоскости и уравнения нормали к поверхности $x^2 + y^2 + z^2 = 21$, проходящей через точку $M_0(2;\ 4;\ 1)$.

Вариант 12

1. Найти область определения функции $z=\sqrt{x^2+y^2-9}$, изобразить ее на чертеже.

2. Найти уравнения и построить линии уровня следующей функции $z=x^2y+x$.

3. Найти частные производные первого порядка функции $z=\ln(x+\ln y)$.

4. Найти все частные производные второго порядка функции $z=\ln(x^2+y^2+2x+1)$.

5. Найти $\dfrac{\partial^3 u}{\partial x\partial y\partial z}$. $u=x^3\ln yz$.

6. Показать, что функция $z=(x^2+y^2)tg\dfrac{x}{y}$ удовлетворяет уравнению $x\cdot z'_x+y\cdot z'_y=2z$.

7. Найти частные производные первого порядка функции $x^2+y^2+2xy-6y+2=0$, заданной неявно.

8. Найти полный дифференциал функции $z=\sqrt{x^2+xy+y^2}$.

9. Найти приближенное значение выражения $\sqrt[4]{(3{,}04)^3-(2{,}94)^2-20}$.

10. Найти локальные экстремумы функции $z=x^2-(y-1)^2$.

11. Найти наименьшее и наибольшее значение функции $z=x^2-2xy+2{,}5y^2-2x$ в замкнутой области при $x=0,\ x=2,\ y=0,\ y=2$.

12. Найти градиент скалярного поля, заданного функцией $z=\arcsin\dfrac{x}{y}$ в точке $P_0(3;5)$.

13. Найти производную функции $z=2x^2+3xy+y^2$ в точке $A=(2;\,1)$ по направлению вектора $\vec{a}=3\vec{i}-4\vec{j}$.

14. Написать уравнение касательной плоскости и уравнения нормали к поверхности $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{1}+\dfrac{z^2}{9}=1$, проходящей через точку $M_0\left(1;\,\dfrac{\sqrt{2}}{2};\,\dfrac{3}{2}\right)$.

Вариант 13

1. Найти область определения функции $z=\sqrt{\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}-1}$, изобразить ее на чертеже.

2. Найти уравнения и построить линии уровня следующей функции $z=y(x^2+1)$.

3. Найти частные производные первого порядка функции $z=3^{\frac{y}{x}}$.

4. Найти все частные производные второго порядка функции $z=\arccos\sqrt{\frac{x}{y}}$.

5. Найти $\frac{\partial^3 u}{\partial x\partial y\partial z}$. $u=z^2e^{x^2+4y}$.

6. Показать, что функция $z=\frac{2x+3y}{x^2+y^2}$ удовлетворяет уравнению $x\cdot z'_x+y\cdot z'_y=-z$.

7. Найти частные производные первого порядка функции $x^3+2y^3+z^3-3xyz-2y+3=0$, заданной неявно.

8. Найти полный дифференциал функции $z=e^{\frac{x}{y}}+e^{-x}$.

9. Найти приближенное значение выражения $(1{,}04)^{3{,}02}$.

10. Найти локальные экстремумы функции $z=x^3y+x^2y^2-x^2y$.

11. Найти наименьшее и наибольшее значение функции $z=x^2+2xy-10$ в замкнутой области при $y+x=4,\ y=0,\ x=0$.

12. Найти градиент скалярного поля, заданного функцией $z=x+y-x^2-xy-y^2$ в точке $P_0(1;2)$.

13. Найти производную функции $z=\ln\left(5x^2+3y^2\right)$ в точке $A=(1;1)$ по направлению вектора $\vec{a}=3\vec{i}+2\vec{j}$.

14. Написать уравнение касательной плоскости и уравнения нормали к поверхности $x^2+y^2+z^2-6y+4z-12=0$, проходящей через точку $M_0(3\sqrt{3};\,3;\,-4)$.

Вариант 14

1. Найти область определения функции $z=\sqrt{1-x^2}+\sqrt{y^2-1}$, изобразить ее на чертеже.

