

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации

*Амурский государственный университет*

Л.И. Мороз, А.Г. Масловская

РЕШЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ЗАДАЧ  
МЕТОДОМ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

*Учебное пособие*

Благовещенск  
2019

ББК 22.193 я 73  
М 80

*Рекомендовано  
учебно-методическим советом университета*

*Рецензент:*

*А.В. Бушманов, доцент каф. информационных и управляющих систем  
АмГУ, канд. техн. наук*

Мороз Л.И., Масловская А.Г.

М 80 Решение дифференциальных задач методом конечных элементов. Учебное пособие / Л.И. Мороз, А.Г. Масловская – Благовещенск: Амурский гос. ун-т, 2019.

В учебном пособии рассматриваются основные теоретические сведения о методе конечных элементов, примеры использования инструментальных возможностей ППП Matlab и COMSOL Multiphysics для решения практических задач. Приводятся варианты индивидуальных заданий для лабораторных работ и вопросы для самоконтроля.

Учебное пособие предназначено для студентов, обучающихся по направлениям подготовки 24.03.01 – «Ракетные комплексы и космонавтика» и 01.03.02 «Прикладная математика и информатика», а также может быть использовано студентами других направлений подготовки и специальностей, использующих методы вычислительной математики и инструментальные средства ППП Matlab и COMSOL Multiphysics для решения задач исследовательского и прикладного характера.

ББК 22.193 я 73

## *ВВЕДЕНИЕ*

В настоящее время среди методов численного анализа особое развитие и распространение получил метод конечных элементов (МКЭ). МКЭ является универсальным и предоставляет возможность эффективно решать прикладные задачи широкого спектра направлений: гидродинамика, газодинамика, электричество и магнетизма, механика деформируемого твёрдого тела, теплообмен и др. МКЭ обладает рядом преимуществ, обуславливающих популярность данного метода среди исследователей, инженеров, ученых и разработчиков компьютерных систем инженерного анализа. МКЭ позволяет выполнять дискретизацию областей сложных геометрических форм с требуемой точностью и, как следствие, решать прикладные задачи для объектов со сложным геометрическим строением. Этот курс тесно связан с основными разделами фундаментальных и прикладных математических дисциплин (линейная алгебра, математический анализ, дифференциальные уравнения, уравнения математической физики, численные методы), а также дисциплин цикла «Программирование».

Материал, содержащийся в данном пособии, необходим для организации практических занятий, лабораторного практикума и самостоятельной работы студентов. Особенностью пособия является его прикладная направленность. Здесь приводятся необходимые теоретические сведения, подробные алгоритмы метода конечных элементов для обыкновенных дифференциальных уравнений и дифференциальных уравнений в частных производных, примеры решения задач с помощью встроенных функций ППП Matlab и среды COMSOL Multiphysics, контрольные вопросы для самопроверки, а также индивидуальные задания к лабораторным работам. Студенты должны научиться применять на практике методы численного анализа, приобрести навыки программной реализации вычислительных алгоритмов, иметь четкое представление о способах решения задач с использованием встроенного инструментария пакетов прикладных программ, анализировать границы применимости МКЭ, интерпретировать полученные результаты, а также оценивать погрешность вычислений.

# 1 РЕШЕНИЕ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ МЕТОДОМ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Будем рассматривать двухточечные краевые задачи для обыкновенного дифференциального уравнения (ОДУ) второго порядка. Такие задачи имеют общий вид:

$$F(x, y, y', y'') = 0, \quad x \in [a, b], \quad (1.1)$$

$$\varphi_1(y(a), y'(a)) = 0, \quad \varphi_2(y(b), y'(b)) = 0,$$

где  $F$ ,  $\varphi_1$ ,  $\varphi_2$  – заданные функции определенной гладкости.

Наиболее употребительны и хорошо изучены линейные краевые задачи, т.е. задачи вида (1.1), где  $F$ ,  $\varphi_1$ ,  $\varphi_2$  – линейные функции. Для определенности будем полагать, что объектом изучения является линейная краевая задача:

$$L[y] = y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x), \quad x \in [a, b] \quad (1.2)$$

$$l_a[y] = \alpha_0 y(a) + \alpha_1 y'(a) = A, \quad (1.3)$$

$$l_b[y] = \beta_0 y(b) + \beta_1 y'(b) = B, \quad (1.4)$$

где коэффициенты краевых условий не обращаются в ноль одновременно, а функции  $p(x)$ ,  $q(x)$  выбраны таким образом, что данная задача имеет единственное решение в заданном функциональном пространстве.

Краевые условия (1.3)-(1.4) определяют в общем случае смешанную краевую задачу, при  $\alpha_1 = \beta_1 = 0$  первую краевую задачу, при  $\alpha_0 = \beta_0 = 0$  – вторую краевую задачу.

Аналитическое решение краевых задач вызывает большие трудности по сравнению с решением задачи Коши. Отсюда и большое разнообразие численных методов решения таких задач. По типу представления результатов решения задачи все методы можно разделить на приближенно-аналитические, дающие решение краевой задачи в виде некоторой функции и численные или сеточные методы, дающие совокупность решений в узлах выбранной сетки.

## 1.1 Метод конечных элементов

Основная идея МКЭ была предложена Р. Курантом в 1943 г. В 50-х годах прошлого века с появлением первых компьютеров возникла необходимость в разработке новых инженерных подходов к численному решению задач со сложной геометрией, в которых области интегрирования разбивались на подобласти. Такие подобласти и получили название конечных элементов. МКЭ начал интенсивно разрабатываться с середины шестидесятых годов. Суть МКЭ состоит в том, что любая непрерывная величина аппроксимируется дискретной моделью, построение которой выполняется на множестве кусочно-непрерывных функций, определенных на конечном числе подобластей. Область применения МКЭ охватывает все физические задачи, которые могут быть описаны дифференциальными уравнениями.

Наиболее важными преимуществами МКЭ являются следующие:

– свойства материалов смежных элементов не должны быть обязательно одинаковыми. Это позволяет применять метод к телам, составленным из нескольких материалов;

– криволинейная область может быть аппроксимирована с помощью прямолинейных элементов или описана точно с помощью криволинейных элементов. Таким образом, методом можно пользоваться не только для областей с «хорошей» формой границы;

– размеры элементов могут быть переменными. Это позволяет укрупнить или измельчить сеть разбиения области на элементы, если в этом есть необходимость;

– с помощью МКЭ не представляет труда рассмотрение граничных условий с разрывной поверхностной нагрузкой, а также смешанных граничных условий.

Указанные выше преимущества МКЭ могут быть использованы при составлении достаточно общей программы для решения частных задач определенного класса. Факторами, препятствующими расширению круга задач этого,

решаемых методом конечных элементов, являются ограниченность машинной памяти и высокая стоимость вычислительных работ.

Главный недостаток МКЭ заключается в необходимости составления сложных вычислительных алгоритмов и применения вычислительной техники.

### 1.1.1 Основы метода конечных элементов

Пусть в области  $\bar{\Omega} = \Omega + \Gamma$  необходимо решить некоторую дифференциальную задачу.

1. Область  $\bar{\Omega}$  разбивают на  $(e = \overline{1, E})$  подобластей, называемые конечными элементами, такие что  $\Omega = \bigcup_{e=1}^E \Omega^e$ ,  $\Gamma = \bigcup_{e=1}^E \Gamma^e$ .

2. В каждом конечном элементе  $\bar{\Omega}^e = \Omega^e + \Gamma^e$  выбирается система нумерованных узлов, в которых значения искомой функции являются неизвестными величинами.

3. Каждому нумерованному узлу приписывается базисная функция, такая что в этом узле она равна единице, а в остальных нумерованных узлах расчетной области – нулю. Число базисных функций в расчетной области равно числу нумерованных узлов.

4. Решение искомой дифференциальной задачи приближенно строится в виде линейной комбинации базисных функций.

5. Это решение подставляется в дифференциальную задачу, результатом подстановки является некоторая функциональная невязка.

6. С помощью известных методов взвешенных невязок (коллокаций, Галлеркина, наименьших квадратов) функциональная невязка минимизируется по всей расчетной области путем приравнивания нулю скалярного произведения функциональной невязки и весовых функций, в методе взвешенных невязок Галлеркина весовые функции в нумерованных узлах совпадают с базисными функциями. В результате получается система линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) относительно значений искомой функции в нумерованных узлах, коэффициентами в которой являются интегралы по всей расчетной области от базисных функций и их производных.

7. Определенные интегралы по всей расчетной области заменяются на сумму интегралов по конечным элементам.

8. Решается СЛАУ относительно узловых значений искомой функции каким-либо известным методом (Гаусса, простых итераций, Зейделя и т.п.). Результаты решения подставляются в приближенное решение по пункту 4.

В МКЭ решение на каждом элементе получается в виде непрерывных (или гладких) функций.

### 1.1.2 Системы базисных функций

В качестве базисных функций рассматриваются два вида ортогональных базисных функций: кусочно-постоянные функции и линейные кусочно-непрерывные базисные функции.

Пусть в вещественном пространстве  $R^1$  рассматривается класс функций  $\varphi(x)$ , непрерывно дифференцируемых необходимое число раз на отрезке  $x \in [0,1]$ . Разобьем этот отрезок точками  $x_m$ ,  $m = \overline{1, M}$ , на  $M$  элементарных отрезков  $[x_{m-1}, x_m]$ ,  $m = \overline{1, M}$ , и представим функцию  $\varphi(x)$  в виде следующей линейной комбинации:

$$\varphi(x) \approx \tilde{\varphi}(x) = \sum_{m=1}^M \varphi_m \cdot N_m(x), \quad (1.5)$$

где  $N_m(x)$  – кусочно-постоянные функции на каждом отрезке  $[x_{m-1}, x_m]$ , и, если эти функции линейно-независимы (или ортогональны) при различных индексах  $m$ , будем называть их кусочно-постоянными базисными функциями, определяемыми равенствами

$$N_m(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x_{m-1} < x < x_m, \\ 0, & \text{если } x < x_{m-1} \text{ или } x > x_m, \end{cases} \quad m = \overline{1, M}, \quad \dots\dots(1.6)$$

а  $\varphi_m$  – значения функции  $\varphi(x)$  в нумерованных узлах, находящихся в середине каждого отрезка  $[x_{m-1}, x_m]$ .

Если в качестве базисных функций принять функции вида:

$$N_m(x) = \begin{cases} \frac{x - x_{m-1}}{x_m - x_{m-1}}, x \in [x_{m-1}, x_m] \\ \frac{x_{m+1} - x}{x_{m+1} - x_m}, x \in [x_m, x_{m+1}] \\ 0, x < x_{m-1}, x > x_{m+1}, \end{cases} \quad (1.7)$$

называемые линейными кусочно-непрерывными базисными функциями, то аппроксимация функция  $\varphi(x)$  на каждом отрезке  $x \in [x_{m-1}, x_m]$  будет линейной и непрерывной в узлах  $x_m$ .

Можно построить и другие базисные функции, в том числе и нелинейные.

### 1.1.3 Весовые функции

Пусть в области  $\overline{\Omega} = \Omega + \Gamma \subset R^n$  рассматривается краевая задача

$$L\varphi + p = 0 \text{ в } \Omega, \quad (1.8)$$

$$B\varphi + q = 0 \text{ на } \Gamma, \quad (1.9)$$

где  $L$  и  $B$  – линейные дифференциальные операторы, а  $p$  и  $q$  – известные функции независимых переменных.

Для аппроксимации функции  $\varphi$  в нумерованных узлах области  $\Omega$  выбирается система базисных функций  $N_m$ ,  $m = \overline{1, M}$ , с помощью которой приближенное решение (1.5).

Подставляя это приближенное решение в задачу (1.8)-(1.9), получим не тождественный нуль, поскольку (1.5) – приближенное решение, а некоторую функциональную невязку  $R_\Omega$  по области  $\Omega$  и невязку  $R_\Gamma$  по границе  $\Gamma$ :

$$R_\Omega = \sum_{m=1}^M \varphi_m L(N_m) + p, \quad R_\Gamma = \sum_{m=1}^M \varphi_m B(N_m) + q.$$

С целью нахождения искомым значений  $\varphi_m$ ,  $m = \overline{1, M}$ , ортогонализируем невязки  $R_\Omega$  и  $R_\Gamma$  с помощью специальным образом подобранных функций  $W_s$ ,  $s = \overline{1, M}$ , называемых весовыми функциями, т.е. приравниваем к нулю скалярные произведения невязок  $R_\Omega$  и  $R_\Gamma$  и весовых функций  $W_s$ ,  $s = \overline{1, M}$ , в резуль-

тате чего получается следующая система линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) относительно узловых значений  $\varphi_m$  искомой функции:

$$\begin{aligned} (W_s, R_{\bar{\Omega}}) = \int_{\Omega} W_s \cdot R_{\Omega} d\Omega + \int_{\Gamma} \bar{W}_s \cdot R_{\Gamma} d\Gamma = \int_{\Omega} W_s \cdot \left( \sum_{m=1}^M \varphi_m L(N_m) + p \right) d\Omega + \\ + \int_{\Gamma} \bar{W}_s \cdot \left( \sum_{m=1}^M \varphi_m B(N_m) + q \right) d\Gamma = 0, s = \overline{1, M}, \end{aligned} \quad (1.10)$$

где весовые функции  $W_s$  и  $\bar{W}_s$  для области  $\Omega$  и границы  $\Gamma$  могут быть разными.

Этот метод ортогонализации невязок  $R_{\Omega}$  и  $R_{\Gamma}$  с помощью весовых функций называют методом взвешенных невязок, различные варианты которого отличаются способом задания весовых функций  $W_s, s = \overline{1, M}$ .

Среди методов взвешенных невязок метод Галеркина является одним из наиболее популярных.

В методе Галеркина в качестве весовых функций выбирают базисные функции в нумерованных узлах расчетной области  $W_s = N_s, s = \overline{1, M}$ .

В результате СЛАУ (1.10) относительно  $u_m$  приобретает вид

$$\int_{\Omega} N_s \left( \sum_{m=1}^M u_m L(N_m) + p \right) d\Omega + \int_{\Gamma} \bar{N}_s \left( \sum_{m=1}^M u_m B(N_m) + q \right) d\Gamma = 0, s = \overline{1, M},$$

в силу ортогональности базисных функций, матрица этой СЛАУ будет иметь разреженный вид.

#### 1.1.4 Конечно-элементный метод Галеркина решения краевых задач для ОДУ

Рассмотрим идею построения алгоритма МКЭ на примере:

$$\frac{d^2 u}{dx^2} - u = 0, 0 < x < 1, \quad (1.11)$$

$$u(0) = 0, x = 0, \quad (1.12)$$

$$u(1) = 1, x = 1, \quad (1.13)$$

Аналитическое решение задачи (1.11)-(1.13):

$$u(x) = (\exp(1-x) - \exp(1+x)) / (1 - e^2).$$

Разобьем отрезок  $[0,1]$  на три конечных элемента  $e = \overline{1,3}, m = \overline{1,4}$

Каждому нумерованному узлу приписывается базисная функция  $N_m(x), m = \overline{1,4}$ , определяемая с помощью выражения (1.7). Решение задачи (1.11)-(1.13) записывается в виде

$$u(x) \approx \hat{u}(x) = \sum_{m=1}^4 u_m N_m(x), \quad (1.14)$$

где  $u_m$  – значения искомой функции в нумерованных узлах, подлежащие определению.

На каждом элементе определены значения функции (функция элемента):

$$u(x) \approx \hat{u}(x) = \sum_{m=1}^4 u_m N_m(x), e = 1, 2, 3.$$

Подставляя (1.14) в ОДУ (1.11) получаем следующую функциональную невязку:

$$R_\Omega = \frac{d^2 \hat{u}}{dx^2} - \hat{u}.$$

Поскольку на границах заданы граничные условия первого рода, выполняющиеся точно, то невязка  $R_\Gamma$  на границах равна нулю.

В соответствии с методом взвешенных невязок Галеркина весовые функции  $W_s, s = \overline{1,4}$ , принимаются равными базисным функциям  $N_s, s = \overline{1,4}$  ( $W_s(x) = N_s(x)$ ). Тогда в соответствии с методом Галеркина получаем следующую СЛАУ относительно  $u_m, m = \overline{1,4}$ :

$$\int_0^1 N_s \left( \frac{d^2 \hat{u}}{dx^2} - \hat{u} \right) dx = 0, s = 1, 2, 3, 4. \quad (1.15)$$

Определенный интеграл существует, если подынтегральная функция является кусочно-непрерывной на заданном отрезке с конечным числом точек разрыва первого рода и ограниченной. Однако во вторую производную подынтегральных функций СЛАУ (1.15) входят линейные кусочно-непрерывные ба-

зисные функции  $N_m(x)$ ,  $m = \overline{1,4}$  (1.7), производные второго порядка от которых претерпевают разрывы второго рода.

Класс непрерывно дифференцируемых функций можно использовать для конечно-элементной аппроксимации дифференциальной задачи (1.11)-(1.13), поскольку производные второго порядка являются кусочно-непрерывными с разрывами первого рода, т.е. определенные интегралы от вторых производных таких функций существуют.

МКЭ накладывает ограничения на класс гладкости базисных функций. Необходимо ослабить требования гладкости базисных функций.

Такие способы ослабления гладкости базисных функций называют *слабой формулировкой* в МКЭ. Эти способы в одномерных задачах основаны на интегрировании по частям, а в многомерных – на использовании формул Грина.

Проинтегрируем в (1.15) первое слагаемое по частям, получим

$$-\int_0^1 \left( \frac{dN_s}{dx} \frac{d\hat{u}}{dx} + N_s \hat{u} \right) dx + \left[ N_s \frac{d\hat{u}}{dx} \right]_0^1 = 0, \quad s = \overline{1, M+1}, \quad (1.16)$$

откуда видно, что теперь требуется непрерывность только приближенного решения  $\hat{u}$ , и его первой производной  $\frac{d\hat{u}}{dx}$ .

Представим СЛАУ (1.16) в следующей векторно-матричной форме:

$$Ku = f, \quad u = (u_1, u_2, \dots, u_{M+1})^T, \quad f = (f_1, f_2, \dots, f_{M+1})^T, \quad (1.17)$$

где  $K = [k_{sm}]$ ,  $s, m = \overline{1, M+1}$ .