2. Найти уравнения и построить линии уровня функции $z=|y|+x$.

3. Найти частные производные первого порядка функции $z=tg\,\dfrac{x^2}{y}$.

4. Найти все частные производные второго порядка функции $z=ctg\,\dfrac{y}{x^2}$.

5. Найти $\dfrac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial z}$. $u=y^2\sin(x^2+2z)$.

6. Показать, что функция $z=\dfrac{x^2+y^2}{x-y}$ удовлетворяет уравнению $z'_x+z'_y=\dfrac{2(x+y)}{x-y}$.

7. Найти частные производные первого порядка функции $2x^2+2y^2+z^2-8xz-z-8=0$, заданной неявно.

8. Найти полный дифференциал функции $z=\ln\sin(x-2t)$.

9. Найти приближенное значение выражения $\sin 44°\cdot\cos 62°$.

10. Найти локальные экстремумы функции $z=x^2-xy+y^2+9x-6y+20$.

11. Найти наименьшее и наибольшее значение функции $z=x^2+2xy-y^2-4x$ в замкнутой области при $y=x,\ y=0,\ x=2$.

12. Найти градиент скалярного поля, заданного функцией $z=x-3y+\sqrt{3xy}$ в точке $P_0(3;4)$.

13. Найти производную функции $z=5x^2+6xy$ в точке $A=(2;1)$ по направлению вектора $\vec{a}=\vec{i}+2\vec{j}$.

14. Написать уравнение касательной плоскости и уравнения нормали к поверхности $z=5x^2+y^2$, проходящей через точку $M_0(1;3;14)$.

Вариант 15

1. Найти область определения функции $z = \sqrt{x} + \sqrt{y+1}$, изобразить ее на чертеже.

2. Найти уравнения и построить линии уровня функции. $z = x^2 + y^2 + 2x$.

3. Найти частные производные первого порядка функции $z = \dfrac{\cos x^2}{y}$.

4. Найти все частные производные второго порядка функции $z = x^y$.

5. Найти $\dfrac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial z}$. $u = x^3\sqrt{y^2 + z^2}$.

6. Показать, что функция $z = \ln\dfrac{x}{y} + x^3 - y^3$ удовлетворяет уравнению $x \cdot z'_x + y \cdot z'_y = 3(x^3 - y^3)$.

7. Найти частные производные первого порядка функции $\ln\sqrt{x^2 + y^2} = arctg\dfrac{y}{x}$, заданной неявно.

8. Найти полный дифференциал функции $U = \sin^2(x+y) - \sin^2 x - \sin^2 y$.

9. Найти приближенное значение выражения $\sqrt{(4{,}03)^2 - (3{,}01)^2 + 2}$.

10. Найти локальные экстремумы функции $z = 3x^2 + 3y^2 - 2x - 2y + 2$.

11. Найти наименьшее и наибольшее значение функции $z = 6xy - 9x^2 - 9y^2 + 4x + 4y$ в замкнутой области при $y = 0,\ x = 1,\ y = 0,\ y = 0$.

12. Найти градиент скалярного поля, заданного функцией $z = \ln + \left(5x^2 + 4y^2\right)$ в точке $P_0(1;1)$.

13. Найти производную функции $z = arctg\left(xy^2\right)$ в точке $A = (2;\ 3)$ по направлению вектора $\vec{a} = 4\vec{i} - 3\vec{j}$.

14. Написать уравнение касательной плоскости и уравнения нормали к поверхности $z = 3x^2 - 4y^4$, проходящей через точку $M_0(2;\ 1;\ 8)$.

Вариант 16

1. Найти область определения функции $z = \arccos \frac{x}{x+y}$, изобразить ее на чертеже.

2. Найти уравнения и построить линии уровня функции. $z = x^2 - y^2 - 4y$.

3. Найти частные производные первого порядка функции $z = xy + \frac{x}{y}$.

4. Найти все частные производные второго порядка функции $z = \frac{\cos y^2}{x}$.

5. Найти $\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial z}$. $u = z^2 \sin(2x + 4y)$.