Элементы матрицы  $K$  и компоненты вектора правых частей вычисляются следующим образом:

$$k_{sm} = \int_0^1 \left( \frac{dN_s}{dx} \frac{dN_m}{dx} + N_s N_m \right) dx, \quad s, m = \overline{1, M+1},$$

$$f_s = \left[ N_s \frac{d\hat{u}}{dx} \right]_0^1 = N_s \frac{d\hat{u}}{dx} \Big|_{x=1} - N_s \frac{d\hat{u}}{dx} \Big|_{x=0}, \quad s, m = \overline{1, M+1}.$$

В каждый коэффициент  $k_{sm}$  и компонент  $f_s$  делает вклад каждый элемент расчетной области:

$$k_{sm} = \sum_{e=1}^E k_{sm}^e, \quad f_s = \sum_{e=1}^E f_s^e,$$

$$\text{где } k_{sm}^e = k_{ms}^e = \int_{x_m}^{x_{m+1}} \left( \frac{dN_s^e}{dx} \frac{dN_m^e}{dx} + N_s^e N_m^e \right) dx, \quad s \neq m, \quad (1.18)$$

$$k_{mm}^e = \int_{x_m}^{x_{m+1}} \left( \left( \frac{dN_m^e}{dx} \right)^2 + (N_m^e)^2 \right) dx, \quad s = m \quad (1.19)$$

Для конечного элемента с нумерованными узлами  $m$ ,  $m+1$  построим с помощью (1.18), (1.19) локальную матрицу жесткости  $K^e$ :

$$K^e = \int_{x_m}^{x_{m+1}} \begin{bmatrix} \left( \frac{dN_m^e}{dx} \right)^2 + (N_m^e)^2 & \frac{dN_m^e}{dx} \frac{dN_{m+1}^e}{dx} + N_m^e N_{m+1}^e \\ \frac{dN_{m+1}^e}{dx} \frac{dN_m^e}{dx} + N_{m+1}^e N_m^e & \left( \frac{dN_{m+1}^e}{dx} \right)^2 + (N_{m+1}^e)^2 \end{bmatrix} dx, \quad (1.20)$$

причем для  $e=1, m=1, e=2, m=2, e=3, m=3$ .

Чтобы получить глобальную матрицу жесткости просуммируем локальные матрицы жесткости. Данный процесс называется *ансамблированием конечных элементов*.

Рассмотрим процесс ансамблирования в задаче (1.11)-(1.13), для которой  $E = M = 3$

1) Пусть  $e=1$ , тогда при  $s=1, m=1, m+1=2$ , при  $s=2, m=1, m+1=2$ .

Локальная матрица жесткости (1.20) в узлах 1-го конечного элемента вычисляется следующим образом. Элементы матрицы (1.20), стоящие в  $s$ -й строке и  $m$ -м столбце ( $s, m=1,2$ ) вычисляются по правой ветви базисной функции (1.7), приписанной левому нумерованному узлу, и полевой ветви базисной функции (1.7), приписанной правому нумерованному узлу.

Таким образом, элементы этой матрицы равны ( $x_{m+1} - x_m = 1/3, m=1,2,3$ )

$$K^1 = \int_0^{1/3} \begin{bmatrix} (-3)^2 + \left( \frac{x_2 - x}{1/3} \right)^2 & (-3)3 + \left( \frac{x_2 - x}{1/3} \right) \left( \frac{x - x_1}{1/3} \right) \\ 3(-3) + \left( \frac{x - x_1}{1/3} \right) \left( \frac{x_2 - x}{1/3} \right) & (3)^2 + \left( \frac{x - x_1}{1/3} \right)^2 \end{bmatrix} dx =$$

$$= \begin{bmatrix} 28/9 & -53/18 \\ -53/18 & 28/9 \end{bmatrix}.$$

Вектор правых частей глобальной СЛАУ содержит второе слагаемое выражения (1.16), имеющего место только для граничных узлов:

$$\left[ N_s \frac{d\hat{u}}{dx} \right]_0^1 = N_4 \frac{d\hat{u}}{dx} \Big|_{x=1} - N_1 \frac{d\hat{u}}{dx} \Big|_{x=0}.$$

Первый элемент содержит только левую границу, и, следовательно,

$$f^1 (f_1^1 \ f_2^1)^T = \left( -N_1 \frac{d\hat{u}}{dx} \Big|_{x=0} \quad 0 \right)^T.$$

Таким образом, локальная СЛАУ, построенная для элемента  $e=1$ , учитывается в глобальной СЛАУ (1.17) следующим образом:

$$\begin{bmatrix} 28/9 & -53/18 & 0 & 0 \\ -53/18 & 28/9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} - (d\hat{u}/dx) \Big|_{x=0} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (1.21)$$

2) Пусть  $e=2$ , тогда при  $s=2, m=2, m+1=3$ , при  $s=3, m=2, m+1=3$ .

Аналогично элементу  $e=1$  из (1.20) имеем

$$K^2 = \begin{bmatrix} 28/9 & -53/18 \\ -53/18 & 28/9 \end{bmatrix}, \quad f^2 = (00)^T.$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 28/9 & -53/18 & 0 \\ 0 & -53/18 & 28/9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (1.22)$$

3) Для  $e=3$  при  $s=3, m=3, m+1=4$ , при  $s=4, m=3, m+1=4$ , из (1.20)

получаем

$$K^3 = \begin{bmatrix} 28/9 & -53/18 \\ -53/18 & 28/9 \end{bmatrix}, \quad f^3 = \left( 0 \ (d\hat{u}/dx) \Big|_{x=1} \right)^T,$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 28/9 & -53/18 & 0 \\ 0 & -53/18 & 28/9 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ (\widehat{du}/dx)|_{x=1} \end{bmatrix}. \quad (1.23)$$

Завершается процесс ансамблирования обычным сложением систем (1.21)-(1.23), в результате чего получается итоговая СЛАУ (1.17) с глобальной матрицей жесткости  $K$  и вектором  $f$ :

$$\begin{bmatrix} 28/9 & -53/18 & 0 & 0 \\ -53/18 & 56/9 & -53/18 & 0 \\ 0 & -53/18 & 56/9 & -53/18 \\ 0 & 0 & -53/18 & 28/9 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -(\widehat{du}/dx)|_{x=0} \\ 0 \\ 0 \\ -(\widehat{du}/dx)|_{x=1} \end{bmatrix} \quad (1.24)$$

В силу того что на границах  $x=0$  и  $x=1$  значения искомой функции известны из граничных условий первого рода (1.12), (1.13), первое и последнее уравнение в системе (1.24) можно исключить, положив в остальных уравнениях  $u_1 = u(0) = 0$  и  $u_4 = u(1) = 1$ .

Тогда из (1.24) имеем

$$\begin{bmatrix} 56/9 & -53/18 \\ -53/18 & 56/9 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 53/18 \end{bmatrix},$$

откуда  $u_2 = 0,2885$ ,  $u_3 = 0,6098$  (точные значения  $u_2 = 0,2889$ ,  $u_3 = 0,6102$ ).

## 1.2 Схема решения граничных задач с помощью встроенных функций ППП Matlab

Рассмотрим решение граничных задач на примере обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка (1.2), разрешенного относительно производной второго порядка. Требуется найти функцию  $y(x)$ , удовлетворяющую на отрезке  $[a, b]$  дифференциальному уравнению

$$y'' = f(x, y, y')$$

и граничным условиям

$$\alpha \cdot y(a) + \beta \cdot y'(a) = A,$$

$$\gamma \cdot y(b) + \delta \cdot y'(b) = B.$$

Здесь  $\alpha, \beta, \gamma, \delta, A, B$  – заданные числа.

Решение этой задачи состоит из следующих этапов.

1. Преобразование дифференциального уравнения второго порядка к системе двух уравнений первого порядка.
2. Написание функции для вычисления правой части системы.
3. Написание функции, определяющей граничные условия.
4. Формирование начального приближения при помощи специальной функции **bvpinit**.
5. Вызов солвера **bvp4c** для решения граничной задачи.
6. Визуализация результата.

Первые два этапа выполняются практически так же, как и при решении задачи Коши. Введение вспомогательных функций  $y_1(x)$  и  $y_2(x)$  приводит к системе уравнений первого порядка относительно них:

$$\begin{cases} y_1' = y_2 \\ y_2' = f(x, y_1, y_2) \end{cases}$$

Функция правой части системы зависит от  $x$  и вектора  $y$ , состоящего из двух компонент,  $y(1)$  соответствует  $y_1(x)$ , а  $y(2)$  –  $y_2(x)$ , и программируется так же, как при решении задачи Коши.

Синтаксис ППП Matlab требует, чтобы при постановка граничных условий была преобразована так, чтобы в правых частях стояли нули:

$$\alpha \cdot y(a) + \beta \cdot y'(a) - A = 0, \quad \gamma \cdot y(b) + \delta \cdot y'(b) - B = 0.$$

Функция, описывающая граничные условия, зависит от двух аргументов – векторов  $ya$  и  $yb$  и имеет следующую структуру:

```
function z=bound(ya, yb)
z=[a*ya(1)+b*ya(2)-A; g*yb(1)+d*yb(2)-B];
```

Вместо  $a, b, g, d, A$  и  $B$  следует подставить заданные числа.

Солвер **bvp4c** основан на методе конечных разностей, т.е. получающееся решение есть векторы значений неизвестных функций в точках отрезка (в узлах сетки). Выбор начальной сетки и приближения может оказать влияние на реше-

ние, выдаваемое солвером **bvp4c**. Для задания начальной сетки и приближения предназначена функция **bvpinit**, обращение к которой в самом простом случае выглядит следующим образом:

`initSol = bvpinit` (начальная сетка, начальное приближение к решению).

Начальная сетка определяется вектором координат узлов, упорядоченных по возрастанию и принадлежащих отрезку  $[a, b]$ . Если имеется априорная информация о решении, то разумно среди точек начальной сетки указать те, в которых решение сильно изменяется. Формирование равномерной сетки целесообразно производить функцией **linspace**:

`x = linspace(a, b, n),`

возвращающей вектор  $x$  из  $n$  равноотстоящих узлов между  $a$  и  $b$ , включая границы. Заданная сетка модифицируется солвером в процессе решения для обеспечения требуемой точности. Постоянное начальное приближение задается вектором из двух элементов для функций  $y_1(x)$  и  $y_2(x)$ . Начальное приближение может зависеть от  $x$ , в этом случае требуется запрограммировать функцию, которая по заданному  $x$  возвращает вектор из двух компонент со значениями  $y_1(x), y_2(x)$ , и поместить указатель на нее во втором входном аргументе **bvpinit**. В результате работы **bvpinit** генерируется структура **initSol** с информацией о начальном приближении.

После определения начального приближения вызывается солвер **bvp4c**, входными аргументами которого являются указатели на функции правой части системы и граничных условий, начальное приближение и, при необходимости, управляющая структура с параметрами вычислительного процесса. Управляющая структура формируется при помощи функции **bvpset**. Солвер **bvp4c** возвращает единственный выходной аргумент – структуру с информацией о расчетной сетке, значения искомой функции и ее производной.

Для вычисления значений приближенного решения в произвольных точках отрезка следует применить функцию **deval**.

### Пример:

Требуется решить граничную задачу для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка

$$y'' = -(x^2 - 1)\sin x, \quad y(0) = 0, \quad y'(6) + 2y(6) = 1. \quad (1.25)$$

при помощи солвера **bvp4c**.

Система дифференциальных уравнений первого порядка, соответствующая исходному уравнению, и граничные условия для нее:

$$\begin{cases} y_1' = y_2, \\ y_2' = -\sin x(x^2 - 1), \end{cases} \quad y_1(0) = 0, \quad y_2(6) + 2y_1(6) - 1 = 0. \quad (1.26)$$

Как было указано ранее, функция для граничных условий имеет два входных аргумента. Каждый аргумент является вектором значений неизвестных функций  $y_1(x), y_2(x)$  в начальной и конечной точке промежутка. Поэтому пользовательская функция граничных условий должна определяться аналогично функции `bound`:

```
function z=bound(ya, yb)
z=[ya(1); yb(1)+2*yb(2)-1];
```

Кроме того, определим вектор-функцию правой части системы дифференциальных уравнений (1.26):

```
function f=vec_rside(x, y)
f=[y(2); -sin(x).*(x.^2-1)];
```

Решение граничной задачи можно оформить в виде скрипт-файла, в котором необходимо:

- 1) при помощи **bvpinit** задать начальную сетку на отрезке  $[0, 6]$ , например, из 10 узлов, и постоянное начальное приближение:  $y_1(x) = 1, y_2(x) = 0$ ;
- 2) вызвать солвер **bvp4c** и получить приближенное решение;
- 3) отобразить графически приближенное решение, извлекая нужные компоненты из структуры, возвращаемой солвером.

Текст скрипта `boundary_problemODE` приведен далее:

```
%формирование сетки и задание начального приближения для не-
известной функции
```

```

meshinit=linspace(0,6,30);
yinit=[1 0];
initsol=bvpinit(meshinit,yinit);
%вызов солвера
sol=bvp4c('vec_rside','bound',initsol); %поля структуры sol:
% sol.x - содержит координаты сетки
% sol.y - матрица, включающая векторы:
% sol.y(1,:) - значения функции y1
% sol.y(2,:) - значения функции y2
% вывод графика функции
plot(sol.x,sol.y(1,:), 'r-'); grid on

```

Результат показан на рисунке 1.1.

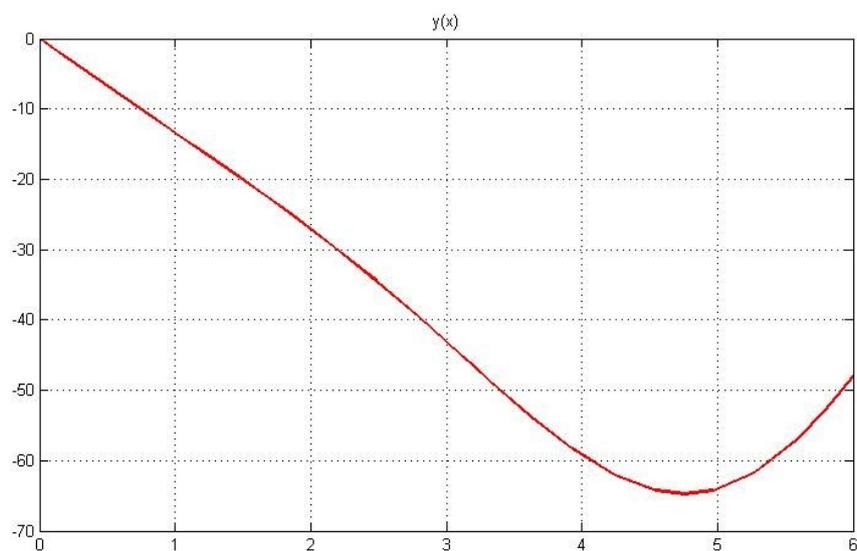


Рис. 1.1. Геометрическая интерпретация решения для уравнения (1.26).

### ***Контрольные вопросы***

1. В чем заключается суть метода конечных элементов?
2. Какой процесс лежит в основе слабой формулировки метода Галеркина?
3. Раскройте понятие «ансамблирование» конечных элементов.
4. Перечислите достоинства и недостатки метода конечных элементов.

5. Назовите основные этапы решения граничных задач с помощью встроенной функции `bvp4c`.

### *Индивидуальные задания*

**Задание 1.** Используя метод конечных элементов, решить краевую задачу для обыкновенного дифференциального уравнения с шагом  $h = \frac{b-a}{4}$ .

**Задание 2.** Решить предложенную задачу, используя встроенные функции пакета Matlab. Вывести графические представления решений на одной оси. Оформить отчет по лабораторной работе.

Номер Вариант	Задание
1	$y'' - 2xy' + 2y = x, y(0) = 0, y(1) = 1$
2	$y'' + y = \sin x, y(0) = 0, y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$
3	$y'' + 4y' + 4y = 8, y(-1) = 0, y(1) = 0$
4	$y'' + 3y' + y = 1, y(0) = 0, y(1) = 1$
5	$y'' - 2xy' + 2y = x^2 - 1, y(0) = 0, y(1) = 2$
6	$y'' - 3xy' + 2y = x + 1, y(0) = 1, y(1) = 0$
7	$y'' + 2xy' + 2y = x - 1, y(0) = 0, y(1) = 1$
8	$y'' + xy' + y = 2x, y(0) = 0, y(1) = 0$
9	$y'' + (1 + x^2)y' = 1, y(-1) = 0, y(1) = 1$
10	$y'' + \frac{1}{x^2}y' + y = 0, y(1) = 1, y(2) = 1$
11	$4y'' - xy' + y = \exp(x), y(0) = 0, y(1) = 5$
12	$y'' + 2y = \cos x, y(0) = 0, y\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 1$
13	$y'' - 5y' + 6y = 1, y(-2) = 0, y(2) = 0$
14	$y'' - 4y' + y = 2, y(0) = 0, y(1) = 2$
15	$y'' + xy' + 2y = x + 5, y(0) = 0, y(1) = 2$

Номер Вариант	Задание
16	$y'' + xy' + 5y = x^2 + 1, y(0) = 1, y(1) = 0$
17	$y'' - xy' + y = (x - 1)\sin x, y(0) = 0, y(1) = 1$
18	$y'' + x^2 y' + 3xy = 2x, y(-1) = 0, y(1) = 0$
19	$y'' + (1 + x^2)y' = \cos x, y(-1) = 0, y(1) = 1$
20	$y'' + y' + \frac{1}{x}y = 0, y(1) = 1, y(2) = 0$

## 2 МЕТОД КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ДЛЯ СТАЦИОНАРНЫХ ЗАДАЧ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Будем рассматривать приближенные методы решения некоторых задач для дифференциальных уравнений с частными производными второго порядка с двумя независимыми переменными, которые в общем случае имеют вид:

$$F(x, y, U, U_x, U_y, U_{xx}, U_{xy}, U_{yy}) = 0. \quad (2.1)$$

Решением уравнения (2.1) будем считать функцию  $U(x, y)$ , график решения представляет собой поверхность в пространстве  $Oxy$ .

Уравнение (2.1) называется линейным, если оно первой степени относительно искомой функции и всех ее производных и не содержит их произведений:

$$A \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + 2B \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + a \frac{\partial U}{\partial x} + b \frac{\partial U}{\partial y} + cU = F(x, y). \quad (2.2)$$

Если коэффициенты  $A, B, C, a, b$  не зависят от  $x, y$ , то уравнение (2.2) называют линейным дифференциальным уравнением с постоянными коэффициентами.

Рассмотрим классификацию уравнений с частными производными. Пусть  $D = AC - B^2$  – дискриминант уравнения (2.2):  $D > 0$  – эллиптическое уравнение,  $D = 0$  – параболическое уравнение,  $D < 0$  – гиперболическое уравнение. Простейшее уравнение эллиптического типа  $\Delta U = 0$  – уравнение Лапласа,  $\Delta U = f(x, y)$  – уравнение Пуассона. Исследование стационарных процессов различной физической природы (колебания, теплопроводность и др.) часто приводят к уравнениям эллиптического типа

$$L[U] = \Delta U + aU_x + bU_y + cU = F(x, y), \quad (2.3)$$

где  $a = a(x, y)$ ,  $b = b(x, y)$ ,  $c = c(x, y)$ ,  $F = F(x, y)$  – непрерывные функции.