6. Показать, что функция $z = e^{\frac{x}{y}} \cdot \ln y$ удовлетворяет уравнению $x \cdot z'_x + y \cdot z'_y = 0$.

7. Найти частные производные первого порядка функции $x^2 - 2y^2 + z^2 - 4x + 2z = 5$, заданной неявно.

8. Найти полный дифференциал функции $z = e^{\frac{x}{y}} \cdot \ln y$.

9. Найти приближенное значение выражения $\cos 29° tg 44°$.

10. Найти локальные экстремумы функции $z = x^3 + y^3 - 3xy$.

11. Найти наименьшее и наибольшее значение функции $z = x^2 + xy + y$ в замкнутой области при $y + x = 2,\ x = 0,\ y = 0$.

12. Найти градиент скалярного поля, заданного функцией $z = x \cdot e^y$ в точке $P_0(2;0)$.

13. Найти производную функции $z = \arcsin \frac{x^2}{y}$ в точке $A = (1;\ 2)$ по направлению вектора $\vec{a} = 5\vec{i} - 12\vec{j}$.

14. Написать уравнение касательной плоскости и уравнения нормали к поверхности $x^2 - y^2 + z = 0$, проходящей через точку $M_0(-1;\ 2;\ 3)$.

Вариант 17

1. Найти область определения функции $z = \arcsin\frac{y}{x}$, изобразить ее на чертеже.

2. Найти уравнения и построить линии уровня функции. $z = 4x^2 + y^2$.

3. Найти частные производные первого порядка функции $z = x \cdot \sin(x + 2y)$.

4. Найти все частные производные второго порядка функции $z = \cos^2(2x + 3y)$.

5. Найти $\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial z}$. $u = 2x^2 y + z^3 y$.

6. Показать, что функция $z = \pi\sqrt{\frac{y}{x}}$ удовлетворяет уравнению $xz'_x + yz'_y = 0$

7. Найти частные производные первого порядка функции $x\cos y + y\cos z + z\cos x = 0$, заданной неявно.

8. Найти полный дифференциал функции $z = e^{\frac{x}{2}} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{y}{2}\right)$.

9. Найти приближенное значение выражения $\sqrt[5]{(2{,}97)^3 + (2{,}01)^2 + 1}$.

10. Найти локальные экстремумы функции $z = \frac{xy}{2} - \frac{x^2 y}{6} - \frac{xy^2}{8}$.

11. Найти наименьшее и наибольшее значение функции $z = 2x^2 + 2xy - 0{,}5y^2 - 4x$ в замкнутой области при $y = 2x,\ y = 2,\ x = 0$.

12. Найти градиент скалярного поля, заданного функцией $z = x^2 + y^2 + 2xy^2$ в точке $P_0(3;4)$.

13. Найти производную функции $z = \ln(3x^2 + 4y^2)$ в точке $A = (1;\ 3)$ по направлению вектора $\vec{a} = 2\vec{i} - \vec{j}$.

14. Написать уравнение касательной плоскости и уравнения нормали к поверхности $x^2 y^2 + x^3 y + xy^3 = 3$, проходящей через точку $M_0(1;\ 1;\ 1)$.

Вариант 18

1. Найти область определения функции $z=\sqrt{9-x^2-y^2}+\sqrt{x^2+y^2-4}$, изобразить ее на чертеже.

2. Найти уравнения и построить линии уровня функции. $z=\dfrac{1}{x^2-y^2}$.

3. Найти частные производные первого порядка функции $z=\arccos\sqrt{\dfrac{x}{y}}$.

4. Найти все частные производные второго порядка функции $z=y^{\ln x}$.

5. Найти $\dfrac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial z}$. $u=(x^2+y^2)e^{2x}$.

6. Показать, что функция $z=e^{xy}$ удовлетворяет уравнению $x^2\cdot z''_{xx}-y^2\cdot z''_{yy}=0$.

7. Найти частные производные первого порядка функции $xy+\ln y+\ln x=0$, заданной неявно.

8. Найти полный дифференциал функции $z=\dfrac{y}{x}-\dfrac{x}{y}$.

9. Найти приближенное значение выражения $\sqrt{(0{,}95)^2+(2{,}04)^2+4}$.

10. Найти локальные экстремумы функции $z=x^3y^2(12-x-y)$, $x>0,\ y>0$.

11. Найти наименьшее и наибольшее значение функции $z=5x^2-3xy+y^2+4$ в замкнутой области при $x=-1,\ x=1,\ y=-1, y=1$.

12. Найти градиент скалярного поля, заданного функцией $z=x^2+3xy^2$ в точке $P_0(1;3)$.

13. Найти производную $z=3x^4+2x^2y^2$ в точке $A=(-1;\ 2)$ по направлению вектора $\vec{a}=4\vec{i}-3\vec{j}$.

14. Написать уравнение касательной плоскости и уравнения нормали к поверхности $x^2+y^2-z^2-2yz=0$, проходящей через точку $M_0(1;\ 2;\ 1)$.

Вариант 19

1. Найти область определения функции $z=\sqrt{x^2+y^2-x}$, изобразить ее на чертеже.

2. Найти уравнения и построить линии уровня функции $z=y^2+4x$.

3. Найти частные производные первого порядка функции $z=e^{\sqrt{xy}}$.

4. Найти все частные производные второго порядка функции $z=\arcsin(xy)$.

5. Найти $\dfrac{\partial^3 u}{\partial x\partial y\partial z}$. $u=3y^2z^3x+xy^3$.

6. Показать, что функция $z=\ln(x^2+y^2+2y+1)$ удовлетворяет уравнению $z''_{xx}+z''_{yy}=0$.

7. Найти частные производные первого порядка функции $\sin xy+e^{2y}-x^2z=0$, заданной неявно.

8. Найти полный дифференциал функции $S=x\cdot\ln t$.

9. Найти приближенное значение выражения $tg46°\sin 29°$.

10. Найти локальные экстремумы функции $z=x^3-2y^3+3xy-5$.

11. Найти наименьшее и наибольшее значение функции $zZ=x^2-2xy+4x-y^2$ в замкнутой области при $x=0,\ y=2,\ y=0, y=2$.

12. Найти градиент скалярного поля, заданного функцией $z=2x^2+3xy+y^2$, в точке $P_0(2;1)$.

13. Найти производную $z=3x^2y^2+5xy^2$ в точке $A=(2;\,1)$ по направлению вектора $\vec{a}=\vec{i}+2\vec{j}$.

14. Написать уравнение касательной плоскости и уравнения нормали к поверхности $x^2+y^2-z^2=2x$, проходящей через точку $M_0(2;\,3;\,-3)$.

Вариант 20

1. Найти область определения функции $z = \arcsin\frac{x}{y^2}$, изобразить ее на чертеже.

2. Найти уравнения и построить линии уровня функции. $z = (x-y)^2$.

3. Найти частные производные первого порядка функции $z = e^{\sin xy}$.

4. Найти все частные производные второго порядка функции $z = arctg\frac{y}{x}$.

5. Найти $\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial z}$. $u = xe^{y+2z^2}$.

6. Показать, что функция $z = \sin^2(y-ax)$ удовлетворяет уравнению $a^2 z''_{yy} - z''_{xx} = 0$.

7. Найти частные производные первого порядка функции $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$, заданной неявно.

8. Найти полный дифференциал функции $z = \arcsin\frac{x+y}{2y^3}$.

9. Найти приближенное значение выражения $\sin 44° tg 46°$.

10. Найти локальные экстремумы функции $z = x^3 + 3y^2 - 3xy$.

11. Найти наименьшее и наибольшее значение функции $z = x^2 - 2xy + 4x + 1$ в замкнутой области при $x + y + 1 = x,\ y = 0,\ x = -3$.

12. Найти градиент скалярного поля, заданного функцией $z = 3x^4 - xy + y^3$ в точке $P_0(1;2)$.