Для этих уравнений обычно ставятся только краевые задачи, так как задача Коши может быть некорректной. Рассмотрим наиболее часто встречающиеся краевые задачи.

*Первая краевая задача.* На контуре  $\Gamma$ , ограничивающем область  $G$  задана непрерывная функция  $\varphi(P) = \varphi(x, y)$ . Требуется найти функцию  $U(x, y)$ , удовлетворяющую внутри области  $G$  уравнению (2.3) и принимающую на границе заданные значения:  $L[U(P)] = F(P), P \in G; U(P) = \varphi(P), P \in \Gamma$ .

*Вторая краевая задача.* На контуре  $\Gamma$ , ограничивающем область  $G$ , задана непрерывная функция  $\varphi_1(P)$ . Требуется найти такую функцию  $U(x, y)$ , удовлетворяющую внутри  $G$  уравнению (2.3), нормальная производная которой на  $\Gamma$  принимает заданные значения  $\varphi_1(P)$ :

$$L[U(P)] = F(P), P \in G; \quad \frac{\partial U(P)}{\partial n} = \varphi_1(P), P \in \Gamma.$$

*Третья краевая задача.* На контуре  $\Gamma$ , ограничивающем область  $G$ , задана непрерывная функция  $\psi(P) = \psi(x, y)$ . Требуется найти такую функцию  $U(x, y)$ , удовлетворяющую внутри  $G$  уравнению (2.3), чтобы:

$$L[U(P)] = F(P), P \in G; \\ \alpha_0 U(P) + \alpha_1 \frac{\partial U(P)}{\partial n} = \psi(P), P \in \Gamma, \quad |\alpha_0| + |\alpha_1| \neq 0.$$

Если область ограничена, то задачу называют внутренней, иначе – внешней. Для уравнения Лапласа первая краевая задача называется задачей Дирихле, вторая – Неймана и третья – смешанной краевой задачей.

## 2.1 Основные этапы решения двумерных стационарных задач математической физики с помощью МКЭ на основе метода Галеркина

1. Расчетная область  $\bar{\Omega} = \Omega + \Gamma \in R^2$ , которая может быть и многосвязной, разбивается на элементы  $\bar{\Omega}^e = \Omega^e + \Gamma^e$ . Для двумерной расчетной области в качестве конечных элементов принимаются треугольные или четырехугольные элементы. Разбиение на элементы должно удовлетворять условию  $\bigcup_{e=1}^E \bar{\Omega}^e = \bar{\Omega}$ , причем смежные элементы должны иметь общие стороны и общие нумерованные узлы, как показано на рисунке 2.1.

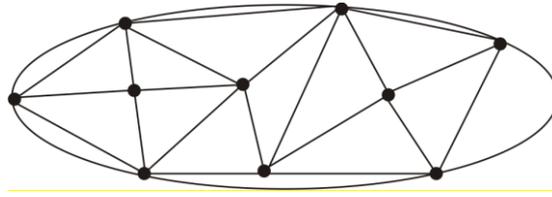


Рис. 2.1. Разбиение двумерной расчетной области.

2. В нумерованных узлах фиксируются узловые значения искомой функции, являющиеся неизвестными величинами, подлежащими определению.

3. С помощью узловых значений в нумерованных узлах элемента искомая функция аппроксимируется поверхностью, называемой функцией элемента, позволяющей определить искомую функцию в любой точке конечного элемента. При этом если количество нумерованных узлов элемента на единицу больше размерности пространства  $R^n$ , то элемент называется *линейным*. Если в элементе число нумерованных узлов больше чем  $n + 1$ , то этот элемент называется *нелинейным*, а искомая функция на нем аппроксимируется с помощью нелинейной функции.

4. Каждому нумерованному узлу расчетной области  $\Omega + \Gamma$  приписывается базисная функция, равная единице в узле, которому она приписывается, и нулю во всех остальных узлах расчетной области. Базисные функции для различных нумерованных узлов являются линейно независимыми.

5. Приближенное решение задачи формируется в виде линейной комбинации базисных функций по всем нумерованным узлам расчетной области с коэффициентами линейной комбинации, равными узловым значениям искомой функции.

6. Это решение подставляется в дифференциальную задачу, что приводит к невязкам по расчетной области  $R_\Omega$  и на границе  $R_\Gamma$ .

7. В соответствии с различными методами взвешенных невязок, невязки ортогонализируются с системой весовых функций. В итоге получим глобальную (СЛАУ) относительно узловых значений искомой функции. Число уравне-

ний в этой системе совпадает с количеством нумерованных узлов расчетной области.

8. Решая полученную глобальную СЛАУ, получаем узловые значения искомой функции, с помощью которых из функций элементов определяются значения искомой функции в любых точках конечных элементов.

## 2.2 Принципы разбиения плоских областей на конечные элементы

Будем разбивать плоскую расчетную область  $\Omega + \Gamma \in R^2$  на треугольные конечные элементы, номер элемента обозначим верхним индексом  $e$ , а локальные номера узлов в элементе – нижними индексами  $i, j, k$ , если зафиксирован какой-либо узел под номером  $i$ , то остальные узлы под номерами  $j, k$  нумеруются против часовой стрелки.

Перечислим основные принципы разбиения плоских расчетных областей.

1. Сложные плоские области вначале разбивают на подобласти, которые затем разбивают на конечные элементы.

2. При разбиении на конечные элементы тонкостенных областей каждый конечный элемент должен содержать как минимум один нумерованный узел, находящийся внутри расчетной области, так как если все нумерованные узлы расположены на границе расчетной области, то при аппроксимации учитываются только граничные условия и не учитывается дифференциальное уравнение.

3. Глобальную нумерацию узлов в расчетной области необходимо осуществлять таким образом, чтобы в отдельном конечном элементе разность между максимальным и минимальным номерами была как можно меньше, так как от этой разницы зависит полуширина  $b$  ленты матрицы в глобальной матрице, представленной на рисунке 2.2. Чем меньше полуширина  $b$  ленточной матрицы, тем устойчивее решение СЛАУ.

$$\begin{bmatrix}
 a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & 0 & 0 & \dots & 0 \\
 a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 & a_{25} & 0 & \dots & 0 \\
 a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} & 0 & \dots & 0 \\
 0 & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} & 0 & \dots & 0 \\
 0 & a_{52} & a_{53} & a_{45} & a_{55} & 0 & \dots & 0 \\
 0 & 0 & 0 & a_{46} & 0 & a_{66} & \dots & a_{6M} \\
 \vdots & \vdots \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{M6} & \dots & a_{MM}
 \end{bmatrix}$$

Рис. 2.2. Вид ленточной матрицы глобальной системы линейных алгебраических уравнений.

4. В многосвязных областях внутренние полости вписывают в многоугольниках, в вершины которых помещают нумерованные узлы.

### 2.3 Аппроксимация линейными многочленами и базисные функции

Применение метода конечных элементов рассмотрим на примере следующей третьей краевой задачи для уравнения Пуассона в области, представленной на рисунке 2.3.

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \lambda(x, y) \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \lambda(x, y) \frac{\partial u}{\partial y} \right) = f(x, y), \quad (x, y) \in \Omega,$$

$$\lambda(x, y) \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{\Gamma} + \alpha u \Big|_{\Gamma} = \varphi(x, y), \quad (x, y) \in \Gamma.$$

Каждому нумерованному узлу приписывается базисная функция  $N_m(x, y)$  в виде линейного многочлена, значение которого равно единице в узле, которому она приписана, и нулю – во всех остальных узлах расчетной области.

$$N_i^e(x, y) = \alpha_i^e + \beta_i^e x + \gamma_i^e y, \tag{2.6}$$

где коэффициенты  $\alpha_i^e, \beta_i^e, \gamma_i^e$  вычисляются следующим образом:

$$\alpha_i^e = \frac{1}{2\Delta^e} (x_j y_k - x_k y_j), \quad \beta_i^e = \frac{1}{2\Delta^e} (y_j - y_k), \quad \gamma_i^e = \frac{1}{2\Delta^e} (x_k - x_j),$$

площадь элемента  $\Delta^e = \frac{1}{2} \det \begin{bmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_k & y_k \end{bmatrix}$ .

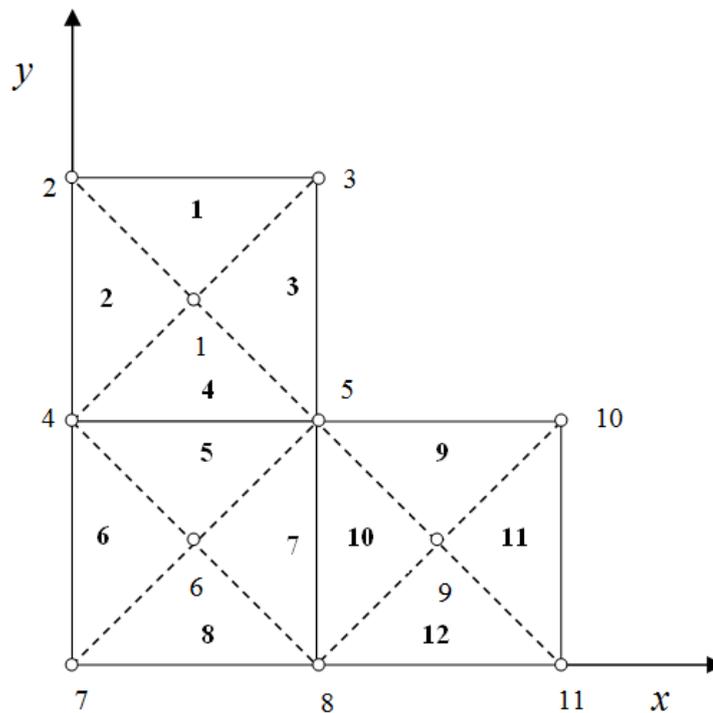


Рис. 2.3. Расчетная область.

Для остальных узлов  $j$  и  $k$  конечного элемента  $e$  базисные функции  $N_j^e(x, y)$  и  $N_k^e(x, y)$  формируются аналогично.

Приближенное решение задачи (2.4), (2.5) находится в виде линейной комбинации базисных функций, коэффициентами которой являются значения искомой функции в нумерованных узлах, т. е. в форме

$$u(x, y) \approx \hat{u}(x, y) = \sum_{m=1}^M u_m N_m(x, y), \quad (2.7)$$

где  $M$  – число нумерованных узлов.

Для отдельного элемента  $e$  решение (35) представляется в виде

$$u^e(x, y) = u_i^e(x, y) N_m^e(x, y) + u_j^e(x, y) N_j^e(x, y) + u_k^e(x, y) N_k^e(x, y) \quad (2.8)$$

и называется функцией элемента.

## 2.4 Слабая формулировка конечно-элементного метода Галеркина

Если подставить приближенное решение (2.7) в дифференциальную задачу (2.4), (2.5), то результатом будет некоторая функциональная невязка  $R_{\Omega}(x, y)$  по расчетной области  $\Omega$  и невязка  $R_{\Gamma}(x, y)$  – по границе  $\Gamma$ :

$$R_{\Omega}(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} \left( \lambda \frac{\partial \hat{u}}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \lambda \frac{\partial \hat{u}}{\partial y} \right) - f(x, y),$$

$$R_{\Gamma}(x, y) = \lambda \frac{\partial \hat{u}}{\partial n} \Big|_{\Gamma} + \alpha \hat{u} \Big|_{\Gamma} - \varphi(x, y).$$

В соответствии с методами взвешенных невязок требуем ортогональности этих функциональных невязок и специальным образом подобранных весовых функций  $W_s(x, y)$ ,  $s = \overline{1, M}$ , для невязки  $R_{\Gamma}(x, y)$ :

$$\begin{aligned} (R_{\Omega}, W_s) + (R_{\Gamma}, \overline{W}_s) = \\ = \iint_{\Omega} \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( \lambda \frac{\partial \hat{u}}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \lambda \frac{\partial \hat{u}}{\partial y} \right) - f(x, y) \right] W_s(x, y) dx dy + \\ + \int_{\Gamma} \left[ \lambda \frac{\partial \hat{u}}{\partial n} \Big|_{\Gamma} + \alpha \hat{u} \Big|_{\Gamma} - \varphi(x, y) \right] \overline{W}_s d\Gamma = 0, s = \overline{1, M}, \end{aligned} \quad (2.9)$$

где  $W_s(x, y)$  – весовые функции для внутренних узлов расчетной области, а  $\overline{W}_s(x, y)$  – весовые функции для граничных узлов расчетной области,  $s = \overline{1, M}$ . В соответствии с методом Галеркина взвешенных невязок весовые функции равны базисным:  $W_s = N_s$ ,  $\overline{W}_s = \overline{N}_s$ .

Для ослабления гладкой подынтегральных функций в (2.9) используем первую функцию Грина, в результате получим:

$$\int_{\Omega} \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( \lambda \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \lambda \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right] dx dy = - \int_{\Omega} \left[ \frac{\partial v}{\partial x} \lambda \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \lambda \frac{\partial u}{\partial y} \right] dx dy + \int_{\Gamma} v \lambda \frac{\partial u}{\partial n} d\Gamma.$$

Слабая формулировка конечно-элементного метода Галеркина:

$$\sum_{m=1}^M u_m \left\{ - \int_{\Omega} \left[ \frac{\partial N_s}{\partial x} \lambda \frac{\partial N_m}{\partial x} + \frac{\partial N_s}{\partial y} \lambda \frac{\partial N_m}{\partial y} \right] dx dy + \right.$$

$$\begin{aligned}
& \left. + \int_{\Gamma} N_s \lambda \frac{\partial N_m}{\partial n} d\Gamma + \int_{\Gamma} \overline{N}_s \lambda \frac{\partial N_m}{\partial n} d\Gamma + \int_{\Gamma} \overline{N}_s \alpha N_m d\Gamma \right\} = \\
& = \int_{\Omega} f(x, y) N_s dx dy + \int_{\Gamma} \overline{N}_s \varphi(x, y) d\Gamma, \quad s = \overline{1, M}. \quad (2.10)
\end{aligned}$$

Весовые функции  $\overline{N}_s$  на границе  $\Gamma$  можно выбрать таким образом, чтобы криволинейные интегралы по границе сократились, т.е. принять  $\overline{N}_s = -\overline{N}_s$ . Тогда выражение примет вид

$$\begin{aligned}
& \sum_{m=1}^M u_m \left\{ \int_{\Omega} \left[ \frac{\partial N_s}{\partial x} \lambda \frac{\partial N_m}{\partial x} + \frac{\partial N_s}{\partial y} \lambda \frac{\partial N_m}{\partial y} \right] dx dy + \alpha \int_{\Gamma} N_s N_m d\Gamma \right\} \\
& = - \int_{\Omega} f(x, y) N_s dx dy + \int_{\Gamma} N_s \varphi(x, y) d\Gamma, \quad s = \overline{1, M}. \quad (2.11)
\end{aligned}$$

Выражения (2.11) – это неоднородная система линейных алгебраических уравнений порядка  $M$ , которая в векторной форме имеет вид

$$Au = F, \quad (2.12)$$

где элементы  $a_{sm}$  матрицы  $A$  и правых частей  $F$  образованы суммированием вкладов отдельных конечных элементов:

$$a_{sm} = \sum_{e=1}^E a_{sm}^e, \quad F_s = \sum_{e=1}^E F_s^e.$$

Локальная СЛАУ имеет вид:

$$A^e u^e = F^e, \quad (2.13)$$

где  $A^e = [a_{sm}^e]$ ,  $F^e = [f_s^e]$ ,  $s = i, j, k$ ;  $m = i, j, k$ .

Элементы  $a_{sm}^e$  вычисляются следующим образом

$$a_{sm}^e = \iint_{\Omega^e} \left( \frac{\partial N_s^e}{\partial x} \lambda \frac{\partial N_m^e}{\partial x} + \frac{\partial N_s^e}{\partial y} \lambda \frac{\partial N_m^e}{\partial y} \right) dx dy + \alpha \int_{\Gamma^e} N_s^e N_m^e d\Gamma. \quad (2.14)$$

Компоненты вектора  $F_s^e$ :

$$F_s^e = \int_{\Gamma^e} N_s^e \varphi^e(x, y) d\Gamma - \iint_{\Omega^e} f^e(x, y) N_s^e dx dy, \quad s = i, j, k \quad (2.15)$$

При вычислении двойных интегралов в выражениях (2.14), (2.15) используются базисные функции и теорема о среднем

$$\iint_{\Omega^e} \left( \frac{\partial N_s^e}{\partial x} \lambda \frac{\partial N_m^e}{\partial x} + \frac{\partial N_s^e}{\partial y} \lambda \frac{\partial N_m^e}{\partial y} \right) dx dy = \lambda_{cp}^e (\beta_s^e \beta_m^e + \gamma_s^e \gamma_m^e) \Delta^e, \quad s, m = i, j, k, \quad (2.16)$$

$$\iint_{\Omega^e} f^e(x, y) N_s^e dx dy = f_{cp}^e \frac{1}{3} \Delta^e, \quad s = i, j, k, \quad (2.17)$$

где  $\lambda_{cp}^e = \lambda(x^*, y^*)$ ,  $f_{cp}^e = f(x^*, y^*)$ ,  $x^* = \frac{1}{3}(x_i + x_j + x_k)$ ,  $y^* = \frac{1}{3}(y_i + y_j + y_k)$ ,

$\Delta^e$  – площадь треугольного элемента,  $\beta_s^e, \gamma_s^e$  – коэффициенты в базисных функциях (2.6).

Криволинейные интегралы равны:

$$\int_{\Gamma^e} N_s^e N_m^e d\Gamma = \frac{1}{3} \sqrt{(x_k - x_i)^2 + (y_k - y_i)^2}, \quad s = m, \quad (2.18)$$

$$\int_{\Gamma^e} N_s^e N_m^e d\Gamma = \frac{1}{6} \sqrt{(x_k - x_i)^2 + (y_k - y_i)^2}, \quad s \neq m, \quad (2.19)$$

$$\int_{\Gamma^e} N_s^e \varphi^e(x, y) d\Gamma = \varphi(x^*, y^*) \frac{1}{2} \sqrt{(x_k - x_i)^2 + (y_k - y_i)^2}, \quad (2.20)$$

где  $x^* = \frac{1}{2}(x_i + x_k)$ ,  $y^* = \frac{1}{2}(y_i + y_k)$ ,  $\varphi_{cp}^e = \varphi(x^*, y^*)$ .

Таким образом, в соответствии с выражениями (2.16)-(2.20) локальная матрица  $A^e$  и вектор правых частей  $F^e$  СЛАУ для конечного элемента  $\bar{\Omega}^e = \Omega^e + \Gamma^e$  имеют вид

$$A^e = \lambda_{cp}^e \Delta^e \begin{bmatrix} (\beta_i^e)^2 + (\gamma_i^e)^2 & \beta_i^e \beta_j^e + \gamma_i^e \gamma_j^e & \beta_i^e \beta_k^e + \gamma_i^e \gamma_k^e \\ \beta_j^e \beta_i^e + \gamma_j^e \gamma_i^e & (\beta_j^e)^2 + (\gamma_j^e)^2 & \beta_j^e \beta_k^e + \gamma_j^e \gamma_k^e \\ \beta_k^e \beta_i^e + \gamma_k^e \gamma_i^e & \beta_k^e \beta_j^e + \gamma_k^e \gamma_j^e & (\beta_k^e)^2 + (\gamma_k^e)^2 \end{bmatrix} + \frac{\alpha}{3} \sqrt{(x_k - x_i)^2 + (y_k - y_i)^2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (2.21)$$

$$F^e = \begin{bmatrix} \varphi_{cp}^e \frac{1}{2} \sqrt{(x_k - x_i)^2 + (y_k - y_i)^2} - f_{cp}^e \Delta^e / 3 \\ - f_{cp}^e \Delta^e / 3 \\ \varphi_{cp}^e \frac{1}{2} \sqrt{(x_k - x_i)^2 + (y_k - y_i)^2} - f_{cp}^e \Delta^e / 3 \end{bmatrix}. \quad (2.22)$$

Если конечные элементы ни одной гранью не выходят на границу области  $\Gamma$ , то соответствующие криволинейные интегралы равны нулю.

## 2.5 Ансамблирование элементов и построение глобальной СЛАУ

Для построения глобальной матрицы жесткости  $A$  и вектора правых частей  $F$  системы (2.12) необходимо локальным номерам узлов  $i, j, k$  каждого элемента поставить в соответствие глобальные номера узлов  $m$ ,  $m = \overline{1, M}$ . В глобальной матрице  $A$  ненулевые элементы локальной матрицы  $A^e$  становятся на места, определяемые глобальными номерами узлов элемента  $\Omega^e$ . Аналогично для вектора правых частей  $F$ .

Затем расширенные таким образом матрицы и векторы правых частей всех конечных элементов складываются, в результате чего получаем глобальную матрицу  $A$  и вектор правых частей  $F$ , или глобальную СЛАУ (2.12).

Такой процесс объединения локальных СЛАУ для конечных элементов в глобальную СЛАУ называется *ансамблированием* конечных элементов.

Для рассматриваемого примера  $M = 11$ . Тогда, например, для элемента с номером 4  $i = 1, j = 4, k = 5$ . Локальная матрица элемента 4, примет вид

$$A^4 = \begin{bmatrix} a_{ii}^4 & a_{ij}^4 & a_{ik}^4 \\ a_{ji}^4 & a_{jj}^4 & a_{jk}^4 \\ a_{ki}^4 & a_{kj}^4 & a_{kk}^4 \end{bmatrix},$$

преобразуется в расширенную матрицу  $A_{pac}^4$  размера  $11 \times 11$  следующим образом:

$$A_{pac}^4 = \begin{bmatrix} a_{11}^4 & 0 & 0 & a_{14}^4 & a_{15}^4 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{41}^4 & 0 & 0 & a_{44}^4 & a_{45}^4 & 0 & \dots & 0 \\ a_{51}^4 & 0 & 0 & a_{54}^4 & a_{55}^4 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

Аналогично вектор правых частей  $F^4 = [F_i^4, F_j^4, F_k^4]^T$  локальной системы

(41) преобразуется в расширенный вектор с одиннадцатью компонентами:

$$F_{pac}^4 = [F_1^4 \ 0 \ 0 \ F_4^4 \ F_5^4 \ 0 \ \dots \ 0]^T.$$

Результирующую СЛАУ (2.12) можно решить одним из известных методов, а значения искомой функции во внутренних точках конечного элемента определяются по узловым значениям с помощью функции элемента.

### **3 РЕШЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ СРЕДЫ PDETOOL MATLAB**

МКЭ одним из наиболее распространенных и эффективных расчетных методом, который используется в системах инженерного анализа для решения дифференциальных задач. Системы, использующие в качестве численного анализа объектов МКЭ, также называют FEA-системами (Finite Element Analysis).

В числе наиболее известных программных продуктов, представляющих семейство FEA-систем можно выделить: FlexPDE, ANSYS, COMSOL Multiphysics, Autodesk Nastran. ППП Matlab также имеет встроенный инструментарий для решения прикладных задач тепломассопереноса, теплопроводности, механики, течения жидкости, электростатики и электродинамики, формализуемых в виде начально-граничных и краевых задач для уравнений с частными производными. Partial Differential Equations Toolbox (PDE Toolbox) позволяет построить численное решение начально-граничных и краевых задач для дифференциальных уравнений в частных производных в двумерных областях на основе МКЭ. Среда pdetool отличается относительной простотой пользовательского интерфейса, который позволяет инициализировать геометрию расчетной области, определить тип и задать коэффициенты дифференциальной задачи, специфицировать граничные и начальные условия, провести разбиение расчетной области на конечные элементы и, далее, численно решить итоговую СЛАУ и представить в различных вариантах результат моделирования. В связи с чем, именно приложение PDE Toolbox Matlab является оптимальным вариантом для получения первого опыта работы с системами конечно-элементного моделирования.

#### **3.1 Реализация модели процесса стационарной теплопроводности в PDETOOL Matlab**

Рассмотрим основные приемы работы с инструментарием pdetool на примере моделирования процесса стационарной теплопроводности. Пусть необхо-

димом найти установившееся пространственное распределение температуры  $T$  в прямоугольнике определённого геометрического размера (10 усл.ед.  $\times$  5 усл.ед.) с отверстием заданного радиуса в центре. Будем также полагать, что тепловые источники в объекте отсутствуют. Верхняя и нижняя границы теплоизолированы, на левой границе задан поток тепла  $q=-200$  усл.ед, в то время как на правой границе поддерживается постоянная температура 350 усл.ед, а на границе, заданной окружностью радиуса 2, поддерживается постоянная температура 500 усл.ед. Коэффициент теплопроводности материала объекта равен  $k_T=1$  усл.ед.

Сформулируем математическую постановку задачи моделирования в виде краевой задачи для уравнения эллиптического типа:

$$\Delta T(x, y) = 0, \quad (4.1)$$

для области, изображенной на рисунке 3.1.

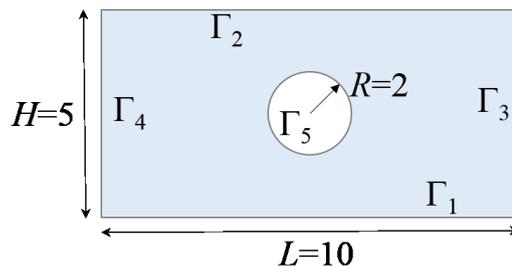


Рис. 3.1. Геометрическая схема объекта и обозначение его границ.

Зададим граничные условия:

$$\left. \frac{\partial T}{\partial \mathbf{n}} \right|_{\Gamma_1, \Gamma_2} = 0, \quad k_T \left. \frac{\partial T}{\partial \mathbf{n}} \right|_{\Gamma_4} = -200, \quad T_{\Gamma_3} = 350, \quad T_{\Gamma_5} = 500. \quad (4.2)$$

Задача (4.1)-(4.2) является смешанной краевой задачей для уравнения Лапласа.

Для перехода в интерфейс работы приложения PDETOOL Matlab необходимо выполнить в окне команд вызов `pdeplot`. Общий вид главного окна приложения приведен на рисунке 3.2.

Начало работы соответствует режиму Draw mode, который предназначен для геометрической визуализации расчетной области. Построим прямоугольник

заданного размера, используя диалоговое окно Object Dialog, как отражено на рисунке 3.3 а (объект R1).

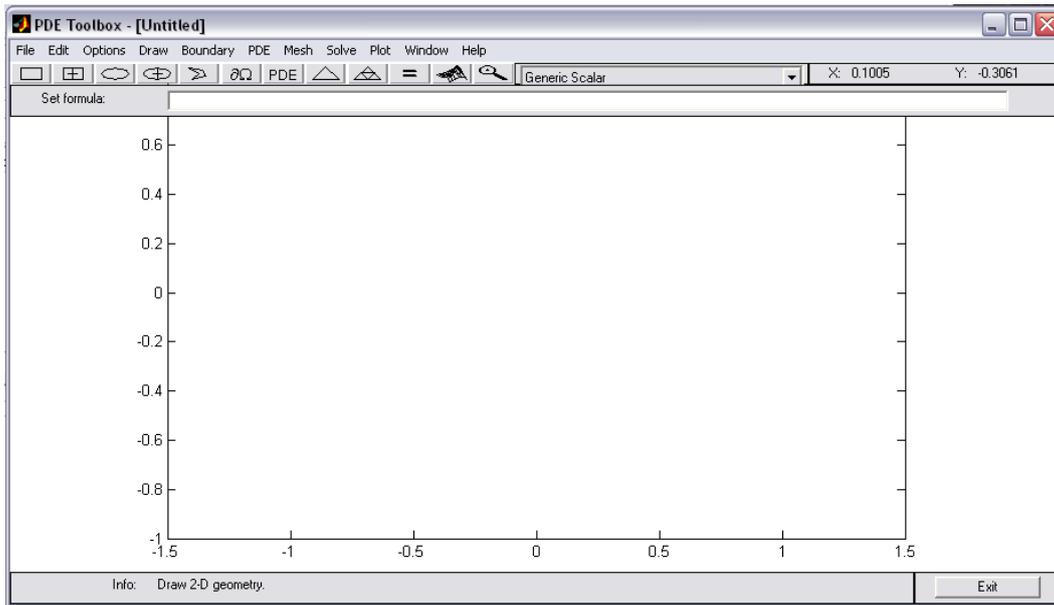
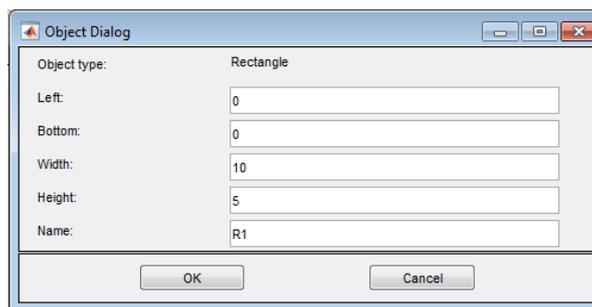
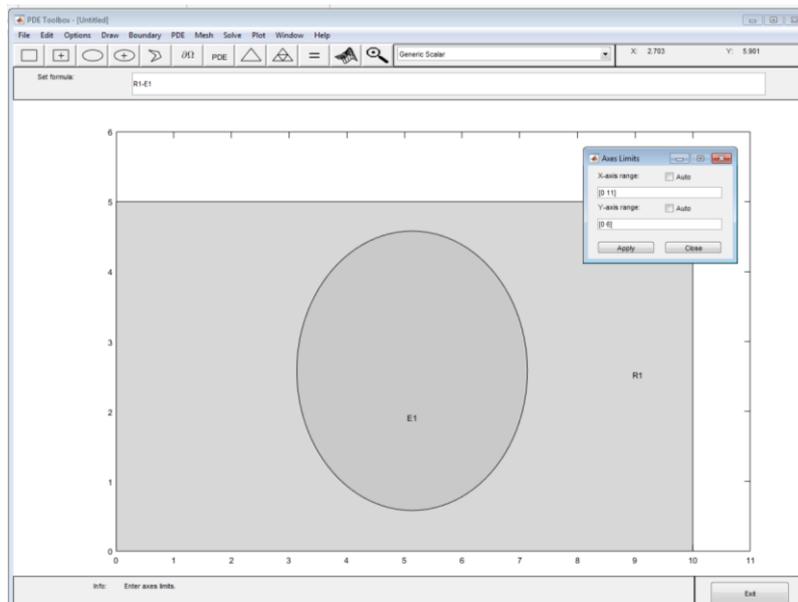


Рис. 3.2. Командное окно PDETOOL Matlab.



а



б

Рис. 3.3. Диалоговое окно Object Dialog – а и результат построения геометрического примитива – б.

В этом окне пользователь должен инициализировать положение нижнего левого угла прямоугольника, а также его высоту и ширину. Далее используя пункт *Ellipse/circle* меню *Draw mode* построим окружность (объект E1) с центром в точке (5,2.5) и радиусом 2. Для удаления круга из прямоугольной области воспользуемся простейшими булевыми операциями. В окне *Set Formula* установим значение  $R1-E1$ , которое будет соответствовать вычитанию множеств. Результат построения геометрического примитива в *Draw Mode* продемонстрирован на рисунке 3.3 б.

Далее перейдем к заданию математической модели – уравнения Лапласа и граничных условий. В меню *Options* необходимо выбрать пункт *Application*, в котором перечислены типы представленных в *PDE tool* прикладных задач. Также для выбора типа решаемой задачи можно воспользоваться окном, размещенным на панели инструментов. В нашем случае установим тип решаемой задачи – *Heat Transfer* (модель распространения тепла).

Перейдем в режим работы с уравнением с частными производными с помощью пункта *PDE Mode* в меню *PDE*. Далее выберем пункт *PDE Specification*. Диалоговое окно представлено на рисунке 3.4.

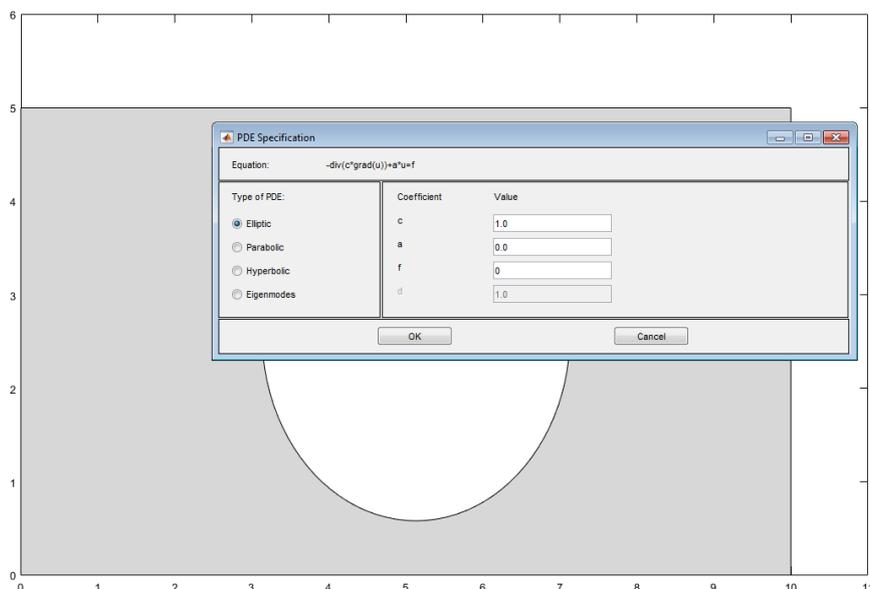


Рис. 3.4. Диалоговое окно PDE Specification.

В левой части диалогового окна можно выбрать тип уравнения:

Левая панель служит для выбора типа уравнения: для моделирования стационарного распределения тепла необходимо установить значение Elliptic (эллиптические уравнения), а для решения нестационарной задачи – Parabolic (уравнения параболического типа). Определим значение коэффициента теплопроводности  $k_T=1$  (в интерфейсе параметр обозначен как  $c$ ) и значение функции источника  $f=0$  в соответствии с математической постановкой задачи (3.1)-(3.2), как показано на рисунке 3.4.

Для инициализации краевых условий воспользуемся подменю Boundary Mode меню Boundary. Поскольку нами рассматривается решение смешанной краевой задачи, задание граничных условий рассмотрим отдельно для каждой из пяти границ. Выделим границу, соответствующую окружности, используя клавишу shift и выделяя мышью части границы круга, дальнейшее двойное нажатие мышью приведет к открытию диалогового окна. На рисунке 3.5 показано задание граничных условий первого рода (или условий Дирихле) для границы  $\Gamma_5$  расчетной области.

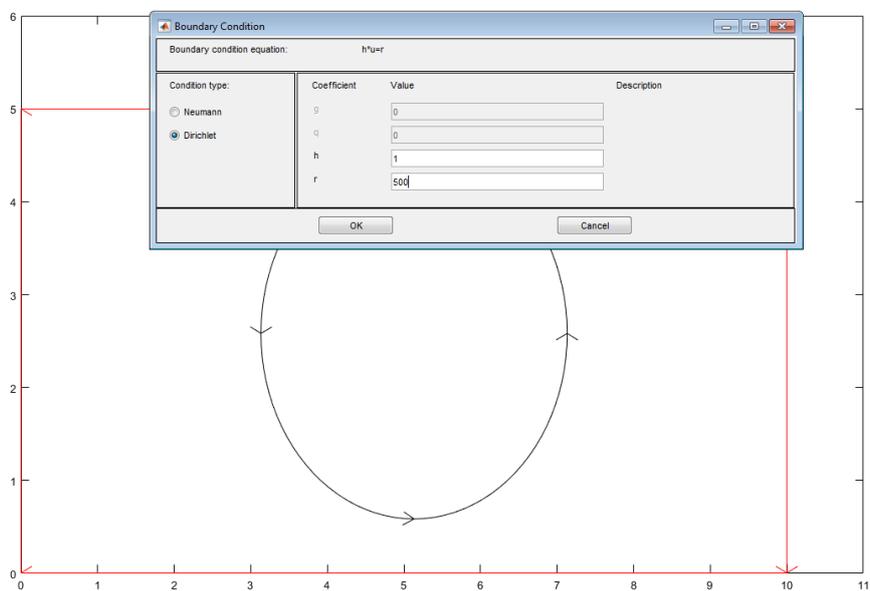


Рис. 3.5. Диалоговое окно Boundary Condition (задание граничных условий I рода).

Аналогично установим граничное условие на границе  $\Gamma_3$  расчетной области. Остальные граничные условия нашей задачи (3.2) являются условиями II

рода (или условиями Неймана). Выделим сразу две границы  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$  и установим нулевое значение потока тепла на этих границах. Обратите внимание, что границы с заданными условиями Неймана подсвечиваются синим цветом.

На рисунке 3.6 показано диалоговое окно для установления граничного условия Неймана на границе  $\Gamma_4$ .