13. Найти производную $z = \ln\left(5x^2 + 4y^2\right)$ в точке $A = (1;\ 1)$ по направлению вектора $\vec{a} = 2\vec{i} - \vec{j}$.

14. Написать уравнение касательной плоскости и уравнения нормали к поверхности $x^2 + y^2 = (z-5)^2$, проходящей через точку $M_0(4;\ 0;\ 9)$.

Вариант 21

1. Найти область определения функции $z=\ln(-x-y)$, изобразить ее на чертеже.

2. Найти уравнения и построить линии уровня функции. $z=|x|+2y$.

3. Найти частные производные первого порядка функции $z=x^{y^2}$.

4. Найти все частные производные второго порядка функции $z=\cos\frac{y}{x}$.

5. Найти $\frac{\partial^3 u}{\partial x\partial y\partial z}$. $u=xz^2\ln(x+4y)$.

6. Показать, что функция $z=y\sqrt{\frac{y}{x}}$ удовлетворяет уравнению $x^2\cdot z''_{xx}-y^2z''_{yy}=0$.

7. Найти частные производные первого порядка функции $1+xy-\ln(e^{xy}-e^{-xy})=0$, заданной неявно.

8. Найти полный дифференциал функции $z=arctg\frac{y}{x}$.

9. Найти приближенное значение выражения $\sqrt{(2{,}04)^3+(1{,}96)^3+9}$.

10. Найти локальные экстремумы функции $z=4(x-y)-x^2-y^2$.

11. Найти наименьшее и наибольшее значение функции $z=x^2+y^2-9xy+27$ в замкнутой области при $x=0,\ x=3,\ y=0,\ y=3$.

12. Найти градиент скалярного поля, заданного функцией $z=x^3+y^3+3xy$ в точке $P_0(2;1)$.

13. Найти производную $z=x^2+xy$ в точке $A=(1;\,2)$ по направлению вектора $\vec{a}=3\vec{i}+4\vec{j}$.

14. Написать уравнение касательной плоскости и уравнения нормали к поверхности $z=4-x^2-y^2$, проходящей через точку $M_0(1;\,3;\,-6)$.

Вариант 22

1. Найти область определения функции $z=\sqrt{1-y^2}+\sqrt{x^2-4}$, изобразить ее на чертеже.

2. Найти уравнения и построить линии уровня функции $z=|y|+3x$.

3. Найти частные производные первого порядка функции $z=(1+\log_2 xy)^3$.

4. Найти все частные производные второго порядка функции $z=x\cdot e^{\frac{y}{x}}$.

5. Найти $\frac{\partial^3 u}{\partial x\partial y\partial z}$. $u=e^{xyz^2}$.

6. Показать, что функция $z=arctg\frac{x}{y}$ удовлетворяет уравнению $z''_{xx}+z''_{yy}=0$.

7. Найти частные производные первого порядка функции $y^x+x^y+z^{xy}=0$, заданной неявно.

8. Найти полный дифференциал функции $z=\ln tg\frac{y}{x}$.

9. Найти приближенное значение выражения $\frac{2}{\sqrt{(1{,}95)^3+(1{,}05)^3+1}}$.

10. Найти локальные экстремумы функции $z=x^2-xy-y^2+x+y$.

11. Найти наименьшее и наибольшее значение функции $z=x^2+2y^2+1$ в замкнутой области при $x+y=3,\ y=0,\ x=0$.

12. Найти градиент скалярного поля, заданного функцией $z=\frac{4x}{x^2+y^2}$ в точке $P_0(1;-1)$.

13. Найти производную функции $z=\ln\left(x^2+2y^2\right)$ в точке $A=(2;\,2)$ по направлению вектора $\vec{a}=\vec{i}+\vec{j}$.

14. Написать уравнение касательной плоскости и уравнения нормали к поверхности $x+z^2=6y^2+2$, проходящей через точку $M_0(1;\,1;\,3)$.

Вариант 23

1. Найти область определения функции $z=\sqrt{9-3x^2-y^2}$, изобразить ее на чертеже.

2. Найти уравнения и построить линии уровня функции $z=x+3y$.