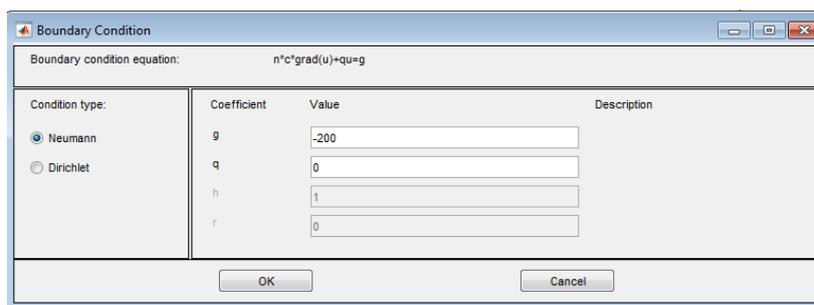


Рис. 3.6. Диалоговое окно Boundary Condition (граничное условие Неймана).

Данный пункт заканчивает задание математической модели в системе. Далее необходимо перейти к решению и визуализации результата. Поскольку PDE tool – это система конечно-элементного моделирования, то для решателя требуется задание разбиения области на конечные элементы. Стандартный конечный элемент PDE tool – это треугольник, отсюда и название этой процедуры – триангуляция расчетной области (рисунок 3.7).

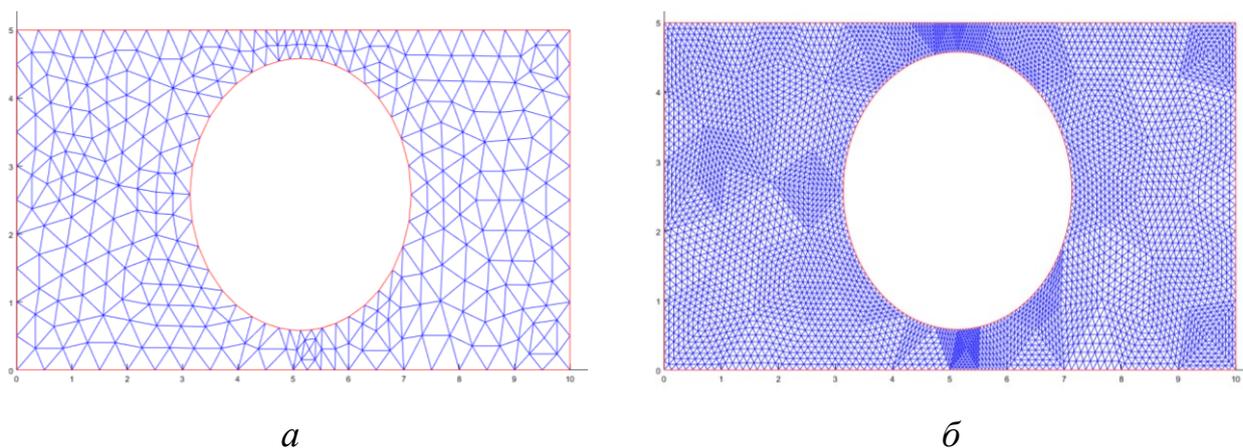


Рис. 3.7. Триангуляция расчетной области с учетом уменьшения размера конечного элемента

Для того, чтобы выполнить разбиение, необходимо выбрать меню Mesh Mode, при этом объект будет разбит на очень крупные конечные элементы (рисунок 3.7 а). Чтобы получить решение с приемлемой точностью, необходимо уменьшить размер конечного элемента используя кнопку панели инструментов или пункт Refine Mesh меню Mesh Mode (рисунок 3.7 б).

Решение задачи на расчетной сетке производится выбором пункта Solve PDE меню Solve. Найденное распределение температуры отображается в окне среды pdetool контурным графиком с цветовой заливкой, рядом с которым расположен столбик с информацией о соответствии цвета значению температуры, как представлено на рисунке 3.6.

Инструментарий PDE tool выполняет сложную процедуру построения аппроксимации, ансамблирования конечных элементов и решения полученной СЛАУ численным методом. Для этого пользователю достаточно активизировать пункт SolvePDE меню Solve. Результат решения задачи (3.1)-(3.2) показан на рисунке 3.8.

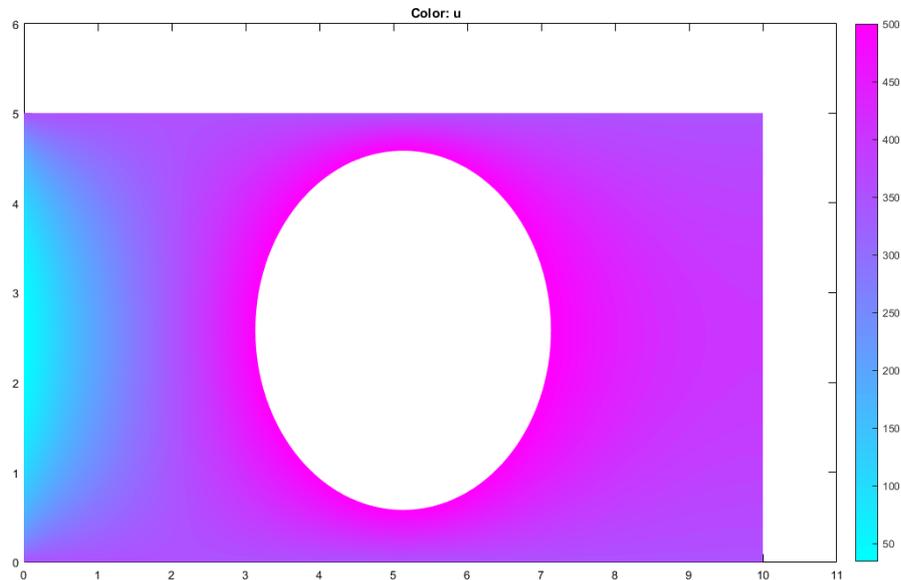


Рис. 3.8. Графическое представление решения в двумерной области.

Для вариации вида графического представления результата воспользуемся пунктом PlotSelection меню Plot, как показано на рисунке 3.9. Установим визуализацию графика в формате 3D и выберем цветовую панель jet.

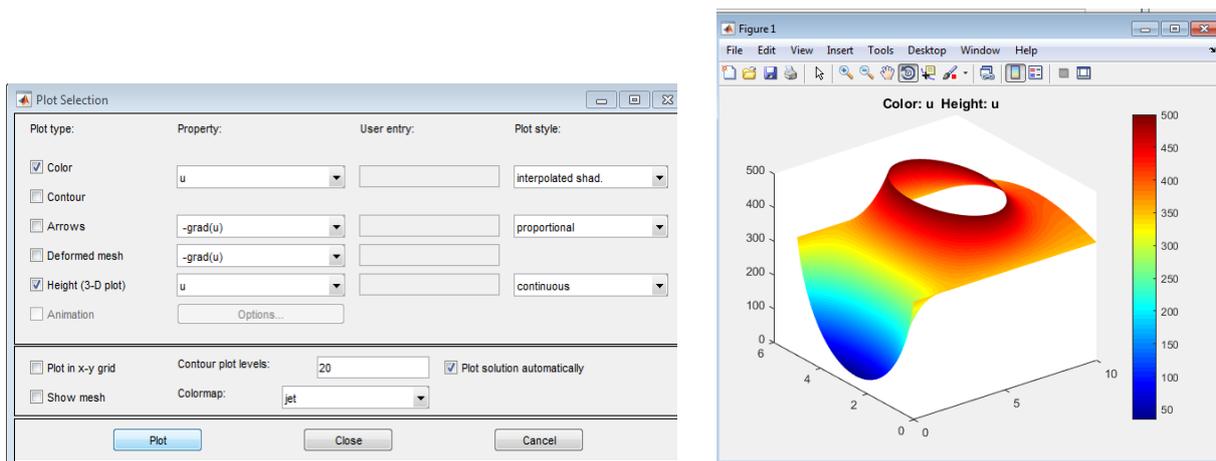


Рис. 3.9. Пространственная визуализация решения задачи (3.1)-(3.2).

### 3.2 Моделирование нестационарных процессов с использованием PDETOOL Matlab

Инструментарий PDE tool Matlab позволяет моделировать эволюционные задачи математической физики, формализованных в виде начально-граничных задач для уравнений в частных производных (уравнений параболического и гиперболического типов).

Уравнение параболического типа в PDE tool Matlab задается в форме:

$$d \frac{\partial U}{\partial t} - \nabla(c \nabla U) + aU = f,$$

а уравнение гиперболического типа

$$d \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} - \nabla(c \nabla U) + aU = f.$$

Параметры  $d$ ,  $c$ ,  $a$ ,  $f$  могут быть зависимыми от переменных  $x$  и  $y$  и от времени  $t$ .

Задание уравнения осуществляется с помощью диалогового окна PDE Specification, в котором необходимо установить нужный вид уравнения с частными производными. Эволюционная задача предполагает задание начального условия. В PDE tool для этого необходимо выбрать Parameters в меню Solve. В диалоговом окне Solve Parameters пользователю необходимо ввести вектор моментов времени, для которых будут проводится вычисления, а также начальное

значение (или распределение) температуры (в общем случае заданное функцией пространственных координат).

Краевые условия определяются как условия Дирихле (I рода) или Неймана (II или III рода) аналогично стационарной задаче.

Можно отметить, что инструментарий `pdeTool` позволяет строить решение только для ограниченной расчетной области. По умолчанию пользователь будет наблюдать решение задачи, визуализированное для последнего момента времени наблюдения процесса. Для того, что наблюдать или фиксировать анимацию можно использовать отдельное графическое окно. Для этого требуется установить в диалоговом окне `Plot Selection` опцию для `Animation` и активизировать пункт `Options` для определения параметров анимированных результатов. В диалоговом окне `Animation Options` необходимо задать число кадров в секунду `Animation Rate (fps)` и число повторов анимации `Number of repeats`.

### ***Контрольные вопросы***

1. Назовите основные шаги алгоритма решения многомерной задачи математической физики МКЭ.
2. Перечислите этапы конечно-элементного моделирования с помощью инструментария `PDE Tool Matlab`.
3. В чем состоит особенность решения нестационарных задач с использованием `PDE Tool Matlab`?
4. Назовите принципы разбиения плоских областей на конечные элементы.
5. Приведите примеры эллиптических, параболических и гиперболических уравнений.

### ***Индивидуальные задания***

1. Определить значение искомой функции, удовлетворяющей уравнению Лапласа  $\Delta U = 0$ , внутри двумерной области, представленной на рисунке 3.10, с указанными в варианте краевыми условиями. Решение уравнения найти, ис-

пользуя, встроенный инструментарий ППП Matlab PDETOOL. Выполнить графическое представление и анализ с полученных результатов. Оформить отчет по лабораторной работе.

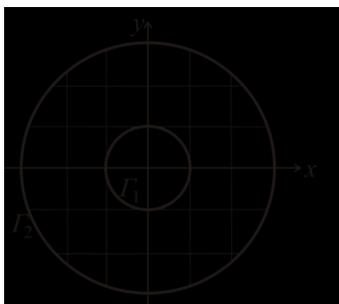


Рис. 3.10. Геометрия расчетной области.

Вариант	Область	Краевые условия
1	$4 \leq x^2 + y^2 \leq 36$	$U _{\Gamma_2} = x^2 + 2y^2, U _{\Gamma_1} = 3$
2		$U _{\Gamma_2} = x^2 \cdot  y  + 5, U _{\Gamma_1} = 0$
3		$U _{\Gamma_1} = 100, \frac{\partial U}{\partial n} _{\Gamma_2} = -10$
4	$2 \leq x^2 + y^2 \leq 16$	$U _{\Gamma_1} = 4, U _{\Gamma_2} = (x+1)^2 \cdot (y+1)^2$
5		$U _{\Gamma_1} = 20, U _{\Gamma_2} =  x  \cdot  y  + 2x^2 y^2$
6		$\frac{\partial U}{\partial n} _{\Gamma_1} = 2, U _{\Gamma_2} = 50$
7	$3 \leq x^2 + y^2 \leq 25$	$U _{\Gamma_1} = 0, U _{\Gamma_2} = (x-1)^2 \cdot (y-1)^2$
8		$U _{\Gamma_1} = 10, U _{\Gamma_2} =  x  \cdot  y  + 25$
9		$U _{\Gamma_1} = 20, \frac{\partial U}{\partial n} _{\Gamma_2} = -1$
10	$9 \leq x^2 + y^2 \leq 100$	$U _{\Gamma_1} = 18, U _{\Gamma_2} =  x  \cdot  y  + 4x^2 y^2$
11		$U _{\Gamma_1} = 2x + y^2, U _{\Gamma_2} = 2x$
12		$\frac{\partial U}{\partial n} _{\Gamma_1} = -3, U _{\Gamma_2} = 10$
13	$25 \leq x^2 + y^2 \leq 81$	$U _{\Gamma_1} = x + y^2, U _{\Gamma_2} = 6x$
14		$U _{\Gamma_1} = 4 \sin(xy), U _{\Gamma_2} =  x  \cdot  y $

Вариант	Область	Краевые условия
15	$25 \leq x^2 + y^2 \leq 36$	$U _{\Gamma_1} = 5, \frac{\partial U}{\partial n} _{\Gamma_2} = 2$
16		$\frac{\partial U}{\partial n} _{\Gamma_1} = 1, U _{\Gamma_2} = x^2 \cdot  y  + 1$
17		$U _{\Gamma_1} = 0, U _{\Gamma_2} =  x  \cdot  y  + 16$
18		$U _{\Gamma_1} = 9, U _{\Gamma_2} = (x-1)^2 \cdot (y-1)^2$
19		$U _{\Gamma_2} = x^2 + 3y^2, U _{\Gamma_1} = 5$
20		$U _{\Gamma_1} = 3, U _{\Gamma_2} = (x+1)^2 \cdot (y+1)^2$

## **4 ОСНОВНЫЕ ПРИЕМЫ РАБОТЫ В СРЕДЕ КОНЕЧНО-ЭЛЕМЕНТНОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ COMSOL MULTIPHYSICS**

### **4.1 Введение в COMSOL Multiphysics**

COMSOL Multiphysics – это основанная на передовых численных методах универсальная программная платформа для моделирования и компьютерного моделирования физических задач. COMSOL представляет мощную интерактивную среду для моделирования и расчетов научных и инженерных задач, математические модели которых записываются в форме краевых и/или начально-граничных задач для дифференциальных уравнений в частных производных (PDE). Для решения PDE COMSOL Multiphysics использует метод конечных элементов (FEM).

Поскольку многие физические законы выражаются в форме PDE, программа позволяет решать широкий спектр научных и инженерных задач из многих прикладных областей: тепломассоперенос, диффузия, электромагнетизм, гидродинамика, акустика, химические реакции, фильтрация, оптика, квантовая механика, полупроводниковые устройства, сопротивление материалов и др.

Использование пакета COMSOL Multiphysics позволяет учитывать связанные или «мультифизические» явления. Более 30 дополнительных продуктов позволяют расширять платформу моделирования, используя специальные физические интерфейсы и инструменты для электрических, механических, гидродинамических и химических систем. Дополнительные интерфейсы обеспечивают использование моделирования в пакете COMSOL Multiphysics при технических вычислениях, САПР и автоматизации проектирования электронных приборов. В состав пакета COMSOL Multiphysics® входит среда разработки приложений, с помощью которой можно создавать удобные пользовательские интерфейсы, которые сделают математическое моделирование доступным коллегам, партнерам и клиентам вашей организации. Взаимодействие с програм-

мой возможно стандартным способом – через графический интерфейс пользователя (GUI), либо программированием с помощью скриптов на языке COMSOL Script или языке MATLAB.

В COMSOL приняты следующие три основные математические способа формализованного представления математической модели:

- коэффициентная форма, предназначенная для линейных и близких к линейным моделей;
- генеральная форма, для нелинейных моделей;
- слабая форма (weak form), для моделей с PDE на границах, ребрах или для моделей, использующих условия со смешанными и производными по времени.

Программное обеспечение запускает конечно-элементный анализ вместе с сеткой, учитывающей геометрическую конфигурацию тел, и контролем ошибок с использованием разнообразных численных решателей.

Для создания и расчета задачи рекомендуется следующая последовательность действий.

1. Выбираем размерность модели, определяем физический раздел в Навигаторе моделей (Model Navigator)(каждому разделу соответствует определенное дифференциальное уравнение) и определяем стационарный или нестационарный анализ температурного поля.

2. Определяем рабочую область и задаем геометрию

3. Задаём исходные данные, зависимости переменных от координат и времени

4. Указываем теплофизические свойства и начальные условия

5. Указываем граничные условия

6. Задаём параметры и строим сетку

7. Определяем параметры решающего устройства и запускаем расчет.

8. Настраиваем режим отображения.

9. Получаем результаты.

## 4.2 Реализация модели с помощью мастера создания моделей

Работа в COMSOL начинается с создания модели при помощи Мастера создания моделей (Model Wizard) или на основе Шаблона-бланка новой модели (Blank Model), в соответствии с рисунком 4.1:

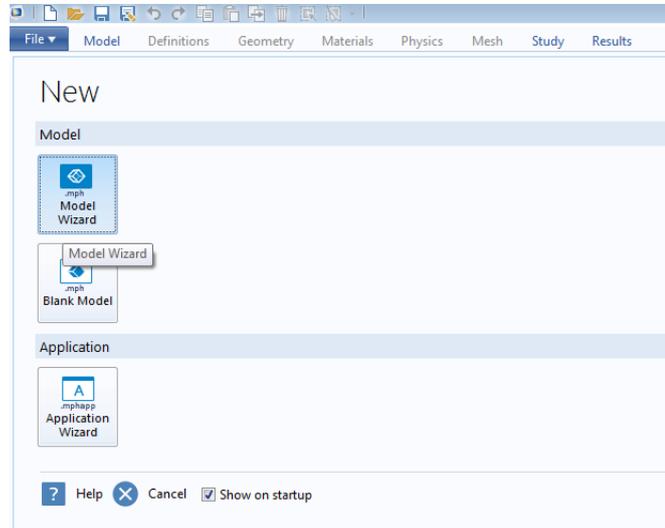


Рис. 4.1. Создание модели в COMSOL.

Демонстрацию возможностей создания новой модели на первом этапе проведем с помощью Мастера создания моделей на примере решения простейшей задачи о стационарном распределении температуры в отсутствии тепловых источников в образце алюминия, представляющего собой параллелепипед с линейными размерами  $L=1$  см. Будем считать, что на верхней и нижней грани объекта отсутствует теплообмен с окружающей средой, а на противоположных боковых поверхностях поддерживается постоянная температура 350 К и 500 К.

Запишем для определенности математическую постановку задачи моделирования:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0, \quad (4.1)$$

где  $T(x,y,z)$  – искомое распределение температуры в объекте, К.

Граничные условия определим в виде:

$$k_T \frac{\partial T}{\partial n} \Big|_{\Gamma_1} = 0 \text{ на верхней и нижней грани } \Gamma_1 \text{ объекта,} \quad (4.2)$$

$$T|_{\Gamma_2} = 350 \text{ К и на боковой поверхности } \Gamma_2 \text{ объекта } (y=0, y=L),$$

$$T|_{\Gamma_2} = 500 \text{ К и на боковой поверхности } \Gamma_2 \text{ объекта } (x=0, x=L). \quad (4.3)$$

Сервис Мастера создания моделей позволяет задать размерность задачи, класс физического объекта моделирования и режим наблюдения процесса за несколько простых шагов.

**Шаг 1.** Выберем координатную размерность задачи для нашей модели, как представлено на рисунке 4.2:

- 3D (трехмерное),
- 2D Axisymmetric (двумерное аксиально-симметричное),
- 2D (Двумерное),
- 1D Axisymmetric (одномерное аксиально-симметричное),
- 0D (нульмерное).

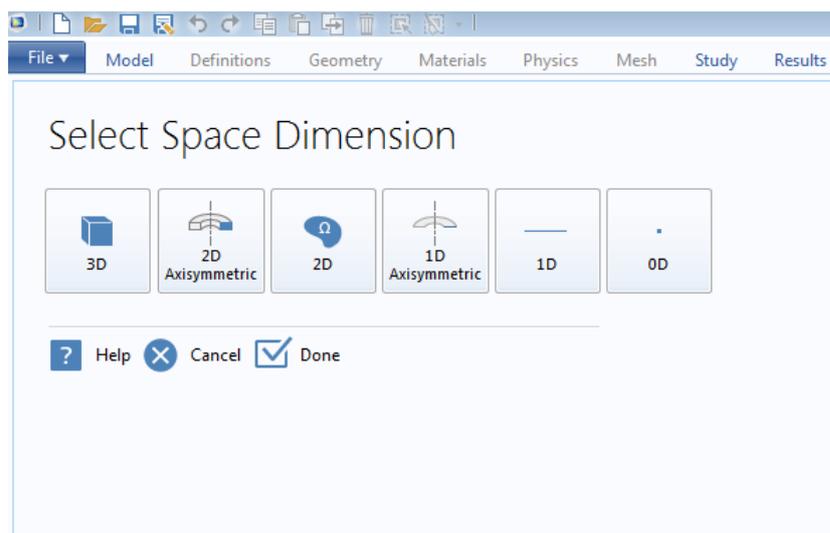


Рис. 4.2. Задание размерности модели в COMSOL.

Заметим, что выбор аксиальной симметрии позволяет решить пространственную задачу или задачу, заданную на плоскости, при использовании меньшего числа координат (две и одна соответственно). Это допустимо для объектов, обладающих, соответственно, цилиндрической или радиальной симметрией.

Для решения задачи в постановке (4.1)-(4.3) выберем 3D-модель.

**Шаг 2.** После этого необходимо выбрать моделируемый процесс. COM-SOL решает широкий спектр задач из самых различных предметных областей. В терминологии разработчиков этого программного продукта данный этап моделирования определен как «выбор физики», рисунок 4.3.

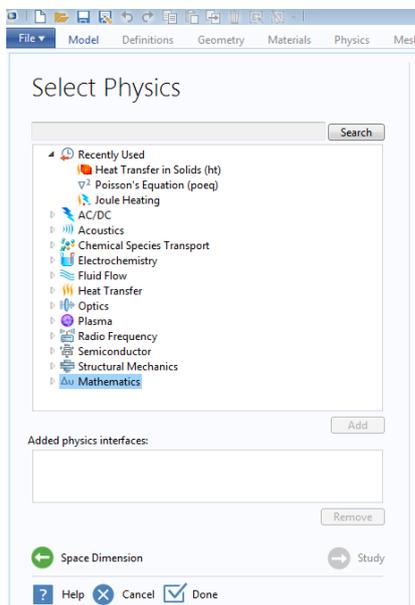


Рис. 4.3. Выбор «физики» задачи в COMSOL.

При расширении функциональных возможностей текущей версии COM-SOL (при обновлении лицензии) дополнительные «физики» будут доступны в соответствующих разделах приложения.

Для решения задачи в постановке (4.1)-(4.3) можно выбрать специализированный тип задач – Теплопроводность (Heat Transfer) или просто раздел Математика (Mathematics) и далее Классические уравнения с частными производными (Classical PDEs) и уравнение Лапласа (Laplace Equation), как показано на рисунке 4.4.

Выберем специализированный модуль решения задач теплопроводности и далее Теплопроводность в твердых телах (HeatTransferInSolids), рисунок 4.5.

Активация кнопки Добавить (Add) отображает выбранную «физику» процесса в дополнительном окне. Справа можно видеть основную величину, которая будет подлежать определению в результате процесса моделирования, в нашем случае – это температура  $T$ .

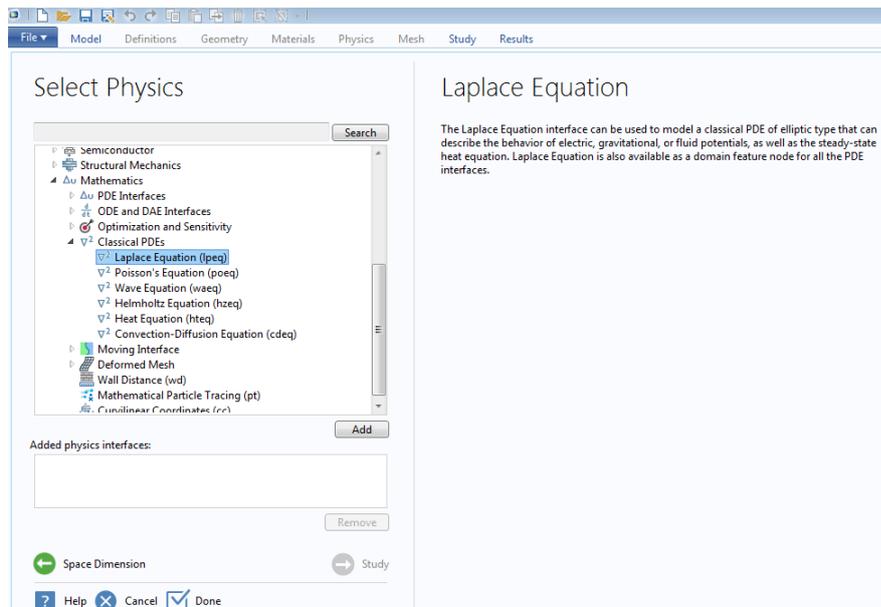


Рис. 4.4. Выбор типа уравнения в COMSOL.

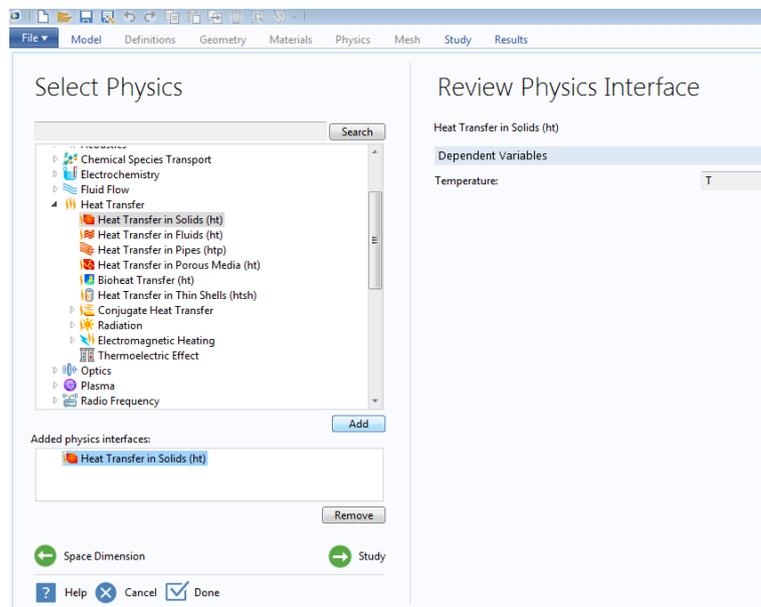


Рис. 4.5. Выбор модуля решения задач теплопроводности в COMSOL.

**Шаг 3.** Далее необходимо выбрать режим реализации модели: Стационарный (Stationary) или Нестационарный (Time Dependent), соответствующий одному или нескольким решателям, которые будут использоваться при вычислениях.

После чего, активация кнопки Готово (Done) приводит к созданию модели и началу работы с главным окном интерфейса программы. На рабочем столе появится дерево модели с учетом тех настроек, которые были заданы в Мастере создания моделей.

Выберем стационарный режим и перейдем в окно Рабочего стола (Desktop) для работы с моделью, рисунок 4.6.

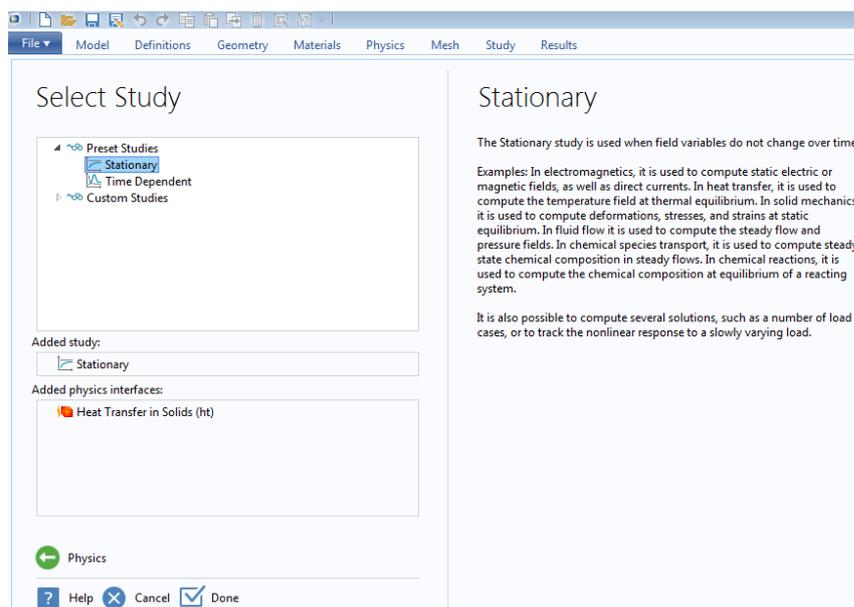


Рис. 4.6. Работа с моделью в COMSOL.

**Шаг 4.** Работа с COMSOL Desktop. Задание Параметров, переменных модели. Инициализация материала.

Вкладки верхней панели инструментов COMSOL Desktop отражают процесс моделирования и функциональность, доступную на каждом этапе, включая создание приложений на базе собственных моделей.

На вкладке Главная (Home) расположены кнопки самых часто используемых операций для изменения моделей, запуска моделирования, а также построения и тестирования приложений. Среди этих операций – изменение параметров модели для параметризованной геометрии, анализ свойств и физики материалов, построение сетки, проведение исследования и визуализация результатов моделирования.

У всех основных этапов процесса моделирования есть стандартные вкладки. Они упорядочены слева направо с учетом порядка действий: Определения (Definitions), Геометрия (Geometry), Материалы (Materials), Физики (Physics), Сетка (Mesh), Исследование (Study) и Результаты (Results).

Лента предоставляет быстрый доступ к командам и дополняет дерево модели в окне **Построитель моделей** (Model Builder). Большинство возможностей ленты также доступны из контекстных меню по правому щелчку мышью в узлах дерева модели. Однако некоторые операции, например, выбор окна COMSOL Desktop, доступны только в ленте.

Построитель моделей – это инструмент для задания параметров модели и ее компонентов: алгоритма решения, анализа результатов и отчетов. Для этого строится дерево модели. Построение модели начинается со стандартного дерева модели, в которое можно добавлять узлы и менять их настройки.

Все узлы в дереве модели по умолчанию являются родительскими узлами верхнего уровня. Для добавления и просмотра списка добавленных дочерних узлов, или подузлов, щелкните правой кнопкой мыши соответствующий узел. Именно таким образом узлы добавляются в дерево. При щелчке по дочернему узлу открываются его настройки в окне **Настройки** (Settings). Именно здесь можно изменить настройки узла.

Если открыто окно **Справка** (Help) (с помощью пункта Справка в меню **Файл** (File) или клавиши F1), пользователь может получить динамическую справку (только на английском языке), щелкнув какой-либо узел, рисунок 4.7.

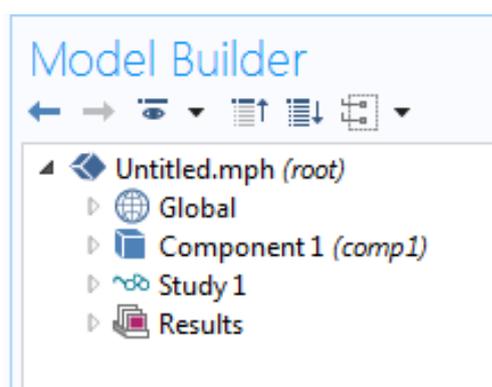


Рис. 4.7. Справка.

У дерева модели всегда есть корневой узел (изначально называется Untitled.mph), а также узлы **Глобальные определения** (Global Definitions) и **Результаты** (Results). Имя корневого узла – это имя файла мультифизической мо-

дели, или MRN-файла, в котором хранится эта модель. При сохранении файла с пользовательским именем изменится имя и корневого узла. В настройках корневого узла указаны имя автора, система единиц измерения по умолчанию и другие параметры.

По умолчанию в узле **Глобальные определения** (Global Definitions) есть подузел **Материалы** (Materials).

Узел **Глобальные определения** служит для задания параметров, переменных, функций и связей, которые могут использоваться в дереве модели. Их можно применять, например, для определения значений и функциональных зависимостей свойств материалов, сил, геометрии и других элементов. Сам по себе узел **Глобальные определения** не имеет настроек, но их много у его дочерних узлов. В узле **Материалы** хранятся свойства материалов, на которые можно ссылаться в узлах **Компонент** (Component) модели. Для реализации нашей модели выберем материал – алюминий в твердотельном состоянии.

Узел **Результаты** (Results) содержит решение, полученное после моделирования, а также инструменты для обработки данных. Изначально узел **Результаты** состоит из пяти подузлов, представленных на рисунке 4.8:

- **Наборы данных** (Data Sets) содержат список доступных пользователю решений.
- **Производные значения** (Derived Values) можно получить на основе решения, используя инструменты постобработки.
- **Таблицы** (Tables) удобны для отображения производных значений или результатов работы датчиков, которые в реальном времени отслеживают ход решения при моделировании.
- **Функция экспорта** (Export) позволяет выбирать числовые данные, изображения и анимацию для экспорта в файлы.
- Автоматически созданные или пользовательские **Отчеты** (Reports) о модели в формате HTML или Microsoft® Word®.

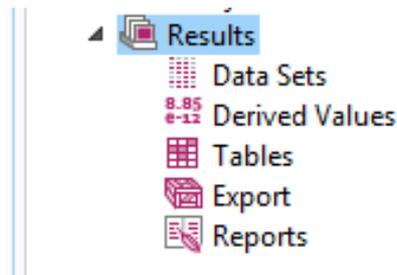


Рис. 4.8. Результаты.

Другими узлами верхнего уровня являются Компонент (**Component**) и **Исследование** (Study). Обычно их создает **Мастер создания моделей** при добавлении новой модели. После того, как в **Мастере создания моделей** выбран тип моделируемой физики и режим процесса (например, стационарное, зависящее от времени, частотный интервал или анализ собственной частоты), он автоматически создает по одному узлу каждого типа и отображает их содержимое.

При разработке модели можно добавить дополнительные узлы **Компонент** и **Исследование**. Так как в модели может быть несколько узлов **Компонент** и **Исследование**, у них должны быть разные имена. Поэтому эти типы узлов следует переименовать с учетом их индивидуального назначения. Узел **Исследование**(Study) может выполнять различные типы вычислений, поэтому у каждого такого узла есть своя кнопка **Вычислить**(Compute).

Параметры – это пользовательские скалярные константы, которые доступны во всех элементах модели. Другими словами, они «глобальные» по своей сути. Типичные варианты применения: параметризация геометрических размерностей; задание размеров элементов сетки; задание параметрического исследования (т. е. моделирования, которое повторяется для большого числа значений какого-либо параметра, например, частоты или нагрузки).

Выражение параметра может содержать числа, параметры, встроенные константы, встроенные функции с параметрами в качестве аргументов, а также унарные и бинарные операторы. Так как эти выражения оцениваются до запуска моделирования, параметры не могут зависеть от переменной времени  $t$ , а

также от пространственных координат  $x$ ,  $y$ ,  $z$  и других переменных, относительно которых решаются уравнения в модели. Важно помнить, что имена параметров чувствительны к регистру. Параметры задаются в дереве модели в узле **Глобальные определения**(Global Definitions).

Для демонстрации введем параметр нашей модели – линейный размер объекта  $L$ , в соответствии с рисунком 4.9.

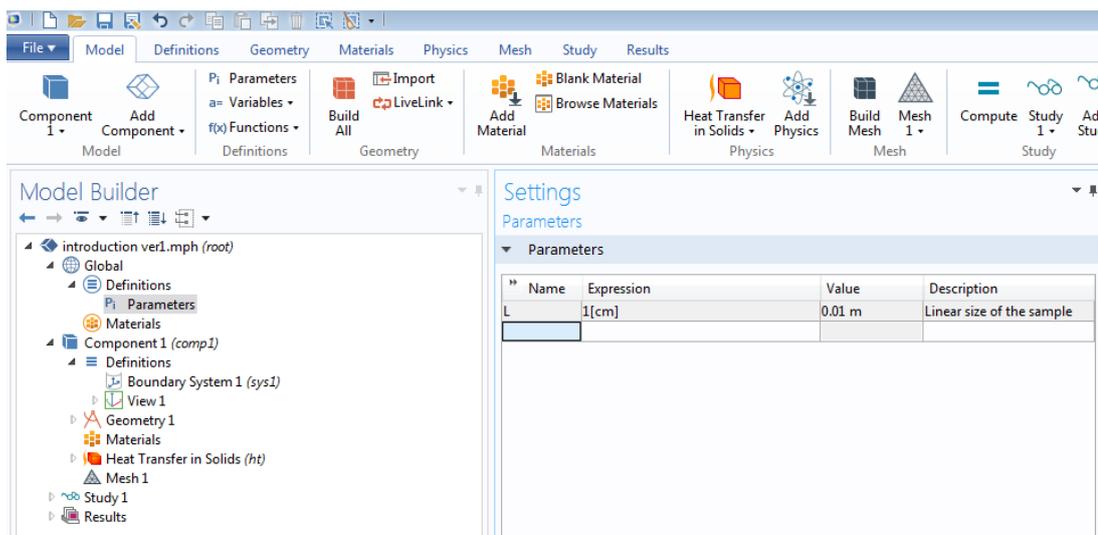


Рис. 4.9. Ввод параметров модели.