3. Найти частные производные первого порядка функции $z=arctg\sqrt{x^y}$.

4. Найти все частные производные второго порядка функции $z=x\cdot e^{-xy}$.

5. Найти $\frac{\partial^3 u}{\partial x\partial y\partial z}$. $u=z\cos yx^3$.

6. Показать, что функция $z=\frac{\sin(x-y)}{x}$ удовлетворяет уравнению $\frac{\partial}{\partial x}\left(x^2\cdot\frac{\partial z}{\partial x}\right)-x^2\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$.

7. Найти частные производные первого порядка функции $x\sin y+\cos 2y=\cos y$, заданной неявно.

8. Найти полный дифференциал функции $z=e^{\sin\frac{y}{x}}$.

9. Найти приближенное значение выражения $\sqrt{(4{,}03)^2-(3{,}02)^2+2}$.

10. Найти локальные экстремумы функции $z=4(x-y)-x^2-y^2$.

11. Найти наименьшее и наибольшее значение функции $z=3-2x^2-xy-y^2$ в замкнутой области при $y=x,\ x=1,\ y=0$.

12. Найти градиент скалярного поля, заданного функцией $z=1-\sqrt{x^2+y^2}$ в точке $P_0(3;\ 4)$.

13. Найти производную $z=2x^2+xy+3y^2$ в точке $A=(1;\ 2)$ по направлению вектора $\vec{a}=3\vec{i}-4\vec{j}$.

14. Написать уравнение касательной плоскости и уравнения нормали к поверхности $x^2+z^2=3y+4$, проходящей через точку $M_0(3;\ 2;\ 1)$.

Вариант 24

1. Найти область определения функции $z = \dfrac{1}{\sqrt{4 - x^2 - y^2}}$, изобразить ее на чертеже.

2. Найти уравнения и построить линии уровня функции $z = x^2 - 4y^2$.

3. Найти частные производные первого порядка функции $z = (\sin x)^y$.

4. Найти все частные производные второго порядка функции $z = arctg\dfrac{x}{y}$.

5. Найти $\dfrac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial z}$. $u = x^2 y^3 e^{x+3z}$.

6. Показать, что функция $z = e^{\frac{x}{y}}$ удовлетворяет уравнению $\dfrac{\partial}{\partial x}\left(x^2 \dfrac{\partial z}{\partial x}\right) - y^2 \cdot \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$.

7. Найти частные производные первого порядка функции $x^2 + y^2 + z^2 - 2xyz = a^2$, заданной неявно.

8. Найти полный дифференциал функции $z = \ln\sin(x^2 - 2y)$.

9. Найти приближенное значение выражения $\sin 28° tg 46°$.

10. Найти локальные экстремумы функции $z = x^2 + xy + y^2 + x - y + 1$.

11. Найти наименьшее и наибольшее значение функции $z = x^2 + 3y^2 + x - y$ в замкнутой области при $x + y = 1,\ x = 1,\ y = -1$.

12. Найти градиент скалярного поля, заданного функцией $z = 4x^2 - 3x + y^2$ в точке $P_0(1;2)$.

13. Найти производную $z = arctg\dfrac{x^2}{y}$ в точке $A = (1;\ 2)$ по направлению вектора $\vec{a} = 3\vec{i} + 2\vec{j}$.

14. Написать уравнение касательной плоскости и уравнения нормали к поверхности $z^2 = y^2 + x + 16$, проходящей через точку $M_0(5;\ 2;\ -5)$.

Вариант 25

1. Найти область определения функции $z = \ln(4 - x^2 - 2y^2)$, изобразить ее на чертеже.

2. Найти уравнения и построить линии уровня функции. $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.

3. Найти частные производные первого порядка функции $z = \sqrt[3]{x + y^2}$.

4. Найти все частные производные второго порядка функции $z = tg\,\dfrac{x^2}{y}$.

5. Найти $\dfrac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial z}$. $u = y^2 \ln(x^2 + z^3)$.