Переменные задаются либо в узле **Глобальные определения** (Global Definitions), либо в подузле **Определения** (Definitions) узла **Компонент** (Component). Как правило, выбор места для объявления переменной зависит от того, должна ли переменная быть глобальной (доступной во всех элементах дерева модели) или локальной (доступной только в одном узле **Компонент** (Component)). Как и выражение параметра, выражение переменной может содержать числа, параметры, встроенные константы, а также унарные и бинарные операторы. Однако в нем уже могут быть такие переменные, как  $t$ ,  $x$ ,  $y$  или  $z$ , функции с выражениями для переменной в качестве аргумента, а также переменные, относительно которых решается уравнение, и их временные и пространственные производные.

В COMSOL Multiphysics встроено множество констант, переменных и функций. Их имена зарезервированы и поэтому недоступны для переопределения. При попытке присвоить пользовательской переменной, параметру или функции зарезервированное имя система выделит введенный текст оранжевым (предупреждение) или красным (ошибка) цветом, а при выборе этой текстовой строки отобразит всплывающую подсказку.

Типичные варианты применения:

– Математические константы, такие как  $\pi$  (3,14...) и мнимая единица  $i$  или  $j$ .

– Физические константы, такие как  $g\_const$  (ускорение свободного падения),  $c\_const$  (скорость света) и  $R\_const$  (универсальная газовая постоянная).

– Переменная времени  $t$ .

– Производные первого и второго порядков от искомым переменных (решения), имена которых происходят от имен пространственных координат и других искомым переменных, заданных пользователем.

– Математические функции, такие как  $\cos$ ,  $\sin$ ,  $\exp$ ,  $\log$ ,  $\log10$  и  $\sqrt{\phantom{x}}$ .

**Шаг 4.** Задание геометрии.

Зададим простейшую геометрию для нашей модельной задачи. Объект – куб с длиной стороны  $L$ , рисунок 4.10. Выберем объект Block на панели инструментов и введем его линейный размер  $L$ . Задание **Позиции** (Position) позволяет определить координатное представление объекта. Поупражняйтесь в использовании функциональных клавиш на панели инструментов **Графики** (Graphics) для выделения областей, подгонки рабочей области, вращения и выделения фигуры.

**Шаг 5.** Задание уравнения и граничных условий.

В **Построителе моделей** (Model Builder) перейдем к заданию уравнения и граничных условий. Процесс стационарной теплопроводности в нотации COMSOL описывается уравнением, которое приведено в соответствующем разделе Heat Transfer in Solids 1:

$$\rho c \mathbf{u} \nabla T = \nabla(k_T \nabla T) + Q,$$

где  $\mathbf{u}$  – скорость конвективного переноса, м/с;  $\rho$  – плотность, кг/м<sup>3</sup>;  $c$  – удельная теплоёмкость, Дж/(кг·К);  $k_T$  – коэффициент теплопроводности, Вт/(м·К);  $Q$  – объемная плотность мощности теплового источника, Вт/м<sup>3</sup>.

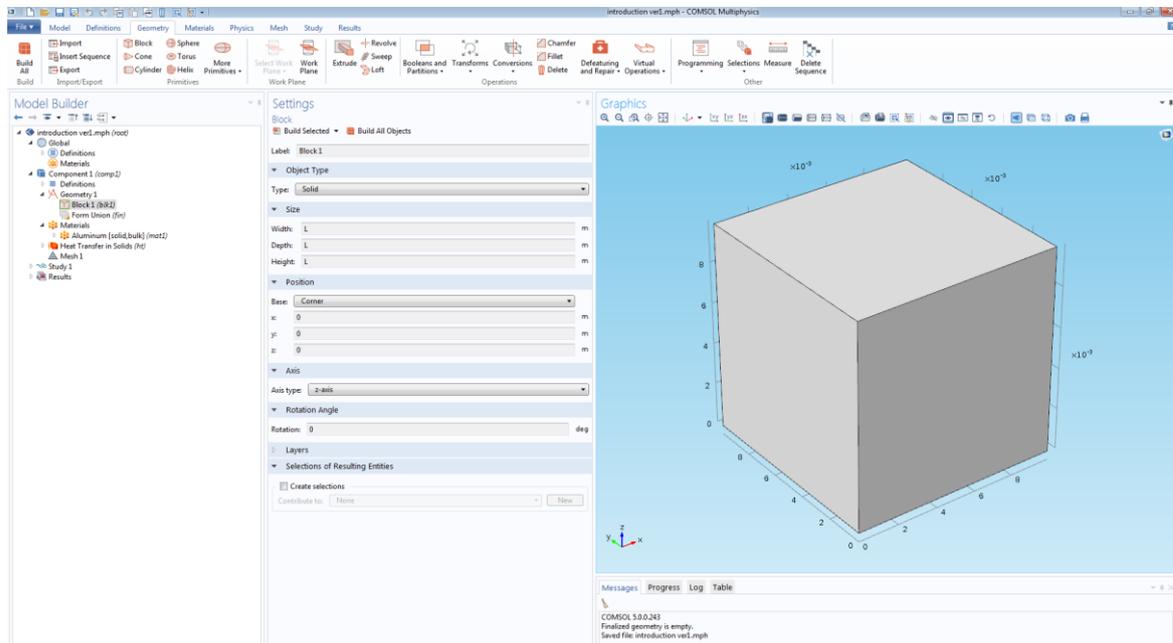


Рис. 4.10. Задание геометрии.

В разделе **Выбор области** (Domain Selection) указано, для какой именно области задано уравнение. При активации мышью область задания уравнения подсвечивается другим цветом.

Параметры: плотность, удельная теплоёмкость, коэффициент теплопроводности определяются автоматически в модели в момент выбора материала. Очевидно, при решении задачи в общем виде для неопределенного из библиотеки материала требуется задание этих параметров, рисунок 4.11. По умолчанию конвективный перенос будет отсутствовать  $\mathbf{u}=0$  и внутренний источник – тоже  $Q=0$ .

Если потребуется задать функцию источника, то на панели инструментов в разделе **Области** (Domains) необходимо выбрать **Тепловой источник** (Heat Source), представлено на рисунке 4.12.

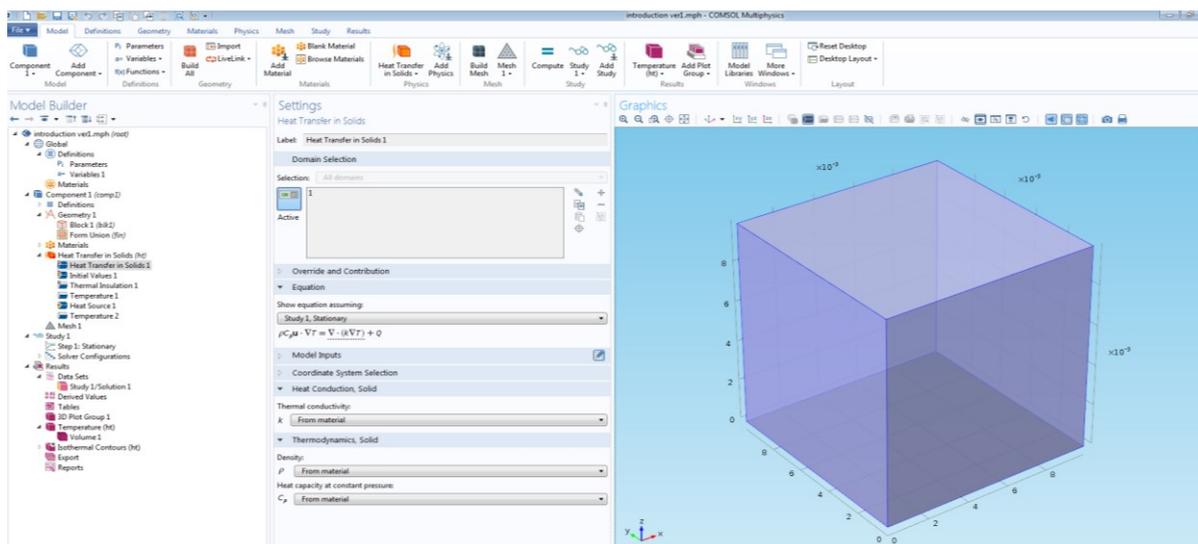


Рис. 4.11. Ввод параметров.

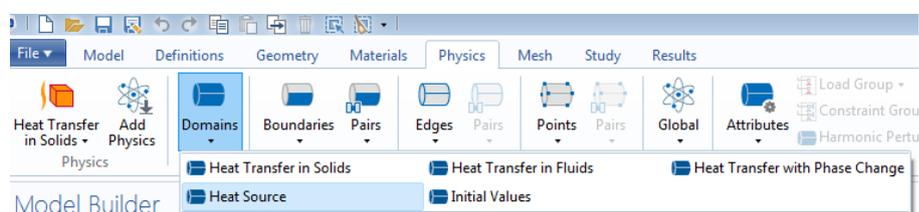


Рис. 4.12. Раздел Область.

В данном случае по умолчанию стоит нулевое значение. При функциональном задании источника COMSOL потребует согласовать все параметры моделирования, как показано на рисунке 4.13.

Аналогично при необходимости введения конвективного переноса и для задания скорости  $\mathbf{u}$  требуется добавить **Теплопроводность в потоковых средах** (Heat Transfer in Fluids).

Задание начальной температуры для стационарной задачи имеет больше вычислительный смысл и связано с вычислительными процедурами, лежащими в основе расчета. В нашем случае можно оставить значение по умолчанию, либо задать некоторую эмпирическую величину, например, комнатную температуру 303 К, рисунок 4.14.

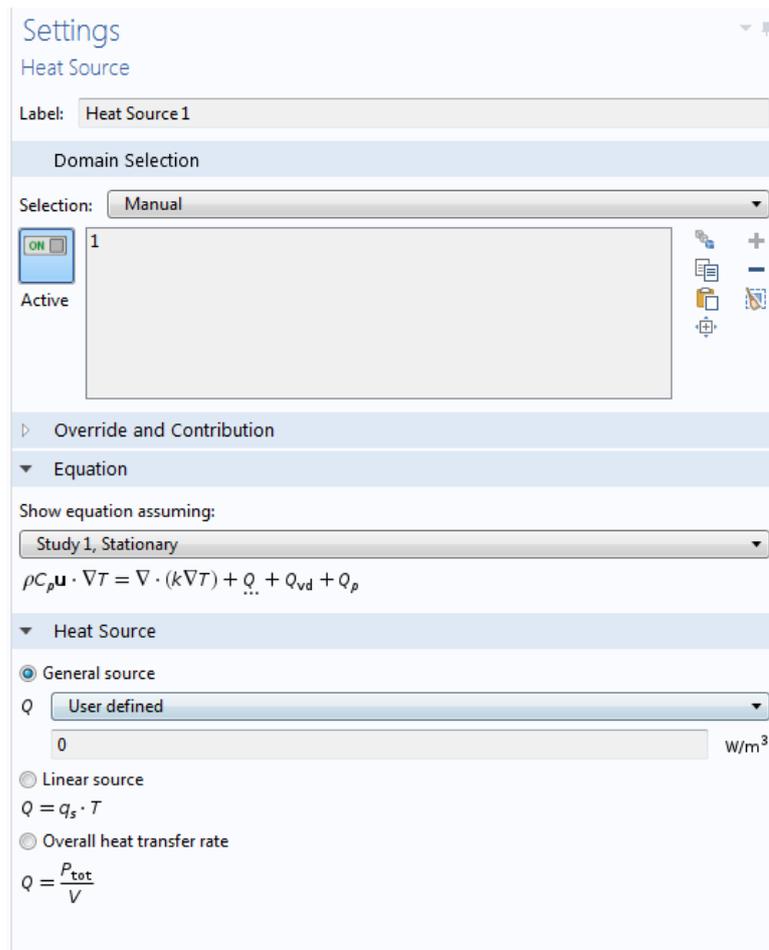


Рис. 4.13. Ввод параметров моделирования.

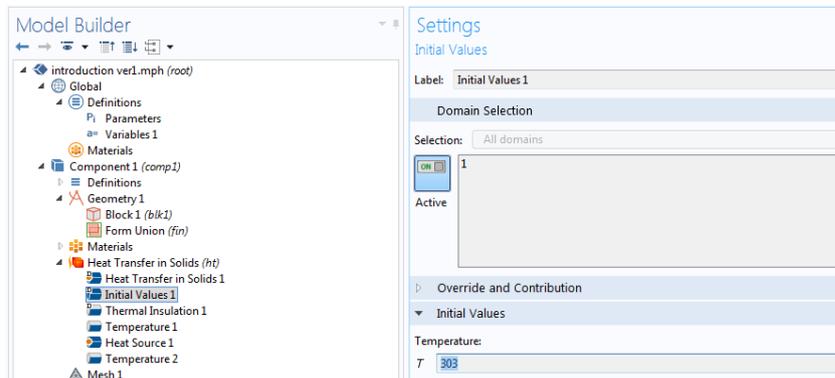


Рис. 4.14. Задание температуры.

Далее зададим граничные условия. По умолчанию на всех введенных границ (для обеспечения математической замкнутости) будет выставлен нулевой тепловой поток. Этот тип границ задан как **Температурная изоляция** (Thermal Insulation 1). Поскольку мы решаем смешанную краевую задачу, переопределим условия на боковых гранях куба в соответствии с постановкой

краевой задачи. Для этого на панели инструментов в разделе **Границы** (Boundaries) выберем **Температура** (Temperature), что будет означать задание граничных условий I рода (или условий Дирихле) на выбранных границах расчетной области. Для одной пары противоположной грани установим значение 500 К, а для другой – 350 К. Таким образом, у нас будет три пункта, отвечающих за граничные условия: Temperature 1, Temperature 2, Thermal Insulation 1. Области, для которых задаются краевые условия, также при активации подсвечиваются другим цветом, как представлено на рисунке 4.15.

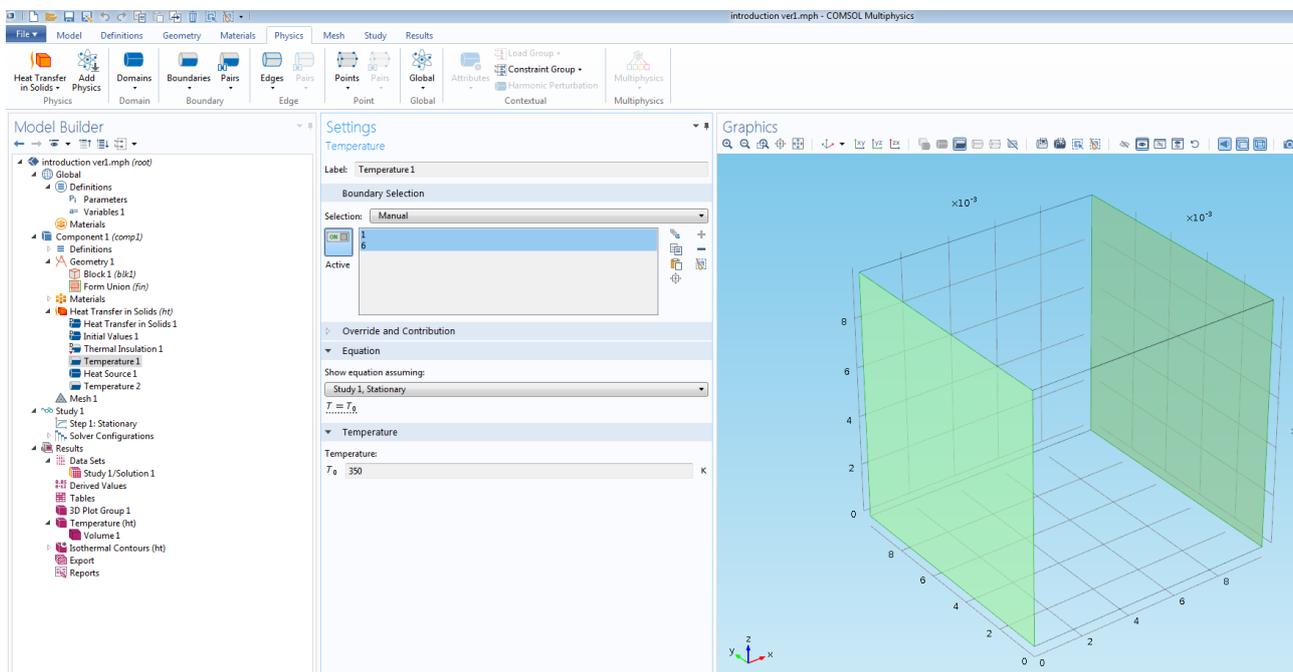


Рис. 4.15. Задание краевых условий.

**Шаг 6.** Этап построения сетки не требует от пользователя существенных трудозатрат. Для первого опыта с системой COMSOL установим значения по умолчанию. Среда проведет триангуляцию расчетной области и разобьет куб на конечные элементы – тетраэдры, рисунок 4.16.

**Шаг 7.** Активация кнопки **Вычисление** (Compute) в блоке **Исследование** (Study) запустит процесс моделирования задачи методом конечных элементов. Панель, расположенная ниже графической области вывода результатов, отображает этапы вычисления и объем в процентном содержании, рисунок 4.17.

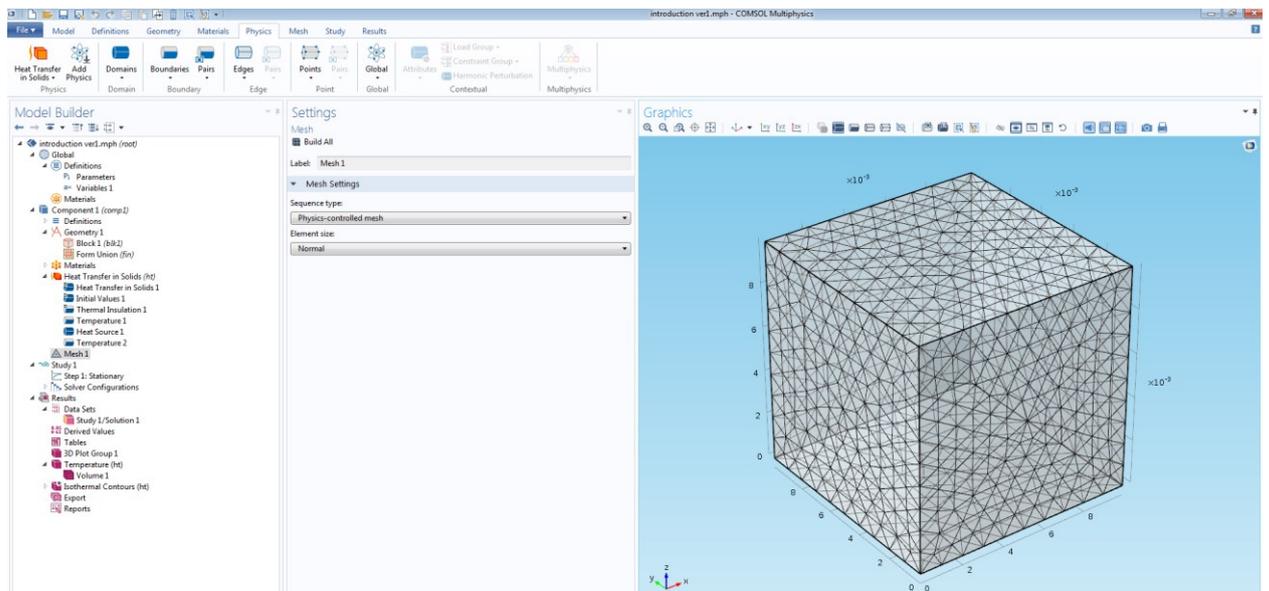


Рис. 4.16. Триангуляция расчетной области.

Для вариации режимов графического представления данных необходимо использовать возможности раздела **Результаты** (Results) и одноименную панель инструментов в верхней части окна Desktop.

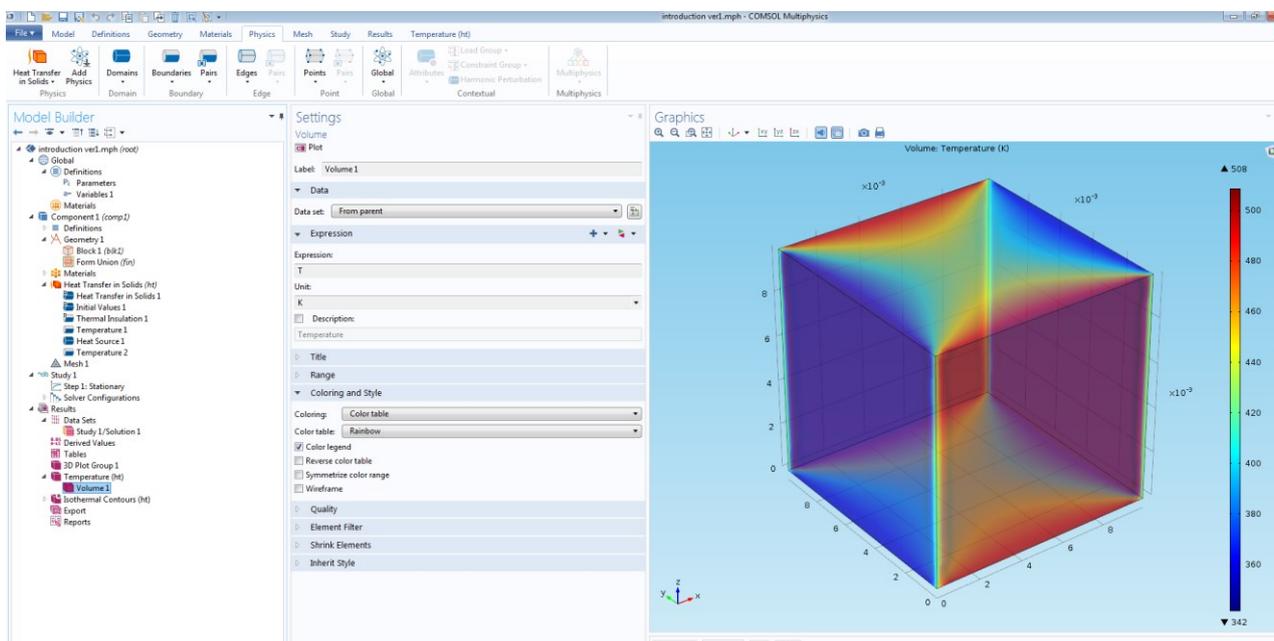


Рис. 4.17. Результаты вычислений.

Проведите самостоятельно вычислительные эксперименты и представьте результат в различных вариантах.

### **Контрольные вопросы**

1. Назовите основные шаги создания модели в среде Comsol Multiphysics.
2. Объясните особенности импорта объектов, для которых требуется провести моделирование, в среду Comsol Multiphysics.
3. Какие граничные условия предложит Comsol Multiphysics по умолчанию?
4. В чем заключается специфика решения нестационарных задач в Comsol Multiphysics? Как задать и записать анимированное представление решения?
5. Почему пакет Comsol Multiphysics называют средой мультифизического моделирования?

### **Индивидуальные задания**

1. Реализуйте в среде COMSOL Multiphysics модель нестационарного распределения температуры

$$\frac{\partial T(x, y, z, t)}{\partial t} = a^2 \Delta T(x, y, z, t) + \frac{f}{c\rho},$$

где  $a^2 = \frac{k_T}{c\rho}$  – коэффициент температуропроводности материала,  $\text{м}^2/\text{с}$ ;  $c$  – удельная теплоемкость материала,  $\text{Дж}/(\text{кг}\cdot\text{К})$ ;  $\rho$  – плотность,  $\text{кг}/\text{м}^3$ ;  $k_T$  – коэффициент теплопроводности,  $\text{Вт}/(\text{К}\cdot\text{м})$ ;  $f$  – объемная плотность мощности теплового источника,  $\text{Вт}/\text{м}^3$ ; с начальным условием:  $T(x, y, z, t_0) = T_0$  для области – параллелепипеда с линейными размерами  $L, H, W$ . Внутренний источник действует в объекте в области, ограниченной половиной сферы радиуса  $R$ , рисунок 4.18.

2. Варьировать графику расчетной области – исказить параллелепипед, вырезав из него объект с эмпирически установленными размерами (куб, шар и т.п.). Повторить моделирование. Представить данные моделирования распределения температуры в объеме объекта, на его поверхности, в «срезах» по объему, а также в сечении координатными плоскостями в последний момент времени наблюдения.

3. Провести вычислительные эксперименты. «Отрегулировать» временной диапазон наблюдения процесса. Оценить время Фурье и временной промежуток динамической зоны.

4. Построить анимацию нестационарного процесса теплопроводности. Вывести характерные графики в зависимости от времени.

5. Оформить отчет по работе.

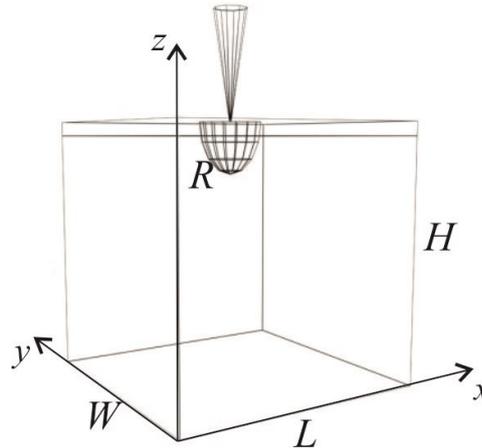


Рис. 4.18. Объект моделирования.

### Вариант 1

Материал – нихром. Параметры для моделирования приведены в таблице:

Параметр	Ед. измерения	Значение
объемная плотность мощности теплового источника, $f$	Вт/м <sup>3</sup>	$f(x, y, z)$
линейные размеры области	м	$H=0.02; L=0.04; W=0.04$
радиус окружности, $R$	м	$R=0.002$
начальное значение температуры	К	300
время наблюдения процесса, $\Delta t$	с	10
краевое условие на границах $x=0, x=L$	Поддерживается постоянная температура 300 К	
краевое условие на границах	Поддерживается постоянная температура 420 К	

Параметр	Ед. измерения	Значение
$y=0, y=W$		
краевое условие на границах $z=0, z=H$		Граница теплоизолирована

$$f(x, y, z) = 5 \cdot 10^7 \exp \left( \frac{\sqrt{\left(x - \frac{L}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{W}{2}\right)^2 + (z - H)^2}}{0.25} \right)$$

### Вариант 2

Материал – никелевый сплав. Параметры для моделирования приведены в таблице:

Параметр	Ед. измерения	Значение
объемная плотность мощности теплового источника, $f$	Вт/м <sup>3</sup>	$f(x, y, z) = 2 \cdot 10^8 \frac{xyz}{LHW}$
линейные размеры области	м	$H=0.25; L=0.5; W=0.5$
радиус окружности, $R$	м	$R=0.005$
начальное значение температуры	К	303
время наблюдения процесса, $\Delta t$	с	15
краевое условие на границах $x=0, x=L$		Задан поток тепла: $k_T \text{ grad } T = 200$
краевое условие на границах $y=0, y=W$		Поддерживается постоянная температура 330 К
краевое условие на границах $z=0, z=H$		Граница теплоизолирована

### Вариант 3

Материал – медный сплав. Параметры для моделирования приведены в таблице:

Параметр	Ед. измерения	Значение
объемная плотность мощности теплового источника, $f$	Вт/м <sup>3</sup>	$f(x, y, z) = \frac{5}{2} 10^{11} \frac{y}{W} \frac{z}{H} \sin\left(\frac{x}{L}\right)$
линейные размеры области	м	$H=0.01; L=0.01; W=0.02$
радиус окружности, $R$	м	$R=0.002$
начальное значение температуры	К	312
время наблюдения процесса, $\Delta t$	с	10
краевое условие на границах $x=0, x=L$	Граница теплоизолирована	
краевое условие на границах $y=0, y=W, z=0$	Поддерживается постоянная температура 400 К	
краевое условие на границах $z=H$	Задан поток тепла: $k_T \text{ grad} T = 150$	

#### Вариант 4

Материал – константан. Параметры для моделирования приведены в таблице:

Параметр	Ед. измерения	Значение
объемная плотность мощности теплового источника, $f$	Вт/м <sup>3</sup>	$f(x) = 4,5 \cdot 10^7 \frac{x^2}{L^2}$
линейные размеры области	м	$H=0,01; L=0,01; W=0,02$
радиус окружности, $R$	м	$R=0,001$
начальное значение температуры	К	312
время наблюдения процесса, $\Delta t$	с	10
краевое условие на границах $x=0, x=L, z=H$	Граница теплоизолирована	
краевое условие на границах $y=0, y=W$	Поддерживается постоянная температура 600 К	

Параметр	Ед. измерения	Значение
краевое условие на границах $z=0$		Задан поток тепла: $k_T \text{ grad } T = -20$

### Вариант 5

Материал – бронза. Параметры для моделирования приведены в таблице:

Параметр	Ед. измерения	Значение
объемная плотность мощности теплового источника, $f$	Вт/м <sup>3</sup>	$f(x, y, z) = 10^{11} \frac{x^2}{L^2} \cdot \frac{y^2}{W^2} \cdot \frac{z^2}{H^2}$
линейные размеры области	м	$H=0.02; L=0.02; W=0.02$
радиус окружности, $R$	м	$R=0,004$
начальное значение температуры	К	312
время наблюдения процесса, $\Delta t$	с	10
краевое условие на границах $x=0, x=L, z=H$		Задан поток тепла: $k_T \text{ grad } T = -4$
краевое условие на границах $y=0, y=W$		Поддерживается постоянная температура 440 К
краевое условие на границах $z=0$		Граница теплоизолирована

### Вариант 6

Материал – оксид кремния. Параметры для моделирования приведены в таблице:

Параметр	Ед. измерения	Значение
объемная плотность мощности теплового источника, $f$	Вт/м <sup>3</sup>	$f(x, y, z)$
линейные размеры области	м	$H=0.2; L=0.4; W=0.4$
радиус окружности, $R$	м	$R=0.02$
начальное значение температуры	К	340

Параметр	Ед. измерения	Значение
время наблюдения процесса, $\Delta t$	с	10
краевое условие на границах $x=0, x=L$	Поддерживается постоянная температура 600 К	
краевое условие на границах $y=0, y=W$	Поддерживается постоянная температура 400 К	
краевое условие на границах $z=0, z=H$	Граница теплоизолирована	

$$f(x, y, z) = 1,2 \cdot 10^4 \exp \left( -\frac{\sqrt{\left(x - \frac{L}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{W}{2}\right)^2 + (z - H)^2}}{0.09} \right)$$

### Вариант 7

Материал – железо. Параметры для моделирования приведены в таблице:

Параметр	Ед. измерения	Значение
объемная плотность мощности теплового источника, $f$	Вт/м <sup>3</sup>	$f(x, y, z) = 3 \cdot 10^9 \frac{xyz}{LHW}$
линейные размеры области	м	$H=0.25, L=0.5, W=0.5$
радиус окружности, $R$	м	$R=0.01$
начальное значение температуры	К	300
время наблюдения процесса, $\Delta t$	с	15
краевое условие на границах $x=0, x=L, z=H$	Граница теплоизолирована	
краевое условие на границах $y=0, y=W$	Поддерживается постоянная температура 422 К	
краевое условие на границах $z=0$	Задан поток тепла: $k_T \text{ grad} T = -10$	

## Вариант 8

Материал – тефлон. Параметры для моделирования приведены в таблице:

Параметр	Ед. измерения	Значение
объемная плотность мощности теплового источника, $f$	Вт/м <sup>3</sup>	$f(y) = 2 \cdot 10^7 \cos\left(\frac{y}{W}\right)$
линейные размеры области	м	$H=0.03, L=0.03, W=0.06$
радиус окружности, $R$	м	$R=0.0015$
начальное значение температуры	К	310
время наблюдения процесса, $\Delta t$	с	10
краевое условие на границах $x=0, x=L, z=H$	Граница теплоизолирована	
краевое условие на границах $y=0, y=W$	Поддерживается постоянная температура 350 К	
краевое условие на границах $z=0$	Задан поток тепла: $k_T \text{ grad} T = 50$	

## Вариант 9

Материал – никель. Параметры для моделирования приведены в таблице:

Параметр	Ед. измерения	Значение
объемная плотность мощности теплового источника, $f$	Вт/м <sup>3</sup>	$f(y) = 5 \cdot 10^7 \frac{y^3}{W^3}$
линейные размеры области	м	$H=0.1; L=0.1; W=0.2$
радиус окружности, $R$	м	$R=0.005$
начальное значение температуры	К	304
время наблюдения процесса, $\Delta t$	с	15
краевое условие на границах $x=0, x=L, z=H$	Граница теплоизолирована	

Параметр	Ед. измерения	Значение
краевое условие на границах $y=0, y=W$		Поддерживается постоянная температура 299 К
краевое условие на границах $z=0$		Задан поток тепла: $k_T \text{ grad} T = 100$

### Вариант 10

Материал – медь. Параметры для моделирования приведены в таблице:

Параметр	Ед. измерения	Значение
объемная плотность мощности теплового источника, $f$	Вт/м <sup>3</sup>	$f(x, y, z) = 10^8 \frac{x^2}{L^2} \frac{y^2}{W^2} \frac{z^2}{H^2}$
линейные размеры области	м	$H=0.025; L=0.025; W=0.05$
радиус окружности, $R$	м	$R=0.005$
начальное значение температуры	К	303
время наблюдения процесса, $\Delta t$	с	20
краевое условие на границах $x=0, x=L$		Задан поток тепла: $k_T \text{ grad} T = 10$
краевое условие на границах $y=0, y=W$		Поддерживается постоянная температура 520 К
краевое условие на границах $z=0, z=H$		Граница теплоизолирована

## БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Формалев В.Д., Ревизников Д.Л. Численные методы – М.: Физматлит, 2006. – 400 с.
2. Бахвалов С.В., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. – М.: Бином. Лаборатория знаний, 2011.– 640 с.
3. Демидович Б.П., Марон И.А. Основы вычислительной математики. – СПб.: Лань, 2007. – 664с.
4. Иглин С.П. Математические расчеты на базе Matlab. – СПб.: БХВ-Петербург, 2005.– 640 с.
5. Кетков Ю., Кетков А., Шульц М. MATLAB 7: программирование, численные методы. -СПб.: БХВ - Петербург, 2005. – 752 с.
6. Петров И.Б., Лобанов А.И. Лекции по вычислительной математике. – М.: Бином. Лаборатория знаний Интуит, 2010. – 523 с.
7. Красников Г.Е., Нагорнов О.В., Старостин Н.В. Моделирование физических процессов с использованием пакета Comsol Multiphysics – М.: Изд-во МИФИ, 2012. – 184 с.
8. Обзор версии 5.3A COMSOL Multiphysics. Исследования и решатели COMSOL Multiphysics [Электронный ресурс]: <https://www.comsol.ru/release/5.3a/studies-and-solvers>

## СОДЕРЖАНИЕ

Введение	3
1 Решение обыкновенных дифференциальных уравнений методом конечных элементов	4
1.1 Метод конечных элементов	5
1.1.1 Основы метода конечных элементов	6
1.1.2 Системы базисных функций	7
1.1.3 Весовые функции	8
1.1.4 Конечно-элементный метод Галеркина решения краевых задач для ОДУ	9
1.2 Схема решения граничных задач с помощью встроенных функций ППП Matlab	14
2 Метод конечных элементов для стационарных задач математической физики	21
2.1 Основные этапы решения двумерных стационарных задач математической физики с помощью МКЭ на основе метода Галеркина	22
2.2 Принципы разбиения плоских областей на конечные элементы	24
2.3 Аппроксимация линейными многочленами и базисные функции	25
2.4 Слабая формулировка конечно-элементного метода Галеркина	27
2.5 Ансамблирование элементов и построение глобальной СЛАУ	30
3 Решение дифференциальных уравнений в частных производных с использованием среды PDETOOL Matlab	32
3.1 Реализация модели процесса стационарной теплопроводности в PDE Tool Matlab	32
3.2 Моделирование нестационарных процессов с использованием PDETOOL Matlab	39
4 Основные приемы работы в среде конечно-элементного моделирования COMSOL Multiphysics	43

4.1 Введение в COMSOL Multiphysics	43
4.2 Реализация модели с помощью мастера создания моделей	45
Библиографический список	68

**Любовь Игоревна Мороз,**  
*старший преподаватель кафедры математического анализа  
и моделирования АмГУ*

**Анна Геннадьевна Масловская,**  
*профессор кафедры математического анализа и моделирования АмГУ,  
д-р физ.-мат. наук, доцент*

**Решение дифференциальных задач методом конечных элементов. Учебное  
пособие.**

---

Заказ 118.