6. Показать, что функция $z = \dfrac{1}{2\sqrt{\pi y}} \cdot e^{-\frac{x^2}{4y}}$ удовлетворяет уравнению $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \dfrac{\partial z}{\partial y}$.

7. Найти частные производные первого порядка функции $x^2 = y^x$, заданной неявно.

8. Найти полный дифференциал функции $z = e^{\frac{x}{y}} + e^{\frac{x}{y}}$.

9. Найти приближенное значение выражения $\sin 59^\circ \cos 31^\circ$.

10. Найти локальные экстремумы функции $z = x^3 y^2 (12 - x - y)$.

11. Найти наименьшее и наибольшее значение функции $z = 5x^2 - 3xy + y^2 + 4$ в замкнутой области при $x + y = 1,\ x = -1,\ y = -1$.

12. Найти градиент скалярного поля, заданного функцией $z = 3x^2 + 2xy - 4y^2 - 4x$ в точке $P_0(1;2)$.

13. Найти производную $z = x^2 + 2xy - y^2$ в точке $A = (2;\,1)$ по направлению вектора $\vec{a} = 4\vec{i} + 3\vec{j}$.

14. Написать уравнение касательной плоскости и уравнения нормали к поверхности $9y^2 = 3z^2 + x^2 + 5$, проходящей через точку $M_0(1;\,1;\,1)$.

Вариант 26

1. Найти область определения функции $z=\sqrt{4x-y^2}$, изобразить ее на чертеже.

2. Найти уравнения и построить линии уровня функции $z=x-3y$.

3. Найти частные производные первого порядка функции $z=\sqrt{\ln xy}$.

4. Найти все частные производные второго порядка функции $z=x\sin(x+y)$.

5. Найти $\frac{\partial^3 u}{\partial x\partial y\partial z}$. $u=y^2+4z^3e^{2x}$.

6. Показать, что функция $z=\sin^2(3x-4y)$удовлетворяет уравнению $4z'_x+3z'_y=0$.

7. Найти частные производные первого порядка функции $x^2+y^2+z^2-6x=0$, заданной неявно.

8. Найти полный дифференциал функции $z=\frac{x\,y}{x-y^2}$.

9. Найти приближенное значение выражения $\sqrt{(0{,}98)^2+(2{,}03)^2+4}$.

10. Найти локальные экстремумы функции $z=4x+2y+4y^2+y^2+6$.

11. Найти наименьшее и наибольшее значение функции $z=x^2+4y^2-x-y$ в замкнутой области при $x+y=3,\ x=0,\ y=0$.

12. Найти градиент скалярного поля, заданного функцией $z=x^3+y^3+xy^2-8$, в точке $P_0(1;2)$.

13. Найти производную $z=5x^2+6xy$ в точке $A=(2;\,1)$ по направлению вектора $\vec{a}=\vec{i}+2\vec{j}$.

14. Написать уравнение касательной плоскости и уравнения нормали к поверхности $2x^2y-z^3-7=0$, проходящей через точку $M_0(2;\,1;\,1)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Максименко В.Н. Курс математического анализа. Часть 2 [Электронный ресурс]: учебное пособие/ Максименко В.Н., Меграбов А.Г., Павшок Л.В.– Электрон. текстовые данные.– Новосибирск: Новосибирский государственный технический университет, 2011. – 411 с.

2. Быкова О.Н. Практикум по математическому анализу [Электронный ресурс]: учебное пособие/ Быкова О.Н., Колягин С.Ю., Кукушкин Б.Н.– Электрон. текстовые данные. – М.: Прометей, 2014. – 277 с.

3. Иванова С.А. Математический анализ [Электронный ресурс]: учебное пособие/ Иванова С.А. – Электрон. текстовые данные. – Кемерово: Кемеровский технологический институт пищевой промышленности, 2014.– 127 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Наталья Николаевна Двоерядкина,
доцент кафедры общей математики и информатики АмГУ, кандидат педагогических наук

Татьяна Александровна Юрьева,
доцент кафедры общей математики и информатики АмГУ, кандидат педагогических наук

Функции нескольких переменных: учебно-методическое пособие. Изд-во АмГУ.